《线性代数》考研基础练习题

第一章 行列式

一．填空题

1、3421 的逆序数为 ________；

2、517924 的逆序数为________；

3、设有行列式 $D=\begin{vmatrix}2&5&-1&3&0\\1&-1&2&0&4\\6&5&-4&3&2\\1&0&0&7&8\\-1&1&1&3&2\end{vmatrix}=\Delta(a_{ij})$，含因子 $a_{12}a_{31}a_{45}$ 的项为________；

4、若 n 阶行列式 $D_n=\Delta(a_{ij})=a$, 则 $D=\Delta(-a_{ij})=$________；

5、设 $f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-2&x\\1&4&4&x^2\\1&8&-8&x^3\end{vmatrix}$，则 $f(x)=0$ 的根为________；

6、设 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，则行列式 $\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_3&x_1&x_2\\x_2&x_3&x_1\end{vmatrix}=$ ________；

7、设有行列式 $\begin{vmatrix}x&2&3\\-1&x&0\\0&x&1\end{vmatrix}$=0，则 x =________；

8、设 $f(x)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&x\\a_{21}&a_{22}&x&a_{24}\\a_{31}&x&a_{33}&a_{34}\\x&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$，则多项式 $f(x)$ 中 x^3 的系数为________；

9、如果 $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\6&5&4&3\\0&0&2&x\\0&0&3&3\end{vmatrix}$=0，则 x =________；

10、$\begin{vmatrix}0&0&0&a\\b&0&0&0\\0&c&0&0\\0&0&d&0\end{vmatrix}$=________；

11、如果 $\begin{vmatrix}a&3&1\\b&0&1\\c&2&1\end{vmatrix}$=1，则 $\begin{vmatrix}a-3&b-3&c-3\\5&2&4\\1&1&1\end{vmatrix}$=________；

12、如 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$=2，则 $\begin{vmatrix}2a_{11}&2a_{12}&2a_{12}-2a_{13}\\2a_{21}&2a_{22}&2a_{22}-2a_{23}\\2a_{31}&2a_{32}&2a_{32}-2a_{33}\end{vmatrix}$=________，

$\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{21}-3a_{11} & a_{21}-a_{31} \\ 2a_{12} & a_{22}-3a_{12} & a_{22}-a_{32} \\ 2a_{13} & a_{23}-3a_{13} & a_{23}-a_{33} \end{vmatrix}$=________，$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & 1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 3 \end{vmatrix}$=__________；

13、设n阶行列式$D=a\neq 0$，且D中的每列的元素之和为b，则行列式D中的第二行的代数余子式之和等于____________；

14、如果$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$=1，则$\begin{vmatrix} 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{11} & a_{12} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$=_______________________，$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$=___________；

15、设有行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}$，则元素$-1$的余子式$M_{21}$=_________， 元素 2 的代数余子式$A_{12}$=_______；

16、设$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\Delta(a_{ij})$，$A_{ij}$表示元素$a_{ij}$的代数余子式，则$A_{14}+2A_{24}+3A_{34}+4A_{44}=$____；

17、设$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix}=\Delta(a_{ij})$，$A_{ij}$表示元素$a_{ij}$的代数余子式，则$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=$_____；

18、设$f(x)=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & x & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -x & 0 & 0 \\ 3 & 2 & x & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$，则$x^5$的系数为_________；

19、设 $D=\begin{vmatrix} & & & & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ & 0 & & & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{vmatrix}$，且 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}=a$，

$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=b$，则 $D=$_____________；

20、$D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=$________________

二．选择题

1、设多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ x & x & x & 3 \\ 1 & 0 & 2 & x \\ x & 1 & 3 & x \end{vmatrix}$，则多项式的次数为（　　　）

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

2、设 x,y 为实数且 $\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ -y & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=0$，则（　　　）

（A） $x=0,y=1$　　（B） $x=-1,y=1$　　（C） $x=1,y=-1$　　（D） $x=0,y=0$

3、设多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x & a_{14}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x & a_{24}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x & a_{34}+x \\ a_{41}+x & a_{42}+x & a_{43}+x & a_{44}+x \end{vmatrix}$，则多项式的次数最多为（　　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

4、$D_n=\begin{vmatrix} 0 & & -1 \\ & -1 & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ -1 & & 0 \end{vmatrix}$，当 $n=$（　　　）时，$D_n<0$.

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）7

5、α_j 为四阶行列式 D 的第 j 列，(j=1, 2, 3, 4,)，且 $D=-5$，则下列行列式中，等于 -10 的是 (　　).

(A) $|2\alpha_1,\ 2\alpha_2,\ 2\alpha_3,\ 2\alpha_4|$

(B) $|\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_4+\alpha_1|$

(C) $|\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4|$

(D) $|\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_4-\alpha_1|$

三．计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$，

(2) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \end{vmatrix}$，

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$，

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$，

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$，

(6) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{vmatrix}$，

(7) $\begin{vmatrix} ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$，

(8) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

四．计算下列 n 阶行列式

(1) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；

(2) $D_n = \Delta(|i-j|)$，（即 $a_{ij} = |i-j|$）；

(3) $D_n = (a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = \begin{cases} i & i = j \\ 2 & i \neq j \end{cases}$；

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix}$，其中未写出元素为零；

(5) $\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$，其中未写出元素为零.

五．证明

(1) 若行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 中每一个数 a_{ij} 分别乘以 $b^{i-j}(b>0)$，则所得行列式与 D 相等；

(2) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$；

(3) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}) \qquad (a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$