《线性代数》考研基础练习题

第二章　矩阵及其运算

一．填空题

1、已知$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ a \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ 6 \\ -b \end{pmatrix}$，则$a=$________；$b=$________.

2、设$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,则$A^{2010}-3A^2=$______________.

3、若A,B均为 3 阶方阵，且$|A|=2$，$B=-2E$，则$|AB|=$_________.

4、A为 3 阶方阵，且$|A|=-2$，$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$，则$\begin{vmatrix} A_3-2A_1 \\ 3A_2 \\ A_1 \end{vmatrix}=$_____.其中$A_1,A_2,A_3$分别为$A$ 的 1、2、3 行.

5、已知$\alpha=$（1，1，1)，则$|\alpha^T\alpha|=$_______.

6、设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$满足$A^2B-A-B=E$，则$|B|=$_________.

7、设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$A^*=$____________.

8、设矩阵$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -10 \\ 2 & 5 & a & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -a \end{pmatrix}$的秩为 2，则$a=$__________ .

9、设矩阵$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$，且$R(A)=3$，则$k=$_________ .

10、A为 5 阶方阵，且$R(A)=3$，则$R(A^*)=$_________ .

11、设A为非零方阵，当$A^T=A^*$时，则$R(A)=$________ .

12、矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵为________________.

13、设n阶可逆方阵A满足$2|A|=|kA|$，$k>0$，则 k= _________.

14、设n阶方阵A满足$|A|=2$，则$|A^TA|=$_________，$|A^{-1}|=$_________，$|A^*|=$_________，$|(A^*)^*|=$_________，$|(A^*)^{-1}+A|=$__________，$|A^{-1}(A^*+A^{-1})A|=$___________ .

15、A为n阶方阵，A^*为A的伴随阵，$|A|=\frac{1}{3}$，则$\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-15A^*\right|=$__________.

16、设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，$A^*$为$A$的伴随阵，则$\left(A^*\right)^{-1}=$________ .

17、设A^*,A^{-1}分别为n阶方阵A的伴随阵和逆阵，则$\left|A^*A^{-1}\right|=$________.

18、设$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&a&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$B$为三阶非零矩阵，且$AB=O$,则$a=$________.

19、线性方程组$\begin{cases}k_1x_1+k_1^2x_2+k_1^3x_3=k_1^4\\k_2x_1+k_2^2x_2+k_2^3x_3=k_2^4\\k_3x_1+k_3^2x_2+k_3^3x_3=k_3^4\end{cases}$，满足条件________________时有惟一解.

20、当$\lambda=$__________，线性方程组$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2+3x_3=0\\\lambda x_1+9x_2-4x_3=0\\4x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$有非零解.

二．选择题

1、设A、B均为n阶方阵，则下面结论正确的是（　　）

（A）若A或B可逆，则AB必可逆；　（B）若A或B不可逆，则AB必不可逆；

（C）若A、B均可逆，则$A+B$必可逆；　（D）若A、B均不可逆，则$A+B$必不可逆.

2、设A、B均为n阶方阵，且$A(B-E)=O$，则（　　）

（A）$A=O$或$B=E$；　（B）$|A|=0$或$|B-E|=0$；

（C）$|A|=0$或$|B|=1$；　（D）$A=BA$.

3、设A、B均为n阶非零矩阵，且$AB=O$，则A和B的秩（　　）

（A）必有一个为零；　（B）一个等于n，一个小于n；

（C）都等于n；　（D）都小于n.

4、设n阶方阵A经过初等变换后得方阵B，则（　　）

（A）$|A|=|B|$；　（B）$|A|\neq|B|$；　（C）$|A||B|>0$；　（D）若$|A|=0$,则$|B|=0$.

5、设A、B均为n阶方阵，$E+AB$可逆，则$E+BA$也可逆，且$(E+BA)^{-1}=$（　　）.

（A）$E+A^{-1}B^{-1}$；　（B）$E+B^{-1}A^{-1}$；　（C）$E-B(E+AB)^{-1}A$；　（D）$B(E+AB^{-1})A$.

6、设n阶方阵A,B,C满足$ABC=E$，则必有（　　）

（A）$ACB=E$；　（B）$BAC=E$；　（C）$CBA=E$；　（D）$BCA=E$.

7、设n阶方阵A,B,C均是可逆方阵，则$\left(ACB^T\right)^{-1}=$（　　）

（A）$\left(B^{-1}\right)^{-1}A^{-1}C^{-1}$；　（$B$）$A^{-1}C^{-1}\left(B^T\right)^{-1}$；　（$C$）$B^{-1}C^{-1}A^{-1}$；　（$D$）$\left(B^{-1}\right)^TC^{-1}A^{-1}$.

8、设$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，

若 A 可逆，则 $B^{-1}=$（　　）

（A）$A^{-1}P_1P_2$；　（B）$P_2A^{-1}P_1$；　（C）$P_1P_2A^{-1}$；　（D）$P_1A^{-1}P_2$.

9、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则（　　）

（A）$m>n$ 时必有 $|AB|=0$；　（B）$m<n$ 时必有 $|AB|=0$；

（C）$m>n$ 时必有 $|AB|\neq 0$；　（D）$m<n$ 时必有 $|AB|\neq 0$.

10、设 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，$A$ 的伴随矩阵的秩为 1，则（　　）.

（A）$a=b$ 或 $a+2b=0$；　（B）$a\neq b$ 且 $a+2b=0$；

（C）$a=b$ 或 $a+2b\neq 0$；　（D）$a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$.

三．计算及证明题

1．写出下列矩阵 $A=(a_{ij})$

（1）$a_{ij}=i-j$ 的 3×2 矩阵；　（2）$a_{ij}=ij$ 的的 4 阶方阵.

2．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$；$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$，求 $3AB-2A^T$ 及 $(AB)^T$.

3．计算下列矩阵的乘积

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$；　（4）$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$；　（6）$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

4．设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}$，求 A^k（k 为正整数).

5．设 $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$，求 A^k（k 为正整数).

6．设 $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求 A^k（k 为正整数).

7．求下列矩阵的秩

(1) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 1 & -5\\ -1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2 & -7\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$

8．求下列矩阵的秩及行的最简形

(1) $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6\\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}3 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

9．求下列方阵的逆矩阵

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;　(5) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;　(6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10．求解下列矩阵方程

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

(3) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，　$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$AX = X + C$;

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，且 $AB = A + 2B$，求 B.

11．用克莱姆法则求解下列方程组

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$

12．已知线性方程组有非零解，求解下列方程中的参数 λ

(1) $\begin{cases} (3-\lambda)x_1+x_2+x_3=0 \\ (2-\lambda)x_2-x_3=0 \\ 4x_1-2x_2+(1-\lambda)x_3=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$

13．设 $A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $f(x)=a_0+a_1x+......+a_nx^n$（$a_n\neq 0$），$n$为正整数，证明：

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

14．设 $P=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\Lambda$, 求$A^{10}$.