《线性代数》考研基础练习题

第三章　向量组的线性相关性

一．填空题

1、设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-4\\-8\\k\end{pmatrix}$ 线性相关，则 $k=$________.

2、设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\0\\c\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}b\\c\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}$ 线性无关，则 a,b,c 必满足关系式____________.

3、设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 $\lambda=$__________.

4、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则向量组 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_2+4\alpha_3$ 是线性__________.

5、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 2，则 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$ 的秩为________.

6、设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，且满足 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$_______.

7、设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\k\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 R^3 的基，则 k 满足关系式______________.

8、已知三维线性空间的一组基为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，则向量 $\beta=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ 在这组基下的坐标是______________.

二．选择题

1、设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 为一组 n 维向量，则下列说法正确的是(　　　)

(A) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 不线性相关，则一定线性无关；

(B) 若存在 m 个全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关；

(C) 若存在 m 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关；

(D) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性相关，则 α_1 可由 $\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性表示.

2、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性相关的充要条件是(　　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中有一个零向量；

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中任意两个向量成比例；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中有一个向量是其余向量的线性组合；

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中任意一个向量都是其余向量的线性组合.

3、n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(3\le s\le n)$ 线性无关的充要条件是(　　　)

（A）存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots k_s$，使$\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i\neq 0$；

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意两个向量都线性无关；

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$存在一个向量不能由其余向量线性表示；

（D）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任一个向量不能由其余向量线性表示.

4、设向量组(I)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$；向量组(II)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$，则必有(　　　)

（A）(I)线性相关$\Rightarrow$(II)线性相关；　　（B）(I)线性相关$\Rightarrow$(II)线性无关；

（C）(II)线性相关$\Rightarrow$(I)线性相关；　　（D）(II)线性相关$\Rightarrow$(I)线性无关.

5、已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则向量组(　　　)

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性无关；

（B）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关；

（C）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关；

（D）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关.

6、设β,α_1,α_2线性相关，β,α_2,α_3线性无关，则(　　　)

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；

（C）α_1能由β,α_2,α_3线性表示；　　（D）β能由α_1,α_2线性表示.

7、设向量β能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示但不能由向量组（I）：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示，记向量组（II）：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$，则(　　　)

（A）α_m不能由（I）线性表示，也不能由（II）线性表示；

（B）α_m不能由（I）线性表示，但能由（II）线性表示；

（C）α_m能由（I）线性表示，也能由（II）线性表示；

（D）α_m能由（I）线性表示，但不能由（II）线性表示.

8、设矩阵A为n阶方阵，且$R(A)=r<n$，则在A的n个行向量中(　　　)

（A）任意r个行向量线性无关；

（B）必有r个行向量线性无关；

（C）任意r个行向量构成极大无关组；

（D）任意一个行向量都可以由其中任意r个行向量线性表示.

9、设矩阵A为n阶方阵，且$|A|=0$，则矩阵A中(　　　)

（A）必有一列元素全为0；

（B）必有2列元素对应成比例；

（C）必有一列向量是其余列向量的线性组合；

（D）任意一列向量都是其余列向量的线性组合.

10、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量$\beta_1$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，而向量$\beta_2$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则对于任意的常数$k$，必有(　　　)

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关；

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性相关；

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性无关；

（D）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关.

三．计算及证明题

1．设$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}3\\2\\4\\-1\end{pmatrix}$，求$\alpha-\beta,\ 5\alpha+4\beta,\ (\alpha,\beta),\ \|\alpha\|,\ \|\beta\|$.

2．设$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\5\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}10\\1\\5\\10\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，且$3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha)$，求$\alpha$.

3．讨论下列向量组的线性相关性：

（1）向量组 1：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$；　（2）向量组 2：$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\\-7\end{pmatrix}$；

（3）向量组 3：$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$；　（4）向量组 4：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\-8\end{pmatrix}$；

（5）向量组 5：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$.

4．分别求下列向量组的秩及其一个最大的线性无关组：

（1）向量组 1：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\11\\15\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\7\\8\\4\end{pmatrix}$；

（2）向量组 2：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\8\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\9\\-5\\-3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\7\\5\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}7\\6\\10\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\\2\end{pmatrix}$.

5．设$\alpha_1=\begin{pmatrix}6\\a+1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}a\\2\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}$，则：

（1）a为何值时，向量组α_1,α_2线性相关？线性无关？

（2）a为何值时，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关？线性无关？

6．设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\b\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$的秩为 2，求$a,b$的值.

7．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，问$l,m$满足什么条件时，$l\alpha_2-\alpha_1,m\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$线性无关.

8． 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量$\beta_1$能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，而向量$\beta_2$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，对任意的实数$k$，问

（1）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$是否线性相关，为什么?

（2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$是否线性相关，为什么?

9．验证矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$和矩阵$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$是否为正交阵.

10．分别将以下向量组正交化

（1）向量组 1：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$； （2）向量组 2：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

11．设$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_r=\alpha_1+\cdots+\alpha_r$，且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，证明：向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关.

12．设向量β能由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示，且表示式惟一，证明：$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关.

13. 设 n 维单位坐标向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 能由 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

14．设 x 是 n 维单位列向量，令 $H=E-2xx^T$，证明：H 是对称的正交阵.

15．设 $V_1=\{x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\mid\sum_{i=1}^{n}x_i=0,x_i\in R,i=1,\cdots,n\},V_2=\{x=\begin{pmatrix}1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\mid x_i\in R,i=2,\cdots,n\}$，验证 V_1,V_2 是否是向量空间.

16．证明由向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 所生成的向量空间就是 R^3.

17．证明 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ 为 R^3 的一组基，并求向量 $\alpha=\begin{pmatrix}3\\8\\13\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-2\\2\\8\end{pmatrix}$ 在这组基下的坐标.