《线性代数》考研基础练习题

第四章　矩阵的初等变换与线性方程组

一．填空题

1、若齐次方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$只有零解，则参数$\lambda$应满足________________.

2、若方程组$\begin{cases}x_1+x_2=-a_1\\ x_2+x_3=a_2\\ x_3+x_4=-a_3\\ x_1+x_4=a_4\end{cases}$有解，则常数$a_1,a_2,a_3,a_4$满足____________________.

3、若方程组$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+1\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$无解，则$a=$__________.

4、若方程组$\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$有无穷多解，则$a=$____________.

5、若方程组$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&1\\3&4&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\b\end{pmatrix}$有惟一解，则$a,b$满足____________.

6、若n阶矩阵A的每一行元素之和为零，且$R(A)=n-1$，则齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系为________________.

7、设α_1,α_2为非齐次线性方程组$Ax=\beta$的两个不同解，其中A为$m\times n$矩阵，且$R(A)=n-1$，则$Ax=\beta$的通解为____.

8、设A为$m\times n$矩阵，则非齐次线性方程组$Ax=\beta$有惟一解的充要条件是____________________.

9、设A,B为n阶方阵，若齐次线性方程组$Ax=0$的解都是齐次线性方程组$Bx=0$的解，则 R(A)___R(B).

10、若$A=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\a_3&b_3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$，且三条不同直线$a_ix+b_iy+c_i=0\ (i=1,2,3)$相交于一点，则矩阵$A,B$的秩满足____________________.

二．选择题

1、齐次线性方程组$Ax=0$仅有零解的充要条件是(　　　)

(A)矩阵A的列向量组线性无关；　　　(B)矩阵A的列向量组线性相关；

(C)矩阵A的行向量组线性无关；　　　(D)矩阵A的行向量组线性相关.

2、设A是$m\times n$矩阵，$Ax=0$是与非齐次线性方程组$Ax=\beta$相对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是(　　　)

(A)若$Ax=0$仅有零解，则$Ax=\beta$有惟一解；　　(B)若$Ax=0$有非零解，则$Ax=\beta$有无穷多解；

(C)若$Ax=\beta$有无穷多解，则$Ax=0$仅有零解；　(D)若$Ax=\beta$有无穷多解，则$Ax=0$有非零解.

3、设A是$m\times n$矩阵，且$R(A)=r$，则(　　　)

(A) $r=m$时，非齐次线性方程组$Ax=\beta$有解；　　(B) $r=n$时，非齐次线性方程组$Ax=\beta$有惟一解；
(C) $m=n$时，非齐次线性方程组$Ax=\beta$有解；　　(D) $r<n$时，非齐次线性方程组$Ax=\beta$有无穷解.

4、设α_1,α_2为非齐次线性方程组$Ax=\beta$的两个不同解，则(　　)是$Ax=\beta$的解.

(A) $\alpha_1+\alpha_2$；　(B) $\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2$；　(C) $\alpha_1-\alpha_2$；　(D) $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\ k_i\in R,\ i=1,2$.

5、当矩阵A等于(　　)时，$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$都是齐次线性方程组$Ax=0$的解.

(A) $(-2,1,1)$；　(B) $\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$；　(C) $\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$.

6、设$m\times n$矩阵A的秩为$R(A)=m<n$，E_m为m阶单位矩阵，则下列结论正确的是(　　)

(A) 矩阵A的任意m个列向量必线性无关；　(B) 矩阵A的任意m阶子式必不等于0；
(C) 若矩阵B满足$BA=0$，则必有$B=0$；　(D) 矩阵A通过初等行变换，必可化成$(E_m,0)$的形式.

7、设A为n阶方阵，且$R(A)=n-1$，而α_1,α_2为非齐次线性方程组$Ax=\beta$的两个不同解，k为任意实数，则齐次线性方程组$Ax=0$的通解为(　　)

(A) $k\alpha_1$；　(B) $k\alpha_2$；　(C) $k(\alpha_1-\alpha_2)$；　(D) $k(\alpha_1+\alpha_2)$.

8、（多选）设β_1,β_2为非齐次线性方程组$Ax=\beta$的两个不同解，而α_1,α_2为对应的齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，k_1,k_2为任意实数，则$Ax=\beta$的通解为(　　)

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$；　(B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$；
(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$；　(D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$.

9、设A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，对于齐次线性方程组$(AB)x=0$，以下结论正确的是(　　)

(A) 当$n>m$时仅有零解；　(B) 当$n>m$时必有非零解；
(C) 当$m>n$时仅有零解；　(D) 当$m>n$时必有非零解.

三．计算及证明题

1．求解以下方程组

(1) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=1\\x_1-2x_2+x_3-x_4=-1\\x_1-2x_2+x_3+5x_4=5\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=-1\\2x_1+x_2-2x_3=1\\x_1+x_2+x_3=3\\x_1+2x_2-3x_3=1\end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+3x_2+x_3=5 \\ x_1+x_2+5x_3=-7 \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=2 \\ 3x_1-x_2+2x_3=10 \\ 11x_1+3x_2=8 \end{cases}$ (8) $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x-y+4z=-5 \\ 3x+8y-2z=13 \\ 4x-y+9z=-6 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} 3x+y-z+w=1 \\ 2x+2y-2z+w=2 \\ 2x+y-z-w=1 \end{cases}$ (10) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=4 \\ x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2 \end{cases}$

2．求参数 λ, a, b 取何值时，下列方程组有惟一解、无解或有无穷多个解. 当有无穷多个解时，求其一般解.

(1) $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=-2 \\ x_1-2x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2 \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} (2\lambda+1)x_1-\lambda x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda-1 \\ (\lambda-2)x_1+(\lambda-1)x_2+(\lambda-2)x_3=\lambda \\ (2\lambda-1)x_1+(\lambda-1)x_2+(2\lambda-1)x_3=\lambda \end{cases}$

3．对于向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda+1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda+1\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda+1\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$；试讨论参数 λ 满足什么条件时，

(1) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示方式惟一；

(2) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但表示方式不惟一；

(3) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

4．设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩是 2，并已知该方程组的三个解向量是

$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\4\\5\end{pmatrix}$ 求该方程组的通解.

5．设三元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 1，且已知它的三个解η_1,η_2,η_3满足：

$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\eta_1+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$求该方程组的通解.

6．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵$B$为 3 阶非零矩阵，且$AB=0$，求$t$的值.

7．设矩阵$A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&3b&1\end{pmatrix}$，$B$为三阶非零矩阵，且满足$AB=0$，求$a$, b及$R(B)$.

8．设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$是非齐次线性方程组$Ax=b$的$s$个解，$k_1,\cdots,k_s$为实数，满足$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，证明：$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$也是方程组$Ax=b$的解.

9．试证方程组$\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_4=a_3 \\ x_4-x_5=a_4 \\ x_5-x_1=a_5 \end{cases}$有解的充要条件是$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$，并在有解的情况下，求出它的全部解.