《线性代数》考研基础练习题

第五章 矩阵的特征值和特征向量

一．填空题

1、设 A 为 n 阶奇异矩阵，则 A 一定有特征值______.

2、n 阶矩阵 A 的元素全为 1，则 A 的特征值为___________.

3、已知 3 阶矩阵 A 满足 $A^2=A, R(A)=2,$ 则 A 的相特征值为__________.

4、已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，则 $(2A^*)^{-1}$ 的特征值为_______________.

5、已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，-2，则 $|A+E|$ 值为_________.

6、已知矩阵 $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ x & y \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 相似，则 x 为________，y 为_________.

7、A,B 为 n 阶矩阵，AB 有特征值 2，则 $BA+3E$ 一定有特征值___________.

8、已知 A 相似于 B，且 $A^m=A(m\in N)$，则 $B^m=$________.

9、$A=\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2b & 0 \end{pmatrix}$ 可相似对角化，则 a 与 b 的关系为_____________.

二．选择题

1、与可逆阵 A 必有相同特征值的矩阵是（　　）.

(A) A^{-1}　　(B) A^2　　(C) A^T　　(D) A^*

2、设 A 为 2 阶实矩阵，$|A|<0$，则矩阵 A（　　）.

(A) 可对角化　　(B) 不可对角化　　(C) 与反对称阵相似　　(D) 以上都不对

3、已知 A 是 3 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的互不相等的特征值，对应特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，则向量组 $\beta, A\beta, A^2\beta$（　　）

(A) 线性相关　　(B) 线性无关　　(C) 可能线性相关，可能线性无关　　(D) 以上都不对

4、设 λ_1,λ_2 是 A 的特征值，α_1,α_2 分别是 λ_1,λ_2 的特征向量，则（　　）

(A) $\lambda_1=\lambda_2$ 时，α_1,α_2 一定成比例

(B) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，若 $\lambda_1+\lambda_2=\lambda_3$ 是特征值，则对应的特征向量是 $\alpha_1+\alpha_2$

(C) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，$\alpha_1+\alpha_2$ 不可能是特征向量

(D) $\lambda_1=0,$ 有 $\alpha_1=0$

5、设 A,B 为 n 阶方阵，且 A 与 B 相似，则（　　）

(A) $\lambda E-A=\lambda E-B$　　(B) A 与 B 有相同的特征值与特征向量

(C) A 与 B 都相似于同一对角阵　　(D) 对任意常数 t，有 $tE-A$ 与 $tE-B$ 相似

6、设 A 为 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆阵，已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量。则 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是（　　）

(A) $P^{-1}\alpha$　　(B) $P^T\alpha$　　(C) $P\alpha$　　(D) $\left(P^{-1}\right)^T\alpha$

7、n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的（　　）

(A) 充分必要条件　　(B) 充分而非必要条件

(C) 必要而非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

8、设矩阵$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$A$与$B$相似，则$R(A+E)$与$R(A-E)$的和为（　　）

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

9、设A为2阶方阵，α_1,α_2是二维线性无关列向量，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则$A$的非零特征值为（　　）

(A) -1　　(B) 1　　(C) -2　　(D) 2

10、如果3阶实对称阵A满足$A^k=0(k\in N)$，则$R(A)$为（　　）

(A) 2　　(B) 1　　(C) 0　　(D) 3

三．计算及证明题

1．求下列矩阵的特征值及相对应的特征向量：

(1) $\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{pmatrix}$.

2．证明：如果方阵A满足$A^2=A$，则A的特征值等于0或1.

3．证明：如果λ是可逆阵A的特征值，则$\dfrac{|A|}{\lambda}$为A^*的特征值.

4．设方阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$与对角阵$\Lambda=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&y&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$相似，求$x$，$y$.

5．设$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$，求$A^{101}$.

6．设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$，其行列式$|A|=-1$，又$A$的伴随矩阵$A^*$有一个特征值$\lambda$，属于$\lambda$的特征向量为$\alpha=(-1\quad -1\quad 1)^T$，求$a,b,c$和$\lambda$的值.

7．试用一个正交相似变换矩阵，将下列实对称矩阵化为对角阵.

(1)$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$；(3)$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$；(4)$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$；(5)$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

8．设 3 阶方阵A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=1$，对应的特征向量依次为

$$p_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

求A.

9．设 3 阶实对称阵A的特征值为 1，1，-1，且对应于特征值 1 的特征向量为$p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，求$A$.

10．已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x，使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关，且满足 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$

（1）记 $P = \left(x, Ax, A^2x\right)$，求 3 阶矩阵 B，使 $A = PBP^{-1}$；（2）计算行列式 $\left|A+E\right|$.

11．设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和为 3，向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\end{pmatrix}^T, \alpha_2 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的解.

（1）求 A 的特征值与特征向量；

（2）求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^T AQ = \Lambda$.

12．某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $1/6$ 熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐。新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $2/5$ 成为熟练工。设第 n 年一月份统计的熟练工与非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n，记成向量 $\begin{pmatrix}x_n \\ y_n\end{pmatrix}$.

（1）求 $\begin{pmatrix}x_{n+1} \\ y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n \\ y_n\end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式：$\begin{pmatrix}x_{n+1} \\ y_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_n \\ y_n\end{pmatrix}$ ；

（2）验证 $\eta_1 = \begin{pmatrix}4 \\ 1\end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix}-1 \\ 1\end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

（3）当 $\begin{pmatrix}x_1 \\ y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 \\ 1/2\end{pmatrix}$ 时，求 $\begin{pmatrix}x_{n+1} \\ y_{n+1}\end{pmatrix}$.