蘇聯青年科學叢書

實用簡捷計算法

別爾曼 著

中国青年出版社

譯者的話

在現代的日常生活中及一切建設工作中，都不可避免地要做一些數字計算．因此淺近的簡捷計算法乃是人人所應有的一種基本訓練，掌握了它可以節省不少的時間與精力．

這本小册子是關於這方面的一本普及讀物，不但可供一般讀者參考；尤其宜於作工農速成中學、各種幹部訓練班以及普通初級中學的教材；也可作小學教師的進修用書．

書中包含心算（口算）、筆算及近似計算三部分．心算與筆算部分告訴我們一些怎樣使計算敏捷的技巧．近似計算部分則告訴我們如何省略不必要的數位，並如何簡化計算手續而不致影響實用上所需要的精確程度．

本書是從原著修訂第三版翻譯過來的．原書刊有‘第二版原序摘要’，並在這前面加了一篇‘修訂者的話’．這是因爲原著者別爾曼當時已不在世，這第三版乃經勃露德那氏修訂後刊行的．

丁壽田　一九五二，一〇

修訂者的話

已故 Г. Н. 別爾曼氏這本小册子實際上是算術的補充節目，並且可以用來提高廣大讀者羣衆的‘算術文化水準’. 除去小數乘法以外，這裏面也講到根數的計算及近似乘法，熟練的讀者對它是會感覺興趣的.

在新版裏訂正了許多舊版中的誤植，所發覺的地方都儘量重新計算一過.

本書舊名‘速算’，這名稱我們眼下往往指的是計算的戲法及演技. 因此改用現在這個新標題.（譯者按：照原書新標題應譯做‘計算法’. 但在我國‘速算’‘捷算’等字眼沒有‘計算的戲法及演技’這種意義，所以本書名稱仍意譯爲‘實用簡捷計算法’.）

關於用筆算解百分法問題的部分，改用了一個代數的法則來替代通用的三個算術的法則，這樣可便於記憶.

關於根數的部分稍有改變與補充.

第二版原序摘要

這本書不是教科書．它沒有打算作完整及有系統的敍述．在此只搜集了一些簡單的方法，可以用來加速計算，——也不是加速任何複雜的計算，而只是加速那些日常生活中，尤其是生產工作中，所經常不可少的最尋常的數字計算．這本書是爲熟練工人或實際技術工作者着想的．讀此書不需要什麼特殊的知識，甚至連初等代數都不需要．但假定讀者對整數與小數的尋常計算法是已經完全熟悉了．

這本書不是教科書．但當然不能拿它像小說一樣看，這樣就白白浪費時間．數學書，卽使是很簡單的，也總得要演算纔行．必須很仔細地讀它，手上拿着鉛筆，把所需要的計算全做出來，並且以解答例題來鞏固每一法則的概念．這小册子裏例題是相當多的，但沒有給答案，因爲核驗起來是很容易的：只要把同一例題用簡捷法計算了以後，再用尋常方法做一遍就行了．

推論與證明在這小册子裏是沒有的．但如不很佔地方，便給以必要的解釋．有些地方所用術語是與尋常有點不同的．這往往可以使敍述變得簡單些．在近似計算那一章裏所討論的計算，其精確度（百分誤差在1% 以內）幾乎只限於一般技術計算中所常常需要的程度．

目　次

一 心算（口算）

緒　　言

我們每個人都會在心裏作計算；在商店裏，在飯館裏，在公共汽車裏，處處都要做計算．生產工作者尤其要能計算．幾乎沒有一件尋常的工作不需要做計算的．有些人要忙於用鉛筆和紙做計算；另一些人在心裏做計算，但算得很慢，不免常常鬧錯，並且感覺很吃力；有些人則計算得很輕鬆而有把握．

要在心裏計算得快而且有把握，這並不需要特殊的知識與能力．有一些簡單法則可以使我們把計算學得很好——但主要是要靠經常在口上多練習．有這樣的人，他們能在心裏很快地做四五位數字的乘除法．這種技能是很難達到的，需要記住許多法則，需要長久的勞苦的鍛鍊．這種技能在實際生活裏並沒有多大需要．我們的任務是要學會對付兩位數字或有時三位數字．這對日常生活與生產實際工作已經夠了．如果碰到更大的數字，則在紙上做計算爲最妥．

如果需要做很多的計算，則在普通的情形最好不做心算．心算固然不會太慢，但總是令人厭倦的．要在紙上進行大量計算工作，也不免算得比較慢或者容易鬧錯．所以在做繁重的計算工作時，應該利用計算工具．首先宜用計算機與計算

尺．做精確計算時用計算機，做近似計算時用計算尺．計算尺對於百分數的計算尤不可少，百分誤差小到1%．

我們來温習一下幾個算術裏的名詞．拿來相加的各數叫做'項'．加法的結果叫做'和'．

從中施減的數叫做'被減數'，減去的數叫做'減數'，減的結果叫做該二數之'差'．例如：25－7＝18．這裏25是被減數，7是減數，18是差．

拿來相乘的數叫做'乘數'．有時也有'被乘數'與'乘數'的稱呼，但這種區別是不必要的，因爲被乘數與乘數的地位是完全平等的．乘的結果叫做'乘積'或簡稱'積'．一數用另一數來除，則前者稱爲'被除數'，後者稱爲'除數'，除的結果稱爲'商'．例如，18用6除，得3．這裏18是被除數，6是除數，3是商．

除法不是永遠可以這樣順利通過的．例如，22用7除，得3，但還剩下一個'餘數'1．再用7除這餘數，得七分之一．這意思就是 $22 \div 7 = 3\frac{1}{7}$．整數除法的結果可以是分數——在我們這例子裏是整數帶分數．

加　　　法

加法心算是很容易的；但對加法還需要說幾句話．我們要知道，加法是一種最基本的運算，所以應該學着加得很快而且很有把握．

我們從加數是一位數的加法講起．例如 23 加 5，這是很簡單的，結果是 28．比較重要的是這種情形：兩項的個位數之和大於十，這個十須要記在心裏．例如 87 加 8．這裏我們最好這樣想法：87 比 90 少 3，而 8 是 3 與 5 的和．87 加 3 是 90，再加 5，總共是 95．再舉一個例：119 加 7．7 等於 1 加 6；119 加 1 成 120，再加 6，總共得 126．如此，我們把一位項分解成兩個較小的數之和，其中的一個把較大的項補充成整十的數．這種分解只要稍加練習就可以做得很自然，不大費力．

由整十或整百構成的數也可以用這樣的方法來相加．例如 272 加 50．我們說：272 加 30 得 302，再加 20，總共是 322．在此我們把由整十構成的一項分解爲兩個數（$50=30+20$），其中一數（30）把較大項中的十位數（70）補成了整百．

例題：$326+9$；　$148+7$；　$94+8$；　$112+6$；　$243+80$；　$567+70$；　$192+20$；　$341+50$；　$1460+50$；　$277+70$．

如果兩項都是多位數，則把較小的一數加到較大的上去，並且從最高的一位起依次加下去．比方說加數是個兩位的數，則從十位加起，然後再加個位．例如，我們來加 343 與 25．我們說：343 加 20 是 363，再加 5，總共是 368．更大的數也可用同樣方式來加．如果要加 8365 與 376，則可以這樣進行：8365 加 300 是 8665，加 70 是 8735，再加 6，總共得 8741．

我們來注意下面這種情形，這時候加法可變簡單．如果兩項中有一項接近於整十或整百的數（一般地說，就是接近

'整數'),則可以這樣進行:設要加173與59. 這59較60少1. 173加60得233,而我們原要加59,故應該去掉1;如此得232. 同樣,如果要做882加197,則我們這樣說:197較200少3. 882加200是1082,去掉3,得1079.

倘若兩數都接近'整數',例如,倘若要加98與395,則我們可以這樣說法:98較100少2,395較400少5. 100加400得500;去掉2,成498,再去5,成493. 這就是所求的和.

例題:263+25; 384+49; 298+96; 4532+93; 882+161; 766+419; 89+77; 8122+891; 395+88.

倘若要在心裏加好幾個兩位的數,則通常先把所有十位數都加起來,然後再加所有個位. 例如,我們來加26,17,85與43. 我們這樣做法:20加10是30,再加80,成110,加40,總共得150;這數我們先記住. 然後6加7得13,加5,得18,再加3,共21. 150加21,共得171. 這方法總可以很快地得到結果. 同樣可以加更大的數,例如三位或四位的數,但這時候須要在心裏掛着好幾個和,這樣很容易迷惑. 所以對沒有訓練的人大數的加法最好還是在紙上做.

例題:56+13+18; 24+17+14+47; 39+48+13; 11+26+8+44; 58+43+92; 88+75+39.

減　　法

做一位數的減法(就是減數是一位數)可以有兩種情形.

如果一位數小於被減數的末位數碼，則運算很簡單．例如，由28減6，我們得22．如果一位數大於被減數的末位數碼，比方說由42減7，則宜這樣進行：7就是2加5(2是被減數的末位)．由42先減去2，得40；再由40減去5，這樣得35．

如果要減整十的數，做法也是一樣．例如，我們要由243減去60．這60就是40+20；我們先由243減去40得203；再減去20，剩下183．

例題：43－8；　58－7；　135－9；　260－40；　52－7；43－6；　116－8；　116－70；　1003－40．

如果要減兩位的或更大的數，則首先減百位(如果有的話)，然後減十位，最後減個位．例如，我們由243減去27．先由243減去20，剩下223．因為7等於3加4(3是被減數的末位)．於是由223先減去3，剩220；再減去4，乃得到所求的答數216．

也可以用另一方式來做．我們要由243減去27．但27較30少3．我們同以3加到減數與被減數上去，結果應該不變．如此我們得246與30．由246減去30，得216．

如果兩數中有一個或者兩個都接近‘整數’，則宜先就‘整數’來運算，然後再進行校正．例如，我們要由1285減去296．這296較300少4．所以先由1285減去300，而300就是200加100(在被減數裏恰好是200)．由1285減去200，得1085，再減去100，得985．最後加4，得989．這就是所求的

答數.

例題: 463－25; 326－83; 561－59; 1020－98; 241－91; 881－95; 624－73; 815－27; 827－39; 111－87; 1063－120; 822－48; 516－123.

把以上所說的總結一下.

如果要加兩個數,則把較小的一個加到較大的一個上去;首先加百位,然後加十位,最後加個位(即由最高一位依次加到最低一位).

如果有一項或兩項都接近'整數',則先把'整數'加起來,然後再作必要的校正.

在做若干個兩位數的加法時,先把所有十位加起來,再把所有個位加起來,然後把個位的和加到十位的和上去.

若干個三位或三位以上的數的加法最好在紙上做.

如果減數是一位的,並且小於或等於被減數的末位數碼,則計算時不會發生困難.

如果減數是一位數而大於被減數的末位數碼,則把減數分解成兩數之和,其中第一數等於被減數的末位數碼,然後用這兩個數依次施減.

在兩位數(或多位數)的減法中,從最高的一位減起,依次減到最低一位.

如果減數接近'整數',則先減去這'整數',然後再作校正.

最簡單的乘法與除法

用像10,100等由1與0構成的'整數'來乘或除是最簡單的. 在做這種數的乘法時,只要把乘數所有的0都寫到被乘數的末尾去就行了. 例如,以100乘173,得17300.

用由1與0構成的'整數'來除,也幾乎是同樣簡單的. 我們只要在被除數上加一個小數點,使小數點後的位數等於除數中0的個數. 例如,以100除2650,得26.50即26.5. 所得的答數往往是小數.

例題: 2240÷10; 51×100; 37×1000; 83×10000; 62000÷100; 84000÷10.

用2與4來乘亦幾乎是一樣地簡單. 我們先來用2乘,從最高一位乘起. 例如,以2乘347. 我們這樣進行: 300乘2是600; 40乘2是80,共680; 7乘2是14. 總起來——680加14——得694.

用4乘無非就是用2乘兩次. 例如,我們要以4乘596. 先以2乘596. 500乘2得1000, 90乘2得180,即共1180,再有2乘6得12. 1180加12得1192. 這數再用2乘一回. 1000乘2是2000,加100乘2即200,共2200,加90乘2即180,共2380,再加2乘2即4,共2384. 這就是所求的答數.

用同樣的方法可以乘8(即用2累乘三次),乘16,以及乘其他類似的數.

例題: 365×2; 643×2; 97×2; 88×2; 915×2; 63×4; 76×4; 112×4; 31×8; 1285×2; 23×8; 288×4; 51×16; 165×4.

用2除一個數只要用2除其各位數就行了:從最高一位起依次除下去,然後將所得結果加起來. 例如,我們以2除364. 以2除300得150,以2除60得30; 150加30是180; 只剩下要加4的一半,卽2. 如此得182.

用2除還可以有另一種方法. 設要以2除364,我們這樣進行: 3以2除得1餘1; 16以2除得8; 4以2除得2. 如此得182.

要用4除的時候可先用2除,然後將所得的商數再用2除一次. 例如,我們用4來除1938. 先用2除: 1000以2除得500;加上900以2除,卽450,共950;加上30以2除得15,共965;加上8以2除得4;共969. 將這所得的數再用2除一次: 900以2除得450;加60以2除,卽30,共480;加9以2除,卽$4\frac{1}{2}$. 共得$484\frac{1}{2}$. 答數帶分數不足為奇,除法中常常會發生這樣情形的. 在實際問題中所遇到的數字,是常會有除不盡的.

如果要以8或16來除,則只要以2連除三次或四次.

例題: 116÷2; 98÷2; 264÷2; 39÷2; 1486÷2; 932÷2; 216÷4; 536÷4; 512÷8; 1488÷8; 134÷4; 17÷4.

以 5、25、50 爲乘數或除數的乘法與除法.

增加到 $1\frac{1}{2}$ 倍. 以 15 爲乘數的乘法

以 5 爲乘數的乘法可以化爲以 2 爲除數的除法;反之,以 5 爲除數的除法也可以化爲以 2 爲乘數的乘法. 例如,我們以 5 乘 387,可這樣進行:要以 5 乘,可以先以 10 乘,再以 2 除此結果. 10 乘 387 得 3870. 再以 2 除 3870:3000 的一半是 1500;800 的一半是 400,共 1900;再加 70 的一半,卽 35,共得 1935. 這就是說,$387\times5=1935$.

現在我們來用 5 除 6145. 爲這目的我們先把所給的數兩倍起來,然後以 10 除此結果. 現在以 2 來乘 6145. 以 2 乘 6000 得 12000;以 2 乘 100 得 200,共 12200;以 2 乘 40 得 80,共 12280;以 2 乘 5 得 10,共 12290. 然後以 10 除之,得 1229. 這就是說,$6145\div5=1229$.

在此再舉一例,其結果帶有小數. 我們來用 5 除 283. 爲這目的我們先以 2 乘 283. 如此以 2 乘 200 得 400,以 2 乘 80 得 160,共 560;以 2 乘 3 得 6,共 566. 然後以 10 除 566,得 56.6.

做以 25 爲乘數的乘法時,我們可先以 100 乘,然後以 4 除之. 做以 25 爲除數的除法時,我們可先以 4 乘(卽以 2 乘兩次),然後以 100 除之. 做以 50 爲乘數的乘法時,我們可先以 100 乘,然後以 2 除之;做以 50 爲除數的除法時,我們先以 2 乘,然後以 100 除之.

例如，我們要以25乘137. 我們先以100乘137，得13700. 然後用2除之：以2除10000得5000，以2除3000得1500，共6500；以2除700得350，共6850；這數再以2除之，得3425. 所以$137\times25=3425$.

又如，我們要以50除218. 先以2乘218，得436. 這數以100除之，得4.36. 這就是說，$218\div50=4.36$.

例題：32×5；　117×5；　89×5；　46×5；　28×25；　63×25；　19×50；　$295\div5$；　$515\div5$；　$83\div5$；　$675\div25$；　$1050\div50$；　$285\div25$；　$1285\div50$；　$92\div5$；　$751\div50$.

要把一個數增大到$1\frac{1}{2}$倍是很容易的. 這只要加上該數的一半就行了.

例如，我們要以$1\frac{1}{2}$乘87. 這數的一半是40加$3\frac{1}{2}$. 87加40得127，加3，得130，再加$\frac{1}{2}$，共得$130\frac{1}{2}$. 這就是所求的答數.

由以$1\frac{1}{2}$爲乘數的乘法，可以推得以15爲乘數的乘法. 例如，我們來以15乘342. 我們先以10乘342，得3420. 這數再把它增加到$1\frac{1}{2}$倍，卽再加上它的一半. 3420的一半是1710. 把3420與1710加起來，得5130. 這就是說，$342\times15=5130$.

所以，要以15乘某數，只要將該數十倍起來，然後再在此所得的數上加該所得數的一半.

例題: $64\times1\frac{1}{2}$; $38\times1\frac{1}{2}$; $292\times1\frac{1}{2}$; $36\times1\frac{1}{2}$; $49\times1\frac{1}{2}$; 26×15; 38×15; 164×15; 618×15; 41×15; 19×15.

以9、11、99、101諸數爲乘數的乘法

要以9乘任何數,須將該數10倍起來,然後由此結果中減去該數. 例如,我們要以9乘87. 可這樣做:87的10倍是870. 然後只要由870中減去87就行了. 但87接近於90(只差3). 我們在被減數與減數上都加3,得873與90. 由873減去90,得783. 即$87\times9=783$.

要以11乘任何數,只要將該數10倍起來,然後再在此結果上加該數. 我們仍取前例中的數87,以11來乘它. 將87增大到10倍,得870. 然後我們來加上87. 870加80($80=30+50$)得950,再加7,得957. 即$11\times87=957$.

這規則是很有用處的,並且幾乎總可以使計算變得輕快得多,但也不要以爲在一切情形都可以應用. 有時候也會按普通方法來乘反倒容易些. 例如,倘若被乘數是由1與0構成的數,則我們可以直接用9乘它. 比方說以9乘101,顯然得909,這不必用任何特別的規則.

再講一種用11乘兩位數的方法:把兩位數碼分開,而把它們的和插到中間去. 這樣就得到所求的結果了. 例如我以11乘24. 把24拆開成2…4,然後把2加4得6這個和插到

中間去，得 264．這就是說，$24\times11=264$．

如果兩位數的數碼加起來是一個兩位數，則將其個位放在被乘數兩個數碼之間，而將其十位加到被乘數的十位上去．例如，要以 11 乘 67．我們把 67 拆成 6…7，把 6 加 7 得 13 這個和插到中間去，成 6(13)7．然後讓 3 留在原位而把 1 加到 6 上去，如此得 737．這就是說，$67\times11=737$．只要稍加練習，這就很容易在心裏做了．

特別簡單的是以 101 乘兩位數．這只要把該兩位數重複念一遍，所得到的四位數就是所求的乘積了．例如以 101 乘 73．則 7373 就是所求的結果，即 $73\times101=7373$．

不難了解，以 99 爲乘數的乘法該怎樣做．這顯然只要把被乘數 100 倍起來，然後再從中減去被乘數就行了．例如，倘若要以 99 乘 34，則先以 100 乘 34，得 3400．現在再從 3400 中減去 34：先減去 30，得 3370；再減去 4，得 3366．這就是說，$34\times99=3366$．

例題：24×9；　37×9；　125×9；　48×11；　29×11；　63×11；　27×11；　62×101；　54×9；　99×9；　13×101；　15×99；　163×11；　88×11．

以 3、6、7 諸數爲乘數的乘法

做以 3、以 6 或以 7 爲乘數的乘法時，我們先乘十位，然後乘個位，最後把兩個結果加起來．例如，我們以 3 來乘 86：以

3乘80得240，以3乘6得18；240加18得258．我們再來以7乘35：先以7乘30得210，以7乘5得35；210加35得245．以6爲乘數時也這樣做法．

以3乘三位的數可按這樣的法則來做：先乘百位，再乘十位，後乘個位，然後都加起來．按這法則來做以6爲乘數的乘法是不便利的，因爲這樣須要在心裏掛着較大的數．故最好先用3來乘，然後把這結果再二倍起來．例如，我們以6來乘519．先以3乘之：3乘500得1500，3乘10得30，共得1530；再以3乘9，得27；將此數加到1530上去，得1557．現在我們把1557二倍起來：1500的二倍是3000，57的二倍是114，共得3114．這就是說，$519\times6=3114$．

以7乘多位數做法與以3來乘一樣．但這時候需要在心裏掛着較大的數；故沒有特別訓練的人還是在紙上做比較好些．

例題：67×3；29×3；116×3；285×3；24×6；49×6；51×7；19×7；216×6；811×6；1261×3；715×3；93×6；92×7；49×7；212×3；212×7；97×6．

多位數的乘法

多位數的乘法如在心裏做，沒有經驗的人是常常會出錯的，所以最好在紙上做．但在有些情形，多位數的乘法也很容

易．特別重要的是二位數乘法的心算；這做起來很簡單，並且在日常生活中經常會遇到它．

在這裏所用的方法叫做‘叉乘法’．我們取兩個二位數 53 與 37 爲例，並且寫成這種樣式：

$$\begin{array}{ccc}5 & & 3\\ | & \times & |\\ 3 & & 7\end{array}$$

十位乘十位得百位．在我們此例 3 個十乘 5 個十得 15 個百，卽 1500．再把個位乘起來，在我們此例得 21（$3\times7=21$）．1500 加 21 得 1521．簡單地說，這數可以從這樣得來：在十位的乘積（15）後面接着寫個位的乘積（21）；得 1521．但這還沒有完全．應該計算每個數的個位與另一數的十位的乘積．在本例我們有：7 乘 5 個十得 35 個十；3 乘 3 個十得 9 個十；共 35 加 9 個十，卽 44 個十，亦卽 440．這就是說，在 1521 上還要加 440，得 1961．

在實際做計算時那圖不能畫出來．一切步驟都在心裏進行．這如何做法可由下例明白．我們來做 68 乘 47．先乘十位，四六——二十四；再乘個位，七八——五十六；在心裏連寫起來得 2456．再來做‘叉乘’：六七——四十二個十，四八——三十二個十，共七十四個十，卽 740．2456 加 700 得 3156；再加 40，得 3196．這就是所求的答數．所以 $68\times47=3196$．

我們來注意幾種特別簡單的情形．如果每個乘數都小於 20，例如要以 13 乘 18，則我們把一數與另一數的個位加起來

(18+3=21)再添上一個0,得210. 然後把個位的乘積(3×8=24)加上去,210加24,得234.

如果要做一個末尾是5的二位數的自乘,我們可以這樣做法:先將十位數碼加1,再將此結果與十位數碼乘起來. 然後在這數後面跟着添兩個數碼25.

例如,我們來做75乘75. 7加1是8,7乘8是56;添上兩個數碼25,得5625.

如果兩個乘數中有一個接近'整數',則我們就先用這'整數'來乘,然後再作校正.

例如,我們用98乘37,做法如下. 98較100少2,所以我們可先用100乘37,然後從這結果中減去37乘2. 37乘100得3700;37乘2得74. 就從3700中減去74,得3626.

如果兩個乘數都接近某一'整數',而一個大於它,另一個小於它,但所差的數是一樣的,則我們可以這樣做法. 我們先把'整數'平方起來. 然後從中減去各數與'整數'的差數的平方. 例如,我們要以103乘97. 兩個乘數均與100差3,只是一個較100大3而另一個較100小3. 100乘100得10000,而3乘3得9. 由10000減去9得9991. 再舉一例:我們以58來乘62. 兩個乘數同與60差2. 60乘60得3600,2乘2得4. 3600減去4得3596.

讀者如果知道一點代數的初步知識,則可注意到上面所講這方法所根據的是這個大家都知道的和差乘積公式:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

例題: 43×16; 17×19; 18×18; 12×17; 32×97; 53×67; 22×83; 17×85; 28×82; 81×79; 202×198; 15×16; 72×68; 43×53; 25×25; 35×35; 85×85; 69×85; 502×498; 95×95.

特別簡單的是兩個十位同是 9 的二位數的相乘．例如，我們來乘 94 與 97． 把 97 補成 100,這樣得到‘補數’3;由 94 中減去 3,得 91．這就是所求乘積的頭兩位數碼．把 94 補成 100,這樣得到補數6．將兩個補數乘起來,3乘6得18．這就是所求乘積的後兩位數碼．這就是說,97 乘 94 得 9118．所以,要乘兩個十位同是 9 的二位數,我們先把兩個乘數都補成 100,求得各個乘數的補數．由一個乘數中減去另一個乘數的補數,這樣得到乘積的頭兩位數碼．將兩個補數乘起來,這樣得到乘積的後兩位數碼．

例題: 97×92; 93×95; 96×96; 98×91; 95×94; 93×93.

譯者註: 這方法的理由可用一點點代數知識說明如下:令 a 與 b 代表兩個補數,則兩個乘數各爲 $100-a$ 與 $100-b$.

$$\begin{aligned}(100-a)(100-b)&=100\times100-100\times a-100\times b+a\times b\\&=100\times(100-a-b)+a\times b\\&=100\times[(100-a)-b]+a\times b.\end{aligned}$$

這式子前一項代表乘積的頭兩位,後一項代表乘積的後兩位．這就證明了我們所說的方法．

關於除法心算的幾句話

心算的除法比乘法難多了．除去前面講過的那幾種情形(以2、4、5、25等等為除數的)，值得注意的只有以一位數來除不很大的數的除法．在此我們須要在心裏來做那些通常在紙上做的運算．例如，我們以7來除95：以7除9個十得1個十，還剩2個十未曾用到；這2個十與5合起來共25，以7除之商3餘4．這就是說，答數是：商13餘4，或$13\frac{4}{7}$．

例題：87÷3；　126÷3；　59÷7；　97÷2；　95÷3；147÷7；　159÷9；　90÷11；　116÷3；　104÷13；　51÷3；91÷7；　189÷9；　89÷9；　1000÷3．

與除法連繫着的是關於找某數幾分之幾的問題．事實上，要找任何數，比方說562的二分之一，我們只要以2除之就行了．在我們此例得281．要找某數的三分之一，只要以3除之就行了．知道了以2、4、8、5、10、25、50、100、3、6、7、等等為除數的除法，我們就能找任何數的二分之一，四分之一，八分之一，五分之一，十分之一，等等．某數的二十分之一也不難找：這只要以2除其十分之一就行了．

要找任何數的四分之三可以有兩種辦法．首先求出該數的四分之一；然後再取這兩種辦法之一：或者以3乘所求得的四分之一，或者由原數中減去這四分之一．例如，我們來求748的$\frac{3}{4}$．先以4除748：700的一半是350，加48的一半24，

共374;這所得的數再以2除一次:300的一半是150,加70的一半35,共185,再加4的一半2,共187. 這就是原數的四分之一. 按第一種辦法來做,以3乘之:3乘100得300;加3乘80,卽240,共540;再加3乘7,卽21,共得561。按第二種辦法來做,由原數748中減去其四分之一,卽減去187. 這減數接近於'整數'200,只差13. 在被減數上加13,得761;然後減去200,剩下561.

第二種辦法適用於當分子只比分母小1的情形,而第一種辦法則適用於一切情形,沒有例外. 這就是說,第一種辦法比較一般,而第二種辦法,在它適用的情形之下,計算起來稍爲簡單一點.

現在試用第一種方法來計算344的$\frac{5}{8}$. 我們先找344的$\frac{1}{8}$;這需要以8來除344. 先以2除344,得172;再用2除一次,得86,再用2除一次,得43. 這就是344的八分之一. 但我們要這樣5份. 故剩下的事情就是要以5乘43:43的十倍是430,它的一半是215. 這就是說,344的$\frac{5}{8}$是215.

我們用第二種方法來計算1449的$\frac{6}{7}$. 1449的七分之一是207 (1449等於14個百加49;以7除14個百得2百,以7除49得7,故結果得207). 剩下的事情是要由1449減去207,如此得1242. 這就是所求的數.

例題: 求1972的$\frac{3}{4}$; 1035的$\frac{2}{5}$; 5420的$\frac{7}{20}$; 3340

的 $\frac{19}{20}$; 837 的 $\frac{1}{7}$; 5343 的 $\frac{2}{3}$; 711 的 $\frac{4}{3}$(最好這樣做:先求 711 的三分之一,然後把它加到 711 上去); 387 的 $\frac{10}{9}$(做法如上例); 6812 的 $\frac{3}{10}$.

百分數

所謂百分數就是一個數量的百分之幾. 如果某工廠裏有 2000 工人,則 20 人就是全體工人的百分之一(寫做 1%). 在一切業務範圍裏,很難想像有不需要處理百分數的地方. 人口的增加,生產計劃的完成過程,都用百分數表示;社會主義勞動競賽的核算按百分數來進行;儲蓄銀行按百分數來支付利息. 所以關於百分數的問題,要會解得又快又沒有錯誤纔行.

對於最簡單的問題要學會用心算來解.

關於百分數有三種型態的問題. 第一種問題是:已設某一數量,要來求相當於所設數量的某一指定的百分數的實際數量. 第二種問題是:已設兩個數量,需要知道其中一個相應於另一個的百分之幾. 第三種問題是:已設一個數量,並知道它是某未知數的百分之幾,求這個未知數.

在解釋這三種問題之前,我們先注意下面那個表. 這表指出百分數與其相應份額之間的對照.

百分數	份額	百分數	份額	百分數	份額
50%	$\frac{1}{2}$*	10%	$\frac{1}{10}$*	60%	$\frac{3}{5}$
2%	$\frac{1}{50}$*	75%	$\frac{3}{4}$*	80%	$\frac{4}{5}$
25%	$\frac{1}{4}$*	1%	$\frac{1}{100}$*	$33\frac{1}{3}\%$	$\frac{1}{3}$
4%	$\frac{1}{25}$*	15%	$\frac{3}{20}$	$66\frac{2}{3}\%$	$\frac{2}{3}$
20%	$\frac{1}{5}$*	40%	$\frac{2}{5}$	$12\frac{1}{2}\%$	$\frac{1}{8}$
5%	$\frac{1}{20}$*				
100%——總數*					

這表須要記得爛熟，如不能全部記住，也無論如何要記住有星點標出的那些．

現在來解第一類問題．設在工廠裏有 2140 個工人，其中男性佔 30%．問男工人共有多少？

顯然，這就是要找 2140 的 30%．30 是 3×10．我們先找 10%，即十分之一．這就是 214 人．而 30% 是它的三倍大．我們以 3 乘 214，得 642．這就是說，工廠裏有 642 個男工人．

在此再舉一例：規定要製造完成的零件數目是 225．某工人超額完成 16%．問他多做了多少件？

我們這樣算法：16 是 4 的 4 倍．所以我們只要找出 4%，然後把它 4 倍起來就行了．但 4% 即 $\frac{1}{25}$．這就是說，我們要以 25 除 225．如此得 9．然後以 4 乘 9，得 36．所以，那工人多做了 36 件零件．

現在轉到第二種問題上來。設我有5個盧布，化去了3個。問我把自己的錢化去了百分之幾？

首先我們了解，如果把5盧布與3盧布以同一倍數乘之，其百分數並不受影響。現在把兩數都20倍起來，則5變成100，而3變成60。所以，我化去了所有錢數的60%．

這種問題比較複雜的通常需要做兩位數的除法．這我們在第二章裏再討論．

最後我們來解第三種問題。在班裏有6個高才生，這佔全班人數的20%．問全班有多少學生？

這樣做法：20% 相當於$\frac{1}{5}$的份額。全班的五分之一是6個學生．這就是說，全班有$5\times6=30$個學生．

再舉一個例．被剔出作廢品的零件數是18，這佔全部出產的$2\frac{1}{2}\%$。問總共生產了多少零件？既然$2\frac{1}{2}\%$是18件，則5%是36件，而10%是72件．但10%是全部出產的十分之一。這就是說，全部出產應該是$72\times10=720$件．

例題：(1) 求368的2%； 720的3%； 640的5%； 128的$12\frac{1}{2}\%$； 725的4%； 40的$2\frac{1}{2}\%$（$2\frac{1}{2}\%$就是5%的一半）； 1400的$1\frac{1}{2}\%$； 80的75%； 3的50%； 240的$2\frac{1}{2}\%$； 1280的15%； 3.5的10%．

(2) 求出：8是10的什麼百分數？（‘多少百分數’也常常可以說‘什麼百分數’．）6是20的什麼百分數？ 100是1000

的什麼百分數？ 10是50的什麼百分數？ 1是8的什麼百分數？ 9是50的什麼百分數？ 12是48的什麼百分數？ $\frac{1}{2}$是1的什麼百分數？ 3是75的什麼百分數？

(3) 什麼數的10%等於3？ 什麼數的5%等於7？ 什麼數的25%等於$\frac{1}{4}$？

二 筆 算

數的寫法

我們來温習一下，按十進制整數與小數如何寫法？基本的規則如下：兩個並立的數碼，左邊所表示的單位是右邊的十倍．

如果寫的是整數（沒有小數），則最右邊的一個數碼表示個位，稍左的一個表示十位，再稍左的一個表示百位，更稍左的一個表示千位，如此類推．如果整數帶有小數，則整數部分個位數後用‘小數點’（.）隔開．在小數點右邊第一位表示十分位，第二位表示百分位，第三位表示千分位，餘類推．如果某一位缺少的，則在其相當的位置上安一個零．例如，寫 1023.502，這表示一個數，它的千位數是一，百位數沒有，十位數是二，個位數是三，十分位數是五，百分位數沒有，千分位數是二（讀做：一千零二十三又千分之五百零二）．

如果一個數完全不含整數部分（這種數叫做純小數），則寫起來以一個 0 起頭，然後寫小數點，再按常例寫其小數部分．例如，百分之二十七寫成這樣：0.27（讀做：零又百分之二十七）；萬分之三百零四寫成這樣：0.0304；千分之七寫成這樣：0.007．

10 的乘方

我們常常會遇到末尾有許多0的數字．例如：

(1) 蘇聯1939年的總人口是170,500,000人．

(2) 地球到太陽的距離等於149,500,000公里．

(3) 地球上陸地總面積等於14,900,000,000公頃．

這樣的數字很難寫也很難念．

爲得寫起來容易一點，我們利用‘數的乘方’這個概念．一數乘它自己，這乘積叫做該數的‘平方’．例如，$9=3\times3$；這就是說，9是3的平方．同樣，100是10的平方．35的平方等於1225，類此等等．三個同樣數碼的連乘結果叫做該數的‘立方’．例如2乘2得4；再乘2，得8；換句話說，$8=2\times2\times2$．我們說，8是2的立方．同樣，27是3的立方(3乘3得9，3乘9得27)，1000是10的三次方，等等．

數的平方我們在計算地區的面積時遇到，立方則在計算物體的體積時遇到．一塊邊長9公尺的正方地區，其面積爲$9\times9=81$平方公尺．一間長寬高都等於4公尺的房間，其體積爲$4\times4\times4=64$立方公尺．

有時需要把三個以上相等的乘數連乘起來．四個相等的乘數之積叫做該數的四次方，五個的叫做五次方，餘類推．例如，81，等於$3\times3\times3\times3$，是3的四次方．$2\times2\times2\times2\times2=32$，這乘積是2的五次方．1000000是10的六次方．不難了

解，每個 10 的乘方都表示一個 1 後面跟着一串 0 的數，而乘方的次數就等於 0 的個數．（我們注意，數的平方也叫做二次方，立方也叫做三次方．）事實上，10 的二次方就是 $10\times10=100$（兩個 0）；10 的三次方就是 $10\times10\times10=1000$（三個 0）；10 的四次方就是 $10\times10\times10\times10=10000$（四個 0），餘類推．

任何數的任何次方都可以寫成一連串數的乘積，例如：

$$64=2\times2\times2\times2\times2\times2.$$

但這種寫法未免太累贅了．所以想出了簡化的寫法．按這簡化的寫法是把連乘的乘數只寫一次（這叫做'乘方的底'），而在這乘數的右上角寫一個較小的數碼，表示乘方的次數．例如：5^3 代表 $5\times5\times5$，10^6 代表 1000000，等等．這個表示乘數重複多少次的小數碼叫做乘方的'指數'．這就是說，在我們這例子（$10^6=1000000$）裏，一百萬是 10 的 6 次的乘方；10 是底；6 是指數．

例題：（1）不用指數寫出下列各乘方：

$$2^4=16;\quad 3^5=?;\quad 5^2=?;\quad 7^3=?$$

（2）用指數符號簡寫下列各乘式及數字：

$2\times2\times2\times2\times2$；　$3\times3\times3\times3\times3$；　10000000000；

$6\times6\times6\times6\times6\times6\times6\times6$；　$17\times17\times17\times17\times17\times17\times17$．

現在回到最初的問題上去：末尾有一大串 0 的數如何簡寫？我們任意取一個這樣的數來看，比方說 314000000，這數

可以表成兩個數的乘積：一個末尾沒有0，一個是1帶着一串0：

$$314\times 1000000.$$

但1帶着一串0的數我們可以寫成10的乘方(在本例爲6次方)，即

$$314000000=314\times 10^6.$$

乘號(×)常常用一個點子(·)替代(例如$2\times 3=6$寫成$2\cdot 3=6$).

於是末尾帶一大串0的數就可以寫得特別簡單了：

$$314000000=314\cdot 10^6.$$

我們試把$51\cdot 10^5$這個數用通常方式來寫並且來念．10的5次方就是1帶5個0，所以51後面應該寫5個0，即5100000.

這數我們念‘五百一十萬’.

回到本節開頭那幾個例子上去：

(1) 蘇聯1939年總人口是170,500,000人.

(2) 地球到太陽的距離等於149,500,000公里.

(3) 地球上陸地總面積等於14,900,000,000公頃.

這些數字我們現在可以寫成這樣：

(1) 蘇聯1939年總人口是$1705\cdot 10^5$人.

(2) 地球到太陽的距離等於$1495\cdot 10^5$公里.

(3) 地球上陸地總面積等於$149\cdot 10^8$公頃.

例題: (1) 用乘方指數簡寫以下各數: 9600000000; 180000; 5183000000; 3200000; 43400; 1700000; 20000000.

(2) 用尋常方式寫出並念出以下各數: $43\cdot10^8$; $12\cdot10^5$; $3\cdot10^{11}$; $683\cdot10^8$; $51342\cdot10^2$; $1616\cdot10^4$; $17\cdot10^7$; $2\cdot10^{12}$; $48\cdot10^5$; $117\cdot10^6$.

加法與減法

關於加法與減法幾乎沒有什麼可說的. 通行的寫法已經是最方便的. 要緊的只是寫算草的時候要使個位與個位對齊,十位與十位對齊,等等. 運算符號最好要寫出來,並且在減法需要向上一位'借'一個單位時最好用點子標出來. 如此計算就容易檢查了.

例如:

$$\begin{array}{r} 1\,1 \\ 18862 \\ +\quad 4524 \\ \hline 23386 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 32613 \\ +\quad 5820 \\ \hline 38433 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dot{8}\,4\,\dot{3}\,2 \\ -\,6\,6\,0\,7 \\ \hline 1\,8\,2\,5 \end{array}$$

做多項的加法時,計算可以設法合理化. 我們試看這個例子:

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 2 & 3 & 2 & \\ & & 8 & 3 & 6 & 3 \\ & 1 & 5 & 4 & 8 & 9 \\ & & & 8 & 8 & 1 \\ & & 2 & 6 & 1 & 7 \\ & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ + & & 6 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 5 & 7 & 7 & 0 & 3 \end{array}$$

我們照尋常的辦法按縱行來相加，由右邊加起，但在每行裏不按順序加而把其中湊得成整十的各項先一組一組地加起來.

我們現在由個位開始. 3加7得10，9加1得10，共得20；加2，再加1，共得23. 把3寫下來，把2記在十位上. 這個2加8得10；6加4亦得10，共得20；再加8加1又加1，共成30. 把0寫下，把3記在百位上. 這個3加3加4得10，8加2又得10，共得20，再加6加1，共27. 把7寫下，把2記在千位上. 這個2加8成10，4加6又成10，共20，加5加2，共27. 把7寫下，把2與萬位的1與2相加共得5. 用不着經過多少訓練，這種'分組法'或'湊十法'就可使加法變容易，並且可以做得比較快而且比較正確. 爲免得鬧錯，起初分組不妨用鉛筆標出(就像本例中這樣做法)，等稍熟練後，這就不必要了.

如果項數很多，則加法最好分成幾批來做，通常分兩批.

例如：

$$\begin{array}{r} 2834 \\ 5346 \\ 18511 \\ 997 \\ 3654 \\ 16995 \\ 2218 \\ +\quad 614 \\ \hline \end{array}$$

我們把這些項分成兩組:

$$\begin{array}{r} 2834 \\ 5346 \\ 18511 \\ +\quad 997 \\ \hline 27688 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3654 \\ 16995 \\ 2218 \\ +\quad 614 \\ \hline 23481 \end{array}$$

將所得兩個和再加起來:

$$\begin{array}{r} 27688 \\ +\quad 23481 \\ \hline 51169 \end{array}$$

最後這個數(51169)就是問題的答數.

我們再來注意一下許多彼此接近的數的加法. 在這情形我們不寫成縱行而寫成橫行. 例如:

$$81+83+79+85+78+80+81+77+78=?$$

我們把每項都用同一與它接近的'整數'來替代(在本例以 80 替代),並且就每項標出其對'整數'的不足與剩餘;不足帶減號,剩餘帶加號;不足寫在下面,剩餘寫在上面. 寫出來像下面這種樣子:

$$\overset{+1}{80}+\overset{+3}{80}+\underset{-1}{80}+\overset{+5}{80}+\underset{-2}{80}+80+\overset{+1}{80}+\underset{-3}{80}+\underset{-2}{80}$$

$$=9\times80+10-8=720+10-8=722.$$

我們先總計同一數重複幾次(在本例是 80 重複了 9 次),把它乘起來,然後加上寫在上面的各數,再減去寫在下面的各數.

如此我們把一大串數的加法變成了簡單的乘法心算了.

例題:

83456	510	211	56883	33
9633	326	215	315922	31
7255	1848	208	54757	29
21177	535	213	4143	25
+ 2815	984	206	55261	34
	112	203	+ 128	30
	68	210		28
	1432	217		27
	815	+ 211		32
	+2611			30
				+31

以 10 及 10 的乘方爲乘數或除數的乘法與除法. 10 的負指數乘方

以 10 或 10 的乘方來乘一個整數,只要在被乘數末尾添上幾個 0 就行了. 以 10 的乘方除一個末尾帶一串 0 的數,也只要在它末尾删去幾個 0 就行了. 所添或所删的 0 的個數就等於乘數或除數中的 0 的個數. 有時候除數中的 0 的個數多於被除數末尾的 0 的個數. 在這情形答數就成帶小數的形式. 例如: 以 100 除 590, 把末尾兩位數碼用小數點切斷, 得 5.90, 卽 5.9.

在以 1 後帶一串 0 的數來乘或除一個小數時, 只要把小數點向右(做乘法時)或向左(做除法時)移幾位就行了. 移動

的位數等於乘數或除數中 0 的個數．例如：

$$0.0537\times1000=53.7;$$

$$0.5377\div1000=0.0005377.$$

10 的乘方常常寫成帶指數的簡化形式．這樣寫法的乘方乘起來可以有很簡單的規則．例如，我們來以 10^5 乘 10^4．10 的 4 次方就是 1 後帶 4 個 0，10 的 5 次方就是 1 後帶 5 個 0；故其乘積可寫成 1 後帶 9 個 0 或 10^9．在各乘數中 0 的總個數恰好等於乘積中 0 的個數．這就是說，乘積的指數 (9) 恰好等於各乘數指數之和：$10^5\times10^4=10^{5+4}=10^9$.

同樣，在做 10 的乘方的除法時，商的指數恰好等於被除數的指數減去除數的指數．例如 $10^7\div10^5=10^2=100$．這讀者很容易加以證驗，只要詳細點寫出來就行了．(讀者如已有一點代數初步知識，則當然知道乘方的尋常運算規則.)

我們再注意兩點．

第一點關於以較小的數乘 10 的乘方來表示大數的寫法：如果用小數，則每個數可以寫成幾種意義相同的形式．例如，1930 年全世界的總人口 1,903,000,000 人，這個人數可以寫成：

$$1903\cdot10^6;$$

$$\text{或}\quad 190.3\cdot10^7;$$

$$\text{或}\quad 19.03\cdot10^8;$$

$$\text{或}\quad 1.903\cdot10^9$$

不難了解，這些寫法都表示同一個數.

第二點要注意的是關於很小的數字的表示法. 這也約定了一種寫法.

我們約定：

把 0.1 寫成 10^{-1}；

把 0.01 寫成 10^{-2}；

把 0.001 寫成 10^{-3}；

餘類此，即 1 前面頂着幾個 0 的這種小數可以用指數來寫，只是指數前要冠以負號. 指數的數值等於小數中 0 的個數，小數點前面那一個 0 也算在內. 例如，10^{-7} 如果詳細寫出來就是 0.0000001.

現在用簡化的形式(或者說，用'指數的'形式)來寫 0.0007 這個數. 我們懂得：$0.0007=7\times0.0001=7\cdot10^{-4}$. 同樣，$0.00293=293\times0.00001=293\cdot10^{-5}$.

這裏所用的尋常的指數以及帶負號的指數，只是用來作數字的簡寫. 但是在代數裏面，則這種簡寫還可以用來簡化計算.

例題：(1) 2.35×10； 0.17×1000； $243\div1000$； $0.15\div100$； 34.43×1000； $8\div100$； $3.1\div1000$； $11\div10000$； $10^4\times10^3$； $10^3\times10^5$； $10^8\div10^2$； $10^{10}\div10^3$.

(2) 把下列各數寫成指數的形式： 0.03； 0.017； 0.00006； 0.0315； 0.00001617.

(3) 把下列各數寫成尋常小數的形式： $13\cdot10^{-5}=13\times0.00001=0.00013$； $2\cdot10^{-7}$； $27\cdot10^{-6}$； $6\cdot10^{-4}$； $28\cdot10^{-3}$； $135\cdot10^{-10}$； $83\cdot10^{-12}$； $1513\cdot10^{-9}$.

以一位數爲乘數或除數的乘法與除法

在以一位數乘多位數時，宜習慣於把算草寫成橫行．我們按尋常慣例由多位數的個位乘起，然後依次乘其十位，百位，等等．例如我們來以 7 乘 83563．寫法如下：

$$83563\times7=584941.$$

乘積中的數目從個位起一位一位地隨算隨寫，不寫多餘的．

以一位數來除一個數可以寫成橫行．我們來看看如何算法．例如我們以 6 來除 8391．可寫成這樣：

$$8391\div6.$$

我們這樣算法：以 6 除 8 得 1 餘 2 (把 1 寫下來： $8391\div6=1\cdots$)；以 6 除 23 得 3 ($6\times3=18$) 餘 5 (把 3 寫下來： $8391\div6=13\cdots$)；以 6 除 59 得 9 ($6\times9=54$) 餘 5 (把 9 寫下來： $8391\div6=139\cdots$)；以 6 除 51 得 8 餘 3．把 8 寫在商數上，而餘數另寫，或者在商數後附一個分數：餘數/除數；在本例爲 $\frac{3}{6}$ 即 $\frac{1}{2}$．全部寫法如下：

$$8391\div6=1398(餘\ 3),$$

或

$$8391\div6=1398\frac{3}{6}=1398\frac{1}{2}.$$

除數或乘數如果是像 70，900，0.03 等等樣子的數

(其中只有一位數碼不是 0)，則做法也是一樣．我們以一位數來乘或除，然後再添或删幾個 0，或移動小數點的位置．

例如以 0.04 來乘 8864，可寫成這樣：

$$8864\times0.04=354.56.$$

以 4 乘 8864 得 35456．然後用小數點由右端切下兩位．

例題：5667×9； 34681×4； 268×600； 32.85×9； 468×0.6； $3264\div8$； $52119\div9$； $843\div5$； $126300\div30$； $534\div40$．

多位數的乘法

我們平常所採用的多位數乘法的規則並不是最好的方法．它的主要好處是它可以不停地運算下去，適用於一切情形而無例外．但如果運算安排得好，我們常常可以簡化計算並且節省時間．記住所有這些情形是不必要的．只要記住兩三種最流行的就够了．把這幾種搞熟是很有益處的．

我們先來注意一下一般的情形．按尋常佈草法，我們本應該把較小的一個乘數放在下面．但如果較大的乘數其各位數碼本身的數值較小，或者各數碼有彼此相同的，則宜倒過來把較大的乘數放在下面，這樣計算起來比較省力些．例如我們要計算 89 與 232 的乘積．這裏 232 這個乘數比較大，但其各數碼本身的數值卻比 89 的各數碼小，而且其中有重複的．計算可以這樣來做：

$$\begin{array}{r} 89 \\ \times\ 232 \\ \hline 178 \\ 267 \\ +\ 178 \\ \hline 20648 \end{array}$$

這要比下面這樣算法容易些:

$$\begin{array}{r} 232 \\ \times\ 89 \\ \hline 2088 \\ +\ 1856 \\ \hline 20648 \end{array}$$

在第一種及第二種情形裏都要做兩次乘法:在第一種情形要用2與3乘,在第二種情形要用8與9乘;但用2與3乘比用8與9乘要容易些. 當然,如果兩個乘數的位數相差太遠時,比方說一個是二位的,另一個是六位的,則上面這原則就不適用了. 這時候無論是什麼數碼總還宜把位數少的乘數放在下面,因爲這樣加的時候省力多了.

現在我們來討論幾種個別的情形. 我們常常可以在心裏把乘數分成這樣的幾項,每項都是另一項的兩倍三倍或四倍. 例如以175來乘564. 我們有:

$$175=100+50+25.$$

先以100乘564;把所得乘積以2除之;把這所得結果再以2除之;然後把三個結果都加起來. 算草如下:

$$564\times175(175=100+50+25)$$

$$\begin{array}{r} 56400 \\ 28200 \\ +\ 14100 \\ \hline 98700 \end{array}$$

還有一種情形,乘法也可以簡單得多:乘數的各數碼一個爲另一個的二倍或三倍．例如乘數是248,312,或214之類的數．現在我們試以214來乘5387．按尋常寫法爲·

$$\begin{array}{r} 5387 \\ \times\ \ 214 \\ \hline \end{array}$$

但我們不由最右一位數碼乘起,而由中間那位最小的數碼乘起,在本例由1乘起．既然這個1實際上並不是1,而是10,則寫乘的結果時應向左推移一位:

$$\begin{array}{r} 5387\ \\ \times\ \ 214\ \\ \hline 5387\cdot \end{array}$$

爲避免混亂,我們在個位的地方加一個點(或0);然後再以2百來乘,並且把結果向左推移兩位來寫:

$$\begin{array}{r} 5387\ \ \\ \times\ \ 214\ \ \\ \hline 5387\cdot\ \\ 10774\cdot\cdot \end{array}$$

剩下的事情就是要以4來乘5387．但這只要把剛纔乘得的結果二倍起來就行了．這回乘得的結果卻要把個位與被

乘數的個位對齊來寫(因為乘數是個位的). 全部算草寫法如下:

```
        5 3 8 7
   ×      2 1 4
   ─────────────
        5 3 8 7 •
    1 0 7 7 4 • •
+       2 1 5 4 8
─────────────────
    1 1 5 2 8 1 8
```

這裏再舉兩個例:

(1)

```
        7 9 7
  ×     3 6 9
  ───────────
  2 3 9 1 • •
    4 7 8 2 •
+     7 1 7 3
─────────────
  2 9 4 0 9 3
```

(先以 3 來乘 797; 把所得結果二倍起來, 這就等於以 6 乘 797; 再以 3 乘第一次乘得的結果, 這就等於以 9 乘 797 的乘積.)

(2)

```
        5 4 9
  ×     4 8 2
  ───────────
      1 0 9 8
  2 1 9 6 • •
+   4 3 9 2 •
─────────────
  2 6 4 6 1 8
```

(這裏所有乘法無非就是二倍起來.)

如果乘數中有一個接近於 10 的任何正負乘方(即用 1 與若干個 0 表出的數), 則在這種情形運算可以大為簡化. 例如, 我們來乘 1835 與 987. 用 987 來乘是很累贅的: 數碼很大, 要掛在心裏, 現在我們注意到, 987 接近於 1000, 即 $987 = 1000 - 13$. 如此我們可先以 1000 乘 1835, 然後再以 13 乘 1835 並且由第一結果中減去第二結果.

全部運算佈列如下:

$$1835\times 987\,(987=1000-13)$$

$$\begin{array}{rr} & 1835\times 1000=1835000 \\ \times\ \ 13 & -\ \ 23855 \\ \hline 5505 & 1811145 \\ +\ 1835 & \\ \hline 23855 & \end{array}$$

這裏再舉一個例:

$$6893\times 89\,(89=100-11)$$

$$\begin{array}{rr} & 6893\times 100=689300 \\ +\ 6893 & -\ 75823 \\ \hline 75823 & 613477 \end{array}$$

(注意在這算草裏是省略了一部分的.)

多位數的除法

在做除法時宜注意兩種情形:(1)被除數可拆成幾項,使每項都容易以除數來除;(2)除數可劈成因數.我們來討論這些情形.

我們以 35 來除 385. 這裏我們看出 $385=350+35$. 這就是說,$385\div 35=(350+35)\div 35$. 但 350 以 35 除得 10,35 以它本身除得 1. 故共得 11. 所以,$385\div 35=11$.

再舉一例:我們以 14 來除 2837. 這裏我們看出:$2837=2800+28+9$. 每項以 14 除之,各得 200、2 與 $\frac{9}{14}$. 把所得各數都加起來,得 $202\frac{9}{14}$. 運算可寫成這樣:

$$2837\div 14=(2800+28+9)\div 14$$
$$=200+2+\frac{9}{14}=202\frac{9}{14}.$$

如果被除數接近於一個比較容易以除數來除的'整數',則我們先把它寫成兩數之差的形狀:一個'整數'減去其補充數.然後照上面的辦法來處理,只是最後一步不是加而是減. 例如,我們試以 32 除 3104. 這裏我們看出 3104=3200-96.然後以 32 除 3200 得 100; 以 32 除 96 得 3. 由 100 減去 3,得最後答數 97.

全部手續可寫成這樣:

$$3104\div 32=(3200-96)\div 32=100-3=97.$$

現在轉到第二種情形. 我們試以 54 除 4698. 這個除數是兩個一位數的乘積: $54=6\times 9$. 以一位數來除是容易的.所以我們先用 6 來除,然後再用 9 來除此所得結果. 運算佈列如下:

$$4698\div 54=?$$
$$4698\div 6=783;\quad 783\div 9=87.$$

這樣比尋常除法簡單多了.

我們只講這幾點. 其餘情形宜用尋常除法.

例題: $3468\div 17$; $1776\div 48$; $8557\div 43$; $15195\div 15$; $2048\div 32$; $3969\div 63$; $2296\div 56$; $16665\div 15$; $10240\div 64$; $10149\div 51$.

分數與小數的計算

在解實際問題時常常需要同時處理分數與小數．例如，需要做像下面這樣的運算：

$$0.3+\frac{1}{5};\quad \frac{1}{8}-0.017;\quad \frac{2}{7}\times 0.13;\quad \frac{3}{5}\div 4.6,\text{等等}.$$

我們要注意，在做加減法時需要把全部都化成分數或全部都化成小數．用小數計算起來比較方便．所以平常一切分數都化爲小數．這在有近似結果的情形尤爲方便．如果分母不大，並且需要正確的結果，則最好把所有小數都化爲分數，以免處理循環小數．

我們來温習一下，如何把小數化爲分數：例如，要化 0.36 爲分數．先念一下這個小數：百分之三十六；這就是說，分母應該是 100，而分子是 36．所以我們可寫下 $\frac{36}{100}$，並且在可能時加以約簡；在本例可以 4 約一下：

$$0.36=\frac{36}{100}=\frac{9}{25}.$$

所以，要化小數爲分數，可念一下該小數，於是照所念寫成分數，然後儘可能加以約簡．

如果要化分數爲小數，則只要按尋常除法以分母除分子就行了．整數的除法有時除得盡，如此我們得到正確的答數；有時（多半）則除不盡．在後一種情形必定得循環小數．循環小數中循環節的位數不會超過分母減 1．如果做除法時得循

環小數,則我們只好滿足於近似的結果.

例: (1) 化 $\frac{5}{32}$ 爲小數. 我們以 32 除 5.

```
     5 0  | 3 2
   - 3 2  |________
   ------   0.1 5 6 2 5
     1 8 0
   - 1 6 0
   --------
       2 0 0
     - 1 9 2
     --------
           8 0
         - 6 4
         ------
           1 6 0
         - 1 6 0
         -------
               —
```

我們得 0.15625.

(2) 化 $\frac{3}{7}$ 爲小數. 我們以 7 除 3.

```
     3 0  | 7
   - 2 8  |________________
   ------   0.4 2 8 5 7 1 4…
       2 0
     - 1 4
     ------
         6 0
       - 5 6
       ------
           4 0
         - 3 5
         ------
             5 0
           - 4 9
           ------
               1 0
             -   7
             ------
                 3 0
                 …
                 …
```

這永遠除不完. 如此得到一個循環小數:

0.428571428571428571…,

這數循環節的位數等於6，事實上沒有超過除數減1(7－1=6)．這循環小數可以寫成這樣：0.(428571)，卽只寫其第一個循環節而用括弧把它括起來．(譯者註：按我國習慣，循環小數寫成這樣的形狀：$0.\dot{4}2857\dot{1}$，卽在循環節兩端各加一個點；如循環節只有一位，則寫成這樣：$0.\ddot{3}$.)

例題：(1) 將以下各數化爲簡單分數：0.72；　0.0128；0.625；　0.17；　0.3；　0.2.

(2) 把以下各數化爲小數：$\frac{1}{5}$；$\frac{1}{8}$；$\frac{3}{4}$；$\frac{1}{40}$；$\frac{3}{80}$；$\frac{9}{16}$；$\frac{7}{32}$；$\frac{11}{160}$；$\frac{1}{3}$；$\frac{1}{9}$.

如果要做分數與小數混合式的加減法，而其中分數的分母不很大，則宜先一律化爲分數而按尋常方法計算之.

例如，(1) $0.42+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+0.016$

$$=\frac{42}{100}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{16}{1000}$$

$$=\frac{21}{50}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{125}$$

$$=\frac{21}{50}^{15}+\frac{1}{3}^{250}+\frac{2}{5}^{150}+\frac{2}{125}^{6}$$

$$=\frac{315+250+300+12}{750}=\frac{877}{750}=1\frac{127}{750}.$$

公分母是750．補充乘數是15，250，150與6.

(2) $\frac{4}{7}-0.48=\frac{4}{7}-\frac{48}{100}=\frac{4}{7}^{25}-\frac{12}{25}^{7}=\frac{100-84}{175}=\frac{16}{175}.$

$$(3)\ 0.096-\frac{1}{11}=\frac{96}{1000}-\frac{1}{11}=\frac{12}{125}-\frac{1}{11}$$
$$=\frac{132-125}{1375}=\frac{7}{1375}.$$

例題: $\frac{2}{3}-0.64$; $\frac{5}{7}+0.15+\frac{1}{3}$; $0.175-\frac{1}{9}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+0.03+0.55$; $\frac{3}{4}-0.65$; $0.45-\frac{3}{11}$.

要做分數的乘除法,不需要記住一切分數乘除法以及分數與整數、小數與分數等等的乘除法的法則.要緊的只是要記牢分數與分數的乘除法法則.

分數與分數的乘法法則:把分子乘起來,這就是乘積的分子;把分母乘起來,這就是乘積的分母.

例如,
$$\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{2\times3}{7\times5}=\frac{6}{35}.$$

要做分數的除法,只要以除數的倒數來乘被除數就行了.

例如,
$$\frac{2}{7}\div\frac{3}{5}=\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{10}{21}.$$

在做分數與小數的乘除法時,並不需要把它們一律化爲分數或一律化爲小數.如果乘數、被除數或除數是小數或整數,則可以在它下面寫一個1作分母(當然數值並不因此起變化),然後按分數乘除法法則來演算.

例如我們以$\frac{2}{15}$來乘4.5.我們寫:

$$4.5\times\frac{2}{15}=\frac{4.5}{1}\times\frac{2}{15}=\frac{4.5\times2}{1\times15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

這裏並不需要把4.5化爲分數,或把$\frac{2}{15}$化爲小數.

再舉一例，我們以 17.5 來除 $\frac{21}{4}$. 我們寫:

$$\frac{21}{4}\div 17.5=\frac{21}{4}\div\frac{17.5}{1}=\frac{21\times 1}{4\times 17.5}=\frac{21}{70}=0.3.$$

例題: (1) $0.24\times\frac{5}{6}$; $0.72\times\frac{15}{8}$; $\frac{5}{7}\times 0.056$; $\frac{3}{7}\times 0.18$; $0.311\times\frac{2}{5}$; $0.14\times\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}\times 0.11$.

(在後四個例題中，演算時候不會進行得像前三題那樣順利. 例如我們以0.18乘$\frac{3}{7}$，得 $\frac{0.54}{7}$. 這裏不能再約簡了，以 7 除這小數是永遠除不完的. 所以我們把分子與分母都用 100 來乘，這樣可以消除分子上的小數，而得 $\frac{54}{700}$，然後以2約之，得到最終的答數: $\frac{27}{350}$.)

(2) $0.85\div\frac{17}{20}$; $\frac{5}{11}\div 0.4$; $\frac{3}{7}\div 0.03$; $\frac{6}{5}\div 0.18$; $0.1\div\frac{4}{3}$; $0.08\div\frac{2}{5}$; $0.17\div\frac{7}{11}$; $2\frac{3}{4}\div 0.15$.

(在最後一題中先要把帶分數 $2\frac{3}{4}$ 化爲假分數. 2 就是 $\frac{2\times 4}{4}$ 或 $\frac{8}{4}$，加 $\frac{3}{4}$，成 $\frac{11}{4}$.)

如果要乘幾個分數與小數，可先在線上面寫出所有的分子，而在線下面寫出所有的分母. 然後，如果可能的話，加以約簡. 最後把線上的數都乘起來作分子，線下的數都乘起來作分母.

例如，我們來計算 $\frac{3}{4}\times 0.25\times\frac{8}{17}\times\frac{3}{5}\times 0.034$. 我們這樣

寫法:

$$\frac{3}{4}\times0.25\times\frac{8}{17}\times\frac{3}{5}\times0.034=\frac{3\times0.25\times8\times3\times0.034}{4\times17\times5}$$

(8 與 4 約; 0.25 與 5 約; 0.034 與 17 約.)

$$=\frac{3\times0.05\times2\times3\times0.002}{1\times1\times1}=0.9\times0.002=0.0018.$$

再舉一例: 求 $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{11}$, 0.121, $\frac{1}{9}$ 與 0.15 的乘積. 我們寫:

$$\frac{1}{3}\times\frac{7}{8}\times\frac{5}{11}\times0.121\times\frac{1}{9}\times0.15$$

$$=\frac{7\times5\times0.121\times0.15}{3\times8\times11\times9}$$

(0.121 與 11 約; 0.15 與 3 約.)

$$=\frac{7\times5\times0.011\times0.05}{8\times9}=\frac{35\times0.00055}{72}=\frac{0.01925}{72}$$

$$=\frac{1925}{7200000}=\frac{77}{288000}.$$

例題: $\frac{3}{5}\times\frac{8}{7}\times0.11\times\frac{5}{9}\times0.196$;

$\frac{2}{3}\times0.075\times\frac{17}{5}\times\frac{7}{2}\times\frac{1}{5}$;

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{11}\times0.033\times0.35$;

$0.18\times\frac{2}{9}\times\frac{4}{5}\times0.1\times4\frac{8}{11}$.

(在最後一題中先把帶分數 $4\frac{8}{11}$ 化爲假分數.)

百分數的計算

在第一章裏我們已討論過百分數的基本問題．如果已知的數不像在第一章例題中那樣簡單，則問題需要在紙上來解．要在紙上計算百分數，我們應該學會用字母 x 來表示未知數，把問題列成方程式，並且用代數方法來解它，這樣就便利得多．用代數方法來解時，我們不需要像在第一章裏那樣把百分數問題分爲三類．它們都合併成爲同一類型，並且可用同一方法來解．

在此講一點我們所需要的算術與代數中的知識．

(1) 用線來表示商數(除法)．這我們其實已經知道．要寫出以 7 除 5 的商數，可以用線寫作 $\frac{5}{7}$．同樣以1.7除3.14，可寫成 $\frac{3.14}{1.7}$ 的形狀．

(2) 相等分數的變化法則．例如，設有兩個相等的分數 $\frac{5}{7}$ 與 $\frac{15}{21}$，即

$$\frac{5}{7}=\frac{15}{21}.$$

在這情形，如果我們把第一個分數的分母移到第二個分數的分子上去，等式仍不破壞．如此我們得到這個等式：

$$5=\frac{7\cdot 15}{21}.$$

也可以把第一分數的分子移到第二分數的分母上去，但在這

情形被移去的分子位置上要寫一個 1:

$$\frac{1}{7}=\frac{15}{5\cdot 21}.$$

這個交叉移項法的規則很容易記憶，並且誰如果想計算得快，就須把它記牢．

(3) 未知數可以用字母 x 來表示，並且以後就可以把它跟尋常的數一樣來加以運算．

在每個百分數問題裏事實上有四個數參加在內．其中三個是問題所指出的，而第四個是待尋求的未知數．

要解問題時須以字母 x 代表未知數並且寫出等式：一數除以其相應百分數所得的商等於另一數除以其相應百分數所得的商．然後用交叉移項法的規則把這等式化爲這樣的形狀：等式的一邊成爲 x，而另一邊是一個由已知數構成的式子．計算出這個式子的結果就得未知數 x 的數值．

例如，我們來求 845 的 23% 是多少，我們可以這樣進行：未知數 x 除以其相應百分數 23，這結果就等於 845 除以其相應百分數 100．寫成式子就是這樣：

$$\frac{x}{23}=\frac{845}{100}.$$

把分母 23 移過去並計算所得的式子：

$$x=\frac{23\cdot 845}{100}=\frac{20\cdot 845+3\cdot 845}{100}=\frac{845}{5}+3\cdot 8.45$$

$$=169+25.35=194.35.$$

我們再來看一個例．275的什麼百分數(卽百分之幾)是15? 我們這樣算法：15除以其相應百分數x的商等於275除以其相應百分數100的商．寫成式子：

$$\frac{15}{x}=\frac{275}{100}.$$

字母x出現在分母上，所以要移三個數：x、275及100．如此得

$$\frac{15\cdot 100}{275}=x,$$

並且把結果算出來

$$x=\frac{15\cdot 100}{275}=\frac{1500}{275}=\frac{60}{11}=5\frac{5}{11}\%.$$

(在第二分數變為第三分數時我們以25約簡了.)

再舉一個例．某未知數的72%是15．試求該未知數．以x表示該未知數，我們寫出等式：

$$\frac{x}{100}=\frac{15}{72}.$$

於是

$$x=\frac{15\cdot 100}{72}=\frac{1500}{72}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}.$$

我們再來討論幾個關於百分數的問題，這與以前所討論的略有區別．

問題1． 儲蓄銀行定期(一年)存款按5%的利率支付本息．我存了一筆款，一年後提取，共得1785盧布．問當初所存的款數是多少?

這問題與以前所講的不同之點在於：已知的不是數量本

身與其構成某百分數的部分．但是只要稍一推算就可明白，這也還是一個尋常的問題．

比如說，我們有了一筆總數 x，相應於 100%，而加上了 5% 之後，新的總數是 1785，這就相應於 100%＋5%＝105%．以後的問題就簡單了：

$$\frac{x}{100}=\frac{1785}{105},\quad x=\frac{1785\cdot 100}{105}=1700 \text{ 盧布}.$$

問題 2． 一批產品，其中的 4% 作廢．現在檢查員接受了 2592 件．問產品總數共若干件？

做法與前一個例題一樣．在相應於100%的總出產 x 中，挑剔後剩下 100%－4%＝96%．底下問題就簡單了：

$$\frac{x}{100}=\frac{2592}{96},$$

$$x=\frac{2592\cdot 100}{96}=27\cdot 100=2700 \text{ 件}.$$

（計算時 96 分解爲 $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$，然後以這些因數陸續除 2592.）

問題 3． 某城人口原爲 44,000 人，後來增加爲 48,000 人．問該城人口的增加百分數是多少？

首先我們來求出該城人口增加了多少人：48000－44000＝4000．剩下的事情就是要算 4000 對 44000（人口原數）的百分數．我們求得

$$\frac{4000}{x}=\frac{44000}{100},\quad x=\frac{4000\cdot 100}{44000}=9\frac{1}{11}\%.$$

這意思就是，該城人口增加了 $9\frac{1}{11}\%$.

問題 4. 某一位斯達哈諾夫工人完成了預定額的 420%，做了 4620 件機件．問他超額多少件?

雖然這問題提得好像很不尋常，事實上這還是一個尋常的問題．只是這裏‘份額’反比原數大得多；但這並不影響推算．我們這樣來推算：4620 件是 420%，而預定額 x 件是 100%．則

$$\frac{4620}{420}=\frac{x}{100}, \quad x=\frac{4620\cdot 100}{420}=1100\text{ 件}.$$

故其超額爲 $4620-1100=3520$ 件.

問題 5. 我要以 100 盧布來買紙．每張紙值 80 哥比，而我去買可以便宜 20%．問我可以買多少張紙?

我們這樣做法．首先我們要知道每張紙值多少．我不必付 80 哥比，而只要付這數的 $100\%-20\%=80\%$，卽

$$\frac{80\cdot 80}{100}=64\text{ 哥比}.$$

(由等式 $\frac{x}{80\%}=\frac{80\text{哥比}}{100\%}$ 推出.)

這就是說，以 100 盧布(10000 哥比)我可以買

$$\frac{10000}{64}=156\frac{16}{64}=156\frac{1}{4}\text{ 張}.$$

既然紙要整張地賣，那就是說，我可以買 156 張，還剩下 16 哥比($\frac{1}{4}$ 張紙的價值).

如果我請店員賣給我 156 張紙，則他將以稍爲不同的方式來計算．他將這樣算法：156 張紙按 80 哥比的價格，共值

$$156 \times 80 = 12480 \text{ 哥比} = 124 \text{ 盧布 } 80 \text{ 哥比}.$$

每一百盧布打 20 盧布的折扣．對 24 盧布 80 哥比則以湊成‘整數’方式來算．把這數就看作是 25 盧布，而 25 盧布的 20% 是 5 盧布．這就是說，折去的等於 25 盧布，所以我應該付出

$$124 \text{ 盧布 } 80 \text{ 哥比} - 25 \text{ 盧布} = 99 \text{ 盧布 } 80 \text{ 哥比},$$

卽找回的不是 16 哥比，而是 20 哥比．

我們來作一總結．有了一個百分數問題，我們首先把它化爲這樣的形式：其中出現四個數量——兩個絕對數值與其兩個相應的百分數．在此可不必注意哪個數或哪個百分數是未知數．如果份額比原數還大時也不要覺得惶惑．然後以字母 x 來表示未知數，並且做成分數的等式．我們‘解’這個等式，卽做必要的交叉移項法，並算出 x 的數值．

最後我們再說一次：百分數問題（百分誤差* 小到 1%）可以用計算尺來解，比較方便而且敏捷．用計算尺來計算是很容易的——不需要中學初年級的以外的知識．如果需要常常解百分數問題（百分誤差小到 1%），則計算尺是不可少的．

---

* 請參閱 2，55 及 60 頁．——譯者註

三 近似計算

數量的正確值與近似值

任何東西，在計算中我們通常可以知道其正確數值. 如果我說我的手有五個手指頭，或者說某工人製造了320件襯管，則5與320正確地表示所計數的東西的數量. 但當我們說1939年什徹爾巴可夫城有居民55,500人時，情形就兩樣了. 我們要知道居民是有生有死的，有來有往的，所以數目是隨時有變化的. 卽使沒有變化，要統計到沒有一點錯誤也是很難的：有的可能偶爾被遺漏，也有的會算重複了. 在計算時錯上二三十個是很可能的. 這就是說，當我們說什徹爾巴可夫城有居民55,500人時，意思是大約數目爲55,500；可能是55,550，也可能55,472，還可能是任何其他接近55,500的數. 這裏，55,500只是告訴我們該城居民的一個近似數值.

通常由計數所得的，幾乎全都是正確的數值，只有很稀少的情形是近似的. 在做各種物體的量度或稱重量時，則情形兩樣了. 例如我們買到800克麵包，這意思完全不是說我們的麵包恰好重800克. 要知道一般商業上所用的衡量器械是粗糙的. 如果我們在天秤盤子上稱好了800克，然後再在一個稱盤上添上5克，這也不致於失去平衡(五克是很小的砝

碼，要藥房的天秤上才有；在食品商店裏這樣小的砝碼通常是沒有的）．這就是說，我們的麵包可能是重 805 克或 810 克，可能是重 793 克或 798 克．800 克這個數只表示其近似的重量．

下面這個試驗很值得注意．有幾個人量度同一物體，比方說桌子的寬，各人所得的數值幾乎一定彼此總多少有點不同．例如一人得 883 毫米，另一人得 885 毫米，第三人得 881 毫米，等等．如果取 883 毫米爲桌子的寬，則也如前例一樣，我們所得的是這寬度的一個近似的數值。

一切由量度所得的，毫無例外地都是近似數值．但在有些情形，量度做得很粗，則得到大誤差．在別的情形，需要做精密的量度，則所得誤差也就很小．在任何量度中絕對的精確度是永遠達不到的．

既然我們認識所有我們的量度總是有缺點的，就很自然地發生這樣的問題：量度的好壞或其精密程度應如何表示？近似數值的算術運算應如何進行？如果我們對近似數值作了算術的運算，則誤差會不會增大？如果所用資料本身是近似的，並且我們所要求的答案也是近似的，那麼能不能設法把算術的運算手續簡化？

特別重要的是最後一個問題——量度所得近似數值的算術運算的簡化問題．這問題可由另一方面來引出．在按標準或圖樣製造某種東西時，容許對圖樣中所指定的尺度有相當

的偏差——有時差得很大,有時很小. 例如,對以尋常方式輾壓成的圓鐵條,直徑是 20 毫米的,容許 $\frac{1}{2}$ 毫米以下的這邊或那邊的偏差. 在輾壓方式很精密時,偏差只容許到 0.3 毫米. 如果按圖樣製造東西時要預先牽涉到計算問題(例如,要計算切削刀之類),而所得結果可以是近似的,則我們可以期望計算本身實行得相當簡化,但須顧到使計算誤差不超過指定的容許限度.

回答這些問題有一特殊的數學部門,叫做近似計算學. 我們的任務是來熟悉這種學問的初步知識.

絕對誤差與百分誤差

我們假設桌子的正確寬度是 784 毫米,而我們量得的是 781 毫米. 正確數值與近似數值之間的差異叫做絕對誤差. 我們說,上例中所得近似數值有一絕對誤差 3 毫米. 實際上我們永遠不能知道被測定的數量的正確數值,所以我們也不能正確地知道絕對誤差. 但平常我們知道所用儀器的精確度及進行量度的人是否靈巧等等情況. 所有這些使我們對量度的絕對誤差能有所推斷,卽能推斷該量度的絕對誤差不超過某一定的數值.

例如我們用通常的尺或捲尺來量房子的長度,則我們不難估計到公尺及厘米,但未必能估計到毫米. 但這固然也不必要. 所以我們有意地容許誤差在一厘米限度以內. 同樣在

衡量接近一公斤的粗重商品時，也很可能有幾克的誤差，但顯然不會差到十克以上. 例如買了 800 克的麵包，我們可以說這 800 克是所買麵包的近似重量，可能有 10 克以下的絕對誤差.

絕對誤差不能作量度進行得好壞的完全指標. 比方說量了某一個長度，得一厘米的絕對誤差，這不足判斷量度的做得好壞. 如果所量的是鉛筆的長度，只 15 厘米，而竟差到了一厘米，則這種量度根本要不得. 如果量的是二十公尺的長廊，而誤差只 1 厘米，則我們這量度可以當做精確的模範了. 所以重要的不只是絕對誤差的本身，而是誤差在所量度的數量中所佔的份額. 在第一例，絕對誤差 (1 厘米) 在所量度數量中佔 $\frac{1}{15}$ 的份額，在第二例，佔 $\frac{1}{2000}$ (20 公尺就是 2000 厘米).

通常這份額表示成百分數. 在第一例，絕對誤差佔所量度數量的 $\frac{1\times100}{15}=6\frac{2}{3}\%$；在第二例，佔 $\frac{1\times100}{2000}=\frac{1}{20}\%$，立刻可以看出第二例的量度比第一例好得多.

絕對誤差在所量度數量中所佔份額的百分數叫做百分誤差. 任何量度的好壞可以由其近似結果的百分誤差表示出來.

很容易得出決定百分誤差的法則：只要以 100 乘絕對誤差，然後以所量度的數量本身除之，或者以其近似值除之. (這樣所得數值雖然不同，但也很接近. 實際上哪個當作百分誤差都一樣. 通常量度的正確值是得不到的，故也常常只好

取其近似值來計算百分誤差.）

例題：(1) 在量5公尺的長度時,容許有25厘米以內的絕對誤差. 試求其百分誤差.

我們來求25厘米對500厘米的百分數(5公尺等於500厘米). 得 $\frac{25\times100}{500}=5\%$. 這就是百分誤差.

(2) 在衡量800克的重量時容許有10克的不精確程度. 試求其百分誤差.

(3) 統計了某城市的居民,得55,000人,容許有40人以內的誤差. 試求其百分誤差.

(4) 在輾壓直徑爲30毫米的圓鐵條時,容許有3%以內的百分誤差. 問輾壓這種鐵條時可以有幾毫米的誤差而不成廢品?

近似數寫法的一些特點.
小數點後的正確位數

任何量度的結果都用近似值的數表示出來. 這種數是一切技術計算的原始資料. 所以大家常常說技術所處理的是近似數值. 近似數值通常以小數的形式表示出來. 這裏最末一位數碼就決定絕對誤差的大小. 如果我們在近似計算中要處理12.45這樣一個數,則這並非表示此數所代表的數量沒有千分之一位. 只能說千分之一位的數值在量度時估計不到;所以絕對誤差小於百分之一. 同樣對1.283這近似數,我們

說絕對誤差小於千分之一. 近似數通常都寫得使其絕對誤差不超過最末一位小數的單位. 這意思有時也這樣說法:近似數的絕對誤差由其小數點後的數碼位數來決定(小數點後有一位數碼則絕對誤差為十分之一;兩位則為百分之一,餘仿此).

如果在仔細地量度某數量時得到一個這樣的數值,其個位為1,其十分位為2,其百分位為5,其千分位為0,而萬分位則不能估計了,這該怎樣表示法呢? 寫成1.25是不行的,因為這表示的是千分位不能估計了,而事實上則我們肯定其為0. 在這種情形,通常在千分位上加一個0,卽1.250. 所以在近似計算學裏1.25與1.250表示的遠不是同一東西. 第一數的千分位並不見得是0,只是不知道它究竟是什麼. 第二數則千分位已知道是0,成問題的是其萬分位.

在大數的近似寫法中發生一些困難. 設某鄉村的居民是2000人,而在某大城市中則近似地有457,000個居民,這裏關於城市的數字我們保證到千位,但百位——尤其是十位與個位——則容許有誤差了. 那麼在寫法本身如何可以反映出正確數(如本例的2000)與近似數(如本例的457,000)之間的區別呢? 要知道在第一數與第二數末尾的這些0的意義是不相同的:在第一情形表示其百、十、個位原都是0,在第二情形則我們不知道其百、十、個位究竟是什麼. 這種困難可以這樣來解決:有時近似數的不確定數碼以較小的0來替代(如寫成

457,000)；有時則只寫出各位可靠的數碼，而各位0則以10的乘方來替代：如457,000寫作$457\cdot10^3$．我們將遵循第二種寫法．

對於28,300這個數我們知道它的十位個位都是0，而對$32\cdot10^4$這個數則其千位百位十位個位我們都不知道；所知道的只是該數含有32萬，卽它接近於320,000．

如果某數我們能保證到百位而其十位以下都有疑問，則我們說該數正確到百位．同樣如果我們保證到千分位，而萬分位以下都有疑問，則我們說該數正確到千分位．所以我們能以三種方法來表示同一意義：關於33.13這個數我們說它

正確到百分位；

正確到小數點後兩位；

具有小於0.01的絕對誤差．

正確位數及其與百分誤差的關係

在小數點後的位數，或者最好這樣說，最後一位正確數碼的位次——這都與絕對誤差有關係，而在實際上特別重要的是百分誤差．

我們現在來看看，在近似數的寫法中以什麽來表現出百分誤差的大小．

我們來比較兩個近似數的正確程度，例如1362.3與2.37．在第一數裏絕對誤差不超過十分之一，在第二數裏不

超過百分之一．所以第二數乍看好像比第一數來得正確．

我們來計算百分誤差．在第一數絕對誤差小於0.1．這就是說，百分誤差小於$\frac{0.1\times100}{1362.3}$，故它更小於$\frac{0.1\times100}{1000}$（分母變小時分數變大）．所以，在第一數百分誤差小於$\frac{0.1\times100}{1000}=0.01\%$．

在第二數則絕對誤差小於0.01，故百分誤差小於$\frac{0.01\times100}{2.37}$，即更小於$\frac{0.01\times100}{1}=1\%$．

可見第二數遠不如第一數的正確；第一數比第二數正確到100倍．這是因爲第一數有五位正確數碼而第二數只有三位．

近似數中一切我們有把握的數碼叫做正確數碼（或有效數字），不論其所處的位置如何．

例如以下五個數，每個都有三位正確數碼：$283\cdot10^5$; $200\cdot10^2$; 22.5; 0.0811; 2.10.

我們有這樣一條規則：如果正確數碼的位數是n，n多於或等於三位，則百分誤差小於$\frac{1}{10^{n-3}}\%$．如果正確數碼有二位，則百分誤差小於10%．（如果正確數碼只一位，則百分誤差可達百分之幾十；這種情形對實際沒有什麼用處，不值得注意它．）例如，$2800\cdot10^2$的百分誤差不會超過$\frac{1}{10}\%$（正確數碼的位數是4，減3得1，故以1後附帶1個0來除1；如此得$\frac{1}{10}$）；又如0.0028365的百分誤差不會超過$\frac{1}{100}\%$；2.8的百分

誤差不會超過10%. 特別重要的是百分誤差小到1%的這種情形. 大多數技術上的計算都以這樣的正確度來進行. 這種正確度可由計算尺在生產情況中得出. (計算好手用好的計算尺也可能計算到百分誤差小到0.1%的精確度.) 在這種情形,近似數應該有三位正確數碼. 以後我們要特別注意這種有三位正確數碼的近似數的計算.

例題: 估計以下各近似數的百分誤差: 0.818; 2.410; $56 \cdot 10^5$; 32.200; 0.00012; 843.356.

近似數的運算、湊整

在近似數的計算中發生兩個問題: 第一,已知近似數,如何能得出最正確的答案? 第二,爲要能得出具有預先指定的正確度的答案,原始資料應有怎樣的正確度? 每個這些問題又都可以應用到絕對誤差及相對誤差上去. 因此可以發生四個問題,這都是近似計算理論中所研究的. 現在我們要討論的只這一個問題: 如何由所設的近似數出發,得出具有我們所要求的相對誤差限度的答數,而又化費最少的力氣. 我們看到在此常常須要把所有原始資料取成正確度一樣的,即一律取成已知數中最小的正確度,所以常常要把比較正確的數故意用比較不正確的來替代. 這種替代叫做近似數的湊整. 例如,倘若已知近似數27.136,而需要我們正確到十分位,則我們將該數湊整,而拋棄其百分位與千分位. 我們這樣寫法:

$27.136 \approx 27.1$（符號$\approx$表示近似的相等）．如果要把 32.8 湊整成整數個位，則不宜只拋棄十分位．如此誤差將成十分之八；倘若拋棄了十分之一位後又在個位上加 1，即寫 $32.8 \approx 33$，則誤差只有十分之二了．所以我們採用這樣一條規則（叫做'湊整法'或'四捨五入法'）：倘若在湊整時被拋棄各位小數的最左一位小於 5，則其前一位不變；倘若被棄的最左一位大於 5 或等於 5，則在其前一位上加 1．（不難了解，如果所棄的恰好是 5，則在其前一位上加不加 1 所生誤差都是一樣的．例如 38.5 無論寫成 38 或 39 所生誤差都是 0.5．但是爲求能永遠得一致的結果，須要遵循一定的規則．本書所採規則在用計算機作計算時比較便利．）

現在我們來注意這一種特殊情形，這常會使沒有經驗的人感覺困難的．比方說我們要把 10.297 這樣的數湊整到百分位．拋棄了 7 以後我們應在百分位上加 1．但在本例百分位未加 1 時就已經有 9 了．在這情形應把 9 改爲 0，而在十分位上加 1．如此得 10.30．同樣：$17.96 \approx 18.0$（湊整到十分位）．有時也會在湊整時次一位依次又成了十，如此則再向前推一位．例如 $29.998 \approx 30.00$（湊整到百分位）．

例（一律湊整到百分位）：$10.237 \approx 10.24$；　$2.2312 \approx 2.23$；　$0.9852 \approx 0.99$；　$0.985 \approx 0.99$；　$0.315 \approx 0.32$．

例題：(1) 湊整以下各數到千分位：0.02836；　0.3385；　0.06253；　1.1335；　0.8339．

(2) 把以下各數湊整,並且一律保留三位正確數碼: 43.51; 285.51; 0.06835; 481.1; 61.45; 24832 (在此例應保留前三位;但當然不能寫作 248,亦不能寫作 24800,因爲這表示十位個位都一定是 0;而應該寫成 $248\cdot 10^2$); 36.18; 2555.

在前一章裏我們遇到過要直接對付分數與小數的計算.在實際上通常把分數化爲小數,而一律取其近似值.例如,我們來把 $\frac{1}{32}$ 化爲小數,正確度限於千分位.以 32 除 1:

$$\begin{array}{r|l} 100 & 32 \\ \underline{96} & \overline{0.031} \\ 40 & \\ \underline{32} & \\ 8 & \end{array}$$

我們得

$$\frac{1}{32}\approx 0.031.$$

例題: 化以下各分數爲小數,正確度限於千分位: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{11}{13}$; $\frac{17}{112}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{11}$; $\frac{41}{115}$.

近似數的加法與減法

我們來討論這個問題: 加這幾個近似數: 2.369; 17.2; 8.65 與 94.12. 把它們按尋常格式疊起來寫,但開始相加之前要先稍爲想一想:

$$\begin{array}{r} 2.369 \\ 17.2 \\ 8.65 \\ +\ 94.12 \\ \hline \end{array}$$

最上面一項的千分位是 9. 它要與誰來相加呢? 要知道其餘各項的千分位也各有其數值,——雖然我們不知道究竟是什麼(用點標出的是這些未知數碼的位置). 同樣在加百分位時我們也不能正確算出,因爲不知道第二項的百分位是什麼. 十分位則各項都指出了,我們可以計算. 所以我們用一條直線把所有十分位右邊的各位劃開並且删去,而十分位則按四捨五入法湊整. 因此有幾個數碼須要加 1. 因爲缺乏地方,我們就用一點子標在要加 1 的數碼上面. 然後按尋常方式加起來,但要注意數碼上所記的點子:

$$
\begin{array}{r|l}
2.\dot{3} & 6\ 9 \\
17.2 & \cdot\ \cdot \\
8.\dot{6} & 5\ \cdot \\
+\quad 94.1 & 2\ \cdot \\
\hline
122.4 &
\end{array}
$$

如此得 122.4.

所以,在做近似數的加法時,我們只保留各項共有的數位,而把其餘的小數位删去,並加以湊整進位. 然後按尋常方法加起來.

減法也可同樣處理. 例如我們由 0.242 減去 0.08365. 寫算草如下:

$$
\begin{array}{r|l}
0.242 & \cdot\ \cdot \\
-0.08\dot{3} & 6\ 5 \\
\hline
0.158 &
\end{array}
$$

故答數是 0.158.

如果所設的幾個數正確位數較多(卽百分誤差較小),而結果中所要求的正確位數較少,則我們可以這樣處理:把各項疊起來寫成算草;就最大的一項由左向右數幾位,這位數比結果中所要求的正確位數多一;在這幾位末尾畫一條縱線,把所有在線右邊各位數碼都删掉,而按四捨五入法進位並用點子在進位的數碼上標出. 然後照尋常手續加起來,再按四捨五入法删除最末一位.

例如,求下式的和:

$$345.73+0.8892+25.48+2.3391,$$

取三位正確數碼的結果.

把所給各項疊起來寫成算草,就其中最大的一項(卽345.73)由左向右數4位(比和中所要求的正確位數多一位)並在十分位的右邊畫一縱線:

$$\begin{array}{r|l}
345.7 & 3\;\cdot\;\cdot \\
0.\dot{8} & 8\;9\;2 \\
25.\dot{4} & 8\;\cdot \\
+\quad 2.3 & 3\;9\;1 \\
\hline
374.4 &
\end{array}$$

捨去第四位,得答數 374, 三位數碼都是可靠的.

我們來注意一點近似數減法的討厭的特點:倘若被減數與減數彼此很接近,而兩數都是近似的,但有許多位正確數

碼，則減的結果可以得到很粗的近似數．例如，我們由 84.36 中減去 84.25．被減數與減數都有四位正確數碼．每個的千分位是什麼數則我們不知道了．由第二數減去第一數得 0.11．結果中的千分位當然我們還是不知道的．我們共得兩位正確數碼．這數的相對正確度比被減數與減數的正確度幾乎小 800 倍．

正是因爲這種緣故，所有技術計算中的公式與設計都要想法力求避免彼此接近的數值的相減．

例題：(1) 計算下列各式的結果，力求精確，並估計其絕對誤差與百分誤差：

$32.415+0.0834+4212.3+0.08;$

$2.36+4.383+0.000016;$

$43.3+24.2+8.311+20.13;$

$842.61-33.9;\qquad 562.1-561.2.$

(2) 就下列各式的結果取三位正確數碼：

$213.65+0.08343+14.6368+12.53;$

$42.63+8.0082+0.000636+19.14;$

$5.8163+0.001234+6\ 2435+0.8383.$

近 似 數 的 乘 法

如果以近似數與正確數來相乘（如二倍、三倍等等），則可與正確數之間的乘法一樣處理．在這情形，乘積的百分誤

差就等於近似乘數的百分誤差．所以在乘積裏我們保留與近似乘數中一樣多位的數碼．例如，

$$3.66\times 2=7.32;$$

$$7.68\times 9=69.12\approx 69.1.$$

如果兩個乘數都是近似的，則情形就兩樣了．

我們首先注意下面這重要情形：乘積的正確位數就等於最不正確的乘數的正確位數．例如，在一個乘數裏正確的數碼有四位，而另一個乘數裏則只有兩位，則在乘積中也只能保證有兩位數碼是正確的．所以第一個乘數也可以加以刪略，只保留兩位正確數碼就够了，多餘的位數只是浪費計算的工夫．

做近似乘法時宜將所有乘數都刪減成一樣多的正確位數．

運算這樣進行：把乘數寫在被乘數下面，畫一條直線，在左邊寫一乘號．小數點通常不寫．例如，要以0.8345乘25.63，則我們這樣寫法：

$$25.63\times 0.8345=$$

$$\begin{array}{r} 2\ 5\ 6\ 3 \\ \times\quad 8\ 3\ 4\ 5 \\ \hline \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$ （點子表示運算繼續下去）．

現在我們以乘數的最左一位數碼乘被乘數，把結果寫在線下面，然後把乘數最左一位與被乘數最右一位劃去：

$$25.63\times 0.8345=$$

$$
\begin{array}{r}
2\;5\;6\;\cancel{3} \\
\times\quad \cancel{8}\;3\;4\;5 \\
\hline
2\;0\;5\;0\;4 \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

再以乘數未劃去部分的最左一位數碼乘被乘數的未劃去部分．結果寫在第一乘積的下面，但不向左移（這與尋常乘法不同），而是個位與個位對着寫，餘類此．做了這運算後，再把乘數及被乘數的左右次一位劃去：

$$25.63\times0.8345=$$

$$
\begin{array}{r}
2\;5\;\cancel{6}\;\cancel{3} \\
\times\quad \cancel{8}\;\cancel{3}\;4\;5 \\
\hline
2\;0\;5\;0\;4 \\
7\;6\;8 \\
\cdots\cdots \\
\cdots\cdots
\end{array}
$$

再以乘數未劃去部分的最左一位乘被乘數的未劃去部分，並且這樣繼續下去，直到所有數碼都劃盡爲止．

剩下的事情就是把所有乘積都加起來．再把最後一位數碼拋棄而在其前一位上加 1——不管所拋棄的這位數碼是什麼．這規則有時可以使結果的末一位發生一個單位的誤差．但在實際上這通常也不致發生什麼困難．只要各乘數都不超過十位，這樣乘得的結果總是正確的．

最後我們來考慮小數點應放在什麼地方．20 乘 0.8（這幾乎就是 1），這結果應該大約是 20．所以小數點應放在頭兩

位的後面．全部算草的最後形狀是這樣的:

$$25.63\times 0.8345=21.39$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2 & \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{3} \\
\times & & \cancel{8} & \cancel{3} & \cancel{4} & 5 \\
\hline
 & 2 & 0 & 5 & 0 & 4 \\
 & & & 7 & 6 & 8 \\
 & & & 1 & 0 & 0 \\
+ & & & & 1 & 0 \\
\hline
 & 2 & 1 & 3 & 8 & 2
\end{array}$$

我們再來用尋常方法乘一遍，以作比較:

$$25.63\times 0.8345=21.39$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & & & & 2 & 5.6 & 3 & \\
 & \times & & & 0.8 & 3 & 4 & 5 & \\
\hline
 & & & & 1 & 2 & 8 & 1 & 5 \\
 & & & 1 & 0 & 2 & 5 & 2 & \\
 & & & 7 & 6 & 8 & 9 & & \\
+ & 2 & 0 & 5 & 0 & 4 & & & \\
\hline
 & 2 & 1.3 & 8 & 8 & 2 & 3 & 5 &
\end{array}$$

在用尋常方法時要做許多不必要的乘法，並且要加比較笨重的數字，而最後結果的正確程度還是一樣的．

在此再舉幾個例:

(1) $298\times 0.0365=10.8$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 2 & 9 & 8 \\
\times & & 3 & 6 & 5 \\
\hline
 & & 8 & 9 & 4 \\
 & & 1 & 7 & 4 \\
+ & & & 1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & 7 & 8
\end{array}$$

(2) $654,385\times 5434\cdot 10^{3}=3556\cdot 10^{6}$

$$
\begin{array}{r}
6544 \\
\times\ 5434 \\
\hline
32720 \\
2616 \\
195 \\
+\quad 24 \\
\hline
35555
\end{array}
$$

讀者請注意第二例．這裏面一個乘數有六位正確數碼，而另一乘數只有四位．所以在乘積裏只能得四位正確數碼，因此第一個乘數也保留四位就够了(按尋常方法加以湊整)．現在如何決定乘積末尾0的個數呢？一個乘數接近600，另一接近5000，其乘積接近3000000，卽應含有七位數碼，再加上10^3中的三個0，共應有十位數碼．現在3556中我們已有四位．剩下還有六位，故應加上六個0，或乘以10^6．

現在對兩個正確位數相同的近似數的乘法的一般規則再來明確的說一說：

要乘兩個正確位數相同的近似數，先把它們疊起來寫，在下面畫一條線．於是以乘數最左一位乘被乘數，把結果寫在線的下面，並將乘數最左一位及被乘數最右一位劃去．然後就未劃去的數字中仍以乘數最左一位乘被乘數，把結果寫在線下面的第二行上(末尾與上行對齊，不向左移)，並將乘數左端及被乘數右端再各劃去一位．如此進行下去，直到各數碼都劃盡爲止．然後把所有乘積加起來，拋棄所得總和的末一位而在其前一位上加1．最後決定小數點，或在末尾附加幾

個應有的 0.

我們注意，如果被乘數與乘數第一位很小(乘起來小於十)，則按這種計算法所得結果，其正確位數可比預期的少一位．例如，我們以 143 來乘 214:

$$
\begin{array}{r}
214 \\
\times\ 143 \\
\hline
214 \\
84 \\
+\quad 6 \\
\hline
304
\end{array}
$$

正確數碼是: 31．以 100 乘 200 得 20000;這就是說我們的乘積應有五位;所以 $214\times143=31\cdot10^3$．應該說在這情形可以保留近似乘積中所有數碼，而在最末一位上加 1，卽 $214\times143=305\cdot10^2$．但在此最末一位可能與眞値差 1 或 2．通常在這情形如乘積中得三位數碼，也不必爲此惶惑驚訝．

例題: 24.36×8.25; 0.632×4.234; 363×515(這兩個數都是近似的，假設每個都有十分位，但我們不知道究竟是多少); 0.053825×4.6848; $2.3\times64\cdot10^5$; $24.45\times3816\cdot10^2$; 32.38×5.634; 6.12×8.734; $436\cdot10\times2.83$; 52.63×360.6; 283.1×44.95; 126×25.3; 3.18×0.0212; 1.27×0.425.

包含三位正確數碼的近似數的心算乘法

如果近似數只包含兩位正確數碼，則不必應用上節所講

的方法．要知道兩位數的乘法是容易用心算來做的．而在近似計算中三位數也不難用心算來乘，乘積中可得三位正確數碼．鑒於三位正確數碼的計算對實際工作的重要(在技術中多半容許 1% 以內的誤差)，熟悉這種心算法是很有用處的(如果要做很多這樣的計算，則最好用計算尺)．

例如，我們來以 385 乘 546，把這些數看作是近似的，並且只對乘積的頭三位數碼感覺興趣．我們以乘數的第一位乘被乘數頭兩位：3 乘 54 得 162．再以乘數的第二位乘被乘數的第一位：8 乘 5 得 40．把這些結果加起來：162 加 40 得 202．現在剩下的事情就是要加上一個校正數，這數這樣求法：乘數第三位乘被乘數第一位；乘數第二位乘被乘數第二位；乘數第一位乘被乘數第三位．把這三個乘積加起來並將總和的第一位加到前面所得的結果上去．在我們這例子裏：5 乘 5 得 25，加 4 乘 8 得 32，共 57；再加 6 乘 3 得 18，共 75．把第一位 7 加到 202 上去，得 209；這結果再加 1，得 210．這就是所求的乘積的前三位數碼．我們來考慮應該在末尾附加幾個 0． 500 乘 300 得 150000，即應得一個六位的數；我們已有三位；剩下的再加三個 0． 我們最後得到 210000． 但是最好寫成這樣：$210 \cdot 10^3$，這可以表現出它的近似性並保證前三位正確數碼．

要乘的如不是整數也可以同樣處理．

例如，我們以 23.8 乘 0.861． 首先完全不管小數點． 2

乘86得172;加3乘8,卽24,共得196. 再來計算校正數:8乘8得64,加3乘6得18,共82,加1乘2,共84. 第一位是8. 把它加1然後加到以前的結果196上去,得205. 這就是所求的結果的前三位數碼. 小數點該在哪裏呢?被乘數接近0.8,乘數接近20. 以0.8乘20得16. 這就是說在我們的乘積中小數點前面應有兩位數碼. 故最後的答數是20.5.

如果被乘數與乘數的第一位數碼都不大,則這方法最好稍加改變.

例如,我們以194來乘251. 1乘25得25,加9乘2,卽18,共得43. 我們共得到兩位數碼,而還沒有第三位;所以在心裏再在結果上添一位0,得430,然後再把校正數整個地加上去,不限於其第一位. 我們來算這個校正數:2乘4得8;加5乘9,卽45,共得53,加1乘1,再加1,共55. 430加55得485. 現在來考慮該加幾個0. 兩個乘數都接近200,卽乘積接近於40000. 所以最後的結果是$485 \cdot 10^2$.

例題(心算):248×563; 21.9×81.1; 0.312×5.26; 4.14×0.0295; 12.3×2.29; 8.36×0.00316; 663×2.85; 0.0812×0.781; 24.5×0.0311.

近似數的除法

以正確數(如2、3、5等等)除近似數時,我們就如同處理正確數一樣. 在商數中保留的正確位數與被除數中的正確位

數一樣多.

例如，$94.26 \div 3 = 31.42$;　$8.25 \div 7 = 1.178 \approx 1.18$.

當被除數與除數都是近似數時，則商數的正確位數等於被除數與除數的正確位數中之較小者．如果被除數與除數的正確位數不一樣多，則將其中較正確的（即正確位數較多的）一個數加以删略，使二數的正確位數相等．例如，倘若要以 22.1 除 83.756，則被除數應該删略掉最後兩位，即變成以 22.1 除 83.8．這樣正確度並不減低：與被除數及除數中一樣，在商數中終歸也只能得三位正確數碼.

除法的開始如尋常一樣．除數寫在被除數的右邊並且用拐角線把它隔開.

例如，以 265 除 320，按尋常方式開始如下：

$$\begin{array}{r|l} 3\;2\;0 & 2\;6\;5 \\ \cline{2-2} -\quad 2\;6\;5 & 1.\cdot\;\cdot \\ \hline 5\;5 & \\ \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \end{array}$$

做了第一次除法並且得到第一個餘數以後，不像尋常除法那樣在它後面添 0，而把除數的最末一位按四捨五入法删去．然後再除下去，得到第二位商數及第二個餘數：

$$\begin{array}{r|l} 3\;2\;0 & 2\;\overset{7}{\cancel{6}}\;\cancel{5} \\ \cline{2-2} -\quad 2\;6\;5 & 1.2\cdot\;\cdot \\ \hline 5\;5 & \\ -\quad 5\;4 & \\ \cline{1-1} 1 & \\ \cdots & \\ \cdots & \end{array}$$

再把除數末位刪掉，如此繼續進行下去，直到各數碼都用盡為止.

在我們這例子裏，這樣的手續做三次除法就做完了. 最後的寫法如下:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \cancel{3}\ \cancel{7} \\
3\,2\,0 & \cancel{2}\ \cancel{6}\ 5 \\ \cline{2-2}
-\quad 2\,6\,5 & 1.2\,0 \\ \cline{1-1}
5\,5 & \\
-\quad 5\,4 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
\qquad \text{答數: } 1.20.
$$

刪略第二位 (7) 時，我們按四捨五入法在它前一位上加 1，故把 2 劃去而在它上面寫一個 3. 做了第三次手續後這個 3 也被劃去了.

倘若被除數小於除數，則在商數裏寫一個 0，接着寫小數點，而在被除數後添一個 0.

例如，我們以 6218 來除 4832:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\ \ \cancel{2} \\
4\,8\,3\,2\,0 & \cancel{6}\ \cancel{2}\ \cancel{1}\ \cancel{8} \\ \cline{2-2}
-\quad 4\,3\,5\,2\,6 & 0.7\,7\,7\,1 \\ \cline{1-1}
4\,7\,9\,4 & \\
-\quad 4\,3\,5\,4 & \\ \cline{1-1}
4\,4\,0 & \\
-\quad 4\,3\,4 & \\ \cline{1-1}
6 & \\
-\quad 6 & \\ \cline{1-1}
\end{array}
$$

答數 0.7771 含有四位數碼. 這些數碼都是正確的.

在這種除法中有時會遇到這樣的情形，這對初學的人會發生困難的．例如我們以 835 來除 999：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;\;4 \\
999 & 8\,3\,5 \\
\hline
-\;835 & 1.1 \\
\hline
164 & \\
-\;84 & \\
\hline
80 & \\
\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots &
\end{array}
$$

現在該以 8 來除 80，得 10——這是一個兩位數．該怎麼辦呢？在這情形我們在原位上寫一個 0 而在其前一位上加 1．寫法如下：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;\;4 \\
999 & 8\,3\,5 \\
\hline
-835 & \cancel{1.1\,(10)} \\
\hline
164 & 1.2\,0 \\
-\;84 & \\
\hline
80 & \\
-80 & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

在第三位上寫一個 0；把第二位上的 1 改爲 2；然後照常以 10 乘 8 由最後的餘數中減去．

在我們所選的例子裏，被除數與除數都是整數（當然指的是近似的整數）．倘若兩數中有一個帶有小數部分，則先把小數點拋棄，按以前各例除出來，然後再考慮安置小數點．例如，我們要以 0.0870 來除 2.38．卽先以 870 除 238，在此暫不寫商數中的小數點（也不寫它前面的 0）．除數末尾那個 0

則不能拋棄，否則位數的計算就改變了．算草如下：

```
              9
     2 3 8 0 | 8 7 0
 -   1 7 4 0 | 2 7.3
 -----------
       6 4 0
 -     6 0 9
   ---------
         3 1
   -     2 7
   ---------
           4
          ===
```

要安置小數點，我們這樣想法：整 2 以百分之八除，卽幾乎以十分之一除——這就等於以 10 乘，卽大約應該得 20．所以小數點應放在前兩位的後面：27.3．

我們再以 29.2 來除 $423\cdot10^3$．先以 292 除 423：

```
           3
     4 2 3 | 2 9 2
 -   2 9 2 | 1 4 5·1 0²
 ---------
     1 3 1
 -   1 1 6
 ---------
       1 5
      -1 5
      ====
```

除數的小數點和被除數末尾的零該怎麼辦呢？我們也如前例一樣來考慮：$423\cdot10^3$ 接近於 400000；29.2 接近於 30．如果是以 30 除 400000，則可以得到一個大於 10000 的數．這就是說，我們所得的商數應有五位整數，故應在 145 後再添兩個 0，或乘以 10^2 更好一點（這樣可表示出答數的近似性，並可知道它有三位正確數碼），本例中就採取這種辦法．

我們還要注意這一種情形：被除數是正確數，而除數是近似數．在這情形可以在被除數末尾適當地附加幾個 0，因爲我們知道它以下各位一定都是零．我們添 0 的個數添到可以開始够除爲止；然後如以前各例一樣進行．例如，我們以 0.0835 來除 1．先拋棄小數點而以 835 除 1．在 1 後添三個 0，這樣就可以開始除了．

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & 4 \\
 & 1000 & \cancel{8}\,\cancel{3}\,\cancel{5} \\
\cline{3-3}
- & 835 & \cancel{1}\,\cancel{1}.\cancel{(10)} \\
\cline{1-2}
 & 165 & 1\,2.0 \\
- & 84 & \\
\cline{1-2}
 & 81 & \\
- & 80 & \\
\cline{1-2}
 & \underline{\underline{1}} &
\end{array}
$$

要加小數點，我們這樣想法：以 0.0835 除 1 即幾乎等於以 0.1 除 1．以 0.1 來除就等於以 10 來乘．所以答數應該接近於 10；故小數點應該放在由左邊數起第二位數碼的後面，我們在算草裏已經這樣做了．小數後那個 0 不能放棄，因爲它表示十分位的確是 0．

例題：81.2÷4.39；　12.84÷62.3；　28.2÷616；26÷7.3；　863÷541；　6.23÷72.8；　34.18÷27.000…（除數正確地等於 27）；　$642\cdot10^3\div581\cdot10^2$；　36.3÷267；$262\cdot10^2\div170\cdot10^4$；　1÷285；　2÷463.3；　3÷0.08485．（在最後三題中被除數看作是正確的數．）

近似數乘除法中小數點定位法

要在做正確小數的乘除法時決定小數點的位置，我們用一定的法則。這種法則對於近似計算也是成立的，但它們相當累贅，實際上不能應用。在所有以前所講的例子裏我們都是以'考慮'來決定小數點的．現在我們來求出一個一般的原則，使這種'考慮'成爲合理化．

我們的辦法無非就是把兩個乘數（在乘法的情形）或者被除數與除數（在除法的情形）在心裏加以删略湊整，使每數中只剩一位正確數碼．

如果這位數碼很大(7、8或9)，則我們以高一級的單位來替代它，所得的兩個一位數便很容易除或乘．這樣得到一個很粗的近似結果，它可以判斷答數的小數點在哪裏．

我們來看幾個例子:

(1) 17.3×27.9．第一個乘數接近20，第二個接近30。這就是說，乘積應該接近600($20\times30=600$)，即在答數中小數點左邊有三位數碼．

(2) 0.891×0.0235．第一個乘數接近於1，第二個接近於0.02．這就是說，乘積應該接近於百分之二，即小數點後應有一個0．

(3) $34.2\div8210$．被除數接近於30，除數接近於10000。以10000除30得 $\frac{30}{10000}=0.003$．這就是說，在商數中小數

點後應有兩個 0.

(4) 76.3÷0.000317. 被除數接近於 100, 除數接近於 0.0003. 以 0.0003 除 100, 得: $\frac{100}{0.0003}=\frac{1000000}{3}\approx 300000$. 這就是說, 在商數中小數點前應有 6 位數碼.

平方根近似求法

我們知道某數與其相等的數之乘積 (即兩個一樣的乘數的積) 叫做該數的二次方或平方. 我們常常需要解答這個反面的問題: 已知某數的平方, 求某數. 例如, 我們要想知道一間房子的長, 如果其長與寬是一樣的而面積等於 36 平方公尺. 在這問題中要找一個這樣的數: 它乘它自己得 36. 這數不難憑試探求出: 就是 6, 即房子的長與寬都是 6 公尺. 如果預先知道長與寬一樣而面積等於 29 平方公尺, 則這問題我們就不會解了. 顯然, 這房間的長大於 5 公尺 (5×5=25) 而小於 6 公尺 (6×6=36), 即這數是 5 帶一個小數. 但這到底是什麼呢? 為要解答這個問題, 需要學會一種新的算術運算——開方.

所謂某數的平方根, 就是自乘起來等於某數的那個數. 例如, 9 的平方根是 3, 因為 3 乘 3 是 9. 同樣, 25 的平方根是 5, 100 的平方根是 10, 1 的平方根是 1. 我們用 $\sqrt{\ }$ 這個符號表示平方根, 讀作 '根', 寫成這樣:

$$\sqrt{9}=3;\quad \sqrt{25}=5;\quad \sqrt{100}=10;\quad \sqrt{1}=1.$$

用來找某數的平方根的運算叫做開平方.

在開平方時須要背平方表,但這表就是尋常乘法表的一部分. 下面就是這個表:

$0^2=0$; $1^2=1$; $2^2=4$; $3^2=9$; $4^2=16$; $5^2=25$;

$6^2=36$; $7^2=49$; $8^2=64$; $9^2=81$; $10^2=100$.

我們要注意,開方得整數是很稀少的事情. 如果整數開方不得整數,則也不可能得有限位小數——必定是無限位小數.

開方幾乎總是近似的,只是正確程度不同而已. 首先我們來討論三位正確數碼的開方. 被開方的數(稱爲根下數)也限於有三位正確數碼.

三位正確數碼的數的開方

我們先來討論大於1而小於100的數如何開方. 既然我們打算得三位正確數碼的平方根,則被開方的數可以删略得只剩三位(爲了簡化計算這也是必需的). 例如我們來求79.34的方根(只要三位正確數碼). 首先把這數删略一位,得79.3. 在平方表裏沒有79.3這個數,但有與它接近的數81. 81的平方根等於9. 我們先粗粗地把9看作是我們所求平方根的第一數值.

$$\sqrt{79.3}\approx 9.$$

我們以第一近似值(9)來除已知的數(79.3),在商數上

只取兩位數碼:

$$\begin{array}{rl}
79.3 & \underline{|\,9} \\
-\underline{72} & |\,8.8 \\
73 & \\
-\underline{72} & \\
1 &
\end{array}$$

由除數 (9) 與商數 (8.8) 這兩個數中我們取其較小的一個 (8.8),並且在它上面加上二數之差的一半. 這樣我們得到第二近似值. 在這情形,差等於 $9-8.8=0.2$. 其一半爲 0.1,所以第二近似值等於 $8.8+0.1=8.9$. 寫出來成這樣子:

$$\begin{array}{rl}
79.3 & \underline{|\,9} \\
-\underline{72} & |\,8.8+0.1=8.9 \\
73 & \\
-\underline{72} & \\
1 &
\end{array}$$

第二近似值我們取兩位數碼.

要得第三近似值我們這樣做法: 以第二近似值 (8.9) 除根下數 (79.3) (商數取三位數碼). 由除數 (8.9) 與商數 (8.91) 這兩個數中我們取其較小的一個 (8.9),而在它上面加上二數之差的一半 (0.005). 所得的第三近似值就是我們所求的方根,有三位正確數碼:

$$\begin{array}{rl}
79.3 & \underline{|\,8.9+0.005}\approx 8.91 \\
-\underline{712} & |\,8.91 \\
810 & \\
-\underline{801} & \\
90 & \\
-\underline{89} & \\
1 &
\end{array}$$

故 $\sqrt{79.3}=8.91.$

我們再舉一個例：試求 41.5 的平方根．由平方表我們看出所求的平方根在6(6×6=36) 與 7 (7×7=49) 之間．但 41.5 不很接近 36，也不接近 49． 所以我們姑且取 6.5 作第一近似值（在實際上，取作第一近似值的多半不是整數，而是整數帶小數 0.5）．

我們可以如此佈算：

```
  4 1.5  | 6.5
- 3 9 0  | 6.3+0.1=6.4 (第二近似值)
-----------
    2 5 0
-   1 9 5
-----------
      5 5
```

```
  4 1.5  | 6.4+0.04=6.44
- 3 8 4  | 6.48
-----------
    3 1 0
-   2 5 6
-----------
      5 4 0
-     5 1 2
-----------
        2 8
```

故 $\sqrt{41.5}=6.44.$

例題：$\sqrt{6.29}$； $\sqrt{8.12}$； $\sqrt{10.9}$； $\sqrt{20.3}$； $\sqrt{38.7}$； $\sqrt{43.2}$； $\sqrt{50.3}$； $\sqrt{67.9}$； $\sqrt{83.1}$； $\sqrt{1.92}$． (把所得結果平方起來，看看對不對．)

現在我們來討論任何數的開方，但方根仍只求有三位正確數碼。所以我們也可以把所設的數加以删略，使它只剩三

位正確數碼．如果所設的數只有兩位正確數碼，則在答數中也只要保留兩位，第三位就靠不住了．

所設的數經刪略以後，我們把它分為兩位一節，由小數點起向兩邊數（在第一節及最末一節可能只有一位數碼）．我們舉幾個例來說明這種對根下數的'準備工作'；我們以逗點來分節，寫在上面（分離點）：

$$\sqrt{0.048325}\approx\sqrt{0.0483}=\sqrt{0'.04'83};$$

$$\sqrt{26365000}\approx\sqrt{26400000}=\sqrt{26'40'00'00};$$

$$\sqrt{38.965}\approx\sqrt{39'.0};$$

$$\sqrt{0.00005654}\approx\sqrt{0.0000565}=\sqrt{0'.00'00'56'5}.$$

現在我們拋棄所有的 0 並以小數點替代分離點．

在第一例得 4.83．

在第二例得 26.4．

在第三例得 39.0．

在第四例得 56.5．

就所得的數照 1 與 100 間的數那樣進行開方．小數點按下面這規則來定：如果根下數裏小數點左邊有數碼（即有整數部分），則方根裏的整數部分的位數就等於根下數中的整數部分的節數．如果根下數裏沒有整數部分，則方根裏小數點後 0 的個數就等於根下數裏小數點後接連全是 0 的節數．

在第一例：

$$\sqrt{0.048325}\approx\sqrt{0'.04'83}=0.***$$

(在小數前只有 0; 在小數點後也沒有接連着全是 0 的節. 故小數點後立刻出現不是 0 的數碼,星點所表示的就是.)

在第二例:

$$\sqrt{26365000} \approx \sqrt{26'40'00'00} = * * * \cdot 10$$

(小數點前有四節. 卽在方根裏小數點前應有四位數碼. 我們只求其三位. 故結果的末尾須添一個 0,或乘以 $10^1=10$.)

在第三例:

$$\sqrt{38.965} \approx \sqrt{39.0} = * . * *$$

(根下數中小數點前有一節,故方根中小數點前有一位數碼.)

在第四例:

$$\sqrt{0.00005654} \approx \sqrt{0'.00'00'56'5} = 0.00 * * *$$

(在小數點後接連着有兩整節的 0. 所以,方根在小數點後含有兩個 0.)

我們來做全一個例子. 要找 0.0003387 的平方根. 我們先來'加工'這根下數:

$$\sqrt{0.0003387} \approx \sqrt{0.000339} = \sqrt{0'.00'03'39} = 0.0 * * *$$

現在我們來開 3.39 的方. 第一近似値可以取 2,因爲 3.39 接近於 4.

$$\begin{array}{rl|l} & 3.3\ 9 & 2 \\ - & 2 & 1.6+0.2=1.8 \\ \hline & 1\ 3 & \\ - & 1\ 2 & \\ \hline & 1 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
3.3\,9 & \big|\ 1.8+0.04=1.84 \\
-\ 1\,8 & \big|\ 1.88 \\
\hline
1\,5\,9 & \\
-\ 1\,4\,4 & \\
\hline
1\,5\,0 & \\
-\ 1\,4\,4 & \\
\hline
6 &
\end{array}
$$

故 $$\sqrt{0.000339}=0.0184.$$

如果要開正確數的近似方根，例如 2 的，則添寫幾個 0 湊成三位數碼．這樣，在這例子裏我們寫 $2=2.00$．然後照尋常手續處理．2 大於 1，但小於 4，故$\sqrt{2}$應包含在 1 與 2 之間．我們取 1.5 作其第一近似值：

$$
\begin{array}{rl}
2.0 & \big|\ 1.5 \\
-\ 1\,5 & \big|\ 1.3+0.1=1.4 \\
\hline
5\,0 & \\
4\,5 & \\
\hline
5 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
2.0 & \big|\ 1.4+0.01=1.41 \\
-\ 1\,4 & \big|\ 1.42 \\
\hline
6\,0 & \\
-\ 5\,6 & \\
\hline
4\,0 & \\
-\ 2\,8 & \\
\hline
1\,2 &
\end{array}
$$

故 $$\sqrt{2}=1.41.$$

任意多少位方根的開方法

我們把開方的手續分成幾個步驟：

(1) 先把根下數分節,並用小數點替代其中一個分節點,使如此所得的數在 1 與 100 之間.

(2) 第二步是求出方根的三位數碼. 爲這目的我們把根下數删略成三位,並且按前一節的方法求其方根的三位數碼.

(3) 第三步是求出方根的六位數碼. 爲這目的我們把根下數删略成六位,並以已得的三位方根數值除之. 商數取六位. 由除數與商數二數中取其較小的一個,並且在它上面加上二者之差的一半. 所得的數我們加以删略,保留六位. 這就是六位數碼的方根.

(4) 再一步是求方根的十二位數碼. 與前一步的差別,只是根下數要取十二位(而不是六位),並以第三步所得的六位方根數值除之(而不以第二步所得的三位方根數值來除). 商數也應該取十二位(不是六位). 在實際上這樣的正確度是不需要的,而我們這樣詳細地講是爲得闡明下面這一般的法則:

海倫氏方根近似值倍位法: 如果我們已有方根的一個近似值(正確位數大於或等於三),則我們能得到一個正確位數加倍的方根數值. 爲這目的要以現有的方根近似值除根下數,並在商數中取比除數中多一倍的位數. 然後由除數與商數二數中較小的一個,在它上面加上二數之差的一半. 把這結果予以删略,保留比除數多一倍的位數. 這就是方根的新近似值.

這種手續可以無限多次重複下去,每次使方根的位數都加一倍.

在實際上,做大量計算時,我們立即(由表上)取方根的近似值使得數碼的位數經過一次加倍後就能達到所需要的正確程度.

最後我們來找$\sqrt{21.4658163384}$的十二位正確數值.

我們先找三位數碼的方根. 根下數我們予以删略.

$$
\begin{array}{rl}
21.5 & \big|\ 4.5+0.1=4.6 \\
-\ 180 & \big|\ 4.7 \\
\hline
350 & \\
-\ 315 & \\
\hline
35 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
21.5 & \big|\ 4.6+0.03=4.63 \\
-\ 184 & \big|\ 4.67 \\
\hline
310 & \\
-\ 276 & \\
\hline
340 & \\
-\ 322 & \\
\hline
18 &
\end{array}
$$

故方根的三位數碼是 4.63.

我們來找方根的六位數碼.

$$21.4658 \div 4.63 = 4.63624$$

(實際計算不演出來了). 六位的方根是

$$4.63+0.00312=4.63312.$$

我們再來找方根的十二位數碼.

$$21.4658163384 \div 4.63312 = 4.63312332476$$

$$4.63312 + 0.00000166238 = 4.63312166238.$$

這就是所求的十二位數碼的方根.

例題: $\sqrt{28300}$; $\sqrt{0.435}$; $\sqrt{2.3654}$; $\sqrt{0.000173}$; $\sqrt{512340}$; $\sqrt{0.0188}$; $\sqrt{168.45}$; $\sqrt{0.000039563}$; $\sqrt{0.000000200}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$.

(在最後三個例題中所設的根下數是正確數.)

用公式的計算法

在技術計算中常常要解決許多彼此類似的問題,這些問題條件相同,只是數字資料不同而已. 在這種情形很需要建立盡可能簡單的法則,要很短的,要能表達意義的,要便於記憶而且便於計算的. 這種法則的最緊湊、最完善的形狀就是'公式'.

我們試看這樣的問題: 火車 2.5 小時內走了 100 公里. 要決定火車的速度,即一小時內所走的公里數. 既然在 2.5 小時內它走了 100 公里,則在 1 小時內所走的應該少到 2.5 倍;所以要用 2.5 除 100. 如此我們得每小時 40 公里. 由此得出一條規則: 要決定火車的速度,須以時間除在該段時間內火車所走的距離. 這意思可以寫得簡單一點,即:

$$速度=\frac{所經路程}{時間},$$

或者

$$速度=(所經路程)\div(時間).$$

在此立刻可以看出：要得到所求的答數，應該在所設的數量上做怎樣的算術運算。

在寫法的合理化上還可以再進一步。要寫'速度'，'路程'，'時間'等字，我們只要用這些俄文字的第一個字母：即以'с'替代'速度'(скорость)，以'п'替代'路程'(путь)，以'в'替代'時間'(время)。於是我們這條法則可以寫得非常簡短：

$$\boxed{с=\frac{п}{в}} \quad 或 \quad \boxed{с=п\div в}$$

如果現在要解另一組數字資料的問題，例如要知道$\frac{3}{4}$小時內走25公里的火車速度，則我們可以不必再花費時間來講道理。我們只要取這個法則：$с=п\div в$，以25替代'п'，以$\frac{3}{4}$替代'в'即得

$$с=25\div\frac{3}{4}=\frac{25}{1}\div\frac{3}{4}=\frac{25}{1}\times\frac{4}{3}=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}\text{ 公里 / 小時.}$$

一條法則，其中的數量用字母表出，而所需要在數量上進行的運算則直接用符號表出，這種法則叫做公式。

我們說：

$$\boxed{с=п\div в}$$

是計算運動速度的公式．不但一切關於火車進行速度的問題

可用這一個公式來解，任何其他等速運動的問題，例如輪船或飛機等等速度的問題乃至生產工作速度的問題等都可以用這一個公式來解．

只要有了某種類型的問題的公式，則解決問題無非就是以數字替代公式中的字母然後加以運算而已．

我們再舉一個計算圓面積的公式爲例．這公式是：

$$S=\frac{3.14\times d^2}{4}.$$

其中字母 S 表示所求的圓面積，字母 d 表示圓的直徑．這公式告訴我們，直徑要平方起來(自乘)並以 3.14 乘之．這樣所得的數再以 4 除之，卽得所求的圓面積．

例如，量得一根圓軸的直徑是 10.5 厘米，則要計算其截面的面積我們只要在公式裏以 d 的數値 10.5 厘米代進去就行了．如此得：

$$S=\frac{3.14\times 10.5^2}{4}=\frac{1.57\times 110.25}{2}$$

(以 10.5 代 d，把 10.5 平方起來，以 2 約 3.14)．10.5 既然是量度的結果，當然是個近似數值，因此我們把它的平方 110.25 予以刪略，只保留三位正確數碼，於是用心算卽可算出：

$$S=\frac{1.57\times 110}{2}=86.4\text{ 平方厘米}.$$

公式不只是規則的方便寫法．代數學教導我們，如何利

用公式找出途徑來計算我們所需要的數值．這種方法我們在百分數一章裏已經用過一點．一般地運用公式的工作不屬於本書範圍．在此我們只提出幾個關於近似計算的便利公式，並指示如何用法*．

幾個近似計算的公式

如果近似除法中除數與1很接近，則計算大可簡化．下面這幾個公式指示我們如何處理這種情形：

$$\frac{a}{1+b}\approx a(1-b),\quad \frac{a}{1-b}\approx a(1+b).$$

這兩個公式也可合併起來寫成一個式子：

$$\boxed{\frac{a}{1\pm b}\approx a(1\mp b)}$$

這裏 a 表示被除數，b 表示一個很小的數．這公式告訴我們在這種情形除法可以乘法來替代．如果除數比1稍為大一點，則我們改為以一個比1稍為小那麼一點的數來乘(第一公式)．如果除數比1稍為小一點，則我們改為以一個比1稍為

* 在此讀者可以明白數學何以要抽象化，何以要一般化．我們知道，數學中的抽象形式乃'由實際中來而又能回到實際中去'的一般原則．這就是所謂'理論結合實際'．只有掌握了原則性我們纔能主動地靈活地處理事情．翻身成了主人翁的勞動人民是需要掌握原則性的知識武器的．有些形式主義者硬把數學上這些有豐富內容及廣大用途的抽象公式與規律歪曲爲空虛無內容的遊戲，這是對數學的一種惡意的侮蔑．——譯者註

大那麼一點的數來乘(第二公式). 例如,我們要以1.03除2 73. 則有

$$\frac{2.73}{1+0.03}\approx 2.73(1-0.03)=2.73\times 0.97=2.65.$$

爲得證驗這公式的正確性,我們再用尋常除法來重算一遍如下:

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & 2.7 & 3 & & 1.03 \\ \cline{5-5}
- & 2.0 & 6 & & 2.65 \\ \cline{1-4}
 & 6 & 7 & 0 & \\
- & 6 & 1 & 8 & \\ \cline{1-4}
 & & 5\ 2 & 0 & \\
- & & 5\ 1 & 5 & \\ \cline{1-4}
\end{array}$$

所得結果完全一樣. 這裏所用的公式是取上面一個符號的. 我們再舉一個應用下面一個符號的例子. 設要以0.96來除4.30. 則有:

$$\frac{4.30}{0.96}=\frac{4.30}{1-0.04}\approx 4.30\times 1.04=4.47.$$

按尋常除法得4.48. 這點差別只合被除數的$\frac{1}{4}\%$.

在尋常技術計算中可容許1%以內的誤差. 故這些公式只要除數與1的差是在0.05以內便可適用(卽只要除數是在0.95至1.05之間便可適用).

這些公式也可以適用於除數不接近於1而接近於任何別的整數的情形. 我們舉例來說明它如何用法.

設要以2.08除3.14. 我們把2.08看作是1.04以2乘.

於是寫:

$$\frac{3.14}{2.08}=\frac{3.14}{2\times 1.04}=\frac{1.57}{1.04}=\frac{1.57}{1+0.04}.$$

我們先把分母表示成兩數之積的形狀: 一個整數(2)與一個接近 1 的數(1.04),然後把被除數與除數同以 2 約簡之. 剩下的事情就應用第一公式:

$$\frac{3.14}{2.08}=\frac{1.57}{1+0.04}\approx 1.57\times 0.96=1.51.$$

再舉一個例. 以 50.9 除 8.86. 除數接近 50. 我們把它寫成 50 與一個補充乘數的乘積;要找這個乘數我們以 50 除 50.9,得 1.02. 即 $50.9\approx 50\times 1.02$. 於是我們寫:

$$\frac{8.86}{50.9}=\frac{8.86}{50\times 1.02}=\frac{0.177}{1+0.02}\approx 0.177\times 0.98=0.173.$$

最後我們以 388 除 16.8. 除數接近於 400. 它等於 $400-12$. 這個差我們以 400 乘之,同時以 400 除之;得:

$$400\left(\frac{400}{400}-\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{100}{\cancel{400}}}\right)=400(1-0.03).$$

即

$$\frac{16.8}{388}=\frac{16.8}{400(1-0.03)}=\frac{0.0420}{1-0.03}$$

$$\approx 0.0420\times 1.03=0.0433.$$

例題: $3.69\div 1.04$; $84.5\div 0.99$; $436\div 0.97$; $0.00185\div 1.05$; $66.2\div 10.2$; $793\div 98$; $0.00160\div 0.97$;

$242 \cdot 10^5 \div 10.4$;　　$36.1 \div 40.9$;　　$53.5 \div 1.98$;

$0.0718 \div 2.03$;　　$961 \div 4.95$;　　$1.00 \div 3.05$.

我們再提出兩個接近 1 的數的近似開方公式．也像在前兩個公式中一樣，b 表示很小的數；通常技術計算中 b 不應大於 0.1（百分誤差不大於 1%）．

這兩個公式是：

$$\boxed{\sqrt{1 \pm b} \approx 1 \pm \frac{b}{2}.}$$

這兩個公式的用法很容易．例如，我們來計算 $\sqrt{1.06}$．用第一公式：

$$\sqrt{1.06} = \sqrt{1+0.06} \approx 1 + \frac{0.06}{2} = 1.03$$

這裏 b 等於 0.06．

我們再來計算 $\sqrt{0.92}$．用第二公式，得：

$$\sqrt{0.92} = \sqrt{1-0.08} \approx 1-0.04 = 0.96.$$

這計算比一般的開方法簡單多了．

在根下數不接近於 1 而接近於任何正確平方數如 4, 9, 16 之類的數時，也有類似的公式可以應用．這些公式比前面的稍爲複雜一點．公式如下：

$$\boxed{\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a}.}$$

在尋常技術計算中（百分誤差在 1% 以內）這些公式只要

b 不大於 a^2 的十分之一即可適用.

例:

(1) $\sqrt{17.0}=\sqrt{16+1}=\sqrt{4^2+1}$

$$\approx 4+\frac{1}{8}=4.13.$$

這裏 $a^2=16$, $a=4$, $b=1$.

我們看出, b 是 a^2 的 $\frac{1}{16}$, 即小於其十分之一, 故我們的公式可以應用.

(2) $\sqrt{27.3}=\sqrt{25+2.3}=\sqrt{5^2+2.3}$

$$\approx 5+\frac{2.3}{10}=5.23.$$

(3) $\sqrt{60.8}=\sqrt{64-3.2}=\sqrt{8^2-3.2}$

$$\approx 8-\frac{3.2}{16}=7.80.$$

這裏我們要應用帶負號的那個公式.

例題:

$\sqrt{1.04}$;	$\sqrt{4.04}$;	$\sqrt{0.99}$;	$\sqrt{0.91}$;
$\sqrt{9.52}$;	$\sqrt{38.3}$;	$\sqrt{82.0}$;	$\sqrt{94}$;
$\sqrt{23.8}$;	$\sqrt{15.5}$;	$\sqrt{27.1}$;	$\sqrt{65.2}$.

結　論

我們討論了一些最基本的並且最簡單的計算方法，——有正確的與近似的，有心算的與筆算的．會了這點方法，雖然够不上成為計算能手，卻也够做一個很好的實際計算工作者了．讀者如對於簡捷計算法很感興趣，還可以從 Я. И. 別萊利曼的‘趣味算術’一書中找到許多有趣的知識．對近似計算感覺興趣的人，則介紹他一讀湼依叔列爾與阿庫什斯基的‘如何簡化計算’一書．還有A.維丁格教授的小册子‘簡化計算’，是比較難而有趣味的．

我再重複一次：對於實際計算工作者而說，讀了這小册子，已經掌握足够的知識了．如果你有時間並且樂意的話，則最好再學一學各種計算的輔助方法，如計算表、圖解法、對線譜（諾模術，標尺圖解法）、俄羅斯算盤及計算尺等．但是這些輔助方法已超出本書範圍；讀者可就各種專門教本去學習．

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝实用简捷计算法
作者＝（苏联）别尔曼著　　丁寿田译
页数＝９６
ＳＳ号＝１１０２２９６３
出版日期＝１９５３年０３月第１版