蘇聯青年科學叢書

簡易的極大極小問題

納湯松著

中國青年出版社

譯者的話

蘇聯新出了一套'數學通俗講演'小册子,每種都是由很有學術地位的數學專家所寫成的. 讀者對象以中學生及同等知識水準的工農大衆爲主,同時也可供中學教師作教學的參考.

這本'簡易的極大極小問題'就是該叢書中的一種. 這裏面所講的是一些生產技術,及日常生活中常遇到的經濟問題與效率問題(例如木材的最經濟的利用及燈光的最有效的裝置等等). 所用的數學工具極爲簡單,只應用到下面這兩個式子:

$$y=ax^2+bx+c,$$

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}.$$

這一套數學通俗小册子的作風是很誠實的:不鼓吹,不賣弄,不東拉西扯,不曲解附會. 表面看去沒有什麼誘惑性,但讀後可使人嘗到數學本身的滋味,並且得到實實在在的益處. 通俗數學讀物的目的,本是要讓大家得點有用的數學知識,來解決若干實際問題;因此不應該一味避免數學而只以有趣的閒話來替代. 趣味好比是作料,固然自有其輔助性的作用,但專喝白開水冲的味精醬油湯到底是沒有什麼大益處的.

丁壽田 一九五一年十月於北京

原　　序

在這本小册子裏講的是幾種解極大極小問題的初等方法，即不用微分學知識的方法．

這本小册子是爲中學較高班的學生寫的，他們希望對高等數學中所討論的問題的本質得一點一般的概念．這裏所講的東西也可以做中學數學討論小組的題材．

但是我覺得連高等工業學校、師範學院或大學的學生，甚至於專好鑽研數學解析的人，讀一讀這小册子也會有點益處．事實是如此：微分學這種有力的工具固然可以用同一種一般的方法來解各色各樣性質的問題，只要在其中找出初等函數(或其有限的配合)的極端值就行了．用這種方法完全不需要注意各問題的個別特質．但是利用這些特質卻也的確常常可以把問題解得比用一般方法時要更簡單些，更敏捷些，並且更巧妙些．這裏的情形正如同在算術問題中一樣，應用代數方程式這有力工具時固然可以不管問題的特質，但純算術的解法卻往往比代數解法更爲簡單，更爲敏捷，並且更爲巧妙．

這本小册子所應用的代數工具是很有限的．爲了要使敍述儘量簡單，只用到二次三項式的一些最簡單的性質及一個關於算術平均數與幾何平均數的不等式．讀者如果仍舊要用

初等數學的方法更進一步去了解極大極小問題，我可以介紹你去讀：И. Б. 亞別立松氏‘極大極小’（蘇聯聯合科學技術出版局，1935）及 С. И. 斜傑立氏‘極大極小問題’（蘇聯國家技術出版局，1948）等書.

И. П. 納湯松 一九四九，一二，一七

目　次

前　　言

在技術與自然科學裏，在生產與日常生活裏，我們可以遇到一種特殊類型的數學問題，就是所謂'極大極小問題'．下面是幾個這種問題的例子：

(1) 要把一根圓柱形的木料鋸成截面是矩形的柱子，使得廢料儘量地少．

(2) 一批現成的板子，足夠建立200米長的圍牆，要用來圍成一塊矩形的空場．問如何可使所圍的面積最大？

(3) 牆上高高地掛着一張畫(掛得比人高)．問在離牆多遠的地方看去視角最大？

(4) 一盞裝着滑輪的電燈，對着圓桌的中心掛着．問拉在離桌面多高地方時，可使桌邊照得最亮？

在一切這類問題裏，撇開其相異之點不論，我們可以找到這樣的共同之點：它們的論點都是要在無數可能利用的辦法之中求其效果最好的．解這類問題的技能是多麼重要，自不待言．在數學裏已創造了很有力的一般方法來解這類問題；這些方法在微分學裏面研究．

但是在許多情形，這種問題也可以不必引用複雜的微分學工具來解，而只要用一點簡單的初等代數就行了．在這小

册子裏就是要講一些不必依靠高等數學的方法來解一些極大極小問題*. 固然,這些方法只能適用於個別的情形,但卽使熟悉微分學的人知道一點也是有益處的.

一　一個關於二次三項式的基本定理

1. 我們來討論兩個變數 x 與 y, 其間以下面這等式聯系着:

$$y=2x^2+7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{i})$$

倘若我們設 $x=3$, 則可看出 $y=25$. 倘我們給 x 以別的數值,例如 $x=10$, 則得到 $y=207$. 一般地,我們可以隨意給 x 以任何數值;但當我們所選擇的這個數值一經取定以後,則 y 就要'自動地'取其相當的數值,因爲它被等式 (i) 所決定,已經不復依憑我們的自由意志了. 對這種數學上的情況,我們說: **y 是 x 的函數**. 這個數量 x 在此就叫做**自變數**.

現在我們提出這個問題: 在由等式 (i) 所定的函數 y 所取的一切數值中,是否有一個最大的呢? 很容易看出, **y 的數值中是沒有最大的**. 事實上,倘若自變數 x 取下面這些數值.

$$x_1=1,\ x_2=10,\ x_3=100,\ x_4=1000,\cdots\cdots,$$

則函數 y 的相應數值是

$$y_1=9,\ y_2=207,\ y_3=20007,\ y_4=2000007,\cdots\cdots,$$

由此可見, y 的最大數值是沒有的.

但如果我們問 y 的數值中是否有最小的,則得到完全相

* 也包括上面所說那四個問題.

反的一種答案。

事實上，如等式(i)所表示，函數 y 是 $2x^2$ 與 7 這樣兩項之和。其中第二項 7 是一個常數，與 x 的數值沒有聯系。至於第一項 $2x^2$，則它顯然對 x 的任何數值都不能成爲負的，卽不能小於零。可是要它等於零倒是可以做得到的，卽只要取 $x=0$ 就行了。如此，這第一項 $2x^2$ 以及總和 $2x^2+7$ 都在 $x_0=0$ * 時取得其最小值。這個最小值，或者說極小值，顯然就是 7，可以寫成

$$y_{min}=7.$$

以同樣的理由可以指明，這些函數

$$y=5x^2+3,\ y=9x^2+4,\ y=2x^2-5,\ y=3x^2-11$$

之中每個都具有類似的性質：最大的數值是沒有的，而最小的數值是有的，並且所有這四個函數都在 $x_0=0$ 時達到其最小值，卽各爲

$$y_{min}=3,\quad y_{min}=4,\quad y_{min}=-5,\quad y_{min}=-11.$$

2. 上面所討論的例子都只是很簡單的。簡單的緣故是因爲 y 可以表示成兩項之和的形狀，其中一項是常數，而另一項是平方(帶着一個正的係數)，不會表示負的。

情形比較複雜的是這個例子：

$$y=2x^2-12x+93.$$

爲得要能應用前面那些概念，我們把 y 變成另一種形式：

$$y=2(x^2-6x)+93.$$

---

* 我們常用 x_0 表示自變數的那個與函數最小值相應的數值.

現在在括弧裏加上一個這樣的數，使得其中成一完全平方：

$$y=2(x^2-6x+9)+93-18,$$

或
$$y=2(x-3)^2+75.$$

現在我們能應用與前面同樣的論證了．事實上，函數 y 表成了兩項之和，其中一項，卽 75，完全與 x 無關，而另一項，$2(x-3)^2$，決不會是負的，但當 $x=3$ 時可變成零．所以我們這函數在 $x=3$ 時達到其最小值 $y_{min}=75$.

至於我們這函數的最大值則不存在．這可以如此看出：例如設

$$x_1=13,\ x_2=103,\ x_3=1003,\cdots\cdots;$$

函數 y 的相應值爲

$$y_1=275,\ y_2=20075,\ y_3=2000075,\cdots\cdots.$$

同樣可解這個例子：

$$y=3x^2+24x+50.$$

這裏我們把說明略去，直接寫出算式如下（因爲根本是很明顯的）：

$$y=3(x^2+8x)+50,$$

$$y=3(x^2+8x+16)+50-48,$$

$$y=3(x+4)^2+2.$$

所以，函數 y 在 $x_0=-4$ 時取得最小值，並且這最小值是

$$y_{min}=2.$$

這裏再舉一個例子：

$$y=5x^2-50x+39.$$

在這例中，我們可算出

$$x_0=5,\quad y_{min}=-86.$$

3. 不要以爲任何‘二次三項式’(上面所討論的這種函數這樣稱呼)都有最小值而沒有最大值.

例如，這函數 $y=-3x^2+8$

顯然就有最大值，或者說極大值，即

$$y_{max}=8,$$

此值可在 $x_0=0$ 時達到. 但是最小值倒是沒有的.

同樣，函數 $y=-4x^2+40x-73$

也沒有最小值而有最大值，這可由下面的變化看出:

$$y=-4(x^2-10x)-73,$$

$$y=-4(x^2-10x+25)-73+100,$$

$$y=-4(x-5)^2+27,$$

由此在 $x_0=5$ 時得到 $y_{max}=27.$

4. 所以，有些二次三項式有最小值而沒有最大值，另一些則相反，有最大值而沒有最小值. 留心的讀者或許已經看出，三項式的性質由其最高次項係數的符號來決定. 爲得要嚴格地證實這一點，我們來討論這問題的一般形式.

設我們有一個二次三項式

$$y=ax^2+bx+c.$$

這裏各係數可以是任何實數，正數與負數並且甚至可以成零. 但是最高次項係數 a 卻在任何情形都須不等於零，因爲不然

y 裏就不含 x^2 這一項而根本不成二次三項式了.

我們把 y 照下面這樣子變化一下:

$$y=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x\right)+c,$$

$$y=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}.$$

爲簡單起見,設 $$c-\frac{b^2}{4a}=M,$$

最後得 $$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+M.$$

特別要注意的是,這 M 是一個常數,完全由係數 a, b 與 c 來決定,與自變數 x 的數值毫無關係.

我們分兩種情形來討論.

(1) 若 $a>0$,則第一項 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 永不會是負的,但是在

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

的時候變成零. 所以函數 y 有一最小值,等於 M, 即

$$y_{min}=M,$$

而沒有最大值.

(2) 若 $a<0$,則以同樣的理由,可以知道

$$y_{max}=M,$$

並且這數值可以在 $$x_0=-\frac{b}{2a}$$

時達到,而 y_{min} 是沒有的.

我們注意，一個函數的最小值與最大值同稱爲它的**極端值**（或'盡頭值'）．所以上面所說的一切，可以總括成下面這個定理；這定理對我們是很基本的．

定理　一個二次三項式

$$y=ax^2+bx+c$$

在

$$\boxed{x_0=-\frac{b}{2a}}$$

時有一個極端值．這 x_0 在 $a>0$ 時給出最小值，而在 $a<0$ 時給出最大值．若 y_{max} 存在，則 y_{min} 不存在；反之，若 y_{min} 存在，則 y_{max} 不存在．

我們還要注意，由以上可見，這個極端值恆等於 M，可寫成

$$y_{extr}=M,$$

或寫詳細點，就是

$$y_{extr}=c-\frac{b^2}{4a}.$$

但是後面這個等式是**不必記住**的，因爲這根本就是我們這三項式在

$$x=x_0=-\frac{b}{2a}$$

時的數值．

這就是說，只要在三項式裏用

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

這個數替代 x，就可以得到 y_{extr} 的數值了.

例： $y=3x^2-12x+8$,　$x_0=2$,　$y_{min}=-4$;

$y=-2x^2+8x-3$,　$x_0=2$,　$y_{max}=5$;

$y=2x^2+20x+17$,　$x_0=-5$,　$y_{min}=-33$.

二　基本定理的一些應用

5. 我們要來指明，在第 4 節裏證明的那個定理，可以解決許多各色各樣的具體問題.

問題 1. 分已知正數 A 爲兩部分，使其乘積爲最大。

解　以 x 表示所求的一部分，則第二部分應等於 $A-x$，而其乘積爲

$$y=x(A-x),$$

或

$$y=-x^2+Ax.$$

如此，問題就變成要找能使這二次三項式取得最大值的那個 x 的數值了. 按第 4 節的定理，這個數值可以豫知其必存在（因爲這裏最高次項係數等於 -1，是負的），並且等於

$$x_0=\frac{A}{2}.$$

這時候

$$A-x_0=\frac{A}{2},$$

所以兩部分應該彼此相等.

例如，30 這個數可以這樣分法：

$30=5+25$,　$5\times25=125$;　$30=7+23$,

$7\times23=161$;　$30=13+17$,　$13\times17=221$;

$30=20+10,\quad 20\times 10=200;\quad 30=29+1,$

$29\times 1=29;\quad 30=30+0,\quad 30\times 0=0.$

所有這些乘積都小於 $15\times 15=225$.

6. 問題 2. 有一條鐵絲,其長爲 l. 現在要把它彎成一個矩形,使其所圍面積儘量地大.

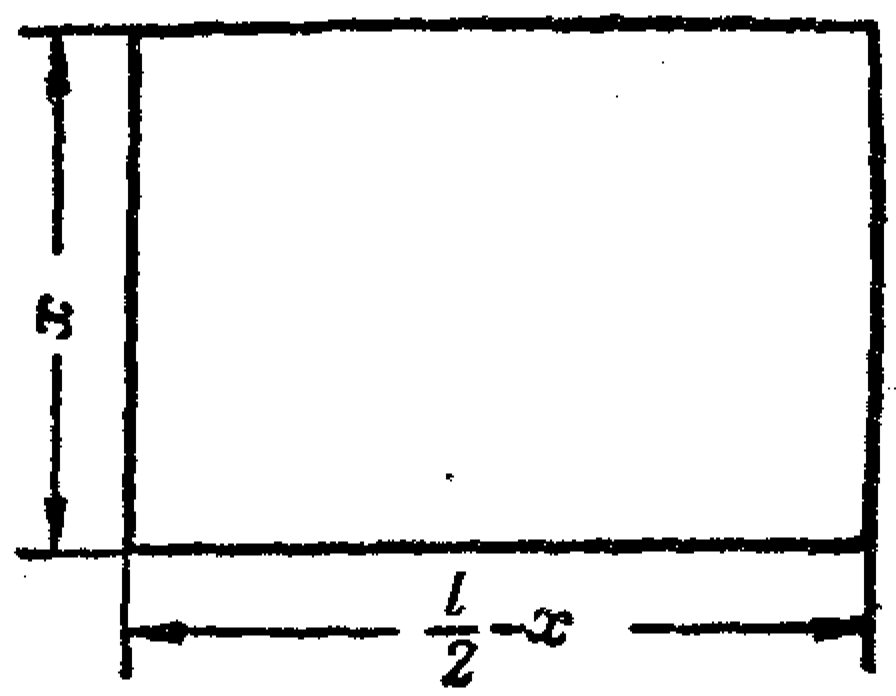

圖 1

解 設 x 代表矩形的一個邊(圖 1). 於是顯然它的另一個邊是 $\frac{l}{2}-x$, 而面積是

$$S=x\left(\frac{l}{2}-x\right),$$

或 $$S=-x^2+\frac{l}{2}x.$$

這函數在 $$x_0=\frac{l}{4}$$

時取得其最大值,並且這 $\frac{l}{4}$ 也就是所求矩形的一邊的長. 於是它的另一邊是

$$\frac{l}{2}-x_0=\frac{l}{4},$$

這就是說我們所求的矩形是**正方形**. 這所得的解可用定理的形式寫出如下:

定理 在一切周長相等的矩形中,正方形的面積爲最大.

註 我們這問題借助問題 1 的結果來解也很容易. 事實上,我們知道所求的矩形的面積是

$$S=x\left(\frac{l}{2}-x\right).$$

換句話說，S 是兩個數 x 與 $\frac{l}{2}-x$ 的乘積。而這兩個數的和是

$$x+\left(\frac{l}{2}-x\right)=\frac{l}{2},$$

這個數是與 x 的選擇法無關的．這意思也就是，我們的問題成了要把 $\frac{l}{2}$ 這個數分爲兩部分，使得其乘積爲最大．但是我們知道，這乘積在兩部分相等時，亦卽 $x=\frac{l}{4}$ 時爲最大．

7. 問題 3. 一批現成的板子可構成長 200 米的圍牆．現在要用這批板子來圍一塊矩形的圍場，一邊利用一個工廠的牆．求所圍的最大面積．

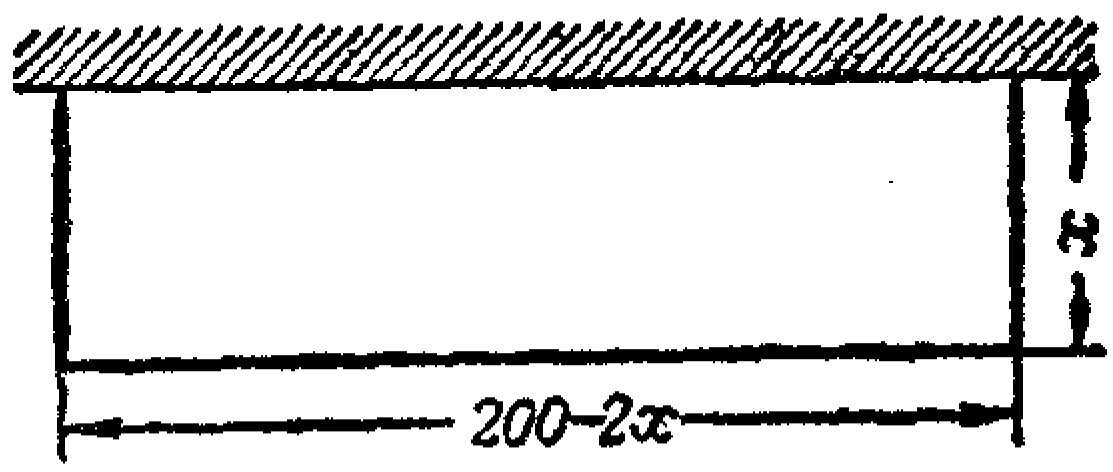

圖 2

解 設以 x 代表圍牆的一邊（圖 2）．於是它的另一邊等於 $200-2x$，而其面積爲

$$S=x(200-2x),$$

或

$$S=-2x^2+200x.$$

按第 4 節的定理，這個函數在

$$x_0=50$$

時達到其最大值．

所以，與工廠的牆垂直的這兩邊圍牆應該各等於 50 米，因此平行的這邊是 100 米，卽圍牆應該成半個正方形的形狀．

註 倘若我們要在此利用解問題 1 的結果，還不能直接

達到目的，因為

$$S=x(200-2x)$$

是兩個數的乘積，這兩個數的和等於 $200-x$，不是與 x 的值無關的．換句話說，我們沒有具備問題 1 中的條件．但是只要稍為想一點辦法，就可以完全化為問題 1 的情形．事實上，我們只要先來討論 $z=2S$ 這個數量．因為

$$z=2x(200-2x),$$

所以這個函數是兩個數的乘積，這兩個數的和 (200) 已與 x 無關，故 z_{max} 可在

$$2x=200-2x$$

時達到，由此 $x=50$．剩下只要注意 S 與 $z=2S$ 這兩個函數在 x 的同一數值上達到其最大值就行了．

8. 問題 4．給了一個正方形 $ABCD$ (圖 3)。由其各頂點量下相等的線段 Aa, Bb, Cc, Dd，並且以直線連結 a,b,c,d 各點．問 Aa 多長時正方形 $abcd$ 的面積最小?

解 若設

$$=l, \quad Aa=x,$$

則顯然

$$aB=l-x,$$

所以按畢達哥拉氏定理有

$$\overline{ab}^2=x^2+(l-x)^2$$
$$=2x^2-2lx+l^2.$$

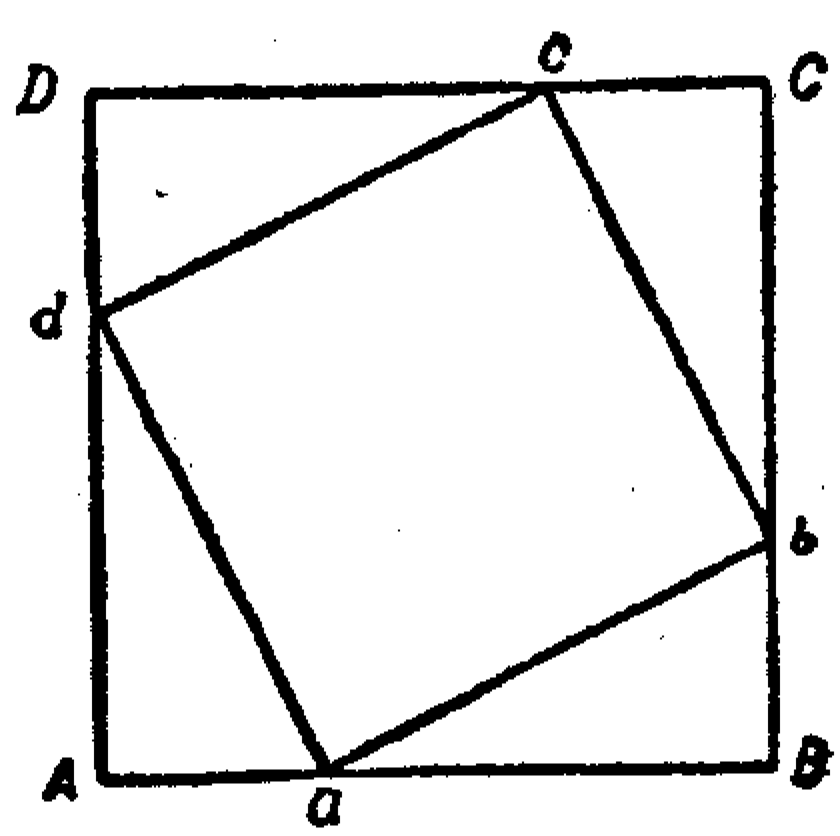

圖 3

但正方形 $abcd$ 的面積 S 也正等於 $\overline{ab}^2$. 這意思就是

$$S=2x^2-2lx+l^2.$$

所以 S 的最小值可以在

$$x_0=\frac{l}{2}$$

時得到。所以 a,b,c,d 諸點應該是原正方形 $ABCD$ 各邊的中點。

9. **問題 5.** 兩隻小艇,同時各由 A 點與 B 點沿箭頭所指方向出發 (圖 4). 其速度各為

$$v_x=40 \text{ 粁/時}, \qquad v_y=16 \text{ 粁/時}.$$

A 與 B 間之距離為 145 粁. 問經過多少時候兩艇間的距離最小?

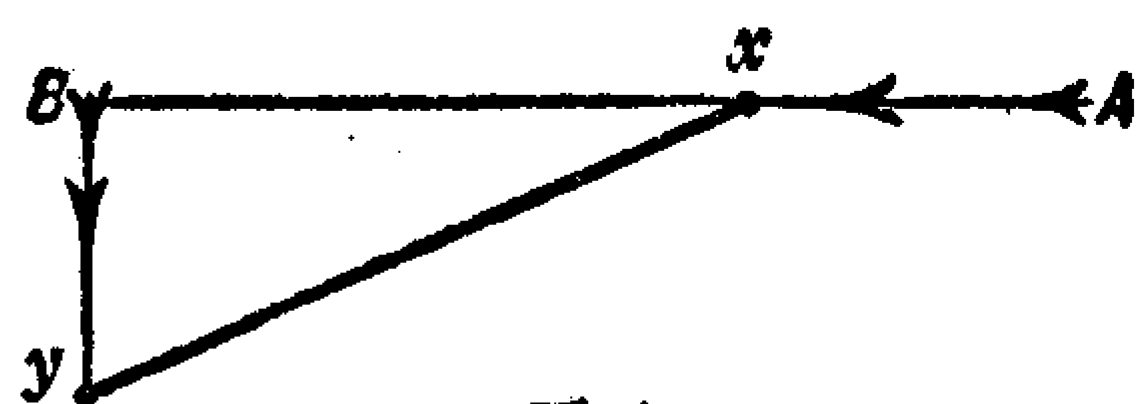

圖 4

解 我們以 x 與 y 兩字母各標誌兩艇的位置,而以 t 表示由 A 與 B 點出發後所經時間. 於是

$$Ax=40t \text{ 粁}, \qquad By=16t \text{ 粁},$$

所以根據畢達哥拉氏定理有

$$\overline{xy}=\sqrt{\overline{Bx}^2+\overline{By}^2}=\sqrt{(145-40t)^2+(16t)^2};$$

由此得 $\overline{xy}=\sqrt{1856t^2-11600t+21025}.$

這個方根與根號下的式子

$$z=1856t^2-11600t+21025$$

在同一 t 值上取得最小值，亦即同在

$$t=\frac{11600}{3712}=3\frac{1}{8} \text{ 小時}$$

的時候取得最小值.

所以，兩艇由 A 與 B 點出發，經過 3 小時 7 分 30 秒鐘，這時候彼此距離最短.

10. 問題 6. 在一已知圓裏求作一面積最大的內接矩形.

解 設以 R 表示圓的半徑，以 x 表示所求矩形的邊 AB (圖 5). 按畢達哥拉氏定理，得

$$BC=\sqrt{4R^2-x^2},$$

由此我們所要討論的面積 S 可用下面這式子來表示:

$$S=x\sqrt{4R^2-x^2}.$$

這函數與函數 $y=S^2$ 在 x 的同一數值上達到它們的最大值.

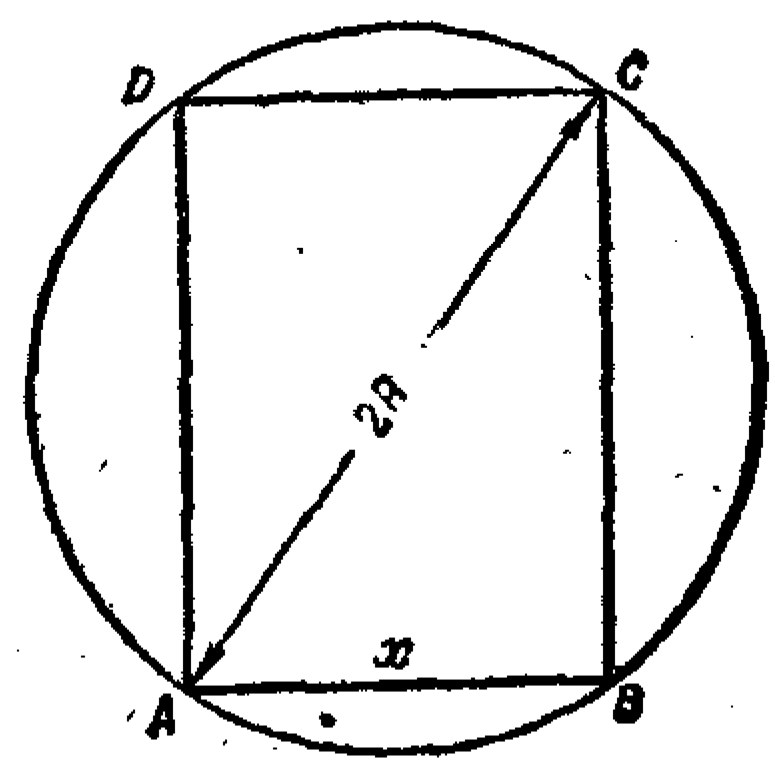

圖 5

但是 $$y=x^2(4R^2-x^2).$$

設 $x^2=z$，得 $$y=z(4R^2-z)=-z^2+4R^2z.$$

這就是說，y_{max} 在 $z=2R^2$ 時，亦即 $x=R\sqrt{2}$ 時就可達到.

要找這 x 的數值，也可以不必引用 z 這個變數，而只要根據這點事實: y 是兩個總和等於常數 $4R^2$ 的乘數之積，因此由於解問題 1 時所得的結果，得

$$x^2=2R^2 \text{ 及 } x=R\sqrt{2}.$$

注意到在 $AB=x=R\sqrt{2}$ 時,亦有

$$BC=R\sqrt{2},$$

可見所求的矩形應該是正方形.如此我們證明了下面這定理:

定理　在一切內接於同一圓的矩形之中,正方形具有最大的面積.

11. 問題 7. 在已知球內要作一側面積最大的內接圓柱體.

解　設以 R 表示球的半徑,而以 r 與 h 各表示所求圓柱體的半徑與高(圖 6).則圓柱的側面積爲

$$S=2\pi rh.$$

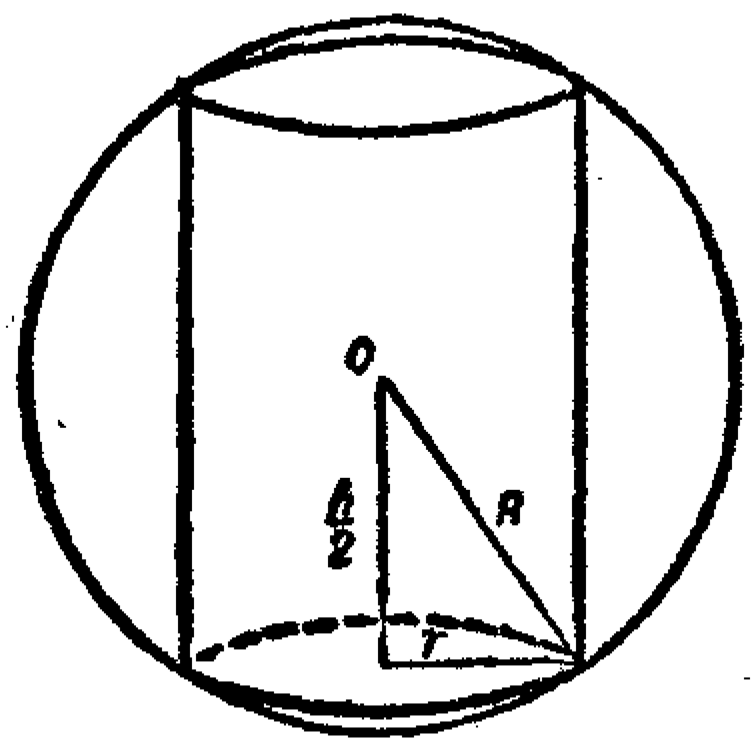

圖 6

另一方面,由圖 6 可見 R, r 與 $\frac{1}{2}h$ 各線段間具有這個關係:

$$\frac{1}{4}h^2+r^2=R^2.$$

由此
$$h=2\sqrt{R^2-r^2},$$

所以
$$S=4\pi r\sqrt{R^2-r^2}.$$

如前一問題,設 $y=S^2$,得

$$y=16\pi^2r^2(R^2-r^2).$$

倘若引入一個新的自變數 $x=r^2$,則 y 可表出如下:

$$y=16\pi^2x(R^2-x),$$

由此 y_{max} 可在 $x_0=\frac{R^2}{2}$ 時達到,亦卽可在

$$r=\frac{R}{\sqrt{2}}=R\frac{\sqrt{2}}{2}$$

時達到．知道了 r,我們也就容易求出 $h=R\sqrt{2}$．再注意對所求圓柱有 $h=2r$, 故我們可見這圓柱通過軸的截面是正方形

12. **問題 8.** 在一已知圓錐體內求作一側面積最大的圓柱體．

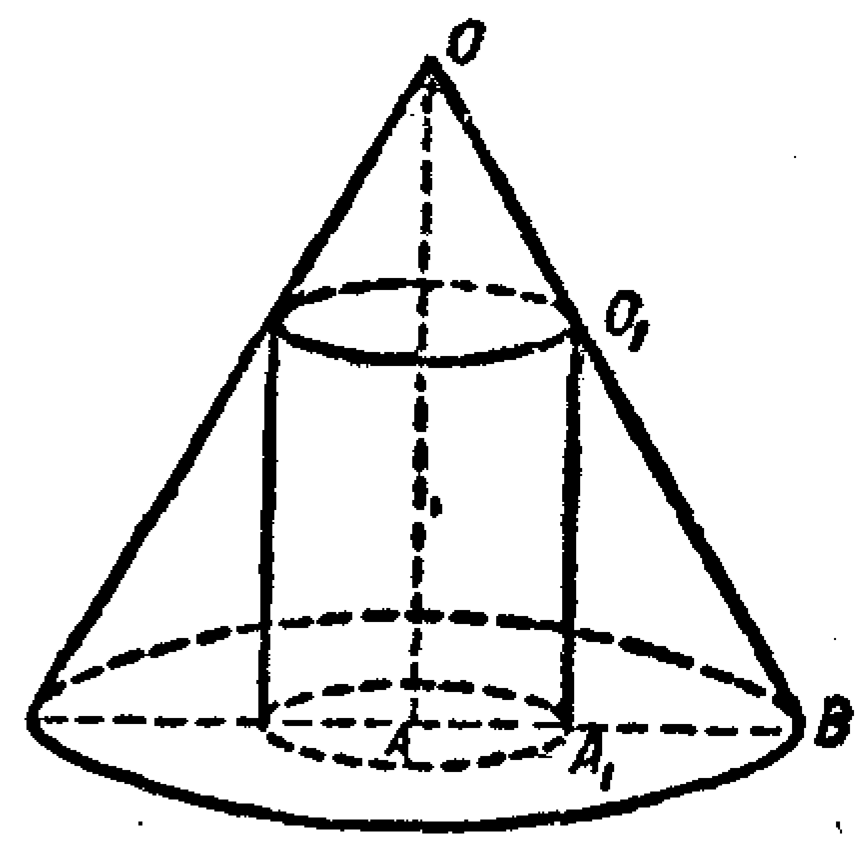

圖 7

解 設以 R 與 H 各表示已知圓錐的底面半徑與高，而以 r 與 h 各表示所求圓柱的半徑與高．於是圓柱的側面積爲

$$S=2\pi rh.$$

但由三角形 OAB 與 O_1A_1B 的相似性（圖 7）得比例式

$$\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R},$$

由此

$$h=\frac{H}{R}(R-r),$$

並且

$$S=2\pi\frac{H}{R}r(R-r).$$

這函數在 $r_0=\frac{1}{2}R$ 時取得其最大值．由此得所求圓柱的高爲

$$h_0=\frac{H}{R}(R-r_0)=\frac{1}{2}H.$$

13. **問題 9.** 在三角形 ABC 內（圖 8）作一條直線 ab 平

行於底邊 AB, 使矩形 $abcd$ 之面積爲最大.

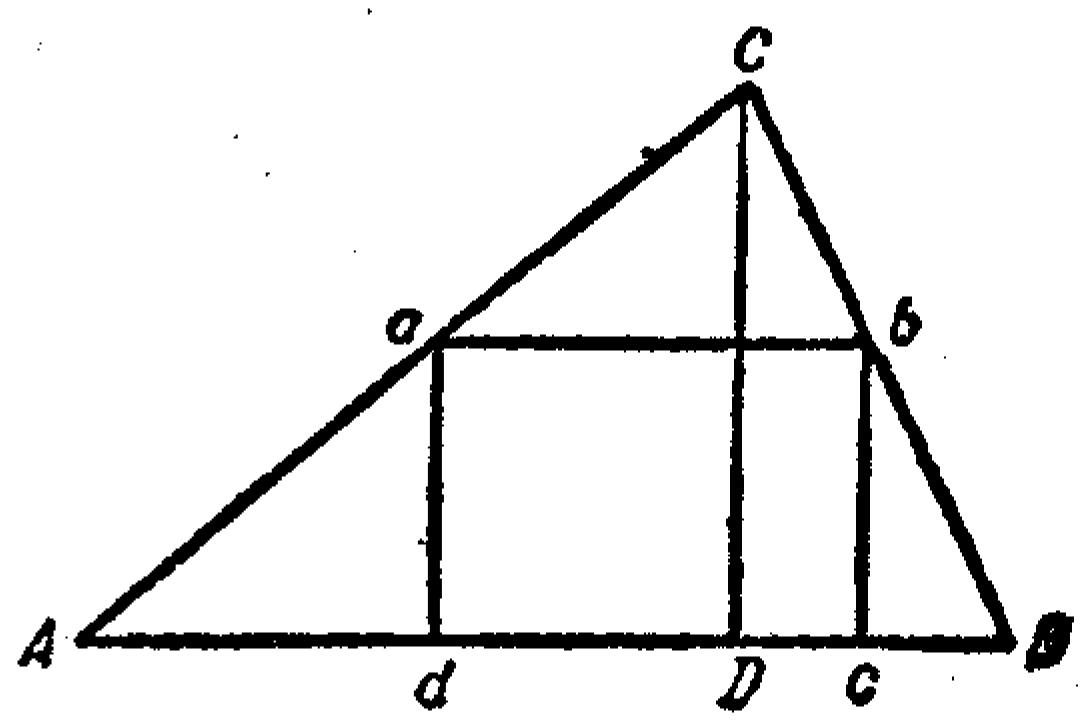

圖 8

解 設 $AB=L$, $ab=l$, $bc=h$, 並以 H 表示三角形 ABC 的 AB 邊上的高 CD. 由三角形 ABC 與 abC 的相似性, 得比例式

$$\frac{l}{L}=\frac{H-h}{H},$$

由此
$$l=\frac{L}{H}(H-h).$$

既然我們所討論的矩形 $abcd$ 的面積是 $S=hl$;

則
$$S=\frac{L}{H}h(H-h),$$

由此 S_{max} 在 $h_0=\frac{1}{2}H$ 時達到.

三 求極大極小值所用的其他定理

14. 我們回顧到在第 5 節裏所解的問題. 由這問題在那裏所得到的解, 可引出下面這個定理:

定理 **兩個正數的幾何平均數, 不大於其算術平均數.**

即
$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

事實上, 設 x 與 y 是兩個正數. 我們以 A 表示它們的和.

$\frac{1}{2}A$ 與 $\frac{1}{2}A$ 這兩個數的和也同是 A. 但既然後兩個數是彼此相等的，則（如第 5 節中所示）它們的乘積大於任何其他兩個同和的數的乘積，所以也大於 x 與 y 的乘積，即

$$xy \leqslant \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

(這裏等號不能不放上去，因為我們當然不能把 $x=y=\frac{1}{2}A$ 這情形除外不算）. 記得 $A=x+y$, 我們可見

$$xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

而這不等式與 (i) 是等價的*. 這個證明也告訴我們**關係 (i) 中的等號必須在 $x=y$ 的時候，也只有在這時候纔成立.**

這定理還可以不用第 5 節的結果，作另外的證明. 事實上 (i) 式可以寫成這個等價的形式

$$0 \leqslant x-2\sqrt{xy}+y,$$

而在這形式看來它是顯然成立的，因為

$$x-2\sqrt{xy}+y=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0.$$

由這個證明也可見 (i) 式中的等號在 $x=y$ 的時候，並且也只在這時候成立.

15. 問題 10. 已知一個正數 P, 要把它分解為兩數之積，使得該兩數之和為最小.

解　設 P 以任何方式表示成兩數之積的形狀:

* 譯者註: 兩個式子 A 與 B 稱為‘等價的’，如果有 A 則有 B, 並且有 B 則有 A 的話，亦即 A 與 B 互為‘必要而且充足’的條件.

$$P=xy \quad (x>0, y>0).$$

於是由不等式(i)得

$$x+y\geqslant 2\sqrt{P}.$$

所以,無論乘數 x 與 y 如何選擇,其和總不小於 $2\sqrt{P}$. 但是,選其相等時,即設 $x=\sqrt{P}, y=\sqrt{P}$ 時,我們顯然可使其和等於 $2\sqrt{P}$. 如此,$2\sqrt{P}$ 就是我們所討論的這個和的最小值,而此值在兩數相等的時候,也只在這時候可以達到.

如果把注意轉向 $y=\dfrac{P}{x}$, 則所得這問題的解可以敍述成下面這個定理的形狀:

定理　函數

$$z=x+\frac{P}{x} \quad (P>0)$$

(其中自變數只取正值)在 $x_0=\sqrt{P}$ 上亦只在 x 的這一個數值上達到其最小值 z_{min}.

16. 問題 11. 牆上掛着一張畫 AB. 問觀察者應站在離牆多遠的地方,可使其視角 θ 成爲最大?

解　設以 K 表示通過觀察者眼睛的水平線與牆的交點(圖 9). 於是所求的距離就是 OK. 以 x 表示其數值,並設

$$KA=a, \ KB=b.$$

若以 α 與 β 代表 KOA 與 KOB 角,則顯然

$$\theta=\beta-\alpha.$$

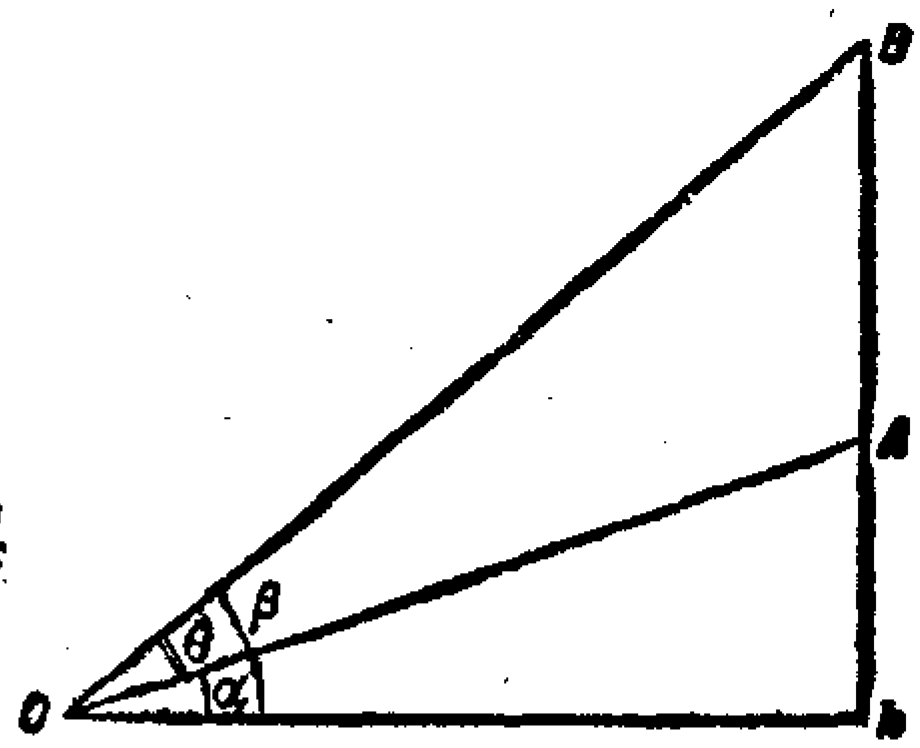

圖 9

由此 $$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

但是 $$\tan\alpha=\frac{a}{x},\qquad \tan\beta=\frac{b}{x}.$$

所以 $$\tan\theta=\frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}.$$

既然 θ 角在其正切最大時達到其最大值，故我們的問題變成了要找能使這個分數

$$\frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}$$

達到最大值的那個 x 的數值了．但其分子爲常數，這就是說，只要使分母

$$x+\frac{ab}{x}$$

成爲最小就行了．

按上節的定理，所求的這個 x 的數值就是

$$x_0=\sqrt{ab}.$$

17. 在第14節裏所講的定理，可以有一種很重要的推廣，它在理論上表現很大的意義．利用它還可以解許多極大極小問題．這種推廣可以陳述成定理的形式如下：

定理 **無論多少個正數的幾何平均數恆不大於其算術平均數．即**

$$\boxed{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}}$$

證　我們要來講的這個證法雖不很簡單，卻很巧妙，是數學歸納法的一種很不尋常的變體。

若$n=2$，則我們這定理就與在第14節裏已經證明的定理相合．設$n=4$．則按所證明的有

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}=\sqrt{\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}}\leqslant\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}}$$
$$\leqslant\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}.$$

即
$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\leqslant\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}.$$

如此在$n=4$時這定理是證明了．

現在設$n=8$．於是按所證明的有

$$\sqrt[8]{x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_8}=\sqrt{\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\cdot\sqrt[4]{x_5x_6x_7x_8}}$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\cdot\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}},$$

所以
$$\sqrt[8]{x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_8}\leqslant\frac{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}+\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}}{2}.$$

如此在$n=8$時這定理也證明了．

同樣我們可證在$n=16$時，在$n=32$時，在$n=64$時，乃至一般地在$n=2^m$時這定理都成立；這完成了尋常對m的歸納．

現在設n不是2^m形狀的數．於是我們選擇這樣大的m，使得
$$2^m>n.$$

設
$$\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}=A,$$

並且在 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 這些數上再添補 2^m-n 個數，如

$$x_{n+1}=A,\ x_{n+2}=A, \cdots\cdots, x_{2^m}=A.$$

於是按已經證明的有

$$\sqrt[2^m]{x_1x_2\cdots\cdots x_n\,x_{n+1}\cdots\cdots x_{2^m}}\leqslant\frac{x_1+\cdots\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots\cdots+x_{2^m}}{2^m}.$$

由此
$$\sqrt[2^m]{x_1\cdots\cdots x_nA^{2^m-n}}\leqslant\frac{x_1+\cdots\cdots+x_n+(2^m-n)A}{2^m}.$$

但既然
$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=nA,$$

則
$$\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n+(2^m-n)A}{2^m}=\frac{nA+(2^m-n)A}{2^m}=A.$$

所以前面那不等式成了這形狀

$$\sqrt[2^m]{x_1x_2\cdots\cdots x_nA^{2^m-n}}\leqslant A,$$

由此經 2^m 次的乘方以後有

$$x_1x_2\cdots\cdots x_nA^{2^m-n}\leqslant A^{2^m},$$

所以
$$x_1x_2\cdots\cdots x_n\leqslant A^n,$$

即
$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}\leqslant A=\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}.$$

如此這定理完全證明了.

18. 用剛纔證明的這個定理可以解兩個問題，在現在這一節裏來討論它們.

問題 12. 將一個已知正數 A 分爲 n 個正數之和，使這 n 個數之乘積爲最大.

解 令 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 爲正數，且

$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=A.$$

於是按第 17 節的定理有

$$x_1x_2\cdots\cdots x_n\leqslant\left(\frac{A}{n}\right)^n.$$

所以，不論這 n 個數如何選擇，其乘積不會大於 $\left(\frac{A}{n}\right)^n$ 的。由另一方面來看，在 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=\frac{A}{n}$ 時顯然可以得到一個等於 $\left(\frac{A}{n}\right)^n$ 的乘積．所以 A 應該分爲 n 個彼此相等的數，這樣，它們的乘積纔是最大．

問題 13．將一個已知正數 P 分解爲 n 個正數之積，使得它們的和爲最小．

解法與問題 12 的相似．即若

$$x_1x_2\cdots\cdots x_n=P,$$

則按第 17 節的定理有

$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n\geqslant n\sqrt[n]{P}.$$

這就是說，不論 P 如何分解法，所得 n 個數之和決不會小於 $n\sqrt[n]{P}$，而既然在

$$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=\sqrt[n]{P}$$

時所得之和等於 $n\sqrt[n]{P}$，則所求的 n 個數應該彼此相等．

19．利用第 18 節的結果，還可以解許多具體問題．我們來舉幾個例．

問題 14．在一已知球內，求作一體積最大的內接圓柱．

解 保持第 11 節裏所用的符號，如此我們所要討論的體積可以用這樣的式子表出：$V=\pi r^2h$.

但我們在第 11 節中看到， $h=2\sqrt{R^2-r^2}$.

這就是說， $V=2\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$.

設 $z=\frac{1}{4\pi}V^2$，我們得：$z=r^4(R^2-r^2)$，

這裏 z 與 V 在 r 的同一數值取得其最大值．既然

$$\frac{1}{4}z=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{r^2}{2}(R^2-r^2),$$

則 $\frac{1}{4}z$ 是三個總和等於 R^2 的數的乘積．這就是說，使 z 取得最大值的 r 應滿足這個條件：

$$\frac{r^2}{2}=\frac{r^2}{2}=R^2-r^2.$$

由此
$$r=R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

20．問題 15． 在一已知圓錐裏，求作一體積最大的內接圓柱．

解 保持第 12 節裏所用的符號，則我們所討論的體積可用下面這樣的式子表出：

$$V=\pi r^2h.$$

但由第 12 節可見
$$h=\frac{H}{R}(R-r).$$

這就是說，
$$V=\pi\frac{H}{R}r^2(R-r).$$

要問 V 在 r 的什麼數值上取得最大值，只要看這個函數

$$z=\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}(R-r)$$

在 r 的什麼數值上取得最大值就行了．但這函數是三個總和固定的數的乘積．這就是說，在

$$\frac{r}{2}=\frac{r}{2}=R-r$$

時，亦卽在 $r=\frac{2}{3}R$ 時，該函數達到其最大值 z_{max}.

21. 問題 16. 在一已知球內，求作一體積最大的內接圓錐體．

解 我們以 R 表示球的半徑，並且以 r 與 h 各表示圓錐體的底面半徑與高．由圖 10 顯然 $r=AB$ 是線段 BD 與 BC 的比例中項．但

$$BD=h,\quad BC=2R-h.$$

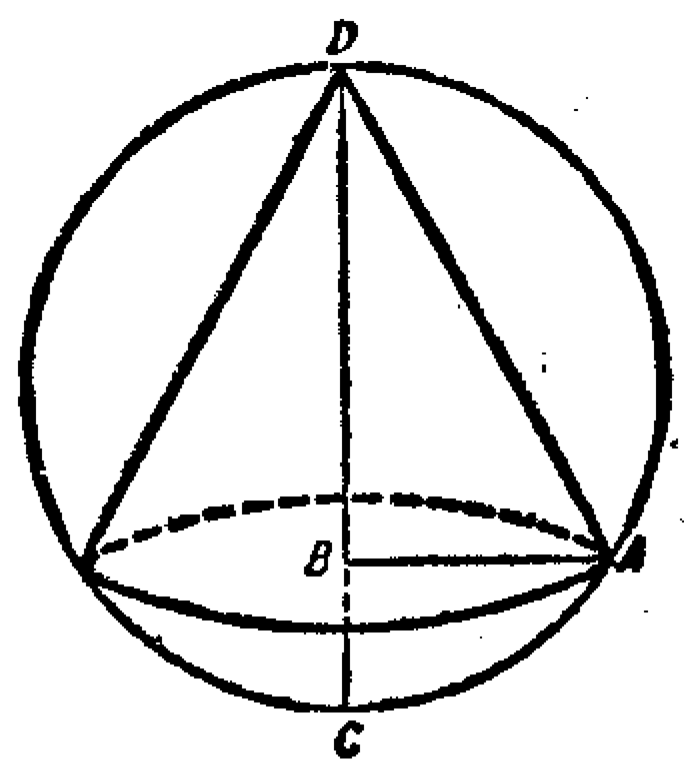

圖 10

這就是說，

$$r^2=h(2R-h).$$

既然我們所討論的體積是

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h,$$

則

$$V=\frac{\pi}{3}h^2(2R-h).$$

現在來看下面這個與 V 同時取得最大值的函數：

$$z=\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}(2R-h).$$

它在
$$\frac{h}{2}=\frac{h}{2}=2R-h$$
時，亦即在
$$h=\frac{4}{3}R$$
時，達到其最大值 z_{max}.

22. 問題 17. 在圓桌中心上掛着一盞帶滑輪的電燈. 問這燈在什麼高度時，圓桌的邊被照得最亮?

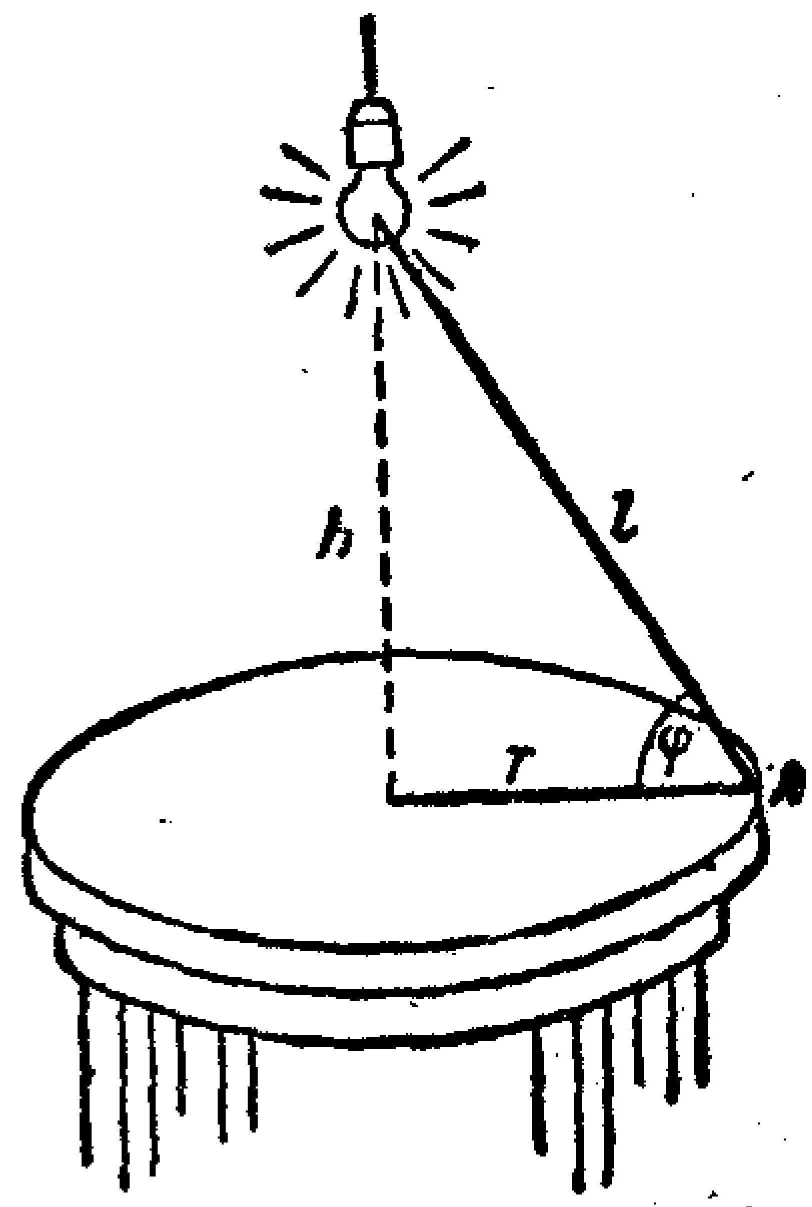

圖 11

解 我們用如圖 11 的符號，由物理學知道在 A 點的光的照度 I 可用這個公式表出:
$$I=k\frac{\sin\varphi}{l^2},$$
這裏 k 是一個常數的比例係數.

注意
$$\cos\varphi=\frac{r}{l},$$
得
$$I=\frac{k}{r^2}\sin\varphi\cos^2\varphi.$$

現在我們來討論這個函數 $z=\frac{r^4}{k^2}I^2$.

顯然，這函數與 I 同時達到其最大值 z_{max} 與 I_{max}. 但
$$z=\sin^2\varphi\cdot\cos^4\varphi;$$
由此
$$\frac{1}{4}z=(1-\cos^2\varphi)\frac{\cos^2\varphi}{2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{2},$$
並且 z 在
$$1-\cos^2\varphi=\frac{\cos^2\varphi}{2}=\frac{\cos^2\varphi}{2}$$

時，亦卽在
$$\cos\varphi=\sqrt{\frac{2}{3}}$$
時達到其最大值。

在這樣的 φ 有
$$\tan\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
而旣然
$$h=r\tan\varphi,$$
則所求的高是
$$h_0=r\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.7r^*.$$

23. 問題 18. 有一塊矩形的洋鐵片，其尺寸是 80 厘米 ×50 厘米．現在要在四角各裁去一個一樣大的正方形，使得剩下的洋鐵片所做成的一個上面開口的盒子可以有最大的容量。

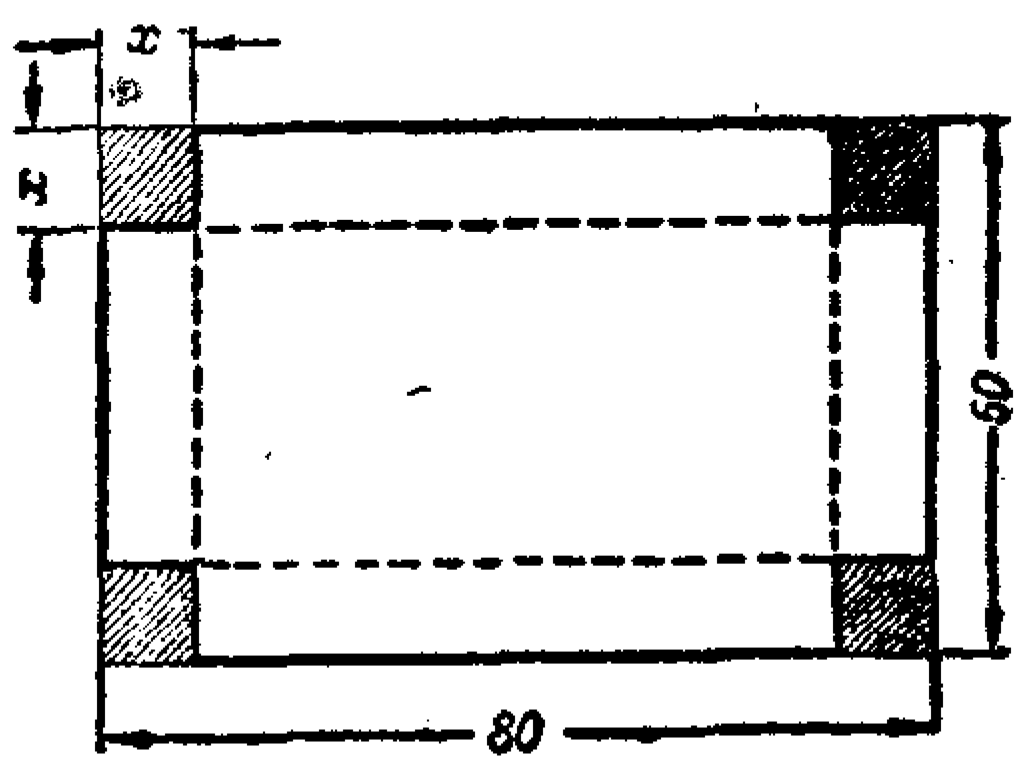

圖 12

解　以 x 表示所裁去的正方形的邊（圖 12）．不難看出，所得這個盒子的容量 V 是
$$V=x(80-2x)(50-2x).$$
顯然，我們想要用
$$z=4x(80-2x)(50-2x)$$
替代 V，並且令其三個乘數相等，這樣子來求 V_{max} 是不會成

* 譯者註：≈是近似地相等的記號．

功的，因爲這個方程式 $80-2x=50-2x$ 不能解。

我們要另走別的路線，即在最後一個乘數裏乘以常數 k，這常數的取法稍後再來細講．如此我們要來討論這函數

$$kV=x(80-2x)(50k-2kx).$$

這裏三個乘數之和不是常數，所以我們還要在第一個乘數上乘以 $2k+2$．如此我們來研究這個函數

$$z=[(2k+2)x][80-2x][50k-2kx].$$

不論 k 如何選擇，這裏三個乘數之和恆等於 $80+50k$．這就是說，這函數 z 在

$$(2k+2)x=80-2x=50k-2kx$$

時（與 V 同時）取得最大值．

如此，爲要找 x 我們有兩個方程式：

$$(2k+2)x=80-2x,$$

$$(2k+2)x=50k-2kx.$$

這兩個方程式有下面的解：

$$x=\frac{40}{k+2},\quad x=\frac{25k}{2k+1}.$$

爲得要使這問題有解，這兩個 x 的數值應該相合，即應該

$$\frac{40}{k+2}=\frac{25k}{2k+1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

我們在這裏有辦法來選取 k 的數值了．即 k 可以選來適合條件 (i)，這條件即可視爲用來決定 k 的方程式．解這方程式，我們找到 k 的兩個數值：

$$k_1=2,\quad k_2=-\frac{4}{5}.$$

但是 k 的負值是不合適的。事實上，按問題的意義，$50-2x$ 在 V 中應該是正的．由另一方面來說，爲得能够採用'等乘數法'來找 z_{max}，應該相信三個乘數都是正的．所以其中這個乘數當然也是正的：

$$50k-2kx=k(50-2x).$$

但是這兩個式子

$$k(50-2x)\text{ 與 }(50-2x)$$

只有在 k 是正的候時纔能够同時是正的．

所以 k 必須選擇這個數值：$k=2$．k 這樣選定後，x 得到這個數值：$x=10$．如此，問題就解決了．

結　語

由以上可見，任何問題如果可以化爲找二次三項式

$$y=ax^2+bx+c$$

的極端值的，就都可以用初等代數的方法來解．

在同樣情形，如果問題化爲要找較複雜的函數的極大或極小值時，則我們只要對個別問題特別採取一點技巧的方法，也就解得通了．

自然有人會問：是否有求任何種函數的極端值的一般方法——不僅是求二次三項式的？這種方法是有的．但在前言裏已經說過，這種方法研究起來是必須引用高等數學的．

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝简易的极大极小问题
作者＝纳？松著　　丁寿田译
页数＝２８
ＳＳ号＝１１１８７９０９
出版日期＝１９５２年０４月第１版