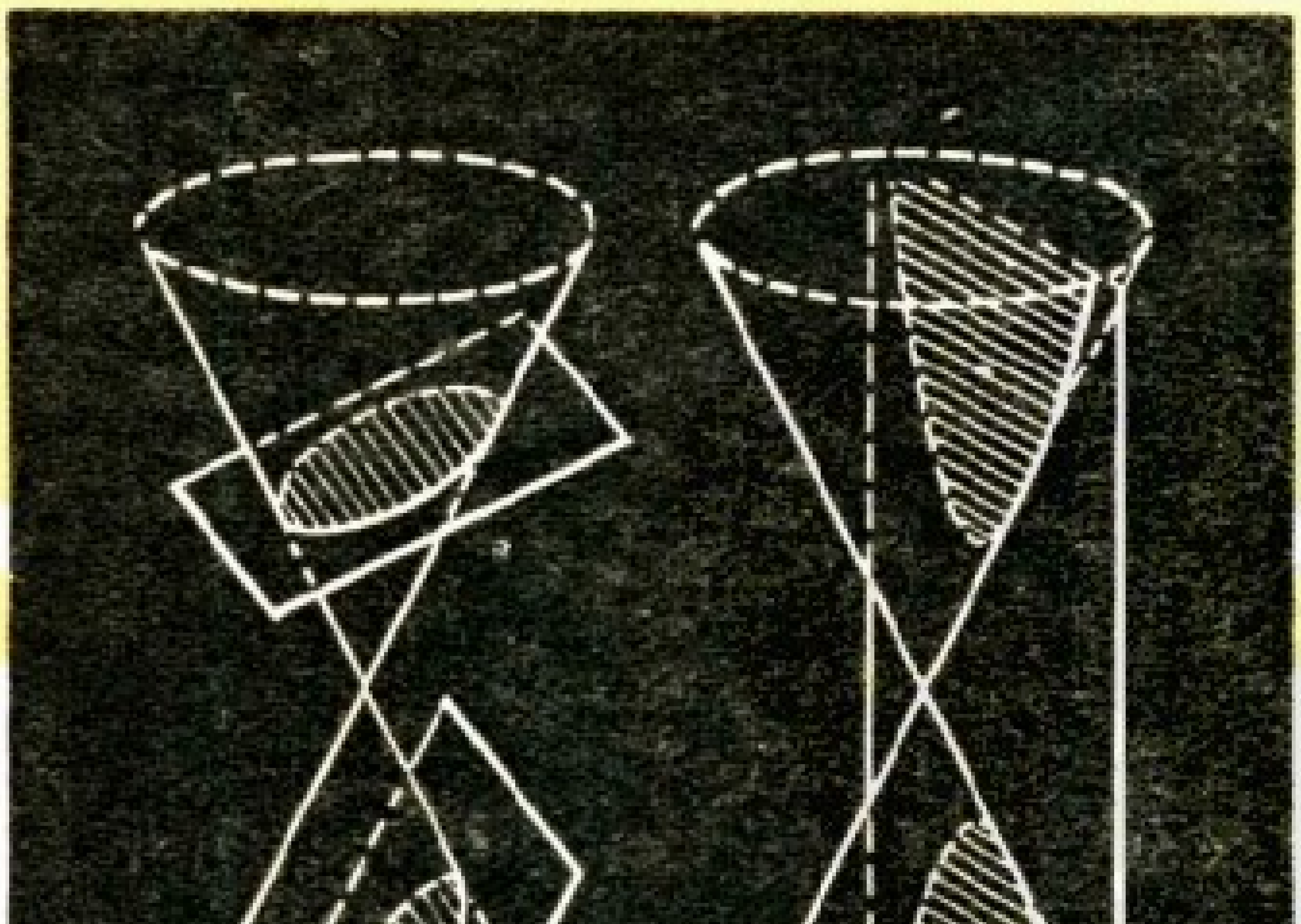
蘇聯青年科學叢書

奇妙的曲線

馬庫希維奇著
高　徹譯



開　明　書　店

譯者的話

本書是由俄文的數學通俗講演第四本——'奇妙的曲線'第二版翻譯出來的．本書的特色是把比較枯燥的數學定理和日常生活中所遇到的生動具體的事物聯系起來，使讀者讀了以後會對數學發生濃厚的興趣，而且毫不費勁地知道許多曲線的有趣的性質．

據原作者說：本書是根據在莫斯科中學對七、八年級學生的講稿寫成的．蘇聯的七、八年級相當於我國初中三、高中一程度；所以具有中學數學程度的人，一定能讀得懂它．本書不但可供學生課外閱讀，而且也可給正在業餘學習數學的同志作自修參考之用．

高　徹 1952 年 8 月

原　　序

這本小書主要是供中學生閱讀的，但也可以供只有中學程度數學知識的成年教師自修之用．作者是根據在莫斯科中學對七年級和八年級學生的講稿寫成本書的．

在準備這本講稿出版時，作者略添了一些材料，可是盡力設法保持原來容易瞭解的程度．最主要的是在第13節說到橢圓、雙曲線和拋物線都是圓錐的截線一段作了補充．

爲了不增加本書的篇幅，大多數關於曲線的說明是沒有證明的，雖然有許多情形本來可以作出證明，使讀者更易了解．

第二版的材料和第一版一樣，沒有什麼變更．

馬庫希維奇

1. 在日常談話裏，'曲'字的意義跟'直'，'正確'，'正當'這些字眼的意義相反．談話裏時常說到：彎曲的手杖，曲折的路，曲面的鏡子；諺語裏還有'曲在富人，直在貧人'這句話．

在數學裏有所謂'曲線'．什麼是曲線呢？怎樣能把一切曲線，例如用鉛筆或鋼筆在紙上畫的，用粉筆在黑板上畫的，隕星或者鑽天流星在黑夜天空中所畫出的，都包括在一個定義裏呢？

我們可以採用下面的定義：**曲線是動點留下的痕跡**．上例裏的鉛筆頭，粉筆頭，穿過空氣上層的熾熱的隕星或者鑽天流星，都是定義裏的動點．從這個定義的觀點看，直線是曲線的特殊情形．的確，動點爲什麼不可以留下一道直的痕跡呢？

2. 如果動點沿最短的路線，從它原來的位置移動到任意的別的位置，那麼這動點就畫出一條直線．畫直線可以用直尺；倘使鉛筆沿一支直尺的邊線滑動，鉛筆頭就留下一道直線的痕跡．

如果在平面上運動的一動點，跟這平面上一定點的距離保持不變，那麼這動點就描出一個圓．用圓規畫圓，就是根據這個性質．

直線和圓是兩種最簡單的曲線．從性質來說，同時又是最奇妙的曲線．比起別的曲線來，讀者對於直線和圓一定比

較熟悉些．但不要以爲你已經知道了直線和圓的一切重要的性質．比方說，你知道下面的定理嗎？設有兩個三角形 ABC 和 $A'B'C'$，它們的頂點聯線 AA'，BB' 和 CC' 相交於一點 S（圖 1），那麼這兩個三角形的三對對應邊，AB 和 $A'B'$，BC 和 $B'C'$，CA 和 $C'A'$ 的三個交點 M,K,L 必在同一直線上．

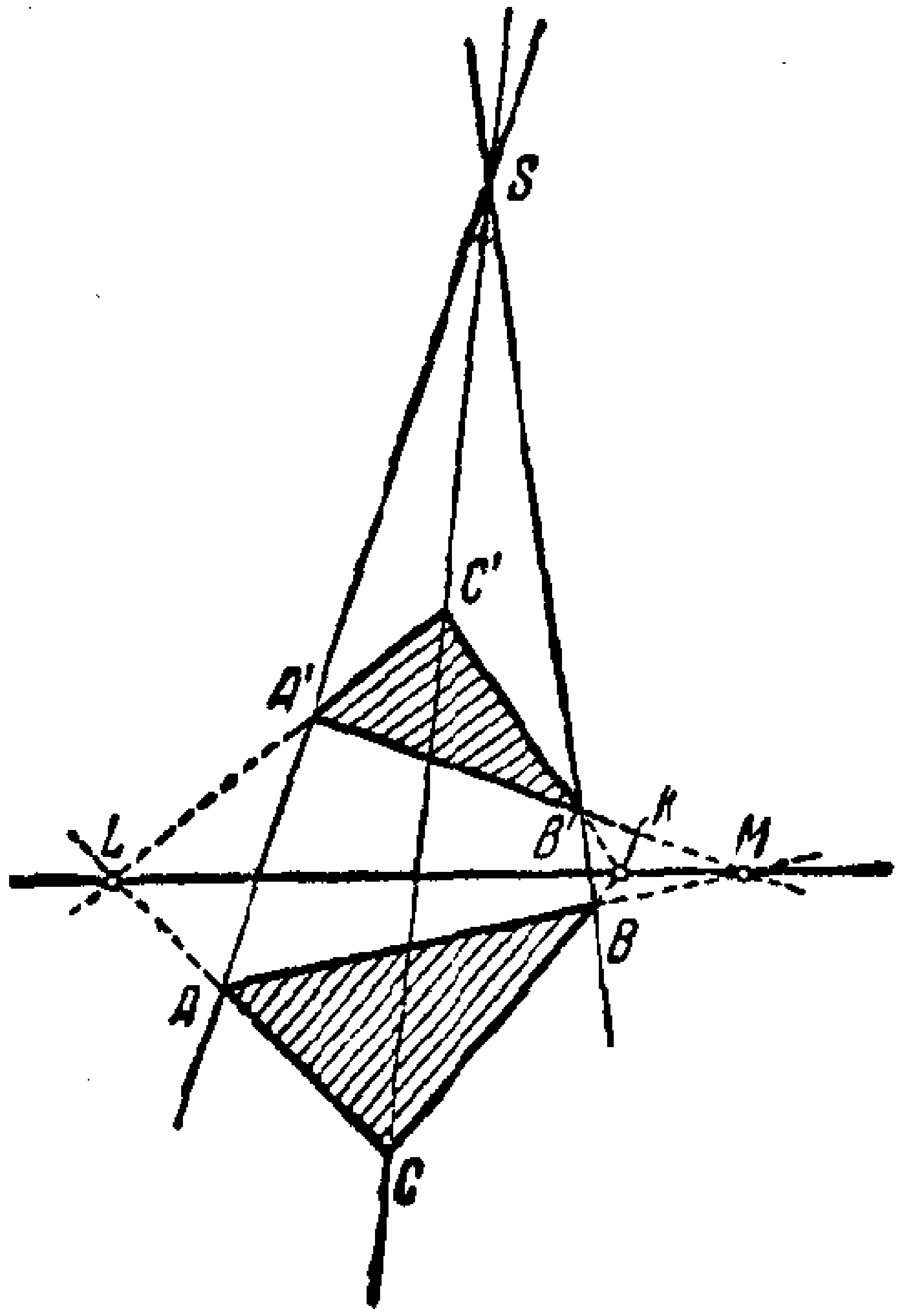


圖 1

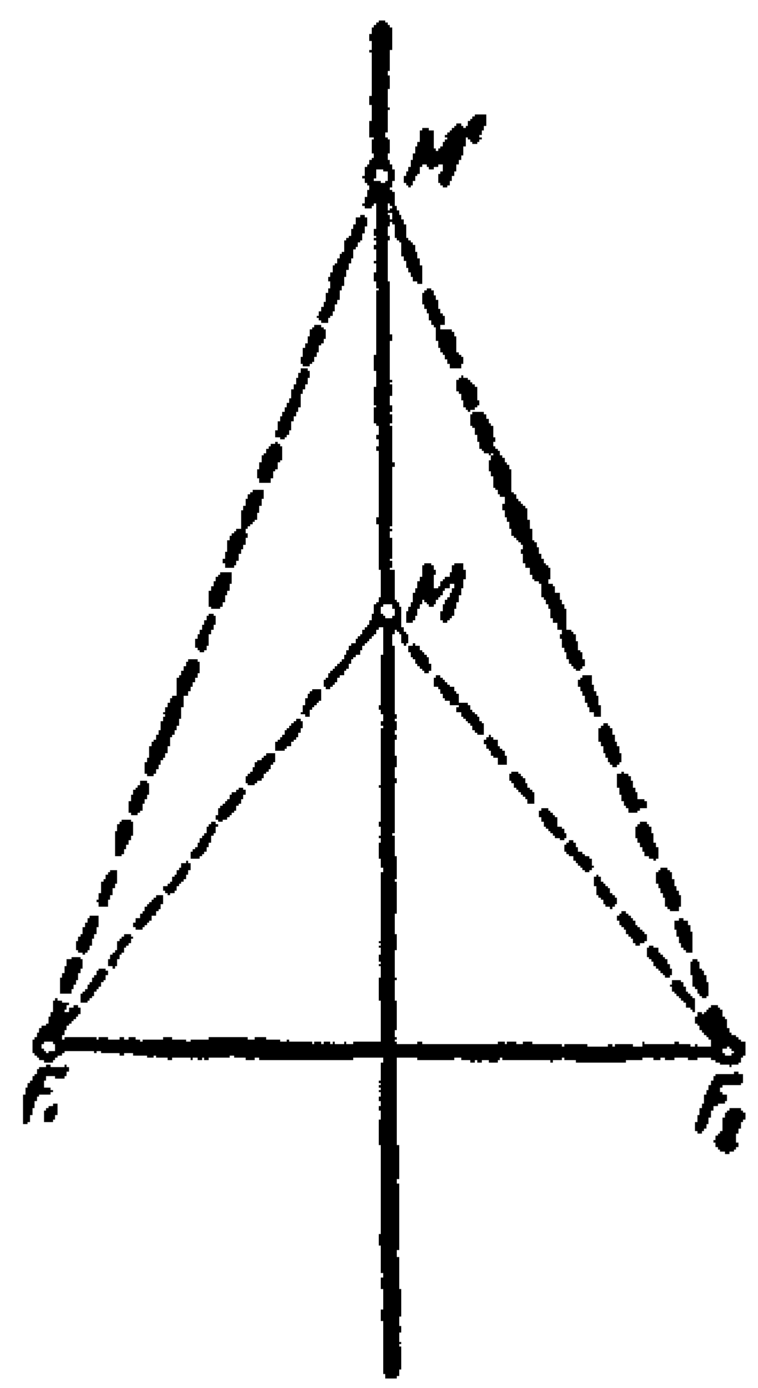


圖 2

讀者當然知道下面的事實：假使動點 M 在一個平面上運動，跟這平面上兩定點 F_1，F_2 的距離是相等的，也就是說 $MF_1=MF_2$，那麼 M 點必然描出一條直線（圖 2）．倘使問讀者：假定從 M 點到 F_1 點的距離，是 M 點到 F_2 點距離的若干倍（比方說兩倍，如圖 3），M 點會描出什麼樣的曲線呢？這個問題讀者大概覺得很難回答．可以證明這條曲線是一個圓．總之，如果 F_1 和 F_2 是平面上兩定點，M 點在這平面上這樣的

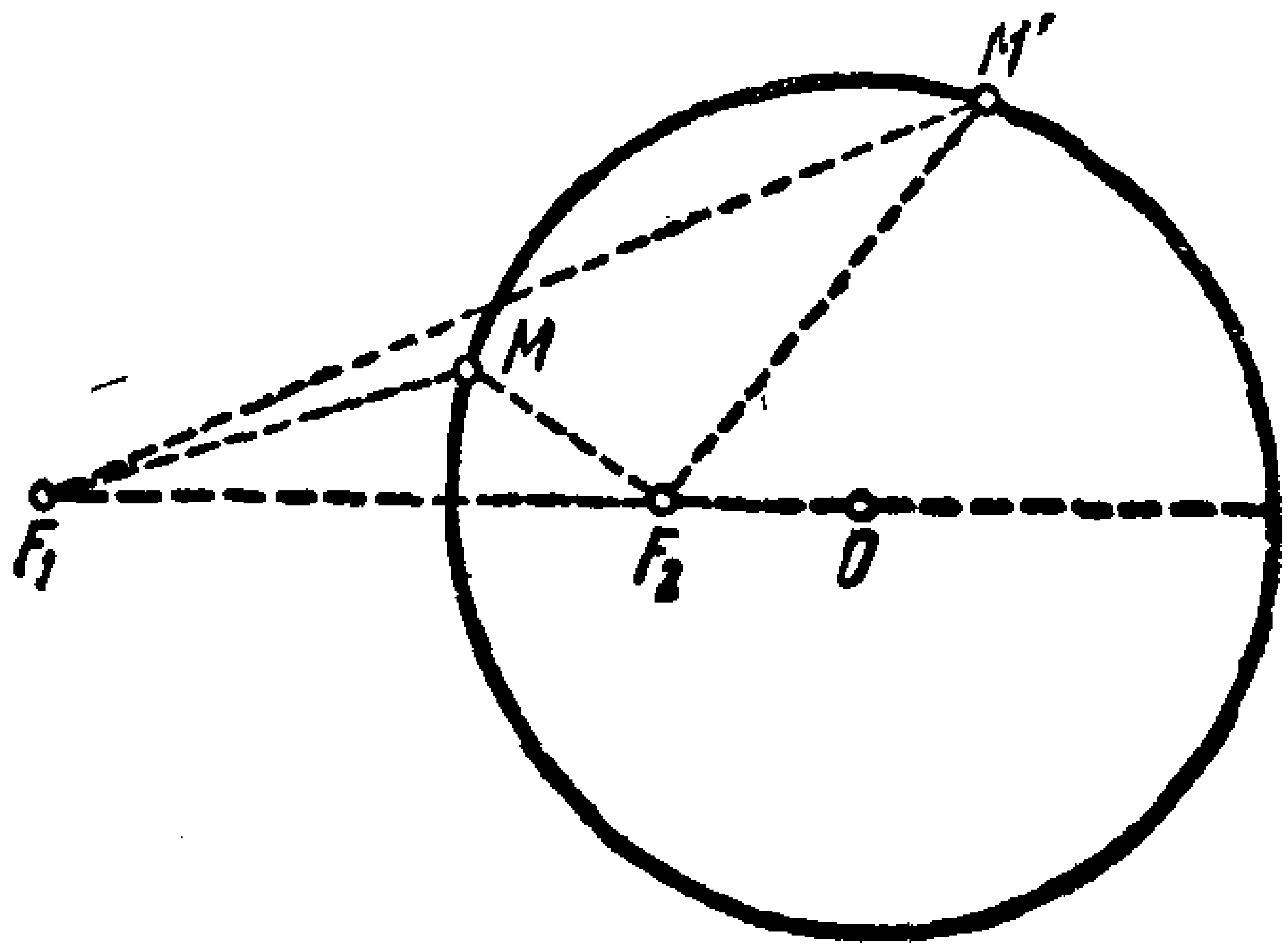


圖 3

運動，使 M 點到 F_1 的距離跟它到 F_2 的距離成正比，就是

$$MF_1 = k \cdot MF_2,$$

那麼 M 點或者是描出一條直線(如果比例係數 $k=1$)，或者描出一個圓(如果比例係數 k 不等於 1)。

3. 如果動點 M 到兩定點 F_1 和 F_2 的距離的和保持不變，讓我們研究一下 M 點所描出的曲線。取一根線，把它的兩頭繫在兩根針上，又把針釘在一張紙上的某兩點，這兩點的距離比線的長度短，這樣這根線是寬鬆的。現在用一支直立的鉛筆拉緊這根線，把鉛筆輕輕地壓在紙上，同時把鉛筆漸漸移動，並注意應該把線拉緊(圖 4)，那麼鉛筆尖 M 點就會畫出一個卵圓形的曲線(很像壓扁的圓)；這種曲線叫做**橢圓**。

要畫出整個橢圓，在畫好一半橢圓的時候，必須把線換到針的另一側，再畫出另一半。顯然，當針運動的時候，鉛筆尖 M 點

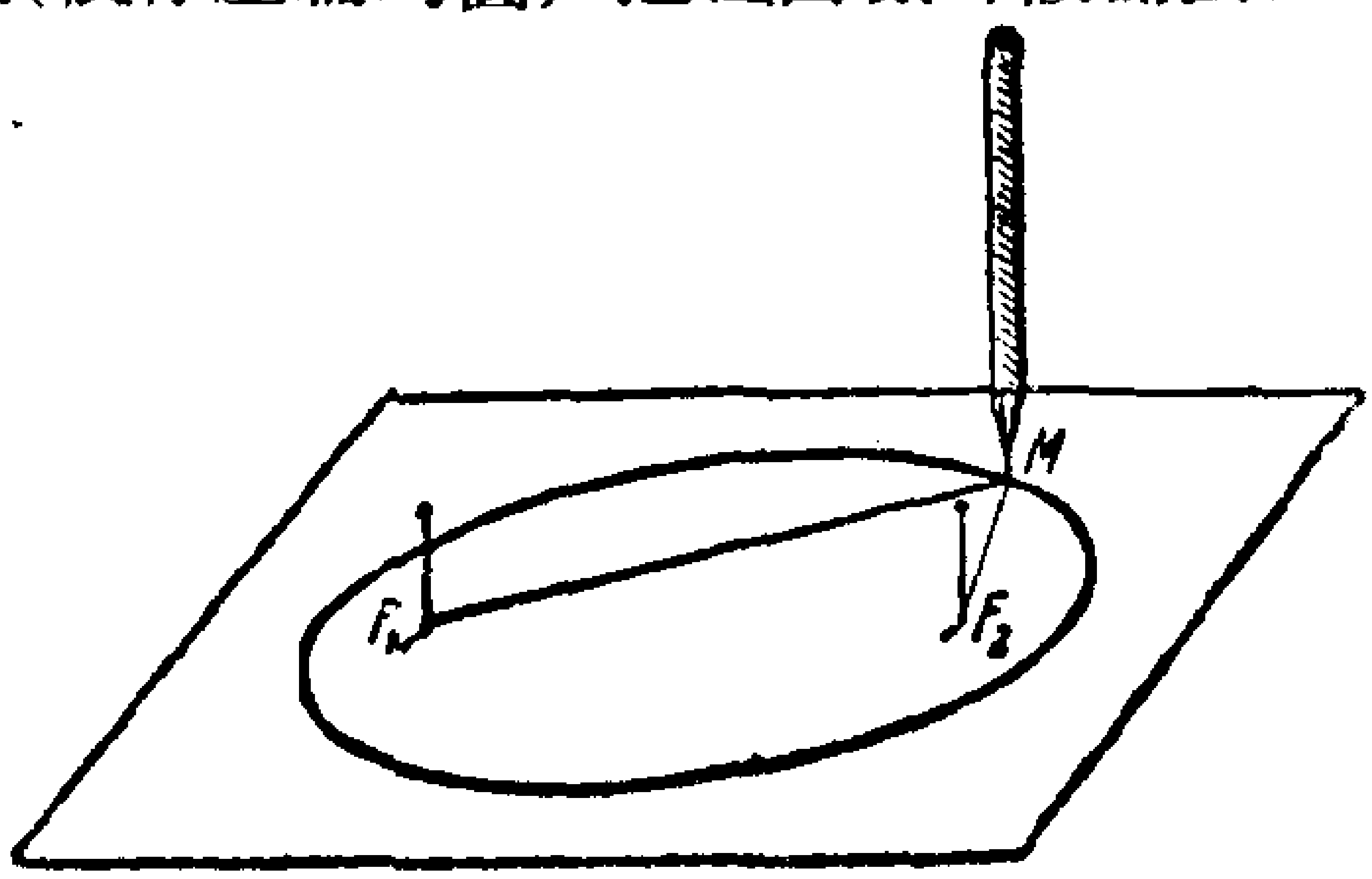


圖 4

到針頭 F_1 點的距離和到針頭 F_2 點的距離的和，總是不變的；

這兩段距離的和就等於線的長度.

針頭在紙上刺出的兩點,叫做橢圓的**焦點**. 焦點這個名詞是從拉丁文 *focus* 翻譯來的,它的原來意義是'爐灶'或'火',下面舉的一個有趣的橢圓的性質,說明了爲什麽要替它取這樣的名字.

倘使把一條磨光的金屬片沿一條橢圓弧捲起來,並且在橢圓的一個焦點上放一個發光的東西,比方說火光,那麼光線在金屬片上反射後,就都聚集在另外一個焦點上;因此,在另外一個焦點上也可以看到火光——這是原來的火光的映像(圖5).

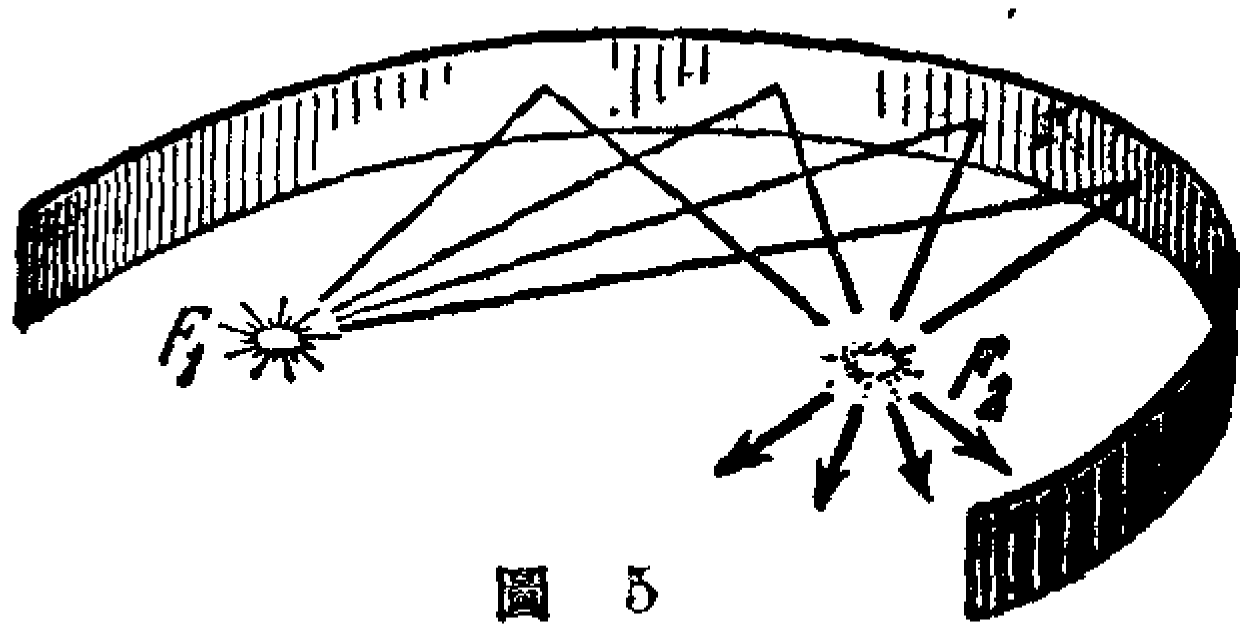


圖　5

4. 如果把焦點用一直線段聯結起來,而且延長這線段,使它跟橢圓相交,就得到橢圓的長軸 A_1A_2(圖6). 橢圓對於它的長軸是對稱的. 如果把線段 F_1F_2 平分,並在中點作一條 F_1F_2 的垂直線,再延長它跟橢圓相遇,就得到橢圓的短軸 B_1B_2. 它也是橢圓的對稱軸. 軸的端點 A_1, A_2, B_1 和 B_2 叫做橢圓的**頂點**.

A_1 點到兩焦點 F_1 和 F_2 的距離的和,應當等於所用的線的長度 l:

$$A_1F_1+A_1F_2=l.$$

但因爲橢圓是對稱的,所以

$$A_1F_1=A_2F_2,$$

因此,我們可以在前式中拿 A_2F_2 來替代 A_1F_1, 得到

$$A_2F_2+A_1F_2=l.$$

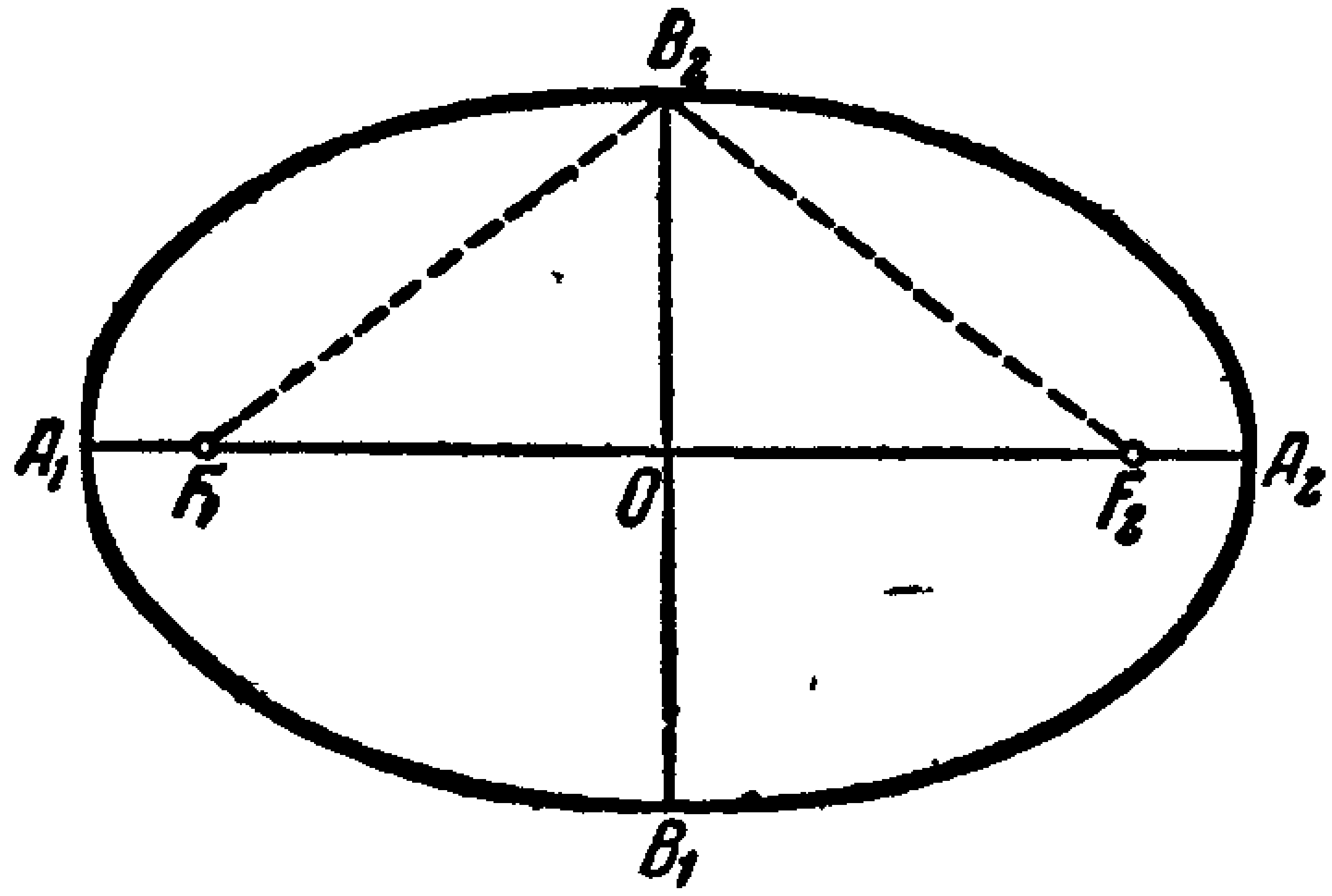


圖 6

顯然，上式左端的和等於橢圓長軸的長度．可見橢圓長軸的長度等於那一根線的長度；換一句話說，橢圓上任何一點到兩焦點距離的和，等於這橢圓的長軸的長度．因爲橢圓是對稱的，還可以推出下面的推論：從頂點 B_2（或者 B_1）到一個焦點的距離，等於長軸長度的一半．所以已知橢圓的四頂點，極容易作出它的焦點：用 B_2 點做圓心，用 A_1A_2 的一半長度做半徑，作一個圓弧，這圓弧跟長軸相交的兩點，就一定是焦點．

5. 把橢圓的長軸當作直徑，作一個圓（圖 7），從圓上任意一點 N 向長軸作垂直線 NP，它跟橢圓相交於 M 點．很明顯的可以看出 NP 比 MP 的數值大，用解析幾何可以證明下面的事實：倘使在圓上

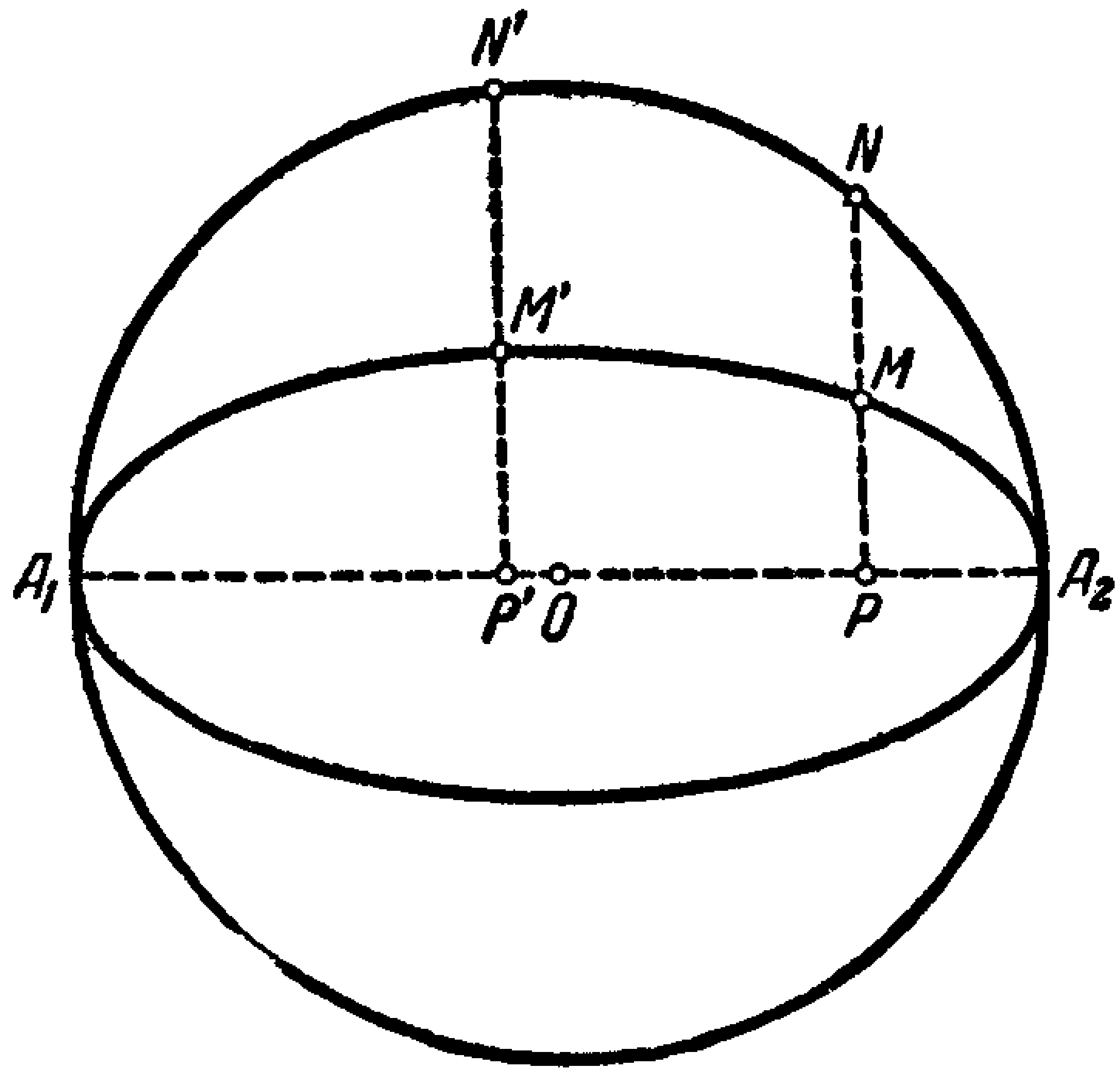


圖 7

取另一任意點 N'，跟前邊同樣作一垂直線 $N'P'$，那麼線段 $N'P'$ 和 $M'P'$ 的比，一定跟 NP 和 MP 的比相等；就是

$$\frac{NP}{MP}=\frac{N'P'}{M'P'}.$$

換一句話說，倘使我們把這圓上任意的一些點，用同一比率把它們到某一直徑的距離縮短，就能夠從包圍這個橢圓的圓作出這個橢圓來．根據這一個性質，可以這樣簡單的作橢圓：先作一個圓和這個圓的任一直徑，再從圓上任意一點 N，向這直徑作垂直線 NP，在 NP 上求出一點 M，令 M 點到直徑的距離跟 N 點到直徑的距離成一定的比率（譬如說 2∶3，1∶2，1∶3 等等）．這樣就可以得到橢圓上的許多點，這個橢圓的長軸跟這個圓的直徑相等，它的短軸跟直徑的比率就跟前面所說的比率（2∶3，1∶2，1∶3 等）相同．

6. 橢圓在我們日常生活裏也時常看到．舉例來說，倘使把盛水的玻璃杯傾側，那麼水面就成橢圓形（圖 8）；同樣如

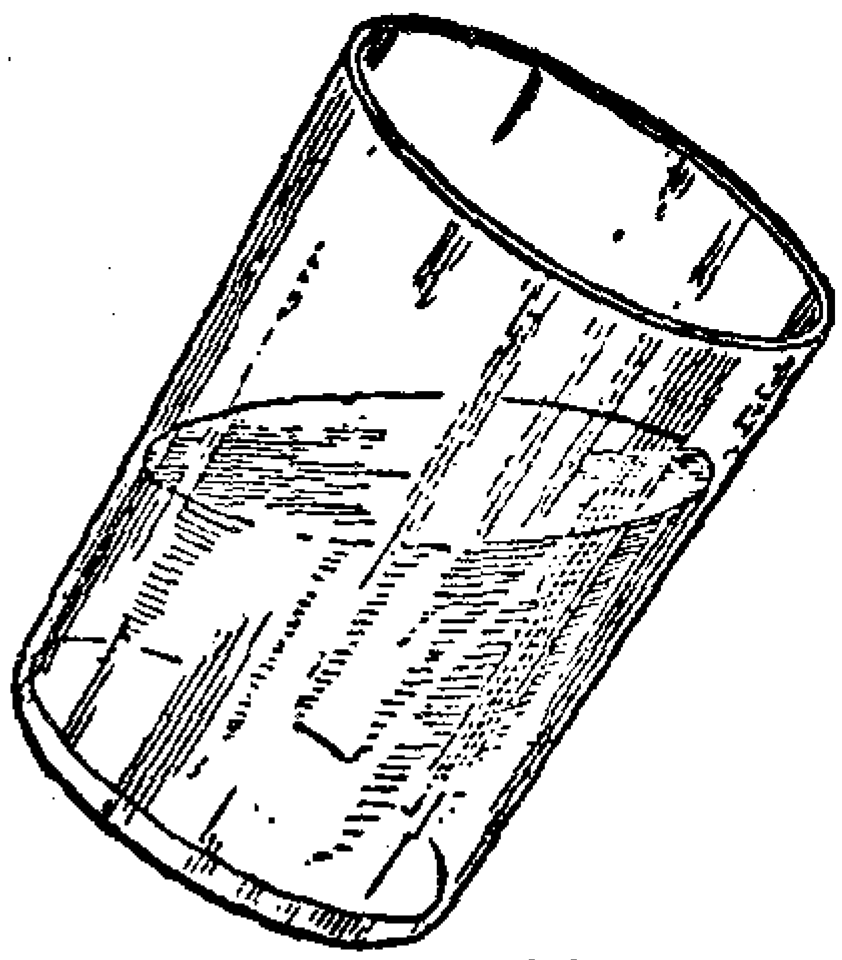


圖 8

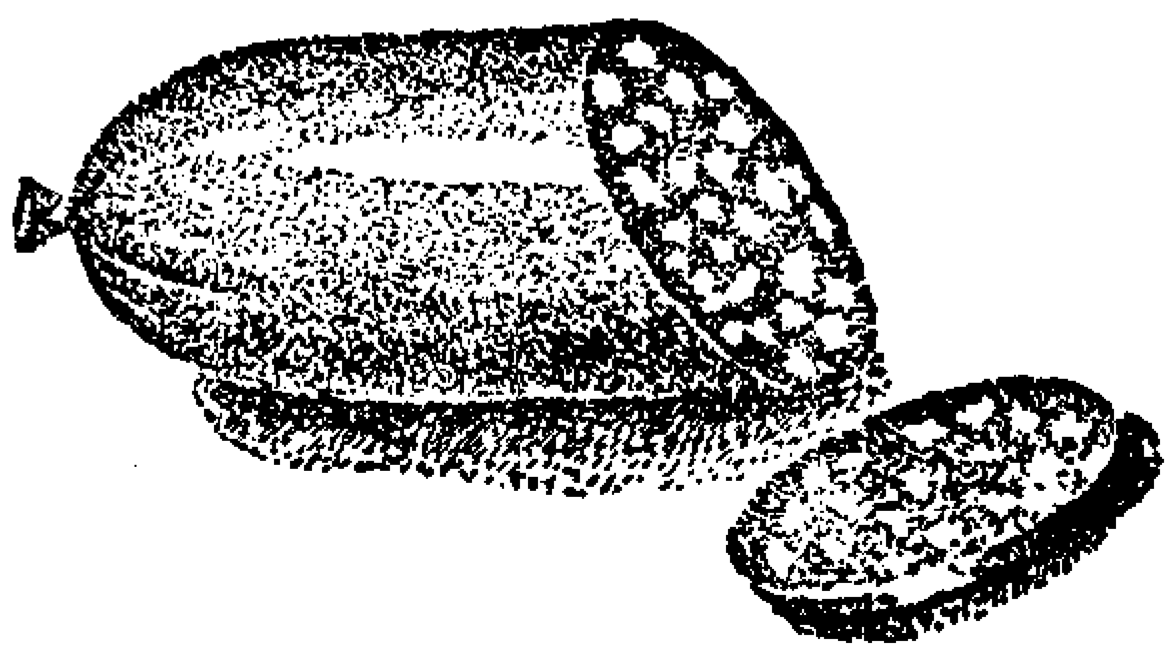


圖 9

果把一段圓柱形的香腸用刀斜切成小片，所得小片也是橢圓形（圖 9）．一般說，倘使把正圓柱體（或圓錐體）斜截，只要截

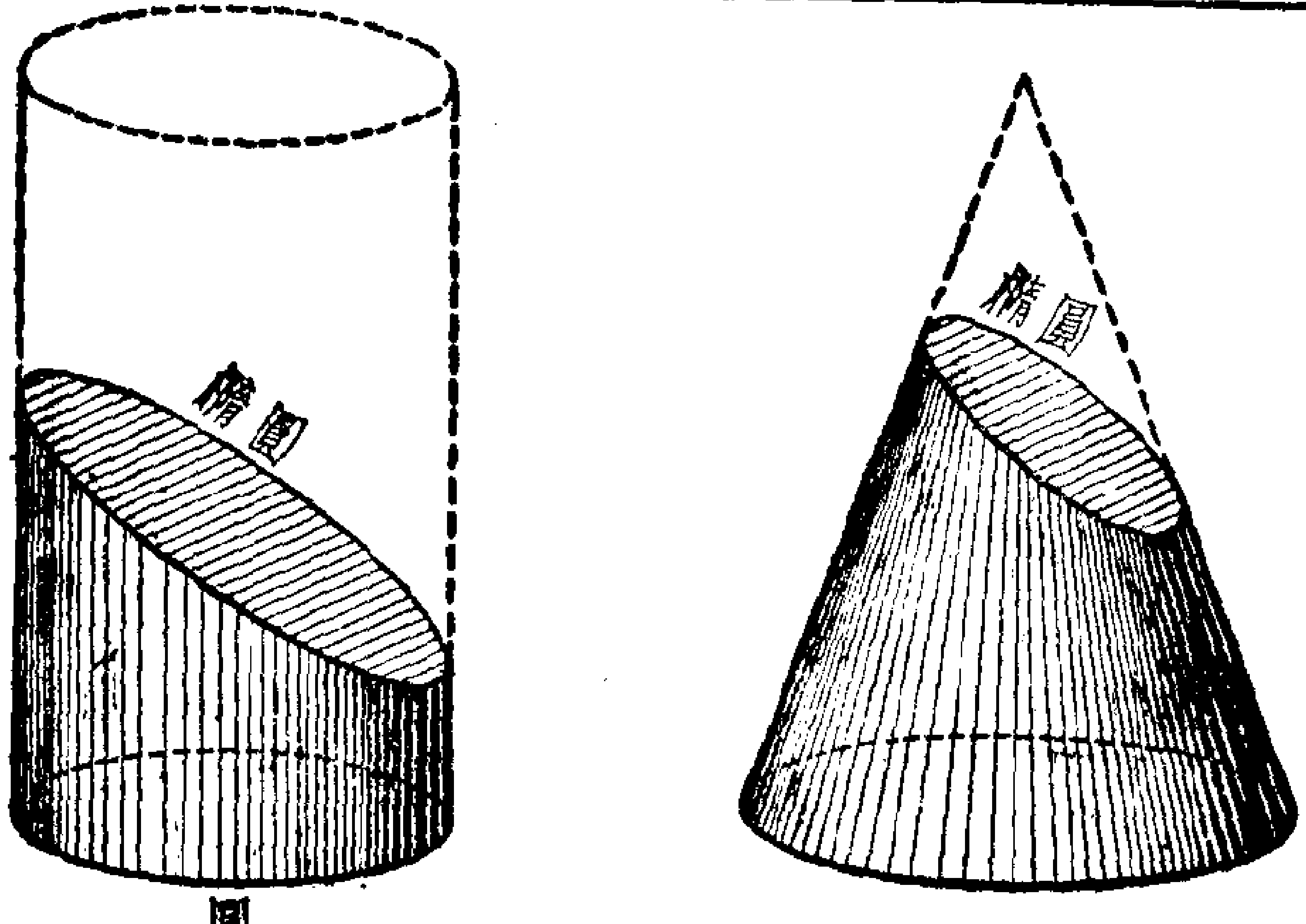


圖 10. 左,圓柱體; 右,圓錐體

面不跟它的底相交,所得到的截面就是橢圓(圖 10).

刻卜勒(1571~1630)已經發現行星繞太陽運動的軌道,並不像從前的人所想像的是一個圓,而是一個橢圓,太陽的位置就在這個橢圓的焦點上(圖 11). 行星繞轉的時候有一次會轉到離太陽最近的橢圓頂點 A_1 上,這點叫做**近日點**,有一次會轉到離太陽最遠的頂點 A_2 上,這點叫做**遠日點**. 拿地球當例子,它轉到近日點的時候,在我們北

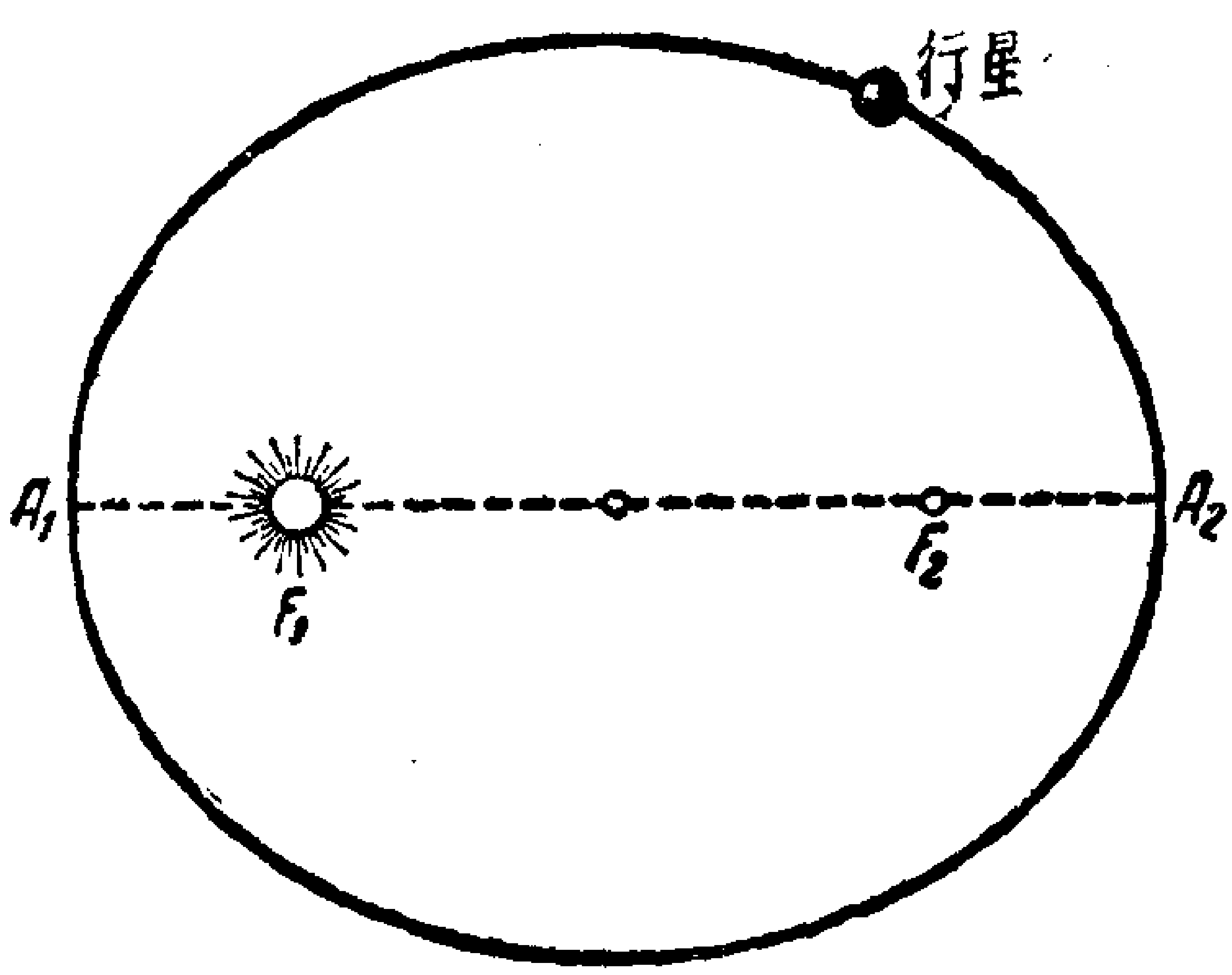


圖 11

半球是冬天，但轉到遠日點的時候，在我們北半球是夏天．地球的軌道，這個橢圓形並不太扁，看去就像一個圓．

7． 在一張紙上作任意一條直線 D_1D_2，在直線外任取一點 F，現在叫鉛筆頭 M 點這樣的運動，使它在無論什麼時候到這定直線的距離都跟到 F 點的距離相等（圖 12）．要這樣做我們只要把一根線的一頭用圖畫釘固定在三角板的頂點 S 上，令這根線的長度等於三角板的一邊 SN，線的沒有釘住的一頭繫在一根針上，把針釘在 F 點上，現在如果把三角板的另一邊沿着按在直線 D_1D_2 上的直尺滑動，用鉛筆把線拉緊，並且讓鉛筆壓到三角板的 SN 邊上，那麼鉛筆頭 M 到直尺的距離，跟它到針的距離就一定相等，就是

$$NM = MF.$$

鉛筆在紙上畫出的曲線是叫做拋物線的曲線的一部分．

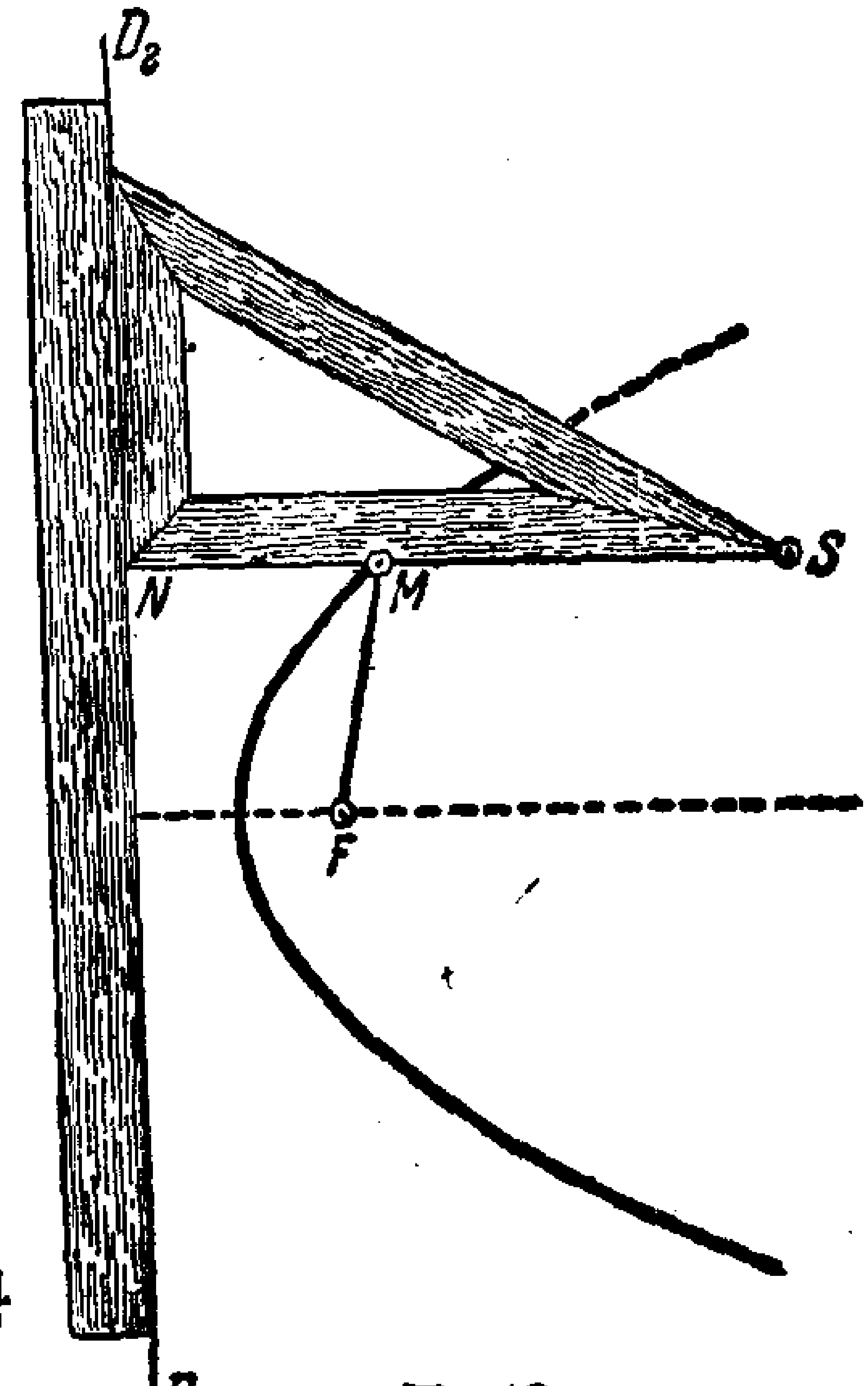


圖 12

要這曲線畫出的部分多一些，必須用邊比較長的三角板，同時要有比較長的直尺．拋物線是由向無限開展的一支構成的．

這裏 F 點叫做拋物線的焦點，從焦點向直線 D_1D_2（叫做準線）作垂直線，並且把這條線延長，這就是拋物線的對稱軸，簡稱拋物線的軸．

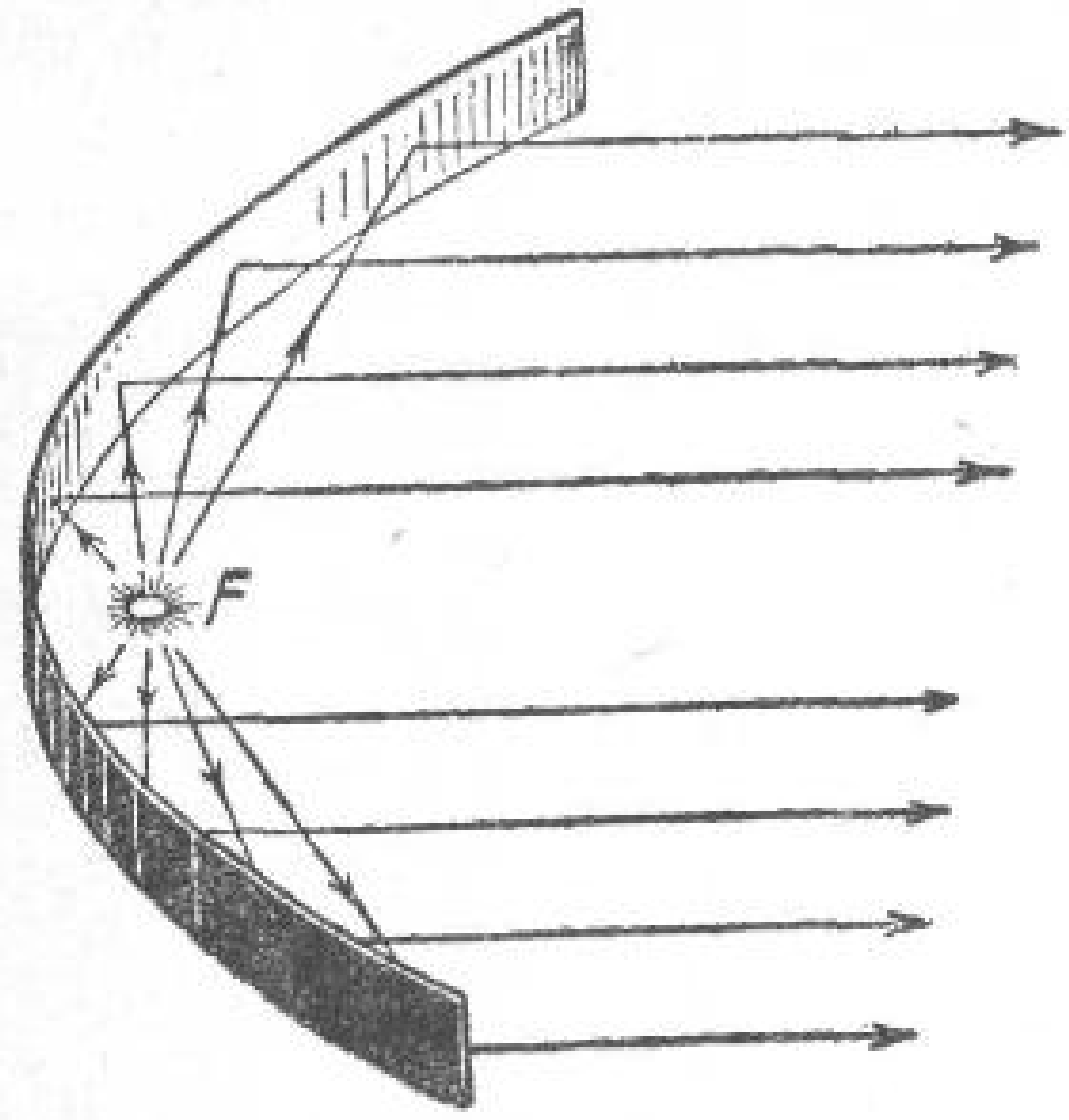


圖 13

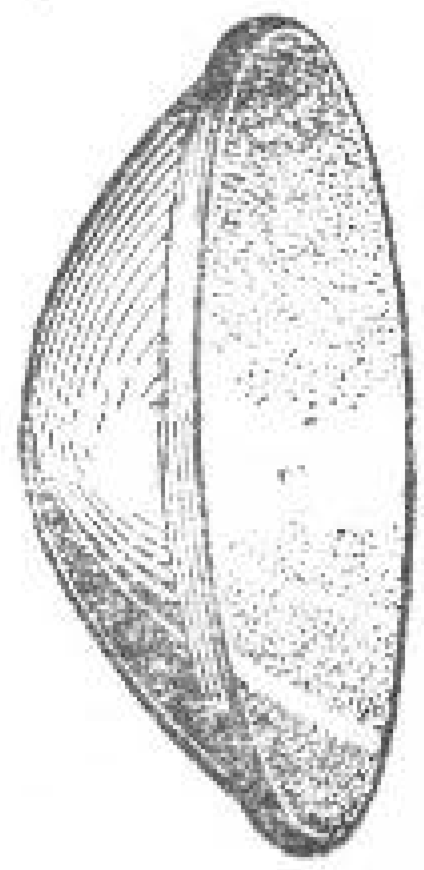


圖 14

8. 如果把一條狹長的磨光的金屬片，沿一條拋物線弧彎曲起來，那麼放在焦點上的發光的東西所發出的光線，經過金屬片的反射後，它們都跟拋物線的軸平行（圖 13）. 反過來說，倘使一束跟拋物線的軸平行的光線射在這金屬片上，那麼反射後也一定在焦點集中.

汽車車燈裏的和探照燈裏的拋物面鏡（圖 14）就是根據拋物線的這個性質製成的. 可是這種拋物面鏡不是做成長條形，而是做成所謂**旋轉拋物面**的形狀. 把拋物線繞它的軸旋轉，就可以得到這樣的曲面.

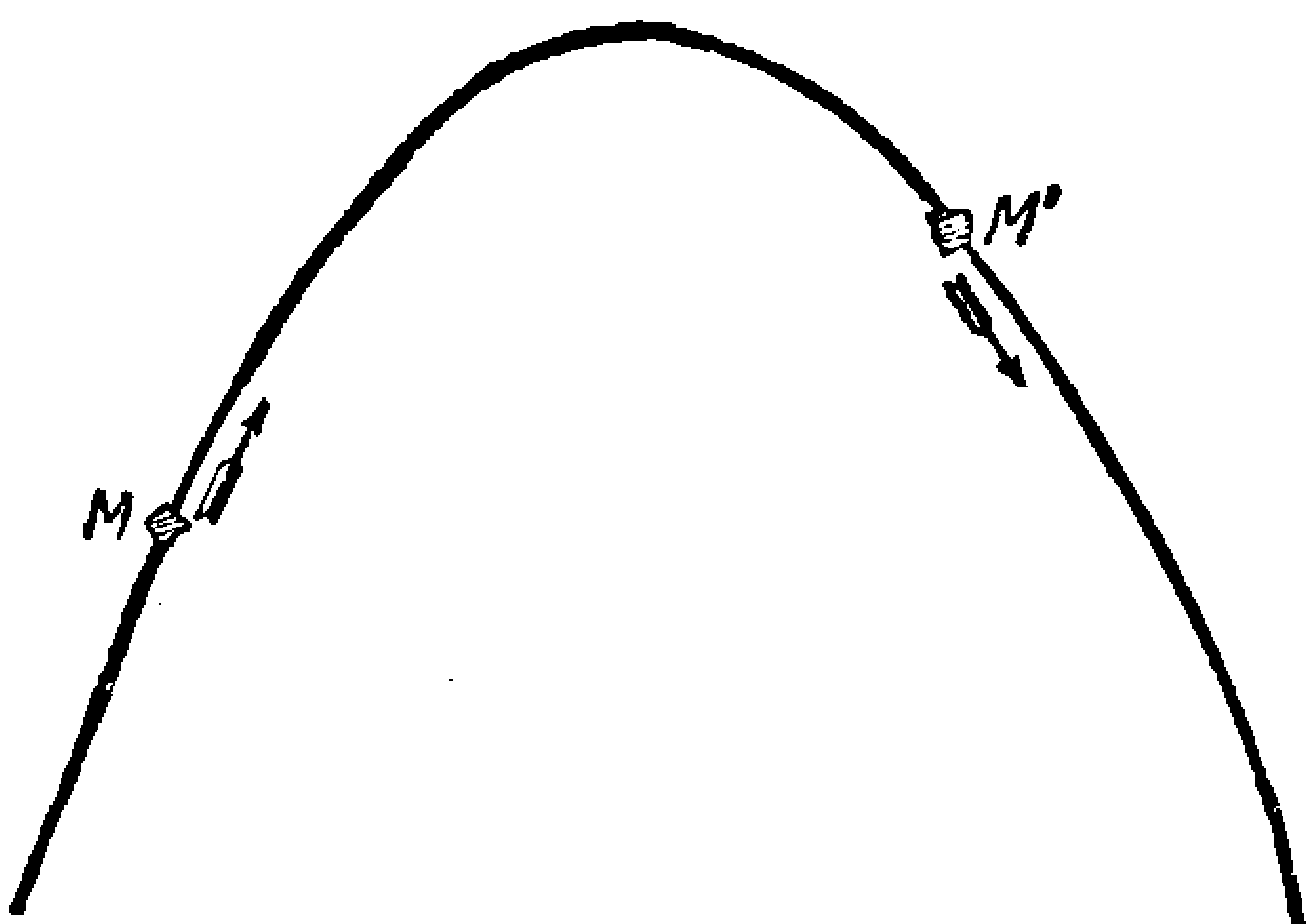


圖 15

9. 不是絕對鉛直向上拋的石子，是沿拋物線的路線飛的(圖15)；還有砲彈也是這樣. 不

錯，空氣的阻力會把石子或砲彈所走的拋物線歪曲了，事實上所得到的是另一種曲線．可是如果是在眞空裏觀察這種運動的話，我們就會得到眞正的拋物線．

如果砲彈從砲口飛出的速度 v 一定，但砲筒跟水平方向成各種不同的角度，那麼砲彈的彈道就是各種不同的拋物線，得到的射程也就不同．在砲筒的傾角是 45° 的時候，射程最大．這一個最大射程等於 $\frac{v^2}{g}$，這裏 g 是重力加速度．如果砲彈是鉛直的向上發射，那麼砲彈上昇的高度等於最遠射程的一半，就是 $\frac{v^2}{2g}$．如果不使砲筒的方向轉變（就是令它在同一

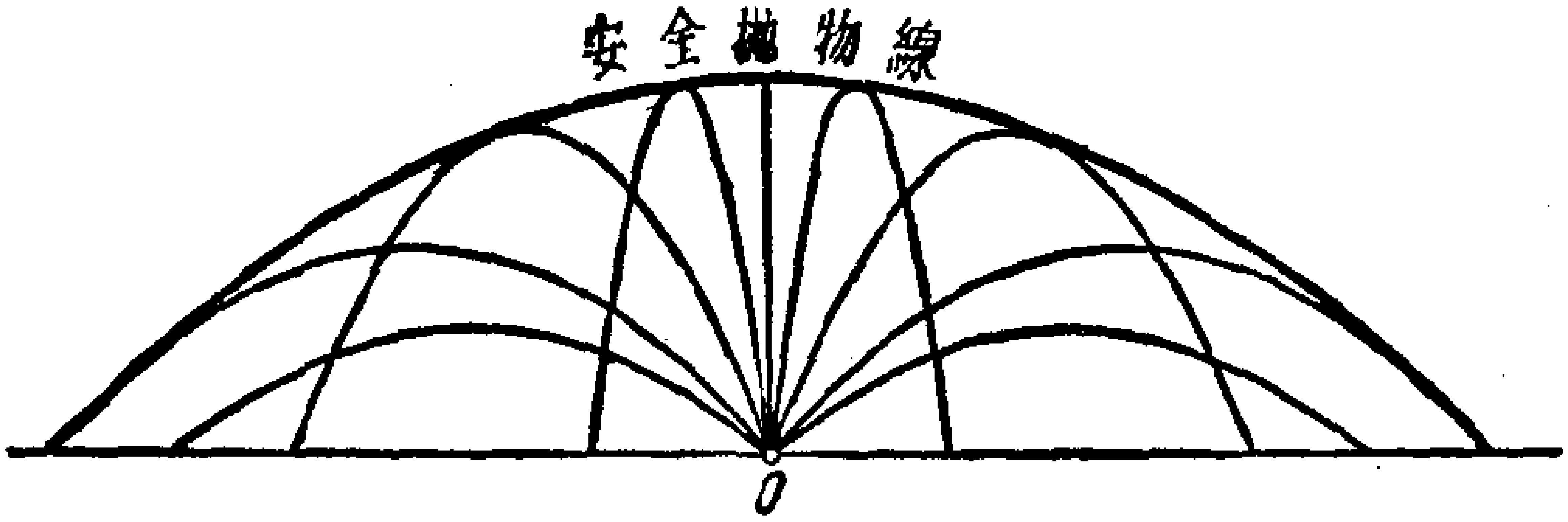


圖 16

鉛直面內），而砲彈飛出砲口的速度始終不變，那麼地面和天空砲彈飛得到的地方是有一定範圍的．可以證明，砲彈飛不到的地方，跟砲彈取適當瞄準的時候能够飛得到的地方的分界線，也是一條拋物線（圖 16），這條拋物線叫做安全拋物線．

10. 跟橢圓相似，我們還可以作一條曲線，令一動點 M 到兩定點 F_1 和 F_2 的距離的差，不是和，保持不變．又可以作另一條曲線，使兩距離的積不變．最後，也可以作一條曲線，使兩距離的比不變（最後的情形得到的曲線就是圓）．

讓我們先來研究差不變的情形．要使鉛筆這樣的運動，

我們把兩根針分别釘在 F_1 和 F_2，把直尺的一頭固定在 F_1 針上，但直尺在紙上仍舊能够繞這根針轉動（圖 17）．直尺的另一頭 S 繫着一根線（這線必須比直尺短），線的另一頭固定在 F_2 點上，再用鉛筆頭把線拉緊壓到直尺上，這樣兩距離 MF_1 和 MF_2 的差一定等於：

$$(MF_1+MS)-(MF_2+MS)=F_1S-(MF_2+MS),$$

這就是說等於直尺長度跟這條線長度的差．現在把直尺繞 F_1 點轉動，鉛筆緊靠在直尺邊上，同時把線拉緊，那麼鉛筆在紙上就會畫出一條曲線，這曲線上任意一點到 F_1 和 F_2 兩點距離的差始終不變，就是等於直尺的長度跟線的長度的差．這樣，還只能够畫出圖 17 右邊這條曲線的上部分；要畫出這條曲線的下部分，我們不把直尺固定在這根針的上面，而是把它固定在針的下面．最後，把直尺固定在針 F_2 上，而把線的一頭繫在針 F_1 上，還可以畫出圖 17 左邊這一部分的曲線．這樣畫出的一對曲線是看做一個曲線的，叫做**雙曲線**．還有，現在畫出的曲線弧，還並不是雙曲線的全部．倘使我們改用比較長的直尺，和比較長的線（但是直尺跟線的長度的差保持不變），我們可以無限制地把這雙曲線繼續畫下去，正像我們能够把直線段無限制地延長下去一樣．

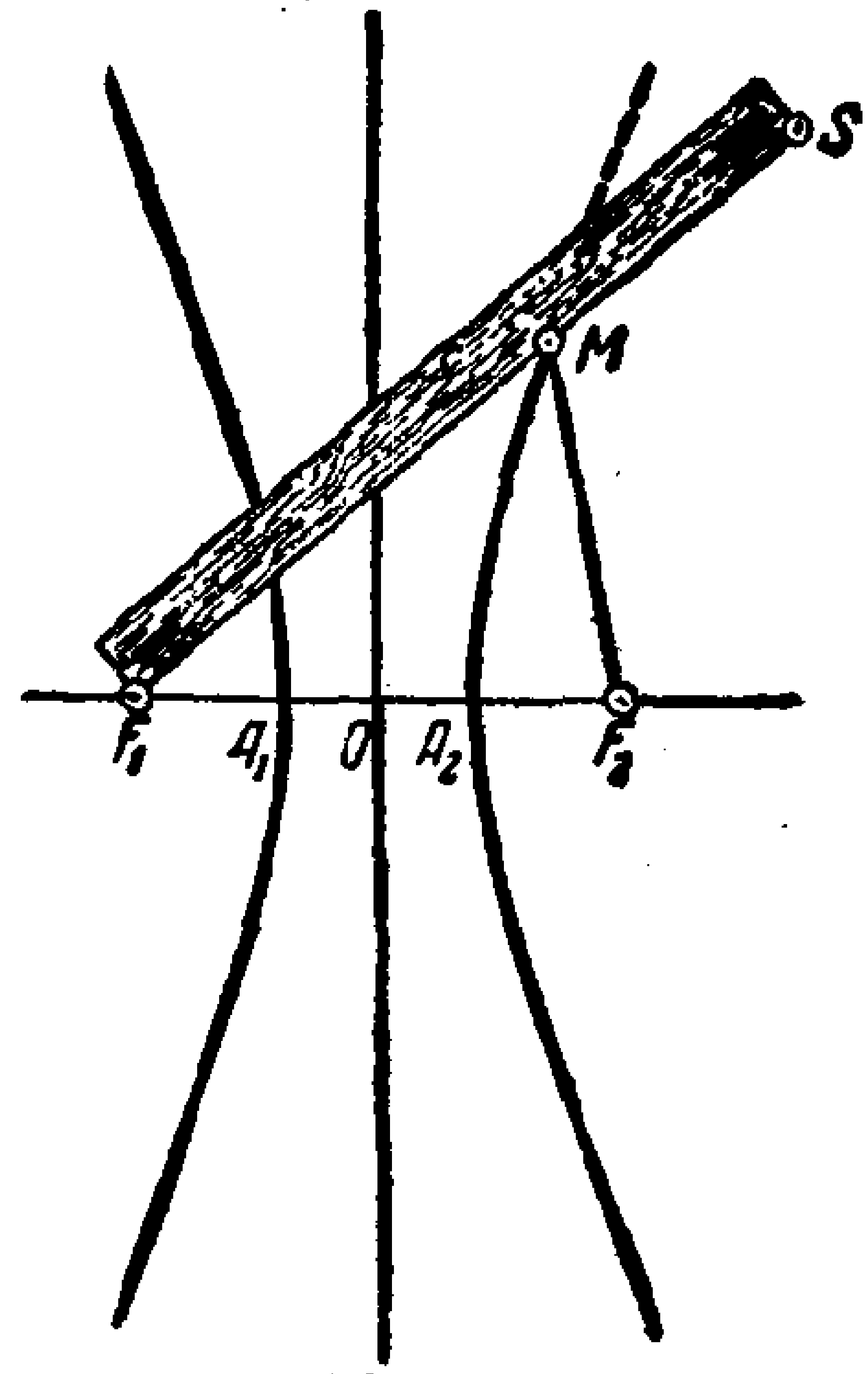


圖 17

11. 經過雙曲線的兩焦點作一條直線，這條直線是雙曲線的對稱軸．另外一根對稱軸，是垂直於 F_1F_2、而且經過 F_1F_2 中點的一條線．兩軸的交點 O 是雙曲線的對稱中心，簡稱**雙曲線中心**．第一對稱軸跟雙曲線相交於 A_1，A_2 兩點，這兩點叫做雙曲線的**頂點**；線段 A_1A_2 叫做雙曲線的**實軸**．雙曲線的頂點 A_1 到焦點 F_2 的距離減去它到焦點 F_1 的距離所得的差，一定等於直尺的長度跟線的長度的差 m:

$$A_1F_2-A_1F_1=m.$$

但是因爲雙曲線是對稱的，所以

$$A_1F_1=A_2F_2$$

因此在前式裏可以拿 A_2F_2 來替代 A_1F_1，得到

$$A_1F_2-A_2F_2=m.$$

顯然 $A_1F_2-A_2F_2$ 的差等於線段 A_1A_2，就是等於雙曲線實軸的長度．可見雙曲線上任意一點到兩焦點的距離的差 m（應該從較大的距離減去較小的距離），一定等於雙曲線實軸的長度．

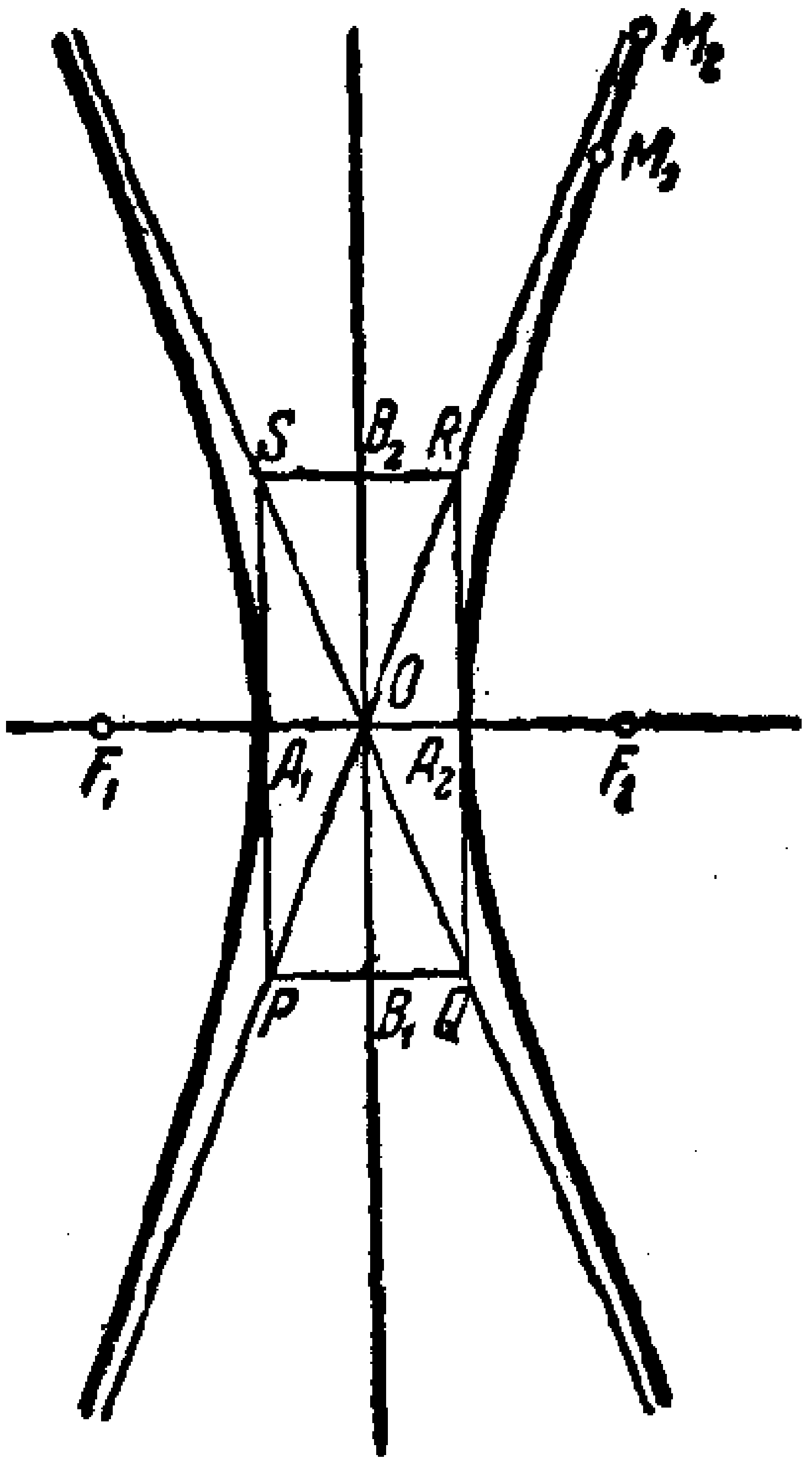


圖 18

用頂點 A_1（或頂點 A_2）做圓心，F_1F_2 的長度的一半做半徑，作一個圓弧跟雙曲線第二對稱軸相交．這樣求到兩個交點 B_1 和 B_2（圖 18）；線段 B_1B_2 叫做雙曲線的**虛軸**．再作一個長方形 $PQRS$，令它的邊都跟雙曲線的軸平行，而且分別經過

A_1，A_2，B 和 B_2，再作長方形的對角線 PR 和 QS．把對角線無限延長，就得到兩條直線，叫做雙曲線的漸近線．它們具有很有趣的性質，雖然漸近線永遠不跟雙曲線相交，可是雙曲線上的點離開雙曲線中心愈遠，就愈跟漸近線接近，而且你要它們多少近就可以多少近．倘使在雙曲線上任意取出兩點，它們離中心很遠，那麼在這兩點間的雙曲線弧在圖上看來，就很像一段直線（圖 18 的 M_1M_2），雖然實際上這弧永遠不會是直的，可是它的彎曲程度變得微不足道，很難看出是彎曲的．

要想不用直尺和線畫雙曲線，可以照下面的方法畫出它的近似的圖形：先畫出雙曲線的兩根對稱軸；其次在第一對稱軸上標出跟中心距離相等的兩焦點 F_1 和 F_2；再在這第一軸上，在中心的兩側量出兩線段，令它的長度等於 m 的一半，就是雙曲線上任意點到兩焦點距離的差的一半，這樣就找到了雙曲線的頂點 A_1 和 A_2；再在第二軸上找到截點 B_1 和 B_2，作長方形 $PQRS$，最後，作長方形的對角線並且把對角線延長，就得到圖 19 這樣的圖．現在只要經過 A_1 和 A_2，隨手畫出跟軸對稱的兩段曲線弧，畫得均勻地彎曲，而且令它愈來愈近地緊貼着這兩條漸近線 PR 與 QS．這樣畫出的曲線弧，就是雙曲線的近似圖形．

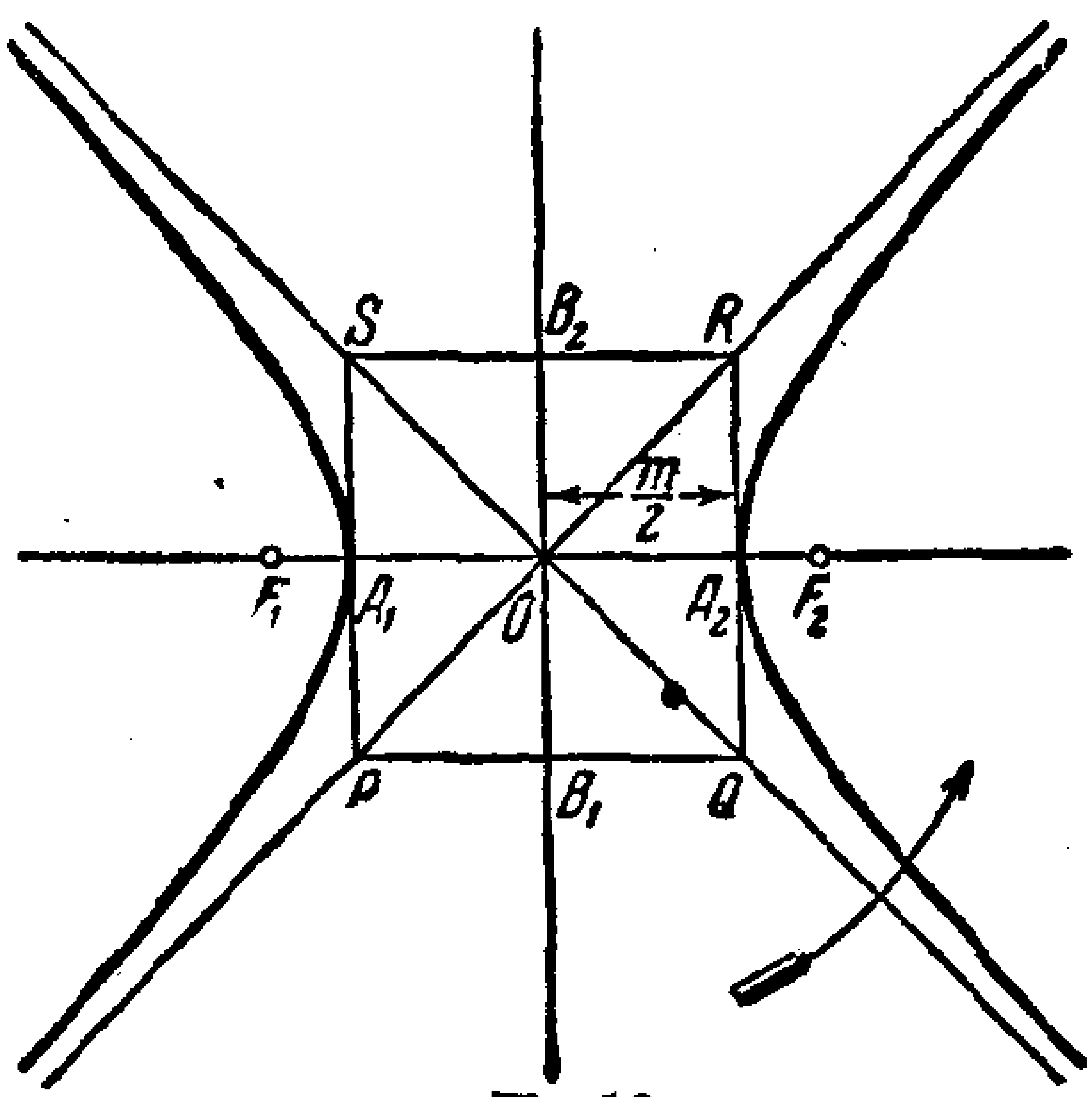


圖 19

12. 在特殊的情形下，長方形 $PQRS$ 也可能剛好是正方形. 當兩條漸近線互相垂直的時候，而且只有在它們互相垂直的時候，$PQRS$ 是正方形. 這樣的雙曲線，叫做**等軸**雙曲線. 圖19所畫的就是這種情形. 我們把圖19的整個圖形，依箭頭所指示的方向，繞 O 點轉 45° 角，這樣得到的雙曲線，像圖 20 所示. 在漸近線 O 上取一任意線段 $ON=x$，在 N 點作一條垂直線，令它與雙曲線相交於 M 點，設 $NM=y$. 這樣 x 跟 y 之間有一個簡單的關係：如果 x 增加到幾倍，那麼 y 就減少到幾分之一；同樣如果 x 減少到幾分之一，那麼 y 就增加到幾倍. 換一句話說，長度 $NM=y$ 跟長度 $ON=x$ 成反比：

$$y=\frac{k}{x}.$$

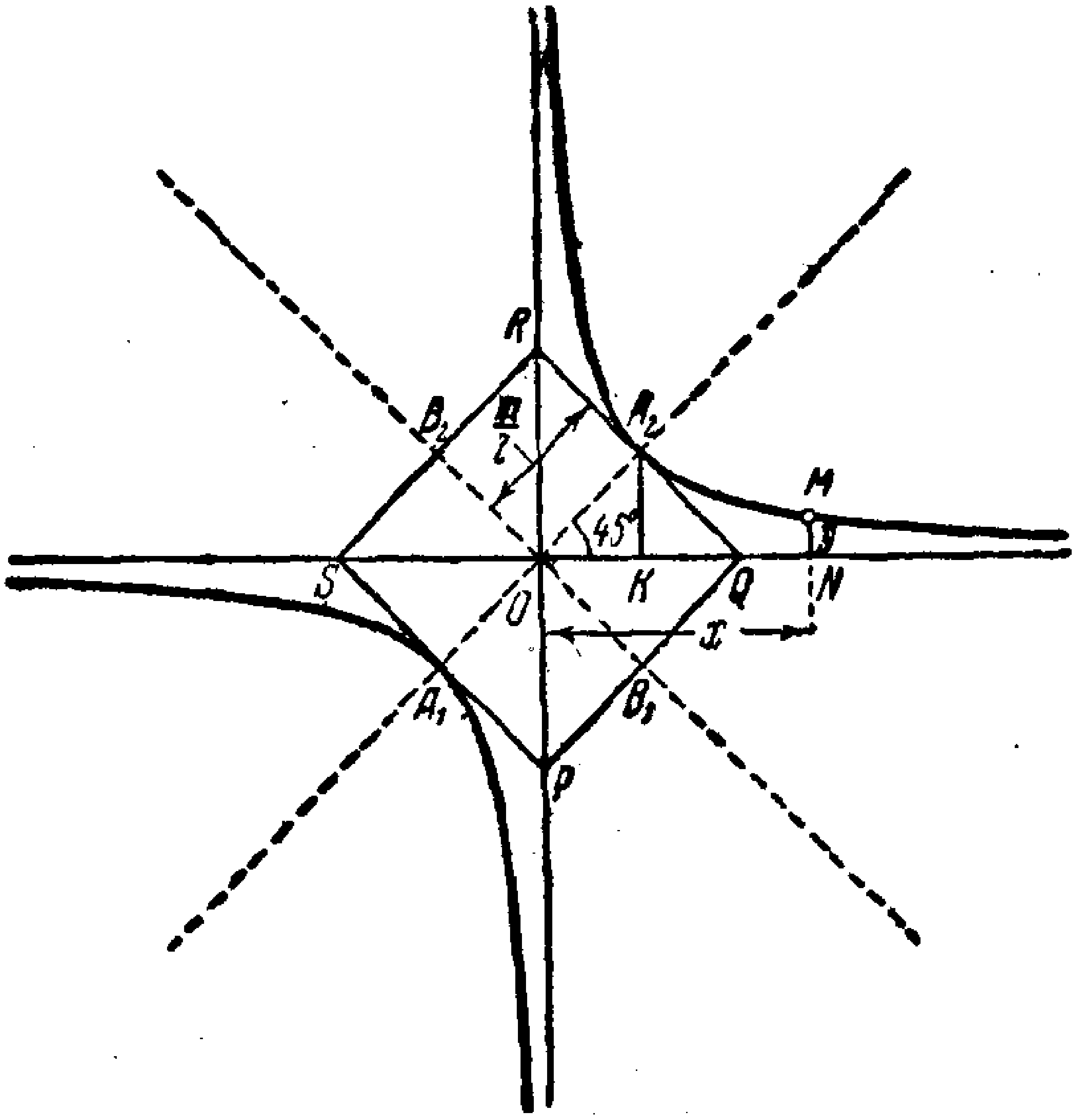


圖 20

由於這個性質，可見等軸雙曲線是表示反比關係的圖線. 爲了說明反比係數 k 跟雙曲線大小的關係，讓我們來研究頂點 A_2. 就 A_2 點來說，

$$x=OK, \qquad y=KA_2;$$

這裏 OK 和 KA_2 是一個等邊直角三角形的兩邊，這三角形的斜邊是：

$$OA_2=\frac{m}{2},$$

因爲 $x=y$，而且 $x^2+y^2=\left(\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2}{4}$，因此得到 $2x^2=\frac{m^2}{4}$，或 $x^2=\frac{m^2}{8}$. 另一方面，由反比 $y=\frac{k}{x}$ 的關係，推得 $xy=k$，在現在的情形 $y=x$，就得到 $x^2=k$. 比較 $x^2=\frac{m^2}{8}$ 跟 $x^2=k$ 兩種結果，就得到 $k=\frac{m^2}{8}$. 換一句話說，反比係數 k 等於雙曲線實軸長度平方的八分之一.

13. 我們已經談過：如果把一個圓錐體用刀來截斷，或者照幾何學上的說法，用跟圓錐體的底不相交的平面來截它，那麼所得截線是一個橢圓（參看圖 10）. 如果用一平面截斷圓

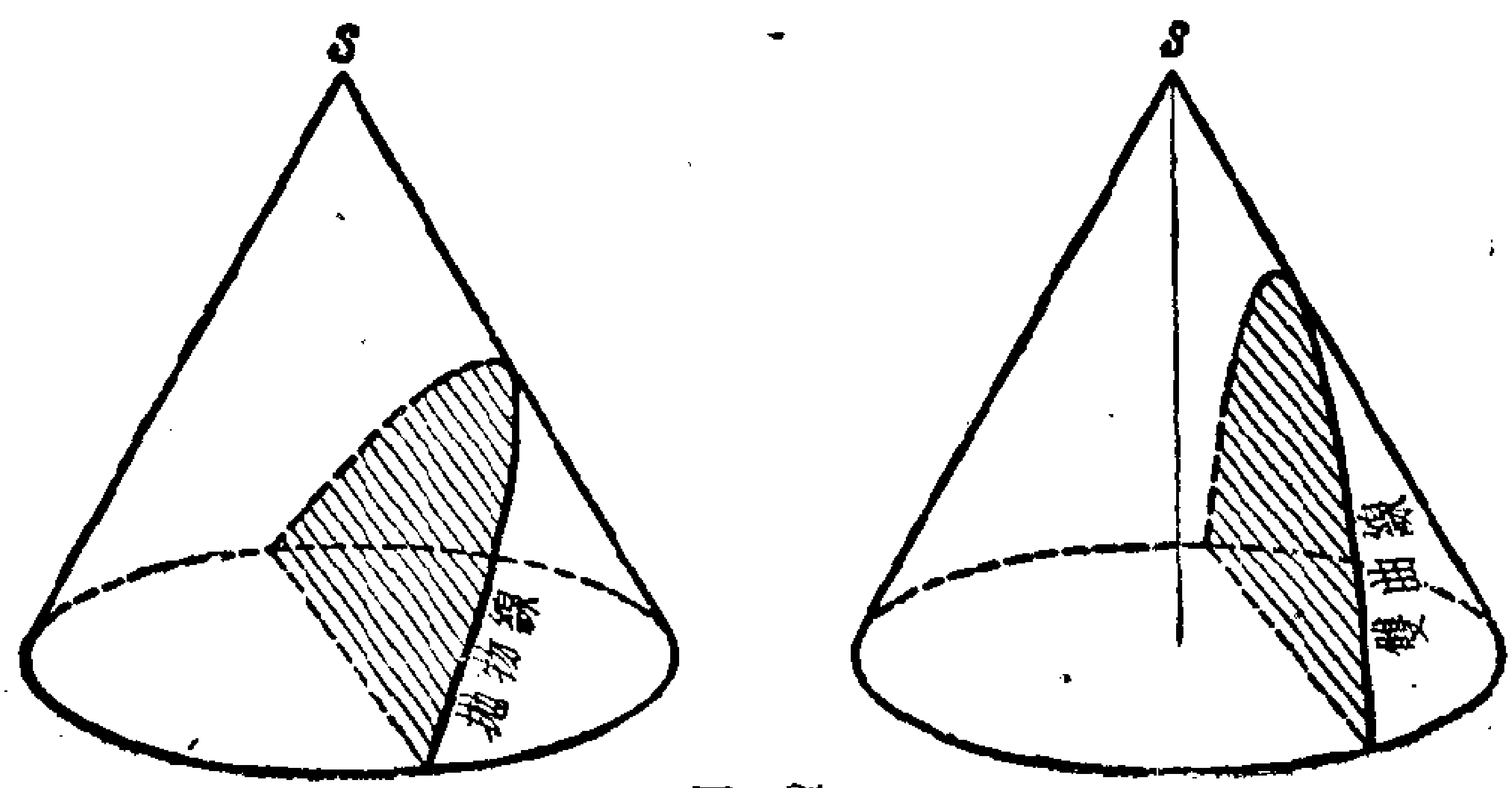


圖 21

錐體，使這截面跟圓錐體的底相交，所得的截線，可以證明或者是拋物線弧（圖 21 左），或者是雙曲線弧（圖 21 右）．可見這三種曲線——橢圓，拋物線，雙曲線都是圓錐的截線．

我們所截的圓錐體，有這樣的缺點：就是只有橢圓能够得到整個的（參看圖 10）；雙曲線和拋物線既然是向無限開展的曲線，在它上面只能够截得一部分，在圖 21 中甚至看不到雙曲線第二分支在哪裏．爲了補救這個缺點，我們用一個向無限開展的圓錐曲面替代圓錐體．所謂圓錐曲面是這樣得到的：我們把圓錐體的母線向兩側無限延長，所謂母線就是聯接圓錐體頂點跟圓錐底的圓上各點的線，例如，圖22中的 AS, BS, CS, DS, ES 等等．（在圖 22 中，我們當然無法畫出無限延長的母線，所以這裏只畫一些跟以前一樣的直線段，不過把它們畫得比原來的線段長些.）結果我們得到所需要的圓錐曲面，它是由兩部分組成的，這兩部分叫做兩面葉，一方面在 S 點互相聯結，一方面各向無限開展．整個圓錐曲面可以看做是一條運動的直線

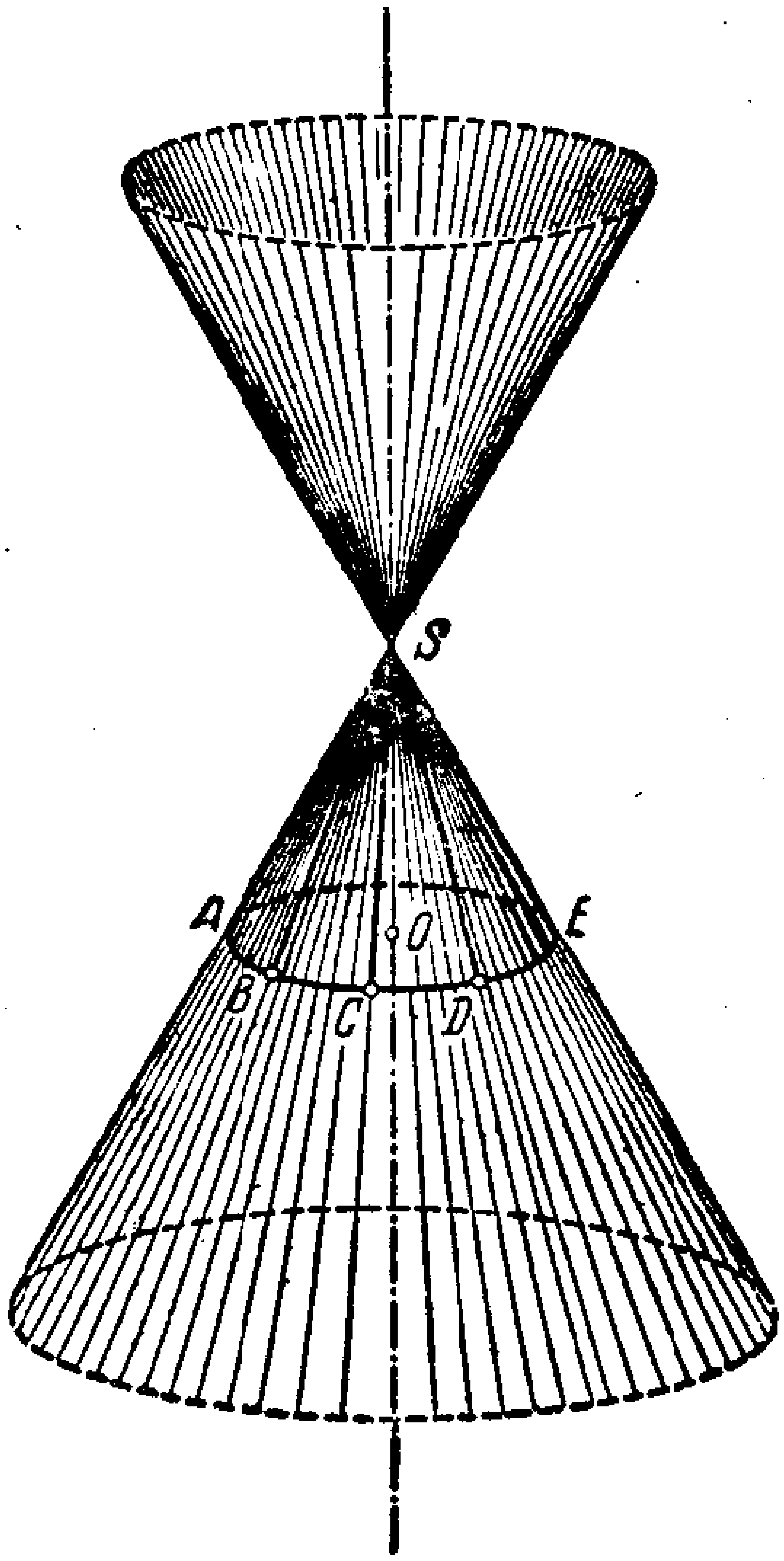


圖 22

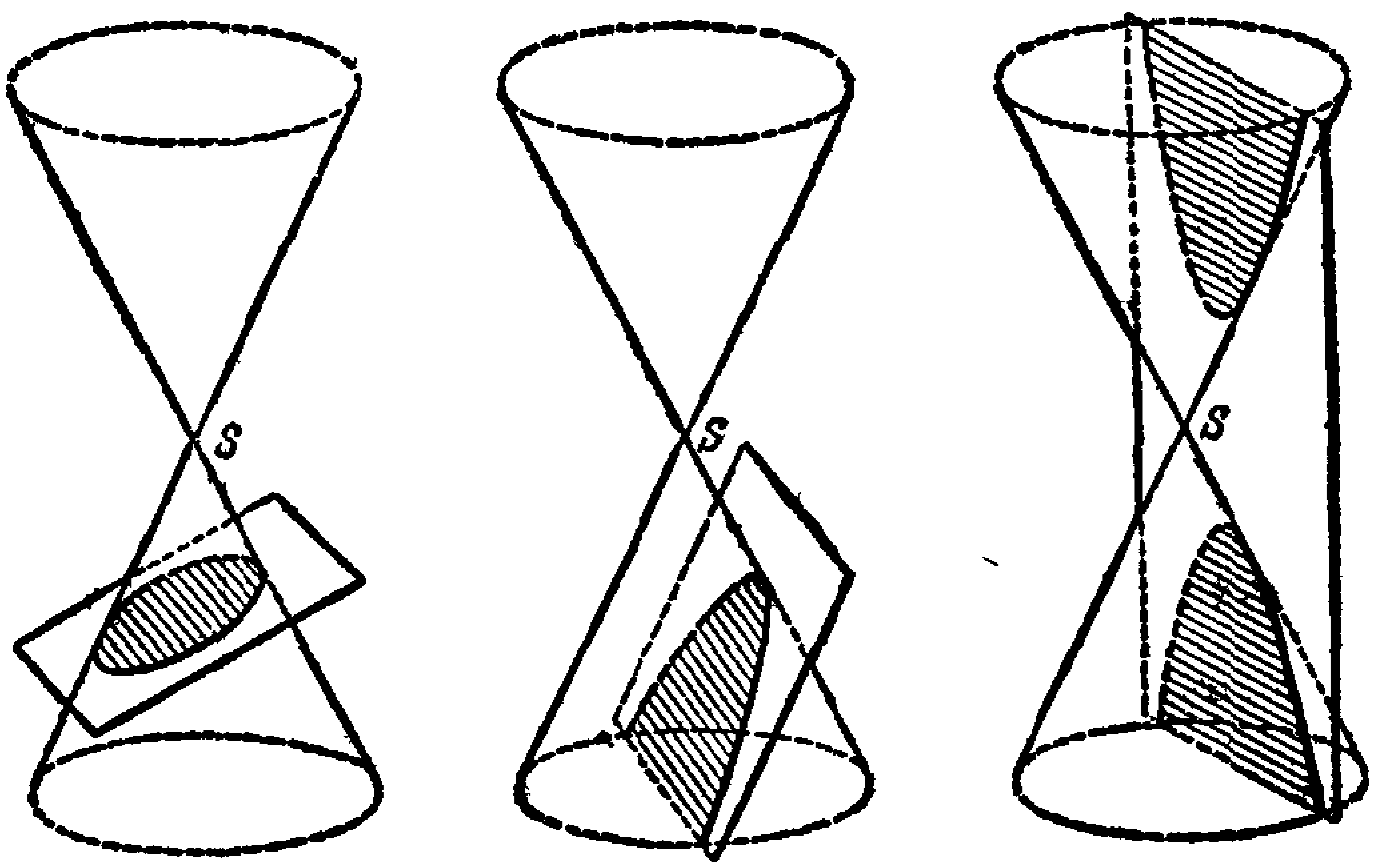


圖 23

所造成的，就是說，令一條經過 S 點的直線繞一條定直線 OS (所謂圓錐曲面的軸) 旋轉，而它跟 OS 所成的角不變，直線轉出的面就是圓錐曲面．這條運動的直線叫做圓錐曲面的**母線**．顯然，只要把原來的圓錐體的母線延長，就得到圓錐曲面的母線．

現在用一個平面來截一個圓錐曲面．如果平面只在曲面的一面葉（上面葉或下面葉）的範圍裏截斷了所有母線，那麼所得的截痕是橢圓 (圖 23，左；特殊情形是圓)；如果除了一條跟平面平行的母線不曾截斷以外，把曲面的其餘所有母線都截斷，那它的截痕就是拋物線 (圖 23，中)；如果平面截斷的母線有的在上面葉，有的在下面葉，所得的截痕是雙曲線(圖23，右)．可見在圓錐曲面的一個面葉上能够容納得下整個的橢圓，整個的拋物線．可是雙曲線卻要整個圓錐曲面纔容納得下，它的一支在圓錐曲面的上面葉，另一支在下面葉．

14. 現在我們來討論另外一種曲線，它是一動點 M 在一個平面上這樣描出來的，令 M 點運動的時

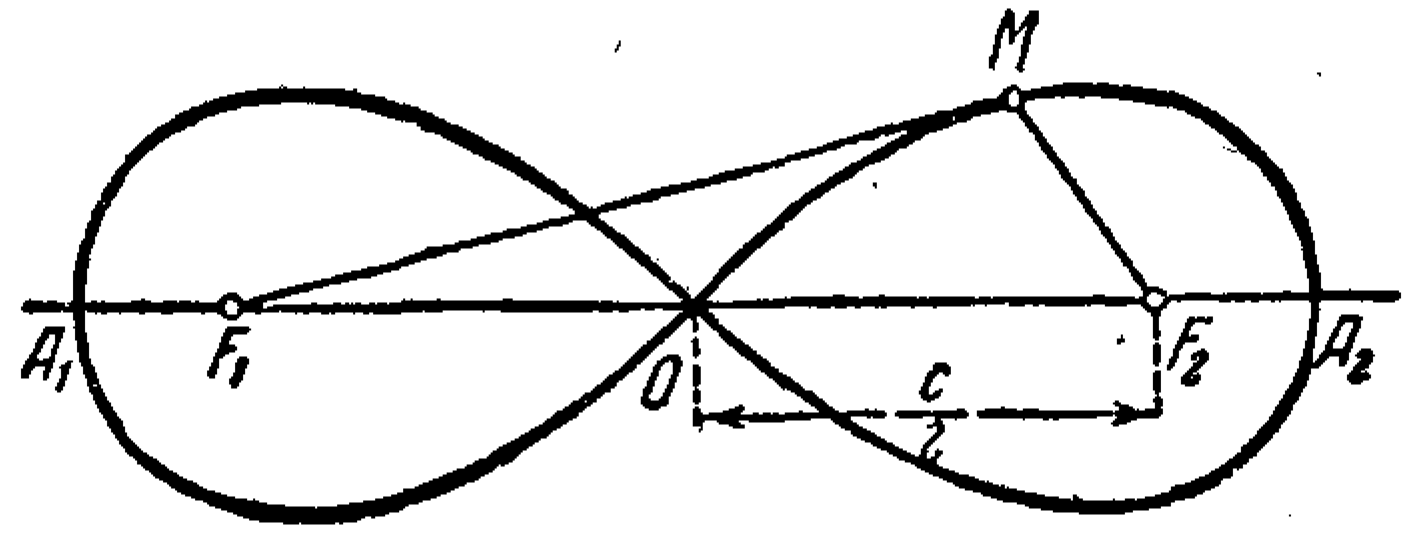


圖 24

候跟這平面上兩定點 F_1 和 F_2 的距離的積總等於常數 P. 這種曲線叫**雙紐線**. 如果線段 F_1F_2 的長度等於常數 c，那麽 F_1F_2 的中點 O 到 F_1 的距離和到 F_2 的距離都是 $\frac{c}{2}$. 這兩距離的積等於 $\frac{c^2}{4}$. 現在讓我們再假定距離的積常數 P 恰好等於 $\frac{c^2}{4}$，就是 $MF_1 \cdot MF_2 = \frac{c^2}{4}$;

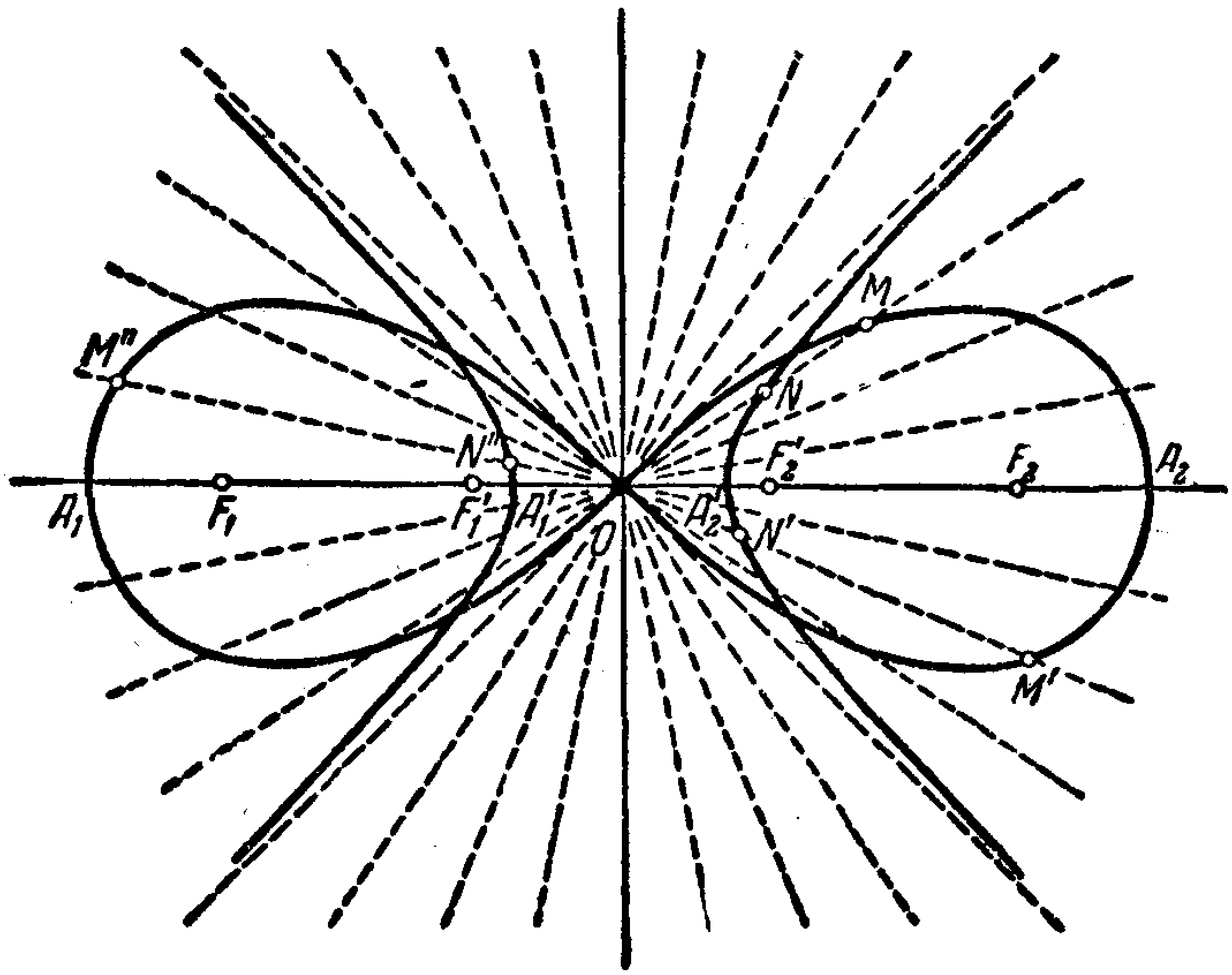


圖 25

那麼 O 點也就在這雙紐線上，而且這雙紐線本身的樣子，很像橫寫的 8 字 (圖 24). 現在把線段 F_1F_2 向兩端延長，跟雙紐線相交於 A_1, A_2 兩點. 很容易把 $A_1A_2=x$ 用我們已知的距離 $F_1F_2=c$ 表示出來. 要這樣做，只要注意 A_2 點到 F_2 點的距離等於 $\frac{x}{2}-\frac{c}{2}$，而 A_2 點到 F_1 點的距離等於 $\frac{x}{2}+\frac{c}{2}$；所以兩者的積是

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{c}{2}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{c}{2}\right)=\frac{x^2}{4}-\frac{c^2}{4}.$$

但是根據原來的條件，這積應該等於 $\frac{c^2}{4}$，所以 $\frac{x^2}{4}-\frac{c^2}{4}=\frac{c^2}{4}$，由此得到 $x^2=2c^2$，所以 $x=\sqrt{2}\,c\approx 1.414\,c$.

雙紐線跟等軸雙曲線之間有很有趣的關係. 從 O 點引出許多不同的直的射線 (圖 25)，並把它們跟雙紐線的交點標記下來. 可以證明，倘使這直線跟 OF_2 (或 OF_1) 之間的傾斜角小於 45° 的話，這射線除了 O 點以外跟雙紐線還有別的交點；倘使傾斜角等於或大於 45°，那麼除 O 點以外沒有別的交點了. 取第一類的任意一條射線，設它跟雙紐線交於 O 點以外的 M 點，在這射線上取出一線段 $ON=\frac{1}{OM}$. 倘使對於第一類射線都這樣做，那末跟雙紐線上 M 點相對應的 N 點都分佈在一條雙曲線上，雙曲線的焦點 F_1', F_2' 並且適合下面的關係：

$$OF_1'=\frac{1}{OF_1},\quad OF_2'=\frac{1}{OF_2}.$$

15 倘若令積的常數 P 不等於 $\frac{c^2}{4}$，那麼雙紐線的形狀也變更了. 當 P 小於 $\frac{c^2}{4}$ 的時候，雙紐線是由兩個卵圓形曲線組成的；一個裏面有 F_1 點，另一個裏面有 F_2 點 (圖 26). 在積

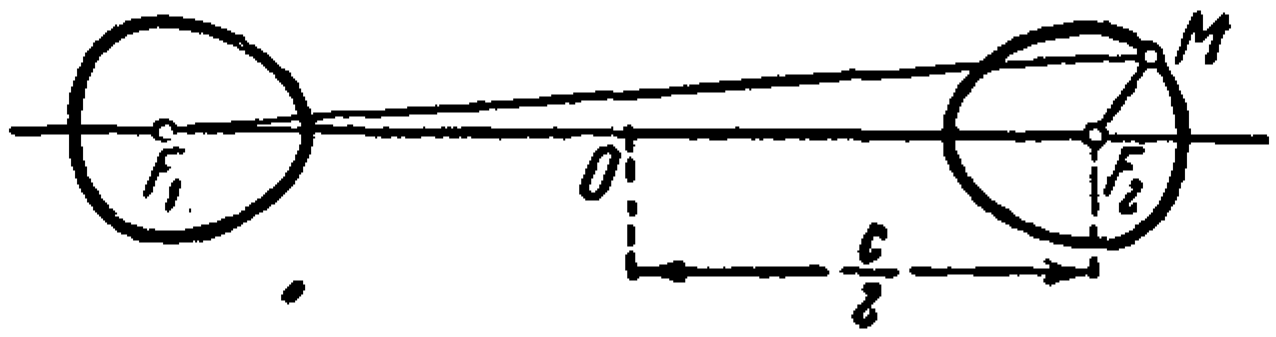


圖 26

P 大於$\frac{c^2}{4}$,但小於$\frac{c^2}{2}$的時候,這雙紐線形狀很像一塊餅乾的樣子(圖 27). 倘使 P 的值接近於$\frac{c^2}{4}$,那麽'餅乾的腰身' K_1K_2 就很細小,這曲線的形狀跟'橫寫的 8 字'仍舊相似. 倘使 P 的值接近於$\frac{c^2}{2}$,那這餅乾就幾乎沒有'腰身',而 P 如果等於或大於$\frac{c^2}{2}$,那就完全沒有'腰身'了,這時雙紐線是卵圓形的(圖 28; 這裏爲了跟前面比較起見,其他兩類的雙紐線也畫出了).

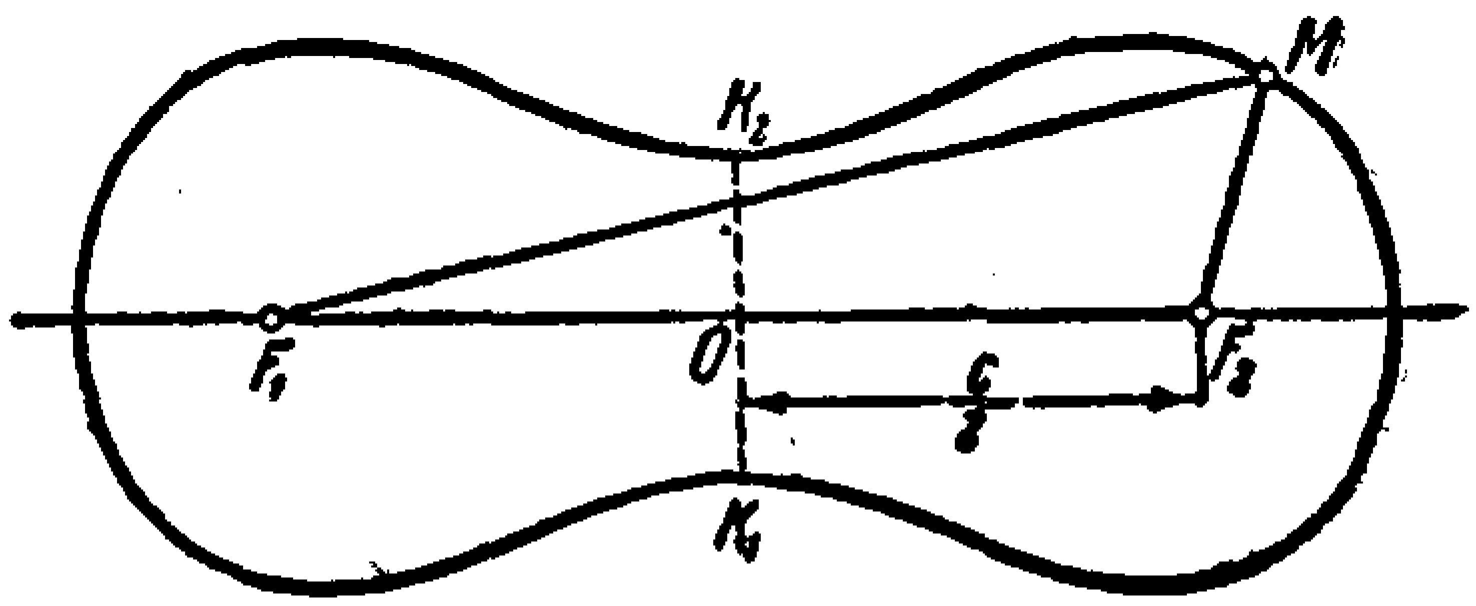


圖 27

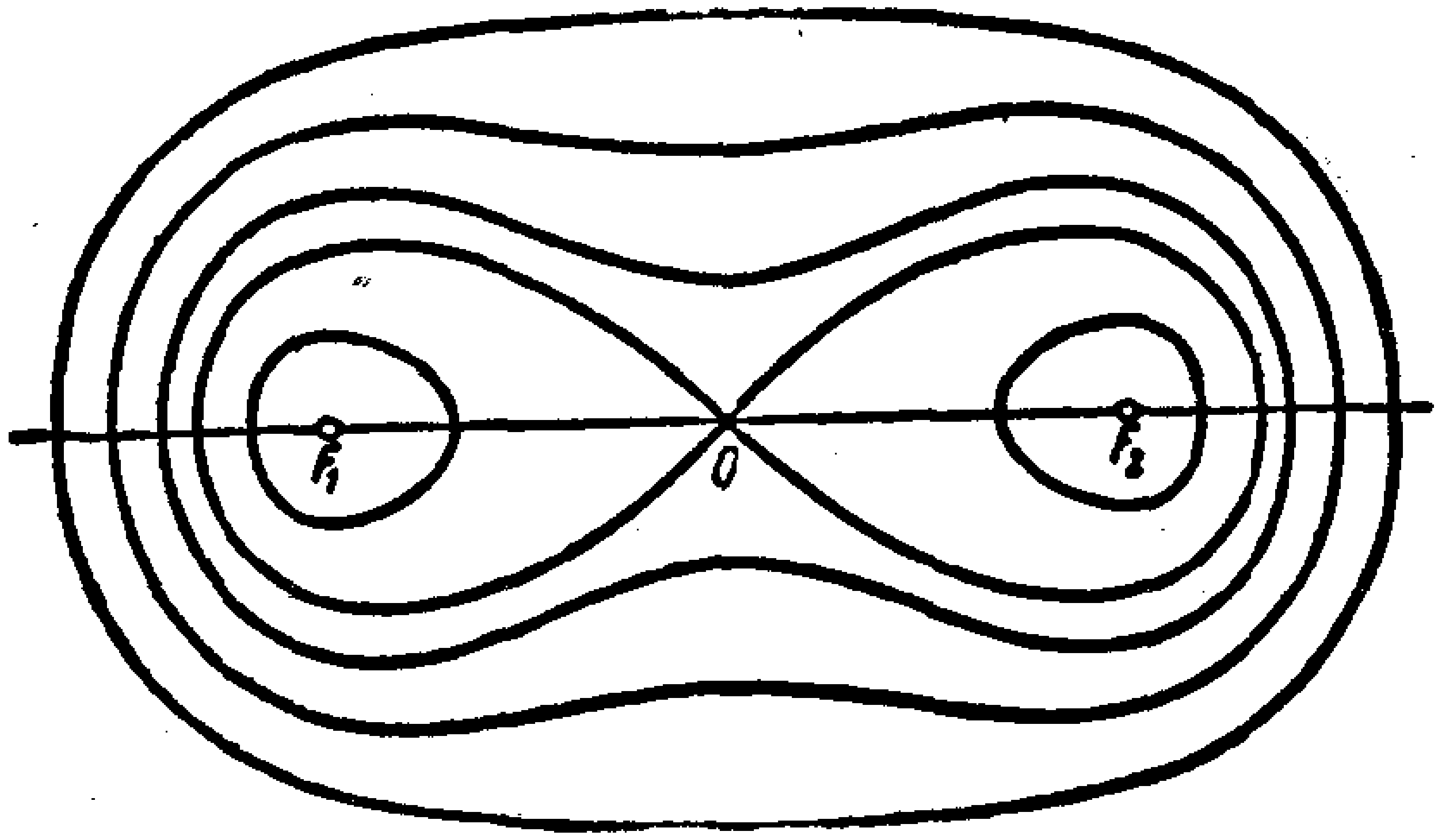


圖 28

16. 現在在一個平面上任意取 N 個不相同的定點:

$$F_1, F_2, \cdots\cdots, F_n$$

令動點 M 這樣的運動，使 M 點到各定點的距離的積始終保持不變．這樣得到的曲線形狀，跟定點 $F_1, F_2, \cdots\cdots, F_n$ 的相互間位置有關係，又跟積的常數 P 的大小也有關係．這種曲線叫做 n 個焦點的紐線．

前面我們已經研究過有兩個焦點的紐線．現在取各種數目的焦點，令它有各種不同的位置，又令積的常數等於不同的數值．就可以得到各種形狀十分奇怪的紐線．用鉛筆頭從某一點 A 開始畫，不讓鉛筆頭離開紙面，末了仍舊令它畫回到 A 點．這時鉛筆畫出一條閉曲線；我們只要求在畫的時候不要讓所畫的曲線自己相交．顯然用這樣方法畫出的曲線可以有各種形狀，例如人頭或鳥的形狀（圖 29）．可以證明，如果有一條任意曲線，一定可以選擇這樣的一個數目 n，可以選出這樣的焦點：

$$F_1, F_2, \cdots\cdots, F_n$$

的位置，並且可以指定這樣的一個數目 P 等於距離積的常數，就是

$$MF_1 \cdot MF_2 \cdots\cdots MF_n = P,$$

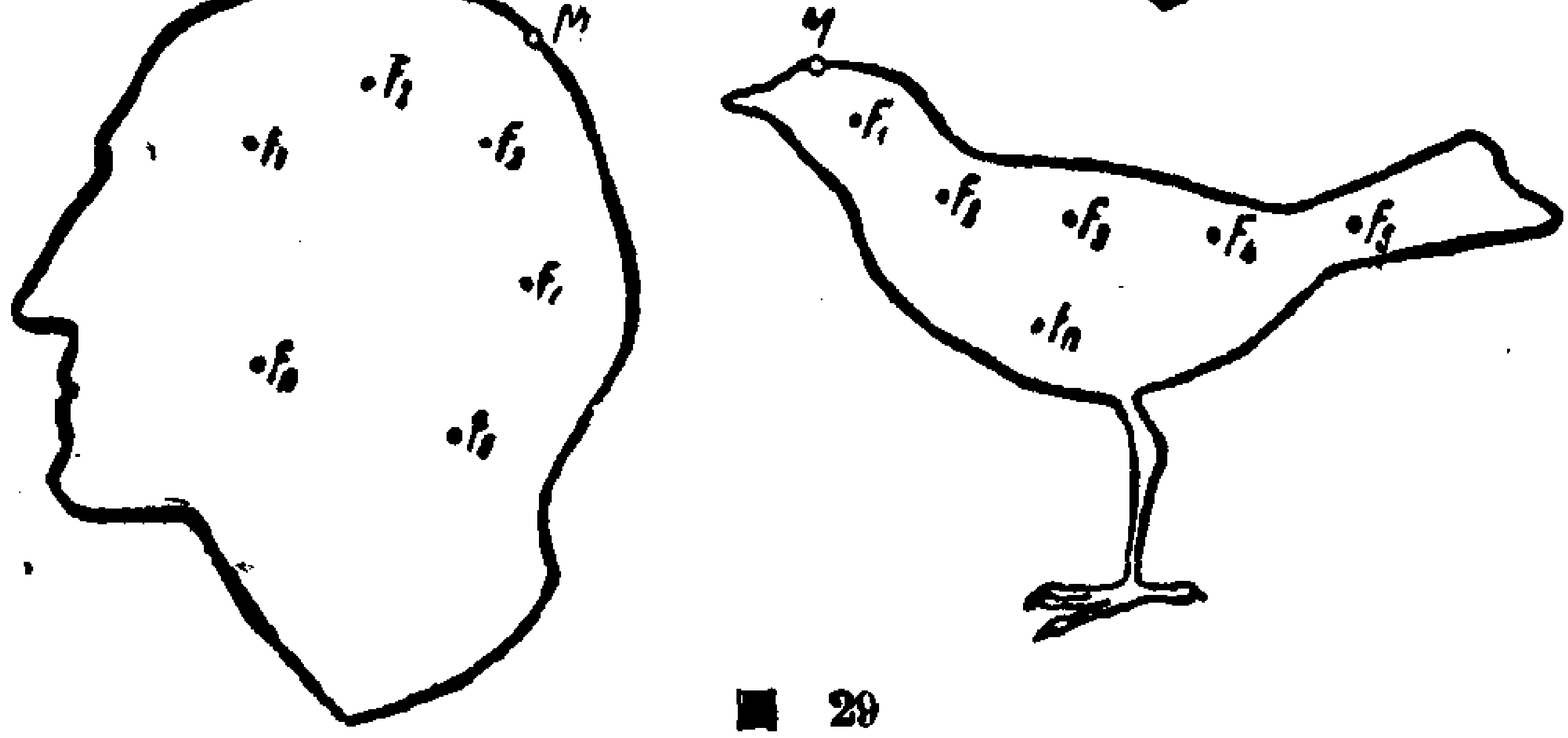


圖 29

使得這樣作出的紐線用眼一看就跟原先畫出的曲線一樣．換一句話說，所畫出的紐線同原有的曲線間的差別，不會超過鉛筆畫出的線條的闊度（鉛筆可以事先削得這樣的尖，使得畫出的線條能够儘量狹窄）．這一件有趣的事實，說明了多焦點紐線的形狀是各式各樣的，非常豐富的，不過要嚴格證明這一點卻很麻煩，是要用到高等數學的．

17. 在黑板下面裝一條邊，把硬紙或木頭做的一個圓環或者一個圓片沿這條邊上滾動，把它壓緊在邊上，同時也向黑板靠緊．倘使我們用一枝粉筆，把它釘住在圓環或圓片上（粉筆釘在圓環跟邊的接觸點，像圖 30 裏的 M 點），現在把圓環滾動，那麼粉筆會畫出一條曲線，叫做**旋輪線**，又叫**擺線**．圓環滾了一圈，就畫出了旋輪線的一道‘拱形’ $MM'M''N$．如果把它再滾許多圈，就可以得到這旋輪線的許多拱形．

圖 30

要在紙上畫出旋輪線拱形的近似圖形，假定滾的圓環的直徑是 3 厘米，那麼在直線上取出一線段，使它等於：

$$3\pi \approx 3\times3.14=9.42\ 厘米.$$

這線段的長度等於圓環周圍的長度，就是直徑是 3 厘米的圓的周長．現在把這線段等分成許多段，比方說，等分成六段．當圓環剛好轉到這些分點的時候，圓環轉到的位置用數目字 0,1,2,3,4,5,6 來註明（圖 31）．讓我們畫出在那些位置的圓環，為了使圓環從一個地位轉到相鄰的一個地位，它應當轉一

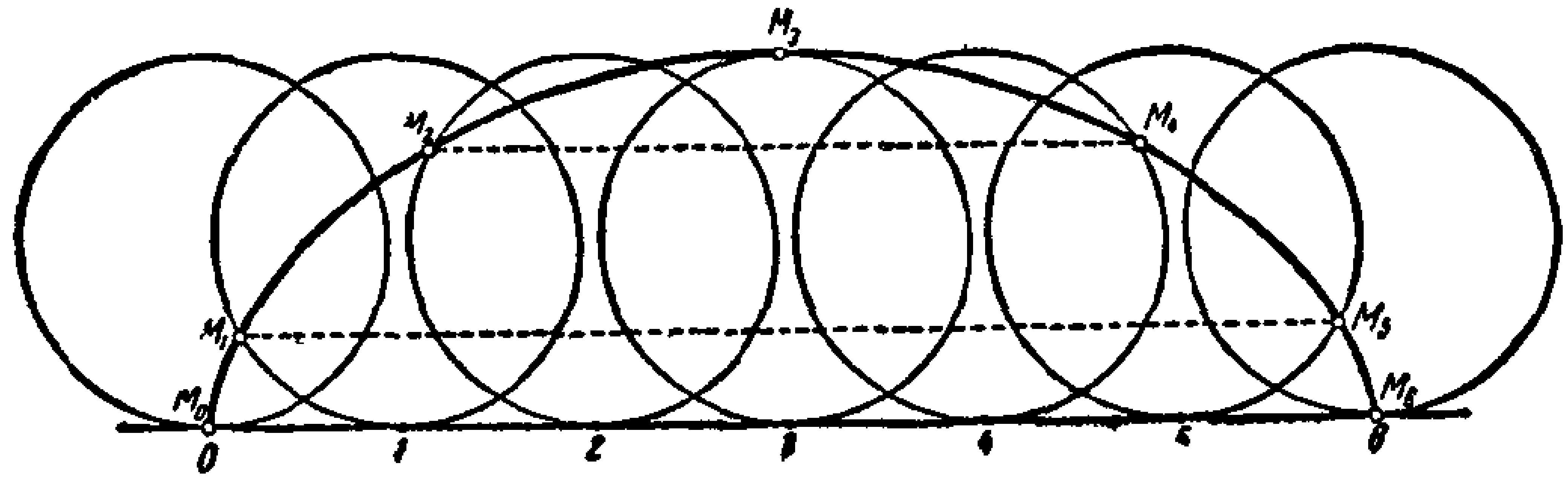


圖 31

轉的六分之一(因爲相鄰兩分點的距離是圓周長的 $\frac{1}{6}$). 因此如果在 0 的位置的時候粉筆是在 M_0 點,那麼在 1 的位置的時候粉筆一定在離開切點1等於圓周長六分之一的 M_1 點,在 2 的位置的時候粉筆一定在離開切點 2 等於圓周長六分之二的 M_2 點,其餘類推. 要作出 M_1, M_2, M_3 等等,只要從切點出發,用 1.5 厘米長度做半徑作圓弧,在各圓上作出截點,在 1 的位置截一次,在 2 的位置要連續截兩次,在 3 的位置要連續截三次,其餘類推. 要畫出旋輪線,只要把 $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ 各點聯接起來成功一條眼看是均匀的曲線就可以了.

18. 旋輪線的許多有趣的性質裏面有一種很值得注意,這性質使旋輪線獲得一個響亮的但是很古怪的別名,叫做'最速降線'

現在研究這樣的問題:如果想讓一個金屬球沿着聯接 A 跟 B 兩點的磨光的金屬斜槽滾下(圖 32),希望它能在最短的時間落到底,問金屬槽應該造成怎樣的形狀?初看似乎應該是直的,因爲沿這槽從 A 點到 B 點的路線最短. 可是我們不是討論最短的路線,而是討論最短的時間;時間不但跟路線長短

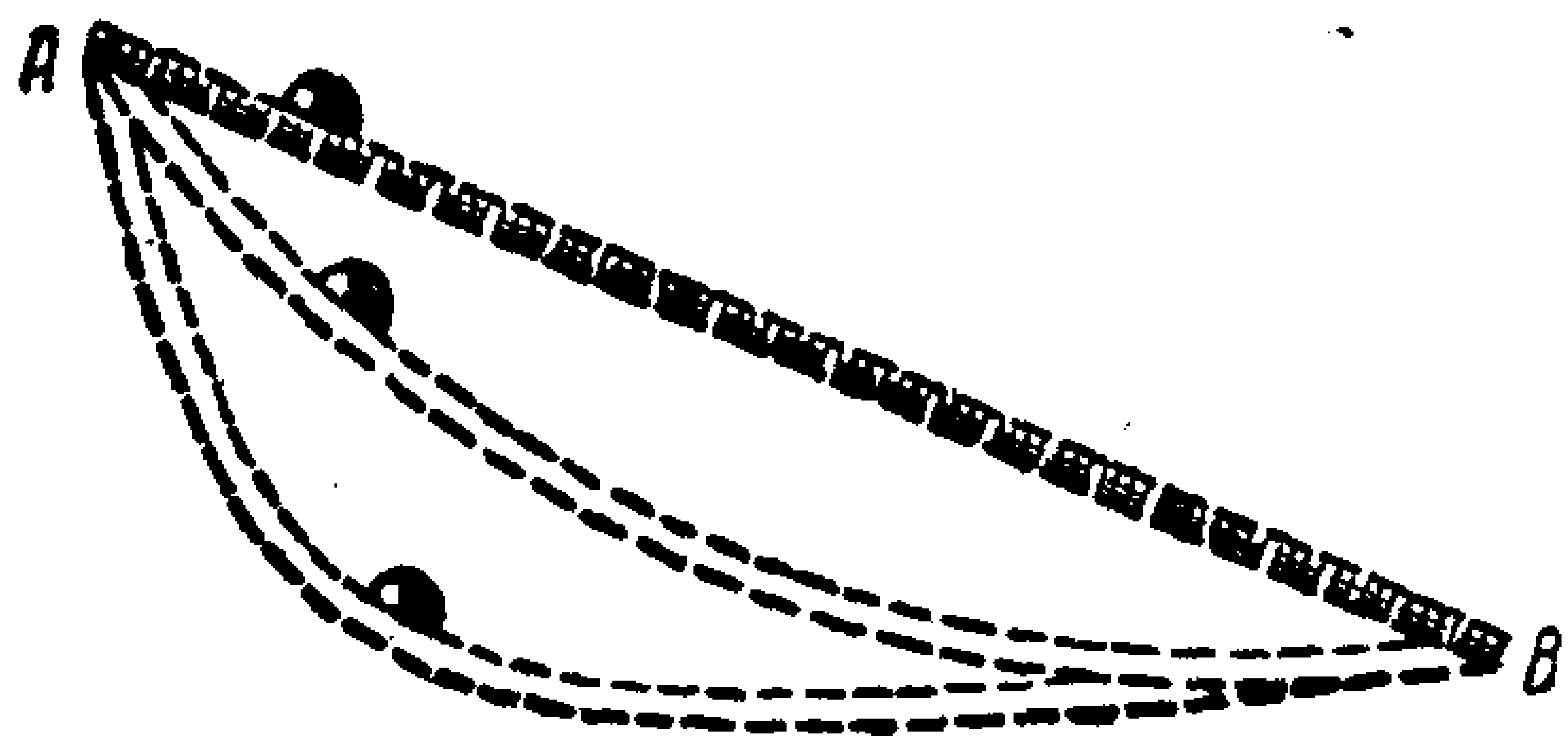


圖 32

有關係，跟球滾下的速度也有關係．如果把槽向上彎曲，那麼從 A 點開始的部分比直槽更陡，沿這部分滾下的球所獲得的速度，一定比在直槽同樣長短的部分所獲得的速度大．可是我們倘使把槽的上半部分造得很陡而且比較長的話，那麼下面聯接 B 的部分一定很平坦，而且也比較長；在第一部分球跑得很快，可是到了第二部分球卻跑得很慢，球到 B 點可能反是遲了．顯然，不應當把金屬槽做成很彎的形狀，過分彎是毫無意義的．

意大利物理學家兼天文學家伽利略 (1564-1642) 以為球落下最省時間的槽，應當彎曲成一個圓弧形．可是在五十年後，瑞士數學家柏努利兄弟用精密的計算證明事實不是這樣，這樣的槽應當彎曲成旋輪線的弧 (不是向上拱而是向下的，圖 33)．從這時候起，旋輪線就獲得‘最速降線’的名字．而柏

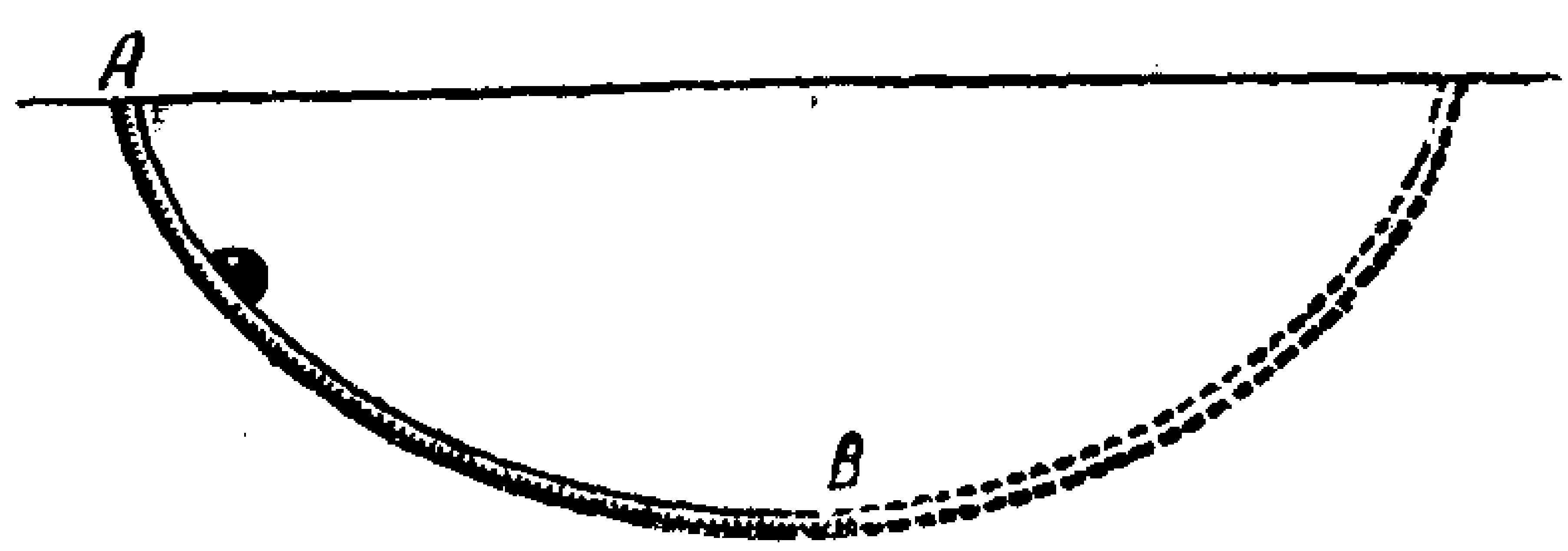


圖 33

努利的證明,成爲數學新的分科就是變分學的開始. 所謂變分學,是專門研究我們所感興趣的某一種量會達到極小值(有些問題是求極大値)的曲線形狀.

19. 我們就要把這本小書結束了. 我們只談過不多幾種曲線,而且也沒有把它們的性質都說出來. 在這一本小書裏有許多曲線沒有提起過:我們沒有談到懸鏈線,就是重的鏈條兩頭掛起的時候所作的形狀,也沒有提到阿基米得螺線,就是一隻甲蟲沿一等速旋轉的平面爬動時候所畫出的曲線,也沒有談到圓的漸伸線,就是把一捲線展開的時候這線的一頭所畫出的曲線,等等. 本書只有一個目的,就是在無涯的數學知識寶藏裏,選出一些有趣的事實,拿來引起只懂初等數學的讀者的興趣. 所以本書通常是避免證明和計算的.

讀者倘使想擴充在本書裏所獲得的知識,請讀波蘭數學家史泰因豪斯所著的書*(這本書裏面也是沒有證明的),或者比較詳細的一本是已故的數學普及讀物作家別爾曼著的**;在別爾曼的書裏讀者可以找到許多有關事實的證明,這些事實就是在我們這本小書和史泰因豪斯的書裏提到過的.

---

*史泰因豪斯著的'數學萬花鏡'. (已有中譯本,裘光明譯,開明書店出版. ——譯者註)

**別爾曼著的'旋輪線'(一條奇妙的曲線及其他有關的曲線),蘇聯國家技術理論書籍出版局,1948年出版.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝奇妙的曲线
作者＝马库希维奇著　　高彻译
页数＝２５
ＳＳ号＝１１１８７８５５
出版日期＝１９５３年０３月第１版