

青年科學叢書

計數和數字

別爾曼著



中國青年出版社

內 容 提 要

在日常生活裏，我們經常在進行計數，也經常在跟數字打交道。可見記數法跟我們生活是有密切關係的。這本小冊子，正確而生動地講述了數字和記數法的起源和發展。它裏面談到了羅馬人的字母記數法，巴比倫人的楔形文字記數法和現在國際通行的阿拉伯數字十進位記數法，並由編譯者補充了一些中國記數法的材料。讀過後，不但能使你對記數法和社會生產發展的關係有一清楚的認識，而且會使你感覺到記數法對生活實踐的重要性。它告訴你，社會愈發展，科學愈發達，記數法也會變得愈完善。它會使你發生進一步研究的興趣。

Г. Н. БЕРМАН

СЧЕТ И ЧИСЛО

ГИЗТЕХ МОСКВА, 1952

0000000000

譯者序

這本小冊子是蘇聯別爾曼在 1952 年寫的。它是蘇聯國立技術理論書籍出版社出版的科學普及叢書中間的一本。在這本書裏面，正確而生動地介紹了數字和記數法的起源和發展。我們覺得這些材料能够使初中學生知道數字和記數法的起源、發展跟社會生產的發展有怎樣的關係，能够啓發他們對數字的興趣，並且深淺也很合適，因此就把它譯出來了。

在翻譯的時候，我們作了一些補充和刪節。

首先，原書裏面，有關我國的數字發展，介紹得很少。因此，我們補充了一些我國數字方面的材料（主要的是第四節，其他的散見各處），這些材料主要是根據李儼著“中國古代數學史料”^①一書而來的。同時，原書裏有些關於我國的材料，例如算盤圖形、郵票圖形，我們覺得這些是大家常見的東西，所以就刪去了。

其次，原書用很大篇幅介紹了古代斯拉夫的記數法。我們考慮到，它對我國讀者比較生疏，而且實際意義不大，因此就刪去了。

另外，有些關於歐洲文字的材料，我們都增加了一些說明，使初中同學能看得懂。

路見可 齊民友 一九五五年六月

^① 中國科學圖書儀器公司，1953年出版。

目 次

前言.....	1
一 遠古的計數.....	3
二 字母怎樣被用來表示數(羅馬記數法).....	7
三 現代的(進位的)記數法是在哪裏起源的,它是怎樣起源的.....	10
四 中國的記數法.....	19
五 通用的記數法,它的好處和缺點	21
六 怎樣簡便地寫出和唸出“天文數字”.....	24
七 怎樣寫出和唸出“侏儒數字”.....	29
結語.....	31

前 言

還有什麼能比計數更簡單呢？接連地數：一、二、三、四、五，這樣數下去是誰都會的。計數這樣經常地在我們日常生活裏出現，我們對它是這樣地習慣了，簡直不能想像一個成年人還有不會計數的。可是確實有過一個時期，那時候人們還不會計數。幾十萬年前定居在地面上的我們的老祖先，就既不知道用火，也不知道計數。

在古老的傳說裏，說到一些先知和英雄，或者是說神把火和數字給了他們，或者是說他們從神那裏奪來了火和數字。這樣的先知和英雄當然是不曾有過的。人類靠自己在幾萬年裏逐漸學會了計數，一代一代地把自己的經驗和知識傳給下一代，發展了、並且改進了計數的技巧。

現代的關於數字的科學，是一門龐大的、複雜的科學。它是數學的一個部門，而數學這門科學的對象，“是現實世界的空間形式及數量關係，所以是非常現實的資料”（恩格斯語）。數學不是聰明人憑空想出來的。人類研究自己周圍的自然界和它的規律，好利用它們來為自己謀福利，數學是從這樣的實際需要裏產生出來的。

中國有悠久的文化。中國的數學起源得很早，例如劉徽，祖沖之、祖暅之父子，甄鸞，秦九韶等，都是中國古代的大數學家。他們在數學上有過極光輝的貢獻，例如在圓周率 π 的測

定方面，劉徽，祖冲之、祖暅之父子，比歐洲人早幾百年就得到了很精密的結果。但是在封建制度的長期束縛下，數學和其他科學一樣，一直沒有得到應有的發展，所以就大大地落後於歐洲了。近百年來，中國也產生了一些數學家，例如現代數學家華羅庚，他便在數論——就是算術的高深部分——方面有過重要的貢獻。但是在半封建半殖民地的舊中國，科學是不可能和人民中間生根的。只有現在，在解放了的新中國，在中國偉大的社會主義建設事業中，數學才會和其他科學一樣，能夠得到很快的發展。

十九世紀偉大的俄羅斯數學家——羅巴切夫斯基、切貝雪夫、科瓦列夫斯卡雅等，對數學科學的發展有過重大的貢獻。在蘇聯，數學更得到了光輝的發展。蘇聯數學家們不但用新的、巨大的研究成果豐富了數學最複雜的部分，而且還解決了許多最重要的科學問題，促進了蘇聯國民經濟的發展。許多蘇聯數學家的工作，得到了斯大林獎金。社會主義勞動英雄維諾格拉多夫院士在數論方面的卓越工作就是一個這樣的例子。

在資本主義國家裏，研究數學是為帝國主義的卑鄙齷齪事業服務的，是為準備新戰爭、研究新的大規模殺人武器服務的。這就引起了進步學者們的抗議。報上登載過，有一個英國的大學者拒絕繼續研究最新式的計算機了，因為這種能很快算出極複雜計算的計算機，是造了來為計算怎樣用火箭砲轟炸和平居民的。

在蘇聯，在中國以及其他人民民主國家裏，數學和其他科

學一樣，是完全爲建設共產主義、建設社會主義的崇高事業服務的，是完全爲增進人民福利服務的。因此，它和帝國主義國家的科學是絕不相同的。

* * *

在這本小冊子裏我們要講到，人們怎樣逐漸地掌握了計數的技巧，也要講到，我們現代的記數法是怎樣構成的。

一 遠古的計數

在一些古墓裏，在一些古廟的廢墟裏，有時候找到了一些古怪的文字。學者們學會了讀它們，並且知道了人類在四五千年以前是怎樣生活的。從這些記載裏我們可以看到，在幾千年以前，我們的祖先計數已經做得很不壞了。但是，更早一些，當人們還不會寫字的時候，他們是怎樣計數的呢？關於這一點，我們只能大概推測一下。

引導我們走到古老年代，幫助我們猜破這個謎的，有三條路。

第一條路——就是研究語言，研究民間的傳說和歌謠。在語言裏還保存了許多人類不會寫字時代的痕跡。

第二條路——就是觀察嬰孩怎樣學說話和計數。研究嬰孩的發育，對於人類怎樣掌握計數，就能得到一些啓示；嬰孩就像會“重演”一下人類發展的某些步驟。

第三條路——就是研究原始民族。在非洲、南美洲中部以及一些島嶼上，還有一些很落後的部落；他們現在還和我們五千年前甚至一萬年前的祖先差不多。這些殖民地的資本主

義統治者根本不關心怎樣提高他們的文化水平。因此，在有的地方現在還保存着原始生活方式。研究這些部落，研究他們的語言和藝術，就能說明在我們自己遠古歷史上的許多不明瞭的地方，就能幫助我們知道古時候是怎樣計數的。

把從這三個來源得到的知識加以比較，就能大概描繪出，我們的祖先在發明文字以前是怎樣計數的。

在人類剛剛學會說話和用火的遠古時候，他們只知道兩個數：一和二。如果要數的東西不止兩個，人們就簡單地說“很多”。天上的星有“很多”，手上的手指也有“很多”。大家知道，現在也還有整個部落，數到三對他們就是很困難的了。在一個嬰孩的發育過程中，我們知道，也有一段時間，嬰孩只懂得什麼是“一”，什麼是“二”，但是不會數到三。

慢慢地，除了這兩個最初的數以外，又添上了越來越多的新數。人們學會了數到“五”，又學會了把兩個“五”加起來成爲一個“十”。大自然賦予人類的計數器幫助我們學會了這個，這計數器就是兩隻手和十個手指。

“五”和“十”這兩個數，在計數發展史上起了很大的作用。關於這一點是有許多跡象的。在大多數古代民族的語言裏，前十個數的名稱是和手指的名稱一樣的。甚至在有些現代民族的語言裏，也還保存着這個現象的痕跡。例如，在現代意大利語裏面，“le dita”這個字既表示“到十爲止的數字”，也表示“手指”。“屈指一算”這句話，也說明我們老祖先的計數是和手指分不開的。最後，現代的十進位計數法（下面還要詳細地講到它）證明了，“十”這個數字在計數方法的發展中有多麼重

大的意義。

我們說過了，人類首先學會了五個五個地計數，然後才學會把兩個五合起來十個十個地計數。中國的算盤就說明了這一點。在算盤上，上一格的每一個子都代表五，兩個五才合成一個十。

人類社會發展了，產生了農業、畜牧業和最簡單的手工業，同時也出現了最簡單的計算方式。從這個時候起，流傳下來了文字記載，我們已經不是大體推測而是確切知道，我們的祖先是怎樣計數的了。

在有文字的早期，是沒有字母的。那時的文字和西方國家現在用的拼音文字不同。現在的拼音文字有許多字母，幾個字母合在一起拼成一個聲音（叫做音節），而每一個字又是從幾個音節合成的。在那時候，每一件東西，每一個動作，都要用一個特別的符號（一個小小的圖畫）來表示。後來這些圖畫逐步地簡化，但是它們的個數却增加了：因為這些特別的符號，不但要表示出各種東西、各種動作，而且也要表示出這些東西的性質和其他單字。這些符號都很複雜（每一個符號就是一整幅圖畫，雖然是簡化了的），而且每一個符號不是表示一個單音，而是表示整個的字。這些符號就叫做象形文字。這種象形文字，至少用了五千年。在圖 1 上，我們可以看到畫在一座上古埃及建築物上的象形文字。

那時候還沒有特別的符號（數字）來表示數。“一”、“五”、“二十”等字，都用特別的象形文字來表示。這些表示數的象形文字並不太多，因為那時候很少計到百數，更極少有計到千



圖 1. 埃及象形文字

數的。

在有些國家，比如在中國和日本，就是現在，象形文字還跟現代數字在平行使用。

古埃及人的象形文字，表明他們的計數技巧已經是很高明的了。三千五百年以前，埃及人就知道了整數，也知道了分數。從那時候流傳下來了曆書、文契和算術題的專門集子，那些算題到現在還可以作為我們學習算術的參考資料。但是在埃及的文物裏，我們沒有碰到過很大的數字。

在中國，相傳黃帝時代就已經有了完備的計數法。歷史文物的發掘告訴我們，中國在商朝已經普遍使用千或萬以上的數，到了周秦時代就已經知道初步運用分數和比例了。

為了進一步改善計數的技巧，必須在兩條路裏選擇一條；或者是轉向用比較簡便的文字，就是說，從用象形文字改變到用字母；或者是發明一種什麼新的方法，用一些特別的符號來簡單地表示數。有些民族走了第一條路，另外一些民族走了第二條路。

二 字母怎樣被用來表示數 (羅馬記數法)

字母的發明對於文化的發展有很大的貢獻。它也幫助了計數技巧的發展。人們不再用許多字母來拼音寫出數的名稱，每一個數就用一個字母來表示。但是，這裏就發生了一個困難：字母是不多的，但是數却有很多（在發明字母的時候，人們已經會計算到幾千了）。這就是說，不單需要用字母來表示數，而且要發明一種寫法，能夠用不多幾個字母來寫出許多的數。這種用不多幾個符號就足夠寫出許多的數的方法，就叫做記數法。

對我們來說，羅馬記數法特別有意義。因為直到現在，在鐘面上、在古老建築物上都還可以看到它，在書上也還用它來表示章節和世紀等等。

古羅馬人在幾百年中間一直使用着一些奇妙的符號來記數，這些符號的起源到現在還沒有最後搞清楚。這些符號就是：

I(1), V(5), X(10), L(50), C(100).

可以設想，表示一的符號是一個表示一個手指的象形文字，表示五的符號是一個表示五個手指的象形文字（大拇指伸開的手掌）：



而十，就是兩個五：

VV 或 X → X

但是，到了羅馬文化最發達的時期（兩千年前），這些符號就被和它們相像的拉丁字母代替了。於是：

- I （手指）變成了 I；
- V （手掌）變成了 V；
- X （兩個手掌）變成了 X；
- ∟ 變成了 L；
- ⋈ 變成了 C，在這個記號裏只留下了右邊的半個括號。

此外，又出現了兩個新的符號：表示五百的字母 D 和表示一千的字母 M。可是，也可能字母 C 和 M 只是拉丁字 centum（一百）和 mille（一千）的第一個字母。

羅馬人到底怎樣寫出各個不同的數來的呢？

要寫出數字“二”和“三”，他們就簡單地把一這個符號重複寫兩次和三次：II（二），III（三）。“四”是這樣寫的：IV；在這個寫法裏，寫在五前面的一是要從五裏面減去的。反之，寫在五後面的一是要加到五上面去的；因此，六、七和八就寫成 VI、VII、VIII。

再下去就用到 X 這個符號了。“九”寫成 IX（十前面的一仍是要從十裏面減去的）。接下去是 X、XI、XII、XIII（十、十一、十二、十三）。十四寫成 XIV（十加四），十五寫成 XV（十加五）等等；二十和三十就寫成幾個十：XX 和 XXX。

要寫四十、五十等等，就用到了符號 L (五十)。比方說，四十一寫成 XLI (L 前面的十是要減去的，L 後面的一是要加上的)。五十、六十、七十，就寫成 L、LX、LXX。要寫九十，就運用 C 這個符號照下面的方法寫出來：從一百裏減去十；這就是說，把符號十放在符號一百的前面：XC。

現在把前一百個數的羅馬數字統通都寫在下面：

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XL
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
XLI	XLII	XLIII	XLIV	XLV	XLVI	XLVII	XLVIII	XLIX	L
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
LI	LII	LIII	LIV	LV	LVI	LVII	LVIII	LIX	LX
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
LXI	LXII	LXIII	LXIV	LXV	LXVI	LXVII	LXVIII	LXIX	LXX
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
LXXI	LXXII	LXXIII	LXXIV	LXXV	LXXVI	LXXVII	LXXVIII	LXXIX	LXXX
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
LXXXI	LXXXII	LXXXIII	LXXXIV	LXXXV	LXXXVI	LXXXVII	LXXXVIII	LXXXIX	XC
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
XCI	XCII	XCIII	XCIV	XCV	XCVI	XCVII	XCVIII	XCIX	C
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

一百後面的數的羅馬數字的寫法以此類推。132 這個數寫成 CII, 374 這個數寫成 CCCLXXIV, 等等。從四百到

八百九十九這些數都要用到符號 D (五百)，九百寫成 CM，一千寫成 M。於是，1917 這個數用羅馬數字寫出來，就成了 MCMXVII；1955 就寫成了 MCMLV。

用羅馬數字寫出更大的數來也並不困難。比方說，123849 就需要寫成 CXXIII^mDCCCXLIX。小寫字母“m”表示千（一百二十三個一千）；它就是拉丁字 mille（一千）的開頭第一個字母。

羅馬字母用來記數是方便的，但是用來進行計算就不方便了；不論哪一種用算式來做的演算（對位計算和我們會做的其他計算），要用羅馬數字來做，都是幾乎不可能的。這就是羅馬記數法的一個很大的缺點。

三 現代的（進位的）記數法是在哪裏起源的，它是怎樣起源的

我們已經看到了，有些民族不但用字母來拼寫文字，而且也用它來記數。另外一些民族却用和象形文字相似的符號來記數。可是他們發明了怎樣用不多幾個符號來寫出很多的數。

在古代巴比倫和中國，都產生了這種記數法。巴比倫人的記數法經過印度人改進，由阿拉伯人帶到了歐洲，後來在全世界通行。因此，我們來先講巴比倫記數法，再講中國記數法。

巴比倫人用短棒在軟和的黏土方塊上寫字，然後就把這些“手稿”燒成了磚。這樣就得到了可以長久保存的磚頭的

“文件”，其中有一些一直流傳到了現在。學者們在發掘古城的時候找到了許多這種磚頭的文契、條約和貿易合同。所以古代巴比倫人的生活，我們是知道得很清楚的。

用短棒在軟和的黏土上寫字，這種技術就使巴比倫人所有的象形文字都是由橫的或者直的楔形—— \triangleright 或者 \triangleleft ——構成的。因此，古代巴比倫人的文字就叫做“楔形文字”。

大約四千年前，在美索不達米亞——就是在近東的底格里斯河和幼發拉底河流域，現在的伊拉克國境——來到了兩個遊牧民族：蘇美爾人和亞克得人。這兩個民族當時是很文明的民族：他們會耕種土地、飼養家畜，也知道手工業和商業。過了兩個世紀，這兩個民族就合併成一個強大的國家——巴比倫。

在合併以前，這兩個民族——蘇美爾族和亞克得族——都有自己的重量單位和貨幣單位。蘇美爾人的基本重量單位叫“明那”——大約是我們的一斤重。他們的貨幣單位是一明那銀子。亞克得人的單位比較小。他們的重量單位——“舍克爾”，合蘇美爾族一明那的六十分之一（當然不是恰好等於六十分之一，而只是大約情形；不過在那時候，粗糙的衡量工具還分辨不出這種差別來）。

在合併以後，兩種重量單位——明那和舍克爾——就同時通用了。

在貨幣流通裏，一明那銀子和一舍克爾銀子就起了元和分的作用。不過一舍克爾不是較大單位一明那的百分之一，而是六十分之一。

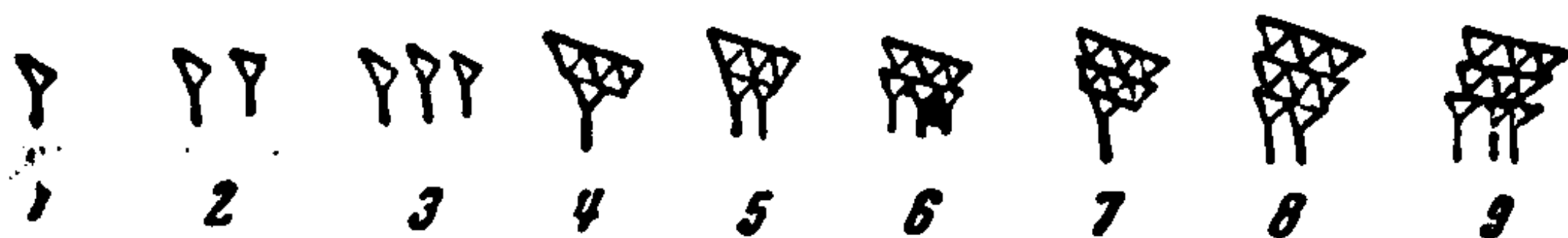
商業和經濟發展了，貨幣的流通量也增加了。就像我們除了克和公斤以外還需要有噸一樣，巴比倫人也需要更大的單位了。

很自然的，他們又用比明那大六十倍的單位來作為新的重量單位：因為“六十”這個數，在經濟方面的計算中已經很習慣了。這個新單位叫做“塔朗特”。

於是也就產生了新的貨幣單位——一塔朗特銀子，等於60明那銀子。

這三個單位（是重量單位，也是貨幣單位）的出現，每一種單位都是較小單位的六十倍，使得巴比倫人不需要念出和寫出比六十更大的數來了。就好像現在用不着說“四十二兩”而說“二斤十兩”一樣，巴比倫人也只要說“二明那四十舍克爾”而不用說“一百六十舍克爾”。因此，他們只需要五十九個符號來記數。

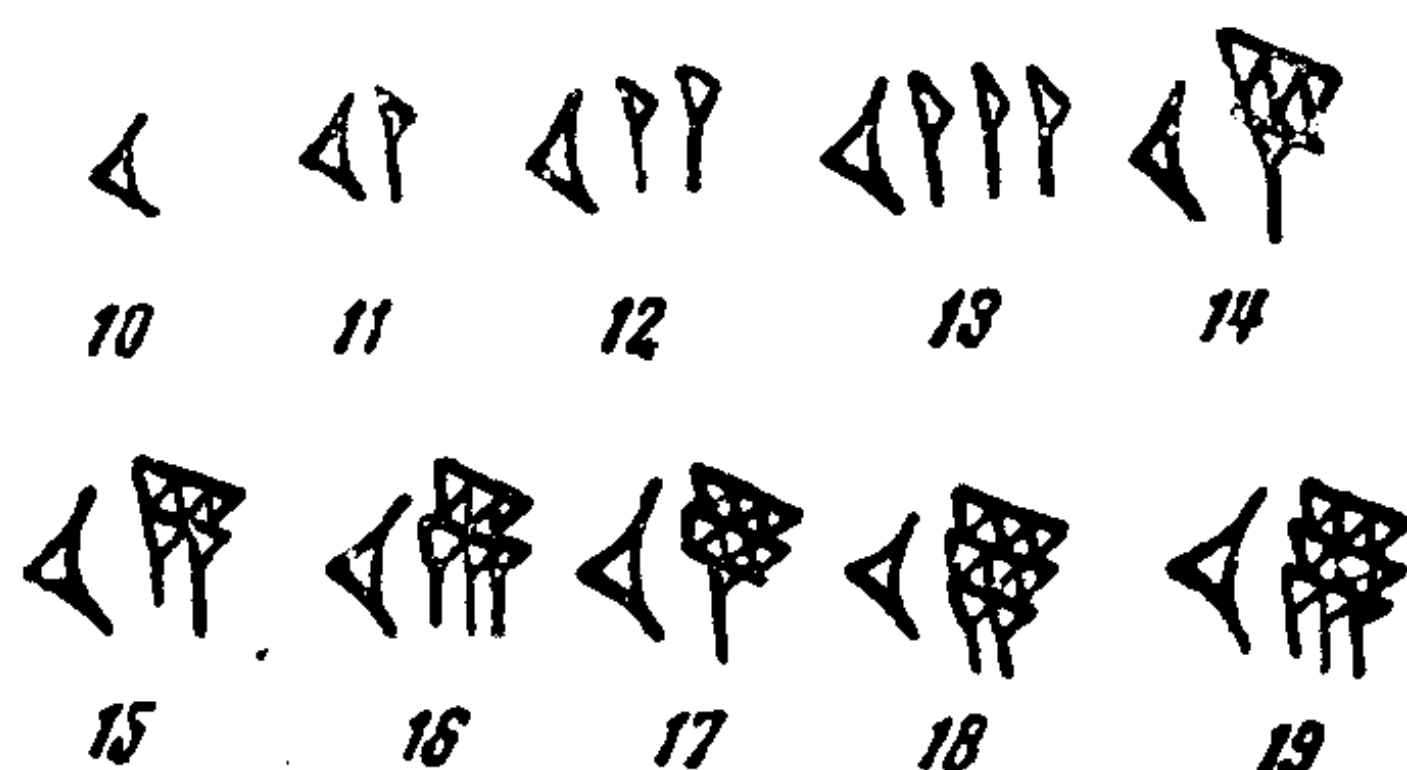
我們已經說過，巴比倫人的文字是由楔形構成的。他們用一個直立的楔來表示一，用兩個楔來表示二，這樣下去一直到用九個楔來表示九。下面就是用來表示前九個數的巴比倫符號：



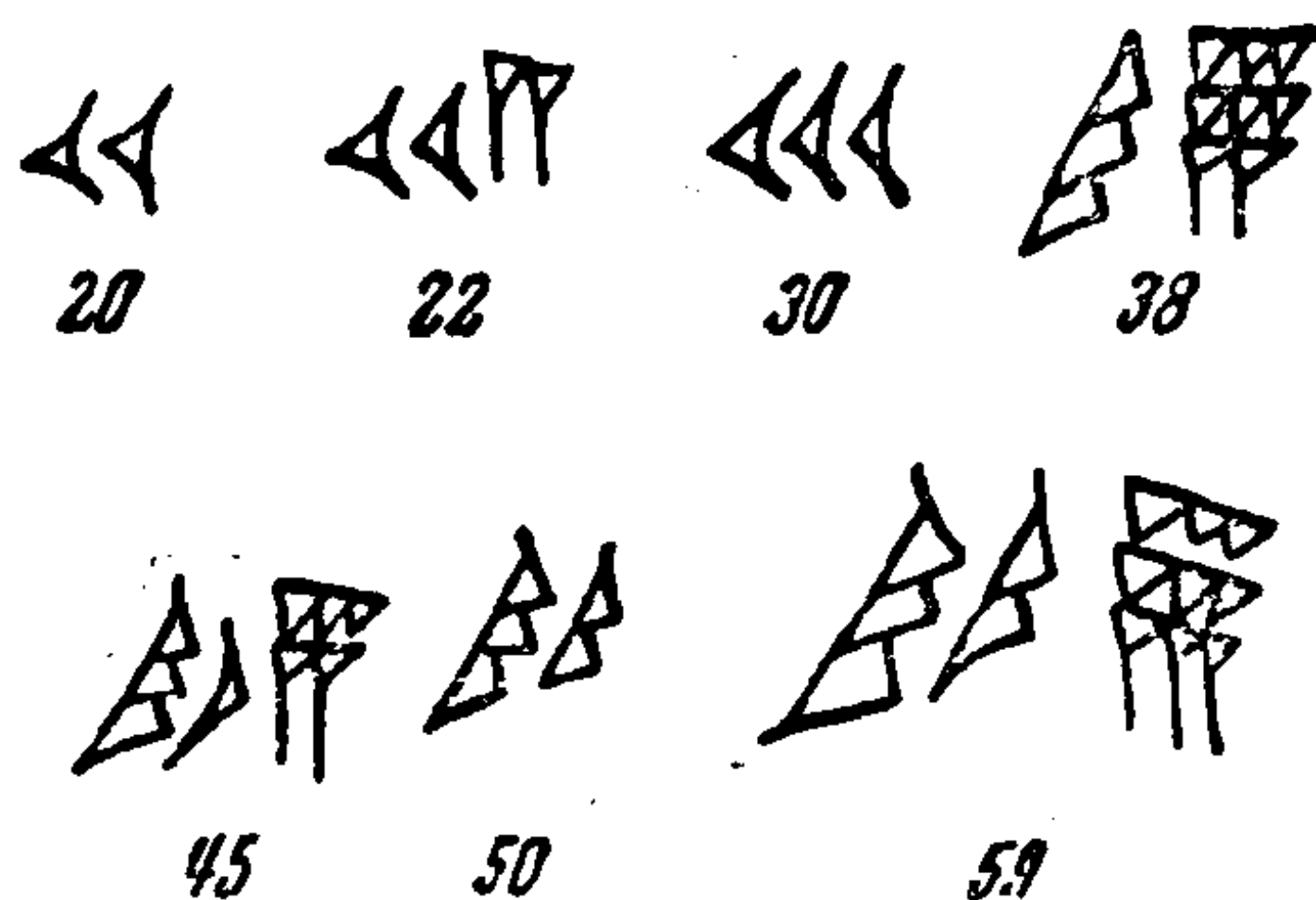
這些符號裏面的楔排列得很合理，所以在念的時候不必去數：因為楔的個數是一眼就可以看出來的。

表示十的，是一個特別的符號——一個寬寬的橫寫的楔。

下面是第二組十個數的寫法：



更大的數，也是用類似的方法寫出來的。下面就是幾個例子：



最初，明那是用比舍克爾寫得大些的符號來表示的。較晚的時候，各種單位才開始寫得一樣大小了，不過用符號的位置來表示出這些符號是表明什麼單位的。比方說，2塔朗特 13明那 41舍克爾就寫做：



巴比倫民族發展了，農民需要曆法，商人需要學會航海。

不管是曆法也好，航海術也好，都需要關於天上星辰運行的知識。天文學就發展起來了。它的發展反過來又需要記數技巧的改進。必須寫出越來越大的數，並且這種數現在不是表示重量和銀子，而是表示各種各樣的量了。於是對於數的本身發生了興趣，而數的本身却和它所計量的對象脫開了。這樣的數叫做“抽象數”（就是不名數）。

要寫出這些抽象數並不需要想出新的符號來，只要運用原有的符號就行了。下面寫的：

不再像從前那樣是表示二十一明那和三十二舍克爾了，而是表示三十二個一加上二十一個六十（按我們的說法就是1292）。換句話說，左邊的一組符號表示二十一個第二級單位（60），右邊的一組表示三十二個初級單位（1）。一個第二級單位有一個初級單位的六十倍大，就像一個明那是六十個舍克爾一樣。下面寫的：

是表示“十三個第二級單位和十三個初級單位”，按我們的說法，就是 $13 \times 60 + 13 = 793$ 。正像我們現在一樣，比如 33——左邊的三表示三個十，就是三個第二級單位，而右邊的三表示三個初級單位。因此，我們寫 33 意思就是 $3 \times 10 + 3$ 。

這樣的記數法，就是由記號位置不同來表示不同意義的，叫做進位制記數法。

我們看到，進位制記數法是很早以前就發明了的。我們現在也還使用着進位制記數法，不過放在左邊的數字是緊跟在右邊的同樣的數字的 10 倍，而不像巴比倫人那樣是 60 倍。因此說，我們用的是十進位記數法，而巴比倫人用的是六十進位記數法。

進位記數法使巴比倫人能夠寫出很大的數來。

在很長的時期裏，巴比倫人沒有用來表示零的符號。65 這個數，由一個第二級單位(60)和五個初級單位所組成，他們把它寫成：



而對 3605 這個數來說，它裏面含有一個第三級單位($3600 = 60 \times 60$)、完全不含二級單位和含有五個初級單位，他們就在中間留下一個空位，而把它寫成：



當我們用手寫字、特別是像巴比倫人那樣在磚上寫字的時候，這些空位時常會大小不一。這樣就使得在計算中和在各種文件中產生了一些混淆。從某一個時候起，在巴比倫楔形文字中出現了一個新的記號——分離符號 𐎶 。它就相當於我們的零，而用來表示一個數裏根本不含的那一級單位。這樣，比方說，3605 和 65 就分別寫成：



3605



65

但是，這是一件很奇怪的事情。巴比倫人在數字中間放進了分離符號，可是却沒有想到把這個符號放在數字末尾。巴比倫人把 1、60、3600，都寫成一個樣子：



他們還沒有想到，像我們一樣把這些數寫成：

1 . 60 . 3600

所以就在引用了分離符號以後，巴比倫人的文件裏還是有些混淆不清。

巴比倫人不但會做整數運算，而且還會做最簡單的分數運算。他們編出了許多數學表、數學教科書和算題集——所有這些，當然都是寫在磚上的。

雖然巴比倫數學家會寫很大的數，但是他們還想不到數是無限多的。另一方面，巴比倫記數法的形式也不是很完善的；需要把進位制保存下來，同時要用較小的數來代替基本數“60”，也還要學會準確地使用“零”這個符號。這些是由印度人完成了的。

在古代希臘，數學得到了很大的繁榮。希臘人會做整數

和分數計算。有一位最偉大的希臘數學家阿基米德，創造了一套記數法。這種記數法，首先，明顯地指出了數是無限多的；其次，使我們能念出每一個數，不論它有多麼大。

希臘文化流傳到了古羅馬，他們學會了它，並且也保存了它。但是在十五世紀以後，羅馬帝國滅亡了。在歐洲發生了連年不斷的戰爭。基督教會在那個時候已經有很大的影響了，它的壓迫是沉重的。在這些世紀裏，文化大大地衰落了。許多手工藝也失傳了，科學上的許多成就也湮沒了。那時候的歐洲，完全滿足於用羅馬數字來做幾萬以下的原始計算。

但是在遙遠的印度，這時候科學和藝術却得到了繁榮。數學特別被尊重，因為可以用它來推算曆法、確定一年四季節氣的流轉、預測日食和月食。爲了寫出很大的數，在印度發明了一種記數法；在這種記數法裏面，把平常習慣的成十地計算和巴比倫人的進位制結合了起來，並且非常巧妙地使用了“零”這個符號。這種記數法我們直到現在還在使用。

這種記數法是怎樣從印度傳到歐洲的呢？

在歐洲和印度之間的阿拉伯半島上，在七世紀的時候發生了一件大事。住在這個半島上的一些阿拉伯部落，侵佔了幾個鄰國，組成了一個強大的國家。阿拉伯國家擴大了，掌握了東方和西方鄰國的文化，而得到了很大的繁榮。從西方埃及人那裏，阿拉伯人學到了保存下來的古希臘文化，而從東方却學到了印度人的建築和計算的藝術。

阿拉伯人領會了印度人的計算技巧，就從他們那裏借用了記數的符號——數字。這些符號在阿拉伯文字中就是：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

這些符號的用法，和我們現在使用數字的方法是完全一樣的。下面是一些數的阿拉伯寫法：

15 — ١٥ 804 — ٨٠٤

阿拉伯人的數字的次序和我們的是一樣的。

這些數字現在還保存在有阿拉伯文化的一些民族裏：例如土耳其人，伊朗人，阿富汗人。在圖2上有一些現代的郵票，上面還印有阿拉伯人的數字。在蘇聯的一些民族中（例如韃靼人，阿捷爾拜疆人，土爾克明人等等），在使用仿照俄文造出來的字母以前，也流行過這種數字。圖2最右方的郵票，就是阿捷爾拜疆共和國1922年的郵票。

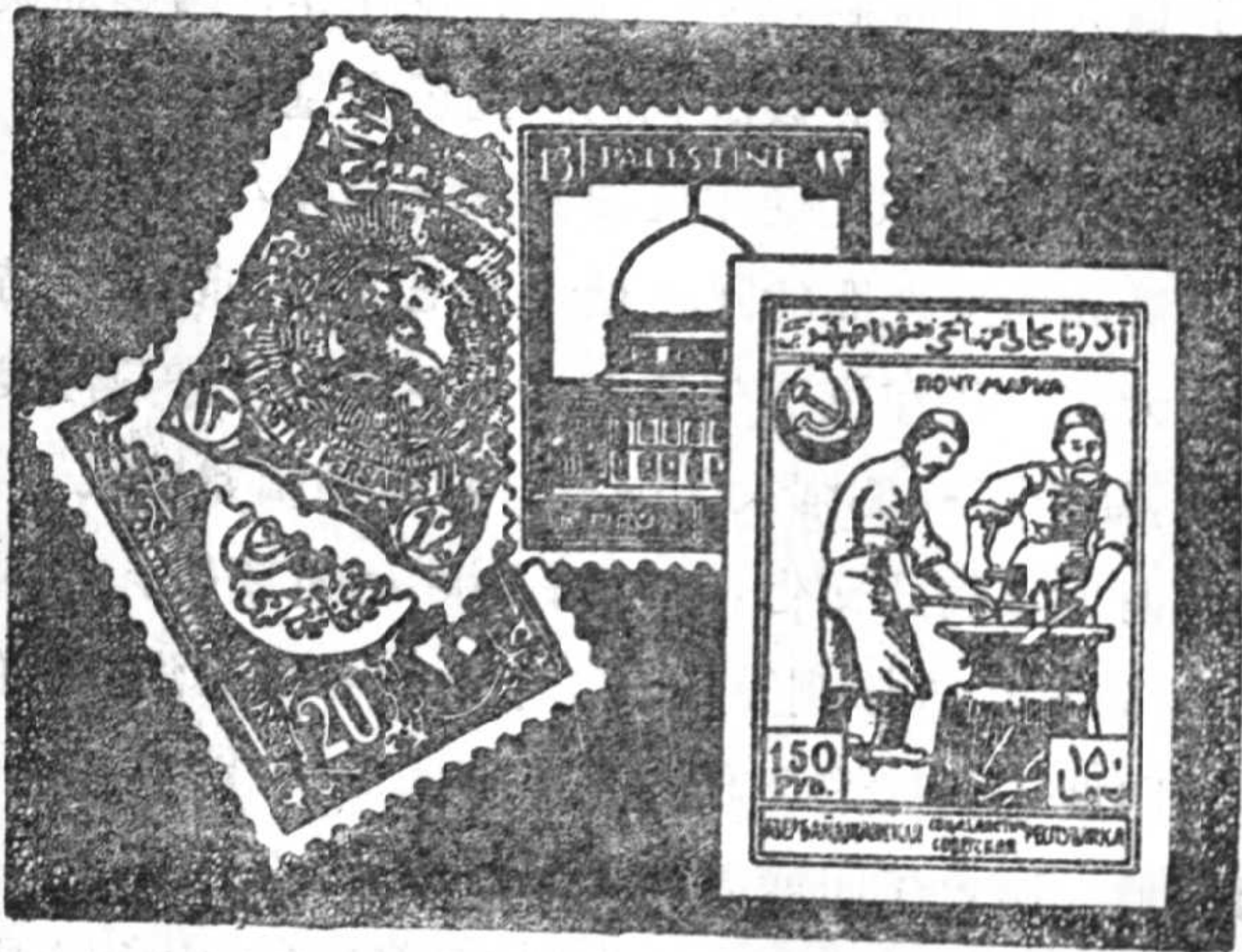


圖2. 印有阿拉伯人的數字的郵票

注意：我們現在使用的數字平常就叫做“阿拉伯”數字，雖然樣子已經大大改變了（只有一和九沒有改變）。正確些說，不應該說是“阿拉伯數字”而應該說是“阿拉伯記數法”，甚至於不應該說是“阿拉伯”而應該說是“印度”，因為印度人創造了它，而阿拉伯人只是把它帶到了歐洲。

四 中國的記數法

中國古代，爲了計算射獵所獲得的飛禽和走獸的數目，就用箭來記錄。這就是最初的記數法。後來就逐漸用到其他事物的記數，例如用來記錄遊戲的勝負等等。但是箭是很長的，用起來很不方便，後來就用短竹子削成籌碼來代替箭，從這裏就產生了象形文字的數字。

中國的數字分成橫豎兩式：

橫式	一	二	三	𠄎	𠄎	上	𠄎	𠄎	𠄎
豎式	丨	𠄎	𠄎	𠄎	𠄎	丁	𠄎	𠄎	𠄎
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

注意：到了五以上，就用另一根籌碼來代替五；因爲籌碼用得太多就看不清楚了。爲什麼到了“五”才用另一根籌碼來代替呢？這當然和我們手上有五個手指是分不開的。到了十以上，就不再用新的記號而採用進位制，例如12就寫成𠄎或一𠄎。所以中國古代的記數法，可以說是“用五小進，用十大進”。直到現在，我們也還使用着“一五一十”的口訣。從這裏看來中國記數法和巴比倫記數法一樣，是採用象形文字和進位制的。

到了一百、一千又繼續進位，和我們現在通用的記數法一樣，例如 1289 就寫成 𠄎𠄎。注意，個位、十位……都是橫豎相間的，因為同用橫式或者豎式就容易混淆不清，例如，如果把 123 寫成 𠄎𠄎就容易看成 33 或者 15，因此 123 必須寫成 𠄎𠄎𠄎。

在開始的時候，中國也沒有 0，遇到 0 就空一位。例如 3048 就寫成：

𠄎 𠄎

這種數字，不但在臨時記數中可用，而且也逐漸用在典籍中。在敦煌漢簡中已經見到這種數字的記載了。

到後來因為上面的數字寫法不方便，就把其中幾個複雜的數字改寫如下：

四寫作 X，五寫作 𠄎 或 𠄎，九寫作 𠄎 或 𠄎，

並且造出了 0 這個記號（這可能是受了印度或西方記數法的影響）。後來五字逐漸由 𠄎 演變為 𠄎，九由 𠄎 和 𠄎 演變為 𠄎，而豎式的六、七、八已不再採用，因此就演變成爲直到現在中國的農村和一部分小商人還習用着的數字：

一	二	三	X	𠄎	𠄎	𠄎	𠄎	𠄎	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

中國數字的好處，在於容易使人一看便知道各數字所代表的數；這一點在原始的數字中很明顯，就是演變到現在的樣子，一二三和六七八還和最初的數字一樣可以明顯地看出。中國數字和世界各國通用的數字一樣，採用十進位制，這也是一個好處。中國數字的缺點是寫起來不太方便，有的數字要

寫好幾筆。

· 五 通用的記數法，它的好處和缺點

現在通用的記數法就是由印度人發明的，它由阿拉伯人帶到了歐洲，後來勝利地傳遍了全世界，並且排除了其他一切記數法。它本身是怎樣的呢？它究竟好在什麼地方？它還有缺點嗎？如果有的話，又怎樣來改正它呢？這些就是值得想一想的問題。

現在通用的記數法是大家都熟悉的。我們使用十個符號來記數，這些符號叫做阿拉伯數字。其中九個(1、2、3、4、5、6、7、8、9)是表示數的：從一到九。第十個符號零(0)並不表示任何數。用排字工人的話來說，它就是空位。在記數的時候，就用0來填滿空位。

十個初級單位就成了一個十，或者說是一個第二級單位(十位)。十個第二級單位，就成了一個第三級單位(百位)由兩個一百、三個十和五個一合成的數，就寫成235。每一個符號所代表的數值不但要看這個符號是什麼——是3還是5，還要看它的位置是在哪一位上。在最右方的是個位，左邊的一位是十位，更左邊的是百位。如果某一級單位沒有了，就在這一位上放上一個0；例如一百二十包含一個一百和兩個十，但是沒有個位數，就寫成120。

第四級(千位)、第五級(萬位)以及更高級的單位，都是這樣形成的。每三位叫做一節。個位、十位和百位，是第一節。千位、萬位和十萬位，是第二節；等等。在書寫和印刷的時候，

節和節之間要留下一個小空子(或者打上一個“,”),比方說,“二萬五千七百五十”這個數就寫成25 750(25,750)。這樣的寫法是很清楚的。甚至於比較大的數也能寫得很簡短,運算起來(加、減、乘、除等等)也很方便。

如果不用“十”而用一個大些的數來做進位制的基礎(例如我們知道在巴比倫就曾經用6)來做進位制的基礎),那麼算術的四則運算就變得很困難了。反過來說,如果用很小的數(例如2或者3)來做進位制的基礎,那麼四則運算變得十分簡單,比我們現在的還簡單些,但是數的寫法就會變得很複雜了。

在現代科學上常常要跟一些巨大的數打交道,我們的記數法在記這些數的時候,就顯得不大合適。這些數寫出來有很多位,很難看得清楚。下面就是一些“數字巨人”的例子:

地球的表面積是509,000,000平方公里;地球到太陽的距離是149,500,000公里;地球的質量是3,000,000,000,000,000,000,000噸。

要是我們想寫出地球到遙遠的星球的距離(公里數),或者一公升空氣裏的分子數,那就會得到一個佔滿一整行的數。但是,寫巨大的數的困難是可以克服的;再往下看,我們就會知道該怎樣辦。這樣說來,我們的記數法可以看做是十全十美的了。

在數的唸法上,情形就要壞些。如果說,數的寫法現在差不多所有的民族都是一樣的,那末數的唸法(從一到百萬)就是各不相同的了。在歐洲,從一到十萬的唸法是很古老的,很

難追溯出它們的起源。“百萬”這個詞在歐洲還是近代產生的。意大利文字百萬叫做millione，是由十三世紀到中國來的旅行家馬哥孛羅想出來的。millione 是兩個字合成的。mille 是意大利文的“千”，one 是一個字尾，表示“很多”“很大”。馬哥孛羅造出這個字來，是為描述“天朝上國”（古時中國的稱呼）的無比富庶的。

在中國，數字的唸法和歐洲各國有很大的不同。歐洲各國的語言中沒有“萬”字，“一萬”他們叫做“十千”，十萬叫做“一百千”，到了“一千千”就是百萬才有新的名稱。上面講過數的寫法每三位分一節，就是這個原因。在中國，千上面還有萬、十萬、百萬、千萬、直到“萬萬”才有一個新名稱叫做“億”（因此照中國習慣，數的寫法應該是四位一節。但是現在來提倡“四位一節”，也沒有什麼好處）。因此，按中國的唸法，中國人口 619,000,000，唸做六億一千九百萬；地球的質量 5,000,000,000,000,000,000 噸，唸做六十萬億億噸；從太陽到最近恆星的距離 40,300,000,000,000 公里，唸做四十萬零三千億公里；從地球上用現代極強大的望遠鏡才能勉強看到的星雲距離是 2,000,000,000,000,000,000,000 公里，這個數字念做“二十萬億億”公里。如果把萬億叫做“兆”，那末地球質量的數就可以唸做“六十億兆”噸，到星雲的距離數就可以唸做“二十億兆”公里。

這樣的唸法很不方便，也不大容易叫人立刻理解到這個數究竟多大；同時，還有更大的數不創造新的名稱，就唸不出來。但是這是全然不必要的。生活已經帶來了一切我們所需

要的補救辦法了。

六 怎樣簡便地寫出和 唸出“天文數字”

讀者們一定注意到了，在這本小冊子裏碰到的巨大的數（“天文數字”），都有一個奇怪的特點：這些數都是“圓圈”數，它們的末尾都有許多零。這並不是偶然的，並不是我們特意造出來的例子。從計算和量度得出來的巨大的數，必然都是“圓圈”數。現在，我們就來解釋這是為什麼吧。

當我們說“我手上有五個手指”的時候，這就表示，手指恰好是五個，不是六個也不是三個。完全一樣，當一個人說，在他誕生的那個村子裏有四十七個莊院，那也是指的那些莊院恰好是四十七個。可是，要是我們說，武漢市的人口有1,200,000人，這裏的“一百二十萬”就有着少許不同的意思了。首先，武漢市的人數不是每天固定的，每一天有些人才到武漢，也有些人恰好離開武漢；其次，就說固定在某一天某一時刻調查武漢市人口，也未必恰好等於一百二十萬，不多一個也不少一個。可是我們說某一地的人口，沒有必要知道它的確數，只要知道一個約數就可以了。像這樣，說武漢市的人口有1,200,000人，就是約數。所以在1,200,000這個數後面的五個零，並不表示“沒有”而是表示我們不需要知道這五位數，有時候也因為我們不知道這五位數，就只能用零來表示。

同樣地，當我們說，地球上的居民共2,100,000,000（二

十一億)人的時候,這個數並不精確。因為在各國戶口登記的時間不同,也很難辦到時間一致;並且還有一些國家,直到現在沒有好好統計過。可能地球上的居民不是 2,100,000,000 人而是 2,090,000,000 人或是 2,137,000,000 人。在表示地球上居民的數字中,我們只確實地知道億位和十億位。至於千萬位、百萬位以及更低的位數,我們就不知道了。“零”在這裏並不表示“沒有”,而是表示我們不知道這些位數。

在計算天上的星球,甚至於在計算林中的樹木的時候,得到的也是這樣的數。隨便哪一個算出來的很大的數,都是近似數。“圓圈”數只是大致的數。

在計算的時候是這樣,在量度的時候也是這樣。如果我們買東西的時候是成公斤稱的,那末幾克甚至於幾十克的差錯幾乎是不可免的。房間的長度,我們是按公尺量的,有時候也按厘米來量,但是不會注意到毫米(即使想注意,也辦不到)。每一種測量儀器都有一定程度的精確度,因此只能測到要測的量的近似值。

在上述 1,200,000 這個數中,我們認為百萬位和十萬位是確實知道的。這兩位數字和後面的零意義不同,通常叫做有效數字。地球上的人口數字(2,100,000,000),也只有前兩位是有效數字。

但是,也不應該認為零就不可能是有效數字。我們曾經把地球的質量 6,000,000,000,000,000,000,000 噸來作過很大的數的例子。在這個數裏,天文學家證實了前兩位數字是正確的,就是說 6 和第一個 0 是正確的。因而 6 和它右邊的

第一個 0 是有效數字，其他的零就都表示我們不知道的位數了（至於怎樣在一個數裏去區別哪些零字是有效的零，哪些不是有效的零，下面就要講到）。

在大多數工程方面的測量中，能得到 2 位或 3 位有效數字。在比較重要的測量裏，能得到 4 位或 5 位有效數字。在最精確的物理測量中，能得到 6 位或 7 位，8 位有效數字是很罕有的了。

從這裏能得出什麼結論來呢？那就是，科學和生活給我們的一切數字只有前兩位到五位（很少有更多位）數字是可靠的，剩下來後面的數字就全都是零。

但是一切結尾有許多零的數，都能寫作一個不大的數再乘上一個“一後面跟着許多零的數”。比方說，509,000,000（地球表面積的平方公里數）就可以寫作

$$509 \times 1,000,000。$$

地球質量的噸數，可以寫作 $60 \times 100,000,000,000,000,000,000$ ；這裏 6 後面還有一個 0，正像我們前面說過的，是表示有效數字的；在它後面乘數裏的就是許多“不可靠的”零了。

用這樣的寫法，第一個乘數平常是 2 位或 3 位，少有 4 位或 5 位的，而且只在極稀有的情況下才有 6、7 或 8 位。這一個數就很容易簡單地寫出和唸出了。因此，只要想法子把第二個乘數——就是一後面跟着許多零的數——的寫法和唸法簡化一下就行了。

“指數”符號就可以用來簡化這樣的數的寫法。什麼叫做指數呢？

爲了說明指數，我們來看一看幾個同樣的數的相乘。

兩個同樣的數相乘的積，也就是一個數的自乘的積，叫做這個數的二次方或平方。比方說，64就是 8×8 ，因此64就叫做8的

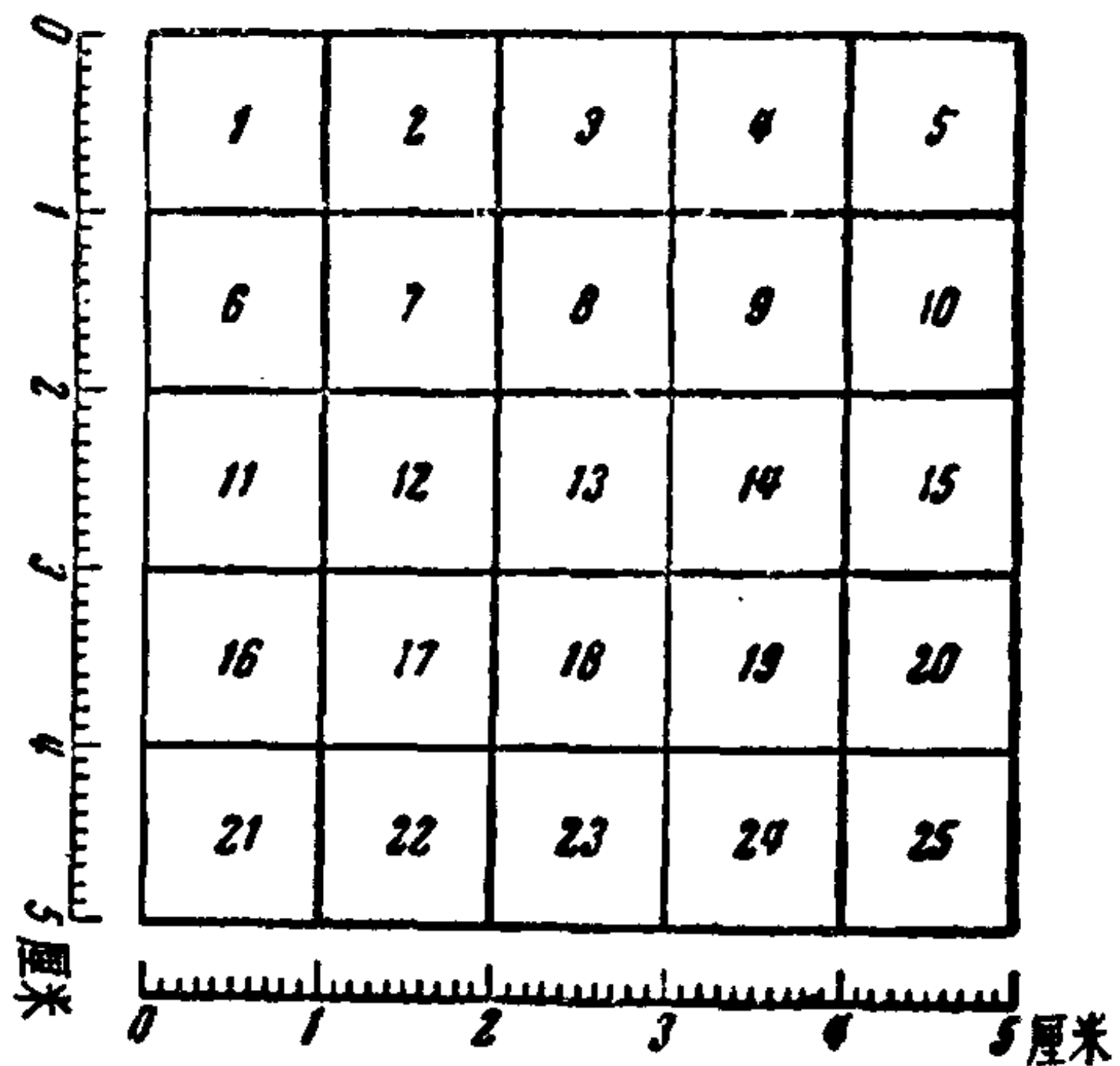


圖3. 邊長是5的正方形含有 $5 \times 5 = 25$ 個小方塊

平方(二次方);100就是 10×10 ，所以100就叫做10的平方。兩個同樣的數相乘的積叫做平方，是因爲正方形的面積就是它的邊長的自乘(圖3)。

三個同樣的數相乘的積，叫做這個數的三次方或立方。比方說，1000是10的立方，因爲：

$$1000 = 10 \times 10 \times 10。$$

我們用 10^2 來代表 10×10 ；右上角的小字2表示要兩個十相乘。同樣地， $10 \times 10 \times 10$ 寫成 10^3 ，右上角的小字3表示要三個十相乘。

所有的數，例如10，不但可以重複乘兩次、三次，而且可以重複乘任意次。舉例來說：10000這個數等於 $10 \times 10 \times 10 \times 10$ ；這裏有四個相同的乘數。這個乘積就叫做10的四次方，並且簡寫作 10^4 。

還可以這樣再作下去。若干個同樣的數相乘，就是某數自乘若干次，就叫做這個數的某次方，也叫某次冪；這個數的本身叫做冪的底數，而底數自乘的次數就叫做冪的指數。在我們的例子裏， $10^4 = 10000$ ，10 就是底數，4 就是指數，10000 是 10 的 4 次冪。冪的指數總是寫成一個小小的數放在底數的右上角的。爲了方便起見，我們有時候也用 10^1 來表示 10。

10 的各次冪是很容易得到的，因爲每乘上一個 10，只要在後面添一個 0 就得到了。下面就是 10 的前五次冪：

$$10 = 10^1 (10 \text{——一個乘數}),$$

$$100 = 10^2 (10 \times 10 \text{——兩個同樣的乘數}),$$

$$1000 = 10^3 (10 \times 10 \times 10 \text{——三個同樣的乘數}),$$

$$10,000 = 10^4 (10 \times 10 \times 10 \times 10 \text{——四個同樣的乘數}),$$

$$100,000 = 10^5 (10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \text{——五個同樣的乘數}).$$

顯然，10 的各次冪都可以寫成“一後面跟着許多零”，而且零的個數和指數一樣。反過來，如果知道一個數是一後面跟着許多零，那它一定可以寫成十的冪，只要數一下有幾個零就行了。舉例來說， $1,000,000 = 10^6$ (6 個零)， $10,000,000,000 = 10^{10}$ (10 個零)。

現在任何一個“天文數字”，把它的有效數字分開了以後都不難簡單地寫出來了。

地球的表面積是 509×10^6 平方公里，地球到太陽的距離是 1495×10^5 公里，太陽到最近恆星的距離是 403×10^{11} 公里，地球的質量是 60×10^{20} 噸 (我們寫成 60×10^{20} 而不寫作 6×10^{21} ，是因爲天文學家證實了：6 後面的第一個零是有效數字)。

時常不用“ \times ”而用一個寫在中間的“ \cdot ”來表示乘號；這樣，上述數字就可以寫成： $509 \cdot 10^6$ ， $1495 \cdot 10^5$ ， $403 \cdot 10^{11}$ ， $60 \cdot 10^{20}$ 。這些數是這樣唸的： $509 \cdot 10^6$ 唸做“五百零九乘十的六次方”， $1495 \cdot 10^5$ 唸做“一千四百九十五乘十的五次方”，等等。

我們看到，用了指數符號以後，就能把不論多大的數簡短地寫出來和唸出來。由此可見，我們完全沒有必要用許多古怪的字來稱呼“天文數字”。

我們就用指數來寫出我們的祖先們能計到的數吧。

穴居人能計到 2。

石器時代晚年的人能計到 10^2 到 10^3 。

中國人在殷周時代就能計到 10^4 和 10^5 以上。

古埃及人、古希臘人和發明字母以前的古斯拉夫人，能計到 10^4 。

巴比倫人能計到 $1,959,552 \cdot 10^8$ （這是研究者在巴比倫遺物上所找到的最大的數）。

在四千年前的印度遺物上提到過 10^6 ，兩千年前印度人知道 10^{17} 這樣大的數。

當然，他們的寫法並不是這樣的。

七 怎樣寫出和唸出“侏儒數字”

科學給了我們許多巨人似的天文數字，也給了我們許多“侏儒數字”。這些表示極微小的量的數，可以寫成分母很大的分數。但是這些分數的分子，是不很大的。它們時常是兩三位數，很少有四五位數的，只有在極例外的情形，才會有六

位、七位以至八位數的分子。現代科學還沒有達到再高的精確度。下面來看幾個例子。

我們的血液是由幾十億小血球組成的。其中最重要的，就是使血液成爲紅色的血球，叫做紅血球。學者們能在顯微鏡下面看到這些小物體，並且能大概算出它們的大小。原來一個紅血球的直徑只有 $\frac{7}{10,000}$ 厘米，就是 0.0007 厘米。

更小的還有分子、原子和電子。最輕的原子——氫原子——的重量是

$$\frac{165}{100,000,000,000,000,000,000,000,000} \text{ 克}$$

$$= 0.000,000,000,000,000,000,000,001,65 \text{ 克}$$

這些分數的分子不大，但是整個數寫出來還是很累贅，因爲分母太大了。

爲了把分數寫得簡明些，而且容易唸些，跟對待很大的數一樣，是要用到指數符號的。比方上述兩個例子，就可以寫成：

$$\frac{7}{10,000} = \frac{7}{10^4},$$

$$\frac{165}{100,000,000,000,000,000,000,000,000} = \frac{165}{10^{20}}.$$

但是這些分數還可以寫得更簡單些。我們規定，不把十的冪寫在分母上，而把它寫成乘數，但是在指數前面要加上一個“負號”。

這樣一來，比方說 $\frac{7}{10^4}$ 就可以寫成 $7 \cdot 10^{-4}$ ，唸做“七乘十

的負四次方”了。

用這些寫法 10^{-1} 就表示 $\frac{1}{10}$ (十分之一), 10^{-2} 就表示 $\frac{1}{10^2}$, 就是百分之一, 10^{-3} 就是千分之一 ($\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$)。

所有的小數,也都能寫成這樣的簡略形式。舉一個例,我們來把 0.000183 簡寫出來。首先,把這個小數寫成分數,然後再把分母簡寫成十的冪,最後再把這個冪寫成乘數,並且在指數前面加上“負號”:

$$0.000,183 = \frac{183}{1,000,000} = \frac{183}{10^6} = 183 \cdot 10^{-6},$$

事實上,只要數一數小數點後面有六位數字,就知道這裏應該是負 6 次方。

反過來,又可以把 $27 \cdot 10^{-9}$ 寫成平常分數的樣子:

$$27 \cdot 10^{-9} = \frac{27}{10^9} = \frac{27}{1,000,000,000};$$

寫成這樣就很容易唸出來,這就是十億分之二十七。但是在實際應用上還是把它唸做“27 乘 10 的負 9 次方”來得清楚些。

這樣,分數也和整數一樣,很容易就寫出來和唸出來了。

結 語

人類慢慢地、逐步地掌握了越來越大的數。數的寫法和運算規則變得更完美了。除了整數而外,人類還發明了其他各種數來表示人們在生活中所碰到的量。分數就是這樣發明

的。中學生還熟悉其他種新的數——負數和所謂無理數。現代科學上有時候還會碰到性質非常複雜的量。爲了研究它們，就必須再創造種種新的數。“複數”、“四元數”、“向量”、“張量”，都是這樣出現的。當然在這本小冊子裏就不可能講到這些了。

關於數的科學，也和其他科學一樣，在發展着。它在成長着，計算的技巧在日趨完善，越來越多的新的數在逐漸被採用着。

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 计数和数字

作者 = (苏联) 别尔曼著 路见可 齐民友译

页数 = 32

SS号 = 11233607

出版日期 = 1955年10月第1版

封面
前言
目录
目次

的

- 一、远古的计数
 - 二、字母怎样被用来表示数（罗马记数法）
 - 三、现代的（进位的）记数法是在哪里起源的，它是怎样起源
 - 四、中国的记数法
 - 五、通用的记数法，它的好处和缺点
 - 六、怎样简便地写出和念出“天文数字”
 - 七、怎样写出和念出“侏儒数字”
- 结语