

1. 用 $g(x)$ 除 $f(x)$, 求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1, g(x) = 3x^2 - 2x + 1;$

2) $f(x) = x^4 - 2x + 5, g(x) = x^2 - x + 2.$

2. m, p, q 适合什么条件时, 有

1) $x^2 + mx - 1 \mid x^3 + px + q;$

2) $x^2 + mx + 1 \mid x^4 + px^2 + q.$

3. 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

1) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x, g(x) = x + 3;$

2) $f(x) = x^3 - x^2 - x, g(x) = x - 1 + 2i.$

4. 把 $f(x)$ 表成 $x - x_0$ 的方幂和, 即表成

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots$$

的形式:

1) $f(x) = x^5, x_0 = 1;$

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, x_0 = -2;$

3) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i, x_0 = -i.$

5. 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式:

1) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, g(x) = x^3 + x^2 - x - 1;$

第一章 多项式

$$2) f(x) = x^4 - 4x^3 + 1, g(x) = x^3 - 3x^2 + 1;$$

$$3) f(x) = x^4 - 10x^2 + 1, g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1.$$

第一章 多项式

6. 求 $u(x), v(x)$ 使 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$:

1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;

2) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9, g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$;

第一章 多项式

3) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1, g(x) = x^2 - x - 1.$

7. 设 $f(x) = x^3 + (1+t)x^2 + 2x + 2u, g(x) = x^3 + tx + u$ 的最大公因式是一个二次多项式, 求 t, u 的值.

第一章 多项式

8. 证明:如果 $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$, 且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合, 那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

第一章 多项式

9. 证明： $(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x)$ ($h(x)$ 的首项系数为 1).

加群：783072579。加群：783072579。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

加群：783072579。加群：783072579。

10. 如果 $f(x), g(x)$ 不全为零, 证明: $\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))} \right) = 1$.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

11. 证明:如果 $f(x), g(x)$ 不全为零,且

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x)),$$

那么 $(u(x), v(x)) = 1$.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

12. 证明:如果 $(f(x), g(x)) = 1, (f(x), h(x)) = 1$, 那么
 $(f(x), g(x)h(x)) = 1$.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

13. 设 $f_1(x), \dots, f_m(x), g_1(x), \dots, g_n(x)$ 都是多项式, 而且

$$(f_i(x), g_j(x)) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

求证: $(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)) = 1$.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

第一章 多项式

14. 证明:如果 $(f(x), g(x)) = 1$, 那么 $(f(x)g(x), f(x) + g(x)) = 1$.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

15. 求下列多项式的公共根：

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1, g(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

加群：783072579。加群：783072579。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

加群：783072579。加群：783072579。

16. 判别下列多项式有无重因式：

1) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$;

2) $f(x) = x^4 + 4x^2 - 4x - 3$.

加群：783072579。加群：783072579。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

加群：783072579。加群：783072579。

17. 求 t 值使 $f(x) = x^3 - 3x^2 + tx - 1$ 有重根.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

18. 求多项式 $x^3 + px + q$ 有重根的条件.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

19. 如果 $(x-1)^2 \mid Ax^4 + Bx^2 + 1$, 求 A, B .

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

20. 证明： $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 不能有重根.

加群：783072579。加群：783072579。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

加群：783072579。加群：783072579。

21. 如果 a 是 $f'''(x)$ 的一个 k 重根, 证明: a 是

$$g(x) = \frac{x-a}{2}[f'(x) + f'(a)] - f(x) + f(a)$$

的一个 $k+3$ 重根.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

22. 证明: x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, 而 $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

23. 举例说明断语“如果 α 是 $f'(x)$ 的 m 重根,那么 α 是 $f(x)$ 的 $m + 1$ 重根”是不对的.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服,拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

24. 证明:如果 $(x - 1) \mid f(x^n)$, 那么 $(x^n - 1) \mid f(x^n)$.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

25. 证明:如果 $(x^2 + x + 1) \mid f_1(x^3) + xf_2(x^3)$, 那么
 $(x - 1) \mid f_1(x), (x - 1) \mid f_2(x)$.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

26. 将多项式 $x^n - 1$ 在复数范围内和在实数范围内因式分解.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

27. 求下列多项式的有理根：

1) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;

2) $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$;

加群：783072579。加群：783072579。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

加群：783072579。加群：783072579。

3) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3.$

28. 判断下列多项式在有理数域上是否可约?

1) $x^2 + 1;$

$$2) x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 2;$$

$$3) x^6 + x^3 + 1;$$

加群：783072579。加群：783072579。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

加群：783072579。加群：783072579。

4) $x^p + px + 1$, p 为奇素数;

5) $x^4 + 4kx + 1$, k 为整数.

补充题

1. 设 $f_1(x) = af(x) + bg(x)$, $g_1(x) = cf(x) + dg(x)$, 且 $ad - bc \neq 0$, 证明: $(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

第一章 多项式

2. 证明: 只要 $\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}$ 的次数都大于零, 就可以适当选择适合等式

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$$

的 $u(x)$ 与 $v(x)$, 使

$$\partial(u(x)) < \partial\left(\frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right),$$

$$\partial(v(x)) < \partial\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}\right).$$

3. 证明: 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 那么 $f(x^m)$ 与 $g(x^m)$ ($m \geq 1$) 也互素.

第一章 多项式

4. 证明: 如果 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{s-1}(x)$ 的最大公因式存在, 那么 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{s-1}(x), f_s(x)$ 的最大公因式也存在, 且当 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ 全不为零时有

$$\begin{aligned} & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_{s-1}(x), f_s(x)) \\ &= ((f_1(x), f_2(x), \dots, f_{s-1}(x)), f_s(x)). \end{aligned}$$

再利用上式证明, 存在多项式 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_s(x)$ 使

$$\begin{aligned} & u_1(x)f_1(x) + u_2(x)f_2(x) + \dots + u_s(x)f_s(x) \\ &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)). \end{aligned}$$

第一章 多项式

5. 多项式 $m(x)$ 称为多项式 $f(x), g(x)$ 的一个最小公倍式, 如果
1) $f(x) \mid m(x), g(x) \mid m(x)$; 2) $f(x), g(x)$ 的任一个公倍式都是 $m(x)$ 的倍式. 我们以 $[f(x), g(x)]$ 表示首项系数是 1 的那个最小公倍式. 证明: 如果 $f(x), g(x)$ 的首项系数都是 1, 那么

$$[f(x), g(x)] = \frac{f(x)g(x)}{(f(x), g(x))}.$$

加群: 783072579。加群: 783072579。
教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。
客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。
教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。
加群: 783072579。加群: 783072579。

6. 证明定理 5 的逆, 即: 设 $p(x)$ 是次数大于零的多项式, 如果对于任何多项式 $f(x), g(x)$, 由 $p(x) \mid f(x)g(x)$ 可以推出 $p(x) \mid f(x)$ 或者 $p(x) \mid g(x)$, 那么 $p(x)$ 是不可约多项式.

7. 证明: 次数 > 0 且首项系数为 1 的多项式 $f(x)$ 是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件为: 对任意的多项式 $g(x)$ 必有 $(f(x), g(x)) = 1$, 或者对某一正整数 $m, f(x) \mid g^m(x)$.

第一章 多项式

8. 证明:次数 >0 且首项系数为 1 的多项式 $f(x)$ 是某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是,对任意的多项式 $g(x), h(x)$, 由 $f(x) \mid g(x)h(x)$ 可以推出 $f(x) \mid g(x)$, 或者对某一正整数 $m, f(x) \mid h^m(x)$.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。

9. 证明： $x^n + ax^{n-m} + b$ 不能有不为零的重数大于 2 的根.

10. 证明：如果 $f(x) \mid f(x^n)$ ，那么 $f(x)$ 的根只能是零或单位根.

11. 如果 $f'(x) \mid f(x)$, 证明: $f(x)$ 有 n 重根, 其中 $n = \partial(f(x))$.

12. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个不同的数, 而

$$F(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n).$$

证明:

1)
$$\sum_{i=1}^n \frac{F(x)}{(x - a_i)F'(a_i)} = 1;$$

2) 任意多项式 $f(x)$ 用 $F(x)$ 除所得的余式为

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(a_i)F(x)}{(x - a_i)F'(a_i)}.$$

加群：783072579。加群：783072579。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。

教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。

加群：783072579。加群：783072579。

第一章 多项式

14. 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式, 试证: 如果 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数, 那么 $f(x)$ 不能有整数根.

加群: 783072579。加群: 783072579。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

客服QQ: 1374599466。购课联系客服, 拉进会员群进行辅导。

教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。

加群: 783072579。加群: 783072579。