1. 判别下面所定义的变换，哪些是线性的，哪些不是：

1）在线性空间 V 中，$\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 是一固定的向量；

2）在线性空间 V 中，$\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 是一固定的向量；

3）在 P^3 中，$\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$；

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。拉进会员群进行辅导。购课联系客服，客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。

4）在 P^3 中，$\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$；

5）在 $P[x]$ 中，$\mathscr{A}f(x)=f(x+1)$；

6）在 $P[x]$ 中，$\mathscr{A}f(x)=f(x_0)$，其中 $x_0\in P$ 是一固定的数；

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。拉进会员群进行辅导。购课联系客服，教师QQ：1374599466。客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。加群：783072579。

7）把复数域看作复数域上的线性空间，$\mathscr{A}\xi=\overline{\xi}$；

8）在 $P^{n\times n}$ 中，$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{BXC}$，其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in P^{n\times n}$ 是两个固定的矩阵.

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
拉进会员群进行辅导。
教师QQ：1374599466。购课联系客服，
客服QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。加群：783072579。加群：783072579。

2. 在几何空间中,取正交坐标系 $Oxyz$. 以 $\mathscr{A}$ 表示将空间绕 Ox 轴由 Oy 向 Oz 方向旋转 $90°$ 的变换,以 $\mathscr{B}$ 表示绕 Oy 轴由 Oz 向 Ox 方向旋转 $90°$ 的变换,以 $\mathscr{C}$ 表示绕 Oz 轴由 Ox 向 Oy 方向旋转 $90°$ 的变换. 证明:

$$\mathscr{A}^4=\mathscr{B}^4=\mathscr{C}^4=\mathscr{E},\ \mathscr{A}\mathscr{B}\neq\mathscr{B}\mathscr{A},\text{但 }\mathscr{A}^2\mathscr{B}^2=\mathscr{B}^2\mathscr{A}^2.$$

并检验 $(\mathscr{A}\mathscr{B})^2=\mathscr{A}^2\mathscr{B}^2$ 是否成立.

加群: 783072579。加群: 783072579。教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。

3. 在 $P[x]$ 中, $\mathscr{A}f(x)=f'(x)$, $\mathscr{B}f(x)=xf(x)$. 证明:

$$\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}.$$

教师QQ: 1374599466。客服QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。加群: 783072579。

4. 设$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$是线性变换，如果$\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}$，证明：

$$\mathscr{A}^k\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}^k=k\mathscr{A}^{k-1},k>1.$$

5. 证明：可逆变换是双射.

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。

6. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是线性空间 V 的一组基，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换，证明：$\mathscr{A}$ 可逆当且仅当 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关.

7. 求下列线性变换在所指定基下的矩阵：

1) 第 1 题 4) 中变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

2) $[O;\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2]$ 是平面上一直角坐标系，$\mathscr{A}$ 是平面上的向量对第一和第三象限角的平分线的垂直投影，$\mathscr{B}$ 是平面上的向量对 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 的垂直投影，求 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{A}\mathscr{B}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵；

加群：783072579。教师QQ：1374599466。客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。

3）在空间 $P[x]_n$ 中，设变换 $\mathscr{A}$ 为 $f(x)\to f(x+1)-f(x)$，求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_0=1,\boldsymbol{\varepsilon}_i=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$下的矩阵；

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。拉进会员群进行辅导。教师QQ：1374599466。购课联系客服，教师QQ：1374599466。客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。

4）六个函数 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=e^{ax}\cos bx,\boldsymbol{\varepsilon}_2=e^{ax}\sin bx,\boldsymbol{\varepsilon}_3=xe^{ax}\cos bx,$
$\boldsymbol{\varepsilon}_4=xe^{ax}\sin bx,\ \boldsymbol{\varepsilon}_5=\dfrac{1}{2}x^2e^{ax}\cos bx,\ \boldsymbol{\varepsilon}_6=\dfrac{1}{2}x^2e^{ax}\sin bx$
的所有实系数线性组合构成实数域上一个六维线性空间，求微分变换 $\mathscr{D}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_i(i=1,2,\cdots,6)$下的矩阵；

5）已知 P^3 中线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,1)$，$\boldsymbol{\eta}_2=(1,0,-1)$，$\boldsymbol{\eta}_3=(0,1,1)$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。拉进会员群进行辅导。
教师QQ：1374599466。购课联系客服，
教师QQ：1374599466。

6）在 P^3 中，$\mathscr{A}$ 定义如下：

$$\begin{cases} \mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_1=(-5,\ \ 0,3), \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_2=(\ \ 0,-1,6), \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_3=(-5,-1,9), \end{cases} \quad \text{其中} \begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1=(-1,\ \ 0,2), \\ \boldsymbol{\eta}_2=(\ \ 0,\ \ 1,1), \\ \boldsymbol{\eta}_3=(\ \ 3,-1,0), \end{cases}$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。教师QQ：1374599466。

7）同上，求$\mathscr{A}$在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵.

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
加群：783072579。加群：783072579。

8. 在 $P^{2\times 2}$ 中定义线性变换

$$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\boldsymbol{X},\ \mathscr{A}_2(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ \mathscr{A}_3(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

求 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵.

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。拉进会员群进行辅导。客服QQ：1374599466。购课联系客服，教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。

9. 设三维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

1）求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 下的矩阵；

2）求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,k\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵，其中 $k\in P$ 且 $k\neq 0$；

3）求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵.

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。拉进会员群进行辅导。教师QQ：1374599466。购课联系客服，客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。

10. 设$\mathscr{A}$是线性空间 V 上的线性变换,如果$\mathscr{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$,但$\mathscr{A}^{k}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$,求证$\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}\boldsymbol{\xi},\cdots,\mathscr{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi}(k>0)$线性无关.

11. 在 n 维线性空间中,设有线性变换$\mathscr{A}$与向量$\boldsymbol{\xi}$,使得$\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$,但$\mathscr{A}^{n}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$. 求证$\mathscr{A}$在某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。

12. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间. 证明:V 的与全体线性变换可以交换的线性变换是数乘变换.

加群: 783072579。加群: 783072579。教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。拉进会员群进行辅导。

13. $\mathscr{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换. 证明:如果 $\mathscr{A}$ 在任意一组基下的矩阵都相同,那么 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

教师QQ: 1374599466。购课联系客服,客服QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。加群: 783072579。加群: 783072579。

14. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 是四维线性空间 V 的一组基,已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1）求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\eta}_2=3\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$, $\boldsymbol{\eta}_4=2\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的矩阵;

2）求 $\mathscr{A}$ 的核与值域;

加群：783072579。教师QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。客服QQ：1374599466。

3）在$\mathscr{A}$的核中选一组基，把它扩充成V的一组基，并求$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵；

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。拉进会员群进行辅导。购课联系客服，客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。

4）在$\mathscr{A}$的值域中选一组基，把它扩充成V的一组基，并求$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵.

15. 给定 P^3 的两组基

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_1 &= (1,0,1), & \boldsymbol{\eta}_1 &= (1,2,-1),\\
\boldsymbol{\varepsilon}_2 &= (2,1,0), & \boldsymbol{\eta}_2 &= (2,2,-1),\\
\boldsymbol{\varepsilon}_3 &= (1,1,1), & \boldsymbol{\eta}_3 &= (2,-1,-1).
\end{aligned}$$

$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\eta}_i, \quad i = 1,2,3.$

1）写出由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵；

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。
客服QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
加群：783072579。

2）写出$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵；

3）写出$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵.

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
拉进会员群进行辅导。
教师QQ：1374599466。购课联系客服，
客服QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
加群：783072579。加群：783072579。

16. 证明：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

相似，其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

加群：783072579。教师QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。

17. 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。

18. 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似,证明:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$相似.

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
加群：783072579。加群：783072579。

19. 求复数域上线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量,已知 $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵为:

1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$;

2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$;

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
购课联系客服，拉进会员群进行辅导。
客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。加群：783072579。

3）$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

4）$A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$;

5）$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。
拉进会员群进行辅导。
教师QQ：1374599466。
客服QQ：1374599466。购课联系客服，
教师QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。
加群：783072579。

6) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
购课联系客服，拉进会员群进行辅导。

7) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

客服QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
加群：783072579。加群：783072579。

20. 在上题中哪些变换的矩阵可以在适当的基下化成对角形？在可以化成对角形的情况，写出相应的基变换的过渡矩阵 $\boldsymbol{T}$，并验算 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$.

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。
客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。加群：783072579。
加群：783072579。

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
加群：783072579。加群：783072579。

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
加群：783072579。加群：783072579。

21. 在 $P[x]_n(n>1)$ 中,求微分变换$\mathscr{D}$的特征多项式,并证明$\mathscr{D}$在任何一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵.

22. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix},$$ 求 A^k.

加群：783072579。加群：783072579。 教师QQ：1374599466。 教师QQ：1374599466。 拉进会员群进行辅导。 购课联系客服， 客服QQ：1374599466。 教师QQ：1374599466。 教师QQ：1374599466。 加群：783072579。

23. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 是四维线性空间 V 的一组基，线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ -10 & 3 & 11 & -7 \end{pmatrix}.$$

1）求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$,

$\boldsymbol{\eta}_2=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$, $\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_3$, $\boldsymbol{\eta}_4=\boldsymbol{\varepsilon}_4$

下的矩阵；

加群：783072579。教师QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。客服QQ：1374599466。

2）求$\mathscr{A}$的特征值与特征向量；

3）求一可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 成对角形.

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
购课联系客服，拉进会员群进行辅导。
客服QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
加群：783072579。加群：783072579。

24.1）设 λ_1,λ_2 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的两个不同特征值，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 是分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，证明：$\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 不是 $\mathscr{A}$ 的特征向量；

2）证明：如果线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 以 V 中每个非零向量作为它的特征向量，那么 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
拉进会员群进行辅导。
教师QQ：1374599466。购课联系客服，
客服QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
加群：783072579。

25. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是 V 的线性变换，且 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$. 证明：

1）如果 λ_0 是 $\mathscr{A}$ 的一特征值，那么 V_{λ_0} 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间；

2）$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 至少有一个公共的特征向量.

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。

26. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间,而线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是一若尔当块. 证明:

1) V 中包含 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 的 $\mathscr{A}$-子空间只有 V 自身;

2) V 中任一非零 $\mathscr{A}$-子空间都包含 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$;

3) V 不能分解成两个非平凡的 $\mathscr{A}$-子空间的直和.

加群: 783072579。加群: 783072579。教师QQ: 1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。教师QQ: 1374599466。客服QQ: 1374599466。教师QQ: 1374599466。加群: 783072579。

27. 求下列矩阵的最小多项式：

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。

2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。加群：783072579。

1. 设$\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$是线性变换,$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$,$\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$. 证明:

1）如果$(\mathscr{A}+\mathscr{B})^2=\mathscr{A}+\mathscr{B}$,那么$\mathscr{A}\mathscr{B}=0$;

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
拉进会员群进行辅导。

2）如果$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$,那么$(\mathscr{A}+\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B})^2=\mathscr{A}+\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B}$.

教师QQ：1374599466。购课联系客服，
客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。加群：783072579。
加群：783072579。

2. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间. 证明：由 V 的全体线性变换组成的线性空间是 n^2 维的.

3. 设 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换. 证明：

1) 在 $P[x]$ 中有一次数 $\leqslant n^2$ 的多项式 $f(x)$，使 $f(\mathscr{A})=0$；

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。
拉进会员群进行辅导。
教师QQ：1374599466。购课联系客服，
教师QQ：1374599466。
客服QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。
加群：783072579。加群：783072579。

2）如果$f(\mathscr{A})=0$，$g(\mathscr{A})=0$，那么$d(\mathscr{A})=0$，这里$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式；

3）$\mathscr{A}$可逆的充分必要条件是，有一常数项不为零的多项式$f(x)$使$f(\mathscr{A})=0$.

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。

4. 设$\mathscr{A}$是线性空间 V 上的可逆线性变换.

1）证明：$\mathscr{A}$的特征值一定不为 0；

2）证明：如果 λ 是$\mathscr{A}$的特征值，那么$\frac{1}{\lambda}$是$\mathscr{A}^{-1}$的特征值.

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。
拉进会员群进行辅导。
教师QQ：1374599466。购课联系客服，
教师QQ：1374599466。
客服QQ：1374599466。
教师QQ：1374599466。加群：783072579。

5. 设$\mathscr{A}$是线性空间 V 上的线性变换，证明：$\mathscr{A}$的行列式为零的充分必要条件是$\mathscr{A}$以零作为一个特征值.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一 n 级下三角形矩阵，证明：

1）如果 $a_{ii}\neq a_{jj}$ 当 $i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$，那么 $\boldsymbol{A}$ 相似于一对角矩阵；

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。

2）如果 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，而至少有一 $a_{i_0j_0}\neq 0(i_0>j_0)$，那么 $\boldsymbol{A}$ 不与对角矩阵相似.

7. 证明：对任一 $n\times n$ 复系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 是上三角形矩阵.

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。拉进会员群进行辅导。购课联系客服，客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。

8. 证明：如果$\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_s$是线性空间$V$的$s$个两两不同的线性变换，那么在$V$中必存在向量$\boldsymbol{\alpha}$，使$\mathscr{A}_1\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}_2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\mathscr{A}_s\boldsymbol{\alpha}$也两两不同.

加群：783072579。加群：783072579。教师QQ：1374599466。拉进会员群进行辅导。教师QQ：1374599466。购课联系客服，客服QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。加群：783072579。

9. 设$\mathscr{A}$是有限维线性空间V的线性变换，W是V的子空间，$\mathscr{A}W$表示由W中向量的像组成的子空间. 证明：

维$(\mathscr{A}W)$ + 维$(\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\cap W)$ = 维(W).

10. 设$\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$是 n 维线性空间 V 的两个线性变换. 证明：

$\mathscr{A}\mathscr{B}$的秩$\geqslant\mathscr{A}$的秩$+\mathscr{B}$的秩$-n$.

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
拉进会员群进行辅导。
客服QQ：1374599466。购课联系客服，
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
加群：783072579。加群：783072579。

11. 设$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$,$\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$. 证明：

2）$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$有相同的核的充分必要条件是$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{A}$，$\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{B}$.

加群：783072579。加群：783072579。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
客服QQ：1374599466。购课联系客服，拉进会员群进行辅导。
教师QQ：1374599466。教师QQ：1374599466。
加群：783072579。加群：783072579。