1.（Ⅰ）用非退化线性替换化下列二次型为标准形，并利用矩阵验算所得结果：

1） $-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$；

2）$x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$；

3） $x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$；

4）$8x_1x_4+2x_3x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$；

5）$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$；

6） $x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$；

7） $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$.

（Ⅱ）把上述二次型进一步化为规范形，分实系数、复系数两种情形；并写出所作的非退化线性替换.

2. 证明:秩等于 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

3. 证明:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

合同,其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 级矩阵,证明:

1) $\boldsymbol{A}$ 是反称矩阵当且仅当对任一个 n 维向量 $\boldsymbol{X}$,有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$;

2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵,且对任一个 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$,那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

5. 如果把实 n 级对称矩阵按合同分类,即两个实 n 级对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同,问共有几类?

6. 证明:一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是,它的秩等于 2 和符号差等于 0,或者秩等于 1.

7. 判别下列二次型是否正定：

1）$99x_1^2-12x_1x_2+48x_1x_3+130x_2^2-60x_2x_3+71x_3^2$；

2）$10x_1^2+8x_1x_2+24x_1x_3+2x_2^2-28x_2x_3+x_3^2$；

3） $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$；

4） $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$.

8. t 取什么值时，下列二次型是正定的：

1）$x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$；

2）$x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$.

9. 证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，那么 $\boldsymbol{A}$ 的主子式全大于零.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵. 证明:当实数 t 充分大之后,$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

11. 证明:如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定矩阵.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 级实对称矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|<0$,证明:必存在实 n 维向量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 使 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<0$.

13. 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 级正定矩阵,证明:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

14. 证明:二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是半正定的充分必要条件是它的正惯性指数与秩相等.

15. 证明:$n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2$ 是半正定的.

16. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是一实二次型. 已知有实 n 维向量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 使 $\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1>0,\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2<0$,

证明:必存在实 n 维向量 $\boldsymbol{X}_0\neq\boldsymbol{0}$ 使 $\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=0$.

17. $\boldsymbol{A}$ 是一个实矩阵,证明:秩$(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{A})$.

1. 用非退化线性替换化下列二次型为标准形，并用矩阵验算所得结果：

1) $x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}$;

2） $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$；

3） $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$；

4） $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$，其中 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

2. 设实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$，证明：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩等于矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$的秩.

3. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - \cdots - l_{p+q}^2$，其中 $l_i(i=1,2,\cdots,p+q)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一次齐次式. 证明：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的正惯性指数 $\leqslant p$，负惯性指数 $\leqslant q$.

4. 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 是一对称矩阵，且 $|A_{11}|\neq 0$，证明：存在 $T=\begin{pmatrix} E & X \\ O & E \end{pmatrix}$ 使 $T'AT=\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & * \end{pmatrix}$，

其中 * 表示一个级数与 A_{22} 相同的矩阵.

5. 设 A 是反称矩阵，证明：A 合同于矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵,证明:存在一正实数 c 使对任一个实 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 都有 $\left|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\right| \leqslant c\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$.

7. 主对角线上全是 1 的上三角形矩阵称为特殊上三角形矩阵.

1）设 $\boldsymbol{A}$ 是一对称矩阵，$\boldsymbol{T}$ 为特殊上三角形矩阵，而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应顺序主子式有相同的值；

2）证明：如果对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全不为 0，那么一定有一特殊上三角形矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 成对角形；

3）利用以上结果证明定理 7 的充分性.

8. 证明：

1）如果 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\,(a_{ij}=a_{ji})$ 是正定二次型，那么

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型；

2）如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，那么

$$|\boldsymbol{A}|\leqslant a_{nn}H_{n-1},$$

这里 H_{n-1} 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 级的顺序主子式；

3）如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，那么

$$|\boldsymbol{A}|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

4）如果 $\boldsymbol{T}=(t_{ij})$ 是 n 级实可逆矩阵，那么

$$|\boldsymbol{T}|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+\cdots+t_{ni}^2).$$

9. 证明:实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的一切主子式全大于或等于零.