1. 设 $M \subset N$，证明：

$$M \cap N = M, M \cup N = N.$$

2. 证明：

$$M \cap (N \cup L) = (M \cap N) \cup (M \cap L),$$
$$M \cup (N \cap L) = (M \cup N) \cap (M \cup L).$$

3. 检验以下集合对于所指的线性运算是否构成实数域上的线性空间：

1）次数等于 $n(n\geqslant 1)$ 的实系数多项式的全体，对于多项式的加法和数量乘法；

2）设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的实系数多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 的全体，对于矩阵的加法和数量乘法；

3）全体 n 级实对称（反称，上三角形）矩阵，对于矩阵的加法和数量乘法；

4）平面上不平行于某一向量的全部向量所成的集合，对于向量的加法和数量乘法；

5）全体实数的二元数列，对于下面定义的运算①：

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2),$$

$$k\circ(a_1,b_1)=\left(ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right);$$

6）平面上全体向量，对于通常的加法和如下定义的数量乘法：

$$k\circ\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0};$$

7）集合与加法同 6），数量乘法定义为

$$k \circ \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha};$$

8）全体正实数 $\mathbf{R}^+$，加法与数量乘法定义为

$$a \oplus b = ab,$$

$$k \circ a = a^k.$$

4. 在线性空间中,证明:

1) $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$;

2) $k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{\beta}$.

5. 证明:在实函数空间中,$1,\cos^2 t,\cos 2t$ 是线性相关的.

6. 证明：如果 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 是线性空间 $P[x]$ 中三个互素的多项式，但其中任意两个都不互素，那么它们线性无关.

7. 在 P^4 中，求向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标，设

1) $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,1,1)$, $\quad\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,1,-1,-1)$,

$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,-1,1,-1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_4=(1,-1,-1,1)$,

$\boldsymbol{\xi}=(1,2,1,1)$;

2） $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,0,1)$，　$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(2,1,3,1)$，

$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,0,0)$，　$\boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,1,-1,-1)$，

$\boldsymbol{\xi}=(0,0,0,1)$.

8. 求下列线性空间的维数与一组基：

1）数域 P 上的空间 $P^{n\times n}$；

2）$P^{n\times n}$ 中全体对称（反称，上三角形）矩阵作成的数域 P 上的空间；

3）第 3 题 8）中的空间；

4）实数域上由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的空间，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix},\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}.$$

9. 在 P^4 中，求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵，并求向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在所指基下的坐标. 设

1) $\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1),\end{cases}\qquad \begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,-1,1),\\ \boldsymbol{\eta}_2=(0,3,1,0),\\ \boldsymbol{\eta}_3=(5,3,2,1),\\ \boldsymbol{\eta}_4=(6,6,1,3),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标；

2) $\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,2,-1,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,-1,1,1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(-1,2,1,1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=(-1,-1,0,1),\end{cases}\qquad \begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,0,1),\\ \boldsymbol{\eta}_2=(0,1,2,2),\\ \boldsymbol{\eta}_3=(-2,1,1,2),\\ \boldsymbol{\eta}_4=(1,3,1,2),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标；

3) $\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,\ 1,-1,-1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,-1,\ 1,-1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=(1,-1,-1,\ 1),\end{cases}\quad \begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,\ 0,\ 1),\\ \boldsymbol{\eta}_2=(2,1,\ 3,\ 1),\\ \boldsymbol{\eta}_3=(1,1,\ 0,\ 0),\\ \boldsymbol{\eta}_4=(0,1,-1,-1),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,-1)$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标.

10. 继第 9 题 1)，求一非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，它在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下有相同的坐标.

11. 证明：实数域作为它自身上的线性空间与第 3 题 8) 中的空间同构.

12. 设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间，且 $V_1 \subset V_2$，证明：如果 V_1 的维数和 V_2 的维数相等，那么 $V_1 = V_2$.

13. 设 $\boldsymbol{A} \in P^{n \times n}$：

1）证明：全体与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵组成 $P^{n \times n}$ 的一子空间，记作 $C(\boldsymbol{A})$；

2）当 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ 时，求 $C(\boldsymbol{A})$；

3）当

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

时，求 $C(\boldsymbol{A})$ 的维数和一组基.

14. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix},$$

求 $P^{3\times 3}$ 中全体与 A 可交换的矩阵所成子空间的维数和一组基.

15. 如果 $c_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\boldsymbol{\beta}+c_3\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$,且 $c_1c_3\neq 0$,证明:$L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=L(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

16. 在 P^4 中，求由向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3,4)$ 生成的子空间的基与维数. 设

1) $\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,1), \\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,1), \\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,-3,0), \\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,1,1); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,-1), \\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-3,1), \\ \boldsymbol{\alpha}_3=(4,5,3,-1), \\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,5,-3,1). \end{cases}$

17. 在 P^4 中,求由齐次方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0,\\3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0,\\3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0\end{cases}$$

确定的解空间的基与维数.

18. 求由向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 生成的子空间与由向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 生成的子空间的交的基和维数. 设

1) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0),\\\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,0,1),\\\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,3,7);\end{cases}$

2) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(0,0,1,1),\\ \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,1,0);\end{cases}$

3) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,-2),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(3,1,1,1),\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1,-1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2,5,-6,-5),\\ \boldsymbol{\beta}_2=(-1,2,-7,3).\end{cases}$

19. 设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间，证明：$P^n=V_1\oplus V_2$.

20. 证明：如果 $V=V_1\oplus V_2$，$V_1=V_{11}\oplus V_{12}$，那么 $V=V_{11}\oplus V_{12}\oplus V_2$.

21. 证明:每一个 n 维线性空间都可以表示成 n 个一维子空间的直和.

22. 证明:和 $\sum_{i=1}^{s} V_i$ 是直和的充分必要条件是

$$V_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} V_j = \{\mathbf{0}\} \qquad (i = 2, \cdots, s).$$

23. 在给定了空间直角坐标系的三维空间中,所有自原点引出的向量添上零向量构成一个三维线性空间 $\mathbf{R}^3$.

1) 问所有终点都在一个平面上的向量是否为子空间?

2) 设有过原点的三条直线,这三条直线上的全部向量分别成为三个子空间 L_1, L_2, L_3. 问 $L_1+L_2, L_1+L_2+L_3$ 能构成哪些类型的子空间,试全部列举出来.

3) 就用几何空间的例子来说明:若 U, V, X, Y 是子空间,满足 $U+V=X, X\supset Y$,是否一定有 $Y=Y\cap U+Y\cap V$.

1. 1）证明：在 $P[x]_n$ 中，多项式

$$f_i=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

是一组基，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的数；

2）在 1）中，取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是全体 n 次单位根，求由基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，$\boldsymbol{A}$ 是一 $n\times s$ 矩阵，

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}.$$

证明：$L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$ 的维数等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

3. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$是一秩为 n 的二次型，证明：存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个

$$\frac{1}{2}(n-|s|)$$

维子空间 V_1（其中 s 为符号差数），使对任一$(x_1,\cdots,x_n)\in V_1$ 有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.

4. 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个非平凡的子空间，证明：在 V 中存在 $\boldsymbol{\alpha}$ 使 $\boldsymbol{\alpha}\overline{\in} V_1,\boldsymbol{\alpha}\overline{\in} V_2$ 同时成立.

5. 设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的 s 个非平凡的子空间，证明：V 中至少有一向量不属于 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 中任何一个.