1. 设

1) $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

计算 AB, $AB-BA$.

2) $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&a&c\\1&b&b\\1&c&a\end{pmatrix}$

计算 AB, $AB-BA$.

2. 计算：

1） $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$

2） $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$

3） $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

4） $$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$$

5) $(2,3,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}(2,3,-1)$

6) $(x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^n$

8) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

3. 设 $f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m$，$\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，定义

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_m\boldsymbol{E}.$$

1) $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$

2) $f(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+3$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$

试求 $f(\boldsymbol{A})$.

4. 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就称为与 $\boldsymbol{A}$ **可交换**. 设

1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

分别求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

2） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

分别求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

3） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

分别求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

5. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

其中 $a_i \neq a_j$ 当 $i \neq j(i,j=1,2,\cdots,n)$. 证明:与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

6. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1E_1 & & & O \\ & a_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_rE_r \end{pmatrix}$$

其中 $a_i \neq a_j$ 当 $i\neq j(i,j=1,2,\cdots,r)$,E_i 是 n_i 级单位矩阵，$\sum\limits_{i=1}^{r} n_i=n$. 证明:与 A 可交换的矩阵只能是准对角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_r \end{pmatrix}$$

其中 A_i 是 n_i 级矩阵$(i=1,\cdots,r)$.

7. 用 $\boldsymbol{E}_{ij}$表示 i 行 j 列的元素为 1，而其余元素全为零的 $n\times n$ 矩阵，而 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$. 证明：

1）如果 $\boldsymbol{AE}_{12}=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}$，那么当 $k\neq 1$ 时 $a_{k1}=0$，当 $k\neq 2$ 时 $a_{2k}=0$；

2）如果 $\boldsymbol{AE}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$，那么当 $k\neq i$ 时 $a_{ki}=0$，当 $k\neq j$ 时 $a_{jk}=0$，且 $a_{ii}=a_{jj}$；

3）如果 $\boldsymbol{A}$ 与所有的 n 级矩阵可交换，那么 $\boldsymbol{A}$ 一定是数量矩阵，即 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{E}$.

8. 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}, \boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，证明：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{A}$.

9. 如果 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$，证明：$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 当且仅当 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$.

10. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为对称的，如果 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$. 证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

11. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n\times n$ 的对称矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 也对称当且仅当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换.

12. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为反称的，如果 $\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A}$. 证明：任一 $n\times n$ 矩阵都可表为一对称矩阵与一反称矩阵之和.

13. 设 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, k = 0, 1, 2, \cdots; a_{ij} = s_{i+j-2}, i, j = 1, 2, \cdots, n.$ 证明：

$$\left| a_{ij} \right| = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2.$$

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵，证明：存在一个 $n \times n$ 非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $\left| \boldsymbol{A} \right| = 0.$

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵,如果对任一 n 维向量 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 都有 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$,那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

16. 设 $\boldsymbol{B}$ 为一 $r\times r$ 矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为一 $r\times n$ 矩阵,且秩$(\boldsymbol{C})=r$. 证明:

1) 如果 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}$,那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;

2) 如果 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{C}$,那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

17. 证明：

$$\text{秩}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant \text{秩}(\boldsymbol{A})+\text{秩}(\boldsymbol{B}).$$

18. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n\times n$ 矩阵. 证明：如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，那么

$$\text{秩}(\boldsymbol{A})+\text{秩}(\boldsymbol{B}) \leqslant n.$$

19. 证明：如果 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，那么

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}.$$

20. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，设

1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad-bc=1$

2） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

3） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

4） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{pmatrix}$

5） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

6） $A=\begin{pmatrix}3&3&-4&-3\\0&6&1&1\\5&4&2&1\\2&3&3&2\end{pmatrix}$

7） $A=\begin{pmatrix}1&3&-5&7\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

8） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \\ -1 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

9） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

10） $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

21. 设

$X=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$已知 $\boldsymbol{A}^{-1}$,$\boldsymbol{C}^{-1}$存在,求 $\boldsymbol{X}^{-1}$.

22. 设

$$X=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

23. 求矩阵 $\boldsymbol{X}$,设

1） $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_n \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}_n$$

4） $$X\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

24. 证明：

1）如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆对称（反称），那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也对称（反称）

2）不存在奇数级的可逆反称矩阵.

25. 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 称为上(下)三角形矩阵，如果 $i>j(i<j)$ 时有 $a_{ij}=0$

证明：

1) 两个上(下)三角形矩阵的乘积仍是上(下)三角形矩阵；

2) 可逆的上(下)三角形矩阵的逆仍是上(下)三角形矩阵.

26. 证明：

$|A^*| = |A|^{n-1}$，其中 A 是 $n\times n$ 矩阵（$n\geqslant 2$）.

27. 证明:如果 A 是 $n\times n$ 矩阵($n\geqslant 2$),那么

$$
\text{秩}(A^*)=\begin{cases} n, & \text{当秩}(A)=n, \\ 1, & \text{当秩}(A)=n-1, \\ 0, & \text{当秩}(A)<n-1. \end{cases}
$$

28. 用两种方法求

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

的逆矩阵：

1）用初等变换；

2）按 A 中的划分，利用分块乘法的初等变换.（注意各小块矩阵的特点.）

29. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别是 $n \times m$ 和 $m \times n$ 矩阵. 证明:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = |\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|$$

30. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 如上题, $\lambda \neq 0$. 证明

$$|\lambda \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = \lambda^{n-m} |\lambda \boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|.$$

1. 设 A 是一个 $n\times n$ 矩阵,秩$(A)=1$. 证明:

1) $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$;

2) $A^2=kA$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2×2 矩阵,证明:如果 $\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{O}$,$l\geqslant2$,那么 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵,证明:如果 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,那么

秩$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$ + 秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$. 证明:

$$\text{秩}(\boldsymbol{A})+\text{秩}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n.$$

5. 证明:

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵($n>2$).

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 $n\times n$ 矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0,\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$. 证明:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|.$$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一 $n\times n$ 矩阵,且秩$(\boldsymbol{A})=r$. 证明:存在一 $n\times n$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{PAP}^{-1}$的后 $n-r$ 行全为零.

8. 1）把矩阵 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ 表成形式为 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$

（1） 的矩阵的乘积；

2）设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

为一复数矩阵，$|A| = 1$，证明：A 可以表成形式为（1）的矩阵的乘积.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一 $n\times n$ 矩阵，$|\boldsymbol{A}|=1$，证明：$\boldsymbol{A}$ 可以表成 $\boldsymbol{P}(i,j(k))$ 这一类初等矩阵的乘积.

10. 设 $A=(a_{ij})_{sn}, B=(b_{ij})_{nm}$.
证明：秩$(AB)\geqslant$秩(A)+秩$(B)-n$.

11. 矩阵的列(行)向量组如果是线性无关的,就称该矩阵为列(行)满秩的. 证明:设 A 是 $m\times r$ 矩阵,则 A 是列满秩的充分必要条件为存在 $m\times m$ 可逆阵 P 使 $A=P\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}$

同样地,A 为行满秩的充分必要条件为存在 $r\times r$ 可逆矩阵 Q 使 $A=(E_m\quad O)Q$.

12. 证明:设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,则有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQ}$.