第 10 章　无穷级数

（本章数二不作要求）

基础知识与规律总结

10.1　数项级数

QQ: 81321659

一、级数的概念

1. 常数项级数的收敛和发散

定义 1　设有数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为（常数项）无穷级数，简称（常数项）级数，其中 u_n 称为级数的一般项或通项.

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和或前 n 项和，$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$ 称为 n 项余和.

注　由 $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \cdots, S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots$ 可知 $\{S_n\}$ 也是一个数列，根据 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 是否存在，有级数收敛和发散的概念.

定义 2　若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$（有限数），则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，s 为其和，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$；若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

注　当 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 难以判断时，也可判断 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}$ 是否同时存在并且相等，若存在且相等，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在.

【例 10.1】 判别下列级数的敛散性，收敛时求其和.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

【解】 (1) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - 1)$ 不存在.

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 发散.

(2) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$，

则 $S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\to 1(n\to\infty)$，

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，且和为 1.

【例 10.2】判断调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 的敛散性.

【解】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$

$$\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\to\infty,$$

所以可得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 发散.

【例 10.3】判断级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$ 的敛散性，若收敛，则求其和.

【解】因为该级数的前 $2n$ 项和与前 $2n+1$ 项和分别为

$$S_{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\cdot 3^n},$$

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2\cdot 3^n},$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\frac{3}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}$，故原级数收敛，且其和为 $\frac{3}{2}$.

2. 数项级数的基本性质

性质 1　设 $C\neq 0$ 为常数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Cu_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 具有相同的敛散性.

注　若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，其和为 s，则当 $C\neq 0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}Cu_n$ 也收敛，且其和为 Cs.

性质 2　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=s,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sigma$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=s\pm\sigma$；

(i) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 发散；

(ii) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 的敛散性要具体分析.

如，$u_n=n,v_n=-n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=0$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散.

【例 10.4】已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

【解】$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2\times5-2=8.$

注 因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$，

所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\right)$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\right)$.

性质3 设有一个级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，对其添加或去掉有限项，不影响其敛散性；若收敛，其和可能改变.

【例10.5】若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$收敛　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛

【解】由级数的性质3，若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$也收敛，故可知选(D).

性质4 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则对其各项任意加括号后所得新级数也收敛，其和不变.

推论：(i) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$对其各项加括号后所得级数发散，则原级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

(ii) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$对其各项加括号后所得级数收敛，则原级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性不确定，要作具体分析.

如，级数$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$收敛于零，但级数$1-1+1-1+1-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$是发散的.

3. 级数收敛的必要条件

级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要条件：$\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

注 必要条件的应用：判别级数发散，即$n\to\infty$，$u_n\not\to0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

如，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-n+1}{3n^2+2n+5}$，$u_n\to\frac{2}{3}(n\to\infty)$，则级数发散.

级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left[1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]$，$u_n=n^2\left[1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}\sim\dfrac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^2}}\to\frac{1}{2}(n\to\infty)$，

则该级数发散.

但是注意是必要条件，即当$\lim_{n\to\infty}u_n=0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$未必收敛，如调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$是发散的.

二、正项级数收敛性的判别

1. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geqslant 0$ 及其判别法

定理 正项级数收敛的充分必要条件是其部分和数列有界.

(1) 比较判别法.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数,对于常数 $C > 0$,恒有 $u_n \leqslant C v_n$,则

(i) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(ii) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

简言之,正项级数小于收敛级数必收敛;正项级数大于发散级数必发散.

注 ① 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项收敛级数,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$ 收敛.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \Rightarrow$ 对 $\varepsilon = 1$,存在 N,当 $n > N$ 时,$0 < u_n < 1 \Rightarrow 0 < u_n{}^2 < u_n < 1$,所以由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$ 收敛.

但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$ 收敛,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 未必收敛.如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散.

② 正项这个条件不能少.

如,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛,$-1 < \dfrac{1}{n^2}$,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)$ 发散.

【例 10.6】 下列各选项正确的是

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 均收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛.

(C) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则 $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,且 $u_n \geqslant v_n (n = 1, 2, \cdots)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.

【解】 因为 $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n \leqslant u_n^2 + v_n^2 + (u_n^2 + v_n^2) = 2(u_n^2 + v_n^2)$,

所以若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 均收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛.故选(A).

(2) 比较判别法的极限形式.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数,且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A$,

(i) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,$0 \leqslant A < +\infty$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(ii) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散,$0 < A \leqslant +\infty$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

QQ: 81321659

常用的比较级数：

(i) 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$.

当 $|r|<1$ 时，级数收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-r}$；当 $|r|\geqslant 1$ 时，级数发散.

(ii) p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}=1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}+\cdots$.

当 $p>1$ 时，级数收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，级数发散.

(3) 比值判别法.

设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则当 $\rho<1$ 时，级数收敛；当 $\rho>1$ 时，级数发散；当 $\rho=1$ 时，方法失效.

注 ① 适用于通项 u_n 中含有 $n!$ 或关于 n 的若干因子连乘积的形式.

② 这是充分条件，不必要，即级数收敛，$\rho<1$ 不一定成立.

如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}+\cdots$ 收敛，但

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3^{n+1}}}{\dfrac{1}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2^{n+1}}}{\dfrac{1}{3^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\infty,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在.

(4) 根值判别法.

设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则当 $\rho<1$ 时，级数收敛；当 $\rho>1$ 时，级数发散；当 $\rho=1$ 时，方法失效.

注 根值法适用于 u_n 中含有以 n 为指数幂的因子的情形.

2. 正项级数判敛的程序

(1) 先根据级数收敛的必要条件判定 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是否成立？不成立则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

(2) 若成立，根据通项 u_n 的特点选择比值法或根值法判别；

(3) 当 $\rho=1$ 时，先用比较法的极限形式，再用一般形式判敛.

【例 10.7】 判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}(a,b>0)$；

QQ: 81321659

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}$；　　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}$.

【解】(1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n\cdot\sqrt[n]{n}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n}=1\neq 0$,

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$ 发散.

(2) 用比值判别法.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots[(n+1)a+1]}{(b+1)(2b+1)\cdots[(n+1)b+1]}\cdot\frac{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a+1}{(n+1)b+1}=\frac{a}{b}.$$

所以当 $\dfrac{a}{b}<1$，即 $a<b$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

当 $\dfrac{a}{b}>1$，即 $a>b$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

当 $\dfrac{a}{b}=1$，即 $a=b$ 时，级数 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

故当 $a<b$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $a\geqslant b$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(3) 用比值判别法.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(4) 用根值判别法.

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt[n]{n})^2}{2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}<1$，故原级数收敛.

(5) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho=1$，所以用比较判别法(极限形式).

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}}{n^p}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}-p}}$，当 $p<\dfrac{4}{3}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}-p}}=0$，

取 $p=\dfrac{7}{6}$，因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛.

三、交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，$(u_n>0)$ 与莱布尼茨定理

定理　(莱布尼茨交错级数判别准则)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，$(u_n>0)$，若满足条件：

(i) $u_n \geqslant u_{n+1}$, $(n=1,2,\cdots)$，即 u_n 单调减少；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，

则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，其和 $s \leqslant u_1$，其 n 项余和的绝对值 $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

注 使用莱布尼茨判别法判别交错级数是否收敛时，必须验证两个条件：① 是验证 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，一般较为容易；② 是验证 $u_{n+1} \leqslant u_n$，$(n=1,2,\cdots)$，有时较为困难，常用以下三种方法：

(i) 比值法，考查 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 是否小于 1；

(ii) 差值法：考查 $u_n - u_{n+1}$ 是否大于零；

(iii) 考查函数 u_x（将 n 换成 x）对 x 的导数是否小于零.

如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n}$，$u_n = \dfrac{n+1}{n} \geqslant 0$，单调减少，但 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$，所以不能利用莱布尼茨定理.

【例 10.8】 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(1+n)}{1+n}$ 的敛散性.

【解】 由 $u_n = \dfrac{\ln(1+n)}{1+n}$ 联想到函数 $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

因为 $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x}(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} < 0$（当 x 取足够大的正数时），

所以 $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ 单调减少，于是存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $u_n \geqslant u_{n+1}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{1+n} = 0$，

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(1+n)}{1+n}$ 收敛.

【例 10.9】 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由.

【解】 由于正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，即 $a_n \geqslant 0$ 且 $\{a_n\}$ 单调减少，所以根据数列单调减少有下界知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，记为 a，且 $a \geqslant 0$，又根据 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，知 $a>0$.

这个结论可用反证法证明：

如果 $a=0$，则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，这与题设矛盾，所以必有 $a>0$.

而 $a_n > a \Rightarrow a_n + 1 > a + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+a_n} < \dfrac{1}{1+a}$，$n=1,2,\cdots$，

于是 $\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n < \left(\dfrac{1}{1+a}\right)^n$，$n=1,2,\cdots$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a}\right)^n$ 收敛（几何级数且 $\dfrac{1}{1+a}<1$），

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

四、任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$（u_n 可正、可负、可为 0）的绝对收敛和条件收敛

1. 基本概念和定理

定义 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 称为绝对收敛级数；若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为条件收敛级数.

定理 1 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛.

注 逆命题不成立. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 不一定收敛. 如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

定理 2 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则其所有正项和负项各自构成的两个级数一定是发散的.

如，$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ 均发散.

注 用比值法判别 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散.

常用的条件收敛级数：

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$，$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ 等.

2. 任意项级数判敛的程序

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 为任意项级数}}$

↓

$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$ $\xrightarrow{\text{非}}$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}}$

↓

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 用正项级数判别法判别}}$ $\xrightarrow{\text{收敛}}$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛}}$

↓ 发散

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 用莱布尼茨判别准则或} \lim_{n\to\infty} S_{2n}, \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}}$ $\xrightarrow{\text{收敛}}$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 条件收敛}}$

↓ 发散

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}}$

QQ:813216559

【例 10.10】设常数 $\lambda>0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性与 λ 有关

【解】$|u_n|=\left|(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|=\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}<\dfrac{|a_n|}{n}<\dfrac{1}{2}\left(a_n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 都收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，故选(C).

【例 10.11】判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\ln n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^p}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

【解】(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{\ln n}\right|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ 发散，故原级数不绝对收敛.

原级数为交错级数，因为 $u_{n+1}=\dfrac{1}{\ln(n+1)}<\dfrac{1}{\ln n}=u_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}=0$，

所以原级数满足莱布尼茨准则的条件，故原级数条件收敛.

(2) 对参数 p 进行讨论，令 $u_n=\dfrac{1}{n^p}$，

① 当 $p<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$，故原级数发散；

② 当 $p=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$，故原级数也发散；

③ 当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{n^p}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散，但

$u_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^p}<\dfrac{1}{n^p}=u_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p}=0$，

所以该级数满足莱布尼茨判别准则的条件，故原级数为条件收敛；

④ 当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{n^p}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，故原级数为绝对收敛.

(3) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$，$\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$ 发散，故原级数不绝对收敛.

又原级数不满足莱布尼茨判定准则中单调性的条件，但

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n\left[\sqrt{n}-(-1)^n\right]}{n-1}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1},$$

而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ 发散，所以根据级数性质知，原级数发散.

QQ: 81321659

10.2 幂级数

一、函数项级数

1. 定义

设 $u_n(x), n=1,2,\cdots$ 为定义在 (a,b) 内的函数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 称为定义在 (a,b) 内的函数项级数. 设 $x_0\in(a,b)$，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛（或发散），则 $x=x_0$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点（或发散点），所有收敛点（或发散点）的集合，称为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域（或发散域）.

2. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛域的求法

① 利用根值法 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\rho(x)$ 或比值法 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\rho(x)$；

② 令 $\rho(x)<1$，得出收敛区间 (c,d)；

③ 令 $x=c, x=d$，分别判别 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(c)$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(d)$ 的敛散性，最后得出收敛域（收敛区间与收敛端点的并集）.

【例 10.12】 求下列级数的收敛域.

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)^n;\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}.$$

【解】 (1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left|\frac{3x-1}{2x+1}\right|^n}=\left|\frac{3x-1}{2x+1}\right|$，令 $\left|\frac{3x-1}{2x+1}\right|<1$，得 $(3x-1)^2<(2x+1)^2$，即 $x(x-2)<0$. 解不等式得收敛区间 $(0,2)$.

当 $x=0$ 时，原级数变为：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散；

当 $x=2$ 时，原级数变为：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，条件收敛.

故原函数项级数的收敛域为 $(0,2]$.

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}x^{2n+1}\cdot\frac{2^n+(-3)^n}{nx^{2n-1}}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2^n+(-3)^n}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}x^2\right|=\frac{x^2}{3}.$$

令 $\frac{x^2}{3}<1$，即 $|x|<\sqrt{3}$，解不等式得收敛区间 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

当 $x=-\sqrt{3}$ 时，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}(-\sqrt{3})^{2n-1}$，发散；

当 $x=\sqrt{3}$ 时，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}(\sqrt{3})^{2n-1}$，发散；

故原函数项级数的收敛域为$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

二、幂级数

1. 幂级数的概念

定义 1 形如$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$ (1)

级数称为幂级数，当$x_0=0$时，

$(1)\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ (2)

定理 （阿贝尔定理） 设级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0(\neq 0)$处收敛，则对于满足不等式$|x|<|x_0|$的一切$x$，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛；设级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0(\neq 0)$发散，则对于满足不等式$|x|>|x_0|$的一切$x$，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散.

注 在$x=x_0$处收敛可推出级数在$|x|<|x_0|$内绝对收敛，至于在点$x=-x_0$或域$|x|>|x_0|$外的敛散性不定.

【例 10.13】 已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$在$x=4$处收敛，判断级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(-1)^n$的敛散性.

【解】 令$t=x-2$，则由题设可知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$在$t=2$处收敛，因为$|-1|<2$，故由阿贝尔定理可知，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(-1)^n$绝对收敛.

推论： 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$不是仅在$x=0$一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个确定的正数R存在，使得

当$|x|<R$时，幂级数绝对收敛；

当$|x|>R$时，幂级数发散；

当$x=\pm R$时，幂级数可能收敛也可能发散.

2. 收敛半径、收敛区间（开区间）和收敛域

正数R叫幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径，开区间$(-R,R)$称为幂级数的收敛区间，收敛域为收敛区间$(-R,R)$加上收敛的端点，可能为$(-R,R)$，$(-R,R]$，$[-R,R)$，$[-R,R]$之一.

注 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$和级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径相同，且在边界点的收敛性相同.

【例 10.14】 已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$在$x=0$处收敛，在$x=-4$处发散，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$的收敛域为________.

【分析】 由题中条件可知，两个幂级数形式均为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ny^n$，于是两个幂级数的收敛半径及在边界点

的收敛性相同.再结合题设条件和阿贝尔定理可得.

【解】因为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛,即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$ 收敛,由阿贝尔定理可得任意 $|y|<2$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ 绝对收敛;又根据级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=-4$ 处发散,即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-2)^n$ 发散,由阿贝尔定理可得任意 $|y|>2$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ 发散,从而可得幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-2,2]$,故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 $(-2+3,2+3]$,即 $(1,5]$.

3. 收敛半径的求法

(1) 若幂级数为标准形式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,且其系数满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$,则收敛半径为:

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, 0<\rho<+\infty \\ +\infty, \rho=0 \\ 0, \rho=+\infty\end{cases}.$$

(2) 若幂级数不是标准形式,缺项,形式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 等,则需利用比值法求收敛半径,即利用后项比前项的绝对值取极限来计算.如对 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$,令 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\rho(x)<1$,求出 x 的范围,即收敛区间.收敛半径为其收敛区间长度的一半.

注 若已知幂级数在 (a,b) 内收敛,在 $[a,b]$ 外发散,则其收敛半径为 $\frac{b-a}{2}$.

【例 10.15】求下列幂级数的收敛域和收敛半径.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}x^{2n-1}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}(x-a)^{2n}$.

【解】(1) $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\infty$,故 $R=0$,即级数仅在 $x=0$ 处收敛.

(2) $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=0$,故 $R=\infty$,即级数在整个实数域 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛.

(3) 因 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$,故收敛半径 $R=1$,由 $|x-3|<1$ 得收敛区间为 $(2,4)$.

当 $x=2$ 时,原级数变为:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$,绝对收敛;

当 $x=4$ 时,原级数变为:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,收敛.

梦飞翔考研工作室 QQ: 813321659

故原级数的收敛域为：$[2,4]$.

(4) 此级数缺少 x 的偶次幂项，直接用比值判别法求收敛半径.

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)}{n+2}|x^2| = 2x^2$，令 $2x^2<1$，即 $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，得收敛区间为：$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，收敛半径为：$R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

当 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数变为：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n+1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}=-\sqrt{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$，发散；

当 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数变为：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}=\sqrt{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$，发散.

故幂级数的收敛域为：$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(5) 此级数缺少 x 的奇次幂项，直接用比值判别法求收敛半径.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}|(x-a)^2| = \dfrac{1}{2}(x-a)^2$，令 $\dfrac{1}{2}(x-a)^2<1$，解得收敛区间为：$(a-\sqrt{2},a+\sqrt{2})$，收敛半径为：$R=\sqrt{2}$.

当 $x=a\pm\sqrt{2}$ 时，原级数均变为：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln n$，发散.

故幂级数的收敛域为：$(a-\sqrt{2},a+\sqrt{2})$.

4. 幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，则

① 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续；

② 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 内可逐项微分，即

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

注 幂级数的和函数在其收敛区间内有任意阶导数.

③ 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 内可逐项积分，即

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

注 ① 逐项微分或逐项积分后，收敛半径不变，但收敛域可能会发生变化；

② 性质 ②③ 常用来求幂级数的和函数.

5. 幂级数运算法则

设有两个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=s(x)$ 及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sigma(x)$，其收敛半径分别为 $R_1,R_2,R=\min\{R_1,R_2\}$，则对于任意 $x\in(-R,R)$，有

① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = s(x) \pm \sigma(x)$，且在 $(-R,R)$ 内绝对收敛；

② $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = s(x)\sigma(x)$.

6. 初等函数的幂级数的展开式

泰勒级数　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内具有任意阶导数，则该函数在该邻域内能展成泰勒级数的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots,$$

其中 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 称为 n 阶泰勒系数.

若 $x_0 = 0$，则 $f(x) \sim f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$ 称为麦克劳林级数.

注　如果 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数，那么这种展开式是唯一的，一定与 $f(x)$ 的麦克劳林级数一致.

七个常见的函数展开式如下：

(1) $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, u \in (-1,1)$;

(2) $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \cdots + (-1)^n u^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n, u \in (-1,1)$;

(3) $e^u = 1 + u + \dfrac{1}{2!}u^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}u^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}u^n, u \in (-\infty,+\infty)$;

(4) $\sin u = u - \dfrac{u^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!}, u \in (-\infty,+\infty)$;

(5) $\cos u = 1 - \dfrac{u^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{u^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}, u \in (-\infty,+\infty)$;

(6) $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} - \cdots + (-1)^n \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n u^{n+1}}{n+1}, u \in (-1,1]$;

(7) $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n + \cdots, u \in (-1,1]$.

注　将给定函数 $f(x)$ 在某点 x_0 展开成泰勒级数有两种方法：直接法和间接法.

① 直接法是利用定理，首先求出 $f(x)$ 在点 x_0 的各阶导数值，然后判断余项 $R_n(x)$ 在 $n\to\infty$ 时趋于零的范围，最后写出泰勒级数. 直接法一般较烦琐.

② 间接法是根据上述常用函数的展开式，通过适当的变量、四则运算、复合以及逐项微分或积分而将函数展成幂级数.

【例 10.16】 将下列函数在指定点展成幂级数.

(1) $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$ 在 $x=0$ 处；

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x=1$ 处；

(3) $y = \sin x$ 在 $x = \dfrac{\pi}{4}$ 处.

杨飞翔考研工作室 QQ: 813216...

【解】(1) $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}=\dfrac{x}{3^2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}$,

则由七个展开式中的(2) 可令 $u=\left(\dfrac{x}{3}\right)^2$,则有

$$f(x)=\frac{x}{3^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{x}{3^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2\right]^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+2}},$$

而由 $u=\left(\dfrac{x}{3}\right)^2<1\Rightarrow x\in(-3,3)$.

(2) 因函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$,

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2+(x-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}},$$

$\left(-1<\dfrac{x-1}{2}<1\Rightarrow -1<x<3\right)$;

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}},$$

$\left(-1<\dfrac{x-1}{3}<1\Rightarrow -2<x<4\right)$.

故 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right](x-1)^n,x\in(-1,3)$.

(3) $y=\sin x=\sin\left[\dfrac{\pi}{4}+\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$$\begin{aligned}&=\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}-\cdots\right]+\\&\quad\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}-\cdots\right]\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}-\cdots\right].\end{aligned}$$

7. 幂级数的和函数的求法

(1) 先求出幂级数的收敛域;

(2) 利用逐项微分、积分将通项中除了以 n 为指数幂 $2^n,3^n,\cdots$ 及阶乘 $n!,(2n)!,(2n+1)!$ 之外的与 n 相关的系数全部搞掉,使其成为七个展开式中通项的一种形式(注意,若要去掉的因子在分子上,则通过逐项积分法;要去掉的因子在分母上,则通过逐项微分法),然后写出对应的和函数;

(3) 作与(2) 相反的分析运算,便得原幂级数的和函数.

QQ: 81321659

【例 10.17】求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域，并求其和函数.

【解】(1) 收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=1$，当 $x=\pm 1$ 时，由于一般项不趋于零，级数发散，所以收敛域为：$(-1,1)$.

(2) 为求和函数，先积分，转化成等比级数，求和，最后再求导.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'+\frac{1}{1-x}=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2},x\in(-1,1).$$

【例 10.18】利用已知函数的幂级数展开式，求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$ 的和函数.

【解】设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$，两边积分，得

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n+1)t^{2n}}{n!}\mathrm{d}t=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=xe^{x^2},$$

两边求导，得

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}=(xe^{x^2})'=(1+2x^2)e^{x^2},x\in(-\infty,+\infty).$$

【例 10.19】求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$ 的和函数.

【解】$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}\right|}=\frac{|x|}{2}$.

令 $\frac{|x|}{2}<1\Rightarrow|x|<2$，可得收敛区间为 $(-2,2)$；

令 $x=-2$，原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$，收敛；

令 $x=2$，原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n}$，发散.

可知该级数的收敛域为 $[-2,2)$.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n\right)'\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{2-x}\mathrm{d}x=\frac{\ln 2-\ln(2-x)}{x},x\neq 0.$$

因为 $x=0\in[-2,2)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

所以 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln 2-\ln(2-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}$，

故其和函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln 2-\ln(2-x)}{x}, & x\in[-2,0)\cup(0,2)\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$.

10.3 傅里叶级数

一、基本概念和定理

1. 傅里叶级数

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数，且在 $[-l,l]$ 或 $[0,2l]$ 上可积，则傅里叶系数为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx,n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,n=1,2,\cdots.$$

以 $f(x)$ 的傅里叶系数为系数的三角级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

称为 $f(x)$ 的傅里叶级数.

注 ① 当 $f(x)$ 是以 2π 为周期的可积奇函数时，

$$a_n=0,n=0,1,2,\cdots,b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,n=1,2,\cdots,$$

则 $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，称为正弦级数.

② 当 $f(x)$ 是以 2π 为周期的可积偶函数时，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx(n=0,1,2,\cdots),b_n=0(n=1,2,\cdots),$$

则 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，称为余弦级数.

2. 定理(狄里赫莱收敛准则)

设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上满足条件：

① 除有限个第一类间断点外都是连续的；

② 只有有限个极值点，

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-l,l]$ 上收敛，且有

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$=\begin{cases}f(x), & x\text{ 是 }f(x)\text{ 的连续点}\\ \dfrac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)], & x_0\text{ 是 }f(x)\text{ 的第一类间断点}\\ \dfrac{1}{2}[f(-l-0)+f(l+0)], & x=\pm l\end{cases}$$

二、傅里叶级数的展开

将函数展成傅里叶级数的程序如下.

(1) 画出 $f(x)$的图形并验证是否满足狄里赫莱收敛条件(画图目的:验证狄氏条件,若收敛,由图容易准确写出收敛域并且易于看出奇偶性);

(2) 求出傅氏系数;

(3) 写出傅氏级数,并标出它在何处收敛于 $f(x)$.

【例 10.20】将 $f(x)=2+|x|\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$,展开为以 2 为周期的傅里叶级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

【解】如图 10-1,可知 $f(x)$在$[-1,1]$上处处连续,无极值点,所以满足狄氏条件,因为第一周期的端点与第二周期的端点不重合,所以收敛域为$(-1,1)$.

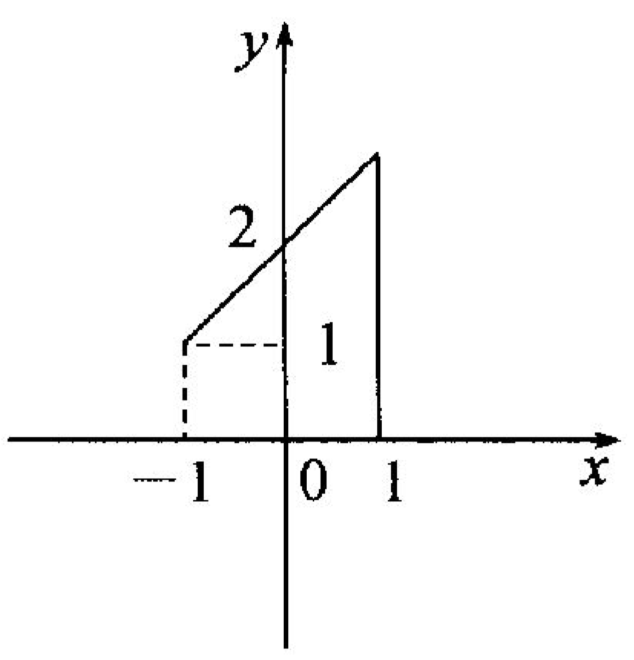

图 10-1

2 本身已是周期为 2 的傅氏级数了,只须将$|x|$展成傅氏级数即可,因为$|x|$为偶函数,故

$$b_n=0,(n=1,2,\cdots),a_0=2\int_0^1 x\mathrm{d}x=1,$$

$$a_n=2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1),n=1,2,\cdots.$$

于是 $|x|=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(2n-1)\pi x$,

故 $f(x)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x,-1<x<1.$

令 $x=0,f(0)=2$,于是 $2=\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$,可得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$,

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{4}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

【例 10.21】将 $f(x)=\begin{cases}x,0\leqslant x<2\\4-x,2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$ 展成以 8 为周期的傅里叶级数.

【解】如图 10-2.

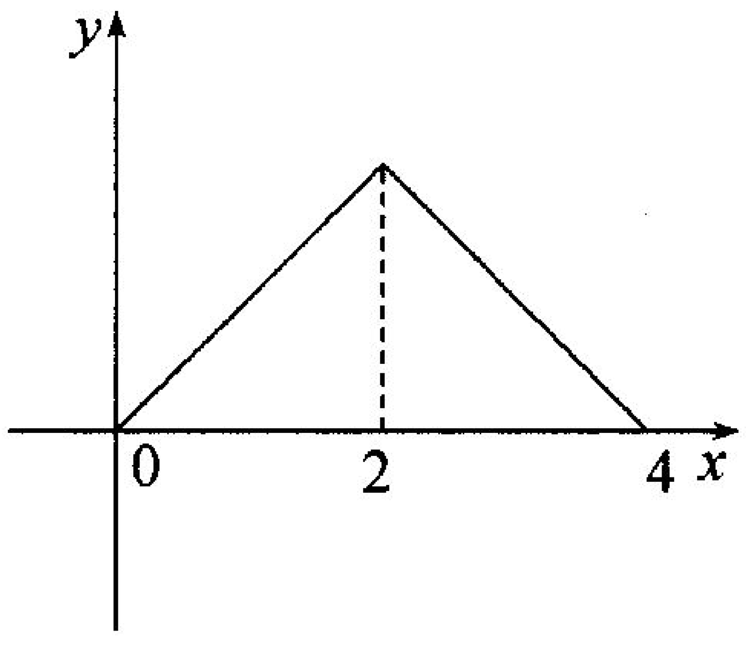

图 10-2

作奇开拓 $g(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x<4\\-f(x), & -4\leqslant x<0\end{cases}$,

则 $a_n=0,n=0,1,2,\cdots$.

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{4}\int_0^4 g(x)\sin\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left[\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x+\int_2^4(4-x)\sin\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x\right]\\&=\left(\frac{4}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{2}(n=1,2,3,\cdots).\end{aligned}$$

于是由狄里赫莱收敛定理，在[−4,4]上有

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{4},$$

故在[0,4]上，

$$f(x)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{4}.$$

【例 10.22】 $f(x)=1-x^2\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$，展开成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

【解】 对 $f(x)=1-x^2$ 进行偶开拓，如图 10-3.

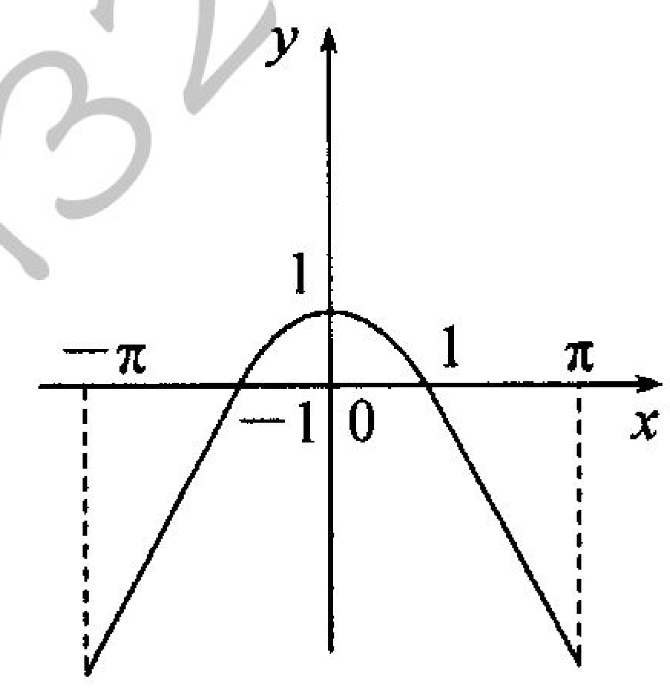

图 10-3

因为 $f(x)=1-x^2$ 是偶函数，所以 $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\mathrm{d}x=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right),$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2},n=1,2,\cdots,$$

所以
$$f(x)=1-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$
$$=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$$

令 $x=0$，代入上式，可求得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

习 题 十

一、单项选择题

1. 设有无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，则

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 至少有一收敛.

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 至少有一发散.

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛可推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散可推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 【 】

2. 下列各选项正确的是

A. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

B. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛.

C. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $u_n\geqslant\frac{1}{n}$.

D. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $u_n \geqslant v_n (n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛. 【 】

3. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^{\ 2}}{a_n^{\ 2}} x^n$ 的收敛半径为

A. 5. B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{5}$. 【 】

4. 设 $p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}, q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}, n = 1,2,\cdots$，则下列结论正确的是

A. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.

B. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.

C. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定.

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定. 【 】

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n (x-2)^2$ 在 $x=-2$ 处收敛，则此级数在 $x=5$ 处

A. 一定发散. B. 一定条件收敛.

C. 一定绝对收敛. D. 收敛性不能确定. 【 】

二、填空题

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3a_n - 4a_{n+1}) =$ ________.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$ ________.

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^{\alpha}}$ 收敛的充要条件是 α 满足________.

4. 设 $f(x) = \pi x + x^2 (-\pi < x < \pi)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{1}{2}a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，则系数 $b_3 =$ ________.

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ 的收敛区间是________.

6. 已知函数 $f(x) = x^9 + 9^x$ 在区间 $[0,1]$ 上的正弦级数和余弦级数分别是 $S_1(x)$ 和 $S_2(x)$，则 $S_1(-1) =$ ________；$S_2(-1) =$ ________.

三、计算题

1. 将函数 $f(x) = \frac{x}{2 + x - x^2}$ 展成 x 的幂级数.

2. 设 $a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = \frac{7}{2}, a_{n+1} = -\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) a_n (n \geqslant 2)$.

(Ⅰ) 证明：当 $|x| < 1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛；

(Ⅱ) 求幂级数的和函数 $S(x)$.

梦飞翔考研工作室 QQ: 81321659

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

参 考 答 案

一、1. B　2. A　3. A　4. B　5. C

二、1. $4a_1-S$

2. 4.

3. $\alpha>\frac{3}{2}$.

4. $\frac{2}{3}\pi$.

5. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

6. 0;10.

三、1. $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}=\dfrac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^n\right)=\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}+\dfrac{1}{2^n}\right)x^n$,

$x\in(-1,1)$.

2. (Ⅰ) 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1}=1$，则收敛半径 $r=1$，

所以当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 收敛.

(Ⅱ) 由 $a_{n+1}=-\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)a_n$ 可推出 $a_n=\dfrac{7}{6}(-1)^n(n+1)x^n(n\geqslant 3)$，则

$S(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+1\right)$.

3. $S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}, & |x|<1\\ 0, & x=0.\end{cases}$