第 4 章　不定积分

基础知识与规律总结

4.1　不定积分的基本概念和性质

一、原函数和不定积分的概念

1. 原函数的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在函数 $F(x)$，使得对于区间 I 中任一 x，均有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

如，因为 $(x^2)'=2x, x\in(-\infty,+\infty)$，则 x^2 为 $2x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数.

注：①$F(x)$ 在区间 I 内是连续的.

② 因为
$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x),$$
所以若函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$，则对任意常数 C，函数 $F(x)+C$ 也是函数 $f(x)$ 的原函数，即如果 $f(x)$ 有一个原函数，则 $f(x)$ 就有无穷多个原函数.

③ 原函数之间的关系如何？

一个函数的两个不同的原函数之间只差一个常数.

设 $F_1(x),F_2(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的两个原函数，则
$$[F_1(x)-F_2(x)]'=F'_1(x)-F'_2(x)=f(x)-f(x)=0,$$
所以 $F_1(x)-F_2(x)=C$，其中 C 为某个常数.

这说明两个原函数之间只差一个常数.

因此当 C 为任意常数时，表达式 $F(x)+C$ 就可表示 $f(x)$ 的任意一个原函数. 也就是说，$f(x)$ 的全体原函数所组成的集合，就是函数族 $\{F(x)+C\mid-\infty<C<+\infty\}$.

2. 不定积分的定义

函数 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数的全体，称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

$\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

3. 原函数与不定积分的关系

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，

其中 C 为任意常数，称为积分常数.

如，$\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C$，$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

注 不定积分和原函数是两个不同的概念，前者是个集合，后者是该集合中的一个元素，所以 $\int f(x)\mathrm{d}x \neq F(x)$. 故计算不定积分时，一定不要忘了加常数 C.

4. 不定积分的几何意义

若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $y=F(x)$ 的图形为 $f(x)$ 的一条积分曲线，于是函数 $f(x)$ 的不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 表示平行于曲线 $F(x)$ 的积分曲线族(曲线 $F(x)$ 沿 y 轴方向平移而得). 显然，若在每一条积分曲线横坐标相同的点处作切线，则这些切线都是互相平行的，如图 4-1 所示.

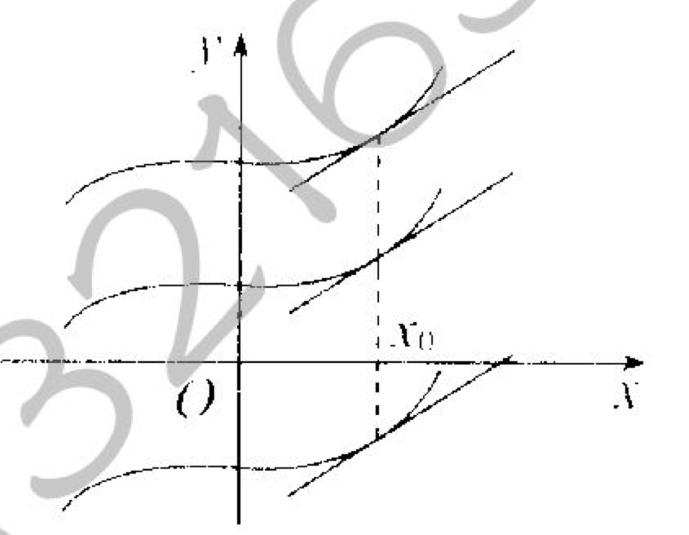


图 4-1

5. 不定积分的运算性质

① $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$；不定积分为求导的逆运算. 先积分后求导，作用抵消.

② $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x$；

③ $\int f'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}f(x) = f(x)+C$. 先对 x 求导后积分.

【例 4.1】 $\left(\int f(2x)\mathrm{d}x\right)' = f(2x)$，$\int f'(2x)\mathrm{d}x = f(2x)+C$ 是否正确？

【解】 $\left(\int f(2x)\mathrm{d}x\right)' = f(2x)$，先将 $f(2x)$ 对 x 积分后求导，作用抵消，正确.

$\int f'(2x)\mathrm{d}x = f(2x)+C$，先将 $f(2x)$ 对 $2x$ 求导，然后对 x 积分，错误.

正确解法为：$\int f'(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f'(2x)\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}f(2x)+C$.

【例 4.2】 在区间 (a,b) 内，若 $f'(x)=g'(x)$，则

(A) $f(x)=g(x)$　　(B) $f(x)=g(x)+C$

(C) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = \left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)'$　　(D) $\int f'(x)\mathrm{d}x = \int g'(x)\mathrm{d}x$

【解】 $f'(x)=g'(x) \Rightarrow \int f'(x)\mathrm{d}x = \int g'(x)\mathrm{d}x$，

$\Rightarrow f(x)+C_1 = g(x)+C_2 \Rightarrow f(x)=g(x)+C$，

故(B)(D) 正确，(A) 不正确.

又 $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$，$\left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)' = g(x)$，则(C) 不正确.

故选(B)，(D).

【例 4.3】 若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln x$，则 $f'(x)=$

(A) $\frac{1}{x}$　　(B) e^x　　(C) $-\frac{1}{x^2}$　　(D) $x\ln x$

【解】 因为 $f(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，故选(C).

【例 4.4】 若函数 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为

(A) $1+\sin x$　　(B) $1-\sin x$

(C) $1+\cos x$　　　　(D) $1-\cos x$

【解】因为 $f'(x)=\sin x$，所以 $f(x)=-\cos x+C$. 取 $f(x)=-\cos x$，

于是
$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(-\cos x)\mathrm{d}x=-\sin x+C_1,$$

令 $C_1=1$，则得 $f(x)$ 的一个原函数为 $1-\sin x$，故选(B).

注 另解如下.

设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$，则 $F''(x)=\sin x$，对(A)，(B)，(C)，(D)项逐一求二阶导数，只有 $(1-\sin x)''=\sin x$，故选(B).

6. 原函数存在定理

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则该函数在 I 上存在原函数 $F(x)$，即该函数在这个区间上存在不定积分.

注 ① 初等函数在其有定义的区间上是连续的，所以从原函数存在定理可知，初等函数在其定义区间上都有原函数.

② 注意定理中连续的条件，若函数在定义的区间上不连续，则该函数不一定有原函数.

如，函数 $f(x)=\begin{cases}1, x\leqslant 0\\ 0, x>0\end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上不连续，点 $x=0$ 为其第一类间断点，该函数无原函数.

又如，函数 $f(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上不连续，点 $x=0$ 为其第二类间断点，但是 $F(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 为 $f(x)$ 的原函数.

根据积分法是微分法逆运算的关系，从每一个基本初等函数和常见函数的导数公式，就可相应地得到一个不定积分公式，如下所述.

二、基本积分公式

(1) $\int x^k\mathrm{d}x=\dfrac{1}{k+1}x^{k+1}+C(k\neq -1)$，特别 $\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}+C$，$\int\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}+C$；

(2) $\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$；

(3) $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C(a>0,a\neq 1)$，特别 $\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$；

(4) $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$，$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

(5) $\int\sec^2x\mathrm{d}x=\tan x+C$，$\int\csc^2x\mathrm{d}x=-\cot x+C\left(\sec x=\dfrac{1}{\cos x},\csc x=\dfrac{1}{\sin x}\right)$；

(6) $\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$，$\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$；

(7) $\int\sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$，$\int\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$；

(8) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$，$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

(9) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$，特别 $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$；

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$，特别 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$；

(11) $\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$，特别 $\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$；

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$；

(13) $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$；

(14) $\int \sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$；

(15) $\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$；

(16) 递推公式：$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$，则 $I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right]$.

注 ① 基本积分公式需熟记，求不定积分时，结果中千万不要忘了常数 C.

② 以上公式中把 x 换为以 x 为自变量的函数 u，公式仍然成立.

三、不定积分的基本运算法则

由导数的运算法则，可推得关于不定积分的运算法则.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数存在，则 $kf(x)$ 在区间 I 上也有原函数存在，且

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x，其中 k 为任意常数；$$

(2) 若 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 在区间 I 上有原函数存在，则 $f_1(x)\pm f_2(x)$ 在区间 I 上也有原函数存在，且

$$\int [f_1(x)\pm f_2(x)]\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\mathrm{d}x.$$

可以推广到有限个和的形式.

【例 4.5】 计算下面的不定积分

(1) $\int (10^x + 3\sin x + \sqrt{x})\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\int (10^x + 3\sin x + \sqrt{x})\mathrm{d}x = \int 10^x\mathrm{d}x + \int 3\sin x\mathrm{d}x + \int \sqrt{x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{10^x}{\ln 10} - 3\cos x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C；$$

(2) $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^4-1+2}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$$= \int\left(x^2-1+\frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + \int \frac{2}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + 2\arctan x + C.$$

4.2 不定积分的计算方法

一、不定积分的换元积分法

1. 第一换元积分法(也称为凑微分法)

定理 1 设函数 $u=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$\alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta$，$g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有定义并有原函数 $G(u)$，则 $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 存在，且 $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = G(\varphi(x)) + C$.

由复合函数的求导法则即可验证

$$\left[\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x\right]' = [G(\varphi(x))+C]' = G'(\varphi(x))\varphi'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x).$$

注 凑微分的计算公式为 $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int g(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = G(\varphi(x)) + C$，先凑的是 $\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(x)$，所以应熟悉以下常见的凑微分公式：

(1) $\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$，$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}\sqrt{x}$，$\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\ln x$，$\left(1 \pm \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(x \mp \frac{1}{x}\right)$；

(2) $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\mathrm{e}^x$，$a^x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}a^x}{\ln a}$ $(a>0$ 且 $a \neq 1)$；

(3) $\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x$，$\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\cos x$，

$(\cos x + \sin x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x - \cos x)$，$(\cos x - \sin x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x + \cos x)$；

(4) $\sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tan x$，$\csc^2 x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\cot x$；

(5) $\sec x\tan x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sec x$，$\csc x\cot x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\csc x$；

(6) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\arcsin x$，$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\arctan x$；

(7) $\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}\ln\frac{1+x}{1-x}$，$\frac{1}{\sqrt{1\pm x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\ln(x+\sqrt{1\pm x^2})$.

【例 4.6】 求下列不定积分

(1) $\int \tan^{10}x\sec^2 x\mathrm{d}x$；

(2) $\int \tan^3 x\sec x\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{10^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(4) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；

(6) $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$；

(8) $\int \frac{1-x^8}{x(1+x^8)}\mathrm{d}x$；

(9) $\int \frac{1}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$；

(10) $\int \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 因为 $\sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tan x$，所以

$$\int \tan^{10} x \sec^2 x \mathrm{d}x = \int \tan^{10} x \mathrm{d}\tan x$$

$$\overset{令 u=\tan x}{=} \int u^{10} \mathrm{d}u = \frac{1}{11}u^{11} + C = \frac{1}{11}\tan^{11} x + C.$$

注 计算熟练后，就不必作变量代换 $u=\tan x$，直接计算.

(2) $\int \tan^3 x \sec x \mathrm{d}x = \int \tan^2 x(\sec x \tan x)\mathrm{d}x$

$$= \int \tan^2 x \mathrm{d}\sec x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}\sec x = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C.$$

(3) $\int \frac{10^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int 10^{2\arcsin x}\mathrm{d}\arcsin x$

$$= \frac{1}{2}\int 10^{2\arcsin x}\mathrm{d}(2\arcsin x) = \frac{10^{2\arcsin x}}{2\ln 10} + C.$$

(4) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)}\mathrm{d}\sqrt{x}$

$$= 2\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}\arctan\sqrt{x} = (\arctan\sqrt{x})^2 + C.$$

(5) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\int \sin\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{1}{x} + C.$

(6) $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$$= \int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \ln \mathrm{e}^x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C = x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C.$$

(7) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C.$

(8) $\int \frac{1-x^8}{x(1+x^8)}\mathrm{d}x = \int \frac{x^7(1-x^8)}{x^8(1+x^8)}\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \frac{1-x^8}{x^8(1+x^8)}\mathrm{d}x^8 = \frac{1}{8}\int \frac{(1+x^8)-2x^8}{x^8(1+x^8)}\mathrm{d}x^8$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{x^8}\mathrm{d}x^8 - \int \frac{2}{1+x^8}\mathrm{d}(1+x^8)\right] = \frac{1}{8}(\ln x^8 - 2\ln(1+x^8)) + C.$$

(9) $\int \frac{1}{1+x+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

(10) $\int \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln x\ln\ln x}\mathrm{d}\ln x = \int \frac{1}{\ln\ln x}\mathrm{d}\ln\ln x = \ln\ln\ln x + C.$

2. 第二换元积分法(也称为变量代换法)

定理 2 设 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上是单调可导函数，$a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$ 且 $\varphi'(t) \neq 0$，设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且 $f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t)$ 有原函数 $G(t)$，则 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上存在，且

$$\int f(x)\mathrm{d}x \overset{令 x=\varphi(t)}{=} \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = [G(t)]_{t=\varphi^{-1}(x)} + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

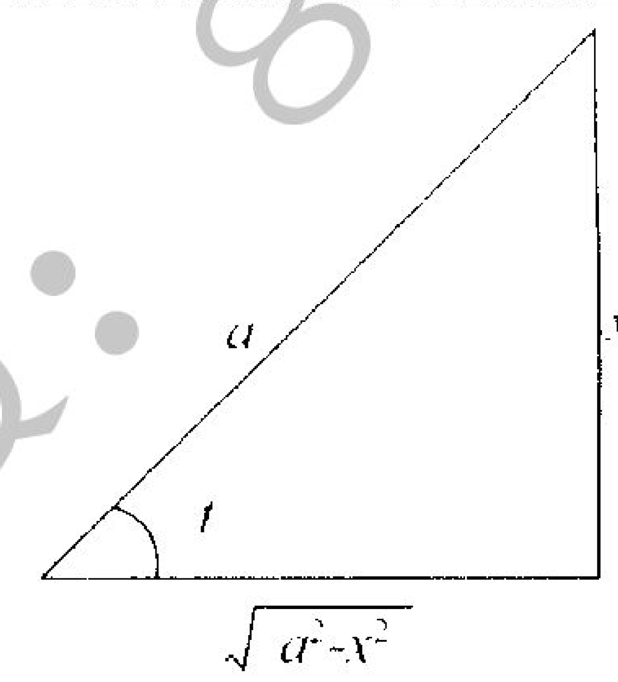
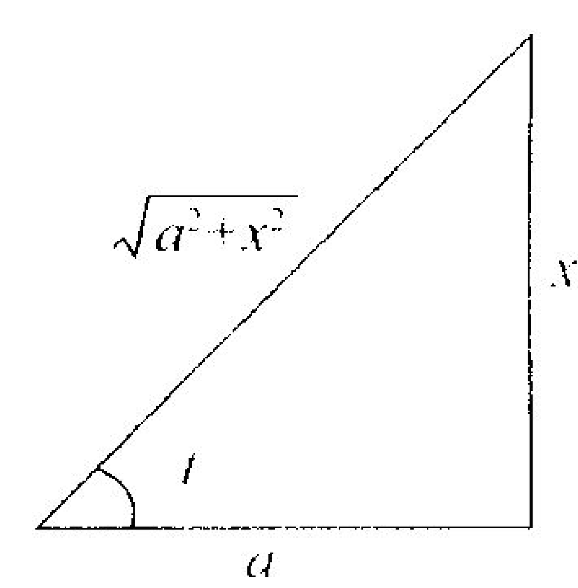
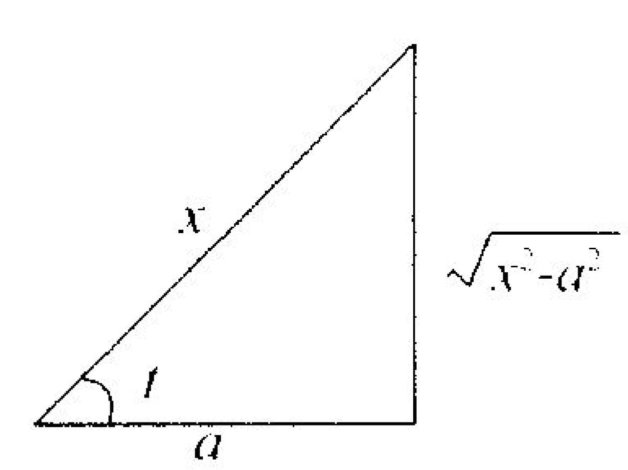
注 ① 第二类换元法是通过变量代换 $x=\varphi(t)$ 将一个不易求解的不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 转化成另一个易于求解的不定积分 $\int g(t)\mathrm{d}t$，所以也称为变量代换法；

② 最后结果应为 x 的函数，因此积分后应将变量 t 还原为 x.

3. 常见的三种变量代换

● 三角代换法(表 4-1).

表 4-1

被积函数 $f(x)$ 含有根式	变量代换	三角形示意图
$\sqrt{a^2-x^2}\ (a>0)$	$x=a\sin t,\lvert t\rvert<\dfrac{\pi}{2}$	
$\sqrt{a^2+x^2}\ (a>0)$	$x=a\tan t,\lvert t\rvert<\dfrac{\pi}{2}$	
$\sqrt{x^2-a^2}\ (a>0)$	$x=a\sec t,0<t<\dfrac{\pi}{2}$	

注 最后一定要将变量 t 还原为 x.

【例 4.7】求下列积分：

(1) $\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x\,(a>0)$；

(3) $\int\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\ (a>0)$.

【解】(1) 令 $x=\sin t,\lvert t\rvert<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t=\int\cos^2 t\mathrm{d}t=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

(2) 令 $x=a\sec t,0<t<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \int \frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\,dt = \int \sec t\,dt = \ln|\sec t+\tan t| + C.$$

而 $\tan t = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$，所以原积分 $= \ln\left|\dfrac{x}{a}+\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C'$.

(3) 令 $x = a\tan t$，$|t| < \dfrac{\pi}{2}$，则 $dx = a\sec^2 t dt$，于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,dt = \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + C.$$

而 $\sec t = \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$，所以原积分 $= \ln\left|\dfrac{x}{a}+\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C'$.

● 倒代换 $x = \dfrac{1}{t}$.

设 p,q 分别表示被积函数 $f(x)$ 的分母、分子关于 x 的最高次数，若 $p-q>1$，则可作倒代换；若 $p-q\leqslant 1$，则不可作倒代换.

【例 4.8】求下列积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,dx$；　　(2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$.

【解】(1) 令 $x = \dfrac{1}{t}$，则 $dx = -\dfrac{1}{t^2}dt$，

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,dx = \int t^4\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int t\sqrt{a^2t^2-1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\int \sqrt{a^2t^2-1}\,d(a^2t^2-1) = -\frac{1}{3a^2}\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

或令 $x = a\sin t$，$dx = a\cos t dt$，

$$I = \int \frac{a\cos t}{a^4\sin^4 t}\cdot a\cos t dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cot^2 t}{\sin^2 t}\,dt = -\frac{1}{a^2}\int \cot^2 t\,d\cot t$$

$$= -\frac{1}{3a^2}\cot^3 t + C = -\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)^3 + C$$

(2) 本题不能作倒代换. 令 $x = a\sec t$，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$，则 $dx = a\sec t\tan t dt$.

所以
$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \int \frac{a\tan t}{a\sec t}\cdot a\sec t\tan t dt$$

$$= \int a\tan^2 t dt = a\int(\sec^2 t - 1)dt = a\tan t - at + C$$

$$= a\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} - a\arccos\frac{a}{x} + C$$

$$= \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$$

● 指数代换 $a^x = t$.

适用于被积函数 $f(x)$ 由 a^x 所构成的代数式.

方法：令 $a^x = t$，则 $dx = \dfrac{1}{\ln a}\cdot\dfrac{dt}{t}$.

【例 4.9】求下列不定积分：

(1) $\int \frac{2^x}{1+2^x+4^x}dx$；　　(2) $\int \frac{dx}{e^x(1+e^{2x})}$.

【解】(1) 令 $2^x=t$，则 $dx=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{dt}{t}$.

于是
$$\begin{aligned}&\int \frac{2^x}{1+2^x+4^x}dx\\ &=\int \frac{t}{1+t+t^2}\cdot\frac{1}{t\ln 2}dt=\frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt\\ &=\frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}d\left(t+\frac{1}{2}\right)\\ &=\frac{2}{\sqrt{3}\ln 2}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\\ &=\frac{2}{\sqrt{3}\ln 2}\arctan\frac{2^{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

(2) 令 $e^x=t$，则 $dx=\frac{dt}{t}$.

于是
$$\int \frac{dx}{e^x(1+e^{2x})}=\int \frac{dt}{t^2(1+t^2)}=\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{t}-\arctan t+C=-\frac{1}{e^x}-\arctan e^x+C.$$

二、不定积分的分部积分法

1. 定义

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 可导，且不定积分 $\int u'v\,dx$ 存在，则 $\int v'u\,dx$ 也存在，并有
$$\int uv'\,dx=uv-\int u'v\,dx\text{，即}\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

注 分部积分法的目的是通过分部积分公式，将不易求解的不定积分 $\int u\,dv$ 转化成另一个易于求解的不定积分 $\int v\,du$，分部积分法的关键是如何选取 u，dv，选择原则如下所述.

① 容易积分者选作 dv，求导简单者选作 u.

② 在二者不可兼得的情况下，首先要保证的是前者.

如果选择不当，反而会使不定积分更加复杂.

【例 4.10】计算不定积分 $\int x\cos x\,dx$.

【解】若选 $u=\cos x$，则

$\int \cos x\,d\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\cos x+\int \frac{x^2}{2}\sin x\,dx$，结果越来越复杂.

若选 $u=x$，则 $\int x\cos x\,dx=\int x\,d\sin x=x\sin x-\int \sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C$.

2. 常用分部积分法计算的不定积分类型

分部积分法常用于求不同类型函数乘积的积分. 常见情形如下.

(1) 被积函数为幂函数和对数函数的乘积,

如, $$\int x^k \log_a^m x\,dx\ (a>0, a\neq 1),\ 选\ u=\log_a^m x.$$

(2) 被积函数为幂函数和三角函数的乘积,

如, $$\int x^k \sin ax\,dx,\ 选\ u=x^k;\ \int x^k \cos ax\,dx,\ 选\ u=x^k;$$

(3) 被积函数为幂函数和指数函数的乘积,

如, $$\int x^k a^x\,dx,\ 选\ u=x^k;\ \int x^k e^{ax}\,dx,\ 选\ u=x^k;$$

(4) 被积函数为幂函数和反三角函数的乘积,

如, $$\int x^k \arctan ax\,dx,\ 选\ u=\arctan ax.$$

(5) 被积函数为指数函数和三角函数的乘积.

如, $$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\ 选\ u=e^{ax}\ 或\ u=\cos bx\ 均可.$$

注 对数函数和反三角函数通常取为 u.

【例 4.11】 计算下列不定积分

(1) $\int xe^x\,dx$; (2) $\int x\sin 2x\,dx$;

(3) $\int \ln x\,dx$; (4) $\int x\arctan x\,dx$;

(5) $\int e^x\cos x\,dx$; (6) $\int \sin(\ln x)\,dx$;

(7) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$; (8) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$.

【解】 (1) $\int xe^x\,dx=\int x\,de^x=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C$.

(2) $$\int x\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\int x\,d\cos 2x=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

(3) $$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int x\frac{1}{x}\,dx=x\ln x-x+C.$$

(4) $$\int x\arctan x\,dx=\frac{1}{2}\int\arctan x\,dx^2=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

(5) $$\int e^x\cos x\,dx=\int\cos x\,de^x=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$$
$$=e^x\cos x+\int\sin x\,de^x=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx.$$

故 $\int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$.

(6) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x.$

故 $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$

(7) $\int \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$

(8) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x = -\int \arcsin x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

而 $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \overset{x=1/t}{\underset{t>0}{=}} \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$

$= -\ln\left|t + \sqrt{t^2-1}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$

4.3 各种函数的不定积分

一、有理函数的不定积分

有理函数的积分形式为 $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$. 具体步骤如下.

(1) $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为假分式，则用长除法得到 $\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$（整式 + 真分式）$= W(x) +$ 部分分式（或最简分式）；

(2) 求整式和部分分式的积分实际上是求如下四种形式的积分：

(a) $\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x = \ln|x-a| + C$；

(b) $\int \frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C(n \neq 1)$；

(c) $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right]^n}\mathrm{d}x$（利用配方法）

$\overset{\text{令}x+\frac{p}{2}=u}{\underset{\text{令}\frac{4q-p^2}{4}=a^2}{=\!=\!=\!=}} \int \frac{1}{(u^2+a^2)^n}\mathrm{d}u$；

(d) $\int \frac{x+a}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(a - \frac{p}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n}$，

其中 p, q 满足 $p^2 - 4q < 0$，即 $x^2 + px + q$ 不能再分解成一次式.

【例 4.12】求下列不定积分.

(1) $\int \frac{x^3}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$； (2) $\int \frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$；　　　　(4) $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x$.

【解】(1) 被积函数是有理假分式，应先将其化为多项式与有理真分式的和的形式再求积分.

$$\frac{x^3}{x^2-2x+2} = x+3+\frac{7x-6}{x^2-3x+2}$$

$$= x+3+\frac{7x-6}{(x-2)(x-1)}$$

$$= x+3+\frac{8}{x-2}-\frac{1}{x-1}.$$

故 $\int \frac{x^3}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+3x+8\ln|x-2|-\ln|x-1|+C$.

(2) 被积函数是有理真分式且可分解因式.

$$\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right).$$

故 $\int \frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln|x-3|-\ln|x-1|)+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$.

(3) 被积分式是有理真分式，其分母不能再继续分解因式，分子是一次式，这时可用凑微分法将分子凑成分母的导数加上一个常数的形式，然后再计算不定积分.

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} - 2\int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x,$$

而 $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}(x+1)$（利用配方法），

故 $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2)-2\arctan(x+1)+C$.

(4) 被积函数是有理真分式，分母不易分解因式，可作以下变形：

$$\frac{1-x^7}{x(1+x^7)} = \frac{1}{x(1+x^7)} - \frac{x^6}{1+x^7} = \frac{1}{x} - \frac{2x^6}{1+x^7}.$$

故 $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C$.

二、三角函数有理式 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 的不定积分

由 $\sin x$，$\cos x$ 及常数经过有限次的四则运算所得到的函数称为三角有理式，记为 $R(\sin x,\cos x)$，求解 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 的基本思路为：

(1) 尽量使分母简单. 为此，分子分母同乘以某个因子，将分母化成 $\sin^k x$ 或 $\cos^k x$ 的单项式，或将分母整个看成一项；

(2) 尽量使 $R(\sin x,\cos x)$ 的幂降低，为此通常利用倍角公式或积化和差公式以达目的.

1. "1" 的妙用 $\sin^2 ax+\cos^2 ax=1$

【例 4.13】 计算下列积分：

(1) $\int \frac{1}{\sin x\cos^3 x}\mathrm{d}x$；　　　　(2) $\int \sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$.

【解】(1) $\dfrac{1}{\sin x\cos^3 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos^3 x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}+\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}=\dfrac{2}{\sin 2x}+\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$,

$$I=\int\frac{1}{\sin x\cos^3 x}\mathrm{d}x=\int\csc 2x\mathrm{d}(2x)-\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^3 x}$$

$$=\ln|\csc 2x-\cot 2x|+\frac{1}{2\cos^2 x}+C.$$

(2) $$I=\int\sqrt{1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\text{ 或}\int\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

$$=-2\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}+C\text{ 或 }2\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}+C.$$

2. 将分母化为单项式

情形 1：$\displaystyle\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{1+\sin x}\mathrm{d}x$ 或 $\displaystyle\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{1-\sin x}\mathrm{d}x$.

方法：分子分母同乘以 $1-\sin x$ 或 $1+\sin x$，最好将分母变为单项式.

情形 2：$\displaystyle\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

方法：分子分母同乘以 $1-\cos x$ 或利用公式 $1+\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}$.

情形 3：$\displaystyle\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{1-\cos x}\mathrm{d}x$.

方法：分子分母同乘以 $1+\cos x$ 或利用公式 $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

【例 4.14】求下列积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$； (2) $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

【解】(1) $$I=\int\frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int\tan^2 x\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x}-\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\cos x}-\tan x+x+C.$$

(2) $$I=\int\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\int\tan\frac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=\tan\frac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x-\int\tan\frac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int\tan\frac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\tan\frac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x+C.$$

(3) $$I=\int\frac{1}{1+\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

（分母分子若是关于正余弦项的二次项，则一般分子分母同除以余弦的平方）.

3. 降幂法

常用的降幂公式如下.

① 积化和差公式：

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x]$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x]$$

② 倍角公式：

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\ \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

【例 4.15】 求下列不定积分.

(1) $\int \sin 4x\cos 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \sin^2 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

【解】 (1)
$$\begin{aligned}\sin 4x\cos 2x\cos 3x&=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 2x)\cos 3x\\&=\frac{1}{2}\sin 6x\cos 3x+\frac{1}{2}\sin 2x\cos 3x\\&=\frac{1}{4}\sin 9x+\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 5x-\frac{1}{4}\sin x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{故原式}&=\frac{1}{4}\int(\sin 9x+\sin 5x+\sin 3x-\sin x)\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{36}\cos 9x-\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x+C.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sin^2 x\cos^4 x&=\frac{1}{4}(2\sin x\cos x)^2\cos^2 x=\frac{1}{4}\sin^2(2x)\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\\&=\frac{1}{8}(1+\cos 2x)\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}\\&=\frac{1}{16}(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x\cos 4x)\\&=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{32}\cos 6x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{故原式}&=\int\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{32}\cos 6x\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{16}x+\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{192}\sin 6x+C.\end{aligned}$$

4. 变量代换法

① 若被积函数满足 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则可令 $\tan x=t$；

② 若被积函数满足 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可令 $\sin x=t$；

③ 若被积函数满足 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可令 $\cos x=t$.

【例 4.16】求下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin^3x+\cos^3x}dx$；　　(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(2+\sin^2x)\cos x}$；

(3) $\displaystyle\int\frac{5+4\cos x}{(2+\cos x)^2\sin x}dx$.

【解】(1) 令 $\tan x=t$，则 $\sec^2x\,dx=dt$，于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{t}{1+t^3}dt=\frac{1}{3}\int\frac{(1+t)^2-(1-t+t^2)}{(1+t)(1-t+t^2)}dt\\&=\frac{1}{3}\int\frac{t+1}{t^2-t+1}dt-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{1+t}\\&=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(t^2-t+1)'+\frac{3}{2}}{t^2-t+1}dt-\frac{1}{3}\ln|1+t|\\&=\frac{1}{6}\ln|t^2-t+1|+\frac{1}{\sqrt3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt3}\right)-\frac{1}{3}\ln|1+t|+C\\&=\frac{1}{6}\ln\frac{\tan^2x-\tan x+1}{(1+\tan x)^2}+\frac{1}{\sqrt3}\arctan\left(\frac{2\tan x-1}{\sqrt3}\right)+C.\end{aligned}$$

(2) 令 $\sin x=t$，则 $\cos x\,dx=dt$，于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{dt}{(2+t^2)(1-t^2)}=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1-t^2}dt+\frac{1}{3}\int\frac{1}{2+t^2}dt\\&=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{1}{3\sqrt2}\arctan\frac{t}{\sqrt2}+C\\&=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+\frac{1}{3\sqrt2}\arctan\frac{\sin x}{\sqrt2}+C.\end{aligned}$$

(3) 令 $\cos x=t$，则 $-\sin x\,dx=dt$，于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=-\int\frac{5+4t}{(2+t)^2(1-t^2)}dt=-\int\frac{1}{1-t^2}dt-\int\frac{1}{(2+t)^2}dt\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+\frac{1}{2+t}+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+\frac{1}{2+\cos x}+C.\end{aligned}$$

三、含无理式的不定积分

方法：一般可用分子或分母有理化方法化简，先用凑微分试试，若不行，再用分部积分法，最后利用变量代换(如三角代换，倒代换和令 $\sqrt[N]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$，其中 N 为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 的最小公倍数)将其化为有理函数积分.

【例 4.17】计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^5}{\sqrt{2x^3+5}}dx$.

【解】 $\displaystyle I=\int\frac{x^3x^2}{\sqrt{2x^3+5}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{2x^3+5}}dx^3=\frac{1}{12}\int\frac{2x^3+5-5}{\sqrt{2x^3+5}}d(2x^3+5)$

$$= \frac{1}{12}\int \sqrt{2x^3+5}\,\mathrm{d}(2x^3+5) - \frac{5}{12}\int \frac{1}{\sqrt{2x^3+5}}\mathrm{d}(2x^3+5)$$

$$= \frac{1}{18}(2x^3+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{6}\sqrt{2x^3+5} + C.$$

【例 4.18】 计算 $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

【解】 $I = \int \sqrt{x(x+1)}\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\mathrm{d}x$

$$= \int \sqrt{x}(x+1)\mathrm{d}x - \int [(x+1)-1]\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x + \int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x - \int (x+1)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x + \int (x+1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

【例 4.19】 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

【解】 令 $\sqrt[6]{x} = t$，则 $x = t^6$，$\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$，

$$I = \int \frac{1}{t^3+t^2}6t^5\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C.$$

【例 4.20】 计算不定积分 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$.

【解】 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x.$$

所以 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a} + C.$

【例 4.21】 计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\ (x>0)$.

【解】 设 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$，则 $x = \frac{1}{t^2-1}$，于是

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x = \int \ln(1+t)\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t.$$

而 $\int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2}\right]\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{4}\ln(t-1) - \frac{1}{4}\ln(t+1) + \frac{1}{2(t+1)} + C,$$

所以

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x+x^2}+C.$$

四、分段函数的不定积分

方法：

（1）分别求函数各分段支在相应区间内的原函数；

（2）考查函数在分段点处的连续性.如果连续，那么在包含该点的区间内有原函数存在，然后根据原函数的连续性定出积分常数 C；如果分段点是函数的第一类间断点，则在包含该点的区间内，不存在原函数，这时，函数的不定积分只能在不包含该点的每个分段区间内得到.

【例 4.22】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，求 $\int f(x)dx$.

【解】 当 $x>0$ 时，$\int f(x)dx=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C_1$，

当 $x<0$ 时，$\int f(x)dx=\int 0dx=C_2$.

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，所以其原函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，又

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)=C_1=\lim\limits_{x\to 0^-}C_2=C_2$，令 $C_1=C_2=C$，于是

$$\int f(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C, & x\geqslant 0\\ C, & x<0\end{cases}.$$

【例 4.23】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x^2+1, & 0<x\leqslant 1\\ 2x^3, & x>1\end{cases}$，求 $\int f(x)dx$.

【解】 由题可知 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，故在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$f(x)$ 不存在原函数；而 $x=1$ 是 $f(x)$ 的连续点，所以 $f(x)$ 的不定积分只能分别在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内得到. 对 $f(x)$ 的每个分支分别求不定积分得到

$$\int f(x)dx=\begin{cases}x+C_1, & x<0\\ \frac{x^3}{3}+x+C_2, & 0<x\leqslant 1\\ \frac{x^4}{2}+C_3, & x>1\end{cases}.$$

因为 $x=1$ 是 $f(x)$ 的连续点，所以 $f(x)$ 的原函数在 $x=1$ 连续，所以

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^3}{3}+x+C_2\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^4}{2}+C_3\right)\Rightarrow\frac{4}{3}+C_2=\frac{1}{2}+C_3\Rightarrow C_3=\frac{5}{6}+C_2.$$

故

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C_1, & x<0\\ \dfrac{x^3}{3}+x+C_2, & 0<x\leqslant 1\\ \dfrac{x^4}{2}+\dfrac{5}{6}+C_2, & x>1\end{cases}.$$

五、复合函数的不定积分

方法：先求出函数表达式，然后再计算不定积分.

【例 4.24】设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

【解】令 $\ln x=t$，则 $x=\mathrm{e}^t$，代入原方程得 $f(t)=\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$.

故
$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x&=\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\frac{1}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\&=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\&=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\ln\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}+C.\end{aligned}$$

【例 4.25】求不定积分 $\int xf'(2x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)$ 的原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$.

【解】
$$\begin{aligned}\int xf'(2x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int xf'(2x)\mathrm{d}(2x)\\&=\frac{1}{2}xf(2x)-\frac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{\sin x}{x}$ 为 $f(x)$ 的原函数，所以 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

于是 $f(2x)=\dfrac{2x\cos 2x-\sin 2x}{4x^2}$.

故
$$\begin{aligned}\int xf'(2x)\mathrm{d}x&=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{8x}-\frac{1}{4}\int f(2x)\mathrm{d}(2x)\\&=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{8x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}+C\\&=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4x}\sin 2x+C.\end{aligned}$$

习 题 四

一、选择题

1. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为连续的奇函数，且 $F(x)$ 为它的一个原函数，则

A. $F(x)=-F(-x)$. B. $F(x)=F(-x)$.

C. $F(x)=-F(-x)+C$. D. $F(x)=F(-x)+C$. 【 】

2. 下列函数中为同一个函数的原函数的是

A. $\arcsin x$ 和 $\arccos x$. B. e^{x} 和 $2+e^{x}$.

C. $\ln x^2$ 和 $\dfrac{\ln x}{x}$. D. $\sin^2 x$ 和 $\dfrac{1}{2}\cos 2x$. 【 】

3. 设 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$a\neq 0$，则 $\displaystyle\int\frac{f(ax)}{a}\mathrm{d}x=$

A. $\dfrac{\sin ax}{a^3x}+C$. B. $\dfrac{\sin ax}{a^2x}+C$.

C. $\dfrac{\sin ax}{ax}+C$. D. $\dfrac{\sin ax}{x}+C$. 【 】

4. 若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\ln x}{x}$，则 $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x=$

A. $\dfrac{\ln x}{x}+C$. B. $\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$.

C. $\ln|\ln x|+C$. D. $\dfrac{1-\ln x}{x^2}+C$. 【 】

5. 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

A. 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数.

B. 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数.

C. 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数.

D. 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必为单调增函数. 【 】

二、填空题

1. 设 $\displaystyle\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则 $\displaystyle\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$ ________.

2. $\displaystyle\int\frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

3. $\displaystyle\int\frac{1-x^8}{x(1+x^8)}\mathrm{d}x=$ ________.

4. 设 $f'(\sqrt{x})=\dfrac{1}{x}$ 且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$ ________.

5. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，则 $\displaystyle\int xf'(x)\mathrm{d}x=$ ________.

6. 已知 $y=f(x)$ 连续、可导，且 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，$y=g(x)$ 为 $f(x)$ 的连续的反函数，则 $\displaystyle\int g(x)\mathrm{d}x=$ ________.

三、计算题

1. 求 $\displaystyle\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}\mathrm{d}x$.

2. 求 $\displaystyle\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}\mathrm{d}x$.

3. 设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

4. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x)F(x)=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知 $F(0)=1$，$F(x)>0$，试求 $f(x)$.

参 考 答 案

一、1. B 2. B 3. A 4. D 5. A

二、1. $-\dfrac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$. 2. $-\dfrac{\ln x}{x}+C$. 3. $\dfrac{1}{8}(\ln x^8-2\ln(1+x^8))+C$.

4. $1-\dfrac{1}{x}$. 5. $2\ln x-\ln^2 x+C$. 6. $xg(x)-F(g(x))+C$.

三、1. $\displaystyle\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{e^{2x}(e^{2x}+1)}de^x$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x+e^{-x}+\arctan e^x)+C.$$

2. 令 $\sqrt{e^x-2}=t$，则原积分 $=2(x-2)\sqrt{e^x-2}+4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\dfrac{e^x-2}{2}}+C$.

3. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$(提示：先求出 $f(x)$ 的表达式).

4. $f(x)=\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$.