分数阶微分方程

第三讲 分数阶微分方程基本理论

一、 分数阶微分方程的出现背景及研究现状

1、出现背景

分数阶微积分是关于任意阶微分和积分的理论，它与整数阶微积分是统一的，是整数阶微积分的推广。

整数阶微积分作为描述经典物理及相关学科理论的解析数学工具已为人们普遍接受，很多问题的数学模型最终都可以归结为整数阶微分方程的定解问题，其无论在理论分析还是数值求解方面都已有较完善的理论。但当人们进入到复杂系统和复杂现象的研究时，经典整数阶微积分方程对这些系统的描述将遇到以下问题：

（1） 需要构造非线性方程，并引入一些人为的经验参数和与实际不符的假设条件；

（2） 因材料或外界条件的微小改变就需要构造新的模型；

（3） 这些非线性模型无论是理论求解还是数值求解都非常繁琐。

基于以上原因，人们迫切期待着有一种可用的数学工具和可依据的基本原理来对这些复杂系统进行建模。分数阶微积分方程非常适合于刻画具有记忆和遗传性质的材料和过程，其对复杂系统的描述具有建模简单、参数物理意义清楚、描述准确等优势，因而成为复杂力学与物理过程数学建模的重要工具之一。

2、研究现状

在近三个世纪里，对分数阶微积分理论的研究主要在数学的纯理论领域里进行，似乎它只对数学家们有用。然而在近几十年来，分数阶微分方程越来越多的被用来描述光学和热学系统、流变学及材料和力学系统、信号处理和系统识别、控制和机器人及其他应用领域中的问题。分数阶微积分理论也受到越来越多的国内外学者的广泛关注，特别是从实际问题抽象出来的分数阶微分方程成为很多数学工作者的研究热点。随着分数阶微分方程在越来越多的科学领域里出现，无论对分数阶微分方程的理论分析还是数值计算的研究都显得尤为迫切。然而由于分数阶微分是拟微分算子，它的保记忆性（非局部性）对现实问题进行了优美刻画的同时，也给我们的分析和计算造成很大困难。

在理论研究方面，几乎所有结果全都假定了满足李氏条件，而且证明方法也和经典微积分方程一样，换句话说，这些工作基本上可以说只是经典微积分方程理论的一个延拓。对分数阶微分方程的定性分析很少有系统性的结果，大多只是给出了一些非常特殊的方程的求解，且常用的求解方法都是具有局限性的。

在数值求解方面，现有分数阶方程数值算法还很不成熟，主要表现为：

（1）在数值计算中一些挑战性难题仍未得到彻底解决，如长时间历程的计算和大空间域的计算等；

（2）成熟的数值算法比较少，现在研究较多的算法主要集中在有限差分方法与有限单元法；

（3）未形成成熟的数值计算软件，严重滞后于应用的需要。

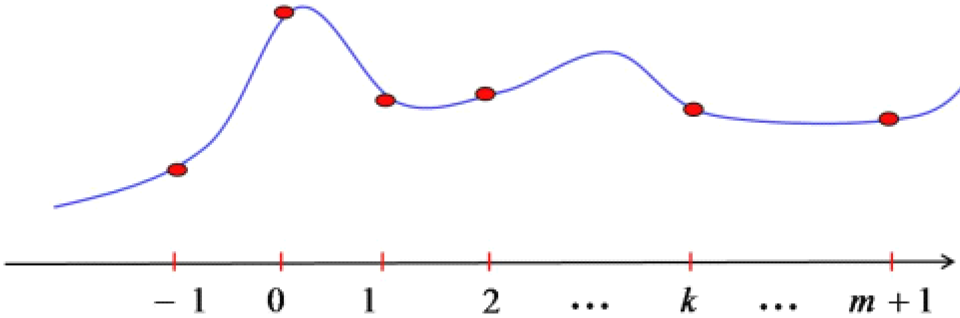
鉴于此，发展新数值算法，特别是在保证计算可靠性和精度的前提下，提高计算效率，解决分数阶微分方程计算量和存储量过大的难点问题，发展相应的计算力学应用软件成为迫切需要关注的课题。

二、 预备知识

1、 分数阶微积分经典定义回顾

作为分数阶微积分方程的基础，本书在第二章中对分数阶微积分的定义及性质做了系统的介绍，为了接下来讨论的需要，我们首先对其进行一个简要的回顾。

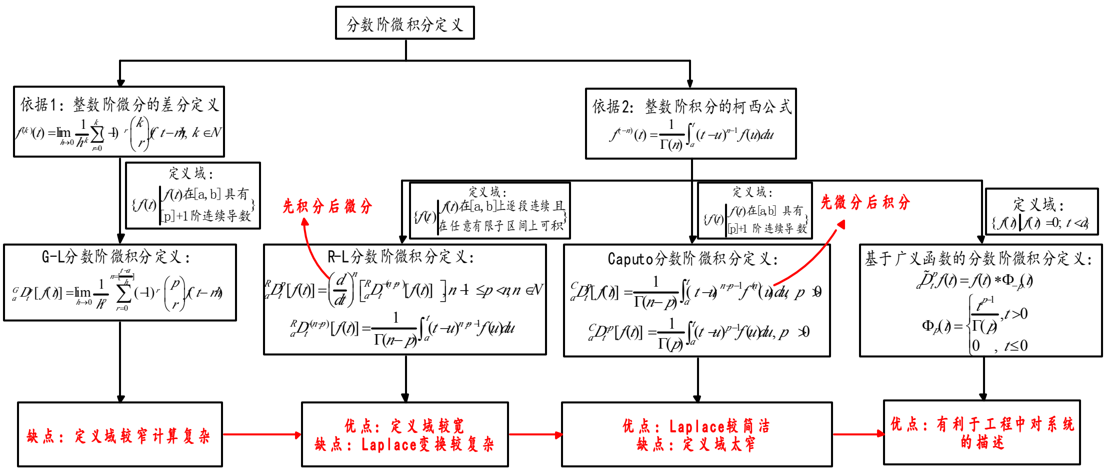
（1）分数阶微积分的主要思想



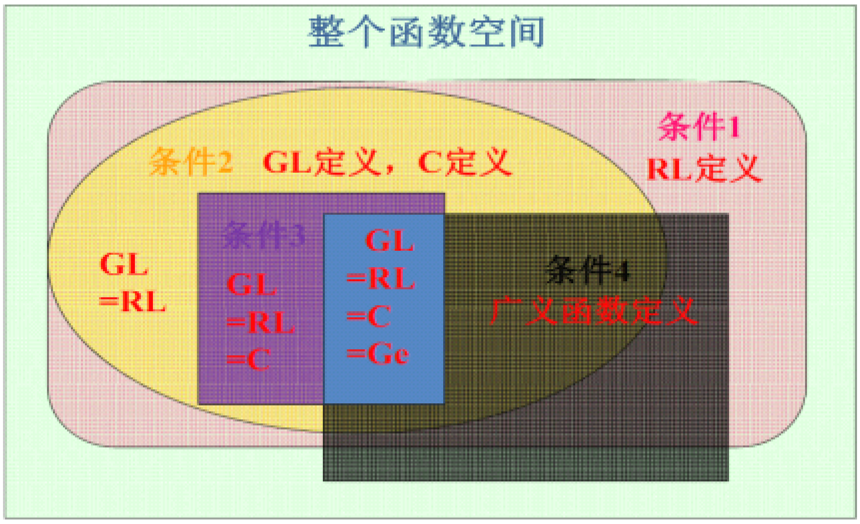
如上图所示，分数阶微积分的主要思想是推广经典的整数阶微积分，从而将微积分的概念延拓到整个实数轴，甚至是整个复平面。但由于延拓的方法多种多样，因而根据不同的需求人们给出了分数阶微积分的不同定义方式。然而这些定义方式不仅只能针对某些特定条件下的函数给出，而且只能满足人们的某些特定需求，迄今为止，人们仍然没能给出分数阶微积分的一个统一的定义，这对分数阶微积分的研究与应用造成了一定的困难。

（2）几种经典的分数阶微积分定义

下面我们试图从理论依据、定义域、表达式和优缺点几个方面给出常见的四种分数阶微积分定义的比较图。



从上图我们看到，在分数阶微积分的发展过程中，人们根据不同的需求，从不同角度给出了分数阶微积分的定义，但这些定义无论从对象上还是从表达式上都无法实现统一，它们之间的关系大致可以用下图来表示。



注：

条件 1：$f(t)$在$[a,b]$上逐段连续，且在任何有限子区间上可积；

条件 2：$f(t)$在$[a,b]$上具有$[p]+1$阶连续导数；

条件 3：$f^{(k)}(a)=0$，$k=1,2,\cdots,[p]$；

条件 4：$f(t)=0$，$t<a$。

由上图我们可以看到，对于不同的分数阶微积分定义方式有着不同定义域，即便是在公共区域内，不同的定义方式之间也无法实现完全的统一，这对分数阶微积分的应用和研究造成了一定的困难，因此人们迫切期望着分数阶微积分的一种哪怕是形式上的统一定义方式。

2、 M-R 序列分数阶微分的定义

为了满足实际需要，下面我们试图从形式上对分数阶微积分给出一种统一的表达式。

分数阶微积分的主要思想是推广经典的累次微积分，所有推广方法的共同目标是以非整数参数p取代经典微积分符号中的整数参数n，即：

$$\frac{d^n}{dt^n} \longrightarrow \frac{d^p}{dt^p}$$

实际上，任意的n阶微分都可以看成是一列一阶微分的叠加：

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n}=\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\cdots\frac{d}{dt}}_{n}f(t) \tag{1}$$

由此，我们可以给出一种在很多实际应用中十分重要的分数阶微积分的推广方式。首先，我们假设已有一种合适的推广方式来将一阶微分推广为α（$0\le\alpha\le1$）阶微分，即$\frac{d}{dt}\to D^{\alpha}$是可实现的。那么类似地可得到（1）的推广式为：

$$D^{n\alpha}f(t)=\underbrace{D^{\alpha}D^{\alpha}\cdots D^{\alpha}}_{n}f(t) \tag{2}$$

这种推广方式最初是由$K.S.Miller$和$B.Ross$提出来的，其中D^{α}采用的是

$R-L$分数阶微分定义，他们称之为序列分数阶微分。序列分数阶微分的其他形式可以通过将D^{α}替换为$G-L$分数阶微分、$Caputo$分数阶微分或其他任意形式分数阶微分来得到。

进一步，如果我们将（2）中的分数阶微分D^{α}替换为不同阶数的分数阶微分可得到序列分数阶微分更一般的表达式：

$$D^{\alpha}f(t)=D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}\cdots D^{\alpha_n}f(t) \tag{3}$$

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$

根据问题的需要，D^{α}可以是$R-L$分数阶微分、$G-L$分数阶微分、$Caputo$分数阶微分或其他任意形式的分数阶微分，从这一点看来，我们可以说序列分数阶微分从形式上给出了分数阶微积分在时域上的一个统一表达式，$R-L$分数阶微分、$G-L$分数阶微分和$Caputo$分数阶微分都只是序列分数阶微分的一种特殊情况。故而，下面我们在对分数阶微积分方程进行理论分析的时候可以仅仅针对序列分数阶微积分来给出结论。

3、M-R 序列分数阶微分的 Laplace 变换

下面我们考虑如下形式的序列分数阶微分的 Laplace 变换。

$$ {}_aD_t^{\sigma_m}={}_aD_t^{\alpha_m}\,{}_aD_t^{\alpha_{m-1}}\cdots{}_aD_t^{\alpha_1} \tag{4}$$

$$ {}_aD_t^{\sigma_m-1}={}_aD_t^{\alpha_m-1}\,{}_aD_t^{\alpha_{m-1}}\cdots{}_aD_t^{\alpha_1} \tag{5}$$

$$\sigma_m=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j \quad 0<\alpha_j\le 1,\quad (j=1,2,\cdots,m) \tag{6}$$

在 R-L 分数阶微分定义下有：

$$L\{{}_0D_t^{\alpha}f(t);s\}=s^{\alpha}F(s)-[{}_0D_t^{\alpha-1}f(t)]_{t=0} \tag{7}$$

重复利用上式m次可得：

$$L\{{}_0D_t^{\sigma_m}f(t);s\}=s^{\sigma_m}F(s)-\sum_{k=0}^{m-1}s^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}[{}_0D_t^{\sigma_{m-k}-1}f(t)]_{t=0} \tag{8}$$

注：虽然上述序列分数阶微分的 Laplace 变换是在 R-L 分数阶微分定义下进行证明的，但是该结论对其他几种分数阶微积分也是成立的。

4、泛函理论基础

定理 1（Schauder 不动点定理）

设U是$Banach$空间X的有界闭子集，如果$T:U\to U$是连续映射，那么T在U中存在不动点，即使得$Tx=x$的点存在。

定义 1（Lipschitz 条件）

设$\langle X,d\rangle$是距离空间，T是从X到X的映射，如果存在常数$q>0$，使得对所有的$x,y\in X$，

$$d(Tx,Ty)\le qd(x,y)$$

则称T满足*Lispschitz*条件，q成为T的*Lispschitz*常数。

特别的，如果$q<1$，则T称为压缩映射。

定理2（ Banach 压缩映像原理）

设$\langle X,d\rangle$是距离空间，$T:X\to X$是压缩映射，则T在X中恰有一个不动点。设这个不动点为$\overline{x}$，则对任何初始点$x_0\in X$，逐次迭代点列$x_{n+1}=Tx_n$，$n=1,2,\cdots$收敛于$\overline{x}$，且关于收敛速度有如下估计式：

$$d(x_n,\overline{x})\le q^n(1-q)^{-1}d(Tx_0,x_0)$$

其中，q是T的*Lipschitz*常数。

三、 解的存在唯一性理论

近年来，分数阶微分方程已经在国内外引起极大的研究兴趣，尤其是关于其解的性质的研究，诸如存在性及唯一性等，其中大多数的研究方法是通过把分数阶初值问题转换成等价的分数阶积分方程，然后运用不动点定理来得到分数阶初值问题解的存在唯一性结果。已有研究结果主要有以下限制：

（1） 函数的定义区间为有限区间$[a,b]$；

（2） 函数在定义域上需满足*Lipschitz*条件；

因此，目前人们在这方面所做的工作都是希望设法在放宽上述两个限制条件后给出分数阶微积分方程的解的存在唯一性定理。

下面我们对分数阶微分方程初值问题的现有理论结果作一个简单的介绍，相应的结论都是针对定义在有限区间$[0,T]$上的 M-R 序列分数阶微分形式，在满足*Lipschitz*条件下给出的，当然，由前面的介绍可知，这些结论也可直接推广到其他分数阶微分形式。

1、 线性分数阶微分方程解的存在唯一性定理

考虑如下形式的初值问题：

$${}_0D_t^{\sigma_n}y(t)+\sum_{j=1}^{n-1}p_j(t)\,{}_0D_t^{\sigma_{n-j}}y(t)+p_n(t)y(t)=f(t),(0<t<T<\infty) \tag{9}$$

$$[{}_0D_t^{\sigma_k-1}y(t)]_{t=0}=b_k\ ,k=1,2,\cdots,n \tag{10}$$

且$f(t)\in L_1(0,T)$，即
$$\int_0^T|f(t)|dt<\infty \tag{11}$$

第一步：假设$p_k(t)\equiv 0,(k=1,2,\cdots,n)$，考虑由此得到的退化问题解的存在唯一性。

定理1 如果$f(t)\in L_1(0,T)$，则方程

$${}_0D_t^{\sigma_n}y(t)=f(t) \tag{12}$$

有满足初值条件（10）的唯一解$y(t)\in L_1(0,T)$。

定理的证明过程如下：

步骤一 通过 Laplace 变换证明解的存在性；

下面我们设法构造一个待求解问题解，对式（12）做 Laplace 变换可得：

$$s^{\sigma_n}Y(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\sigma_n-\sigma_{n-k}}[{}_0D_t^{\sigma_{n-k}-1}y(t)]_{t=0}=F(s) \tag{13}$$

其中，$Y(s)$、$F(s)$分别是$y(t)$、$f(t)$的 Laplace 变换。利用初值条件（10）可得：

$$Y(s)=s^{-\sigma_n}F(s)+\sum_{k=0}^{n-1}b_{n-k}s^{-\sigma_{n-k}} \tag{14}$$

对上式做 Laplace 逆变换可得：

$$y(t)=\frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^t(t-\tau)^{\sigma_n-1}f(\tau)d\tau+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)}t^{\sigma_i-1} \tag{15}$$

步骤二 由分数阶微分的线性性和 Laplace 变换的性质证明唯一性。

假设有存在两个满足上述初值问题的解$y_1(t)$、$y_2(t)$

令$z(t)=y_1(t)-y_2(t)$ ，有分数阶微分方程的线性性可得：

$$\begin{cases}{}_0D_t^{\sigma_n}z(t)=0\\ [{}_0D_t^{\sigma_k-1}y(t)]_{t=0}=b_k\ ,k=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{16}$$

从而有

$$Z(s)=0 \tag{17}$$

由 Laplace 变换的性质可知：$z(t)=0$在$(0,T)$上几乎处处成立。

故原方程的解在$L_1(0,T)$上唯一。

注：上述证明过程中用到的 Laplace 变换法是一种常用的分数阶微分方程求解方法，该方法步骤简单，适用范围较广，在实际中有着重要应用，后面将对其进行详细介绍。

第二步：运用第一步的结论证明原初值问题解的存在唯一性。

定理 2 如果$f(t)\in L_1(0,T)$且$p_j(t)(j=1,2,\cdots,n)$是$[0,T]$上的连续函数，则初值问题（9）—（10）有唯一解$y(t)\in L_1(0,T)$。

定理的证明过程如下：

步骤一 化微分方程为积分方程

假设原方程有解$y(t)$并记${}_0D_t^{\sigma_n}y(t)=\varphi(t)$，那么运用定理 1 可得：

$$y(t)=\frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^t(t-\tau)^{\sigma_n-1}\varphi(t)dt+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \tag{18}$$

将上式代入到原微分方程表达式（9）可得：

$$\varphi(t)+\int_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau)dt=g(t) \tag{19}$$

其中

$$K(t,\tau)=p_{n(t)}\frac{(t-\tau)^{\sigma_n-1}}{\Gamma(\sigma_n)}+\sum_{k=1}^{n-1}p_{n-k}(t)\frac{(t-\tau)^{\sigma_n-\sigma_k-1}}{\Gamma(\sigma_n-\sigma_k)} \tag{20}$$

$$g(t)=f(t)-p_n(t)\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)}-\sum_{k=1}^{n-1}p_{n-k}(t)\sum_{i=k+1}^{n}b_i\frac{t^{\sigma_i-\sigma_k-1}}{\Gamma(\sigma_i-\sigma_k)} \tag{21}$$

步骤二 证明变换后的积分方程有唯一解

用不动点定理易证结论成立。

步骤三 说明原微分方程有唯一解

由定理 1 易得。

2、 一般形式的分数阶微分方程的存在唯一性定理

考虑如下形式的微分方程：

$$_0D_t^{\sigma_n}y(t)=f(t,y) \tag{22}$$

$$[_0D_t^{\sigma_k-1}y(t)]_{t=0}=b_k,\quad k=1,2,\cdots,n \tag{23}$$

其中，$f(t,y)$ 的定义域为平面 (t,y) 上的一个子区域 G，且存在 G 上的子区域 $R(h,K)$ 满足：

$$0<t<h,\quad \left|t^{1-\sigma_1}y(t)-\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)}\right|\le K \tag{24}$$

定理 3 设 $f(t,y)$ 为 G 上的连续实值函数，且在 G 上关于 y 满足 $Lipschitz$ 条件，即

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le A|y_1-y_2| \tag{25}$$

从而

$$|f(t,y)|\le M<\infty\text{，对任意 }(t,y)\in G\ \text{ 且 }\ K\ge\frac{Mh^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)}$$

那么，方程（22）—（23）在区域 $R(h,k)$ 有唯一的连续解。

定理的证明过程如下：

步骤一 化微分方程为等价积分方程；

对方程（22）按 D^{α_n}，$D^{\alpha_{n-1}}$，…，D^{α_1} 逐次进行分部积分可得：

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)}t^{\sigma_i-1}+\frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^t(t-\tau)^{\sigma_n-1}f(\tau,f(\tau,y(\tau)))d\tau \qquad (26)$$

步骤二 证明上述等价积分方程解的存在性;

构造函数序列 $y_0(t)$， $y_1(t)$， $y_2(t)$， … 如下:

$$y_0(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)}t^{\sigma_i-1} \qquad (27)$$

$$y_m(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)}t^{\sigma_i-1}+\frac{1}{\Gamma(\sigma_i)}\int_0^t(t-\tau)^{\sigma_n-1}f(\tau,y_{m-1}(\tau))d\tau \qquad (28)$$

首先，我们可以证明对任意的 $0<t\le h$ 及任意的 m 有 $y_m(t)\in R(h,k)$。

$$\begin{aligned}\left|t^{1-\sigma_1}y_m(t)-\sum_{i-1}^{n}b_i\frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)}\right|&=\left|\frac{t^{1-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^t(t-\tau)^{\sigma_n-1}f(\tau,y_{m-1}(\tau))d\tau\right|\\&\le\frac{Mt^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)}\le\frac{Mh^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)}\le K\end{aligned} \qquad (29)$$

进一步，我们可由数学归纳法证明，对任意的 m 有下式成立:

$$|y_m(t)-y_{m-1}(t)|\le\frac{MA^{m-1}t^{m\sigma_n}}{\Gamma(1+m\sigma_n)} \qquad (30)$$

证明过程如下:

在式（29）中令 $m=1$ 可得:

$$|y_1(t)-y_0(t)|\le\frac{Mt^{\sigma_n}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \qquad (31)$$

假设当 $m=k$ 时，式（30）成立，即下式成立:

$$|y_k(t)-y_{k-1}(t)|\le\frac{MA^{k-1}t^{k\sigma_n}}{\Gamma(1+k\sigma_n)} \qquad (32)$$

那么，当 $m=k+1$ 时有:

$$\begin{aligned}|y_{k+1}(t)-y_k(t)|&\le\frac{A}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^t(t-\tau)^{\sigma_n}|y_k(\tau)-y_{k-1}(\tau)|d\tau\\&\le\frac{MA^k}{\Gamma(1+k\sigma_n)}\frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^t(t-\tau)^{\sigma_n-1}\tau^{k\sigma_n}d\tau\\&\le\frac{MA^k}{\Gamma(1+k\sigma_n)}{}_0D_t^{-\sigma_n}t^{k\sigma_n}\\&\le\frac{MA^k}{\Gamma(1+k\sigma_n)}\frac{\Gamma(1+k\sigma_n)t^{k\sigma_n+\sigma_n}}{\Gamma(1+k\sigma_n+\sigma_n)}\\&\le\frac{MA^kt^{(k+1)\sigma_n}}{\Gamma(1+(k+1)\sigma_n)}\end{aligned} \qquad (33)$$

从而由归纳法可知，对任意的m，式（30）成立。

进而，有$\{\frac{MA^{n-1}t^{m\sigma_n}}{\Gamma(1+m\sigma_n)}\}$的收敛性可知，函数序列$\{y_m(t)\}$收敛。

令$y(t)=\lim_{m\to\infty}y_m(t)$，易证$y(t)$是等价积分方程(26)的解，也即是原微分方程(22)的解。

步骤三 证明上述等价积分方程解的唯一性；

假设$\tilde{y}(t)$也是等价积分方程（26）的解，令$z(t)=y(t)-\tilde{y}(t)$，有：

$$z(t)=\frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^t(t-\tau)^{\sigma_n-1}f(\tau,z(\tau))d\tau \tag{34}$$

由$z(t)$的连续性可知，存在常数B，使得对任意的$0\le t\le h$，$|z(t)|<B$。

利用式（34）可得：

$$|z(t)|\le\frac{ABt^{\sigma_n}}{\Gamma(1+\sigma_n)},\quad(0\le t\le h) \tag{35}$$

将该估计过程重复j次可得：

$$|z(t)|\le\frac{A^jBt^{j\sigma_n}}{\Gamma(1+\sigma_n)},\quad j=1,2,\cdots \tag{36}$$

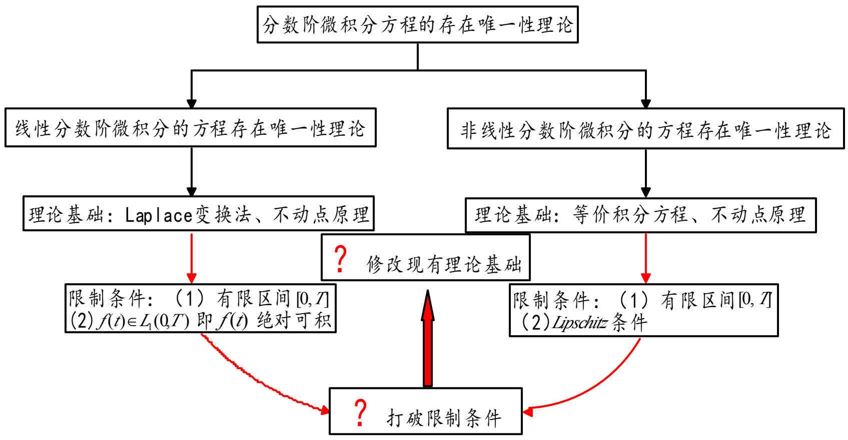
又

$$\lim_{j\to\infty}\frac{A^jBt^{j\sigma_n}}{\Gamma(1+\sigma_n)}\to 0$$

故$z(t)\equiv 0,\ (0\le t\le h)$，也即$y(t)\equiv\tilde{y}(t),\ (0\le t\le h)$。

注：有上面的介绍可知，整个线性分数阶微积分方程解的存在唯一性理论的证明过程都是建立在不动点理论的基础上的，使得我们必须将讨论范围限制在有限区间内的满足Lipschitz条件的函数上，如何打破这个限制是一个值得思考的问题。在某些情况下，定理3可直接作为分数阶微分方程的求解方法，通常称之为存在唯一性解法。

由上面的介绍，我们可将分数阶微积分方程存在唯一性理论及其所面临的问题描述如下：



3、 分数阶微分方程初值问题解的依赖性

下面我们来考察初值条件的微小变化将对方程的解造成怎样的影响，为此，我们在初值条件中引入一个微小的改变量。

$$[{}_0D_t^{\sigma_k-1}y(t)]_{t=0}=b_k+\delta_k,\quad k=1,2,\cdots,n \tag{37}$$

其中$\delta_k(k=1,2,\cdots,n)$为任意常数。

定理 4 设 $y(t)$是初值问题（22）—（23）的解，$\tilde{y}(t)$是初值问题（22）、（37）的解，那么对任意的 $t\in(0,h]$ 有：

$$\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right|\le\sum_{i=1}^{n}\left|\delta_i\right|t^{\sigma_i-1}E_{\sigma_n,\sigma_i}(At_n^{\sigma}) \tag{38}$$

其中 E_{σ_n,σ_i} 为 $M-L$ 函数。

证明：

步骤一 用定理3的方式构造两组函数序列 $y_0(t)$，$y_1(t)$，$y_2(t)$，$\cdots$和 $\tilde{y}_0(t)$，$\tilde{y}_1(t)$，$\tilde{y}_2(t)$，$\cdots$使得 $y(t)=\lim\limits_{m\to\infty}y_m(t)$，$\tilde{y}(t)=\lim\limits_{m\to\infty}\tilde{y}_m(t)$。

步骤二 由数学归纳法容易证明

$$\left|y_m(t)-\tilde{y}_m(t)\right|\le\sum_{i=1}^{n}\left|\delta_i\right|t^{\sigma_i-1}\sum_{k=0}^{m}\frac{A^k t^{k\sigma_n}}{\Gamma(k\sigma_n+\sigma_i)} \tag{39}$$

步骤三 对上式两端取极限$m\to\infty$可得：

$$\begin{aligned}\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right|&\le\sum_{i=1}^{n}\left|\delta_i\right|t^{\sigma_i-1}\sum_{k=0}^{m}\frac{A^k t^{k\sigma_n}}{\Gamma(k\sigma_n+\sigma_i)}\\&=\sum_{i=1}^{n}\left|\delta_i\right|t^{\sigma_i-1}E_{\sigma_n,\sigma_i}(At^{\sigma_n})\end{aligned} \tag{40}$$

四、 Laplace 变换求解法

随着分数阶微分方程在工程应用中出现得越来越频繁，给出分数阶微分方程的有效而简便的求解方法便显得越来越重要，然而现有的求解方法都有着各种各样的缺陷。下面我们介绍一种基于Laplace 变换的分数阶微分方程求解方法，该方法简单、直观，适用于常系数线性分数阶微分方程的求解。

1、 Laplace变换求解法

（1） Laplace变换求解法的主要步骤

步骤一：对原微分方程做Laplace 变换，化微分方程为代数方程；

步骤二：求解该代数方程，得到原问题在变换域上的解；

步骤三：对该变化域上的解做Laplace 逆变换得到原问题的时域解。

（2） Laplace变换求解法的应用

下面我们通过两个例子来说明Laplace 变换法的应用方法。

例 1 我们考虑用Laplace 变换法对如下的非齐次标准分数阶微分方程的初值问题进行求解。

$$ {}_0D_t^{\alpha} y(t) - \lambda y(t) = h(t)\text{，}(t>0) \tag{41} $$

$$ [{}_0D_t^{\alpha-k} y(t)]_{t=0} = b_k\text{，}(k=1,2,\cdots,n) \tag{42} $$

其中，

$$ n-1<\alpha<n $$

解：对方程（41）两端做Laplace 变换，并利用初值条件（42）可得：

$$ s^{\alpha} Y(s) - \lambda Y(s) = H(s) + \sum_{k=1}^{n} b_k s^{k-1} $$

从而

$$ Y(s) = \frac{H(s)}{s^{\alpha}-\lambda} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{s^{k-1}}{s^{\alpha}-\lambda} \tag{43} $$

对式（31）做Laplace 逆变换可得原微分方程的解为：

$$ y(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k t^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha}) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda (t-\tau)^{\alpha}) h(\tau) d\tau \tag{44} $$

注：某些文献中也给出了该问题用迭代法进行求解的过程，虽然两种解法的结果相同，但显然Laplace 求解法更为直观、简便。

例 2 下面我们考虑用Laplace 变换法对序列分数阶微分方程的初值问题进行求解。

$$ {}_0D_t^{\alpha_2}({}_0D_t^{\alpha_1} y(t)) - \lambda y(t) = h(t) \tag{45} $$

$$ [{}_0D_t^{\alpha_2-1}({}_0D_t^{\alpha_1} y(t))]_{t=0} = b_1\text{，}[{}_0D_t^{\alpha_1-1} y(t)]_{t=0} = b_2 \tag{46} $$

解：对方程（45）两端做Laplace 变换，并利用初值条件（46）可得：

$$(s^{\alpha_1+\alpha_2}-\lambda)Y(s)=H(s)+s^{\alpha_2}b_2-b_1$$

从而

$$Y(s)=\frac{H(s)+s^{\alpha_2}b_2+b_1}{s^{\alpha_2+\alpha_1}-\lambda} \tag{47}$$

对式（35）做 Laplace 逆变换可得原微分方程的解为：

$$y(t)=b_2t^{\alpha_1-1}E_{\alpha,\alpha_1}(\lambda t^{\alpha})+b_1t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^{\alpha})h(\tau)d\tau \tag{48}$$

其中，$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$。

注：对比上面两个初值问题容易看到他们在形式上非常相似，唯一的差别体现在一个是基于经典分数阶微积分定义的标准分数阶微分方程，一个是基于序列分数阶微积分定义的序列分数阶微分方程，从而在初值地给法不一样。但我们发现它们的解在表达式上也非常地相近，对比结果如下：

$$y(t)=\sum_{k=1}^{n}b_kt^{\alpha-k}E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha})+\boxed{\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^{\alpha})h(\tau)d\tau}$$

$$\Big\downarrow \text{令 } G(t)=t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})$$

$$y(t)=\sum_{k=1}^{n}b_kt^{\alpha-k}E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha})+\boxed{G(t)*h(t)}$$

$$\leftrightarrow$$

$$y(t)=b_2t^{\alpha_1-1}E_{\alpha,\alpha_1}(\lambda t^{\alpha})+b_1t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})+\boxed{\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^{\alpha})h(\tau)d\tau}$$

$$\Big\downarrow \text{令 } G(t)=t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})$$

$$y(t)=b_2t^{\alpha_1-1}E_{\alpha,\alpha_1}(\lambda t^{\alpha})+b_1t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})+\boxed{G(t)*h(t)}$$

通过上面的对比可以发现，对应的标准分数阶微分方程和序列分数阶微分方程的解有一个共同点，即它们具有同样的 *Green* **函数，下面我们就** *Green* **展开讨论。**

2、 Green 函数

考虑如下的初值问题：

$$ {}_0L_ty(t)=f(t),\ [{}_0D_t^{\sigma_{k}-1}y(t)]_{t=0}=0,\ (k=1,2,\cdots,n) \tag{49}$$

其中

$$ {}_0L_ty(t)\equiv {}_0D_t^{\sigma_n}y(t)+\sum_{k=1}^{n-1}p_k(t)\,{}_0D_t^{\sigma_{n-k}}y(t)+p_n(t)y(t)$$

（1） 定义

若函数 $G(t,\tau)$ 满足如下条件，则称其为方程（37）的 *Green* 函数：

1） ${}_\tau L_tG(t,\tau)=0$ 对任意的 $\tau\in(0,t)$；

2） $\lim\limits_{\tau\to t^-}({}_\tau D_t^{\sigma_k-1}G(t,\tau))=\delta_{k,n}$， $k=0,1,\cdots,n$ （$\delta_{k,n}$ 是 Kronecker delta 函数）；

3） $\lim\limits_{\substack{\tau,t\to 0^+\\ \tau<t}}({}_\tau D_t^{\sigma_k}G(t,\tau))=0$， $k=0,1,\cdots,n$。

（2） 性质

1） $y(t)=\int_0^t G(t,\tau)f(\tau)d\tau$ 是方程（49）的解；

2）对常系数分数阶微分方程有：$G(t,\tau)\equiv G(t-\tau)$；

3）对 $G(t,\tau)$ 的适当微分可得到一组齐次方程（$f(t)\equiv 0$）的线性无关解。

下面我们利用 *Green* 函数的定义来证明上述三个性质。

证明 1)：计算 ${}_0D_t^{\sigma_k}y(t)$ 如下：

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^{\sigma_k}y(t) &= {}_0D_t^{\alpha_k}({}_0D_t^{\sigma_{k-1}}y(t)) = {}_0D_t^{\alpha_k}\int_0^t {}_\tau D_t^{\sigma_{k-1}}G(t,\tau)f(\tau)d\tau \\
&= \int_0^t {}_\tau D_t^{\alpha_k}({}_\tau D_t^{\sigma_{k-1}}G(t,\tau))f(\tau)d\tau + \lim_{\tau\to t^-}{}_\tau D_t^{\alpha_k-1}({}_\tau D_t^{\sigma_{k-1}}G(t,\tau))f(\tau) \\
&= \int_0^t {}_\tau D_t^{\alpha_k}({}_\tau D_t^{\sigma_{k-1}}G(t,\tau))f(\tau)d\tau + \underbrace{\boxed{\lim_{\tau\to t^-}{}_\tau D_t^{\sigma_k-1}G(t,\tau)}}_{\delta_{k,n}\text{（ 定义2））}}f(\tau) \\
&= \begin{cases} \int_0^t {}_\tau D_t^{\sigma_k}G(t,\tau)f(\tau)d\tau & k<n \\ \int_0^t {}_\tau D_t^{\sigma_k}G(t,\tau)f(\tau)d\tau + f(t) & k=n \end{cases}
\end{aligned} \tag{50}$$

将上述等式所表示的 ${}_0D_t^{\sigma_1}y(t)$，${}_0D_t^{\sigma_2}y(t)$，…，${}_0D_t^{\sigma_n}y(t)$ 累加起来有：

$${}_0L_ty(t)=\int_0^t \overbrace{\boxed{{}_\tau L_tG(t,\tau)}}^{0\text{（ 定义1））}}f(\tau)d\tau + f(t)= f(t) \tag{51}$$

证明 2)：由 Laplace 求解法可得。

证明 3)：第一步，取 $0<\lambda<\sigma_n$，令 $y_\lambda(t)={}_0D_t^\lambda G(t)$，由交换律的条件及定义 3）有：

$${}_0L_ty_\lambda(t)={}_0L_t({}_0D_t^\lambda G(t))={}_0D_t^\lambda({}_0L_tG(t))=0 \tag{52}$$

故 $y_\lambda(t)$ 是原齐次方程的解。

第二步，由结合律可知：

$$\begin{aligned}
[{}_0D_t^{\sigma_n-\lambda-1}y_\lambda(t)]_{t=0} &= [{}_0D_t^{\sigma_n-\lambda-1}({}_0D_t^\lambda G(t))]_{t=0} \\
&= [{}_0D_t^{\sigma_n-1}G(t)]_{t=0}=1
\end{aligned} \tag{53}$$

有上面的分析可知，对线性常系数分数阶微分方程的求解就转换为寻找该方程的分数阶 *Green* 函数，有该 *Green* 函数便可直接写出该方程的解，解的具体表达式如下：

$$y(t)=\sum_{k=1}^n b_k\psi_k(t)+\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{54}$$

$$b_k = [{}_0 D_t^{\sigma_k - 1} y(t)]_{t=0}$$

$$\psi_k(t) = {}_0 D_t^{\sigma_n - \sigma_k} G(t)$$

下面我们给出寻找一般的线性常系数分数阶微分方程的$Green$函数的方法。

（3） 求法

对于常系数分数阶微分方程而言，我们可以通过对其做$Laplace$变换来得到相应的$Green$函数，下面我们通过一个例子来对其进行说明。

例 3 考虑如下的一阶常系数微分方程：

$$a\,{}_0 D_t^{\alpha} y(t) = f(t) \quad （55）$$

解：由于初值对$Green$函数无影响，因此我们对上式做$Laplace$变换并忽略初值部分可得：

$$as^{\alpha} Y(s) = F(s) \quad （56）$$

从而

$$Y(s) = \frac{1}{as^{\alpha}} F(s) \quad （56）$$

故

$$g(s) = \frac{1}{as^{\alpha}} \quad （57）$$

对其做 Laplace 逆变换可得：

$$G(s) = \frac{1}{a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(a)} \quad （58）$$

注：对如下的n阶分数阶微分方程：

$$a_n D^{\beta_n} y(t) + a_{n-1} D^{\beta_{n-1}} y(t) + \cdots a_1 D^{\beta_1} y(t) + a_0 D^{\beta_0} y(t) = f(t)$$

（59）

假设$\beta_n > \beta_{n-1} > \cdots > \beta_1 > \beta_0$可得：

$$g_n(s) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^{\beta_k}} \quad （60）$$

$$G_n(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0, \cdots k_{n-2 \geq 0}}} (m; k_0, k_1, \cdots, k_{n-2})$$

$$\prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n}\right)^{k_i} t^{(\beta_n - \beta_{n-1}) m + \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j - 1} \quad （61）$$

$$\times E^{(m)}_{(\beta_n - \beta_{n-1}) m + \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j} \left(-\frac{a_{n-1}}{a_n} t^{\beta_n - \beta_{n-1}}\right)$$

五 小结

有关分数阶微分方程的理论分析部分我们主要介绍了两方面的内容，一是分数阶微分方程解的性质，一是分数阶微分方程的求解方法。由于对分数阶微分方程的研究还不够成熟，因此对其所做出的理论分析还处于探索阶段。已有成果多半是对经典微积分方程理论的简单推广，且只能覆盖部分特殊形式的分数阶微分方程。现有的很多工作都是试图寻找新的理论方法，以打破现有的限制条件，力求构建一套完善的分数阶微分方程理论。