第一章　函　数

1.集合运算公式

$A\bigcup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$，$A\subset A\bigcup B$，$B\subset A\bigcup B$.

$A\bigcup\varnothing=A$，$A\bigcup U=U$，$A\bigcup A=A$.

$A\bigcap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$，$A\bigcap B\subset A$，$A\bigcap B\subset B$，

$A\bigcap\varnothing=\varnothing$，$A\bigcap U=A$，$A\bigcap A=A$.

$A-B=\{x\mid x\in A且x\notin B\}$, $\overline{A}=\{x\mid x\in U且x\notin A\}$, $A\bigcup\overline{A}=U$, $A\bigcap\overline{A}=\varnothing$.

2.集合运算律

（1）交换律：　$A\bigcup B=B\bigcup A$；$A\bigcap B=B\bigcap A$.

（2）结合律：$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$；$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$.

（3）分配律：$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$；

$$(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C).$$

（4）摩根律（对偶律）：$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$；$\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

3. 绝对值及其运算的性质

（1）$|x|\ge 0$，　$|-x|=|x|=\sqrt{x^2}$，$-|x|\le x\le|x|$.

（2）$|xy|=|x|\bullet|y|$，$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\ (y\ne 0)$.

（3）$|x|\le y\Leftrightarrow -y\le x\le y\quad(y\ge 0)$；$|x|\ge y\Leftrightarrow x\ge y$ 或 $x\le -y\quad(y\ge 0)$.

（4）$|x|-|y|\le|x+y|\le|x|+|y|$.

（5）$|x|-|y|\le|x-y|\le|x|+|y|$.

（6）$|x-y|\ge\big||x|-|y|\big|$.

4. 几个常用的分段函数

(1)绝对值函数：$y=|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

(2) 符号函数： $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0.\end{cases}$

(3) 取整函数： $y=[x]$.

(4) 狄立克莱函数： $y=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}, \\ 0, & x\in\overline{\mathbf{Q}},\end{cases}$ 其中 $\mathbf{Q},\overline{\mathbf{Q}}$ 分别表示有理数和无理数.

5. 函数的几种简单性质

（1）函数的奇偶性　奇函数 $f(-x)=-f(x)$，偶函数 $f(-x)=f(x)$

（2）函数的周期性　$f(x+T)=f(x)$ 满足等式的最小正数 T，称为函数的周期

（3）函数的单调性

对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，

当 $x_1<x_2$ 时，如果有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加或单调递增；

当 $x_1<x_2$ 时，如果有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少或单调递减.

对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，如果有 $f(x_1)\le f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调不减；

当 $x_1<x_2$ 时，如果有 $f(x_1)\ge f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调不增.

（4）函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，其中 (a,b) 可以是定义域，也可以是定义域的一部分.

如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\le M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界. 如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界.

第二章　极限与连续

1．极限的四则运算法则及重要定理

定理 1　如果 $\lim x = A$， $\lim y = B$，则 $\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y = A \pm B$.

推论　两个无穷小的代数和仍为无穷小.

定理 2　如果 $\lim x = A$， $\lim y = B$，则 $\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y = A \cdot B$.

推论 1　两个无穷小的乘积仍为无穷小.

推论 2　如果 $\lim x = A$，c 为常数，则 $\lim(cx) = c\lim x = cA$.

推论 3　如果 $\lim x = A$，n 为正整数，则 $\lim x^n = (\lim x)^n = A^n$.

定理 3　如果 $\lim x = A$， $\lim y = B$，且 $B \neq 0$，则 $\lim \dfrac{x}{y} = \dfrac{\lim x}{\lim y} = \dfrac{A}{B}$.

定理 4　设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与 $y = f(u)$ 复合而成，$y = f[g(x)]$ 在点 x_0 的某个去心领域内有定义，若 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$， $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$，且 $g(x) \neq u_0$（$x \in \overset{0}{U}(x_0)$），则 $\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$.

定理 5　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件为对任意数列 $\{x_n\}$， $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$，有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

2．两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

（2）$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

3．常用的等价无穷小量

当 $x \to 0$ 时，

$\sin x \sim x$， $\tan x \sim x$， $\arcsin x \sim x$， $\arctan x \sim x$， $\ln(1+x) \sim x$，

$e^x - 1 \sim x$， $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$， $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$

第三章　导数与微分

1. 常用求导公式

$(C)' = 0$　　　　$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$

$(\sin x)' = \cos x$　　　　$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$ $\qquad$ $(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$ $\qquad$ $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(a^x)' = a^x \ln a$ $\qquad$ $(e^x)' = e^x$

$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$ $\qquad$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $(\operatorname{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$\left(\sin x\right)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ $\left(\cos x\right)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

2. 导数运算法则

（1）函数的和、差、积、商的求导法则:

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x); \quad [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

(2) 复合函数的求导法则: $\dfrac{dy}{dx} = f'(u)\bullet\varphi'(x)$ 或 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\bullet\dfrac{du}{dx}$.

(3) 反函数的求导法则: $[f^{-1}(y)]' = \dfrac{1}{f'(x)}$ 或 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

(4) 取对数求导法

对于幂指函数 $y = u^v$ （u, v 都是可导函数），可由公式 $y = e^{v\ln u}$ 得到

$$\frac{dy}{dx} = (u^v)'_x = u^v[\frac{vu'}{u} + v\ln u].$$

(6) 由参数方程所确定的函数的求导法则: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

3. 微分基本公式

$dc = 0$（c 为常数） $\qquad$ $d\left(x^\alpha\right) = \alpha x^{\alpha-1}dx$

$\mathrm{d}\left(\sin x\right)=\cos x\mathrm{d}x$ $\qquad$ $\mathrm{d}\left(\cos x\right)=\sin x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\left(\tan x\right)=\sec^2 x\mathrm{d}x$ $\qquad$ $\mathrm{d}\left(\cot x\right)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\left(\sec x\right)=\sec x\tan x\mathrm{d}x$ $\qquad$ $\mathrm{d}\left(\csc x\right)=-\csc x\cot\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\left(a^x\right)=a^x\ln a\mathrm{d}x(a\succ 0,a\neq 1)$ $\qquad$ $\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\left(\log_a x\right)=\dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}\ \mathrm{d}x$ $\qquad$ $\mathrm{d}\left(\ln x\right)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\left(\arcsin x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ $\qquad$ $\mathrm{d}\left(\arccos x\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\left(\arctan x\right)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ $\qquad$ $\mathrm{d}\left(\mathrm{arc}\cot x\right)=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

4. 微分运算法则

$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$； $\qquad$ $\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$（C 为常数）；

$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$； $\qquad$ $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$ （$v\neq 0$）.

第四章　中值定理与导数的应用

1．罗尔定理

若函数 $f(x)$ 满足（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；（2）在开区间 (a,b) 内可导；（3）$f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

2．拉格朗日定理

若函数 $f(x)$ 满足（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；（2）在开区间 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

推论　若函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为 0，则在 I 上，$f(x)$ 为常数.

3．柯西定理

若函数 $f(x),g(x)$ 满足（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；（2）在开区间 (a,b) 内可导；（3）$g'(x)\neq 0,x\in(a,b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

4. 洛比达法则

（1）“$\dfrac{0}{0}$”型未定式

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

① $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} g(x)=0$，

② $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 a 的某个去心邻域内（$|x|$ 充分大的范围内）可导，且 $g'(x)\neq 0$，

③ $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$，

则 $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$.

（2）“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

① $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} g(x)=\infty$，

② $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 a 的某个去心邻域内（$|x|$ 充分大的范围内）可导，且 $g'(x)\neq 0$，

③ $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$，

则 $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$.

5. 函数增减性判别

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

⑴ 如果 $x\in(a,b)$ 时恒有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加;

⑵ 如果 $x\in(a,b)$ 时恒有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少.

6.极值的第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个空心邻域 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 内连续并可导，且 $f'(x_0)=0$（或 $f'(x_0)$ 不存在）.

（1）若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值 $f(x_0)$；

（2）若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f'(x) < 0$，而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值 $f(x_0)$；

（3）若 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x)$ 的符号保持不变，则 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值.

7．极值的第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 具有二阶导数，且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$，

（1）若 $f''(x_0) > 0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值 $f(x_0)$；

（2）若 $f''(x_0) < 0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值 $f(x_0)$.

8．曲线的凹向的判别法

设函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数，

（1）若 $x \in (a,b)$ 时，$f''(x) > 0$，则曲线 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内上凹;

（2）若 $x \in (a,b)$ 时，$f''(x) > 0$，则曲线 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内上凹.

9. 曲线的渐近线

(1) 水平渐近线：若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则 $y = A$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

（2）铅垂渐近线：若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$，则 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的铅垂渐近线.

（3）斜渐近线：若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ 存在，且 $k \neq 0$，$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = b$ 存在，则 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

第五章　不定积分

1. 基本积分公式

$\int 0\mathrm{d}x = C$ (C 为常数)　　$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+\alpha}x^{\alpha+1} + C$　（$\alpha \neq -1$）

$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$　　$\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln a}a^{x} + C$　（$a \succ 0, a \neq 1$）

$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$　　$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$　　$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

$$\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec xdx = \ln|\sec x + tgx| + C$$

$$\int \csc xdx = \ln|\csc x - ctgx| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\frac{a+x}{a-x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 xdx = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 xdx = -ctgx + C$$

$$\int \sec x \cdot tgxdx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot ctgxdx = -\csc x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int shxdx = chx + C$$

$$\int chxdx = shx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$$

2. 不定积分的线性运算规律

$$\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x \quad (a \neq 0)\text{；} \int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x .$$

3. 换元积分法

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)} = F[\varphi(x)] + C$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

4. 分部积分法

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x \quad x \in I \qquad 或 \qquad \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \quad x \in I .$$

第六章　定积分

1. 两个规定

(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(2) $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2. 基本性质

(1) 被积函数中的常数因子可以提到积分号外：

$$\int_a^b kf\left(x\right)\mathrm{d}x = k\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x .$$

(2) 函数代数和的积分等于它们积分的代数和：

$$\int_a^b \left[f\left(x\right) \pm g\left(x\right) \right]\mathrm{d}x = \int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x .$$

(3) 定积分关于积分区间的可加性：

$$\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x .$$

(4) 1 的积分等于区间积分限之差：

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a .$$

(5) 若在区间$\left[a,b\right]$上 $f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

(6) 若在$[a,b]$上 $f(x) \leq g(x)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(7) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x \quad (a < b)$.

(8) 设M 及m 分别是函数 $f(x)$ 在区间$\left[a,b\right]$上的最大值及最小值，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a) \qquad (a < b) .$$

(9) 定积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) .$$

(10) 奇偶函数的积分性质

若 $f(x)$ 为奇函数，则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$；

若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

(11) 周期函数的积分性质

设 $f(x)$ 以 T 为周期，a 为常数，则 $\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x$.

3.牛顿—莱布尼茨公式 $\int_{a}^{b} f\left(x\right)\mathrm{d}x = F\left(b\right) - F\left(a\right)$

4. 定积分的换元积分法

第一类：$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} g[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) \xlongequal[\varphi(a)=\alpha,\varphi(b)=\beta]{u=\varphi(x)} \int_{\alpha}^{\beta} g(u)\mathrm{d}u$.

第二类：$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal[\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b]{x=\varphi(t)} \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

5. 定积分的分部积分法 $\int_{a}^{b} u\mathrm{d}v = \left[uv\right]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v\mathrm{d}u$

6. 平面图形的面积

(1) 当 $f(x) \geq 0$ 时，由曲线 $y = f(x)$ 及直线 $x = a, x = b$ 与 x 轴所围成曲边梯形的面积为

$$A = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 当 $f(x) \geq g(x)$ 时，由曲线 $y = f(x)$ ，$y = g(x)$ 及直线 $x = a, x = b$ 所围成图形的面积为

$$A = \int_{a}^{b}\left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x.$$

(3) 当 $\varphi(y) \geq 0$ 时，由曲线 $x = \varphi(y)$ 及直线 $y = c, y = d$ 与 y 轴所围成曲边梯形的面积为

$$A = \int_{c}^{d} \varphi(y)\mathrm{d}y.$$

(4) 当 $\varphi(y) \geq \psi(y)$ 时，由曲线 $x = \varphi(y)$ ，$x = \psi(y)$ 及直线 $y = c$，$y = d$ 所围成图形的面积为

$$A = \int_{c}^{d}\left[\varphi(y) - \psi(y)\right]\mathrm{d}y.$$

7. 旋转体的体积

(1) 由连续曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围曲边梯形绕 x 轴旋转所形成的

旋转体的体积

$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x .$$

(2) 由曲边梯形为 $a \le x \le b$， $g(x) \le y \le f(x)$ 绕 x 轴旋转所形成的旋转体的体积

$$V_x = \int_a^b \pi[f^2(x) - g^2(x)]\mathrm{d}x .$$

(3) 由连续曲线 $x = \varphi(y)$，直线 $y = c, y = d$ 及 y 轴所围曲边梯形绕 y 轴旋转所形成的旋转体的体积

$$V_y = \int_c^d \pi\varphi^2(y)\mathrm{d}y .$$

(4) 由曲边梯形为 $c \le y \le d$， $\psi(y) \le x \le \varphi(y)$ 绕 y 轴旋转所形成的旋转体的体积

$$V_y = \int_c^d \pi[\varphi^2(y) - \psi^2(y)]\mathrm{d}y .$$

8. 定积分在经济中的应用

(1) 已知边际成本求总成本： $C(x) = \int_0^x C'(t)\mathrm{d}t$；

(2) 已知边际收益求总收益： $R(x) = \int_0^x R'(t)\mathrm{d}t$；

(3) 已知边际利润求总利润： $L(x) = \int_0^x L'(t)\mathrm{d}t$.

(4) 三者之间的关系： $L(x) = R(x) - C(x)$.

9.反常积分

(1) $[a, +\infty)$ 上的广义积分 $\int_a^{+\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

(2) $(-\infty, b]$ 上的广义积分 $\int_{-\infty}^b f\left(x\right)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

(3) $(-\infty, +\infty)$ 上的广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x .$$

10. Γ 函数

(1) Γ 函数的定义

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \quad (r > 0) .$$

(2) Γ 函数的性质

① $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$.

② $\Gamma(n+1)=n!\ \ (n$为正整数$)$.

③ $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

第七章　无穷级数

1.　正项级数敛散性的判别法

(1) 比较判别法

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数,且$u_n\le \upsilon_n(n=1,2,\cdots)$. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；反之,若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

(2) 比较判别法的极限形式

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数,

① 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\rho\ \ (0\le\rho<+\infty)$,且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

② 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\rho>0$或$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$,且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

(3) 比值判别法

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数,如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$,则当$\rho<1$时级数收敛；$\rho>1$（或$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$）时级数发散；$\rho=1$时级数可能收敛也可能发散.

(4) 根值判别法

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数,如果$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$,则当$\rho<1$时级数收敛；$\rho>1$（或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$）时级数发散；$\rho=1$时级数可能收敛也可能发散.

2.　$p-$级数

形如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}=1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}+\cdots$的级数称为$p$-级数.

p –级数的敛散性有如下结论：

当 $p>1$ 时，p –级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛；

当 $p\le 1$ 时，p –级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

特别地，当 $p=1$ 时，p –级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 称为调和级数，调和级数是发散的.

3. 交错级数

如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件：

① $u_n \ge u_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$；

② $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛, 且其和 $s\le u_1$, 其余项 r_n 的绝对值 $|r_n|\le u_{n+1}$.

4. 条件收敛与绝对收敛

（1）绝对收敛：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛, 是指其绝对值构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛.

（2）条件收敛：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛, 是指级数收敛但不绝对收敛（即 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散）.

（3）绝对收敛与收敛的关系：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛, 则它必定收敛.

（4）绝对收敛的判定定理：如果任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l$，则当 $l<1$ 时级数绝对收敛；当 $l>1$ 时级数发散.

5. 幂级数

（1）幂级数的形式：

① x 的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

② （$x-x_0$）的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

(2) 收敛半径的计算：

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则收敛半径 $R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$

6. 常见初等函数的展开式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots,\ x \in (-1,1).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots,\ x \in (-1,1).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,\ x \in (-\infty,\infty).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,\ x \in (-\infty,\infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,\ x \in (-\infty,\infty)$$

7. 泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中拉格朗日型余项 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 在 x_0 与 x 之间.

8. 泰勒级数

函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2\,!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}(x-x_0)^n + \cdots$$

.

特别地, 当 $x_0 = 0$ 时, 即为 $f(x)$ 的麦克劳林级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n + \cdots.$$

第八章　多元函数

1．几种常见的曲面及其标准方程

（1）平面：$Ax+By+Cz+D=0$，其中A,B,C,D均为常数，且A,B,C不全为 0.

（2）球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$，其中$(x_0,y_0,z_0)$是球心，$R>0$是半径.

（3）圆柱面：$x^2+y^2=R^2$，其中$R>0$.

（4）旋转抛物面：$z=x^2+y^2$.

（5）双曲抛物面（或鞍面）：$z=y^2-x^2$.

2.全微分的性质

定理 1　设函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处可微，则函数$f(x,y)$在该点处的偏导数$f_x'(x,y),f_y'(x,y)$存在，且$A=f_x'(x,y),B=f_y'(x,y)$，即全微分

$$\mathrm{d}z=f_x'(x,y)\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y.$$

3．连续、偏导数存在、全微分存在三者间的关系

设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某个领域内有定义，关系如下：(逆向不成立)

$$\begin{tikzcd}
f(x,y)\text{在}P_0\text{点连续} & & f_x(P_0),f_y(P_0)\text{存在} \\
f(x,y)\text{在}P_0\text{点可微} \arrow[u] \arrow[urr] & & f_x(x,y),f_y(x,y)\text{在}P_0\text{点连续} \arrow[u] \arrow[ll] \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

4.多元复合函数的微分法

定理 1　如果函数$u=\varphi(t),v=\psi(t)$在t点可导，函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)处可微，则复合函数$z=f(\varphi(t),\psi(t))$在t点可导，且$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

定理 2　如果函数$u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$在$(x,y)$点具有对$x,y$的偏导数，函数

$z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处可微，则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 对 x,y 的偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

定理 3　如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 在 (x,y) 点具有对 x,y 的偏导数，函数 $z=f(u,x,y)$ 在对应点 (u,x,y) 处可微，则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),x,y)$ 对 x,y 的偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

5．隐函数的微分法

定理 1　如果由方程 $F(x,y)=0$ 可确定函数 $y=f(x)$，函数 $F(x,y)$ 有连续偏导数，且 $F_y'\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'}{F_y'}.$$

定理 2　如果由方程 $F(x,y,z)=0$ 可确定函数 $z=f(x,y)$，函数 $F(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $F_z'\neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}.$$

6.　二元函数的极值

（1）函数取得极值的必要条件

如果函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极值，且两个一阶偏导数存在，则有 $f_x'(x_0,y_0)=0$， $f_x'(x_0,y_0)=0$.

⑵极值存在的充分条件

如果函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 处有 $f_x'(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)=0$，设

$$P(x,y)=[f_{xy}''(x,y)]^2-f_{xx}''(x,y)f_{yy}''(x,y),$$

则①若 $P(x_0,y_0)<0$，且 $f_{xx}''(x_0,y_0)<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是极大值；

②若 $P(x_0,y_0)<0$，且 $f_{xx}''(x_0,y_0)>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是极小值；

③若 $P(x_0,y_0)=0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是否为极值需要另行判定.

7. 条件极值的拉格朗日乘数法

（1）求函数 $z = f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y)=0$ 下的极值的步骤：

第一步，构造拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)= f(x,y)+\lambda g(x,y)$；

第二步，解方程组 $\begin{cases} F'_x = f'_x(x,y)+\lambda g'_x(x,y)=0, \\ F'_y = f'_y(x,y)+\lambda g'_y(x,y)=0, \\ F'_\lambda = g(x,y)=0, \end{cases}$

解出 x,y，得点 (x_0,y_0)，就是函数 $f(x,y)$ 在条件 $g(x,y)=0$ 下的可能的极值点；

第三步，根据一元函数极值存在的第一、第二充分条件，判别 (x_0,y_0) 是否是极值点. 一般可以由具体问题的性质进行判别.

（2）求函数 $u = f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z)=0, h(x,y,z)=0$ 下的极值的步骤：

第一步，构造拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)= f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)$；

第二步，解方程组 $\begin{cases} F'_x = f'_x(x,y,z)+\lambda g'_x(x,y,z)+\mu h'_x(x,y,z)=0, \\ F'_y = f'_y(x,y,z)+\lambda g'_y(x,y,z)+\mu h'_y(x,y,z)=0, \\ F'_z = f'_z(x,y,z)+\lambda g'_z(x,y,z)+\mu h'_z(x,y,z)=0, \\ F'_\lambda = g(x,y,z)=0, \\ F'_\mu = g(x,y,z)=0, \end{cases}$

解出 x,y,z，得点 (x_0,y_0,z_0)，就是函数 $f(x,y,z)$ 在条件 $g(x,y,z)=0$，$h(x,y,z)=0$ 下的可能的极值点.

第三步，根据二元函数极值存在的充分条件，判别 (x_0,y_0,z_0) 是否是极值点.

8. 二重积分的计算

（1）在直角坐标系下二重积分的计算

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

（2）在极坐标系下二重积分的计算

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

9．二重积分的性质

下面涉及的函数均假定在区域D上可积.

（1）$\iint\limits_D[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\alpha\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\beta\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$（$\alpha,\beta$ 为常数）.

（2）$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$（$D$被一曲线分成$D_1$，$D_2$两区域）.

（3）设σ表示积分区域D的面积$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=D$.

（4）如果在区域D上总有$f(x,y)\le g(x,y)$，则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\le\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

（5）设M、m分别是函数$z=f(x,y)$在闭区域D上的最大值和最小值，A是D的面积，则有$mA\le\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\le MA$, 运用此性质可以估计二重积分的值.

（6）二重积分中值定理：设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，A是D的面积，则在D上至少存在一点(ξ,η), 使得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)A$.

第九章　微分方程与差分方程简介

1. 可分离变量的一阶微分方程

如果一阶微分方程可以化为$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$，则称其为可分离变量的微分方程. 方

求解方法：对方程$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$两边分别求积分，得到方程的隐式通解$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$，写成$G(y)=F(x)+C$.

2. 齐次微分方程

如果一阶微分方程可以化为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\dfrac{y}{x})$的形式，该形式的方程称为齐次微分方程.

它的特征是，若令$g(x,y)=f(\dfrac{y}{x})$，则有$g(tx,ty)=f(\dfrac{ty}{tx})=f(\dfrac{y}{x})=g(x,y)$.

求解方法：做变量代换 $v=\dfrac{y}{x}$，则有$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=v+x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，原方程可以化为$\dfrac{\mathrm{d}v}{f(v)-v}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，这是分离变量的微分方程，求出此方程的通解后，将该解中的v换成$\dfrac{y}{x}$就得到原方程的通解.

3. 一阶线性微分方程

形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$的一阶微分方程，称之为一阶线性微分方程，其中如果

$q(x)=0$，方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0$ 称为一阶线性齐次微分方程；如果 $q(x)\not\equiv 0$，则称 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$ 一阶线性非齐次微分方程.

求解方法一：参数变易法

(1) 先求出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0$ 的通解 $y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$.

(2) 设非齐次方程的解为 $y=u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$.

(3) 将 $y=u(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 代入方程中求出

$$u(x)=\int q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C,$$

则得到方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$ 的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right).$$

求解方法二：将一阶微分方程写成一阶线性非齐次方程的标准形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x),$$

直接利用公式写出方程的通解

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right).$$

4. 形如 $y''=f(x)$ 的二阶微分方程

通解为 $y=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+C_1x+C_2$.

5. 形如 $y''=f(x,y')$ 不显含未知函数 y 的二阶微分方程 $\begin{cases} y''=f(x,y'),\\ y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y'_0. \end{cases}$

基本解法：做降阶代换，令 $y'=P$，则有 $y''=\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$，将原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=f(x,P)$，求得其通解 $P=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x,C_1)$，再积分即得到原方程的通解 $y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$.

进一步根据初值条件可求出通解中的两个常数，即可得到满足相应要求的特解.

6. 形如 $y''=f(y,y')$ 不显含自变量 x 的二阶微分方程 $\begin{cases} y''=f(y,y'),\\ y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y'_0. \end{cases}$

基本解法：做降阶代换，$y'=P$，则视变量 y 为自变量，有 $y''=P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，将原方程化为 $P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=f(y,P)$，得到其通解 $P=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$，将此方程分离变量并积分, 得到原方

程的通解$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$，再利用初始条件求出通解中的两个常数，即可得到满足要求的特解.

7. 二阶常系数线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$

求解方法：对应的特征方程为$r^2+pr+q=0$，该方程的两个根(称之为特征根)为r_1，r_2.

（1）如果r_1，r_2是两个不相等的实根，则齐次方程的通解为$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$.

（2）如果$r_1=r_2$，则通解为$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$.

（3）如果r_1，r_2是一对共轭复根，即$r_{1,2}=\alpha\pm \mathrm{i}\beta$，则通解为$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

8. 二阶常系数线性非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$ $f(x)\not\equiv 0$

如果$\tilde{y}$是非齐次方程的特解，而y^*是对应的齐次方程$y''+py'+qy=0$的通解，则非齐次方程的通解为$y=y^*+\tilde{y}$.

求非齐次线性方程的特解：

方法一 参数变易法, 设对应的齐次方程通解为$y=C_1u_1(x)+C_2u_2(x)$，假设非齐次方程有特解形式为$y=v_1(x)u_1+v_2(x)u_2$，经过分析可知，满足$\begin{cases}u_1v_1'+u_2v_2'=0,\\ u_1'v_1'+u_2'v_2'=f(x)\end{cases}$的$v_1(x),v_2(x)$必使得$y=v_1(x)u_1+v_2(x)u_2$为非齐次方程的一个特解. 故可以解此线性方程组，得到v_1',v_2'，从而可求得v_1,v_2，进而得到非齐次线性方程的一个特解$y=v_1(x)u_1+v_2(x)u_2$.

方法二 根据自由项$f(x)$的具体形式，采用待定系数的方法计算, 具体如下：

(1) 自由项为$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$（$P_m(x)$是 m 次多项式）时的特解形式可以设为$\tilde{y}=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$，其中$Q_m(x)$ 是m次多项式，常数k的取值按α不是特征方程的根、是单根、是重根而分别取 0, 1 或 2, 将此函数带入原方程中，用待定系数法得到特解. 其中如果$\alpha=0$，对应$f(x)=P_m(x)$，特解形式如上所述不变.

（2） 自由项为 $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}[a_1\cos\beta x+a_2\sin\beta x]$ 时的特解形式可以设为

$\tilde{y}=x^k\mathrm{e}^{\alpha x}(A_1\cos\beta x+A_2\sin\beta x)$，其中 k 按照 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ 不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取 0 或 1，将此函数带入原方程中，用待定系数的方法得到特解.

9. 差分 差分方程

设函数 $y=f(x)=y_x$，称 $\Delta y_x=y_{x+1}-y_x$ 为函数 y_x 在 x 处的**差分**，也称为一阶差分；二阶差分 $\Delta^2 y_x=\Delta(\Delta y_x)=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x$.

含有自变量 x、未知函数 y_x 及 y_x 的差分 Δy_x，$\Delta^2 y_x,\cdots$ 的函数方程 ，称为**差分方程**.