第 四 章　导 数 和 微 分

§4.1　导数定义和某些初等函数的导数

1．**定义**　**设** $y=f(x)$ **在** (a,b) **上定义，** $x\in(a,b)$，**若极限**

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\qquad x+\Delta x\in(a,b)$$

存在，则称 $f(x)$ **在** x **点可导，称极限值为函数在** x **点的导数，记作**

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}。$$

若 $f(x)$ **在** (a,b) **上每一点都有导数，则** $f'(x)$ **也是一个函数，它是由** $f(x)$ **导出的新函数，称为** $f(x)$ **的导函数，简称导数。**

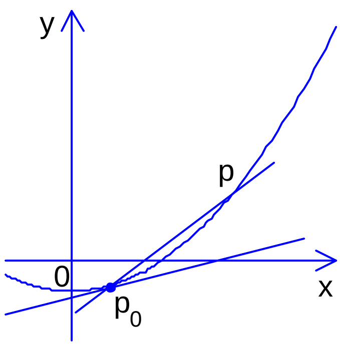
记号　$\dfrac{dy}{dx}$　**或**　$\dfrac{df(x_0)}{dx}$　（Leibniz）

y'　**或**　$f'(x_0)$　(Lagrange)

Dy　**或**　$Df(x_0)$　(Cauchy)

$\dot{y}$　**或**　$\dot{y}(x_0)$　(Newton)

今后在本课程里常用 $f'(x_0)$ **或** $f'(x)|_{x=x_0}$ **，力学中用** $\dot{y}$ **或** $\dot{f}(t)$ **。**



几何背景　$x=x_0+\Delta x$ **，** $\Delta x=x-x_0$ ，　$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=tg\alpha$　**表示割线** $\overline{p_0p}$ **的斜率，当** $x\to x_0$ **时** $(\Delta x\to 0)$，**割线** $\overline{p_0p}$ **趋向于一个极限位置，为曲线在** p_0 **的切线，其**

斜率 $tga_0 = f'(x_0)$ 即为 $f(x)$ 在 x_0 点导数,

$$tga_0 = \lim_{x \to x_0} tga = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)。$$

物理背景　$y = f(t)$，t 表时间，y 表质点运动位移，Δt 表时间增量：$t \to t + \Delta t$；

Δy 表位移增量：$f(t) \to f(t) + \Delta y = f(t + \Delta t)$，$\Delta y = f(t + \Delta t) - f(t)$，这样

$\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ 表示 $t \to t + \Delta t$ 时间内平均速度，

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = f'(t)$ 表示 $f(t)$ 在 t 时刻的即时速度。

$v(t) = f'(t)$ 也是时间的函数，我们还可对它求导，$v'(t) = a(t)$ 称为加速度，如此下去还有

加加速度，Λ。比如自由落体 $s = \frac{1}{2} g t^2$，$v(t) = s'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t}$

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} (g t + \frac{1}{2} g \Delta t) = g t$。　$a = v' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} = g$。

命题　可导必连续，反之不一定对。

证　如果 $f(x)$ 在 x 点可导，当 $\Delta x \to 0$ 时

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \to f(x) + 0 \cdot f'(x) = f(x),$$

所以如果 $f(x)$ 在 x 点可导，它在该点必连续。

反过来，我们举一个反例，

$f(x) = |x|$，当 $x = 0$ 时连续，但 $\dfrac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \operatorname{sgn} \Delta x = \begin{cases} 1 & \Delta x > 0 \\ -1 & \Delta x < 0 \end{cases}$，

当 $\Delta x \to 0$ 时，极限不存在，故不可导。

上述反例中定义导数的双侧极限不存在，但单侧极限是存在的，我们称之为单侧导数。一般地我们可以定义

左导数　$f'(x_0 - 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$，

右导数　$f'(x_0 + 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$。

$f(x)$ 在 x_0 可导充要条件是左右导数存在且相等。

例 1　**Dirichlet 函数**　$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 有理数，} \\ 0, & x \text{ 无理数。} \end{cases}$

讨论下列函数在 $x = 0$ 连续性，可导性。

（1） $D(x)$，（2）$xD(x)$，（3）$x^2D(x)$。

解（1）$D(x)$ **在** $x=0$ **间断，是第二类间断点。**

（2）$xD(x)$ **在** $x=0$ **连续，但不可导。** $\dfrac{\Delta x\cdot D(\Delta x)}{\Delta x}=D(\Delta x)$ **当** $\Delta x\to 0$ **时不存在极限。**

（3）$x^2D(x)$ **在** $x=0$ **连续，且可导，导数为**

$$\frac{(\Delta x)^2\cdot D(\Delta x)-0}{\Delta x}=\Delta x\cdot D(\Delta x)\to 0 \text{。}$$

例 2 $S(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$

（1）$S(x)$ **在** $x=0$ **间断，是第二类间断点。**

（2）$xS(x)$ **在** $x=0$ **连续，不可导，甚至单侧导数也不存在。**

（3）$x^2S(x)$ **在** $x=0$ **连续，可导，导数为** 0。

2．某些基本初等函数的导数

先证三个重要极限：

1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$，

2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ ，

3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-1}{x}=m$。

证 1）**注意到** $\log_a y$ **在** $y>0$ **连续，我们有**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e \text{。}$$

2）**令** $a^x-1=y$ ，**当** $x\to 0$ **时，有** $y\to 0$，**作变量替换** $x=\log_a(1+y)$，**我们有**

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a \text{。}$$

3）令$(1+x)^m-1=y$ ，当$x\to 0$时，有$y\to 0$，在公式$(1+x)^m=1+y$中，取对数，得 $m\cdot\ln(1+x)=\ln(1+y)$，这样

$$\frac{(1+x)^m-1}{x}=\frac{y}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot m\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\to m$$ ，当$x\to 0$时。

1．**常数函数** $f(x)=c$，则$f'(x)=0$。

2．**幂函数** $f(x)=x^a$（定义域与a有关，对任何a，$x>0$总有定义），$f'(x)=a\cdot x^{a-1}$。

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^a-xa}{\Delta x}=x^{a-1}\cdot\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^a-1}{\frac{\Delta x}{x}}\to a\cdot x^{a-1}$$，当$\Delta x\to 0$时。

特别： $(x^{-1})'=-\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$，

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$。

3．**指数函数** $f(x)=a^x$ $(a>0,-\infty<x<+\infty)$，$f'(x)=a^x\cdot\ln a$。

$$\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to a^x\ln a$$，当$\Delta x\to 0$时。

4．**对数函数** $f(x)=\log_a x$ $(0<a\neq 1,\ 0<x<+\infty)$，$f'(x)=\frac{\log_a e}{x}$。

$$\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}\to\frac{1}{x}\log_a e$$，当$\Delta x\to 0$时。

特别地，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，这里看出自然对数$\ln x$确确实实是“自然的”。

5．Sin**函数**，$f(x)=\sin x$，$f'(x)=\cos x$。

$$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\to\cos x$$，当$\Delta x\to 0$时。

6．Cos**函数**，$f(x)=\cos x$，$f'(x)=-\sin x$。

$$\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\frac{-2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\to-\sin x$$， 当$\Delta x\to 0$时。

§4.2 导数的四则运算

1．**定理 1　设** $f(x)$ **，** $g(x)$ **在** x **点可导，则**

1） $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$ **（求导是线性运算）**

2） $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ **（它导它不导，它不导它导，然后加起来）**

3） $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$。

证　1）**令**　$y(x)=f(x)+g(x)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}\\
&=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\
&\to f'(x)+g'(x)\qquad \text{当 } \Delta x\to 0 \text{ 时。}
\end{aligned}
$$

2）　**令**　$y(x)=f(x)\cdot g(x)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}\\
&\qquad(\text{分子}-f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot g(x+\Delta x))\\
&=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\
&\to f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\qquad \text{当} \Delta x\to 0 \text{时。}
\end{aligned}
$$

3）　**令**　$y(x)=\dfrac{1}{g(x)}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{1}{\Delta x}\cdot\left[\frac{1}{g(x+\Delta x)}-\frac{1}{g(x)}\right]\\
&=-\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\\
&\to-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\qquad \text{当 } \Delta x\to 0 \text{ 时。}
\end{aligned}
$$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$　　**给出**（3）。

推论　1）　$[c\,f(x)]'=c\,f'(x)$。

2） $\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$。

3） $\left(\prod_{j=1}^{n} f_i(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} K_k(x)$， $K_k(x) = f_1(x)\Lambda\ f_k'(x)\Lambda\ f_n(x)$。

例 tg 函数

$$(tg\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(ctg\,x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \text{。}$$

§4.3 求导的几种技巧

1． 复合函数微分法

定理 **设** $f'(u_0)$ **与** $g'(x_0)$ **存在，** $u_0 = g(x_0)$**，则复合函数** $F(x) = f[g(x)]$ **在** x_0 **点可导，且** $F'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)$。

注 **若** $f(u)$ **的定义域包含** $u = g(x)$ **的值域，两函数在各自的定义域上可导，则复合函数** $F(x) = f[g(x)]$ **在** $g(x)$ **的定义域上可导，且**

$$F'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) \quad \text{（怀中抱月）}$$

或 $y_x' = y_u' \cdot u_x'$，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\text{。}$$

定理的证明 **定义函数**

$$A(u) = \begin{cases} \dfrac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0}, & u \neq u_0, \\ f'(u_0), & u = u_0\text{。} \end{cases}$$

$A(u)$ **在** u_0 **点连续，** $\lim\limits_{u \to u_0} A(u) = A(u_0) = f'(u_0)$

由恒等式， $f(u) - f(u_0) = A(u)(u - u_0)$**，我们有**

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0} = A[g(x)] \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

令 $x \to x_0$ **，得** $F'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)$ 。

我们引进 $A(u)$ **是为了避免再直接写表达式**

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

中当 $x \neq x_0$ **时，可能会出现** $u = u_0$ **情况。**

例 1 $y = \sqrt{1-x^2}$ **，求** y' 。

解

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1}(1-x^2)' \\ &= \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{。} \end{aligned}$$

例 2 $y = \sin x^2$ **，求** y' 。

解 $y' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = 2x\cos x^2$ 。

例 3 $y = \sin(\sin x^3)$ **，求** y' 。

解 $y' = \cos(\sin x^3) \cdot \cos x^3 \cdot (x^3)' = 3x^2 \cos x^3 \cos(\sin x^3)$ 。

例 4 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ **，求** y' 。

解

$$y' = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{。}$$

例 5 $y = \ln|x|$ **，求** y' 。

解 $x > 0$ **时，** $y = \frac{1}{x}$ **；** $x < 0$ **时，** $y' = (\ln(-x))' = -\frac{1}{x}(-x)' = \frac{1}{x}$ **，** $\therefore x \neq 0$ **时，** $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ 。

例 6 $y = \ln\sin(2x)$ **，求** y' 。

解 $y' = \frac{2}{\sin(2x)}\cos(2x) = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}$ 。

2．隐函数微分法

若可微函数 $y=y(x)$ 满足方程 $F(x,y)=0$，则其导数可以从 $\frac{d}{dx}F(x,y)=0$ 求出。一个方程 $F(x,y)=0$ 何时能唯一决定一个可微函数 $y=y(x)$，留待日后解决，现在我们通常假定能唯一决定一个可微函数，考虑如何求出导函数问题。

例 7 $x^2+y^2=a^2$，求过点 (x_0,y_0) $(y_0\neq 0)$ 的切线方程。

解 对方程 $x^2+y^2=a^2$ 求导，心中记住 $y=y(x)$ 是 x 的函数，得

$$2x+2y\cdot y'=0$$

$$y'(x)=-\frac{x}{y}$$

在 (x_0,y_0) 点上，$y'(x_0)=-\frac{x_0}{y_0}$，过 (x_0,y_0) 切线方程为

$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)，$$

$$xx_0+yy_0={x_0}^2+{y_0}^2，$$

即 $xx_0+yy_0=a^2$。

3．对数微分法

我们结合例子研究对数微分法

例 8 $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}$ $(a>0)$，求 y'。

解 函数定义域 $(-\infty,0)$ 和 $(a,+\infty)$，取对数 $\ln y=\frac{3}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x-a|$，两边对 $y=y(x)$ 求导，采用隐函数微分法，得 $\frac{y'}{y}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-a}=\frac{2x-3a}{2x(x-a)}$，所以

$$y'=\frac{2x-3a}{2x(x-a)}\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}$$ 。

例 9 $y=u^v$，$u=u(x)$，$v=v(x)$，求 y'。

解 取对数，得 $\ln y=v\cdot\ln u$，两边求导，得 $\frac{y'}{y}=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'$，

$y' = y\left(\frac{vu'}{u} + v' \cdot \ln u\right) = u^v\left(\frac{vu'}{u} + v' \cdot \ln u\right)$。

如 $y = x^x$，$y' = x^x(1 + \ln x)$。

4．反函数求导

定理 设 $x = j(y)$ 在区间 (c,d) 上连续，严格上升，在 $y_0 \in (c,d)$ 点可导，且 $j'(y_0) \neq 0$，$x_0 = j(y_0)$。则反函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点可导，且

$$f'(x_0) = \frac{1}{j'(y_0)} = \frac{1}{j'[f(x_0)]}。$$

注 若 $x = j(y)$ 在 (c,d) 可导，导数 > 0（或 < 0），则反函数 $y = f(x)$ 存在，且

$$f'(x) = \frac{1}{j'(y)} = \frac{1}{j'[f(x)]} = \left.\frac{1}{j'(y)}\right|_{y=f(x)}。$$

这里导数 > 0（或 < 0）可推出 $j(y)$ 严格上升（下降），反函数之导数公式也可写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}。$$

定理的证明 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在，注意到这个比式是函数

$$g(y) = \frac{y - y_0}{j(y) - j(y_0)} \quad \text{与} \quad y = f(x)$$

的复合，由定理条件知

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{j(y) - j(y_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{j(y) - j(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{j'(y_0)}。$$

再由反函数连续性，$x \to x_0$ 时，$y \to y_0$，由复合函数求极限定理得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y) = \frac{1}{j'(y_0)}。$$

例 10 $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$，求 y'。

解 $x = \log_a y$，$(a^x)' = \left.\frac{1}{(\log_a y)'}\right|_{y=a^x} = \left.\frac{y}{\log_a e}\right|_{y=a^x} = a^x \ln a$，反过来，如

果$(a^x)'$**已知，也可求** $(\log_a x)' = \left.\frac{1}{(a^x)'}\right|_{x=\log_a y} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{\log_a e}{y}$。

例 11 $y = x^a$，**求** y'。

解 $y = e^{a\ln x}$，$y' = \frac{a}{x} e^{a\ln x} = a \cdot x^{a-1}$。

例 12 $y = \arcsin x$，**求** y'。

解 $x = \sin y$，

$$(\arcsin x)' = \left.\frac{1}{(\sin y)'}\right|_{y=\arcsin x}$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}。$$

例 13 $y = \arccos x$，**求** y'。

解

$$(\arccos x)' = \left.\frac{1}{(\cos y)'}\right|_{y=\arccos x}$$

$$= -\frac{1}{\sin(\arccos x)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}。$$

例 14 $y = arctg\, x$，**求** y'。

解

$$(arctg\, x)' = \left.\frac{1}{(tg\, y)'}\right|_{y=arctg\, x}$$

$$= \frac{1}{\sec^2(arctg\, x)}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}。$$

同理可得 $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$。

5．双曲函数及其反函数之导数

$$y = sh\, x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})，$$

$$y = ch\, x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\quad，$$

$$y = th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x}$$

$$y = cth\,x = \frac{ch\,x}{sh\,x}$$

性质 $ch^2 x - sh^2 x = 1$

$$ch^2 x + sh^2 x = ch\,2x$$

$$sh\,2x = 2sh\,x \cdot ch\,x$$

$$sh(x \pm y) = sh\,x \cdot ch\,y \pm ch\,x \cdot sh\,y$$

$$ch(x \pm y) = ch\,x \cdot ch\,y \pm sh\,x \cdot sh\,y$$

$$1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$1 - cth^2 x = -\frac{1}{sh^2 x}$$

$$sh\,x + ch\,x = e^x$$

$$ch\,x - sh\,x = e^{-x}$$

由 $\begin{cases} \cos q + i\sin q = e^{iq} \\ \cos q - i\sin q = e^{-iq} \end{cases}$

$$(sh\,x)' = ch\,x$$

$$(ch\,x)' = sh\,x$$

$$(th\,x)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

反双曲函数

$$Arsh\,x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$(Arsh\,x)' = \frac{1}{(sh\,y)'}\bigg|_{y = Arsh\,x} = \frac{1}{ch[Arsh\,x]} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$Arch\,x$ **不是单值函数，可选一个分支来研究**

$$Arth\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$$

$$(Arth\,x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

基本初等函数导数公式

$$(c)' = 0$$

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}, \qquad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (sh\, x)' = ch\, x$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (ch\, x)' = sh\, x$$

$$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\ln(x+\sqrt{x^2+1}))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

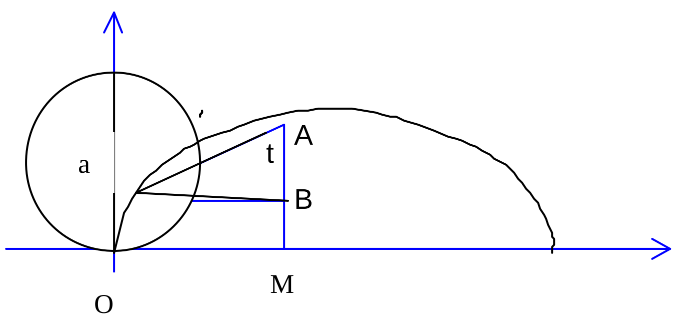
$$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2}$$

6．参数式求导

参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$**，当** $x(t)$**，**$y(t)$ **在** $[a,b]$ **连续，可导，且** $x'(t) \neq 0$ **时，我们可假定** $x'(t) > 0$ **或** $x'(t) < 0$**。这时** $x(t)$ **严格单调，所以** $x = x(t)$ **有反函数，**$t = t(x)$**，且可导：**$t'(x) = \dfrac{1}{x'(t)}$**，参数方程决定一个函数** $y(x) = y(t(x))$**，它的导数** $y'_x = y'_t \cdot t'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ **或可写成** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}$**。**

例（旋轮线，摆线，最速下降线） 一轮沿一直线滚动，求轮线上一定点的轨迹曲线，并求斜率为 1 **的曲线的切线。**

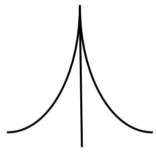
解



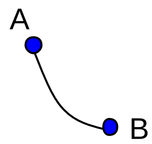
$x = OM - CB$， $y = AM - AB$， $OM = CM$

$$\begin{cases} x = at - a\sin t = a(t - \sin t) \\ y = a - a\cos t = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

钟摆当α 很小时，摆动可近似为简谐振动，但这只是个近似。在摆的两侧用两条曲线限制它，使它成为严格简谐振动，从而有严格周期，这个曲线恰为旋轮线，故它也称为摆线。



考虑一个质点在重力作用下从 A 点沿曲线下降到 B 点，沿什么曲线下降最快？也是旋轮线，故它也称为最速下降线。



现在我们求它的导数：

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{1}{tg\frac{t}{2}} \text{。}$$

令 $\dfrac{1}{tg\frac{t}{2}} = 1$，$t = \dfrac{\pi}{2}$，这时 $x = a(\dfrac{\pi}{2} - 1)$，$y = a$。该点的切线方程为

$$y - a = x - a(\frac{\pi}{2} - 1)\text{，}$$

即 $$y = x + a(2 - \frac{\pi}{2})\text{。}$$

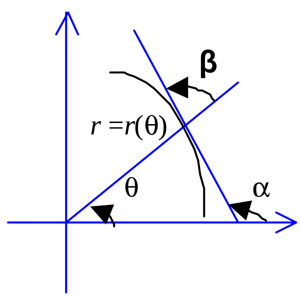
7．极坐标求导

极坐标中函数 $r = r(\theta)$。

换成直角坐标 $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$

可看成参数式 $y'_x = \dfrac{y'_\theta}{x'_\theta} = \dfrac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta} = \dfrac{tg\theta + \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1 - tg\theta\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}} = tg\alpha$，由此

$\dfrac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \dfrac{tg\alpha - tg\theta}{1 + tg\alpha\, tg\theta} = tg(\alpha - \theta) = tg\,\beta$，见图。



例 证明螺线 $r = ae^{b\theta}$ $(a, b > 0)$ 向径与切线交角

为一常数。

证 $\dfrac{r(q)}{r'(q)}=\dfrac{a\,e^{bq}}{ab\,e^{bq}}=\dfrac{1}{b}=tg\,b$，所以 $b=arctg\dfrac{1}{b}$ 为常数，与 q 无关。

§4.4 高阶导数

1．如果 $s(t)$ 是直线上质点运动位移，则 $s'(t)=v(t)$ 就是质点运动中的速度，$v'(t)=s''(t)$ $=a(t)$ 为加速度，这样很自然地可以引进高阶导数概念。

一般地可由归纳法定义：$f^{(n-1)}(x)$ 是 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数，它的 n 阶导数定义为 $f^{(n)}=(f^{(n-1)}(x))'$ 。形式地记 $f^{0}(x)=f(x)$，引进一个记号

$$C^{n}(a,b)=\{f(t): f^{(n)}(t)\in C(a,b)\}$$

在概念上高阶导数没有什么新东西，但在具体求高阶导数时还是需要一些新技巧。

例 1 $y=e^{ax}$，求 $y^{(n)}$。

解 $y'=a\,e^{ax}$，$y''=a^{2}\,e^{ax}$，Λ， $y^{(n)}=a^{n}e^{ax}$。

例 2 $y=x^{a}$，求 $y^{(n)}$。

解 $y'=a\,x^{a-1}$，$y''=a^{2}\,e^{ax}$，Λ， $y^{(n)}=a(a-1)\Lambda\,(a-n+1)x^{a-n}\quad(n\geq 1)$ 当 a 为正整数时，$a=n$，$y^{(n)}=n!$，$a<n$，$y^{(n)}=0$。若 $P_{m}(x)$ 是 m 次多项式，$n>m$，则 $P^{(n)}(x)=0$。

例 3 $y=\ln(1+x)$，求 $y^{(n)}$。

解 $y'=\dfrac{1}{1+x}$，$y''=-\dfrac{1}{(1+x)^{2}}$，$\Lambda$， $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^{n}}\quad(n\geq 1)$， 其中规定 $0!=1$。

例 4 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$。

解 $y'=\cos x=\sin(x+\dfrac{p}{2})$，

$y''=-\sin x=\sin(x+p)$

M

$$y^{(n)} = \sin(x + \frac{np}{2})$$

同理可得

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{np}{2})$$

用 Euler **公式，**$e^{iq} = \cos q + i \sin q$, **形式地**

$$(e^{iq})^{(n)} = i^n e^{iq} = e^{i\frac{np}{2}} e^{iq} = e^{i(q + \frac{np}{2})}$$

$$= \cos(q + \frac{np}{2}) + i \sin(q + \frac{np}{2})$$

$$= (\cos q)^{(n)} + i(\sin q)^{(n)}$$

所以 $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{np}{2})$**，**$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{np}{2})$。

例 5 $y = arctg\, x$**，求** $y^{(n)}$。

解 $y' = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+tg^2 y} = \cos^2 y$

$$y'' = -2\cos y \cdot \sin y \cdot y' = \cos^2 y \sin 2(y + \frac{p}{2})$$

$$y''' = 2\cos^3 y \cdot (-\sin y) \sin 2(y + \frac{p}{2}) + 2\cos^4 y \cos 2(y + \frac{p}{2})$$

$$= 2\cos^3 y \cdot \cos(2(y + \frac{p}{2}) + y)$$

$$= 2\cos^3 y \cdot \sin 3(y + \frac{p}{2})$$

Λ Λ

$\therefore \quad y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n(y + \frac{p}{2})$ 。

特别地 $y^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}(2n-2)!$**，**

$y^{(2n)}(0) = 0$。

2． Leibniz 公式

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$(cu)^{(n)} = cu^{(n)}$$

$$(u \cdot v)' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$$

$$(u\cdot v)''=u^{(2)}v^{(0)}+2u^{(1)}v^{(1)}+u^{(0)}v^{(2)}$$

$$(u\cdot v)^{(3)}=u^{(3)}v^{(0)}+3u^{(2)}v^{(1)}+3u^{(1)}v^{(2)}+u^{(0)}v^{(3)}\text{。}$$

定理　若 u，v 有任意阶导数，则

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}\text{，}\ C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\text{。}$$

证　用归纳法，$n=1$已经成立。 设n时成立，我们来证$n+1$时也成立。

$$\begin{aligned}(u\cdot v)^{(n+1)}&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k[u^{(n-k)}v^{(k)}]'\\
&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k[u^{(n-k+1)}v^{(k)}+u^{(n-k)}v^{(k+1)}]\\
&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k+1)}v^{(k)}+\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}u^{(n-k+1)}v^{(k)}\\
&=C_n^0u^{(n+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^{k-1}+C_n^k\right)u^{(n-k+1)}v^{(k)}+C_n^n u^{(0)}v^{(n+1)}\\
&=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k u^{(n+1-k)}v^{(k)}\text{。}\end{aligned}$$

这个证明与牛顿二项式展开公式证明的格式是一致的，这里的更标准。最后一步用到了恒等式$C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$。

复合函数，反函数，参数式，隐函数归纳不出求高阶导数的公式，但至少我们可归纳出二阶，三阶导数的公式，那也是非常有用的。

例如　$y=f[g(x)]$

$$y'=f'[g(x)]\,g'(x)$$

$$y''=f''[g(x)]\cdot[g'(x)]^2+f'[g(x)]\,g''(x)$$

$$y^{(3)}=f^{(3)}[g(x)]\cdot[g'(x)]^3+3f''[g(x)]\,g'(x)\cdot g''(x)+f'[g(x)]\,g''(x)$$

设　$y=y(x)$，$x=x(y)$ **互为反函数，则**

$$x'(y)=\frac{1}{y'(x)}$$

$$\begin{aligned}x''(y)&=-\frac{1}{[y'(x)]^2}\cdot y''(x)\cdot x'(y)\\
&=-\frac{y''}{[y'(x)]^3}\text{。}\end{aligned}$$

又设$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$为参数式，则

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y''(x) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^2} \cdot t'(x)$$
$$= \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}。$$

再设$F(x, y) = 0$定义隐函数$y = y(x)$，则对$F(x, y) = 0$两边求一次导，得出含$y'(x)$的方程，解出$y'(x)$来；求二次导，得出含$y''(x)$的方程，可解出$y''(x)$来。

例 6 $y = \arcsin x$，求$y^{(n)}(0)$。

解 这个函数求$y^{(n)}(x)$的公式是困难的，但求$y^{(n)}(0)$相对容易，这在今后研究它的 Taylor 展开式时是有用的。

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}， \qquad (1 - x^2)y'^2 = 1$$

两边再对x求一次导数，得$(1 - x^2) \cdot 2y'y'' - 2xy'^2 = 0$。当$|x| < 1$时，$y' \neq 0$，可除去$y'$项，得$(1 - x^2) \cdot y'' - xy' = 0$。求$(n - 2)$次导数，用 Leibniz 公式，得

$$(1 - x^2)y^{(n)} + (n - 2)(-2x)y^{(n-1)} + \frac{(n - 2)(n - 3)}{2}(-2)y^{(n-2)} - xy^{(n-1)} - (n - 2)y^{(n-2)} = 0$$

把$x = 0$代入，得

$$y^{(n)}(0) - (n - 2)(n - 3)y^{(n-2)}(0) - (n - 2)y^{(n-2)}(0) = 0$$

$$y^{(n)}(0) = (n - 2)^2 y^{(n-2)}(0)$$

$$y^{(0)}(0) = 0，\quad y^{(1)}(0) = 1，$$

$$\therefore \qquad y^{(2n)}(0) = 0，$$

$$y^{(2n+1)}(0) = (2n - 1)^2 y^{(2n-1)}(0)$$
$$= (2n - 1)^2 (2n - 3)^2 \Lambda\, 1^2 y^{(1)}(0)$$
$$= [(2n - 1)!!]^2。$$

例 7 设$y = f(x)$在x_0点有一，二阶导数，满足$y_0' = f'(x_0)$，$y_0'' = f''(x_0) \neq 0$。

求过点 $M(x_0, y_0 = f(x_0))$ 的圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$，使得它在 M 点与给定函数有相同的一二阶导数，该圆称为曲率圆，R 称为曲率半径，$k=\dfrac{1}{R}$ 称为曲率，点 (a,b) 称为曲率中心，它在工程中，比如铁路转弯的 设计中非常有用。

解 需要求的参数有三个 a, b, R。它们满足

(1) 过 M 点： $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2$ (1)

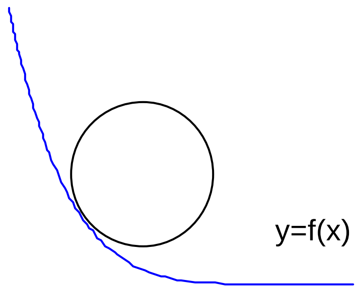
(2) 在 M 点一阶导数相同 $(x_0-a)+(y_0-b)y_0'=0$ (2)

(3) 在 M 点二阶导数相同 $1+y_0'^2+(y_0-b)y_0''=0$ (3)

由（3）解出 $b=y_0+\dfrac{1+y_0'^2}{y_0''}$

由（2）解出 $a=x_0-y_0'\dfrac{1+y_0'^2}{y_0''}$

由（1）解出 $R=\dfrac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y_0''|}$。



3．导数与“边际”概念

导数概念在经济学中就是通常的“边际”的概念。

设 $f(x)$ 为一个经济函数，则 $f'(x)$ 称为该函数的“边际”函数。 如，$Q=f(p)$ 为需求函数，则 $f'(p)$ 为“边际”需求函数； $C=C(x)$ 为成本函数，$C'(x)$ 为“边际”成本函数； $L(x)$ 为利润函数，$L'(x)$ 为“边际”利润函数。

产品按件计算时， $f'(n)\approx f(n+1)-f(n)$ 用差分来代替导数，它表示产量每增加一个单位（一件）时，经济函数的增加量，这就是“边际”函数的定义。

例 1： 某企业每月生产 x 吨产品的总成本 C（千元）是产量 x 的函数 $C=C(x)=x^2-10x+20$，如果每吨产品的销售价格为 20 千元，试求每月生产 8 吨，10 吨，15 吨，20 吨产品的实际利润。

解： 销售收入函数 $R(x)=20x$ （千元），

利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)=-x^2+30x-20$

这里成本函数$C=C(x)=(x-10)x+20$表示固定成本 20 千元，可变成本$(x-10)$（千元/吨）是产量的函数，它表示可变成本随产量增加是线性增加的，这是这个模型的关键。

$L'(x)=-2x+30,\ L'(x)<0$当$x>15$时，　$L'(x)>0$当$x<15$时。

$L'(8)=14$，　$L'(10)=10$，　$L'(15)=0$，　$L'(20)=-10$。

当$x>15$时，$L'(x)<0$，表明该企业不能依赖增加产量来提高利润。

4．导数与“弹性”概念

在经济学中另一个与导数有关的是“弹性”概念。

经济函数$f(x)$，我们称$x\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}$为该经济函数的“弹性”函数，记为：$h(x)$。

$h(x_0)$　称为点弹性，

$|h|=1$　称为单位弹性，

$|h|>1$　称为相当有弹性，

$|h|<1$　称为相当无弹性。

其含义从$h(x)=\dfrac{f'(x)}{\dfrac{f(x)}{x}}$的定义中可以理解，它是$\dfrac{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{\dfrac{y}{x}}$当$\Delta x\to 0$时的极限，是一种相对的变化率。

例 2． 设某商品需求函数为$Q=Ae^{-\frac{1}{4}p}$，其中$A>0$为最大需求量，$p\in[0,+\infty)$。试求：

（1）　需求量对价格的弹性；

（2）　价格$p=16$（元）时需求量对价格的弹性。

解：（1）　$Q'=f'(p)=-\dfrac{1}{4}Ae^{-\frac{1}{4}p}$，

$$h(p)=p\cdot\frac{f'(p)}{f(p)}=-\frac{p}{4}。$$

（2）　$h(16)=-4$，它表示价格每增加1%时，需求量下降4%。当$p=16$元时，价格每降低1%，需求会增加4%，是相当有弹性的。采取降价措施可增加销售量，从

而增加收入。

销售收入弹性： $R = R(p) = p \cdot Q = pf(p)$**，销售收入对价格的弹性**

$$\overline{h} = p \cdot \frac{R'(p)}{R(p)} = \frac{f(p) + pf'(p)}{f(p)} = 1 + p \cdot \frac{f'(p)}{f(p)} = 1 + h$$

通常需求弹性$h < 0$**，所以销售收入弹性**$\overline{h} < 1$**。**

当$-1 < h < 0$**时，**$\overline{h} > 0$**，**$|\overline{h}| < 1$**，表明收入增加的百分数小于价格增加的百分数，提高价格会增加收入。**

当$-2 < h < -1$**时，**$\overline{h} < 0$**，**$|\overline{h}| < 1$**，表明收入减少的百分数小于价格增加的百分数，提高价格会减少收入。**

当$h < -2$**时，**$\overline{h} < -1$**，**$|\overline{h}| > 1$**，表明收入增加的百分数大于价格减少的百分数，提高价格会显著的减少收入（相当有弹性）。**

例 3．　设某产品销售x**单位的收入为** $R(x) = 400x - 900 - x^2$**。试确定使平均收入最大的**x**值，和最大平均收入。**

解：　$\overline{R}(x) = \frac{R(x)}{x} = 400 - \frac{900}{x} - x$**，**

令 $\overline{R}'(x) = 0$**，**$\overline{R}'(x) = \frac{900}{x^2} - 1$**，得** $x = 30$ **（舍去** $x = -30$**）。**

$\overline{R}(30) = 12000$**，分析可知** $x = 30$ **时，**$\overline{R}(30) = 12000$ **是最大值。**

例 4：　某工厂每生产x**吨产品的成本为**$C(x) = x^3 - 10x^2 + 115x + 13$ **（万元），每月销售收入为** $R(x) = 100x - x^2$ **（万元）。试求每月产量多大时，利润最大？**

解：　$L(x) = R(x) - C(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 13$**，**

$L'(x) = -3x^2 + 18x - 15$**，**

令 $L'(x) = 0$**，** $x^2 - 6x + 5 = 0$**，** $x_1 = 1$**，** $x_2 = 5$**。**

$L''(x) = -6x + 18$**，**

而 $L''(1) = 12 > 0$**，**$L''(5) = -12 < 0$**。故每月产量为 5 吨时，可获最大利润，**$L(5) = 12$ **（万元）。**

§4.5 微分

1． 微分定义

定义 设 $f(x)$ 定义于 (a,b)，$x \in (a,b)$，且

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)\end{aligned}$$

则称 $y = f(x)$ 在 x 点可微，$A\Delta x$ 称为函数的微分，记为

$$d\,y = d\,f(x) = A\Delta x\ ,$$

即 $d\,y$ 是 Δy 的线性主部。

定理 函数 $y = f(x)$ 在 x 点可微的充要条件：函数 $y = f(x)$ 在 x 点可导，且 $d\,y = f'(x)\Delta x$。

证 必要性，设 $y = f(x)$ 在 x 点可微，即

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$

则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to A$ 当 $\Delta x \to 0$ 时，故 $f'(x)$ 存在，且 $f'(x) = A$。

充分性，设 $y = f(x)$ 在 x 点可导，即 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在。

则 $$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right] = 0$$

或 $$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x}\right] = 0$$

即 $$\Delta y - f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

故 $y = f(x)$ 在 x 点可微，且 $d\,y = f'(x)\Delta x$。

令 $y = x$，$y' = 1$，$d\,y = d\,x = \Delta x$，即自变量 x 的微分是 $d\,x = \Delta x$，所以

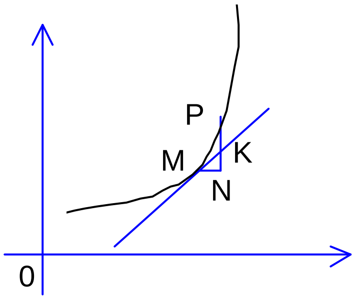
$d\,y = f'(x)\Delta x$。从这可看出符号 $\dfrac{d\,y}{d\,x} = f'(x)$ 的合理性，从而导数也称为微商，即两个微分之商。用这种记号记忆以下公式是十分方便的：

复合函数求导公式 $$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,u}\cdot\frac{du}{d\,x}$$

反函数求导公式 $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

参数求导公式 $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$

微分的几何意义是在局部以直代曲，如图。



$dx=\Delta x=MN$

$dy=f'(x)dx=KN$

$\Delta y=PN=dy+PK$

$PK=\Delta y-dy=o(\Delta x)$。

当Δx**充分小时，近似地认为**PN**等于**KN**，即在**x**点局部，可用直线代替曲线。**

2．一阶微分形式的不变性

考察复合函数$y=f(u)$，$u=g(x)$，$y=f[g(x)]$**，求微分**

$$dy=f'[g(x)]g'(x)dx=f'(u)du$$

观察看出　对$y=f(u)$**求微分时，不管**u**是自变量还是函数，所得结果的形式是不变的，这个性质称为一阶微分形式的不变性。它为一阶微分形式所独有，对高阶微分就不成立了。**

考察函数$y=f(x)$**，其一阶微分**$dy=f'(x)dx$**，这时**x**，**dx**是独立变量，即**dy**是**x**和**dx**的函数，**

$$\begin{aligned} d^2y=d(dy)&=(f'(x)dx)'dx\\ &=f''(x)(dx)^2\\ &=f''(x)dx^2 \end{aligned}$$

这里$dx^2=(dx)^2$**是一种简单记法，不要误解成**$d(x^2)=2x\cdot dx$**。在**$(f'(x)dx)'$**计算中，把**dx**看成常数，得到**$f''(x)(dx)^2$**，一般地可得到**$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$**，这是**n**阶微分，这对理解记号**$f^{(n)}(x)=\dfrac{d^ny}{dx^n}$**作为高阶微商，即高阶导数就很自然了。**

对高阶微分，我们有

$$d^n(u\pm v)=d^nu\pm d^nv，$$

$$d^n(uv)=\sum_{k=0}^{\infty}C_n^k d^{n-k}u\cdot d^k v\text{，}$$

如果有复合函数： $y=f(u)$**，**$u=g(x)$**，我们有**$dy=f'(u)du$**，即一阶微分有形式不变性。**

$$\begin{aligned}d^2y&=d(f'(u)du)\\&=d\,f'(u)du+f'(u)d(du)\\&=f''(u)(du)^2+f'(u)d^2u\\&=f''(u)du^2+f'(u)d^2u\end{aligned}$$

一般地当$u=g(x)$**不是线性函数时，**$d^2u\neq 0$**，所以二阶（从而二阶以上）微分没有形式不变性。事实上**$d^2u=0$**当且仅当**$u=ax+b$**，即线性函数。**

微分的定义告诉我们它可以用来做近似计算，这在后续计算方法课程中还要详细讲解。
由于一阶微分有形式不变性，我们有如下微分表：

$$dc=0$$

$$du^a=a\,u^{a-1}du$$

$$da^u=a^u\ln a\,du$$

$$d\log_a|u|=\frac{\log_a e}{u}du$$

$$d\sin u=\cos u\,du$$

$$d\cos u=-\sin u\,du$$

$$d\,tg\,u=\frac{du}{\cos^2 u}$$

$$d\,ctg\,u=-\frac{du}{\sin^2 u}$$

$$d\arcsin u=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$d\arccos u=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$d\,arctg\,u=\frac{du}{1+u^2}$$

$$d\,arcctg\,u=-\frac{du}{1+u^2}$$

$$d\,shu = chu\,du$$

$$d\,chu = shu\,du$$

$$d\,thu = \frac{du}{ch^2 u}$$

$$d\,Arshu = d\ln(u+\sqrt{u^2+1}) = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$d\,Archu = d\ln(u+\sqrt{u^2-1}) = -\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$d\,Arthu = d(\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}) = \frac{du}{1-u^2}$$

$$d^n(u \pm v) = d^n u \pm d^n v$$

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k d^{n-k}u \cdot d^k v$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$d\,f(u) = f'(u)du$$

$$d^2 f(u) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u$$ □

§4.6 微分中值定理

定义 若$\exists\, x_0$的邻域$U(x_0)$，使$f(x) \le f(x_0)$，$\forall\, x \in U(x_0)$，称x_0为极大值点，$f(x_0)$称为极大值；上述定义“$\le$”改为“$\ge$”时，定义极小值点和极小值。严格不等号成立时，称严格极值。

最大，最小是全局概念，极大，极小是局部概念，应注意区分。

定理 （**P.Fermat**） 设$f(x)$在x_0有极值，且$f'(x_0)$存在，则$f'(x_0)=0$。

证 无妨设$f(x_0)$为极大值，则当$\Delta x > 0$时，且$x_0+\Delta x \in U(x_0)$时，有

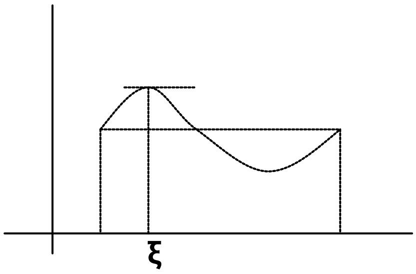
$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0$$

令$\Delta x \to 0^+$，得$f'(x_0) \le 0$。

当$\Delta x<0$时，有 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geq 0$ 。令$\Delta x\to 0^-$，得 $f'(x_0)\geq 0$，由此推得 $f'(x_0)=0$。

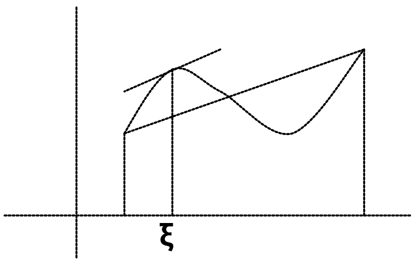
Fermat 定理表明导数为 0 是极值必要条件，但是如果$f(x)\in C[a,b]$，那么它能达到最大值，如果它又可导，在(a,b)内$f'(x)=0$只有一个根，则比较$f(a)$，$f(x_0)$，$f(b)$就可定出最大值。

定理（M. Rolle） 设$f(x)\in C[a,b]$，$f(x)$在(a,b)可导，且$f(a)=f(b)$，则$\exists x\in(a,b)$，使得$f'(x)=0$。



证 因为$f(x)\in C[a,b]$，$f(x)$在$[a,b]$上有最大值M与最小值m，如果$M=m$，则$f(x)=M$，这时$f'(x)=0$，可取(a,b)中任意一点作为x，如果$M>m$，其中至少有一个不等于$f(a)=f(b)$。不妨设$M>f(a)$，我们假定$f(x)$在$x\in(a,b)$取到最大值，$f(x)=M$，即x为一个极值点，且$f'(x)$存在，由 Fermat 定理，$f'(x)=0$。

定理（Lagrange） 设$f(x)\in C[a,b]$，$f(x)$在(a,b)可导，则$\exists x\in(a,b)$，使得$f'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 。



证 作辅助函数

$$G(x)=\begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix},$$

它有明显几何意义，即它表示连接三点$\{(f(x),x),\quad (f(a),a),\quad (f(b),b)\}$的三角形面积之二倍，那么$G(x)\in C[a,b]$，在$(a,b)$可导，且$G(a)=G(b)=0$，用 Rolle 定理，$\exists x\in(a,b)$，使得$G'(x)=0$，即

$$\begin{vmatrix} f'(x) & 1 & 0 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix}=0, \qquad f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}。$$

辅助函数造法很多，比如可以用以下方法

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)\right],$$

$$\Phi(x)=[f(x)-f(a)](b-a)-(x-a)[f(b)-f(a)],$$

$$\Psi(x)=f(x)(b-a)-x[f(b)-f(a)]。$$

然后借助于 Rolle 定理都可证明 Lagrange 定理。

注释　量$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$表示连接两点$A(a,f(a))$和$B(b,f(b))$的弦的斜率，不管$a<b$还是$a>b$都对。Lagrange 定理表明存在(a,b)中一点，使$f'(x)$恰等于这个斜率，Lagrange 定理也称 Lagrange 公式，它也可以写成$f(x)=f(a)+f'(x)(x-a)$，其中x介于x与a之间，它可以看成用线性函数$f(a)+f'(x)(x-a)$在a局部对$f(x)$的逼近。它还可写成

$$f(b)=f(a)+f'[a+q(b-a)](b-a),$$

$$f(a+h)=f(a)+f'(a+q\,h)h,$$

其中$0<q<1$，$h=b-a$。

这里$x=a+q\,h$，只要指出$q=\frac{x-a}{h}$满足$0<q<1$。当$h>0$时，$a<x<a+h$，$0<x-a<h$，$0<\frac{x-a}{h}<1$，得$0<q<1$。当$h<0$时，$a+h<x<a$，$0<a-x<-h$，$0<\frac{a-x}{-h}<1$，得$0<q<1$。

推论 1　设$f(x)\in C[a,b]$，且在(a,b)可导，$f'(x)=0$，则$f(x)\equiv C$。

证 Lagrange **定理给出，**$\forall x \in [a,b]$，$f(x)-f(a)=f'(x)(x-a)=0\ (a<x<b)$，**由此得**

$$f(x)\equiv f(a)\equiv C。$$

推论 2 **设** $f(x)$，$g(x)\in C[a,b]$，**在**(a,b)**可导，并有** $f'(x)=g'(x)$，**则** $f(x)=g(x)+C$。

证 **对** $f(x)-g(x)$ **应用推论** 1 **即得。**

定理 **（Cauchy）** **设** $f(x)$，$g(x)\in C[a,b]$，**且在**(a,b)**可导，**$g'(x)\neq 0$，**则** $\exists x\in(a,b)$，**使得** $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

证 **对** f **和** g **分别应用** Lagrange **定理，我们可得** $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$，**这里**$x_1$**与**$x_2$**可能不一样，这是一条错误之路，本定理关键要求是一致的**x。**作函数**

$$G(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1\\ f(a) & g(a) & 1\\ f(b) & g(b) & 1\end{vmatrix},$$

它的几何意义是在参数曲线 $\begin{cases}X=f(x)\\ Y=g(x)\end{cases}$ **上，三点** $\{(f(x),g(x)),\ (f(a),g(a)),\ (f(b),g(b))\}$ **连成的三角形面积之二倍。则** $G(x)$ **满足** Rolle **定理条件，故** $\exists x\in(a,b)$，**使得** $G'(x)=0$，**即** $g'(x)[f(b)-f(a)]=f'(x)[g(b)-g(a)]$，**得证。**

注1 **与** Lagrange **定理证明类似，我们也可借助其它形式的辅助函数，比如用**

$$F(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)]。$$

注 2 $g(x)=x$ **时，**Cauchy **定理推出** Lagrange **定理。**

注3 **不管**$a>b$**还是**$a<b$，Cauchy **定理都可写成**

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(a+q(b-a))}{g'(a+q(b-a))}=\frac{f'(a+q\,h)}{g'(a+q\,h)},$$

其中$h=b-a$，$0<q<1$。

§4.7 del'Hospitale 法则

求极限是数学分析中一种基本的运算。常用的法则，我们可以归纳如下：

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}f(x)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\text{。}$$

上述运算中，分母极限$\neq 0$**，底的极限**>0**。这些条件不满足，就不能应用上述法则。但有些是定式：如**$\frac{\infty}{0}=\infty$**，有些就是不定式了，共有七种：**$\infty-\infty$**，**$0\cdot\infty$**，**$\frac{0}{0}$**，**$\frac{\infty}{\infty}$**，**0^0**，**1^∞**，**∞^0。

本质上只有两种：$\frac{0}{0}$**与**$\frac{\infty}{\infty}$**。其它的可变换到这两种来求，如**$0\cdot\infty=0\cdot\frac{1}{0}$**就成为**$\frac{0}{0}$**型，或者**$0\cdot\infty=\frac{1}{\infty}\cdot\infty$**变成**$\frac{\infty}{\infty}$**型。**

例 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，**证明** $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$。

证 **记**$M=\max(|B|+1,|A|)$**，由**$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$**，对**$e_0=1$**，**$\exists d_1>0$**，使得如果**$0<|x-a|<d_1$**，有**$|g(x)-B|<1$**，即**$|g(x)|<|B|+1\le M$。

$\forall e>0$**，由**$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$**及**$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$**，**$\exists d_2>0$**，使得如果**$0<|x-a|<d_2$**，就有**$|f(x)-A|<\frac{e}{2M}$**及**$|g(x)-B|<\frac{e}{2M}$。

取$d=\min(d_1,d_2)$**，则当**$0<|x-a|<d$**时，有**

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB|&\le|g(x)||f(x)-A|+|A||g(x)-B|\\&<M\frac{e}{2M}+M\frac{e}{2M}\\&=e\end{aligned}$$

故$\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$。

1. $\frac{0}{0}$型不定式

定理 1 设

1）$f(x)$，$g(x)$**在**$U_0(a;d)$**上连续，且**$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$， 2） $f(x)$，$g(x)$ **在** $U_0(a;d)$ **上可导，且** $g'(x)\neq 0$ ，

3） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$ （k **为有限或** $\pm\infty$ ），

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$ 。

证　先证 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$ **，由** 1)**，我们补充定义** $f(a)=g(a)=0$ **，则** f **，** g **成为在** $[a-d,a]$ **连续，** $(a-d,a)$ **上可导函数。** $\forall x\in(a-d,a)$ **，** $f(x)$ **，** $g(x)$ **在** $[x,a]$ **满足** Cauchy **中值定理条件，所以有**

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'[a+q(x-a)]}{g'[a+q(x-a)]},\quad 0<q<1,$$

由 3)**，** $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f'[a+q(x-a)]}{g'[a+q(x-a)]}=k$ **，所以** $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$ 。

同理 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$ **，综合起来有** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$ 。

注　把 $x\to a$ **改为** $x\to a+0$ **或** $x\to a-0$ **结论也成立。**

定理 2　设

1） $f(x)$，$g(x)$ **在** $(a,+\infty)$ **连续，且** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ ，

2） $f(x)$，$g(x)$ **在** $(a,+\infty)$ **可导，且** $g'(x)\neq 0$ ，

3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$ （k **为有限或** $\pm\infty,\infty$ ），

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$ 。

证　先算极限，然后再验证条件。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0+}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}=\lim_{t\to 0+}\frac{[f(\frac{1}{t})]'}{[g(\frac{1}{t})]'}=\lim_{t\to 0+}\frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k\text{。}\quad (x=\frac{1}{t})$$

其中只有第二个等式需要说明它满足定理的条件。不妨设 $a>0$ **，** $f(\frac{1}{t})$ **，** $g(\frac{1}{t})$ **在** $(0,\frac{1}{a})$ **上**

连续，且 $\lim\limits_{t\to 0+} f(\frac{1}{t})=\lim\limits_{t\to 0+} g(\frac{1}{t})=0$，且 $f(\frac{1}{t})$，$g(\frac{1}{t})$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 可导，且

$[g(\frac{1}{t})]'=g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})\neq 0$，有 $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{[f(\frac{1}{t})]'}{[g(\frac{1}{t})]'}=k$。

注 把 $x\to+\infty$ 换成 $x\to-\infty$ 和 $x\to\infty$ 也有相应的结论。

例1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{shx-x}{\sin x-x}=?$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{shx-x}{\sin x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{chx-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{shx}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{chx}{-\cos x}=-1$ 。

例2 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}}=?$

解 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{t}{1-e^{2t}}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{1}{-2e^{2t}}=-\dfrac{1}{2}$ $(x=t^2)$。

例3 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{p}{2}-arctg\,x)=?$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{p}{2}-arctg\,x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{p}{2}-arctg\,x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1$ 。

2．$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式

定理 3 设

1）$f(x)$，$g(x)$ 在 $U_0(a;d)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$，

2）$f(x)$，$g(x)$ 在 $U_0(a;d)$ 可导，且 $g'(x)\neq 0$，

3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$ （有限或 $\pm\infty,\infty$），

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$。

证 只对 $|k|<\infty$ 和 $x\to a-0$ 情况证明。

$\forall e>0$，由 3），$\exists d_1>0$，当 $a-d_1<x<a$ 时，有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-k\right|<\frac{e}{3},$$

$\forall x\in(a-d_1,a)$，在 $[a-d_1,x]$ 上应用 Cauchy 中值定理，得

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}-k=\frac{f'(x)}{g'(x)}-k$$，这里$x_1=a-d_1$，

即 $$f(x)-f(x_1)-k[g(x)-g(x_1)]=\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}-k\right][g(x)-g(x_1)]$$

故 $$f(x)-kg(x)-[f(x_1)-kg(x_1)]=\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}-k\right][g(x)-g(x_1)]$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}-k=\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}-k\right]\left[1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right]+\frac{f(x_1)-kg(x_1)}{g(x)}。$$

又由于 $\lim\limits_{x\to a-0}g(x)=\infty$，有 $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x_1)-kg(x_1)}{g(x)}=0$， $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{g(x_1)}{g(x)}=0$，所以$\exists d_2$，使得

当$a-d_2<x<a$时，有

$$\left|\frac{f(x_1)-kg(x_1)}{g(x)}\right|<\frac{e}{2}, \qquad \left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2}$$

令$d=\min(d_1,d_2)$，当$a-d<x<a$时，有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|\le\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-k\right|\left|1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|+\left|\frac{f(x_1)-kg(x_1)}{g(x)}\right|$$

$$\le\frac{3}{2}\cdot\frac{e}{3}+\frac{e}{2}=e。$$

即 $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$。

定理 4 设

1） $f(x)$，$g(x)$在$(a,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\infty$，

2） $f(x)$，$g(x)$在$(a,+\infty)$上可导，且$g'(x)\neq 0$，

3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$（有限或$\pm\infty$，$\infty$），

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$。

证 可类似于由定理 1 证明定理 2 的过程给出证明，这里省略。

例 4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^e}=?\quad(e>0)$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^e}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ex^{e-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{ex^e}=0$。

例 5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}=?\quad (a>0)$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a\,x^{a-1}}{e^x}=\Lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a(a-1)\Lambda\,(a-[a])x^{a-[a]-1}}{e^x}=0$。

无穷大量是"梁山泊排座次"： $x\to+\infty$

$$\Lambda<<\ln\ln x<<\ln x<<x^{a_1}<<x^{a_2}\ (0<a_1<a_2)<<e^x<<e^{e^x}<<\Lambda$$

$$\Lambda<<\ln\ln n<<\ln n<<n^{a_1}<<n^{a_2}\ (0<a_1<a_2)<<n!<<\Lambda$$

例6 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0),\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ **上无穷次可微。**

证 当 $x\neq 0$ **时，** $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ **；**

当 $x=0$ **时，**

$$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t^2}}{\frac{1}{t}}\quad (x=\frac{1}{t})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0。$$

且 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$ **，** $\therefore f(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$。

假设 $f^{(n)}(x)=\begin{cases}P_{3n}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ **，已证** $n=1$ **时，它是对的，设** n **时成立，我们看** $n+1$ **阶导数，** $x\neq 0$ **时**

$$f^{(n+1)}(x)=\left[\frac{2}{x^3}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}P_{3n}'\left(\frac{1}{x}\right)\right]e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=P_{3(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{P_{3n}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{tP_{3n}(t)}{e^{t^2}}=0 \quad (x=\frac{1}{t})$$

从 $f^{(n)}(x)$ **表达式，易知** $f^{(n)}(x)\in C(-\infty,+\infty)$ **，所以** $f(x)\in C^{\infty}(-\infty,+\infty)$ **。**

类似定义函数

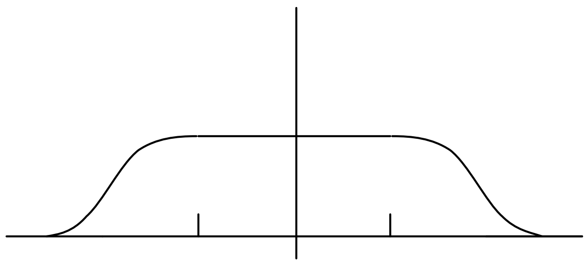
$$x(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x>0 \\ 0\ , & x\le 0 \end{cases}$$

可证$x\in C^{\infty}(-\infty,+\infty)$**，这是一个很有用的函数，稍加改造我们可以构造如下函数：**

$$h(x)=\frac{x(4-x^2)}{x(4-x^2)+x(x^2-1)}$$

则$h(x)\in C^{\infty}(-\infty,+\infty)$**，且**$h(x)=1$**，** $|x|\le 1$ **；** $0<h(x)<1$**，** $1<|x|<2$ **；**$h(x)=0$**，**

$|x|\ge 2$**。这个函数非常有用。**



3．其它类型不定式

通过变量替换，我们总可把其它形式不定式化到$\frac{0}{0}$**和**$\frac{\infty}{\infty}$**型，具体采用什么样替换，要机警对待。**

例7 $\lim\limits_{x\to 0+} x^a \ln x \quad (a>0)$

解　这是$0\cdot\infty$**型。**

$$\lim_{x\to 0+} x^a \ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^a}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\frac{1}{x}}{-\frac{a}{x^{a+1}}}=\lim_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{a}x^a\right)=0$$

例8　求极限$\lim\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\Lambda+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_i>0)$**。这里分别考虑**$x\to 0$**，**$x\to+\infty$**，**$x\to-\infty$**三种情况。**

解　令 $y=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\Lambda+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$**，**　$\ln y=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\Lambda+a_n^x}{n}\right)$**。**

我们来求$\lim \ln y$。

1） $$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\Lambda+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\Lambda+a_n^x}$$

$$=\frac{1}{n}\ln(a_1\Lambda\ a_n)$$

$$=\ln\sqrt[n]{a_1\Lambda\ a_n}$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}y=\sqrt[n]{a_1\Lambda\ a_n}$，即为$n$个数的几何平均。

2） $$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\Lambda+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\Lambda+a_n^x}$$

记 $M=\max(a_1,a_2,\Lambda\ ,a_n)$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{a_1}{M}\right)^x\ln a_1+\left(\frac{a_2}{M}\right)^x\ln a_2+\Lambda+\left(\frac{a_n}{M}\right)^x\ln a_n}{\left(\frac{a_1}{M}\right)^x+\left(\frac{a_2}{M}\right)^x+\Lambda+\left(\frac{a_n}{M}\right)^x}=\ln M$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}y=M=\max(a_1,a_2,\Lambda\ ,a_n)$。

3） 令$m=\min(a_1,a_2,\Lambda\ ,a_n)$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{a_1}{m}\right)^x\ln a_1+\left(\frac{a_2}{m}\right)^x\ln a_2+\Lambda+\left(\frac{a_n}{m}\right)^x\ln a_n}{\left(\frac{a_1}{m}\right)^x+\left(\frac{a_2}{m}\right)^x+\Lambda+\left(\frac{a_n}{m}\right)^x}=\ln m$$

所以$\lim\limits_{x\to-\infty}y=m=\min(a_1,a_2,\Lambda\ ,a_n)$。

习题：

4.1 用定义求$f'(0)$，其中$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

4.2　**用定义求** $f'(0)$ **，其中** $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

4.3　**设** $D(x)=\begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$ **讨论下列函数在** $x=0$ **处的连续性，可导性：**

（1）　$D(x)$，　　（2）　$x\cdot D(x)$，　　（3）　$x^2\cdot D(x)$.

4.4　**设** $f(x)$ **是偶函数，且** $f'(0)$ **存在，证明：** $f'(0)=0$.

4.5　**设** $f'(x_0)$ **存在，证明对称导数也存在，即** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$.

4.6　**求下列序列的极限：**

（1）　$\lim\limits_{n\to+\infty}[\sin\dfrac{1}{n^2}+\sin\dfrac{2}{n^2}+\Lambda+\sin\dfrac{n}{n^2}]$；

（2）　$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n^2})(1+\dfrac{2}{n^2})\Lambda(1+\dfrac{n}{n^2})$.

4.7　**设** $P(x)$ **是最高次项系数为** 1 **的多项式，** M **是它的最大实根，求证：** $P'(M)\geq 0$.

4.8　**给定抛物线** $y=x^2-x+3$ **，求过** $(2,5)$ **点的切线与法线方程**.

4.9　**给定曲线** $y=x^2+5x+4$，

（1）　**确定** b **，使直线** $y=3x+b$ **为曲线的切线；**

（2）　**确定** m **，使直线** $y=mx$ **为曲线的切线**.

4.10　**求下列函数的导数：**

（1）　$y=3x+5\sqrt{x}+\dfrac{7}{x^3}$；　　（2）　$y=\dfrac{2-\sqrt{x}+3x-5x^2}{x^2}$；

(3)　$y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$；　　（4）　$y=\dfrac{1}{1+x+x^2}$；

（5）　$y=(1-x)(2-x)(3-x)$；　　（6）　$y=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$；

（7）　$y=\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$；　　（8）　$y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$；

（9）　$y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$；　　（10）　$y=\dfrac{2-x}{(1-x)(1+x^2)}$；

（11） $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[3]{x}$；　　（12） $y=\frac{ax+b}{cx+d}\quad (ad-bc\neq 0)$.

4.11　**求下列函数的导数：**

（1） $y=x^2\sin x$；　　（2） $y=x^3\ln x-\frac{1}{n}x^n$；

（3） $y=\cos x\cdot\ln x$；　　（4） $y=x\cdot\sin x\cdot\ln x$；

（5） $y=(x+\frac{1}{x})\ln x$；　　（6） $y=\frac{\sin x}{x}$；

（7） $y=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$；　　（8） $y=ctgx$；

（9） $y=\sec x$；　　（10） $y=\csc x$；

（11） $y=\sin 2x$；　　（12） $y=\frac{\cos x}{x^4}\ln\frac{1}{x}$；

（13） $y=chx\sin x$；　　（14） $y=thxtgx$.

4.12　**确定常数**a,b**，使函数** $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x>1\\ x^2, & x\leq 1.\end{cases}$ **有连续的导数**.

4.13　**求下列极限：**

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$；

（2） $\lim\limits_{n\to+\infty}n[(1+\frac{1}{n})^p-1]$　（p **为有理数**）.

4.14　**利用等比级数的求和公式，求下列级数的和：**

（1） $S_n=1+2x+3x^2+\Lambda+nx^{n-1}$；

（2） $S_n=1+2^2x+3^2x^2+\Lambda+n^2x^{n-1}$.

4.15　**求证：**

（1） $C_n^1+2C_n^2+\Lambda+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$；

（2） $C_n^1+2^2C_n^2+\Lambda+n^2C_n^n=n(n+1)\cdot 2^{n-2}$.

4.16　**求下列函数的导数：**

（1） $y=(x^3-4)^3$；　　（2） $y=x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$；

（3） $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$；　　（4） $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$；

（5） $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$；　　（6） $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}$；

(7) $y=\ln(\ln x)$；

(8) $y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|$；

(9) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$；

(10) $y=\ln tg\dfrac{x}{2}$；

(11) $y=\ln^3 x^2$；

(12) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$；

(13) $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$；

(14) $y=\cos^3 x-\cos 3x$；

(15) $y=\sin^n x\cdot\cos nx$；

(16) $y=tgx-\dfrac{1}{3}tg^3x+\dfrac{1}{5}tg^5x$；

(17) $y=\cos(\cos\sqrt{x})$；

(18) $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$.

4.17 **求下列级数的和：**

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}k\sin kx$；

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}k\cos kx$.

4.18 **确定常数，使下列函数处处可导：**

(1) $f(x)=\begin{cases}x^a\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$ (a **为常数**)

(2) $g(x)=\begin{cases}x+c, & x\ge 0,\\ \ln(1+x), & x<0.\end{cases}$ (c **为常数**)

(3) **求** $f'(0)$ **与求** $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ **是否是一回事？**

4.19 **讨论下列函数的可导性，在可导点处求其导数：**

(1) $y=|(x-1)(x-2)^2(x-3)|$；

(2) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(x-1)(x+1)^2, & |x|\le 1,\\ |x|-1, & |x|>1.\end{cases}$

4.20 **设** $f(x)$ **在** $(-\infty,+\infty)$ **上可导，求证：**

(1) **若** $f(x)$ **为奇函数，则** $f'(x)$ **为偶函数；**

(2) **若** $f(x)$ **为周期函数，则** $f'(x)$ **也是周期函数.**

4.21 **设** $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$，$(a>0)$，

(1) 求 y''；

(2) 证明：曲线的切线被坐标轴所截长度为一常数.

4.22 用对数微分法求下列函数的导数：

(1) $y = x^x \quad (x>0)$；
(2) $y = x^{tgx} \quad (x>0)$；

(3) $y = x^{\ln x} \quad (x>0)$；
(4) $y = e^{\sqrt{x}} \quad (x>0)$；

(5) $y = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0)$；
(6) $y = a^{\sin x} \quad (a>0)$；

(7) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (x>0)$；
(8) $y = x^{x^x} \quad (x>0)$.

4.23 求下列函数的导数：

(1) $y = e^{\sqrt{x}} \quad (x>0)$；
(2) $y = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0)$；

(3) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$；
(4) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$；

(5) $y = \arcsin \dfrac{1}{x}$；
(6) $y = \arccos(\sin\ x)$；

(7) $y = e^{ax}(\cos bx + \sin bx)$；
(8) $y = x \cdot arctgx - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$；

(9) $y = arctg\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} + arctg\dfrac{2x}{1-x^2}$；

(10) $y = arctg\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}tg\dfrac{x}{2}\right) \quad (a>b>0)$；

(11) $y = arctg(tg^2 x)$；
(12) $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\dfrac{x}{a}\right)^b \quad (a, b>0)$；

(13) $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$；
(14) $y = e^{-x^2}(x^2 - 2x + 2)$；

(15) $y = \ln(\arccos \dfrac{1}{\sqrt{x}})$；
(16) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$；

(17) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} \quad (a>0)$；

(18) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| \quad (a>0)$；

(19) $y = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2 - x - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$；

(20) $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}$.

4.24 设 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$，

(1) 求 $y'(x)$；

(2) 证明曲线的切线被坐标轴所截长度为一常数.

4.25 证明：圆 $r=2a\sin q \quad (a>0)$ 的向径与切线间的夹角等于向径的极角.

4.26 证明：心脏线 $r=a(1-\cos q) \quad (a>0)$ 的向径与切线间的夹角等于向径的极角的一半.

4.27 证明：双纽线 $r^2=a^2\cos 2q$ 的向径与切线间的夹角等于两倍向径的极角加 $\frac{p}{2}$.

4.28 市场学里一个常用的模型是把一种产品的市场饱和水平作为时间的函数，模型为 $\ln s=a+b\,l^t$。其中 S 表示市场饱和百分数，t 表示该产品引进的年数，l 为常数，$0<l<1$，a,b 为常数。试求关于时间 t 的饱和水平的弹性，并作出经济学解释。

（$h=bt\,l^t\ln l$，当 $b>0$ 时，$h<0$，市场饱和百分数 S 随产品引进年数增加而减少；当 $b<0$ 时，$h>0$，市场饱和百分数 S 随产品引进年数增加而增加，但无论是增加或减少的变化率都越来越小）。

4.29 设某商品的需求函数 $Q=200-5p$，p 为价格，试讨论其弹性变化。

4.30 试证函数的弹性具有如下性质：

(1) 积的弹性等于弹性的和；

(2) 商的弹性等于弹性的差；

(3) 函数 $y=f(x)$ 的弹性与 x，y 的度量单位无关。

4.31 设某商品每月销售 x 件时收入函数 $R(x)=1000xe^{-\frac{x}{100}}$，问每月销多少件商品时，可使收入最大。

4.32 用一阶微分不变性求微分：

(1) $y=\ln|tg(\frac{x}{2}+\frac{p}{4})|$； (2) $y=arctge^x$；

(3) $y=x^{a^x} \quad (a>0)$； (4) $y=e^{\sin x^2}$.

4.33 填空：

(1) $2e^{\sin^2 x}\sin x\cos x dx=d(\ ?\ )$； (2) $\frac{1}{a^2+x^2}dx=d(\ ?\ )$；

(3) $\dfrac{\ln x}{x}e^{\ln^2 x}=d(\ ?\ )$； (4) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=d(\ ?\ )$；

(5) $2xe^{x^2}\cos e^{x^2}dx=d(\ ?\ )$； (6) $\dfrac{e^x}{1+e^x}dx=d(\ ?\ )$；

(7) $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx=d(\ ?\ )$.

4.34 **下列近似值：**

（1） $\sqrt{120}$； （2） $\sqrt[4]{80}$；

（3） $\sin(29^{\circ})$； （4） $arctg1.05$.

4.35 **设** $f''(1)=0$，$f'(1)=1$，**求证：在** $x=1$ **点** $\dfrac{d}{dx}f(x^2)=\dfrac{d^2}{dx^2}f^2(x)$.

4.36 **设** $y_1=\arcsin x$，$y_2=\arccos x$，**求证** y_1,y_2 **都满足方程：**

$$(1-x^2)y''-xy'=0.$$

4.37 **设** $y=(x+\sqrt{1+x^2})^m$，**求证：** $(1+x^2)y''+xy'=m^2y$.

4.38 **求证：切比雪夫多项式** $T_n(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)$ **满足方程**

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0.$$

并证明 $T_n(x)$ **是多项式**.

4.39 **求下列隐函数的二阶导数** y''**：**

（1） $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}\quad(a>0)$；

（2） $x^3+y^3-3axy=0\quad(a>0)$.

4.40 **求下列参数式的二阶导数** $y''(x)$**：**

（1） $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t\quad(a>0)$；

（2） $x=a(\ln tg\dfrac{t}{2}+\cos t)$，$y=a\sin t\quad(a>0)$.

4.41 **求下列函数的高阶导数** $y^{(n)}$**：**

（1） $y=\frac{1}{1-x^2}$；（2） $y=\frac{1+x}{\sqrt[3]{1-x}}$；

（3） $y=\frac{x^n}{1-x}$；（4） $y=\sin^2 x$；

（5） $y=\sin^3 x$；（6） $y=e^x\sin x$；

（7） $y=\frac{x^n}{x^2-1}$；（8） $y=e^x(\sin x+\cos x)$.

4.42 **求证：**

（1） **若** $y=x^{n-1}\ln x$，**则** $y^{(n)}=\frac{(n-1)!}{x}$；

（2） **若** $y=\frac{ax+b}{cx+d}$，**则** $y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}(bc-ad)$.

4.43 **设** $y=arctgx$，**求证：**

（1） $y^{(n)}=\frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$，**其中** $P_{n-1}(x)$ **为** $n-1$ **次多项式；**

（2） $P_{n-1}(x)$ **的最高次项是** $(-1)^{n-1}n!\,x^{n-1}$.

4.44 **设** $y=(\arcsin x)^2$，

（1） **证明：** $(1-x^2)y''-xy'=2$；

（2） **证明：** $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0 \quad (n\ge 1)$；

（3） **证明：** $y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$；

（4） **求** $y^{(n)}(0)$.

4.45 **求证：勒让德多项式** $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}[(x^2-1)^n]^{(n)} \quad (n=0,1,2,\Lambda)$ **满足方程：**

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0.$$

4.46 **求证：切比雪夫---拉盖尔多项式** $y=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$ **满足方程：**

$$xy''-(x-1)y'+ny=0.$$

4.47　**求证：切比雪夫---厄尔米特多项式** $y=(-1)^n\dfrac{1}{n!}e^{\frac{x^2}{2}}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{x^2}{2}})$ **满足方程：**

$$y''-xy'+ny=0\,.$$

4.48　**设** $f(x)=x^m(1-x)^n$ **，** m,n **为自然数，** $x\in[0,1]$ **，则** $\exists x\in(0,1)$ **，使**

$$\frac{m}{n}=\frac{x}{1-x}\,.$$

4.49　**求证** $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ **在** $(0,1)$ **间至少有一个根.**

4.50　**设** $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\Lambda+a_n=0$ **，求证：方程** $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\Lambda+a_n=0$ **在** $(0,1)$ **间至少有一个根.**

4.51　**设** $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\Lambda+a_1x+a_0$ **有** $n+1$ **个零点，则** $f(x)\equiv 0$.

4.52　**设** $f(x)$ **可导，求证：** $f(x)$ **的两个零点之间一定有** $f(x)+f'(x)$ **的零点.**

4.53　**求证：勒让德多项式** $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n\,n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ **在** $[-1,1]$ **内有** n **个零点.**

4.54　**求证：切比雪夫---拉盖尔多项式** $L_n(x)=e^x\dfrac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$ **有** n **个不同正零点.**

4.55　**求证：切比雪夫---厄尔米特多项式** $y=(-1)^n\dfrac{1}{n!}e^{\frac{x^2}{2}}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{x^2}{2}})$ **有** n **个不同零点.**

4.56　**设** $f(x)$ **在** (a,b) **上可导，且** $f'(x)$ **单调，证明** $f'(x)$ **在** (a,b) **上连续.**

4.57　**设** $f^{(n)}(x)$ **在** $(-r,+r)$ **上存在，且** $\lim\limits_{x\to0}f^{(n)}(x)=l$ **，求证：** $f^{(n)}(0)=l$.

4.58　**设** $h>0$ **，** $f'(x)$ **在** $(a-h,a+h)$ **中存在，求证：**

(1)　$\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=f'(a+q\,h)+f'(a-q\,h)\quad(0<q<1)$ **；**

(2)　$\dfrac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h}=f'(a+q\,h)-f'(a-q\,h)\quad(0<q<1)$.

4.59　**设** $f(x)$ **在** $(a,+\infty)$ **上可导，且** $f'(x)$ **有界，求证：** $f(x)$ **在** $(a,+\infty)$ **上一致连续.**

4.60　**设** $f(x)\in C[a,b]$ **，求证：** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上满足** $L-$ **条件**

$$|\ f(x)-f(y)\le k\,|\,x-y\,|\qquad (k\text{ 为常数})$$

当且仅当$e^{f(x)}$在$[a, b]$上满足$L-$条件

$$|e^{f(x)}-e^{f(y)}|\le k'|x-y| \qquad (k'\text{为常数}).$$

4.61　设$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)上可微，求证：$\exists x\in(a, b)$使

$$2x[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(x).$$

4.62　设$f(x)\in C[a, b]\quad (ab>0)$，在$(a, b)$上可微，求证：$\exists x\in(a, b)$使

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(x)-x\,f'(x).$$

4.63　求下列极限：

(1)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$；　　(2)　$\lim\limits_{x\to p}\dfrac{tgnx}{tgmx}$　（n, m为自然数）；

(3)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$；　　(4)　$\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x$；

(5)　$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^k}{e^x}\quad (k>0)$；　　(6)　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$；

(7)　$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$；　　(8)　$\lim\limits_{x\to 0}x\left(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}\right)\quad (a, b>0)$；

(9)　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{px}{2}}$；　　(10)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$；

(11)　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；　　(12)　$\lim\limits_{x\to 1-0}\sqrt{1-x^2}\,ctg\left(\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$；

4.64　求下列极限：

(1)　$\lim\limits_{x\to 0}(tgx)^{\sin x}$；　　(2)　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

(3)　$\lim\limits_{x\to 0}(\cos px)^{\frac{1}{x^2}}$；　　(4)　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

(5)　$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$；　　(6)　$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{p}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$； (8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(tg\dfrac{px}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4.65 **求下列极限（a，b 为实数）**:

(1) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1+x^a}{1+x^b}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x^a}{1+x^b}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

4.66 **由拉格朗日中值定理，**$\ln(1+x)-0=x\cdot\dfrac{1}{1+q\,x}$ $(0<q<1)$，**求证：**$\lim\limits_{x\to 0}q=\dfrac{1}{2}$.