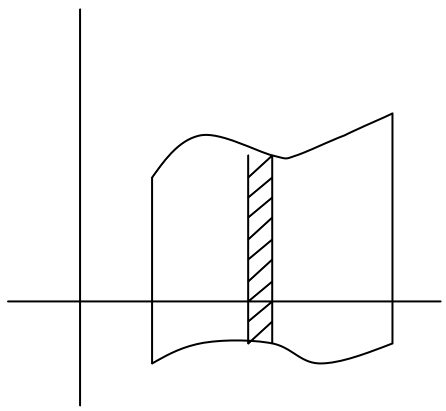
第 七 章　微 积 分 应 用

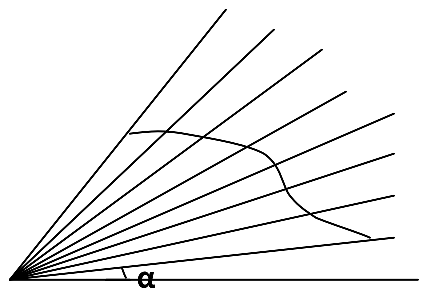
§7.1 定积分的几何应用

1．平面图形的面积

定积分的应用，关键是把问题写成 $\int_a^b f(x)dx$ 的形式，这时关键是把 $f(x)dx = dF(x)$ 的意义搞清楚，这个观点称为微元法。

比如要求以 $x = a$，$x = b$ $(a < b)$，$y = f(x)$，$y = g(x)$ 所围图形的面积，其中 $f(x)$，$g(x)$ 连续，且 $f(x) \ge g(x)$。我们考虑从 x 到 $x + dx$ 这个微元，它的面积可看成一个矩形，高近似地取 $f(x) - g(x)$，其面积 $= (f(x) - g(x))dx = dA(x)$。所以所围图形面积为 $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$。





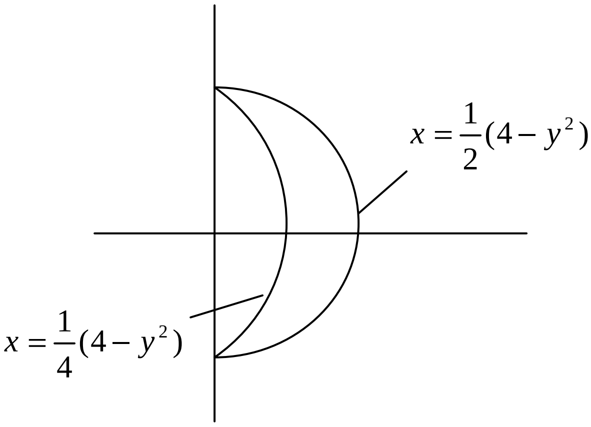
如果函数由极坐标给出，我们要求向径 $q = a$，$q = b$ $(a < b)$ 和函数 $r = r(q)$ 围成的面积（如右上图）。考虑从 q 到 $q + dq$ 这个微元，它近似地可看成是个扇形，面积微元 $dA(q) = \frac{1}{2} r^2(q)dq$，所以总面积 $\frac{1}{2}\int_a^b r^2(q)dq$。

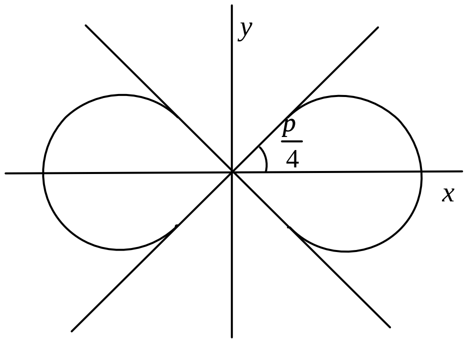
例 1 求曲线 $y^2 = -4(x-1)$ 与 $y^2 = -2(x-2)$ 围成的图形面积。

解 画图如下，恰如“月上柳梢头，人约黄昏后”的一弯新月，切记做这类问题都要画图，一是便于理解掌握，二是“诗配画”的意境是一个整体，绝不是单单几个公式一个答案所能涵盖的。

这里把 $y^2 = -4(x-1)$ 写成 $x = \frac{1}{4}(4 - y^2)$，$y^2 = -2(x-2)$ 写成 $x = \frac{1}{2}(4 - y^2)$，它们是有两个交点 $y = \pm 2$ 的两条抛物线。

$$S=\int_{-2}^{2}\left[\frac{1}{2}(4-y^2)-\frac{1}{4}(4-y^2)\right]dy$$
$$=2\int_{0}^{2}\left[\frac{1}{2}(4-y^2)-\frac{1}{4}(4-y^2)\right]dy=\frac{8}{3}。$$

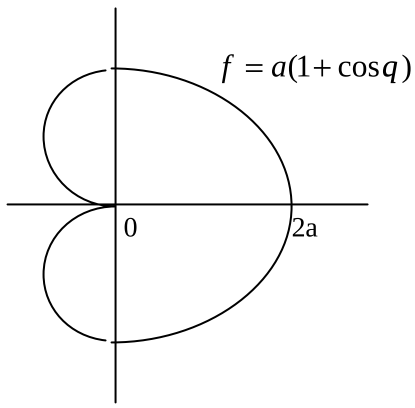




例 2　求双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$ **所围成的图形面积。**

解　作图如右上。 $S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta\ d\theta=a^2$。

例3　求心脏线$r=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ **围成的面积。**



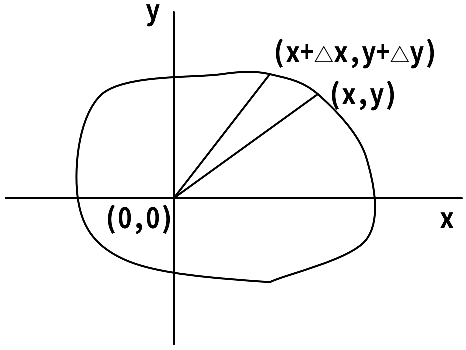
$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2d\theta$$
$$=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$
$$=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2})d\theta$$
$$=\frac{3}{2}\pi a^2。$$

由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$**，**$\begin{cases}x(\alpha)=x(\beta)\\ y(\alpha)=y(\beta)\end{cases}$ **围成的封闭图形，选点**

$(0,0)$，(x,y)，$(x+dx,y+dy)$ **围成的三角形作为微元，其面积**

$$dS=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x & y & 1\\ x+dx & y+dy & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x & y\\ dx & dy\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(xdy-ydx)\text{。}$$

所以 $S=\frac{1}{2}\int_a^b xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_a^b[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]dt$。



例 4 求旋轮线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\le t\le 2p)$ **与** x **轴围成的面积。**

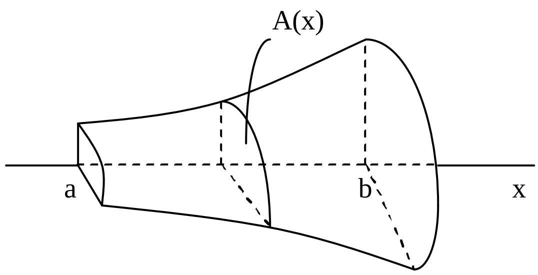
解 $S=\frac{1}{2}\int_0^{2p}[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]dt$ $\quad\begin{pmatrix}x(t)=t\\ y(t)=0\end{pmatrix}$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2p}[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]dt \quad \begin{pmatrix}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2p}a^2(1-\cos t)^2\,dt-\frac{1}{2}\int_0^{2p}a^2(t-\sin t)\sin t\,dt$$

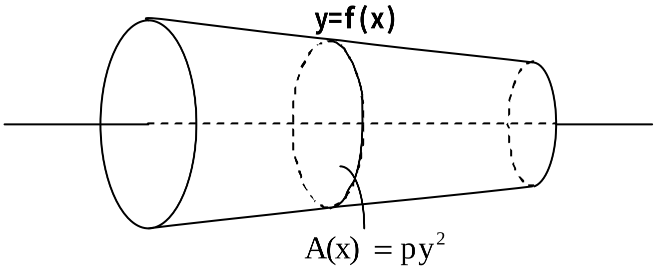
$$=3p\,a^2\text{。}$$

2 体积，弧长，侧面积



设一物体位于平面 $x=a$ **和** $x=b$ **之间** $(a<b)$ **，如果对任何** $x:a\le x\le b$ **，垂直于** x **轴的平面与该物体相交的截面积** $A(x)$ **为已知，考虑从** x **到** $x+dx$ **微元，其体积微元为**

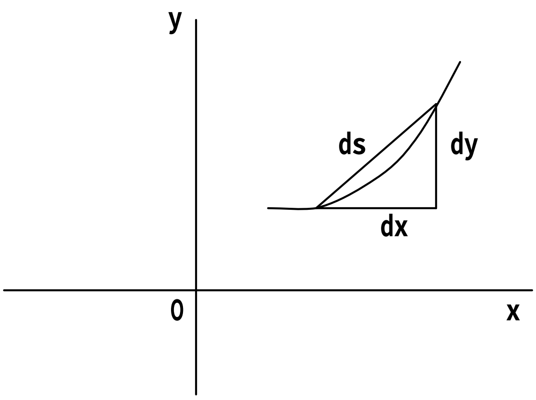
$A(x)dx$，故 $A=\int_a^b A(x)dx$。



如果有一曲边梯形，沿 x 轴转 360°，得一旋转体，其体积微元 $p\ f^2(x)dx$，故

$A=p\int_a^b f^2(x)dx$。若该曲边曲线由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $(a\ \le t\le b)$ 给出，则

$A=p\int_a^b y^2(t)dx(t)=p\int_a^b y^2(t)x'(t)dt$。



考虑一段从 (x,y) 到 $(x+dx, y+dy)$ 弧长微元，勾股定理给出 $ds^2=dx^2+dy^2$ 故弧长

$$S=\int_a^b\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\ dt。$$

特别地，曲线由 $y=f(x)$ 给出时，$S=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$。

由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 定义的一段曲线，绕 x 轴旋转一周所得的旋转体，其表面积

微元 $2p\ y\ ds$，故表面积 $P=2p\int_a^b y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\ dt$。

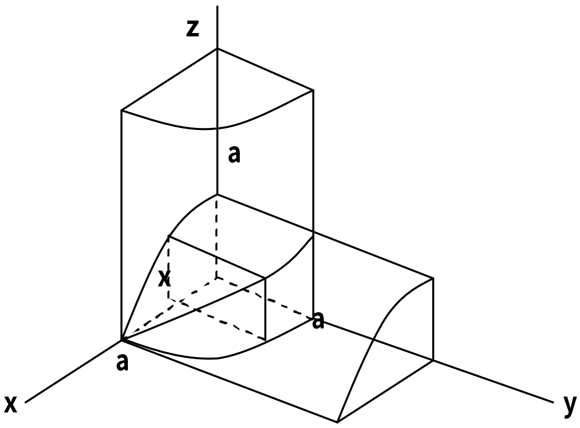
若曲线由 $y=f(x)$ 定义，则旋转体侧表面积 $P=2p\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$。

若曲线由极坐标方程 $r=r(q)$ 定义，则旋转体侧表面积

$$P = 2p\int_a^b r(q)\sin q\sqrt{r(q)^2 + r'(q)^2}\ dq\ 。$$

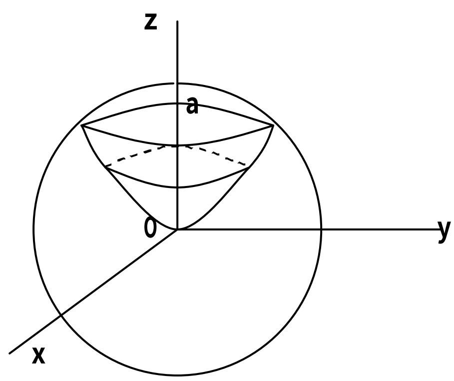
这是因为这时可看成参数方程$\begin{cases} x = r(q)\cos q \\ y = r(q)\sin q \end{cases}$，$x'(q)^2 + y'(q)^2 = r(q)^2 + r'(q)^2$。

例 5 求两个半径相等，其轴垂直相交的圆柱面$x^2 + y^2 = a^2$与$x^2 + z^2 = a^2$所围成的立体的体积。



解 在八个卦限中立体是对称的，我们只要在第一卦限中体积再乘以 8 即可。过点$(x, 0, 0)$ 作垂直于x轴的平面，它于该立体在第一卦限所截图形为一正方形，边长$= \sqrt{a^2 - x^2}$，其面积为$P(x) = a^2 - x^2$，故体积为 $S = 8\int_0^a (a^2 - x^2)dx = \dfrac{16}{3}a^3$。

例 6 求抛物面$2az = x^2 + y^2$与上半球面$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \quad (a > 0)$，$z > 0$所围成的立体的体积。



解 两曲面都是绕z轴旋转体，两曲面交线是一个圆。位于$z = a$平面上，由

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \\ x^2 + y^2 = 2az \end{cases}，z^2 + 2az = 3a^2，(z + a)^2 = (2a)^2，z > 0$$

得 $z = a$。

$$V=\pi\int_0^a 2azdz+\pi\int_a^{\sqrt{3}a}(3a^2-z^2)dz=\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)\text{。}$$

例 7　求旋轮线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 　$(0\le t\le 2\pi)$ **之弧长。**

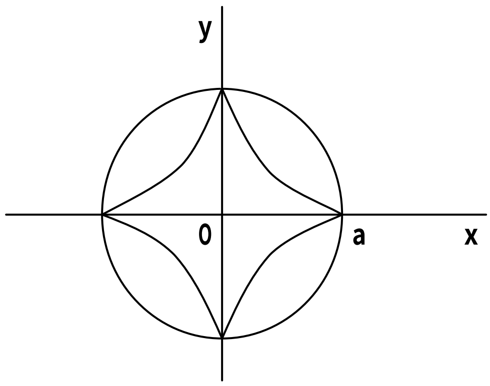
解　$x'(t)=a(1-\cos t)$，$y'(t)=a\sin t$，

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=8a\text{。}$$

例8　求星形线（铜钱线） $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ **的弧长。**



解　考虑 $t:0\to\frac{\pi}{2}$，$x'(t)=-3a\cos^2 t\sin t$，$y'(t)=3a\sin^2 t\cos t$。

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$

$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t dt\ =12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,d\sin t$$

$$=6a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a\text{。}$$

例9　求椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ 　$0\le t\le 2\pi$ **周长。**

解　$x'(t)=-a\sin t$，$y'(t)=b\cos t$，

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$= 4a\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}\ dt$$

$$= 4a\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\ dt 。$$

其中 $e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}$ **是椭圆的离心率，它是“ 椭圆积分 ”，不能用初等方法积出来。考虑** $f(q)=\int_0^q\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt$ **，其反函数称为“ 椭圆函数 ”，在数论中具有基本的重要性。**

椭圆的面积： $x=a\cos t$ **，** $y=b\sin t$ **，**

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2p}\ xdy-ydx=\frac{ab}{2}\int_0^{2p}\ (\cos^2 t+\sin^2 t)dt=pab 。$$

例10　求旋轮线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\le t\le 2p)$ **绕** x **轴旋转所得旋轮体的侧表面积**

解　　$ds=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$ **，**

$$P=2p\int_0^{2p} a(1-\cos t)\cdot 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

$$=4pa^2\int_0^{2p}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=8pa^2\int_0^{2p}\sin^3\frac{t}{2}dt$$

$$=16pa^2\int_0^{p}\sin^3 udu$$

$$=-16pa^2\int_0^{p}(1-\cos^2 u)d\cos u$$

$$=-16pa^2(\cos u-\tfrac{1}{3}\cos^3 u)\Big|_0^p=\frac{64}{3}pa^2 。$$

例 11　求旋转椭圆体的表面积。

解　设椭圆体是由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ **绕** x **轴旋转而得，这时**

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2 ，\qquad yy'=-\frac{b^2}{a^2}x$$

及　　$$y\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{y^2+(yy')^2}=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{b^4}{a^4}x^2}$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}\text{。}$$

其中$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$**为椭圆的离心率。**

$$P=2p\,\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx$$

$$=4p\,\frac{b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx$$

$$=4p\,\frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-e^2x^2}+\frac{a^2}{2e}\arcsin\frac{ex}{a}\right)\Bigg|_0^a$$

$$=2pb\left(b+\frac{a}{e}\arcsin e\right)\text{。}$$

如果此椭圆绕 y **轴旋转，则**

$$P_1=2p\int_{-b}^{b}x\sqrt{1+x'^2}\,dx$$

$$=2p\int_{-b}^{b}\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}\,dx$$

$$=2p\,\frac{a}{b}\frac{b^3}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}x\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^4}x^2+1}\right.$$

$$\left.+\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}x+\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^4}x^2+1}\right|\,\right]\Bigg|_0^b$$

$$=2pa\left(a+\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right)\text{。}$$

§7.2 定积分的物理应用

1．曲率

设计铁路转弯时，里外两轨要有一定高度差，这由设计车速和曲率来决定，所以计算曲线曲率是很重要的一件工作。

令a **表示曲线斜率正切对应的角度，** s **表弧长，则曲率定义为** $k=\left|\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta a}{\Delta s}\right|$**。**

如果曲线由参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ **给出，** $k=\dfrac{\left|\frac{da}{dt}\right|}{\left|\frac{ds}{dt}\right|}$ **，由**$tga=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$**，** $a=arctg\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

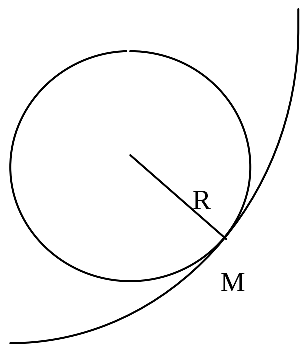
及 $\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$ ，得

$$k=\frac{\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|}{\left|\frac{ds}{dt}\right|}=\frac{\left|\left(\frac{y'}{x'}\right)'\right|}{\left(1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right)\sqrt{x'^2+y'^2}}=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\ 。$$

如果曲线由 $y=f(x)$ 给出，则 $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ 。

如果曲线由极坐标 $r=r(q)$ 给出，则 $k=\dfrac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$ 。

曲率的倒数，$R=\dfrac{1}{k}$，称为曲线在该点的曲率半径，过该点与曲线有相同一阶，二阶导数的圆周 C 称为曲率圆。



2 质心（重心）

平面简单曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $(a\le x\le b)$，如果其上定义一个线密度 $r(t)$，则曲线 Γ 的质量公式 $M=\int_a^b r(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$ 。

曲线 Γ 对 y 轴和 x 轴的静力矩是

$$M_y=\int_a^b r(t)x(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt\ ，$$

$$M_x=\int_a^b r(t)y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt\ 。$$

Γ 的质心

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{1}{M}\int_a^b r(t)x(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt\ ，$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{1}{M}\int_a^b r(t)y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt\ 。$$

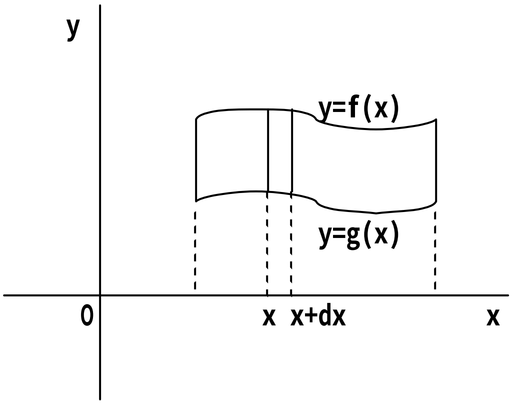
特别地，当曲线质量是均匀分布的，不妨设 $r(t)=1$，则

$$\overline{x}=\frac{1}{l}\int_0^l xds\,,\quad \overline{y}=\frac{1}{l}\int_0^l yds\text{。}$$

由最后一式可得

$$2p\,\overline{y}l=2p\int_0^l yds\quad\text{。}$$

古鲁金定理　平面曲线绕此平面上不与其相交的轴旋转一周，生成的旋转体侧面积等于此曲线的质心绕同一轴旋转所产生的圆周长乘以该曲线的弧长。



例：求$x^2+(y-a)^2=R^2\quad(a>R)$**绕**$x$**轴转动所成圆环侧面积。**

$$S=2pa\cdot 2pR=4p^2aR$$

现考虑平面图形的质心。

质量微元　　$dM=[f(x)-g(x)]dx$，

关于y**轴的静力矩微元**　　$dM_y=x[f(x)-g(x)]dx$，

关于x**轴的静力矩微元**　　$dM_x=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx$

$$=\frac{1}{2}[f^2(x)-g^2(x)]dx\text{。}$$

所以平面图形质心的坐标为：

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_a^b x[f(x)-g(x)]dx}{\int_a^b[f(x)-g(x)]dx}\text{；}$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b x[f^2(x)-g^2(x)]dx}{\int_a^b[f(x)-g(x)]dx}$$

由上式，我们得$2p\,\overline{y}\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=p\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]dx$**，即**$2p\,\overline{y}\cdot S=V$。**其中**$S$**是平面图形的面积，**$V$**是该平面图形绕**$x$**轴旋转所得立体的体积。**

古鲁金定理 一平面图形绕与其不相交的轴（可以是它的边界）旋转所得立体的体积等于该平面图形面积与重心绕轴旋转的周长的乘积。

3 旋转惯量

质点m到定轴u的距离为r，转动的角速度w为常数，则质点动能

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mr^2w^2=\frac{1}{2}I_u w^2$$

我们称$I_u=mr^2$为质点对u轴的转动惯量。

例 求曲线$x=x(t)$，$y=y(t)$关于y轴及x轴的转动惯量。

解 $dI_y=x^2 r\,ds$ $r=r(t)$为曲线密度，

$dI_x=y^2 r\,ds$ 。

$$I_y=\int_0^l x^2 r\,ds=\int_a^b x^2(t)\,r(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt，$$

$$I_x=\int_0^l y^2 r\,ds=\int_a^b y^2(t)\,r(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt。$$

静力矩计算中，用到$\int_a^b xf(x)dx$型积分，数学上我们称为一阶矩；转动惯量计算中，用到$\int_a^b x^2 f(x)dx$型积分，数学上我们称之为二阶矩；一般地在数学上可定义n阶矩：$\int_a^b x^n f(x)dx$。

4 引力和功

两个质点m_1，m_2，相距r，则其间万有引力为 $F=G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$。如果有一均匀细棒，长$2l$，质量M，在其延长线上离中心距离为a $(a>l)$处有一质点A，质量为单位1，则棒对它引力元

$-l$ 0 l a $dF=G\dfrac{\frac{Mdx}{2l}\cdot 1}{(a-x)^2}$， $F=\int_{-l}^{l}\dfrac{GM/2l}{(a-x)^2}dx=\dfrac{GM}{a^2-l^2}$ 。

力$F(x)$沿它作用方向运动dx，作功为 $dW=Fdx$，则从a到b作功$W=\int_a^b F(x)dx$。

如果有三维物体V，体密度为$r(x,y,z)$，则对其外单位质量质点引力$F=F_x i+F_y j+F_z k$为

$$F_x=\iiint_V \frac{kr(x,y,z)(x-x_0)dxdydz}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}，$$

$$F_y = \iiint_V \frac{kr(x,y,z)(y-y_0)dxdydz}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_z = \iiint_V \frac{kr(x,y,z)(z-z_0)dxdydz}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}。$$

我们有必要研究多元微积分学。

§7.3 定积分在经济学中的应用

例 1：已知生产某商品x**件时的边际收入是**$r(x)=100-\frac{x}{25}$ **（元/件）。试求生产此种商品 1000 件时总收入和平均收入以及生产 1000 件到 2500 件时增加的收入和平均收入。**

解： $R(1000)=\int_0^{1000} r(x)dx=\int_0^{1000}(100-\frac{x}{25})dx=80000$ **（元）**

$\overline{R}(1000)=\frac{R(1000)}{1000}=80$ **（元/件）**

$R(2500)-R(1000)=\int_{1000}^{2500}(100-\frac{x}{25})dx=45000$ **（元）**

$\frac{R(2500)-R(1000)}{2500-1000}=30$ **（元/件）**

例 2： 设某产品的总成本C **（单位：万元）的边际成本是产量**x **（单位：百台）的函数**$C'(x)=4+\frac{x}{4}$**。总收入**R **（单位：万元）的边际收入是产量**x**的函数**$R'(x)=9-x$ **。**

（1） 求产量由 1 百台增加到 5 百台时总成本与总收入各增加了多少？

（2） 已知固定成本$C(0)=1$**万元，分别求出总成本，总收入，总利润与产量**x**的函数关系式。**

解：（1） $C(x)=\int_1^5(4+\frac{x}{4})dx=19$ **（万元）**

$R=\int_1^5(9-x)dx=24$ **（万元）**

（2） $C(x)=C(0)+\int_0^x C'(t)dt$

$=1+\int_0^x(4+\frac{t}{4})dt=1+4x+\frac{1}{8}x^2$ ……**总成本函数。**

$R(x)=\int_0^x(9-t)dt=9x-\frac{1}{2}x^2$ …… **总收入函数。**

$L(x)=R(x)-C(x)=5x-\frac{5}{8}x^2-1$ …… **总利润函数。**

又最大利润： $L'(x)=0$**，**$x=4$**，**$L''(4)<0$**，故** $x=4$ **（百台）时利润最大，**$L(4)=9$ **（万元）。 此时总成本**$C(4)=19$ **（万元）， 总收入** $R(4)=28$ **（万元）。**

例 3： 某地区的人口数 y 与时间 t 有关，且人口增长率与 $(N-y)$ 成正比。若初始化时刻 $t=0$ 时的人口数 $y(0)=y_0$，求人口数 y 与时间 t 的函数关系。

解： $\dfrac{dy}{dt}=k(N-y)$　　**通解为：** $y=N-Ce^{-kt}$

$y(0)=y_0$　**得** $C=(N-y_0)$，　$y=N-(N-y_0)e^{-kt}$

当 $k>0$ **时，** $\lim\limits_{t\to\infty} y=N$；

当 $k<0$ **且** $y_0>N$ **时，** $\lim\limits_{t\to\infty} y=+\infty$，**人口爆炸！**

§7.4　无穷小量与无穷大量之比较

定义： 设 $f(x)$，$g(x)$ **都是** $U_0(x_0)$ **上无穷小量，且** $g(x)\neq 0$。

1） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，$A\neq\infty$，$0$，**则称** $f(x)$，$g(x)$ **为同阶无穷小量， 若** $A=1$，**称它们为等价无穷小量，记作** $f(x)\sim g(x)$　（$x\to x_0$）。

2） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，**则称** $f(x)$ **是较** $g(x)$ **的高阶无穷小量， 记作** $f(x)=o(g(x))$ （$x\to x_0$）。

3） 若 $\exists M$，**使得** $|f(x)|\leq M|g(x)|$，$x\in U_0(x_0)$，**则记作** $f(x)=O(g(x))$ （$x\to x_0$）。

由定义我们有： $\sin x\sim x$　（$x\to 0$），　$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$　（$x\to 0$），

$\sin x\sin\dfrac{1}{x}\sim O(x)$　（$x\to 0$）。

类似的对无穷大量， 我们也有

定义　设 $f(x)$，$g(x)$ **都是** $U_0(x_0)$ **上无穷大量，且** $g(x)\neq 0$。

1） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，$A\neq\infty$，$0$，**则称** $f(x)$，$g(x)$ **为同阶无穷大量， 若** $A=1$，**称它们为等价无穷大量，记作** $f(x)\sim g(x)$　（$x\to x_0$）。

2） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$ 是较 $g(x)$ 的低阶无穷大量， 记作 $f(x)=o(g(x))$（$x\to x_0$）。

3） 若 $\exists M$ 使得 $|f(x)|\le M|g(x)|$， $x\in U_0(x_0)$，则记作 $f(x)=O(g(x))$（$x\to x_0$）。

由定义我们有：

$$n \sim n+1 \quad (n\to+\infty), \qquad x=o(x^2) \quad (x\to+\infty),$$

$$x\sin x=O(x) \quad (x\to+\infty)。$$

当 $x\to x_0$ 时，我们称与 $(x-x_0)^k$ 同阶的无穷小量为 k 阶无穷小；当 $x\to+\infty$ 时，我们称与 $\dfrac{1}{x^k}$ 同阶的无穷小量为 k 阶无穷小。类似的可以定义 k 阶无穷大量。

关于 o 与 O 的运算，我们有如下三原则：

1） $o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x))$ （$x\to x_0$），

2） $O(g_1(x))\cdot o(g_2(x))=o(g_1(x)\cdot g_2(x))$ （$x\to x_0$），

3） $o(O(g(x)))=o(g(x))$ （$x\to x_0$），

4） $O(o(g(x)))=o(g(x))$ （$x\to x_0$）。

注 这里的等式与通常等式意义不同，它只表明极限运算的性质，即从左边推出右边，反之不成立。

1） 的证明 令 $a(x)=o(g(x))$， $b(x)=o(g(x))$，（$x\to x_0$）， 即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{a(x)}{g(x)}=0 \ , \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{b(x)}{g(x)}=0。$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a(x)\pm b(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a(x)}{g(x)}\pm\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{b(x)}{g(x)}=0$ ，

即 $a(x)\pm b(x)=o(g(x))$ （$x\to x_0$）。

2）的证明 令 $a(x)=O(g_1(x))$， $b(x)=o(g_2(x))$，（$x\to x_0$），

即 $|a(x)|\le M|g_1(x)|$， $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{b(x)}{g_2(x)}=0$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a(x)\cdot b(x)}{g_1(x)g_2(x)}=0$， 即 $a(x)\cdot b(x)=o(g_1(x)g_2(x))$， （$x\to x_0$）。

3）的证明 令$a(x)=O(g(x))$，$b(x)=o(a(x))$，（$x\to x_0$），

即 $|a(x)|\le M|g(x)|$， $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{b(x)}{a(x)}=0$。

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{b(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a(x)b(x)}{g(x)a(x)}=0$， 即 $b(x)=o(g(x))$ （$x\to x_0$）。

4）的证明类似于 3)，省略。

例 当$x\to 0$时，求$1-\cos(\sin x)$的等价无穷小量。

解 $1-\cos x=\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$$
\begin{aligned}
1-\cos(\sin x)&=\frac{1}{2}(\sin x)^2+o(\sin^2 x)\\
&=\frac{1}{2}[x+o(x)]^2+o(O(x^2))\\
&=\frac{1}{2}x^2+x\cdot o(x)+o(x)\cdot o(x)+o(x^2)\\
&=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)
\end{aligned}
$$

所以 $1-\cos(\sin x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$。

§7.5 Taylor 公式

1. 积分余项的 Taylor 公式

我们已经得到积分余项的 Taylor 公式： $f(x)\in C^{n+1}(x_0-h,x_0+h)$，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

其中$R_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$，$|x-x_0|<h$。

对$R_n(x)$的积分表达式用微分第一中值定理，

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

x 介于 x_0 与 x 之间。这称为 Lagrange 余项。这里 $f(x)\in C^{n+1}(x_0-h,x_0+h)$，要求 $f(x)$ 的 $n+1$ 阶导数连续，太强了些，事实上 $n+1$ 阶导数存在即可。

在 Lagrange 余项 Taylor 公式中，其余项显然满足

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=o\left((x-x_0)^n\right)$$

这样的余项称为 Peano 余项，实际上关于 Peano 余项的 Taylor 公式也不需要这么强的条件。

在下两个小节中我们给出合适的光滑条件的带 Peano 余项的 Taylor 公式和带 Lagrange 余项的 Taylor 公式。

2．Peano 余项的 Taylor 公式

函数在 x_0 点可微，等价于在 x_0 点可导，依定义有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o\left((x-x_0)\right)$$

从逼近观点，$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 是个一阶多项式（即线性函数），上式表明，在可导条件下，$f(x)$ 可以用这一阶多项式逼近（线性逼近），误差是相对 $(x-x_0)$ 的高阶无穷小。现在我们想推广到 n 阶多项式逼近，误差为高于 n 阶的无穷小量：

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$

定理 1　若 $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$ 成立，则逼近多项式唯一。

证　设 $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$

$$=b_0+b_1(x-x_0)+\cdots+b_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)。$$

我们来证 $a_k=b_k$，$k=0,1,\cdots,n$。

令 $x\to x_0$，我们得 $a_0=b_0$，等式两边消去常数项，除以 $(x-x_0)$，得

$$a_1+a_2(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^{n-1}+o\left((x-x_0)^{n-1}\right)$$

$$=b_1+b_2(x-x_0)+\cdots+b_n(x-x_0)^{n-1}+o\left((x-x_0)^{n-1}\right)。$$

再令 $x\to x_0$，我们得 $a_1=b_1$，如此进行，我们得 $a_k=b_k$，直到 $k=n$。

定理 2　设 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶导数存在，则

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\big((x-x_0)^n\big)。$$

证 要证

$$I=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x-x_0)^n}\left\{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right\}=0\quad(f^{(0)}(x_0)=f(x_0)\text{，}0!=1)$$

$f(x)$ **在** x_0 **点的** n **阶导数存在，意味着** x_0 **在点某邻域** $U(x_0,h)$ **上有直到** $(n-1)$ **阶导数，且连续，用** $(n-1)$ **次** del'Hospitale **法则**

$$I=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{n!}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right]=0。$$

公式中 $o\big((x-x_0)^n\big)$ **称** Peano **余项，** $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ **称为** n **阶** Taylor **多项式。**

当 $x_0=0$ **时，** $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)$ **也称为带** Peano **余项的** Maclaurin **公式，** $f(x)$ **在** x_0 **点有** n **阶导数是** Taylor **公式成立的充分条件，而非必要，这一点与一阶时不同，有如下反例：**

$f(x)=x^{n+1}D(x)$ **，** $D(x)$ **为** Dirichlet **函数，在** $x=0$ **连续，** $x\neq 0$ **间断，当然不可导，但** $f(x)=0+0x+\cdots+0x^n+o(x^n)$ **，即** Taylor **公式却成立！**

3．Lagrange 余项的 Taylor 公式

定理 3 设 $f(x)\in C^n[a,b]$ **，在** (a,b) **上** $(n+1)$ **阶导数存在，** $\forall\, x,x_0\in[a,b]$ **，则有**

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$
$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中 x **介于** x **与** x_0 **之间。**

证明作两个辅助函数：

$$F(t)=f(x)-[f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n]$$

$$G(t)=(x-t)^{n+1}$$

容易验证它们在$[x_0,x]$上连续，在内部(x_0,x)可导，且

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$G'(t)=-(n+1)(x-t)^n$$

及$F(x)=G(x)=0$，现在我们用 Cauchy 中值定理

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)}=\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{f^{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

由此我们得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$
$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

注：定理 3 中条件改为$f(x)$在(a,b)上$(n+1)$阶导数存在，$\forall\, x,x_0\in[a,b]$，定理结论仍然成立。

推论设$f(x)$在(a,b)上有$f^{(n+1)}(x)=0$，则$f(x)$为一至多n次多项式。

证明取$x_0\in(a,b)$，$\forall\, x\in(a,b)$，由 Lagrange 余项的 Taylor 公式，我们有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

它是一个至多n次的多项式函数。

当$x_0=0$时，带 Lagrange 余项的 Taylor 公式也称为带 Lagrange 余项的 Maclaurin 公式。

4. Taylor 展开

求一个函数的 Taylor 展开，关键是计算高阶导数，下面我们给出常见函数的 Maclaurin 展开。

例 1 $e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^n}{k!}+\frac{e^{qx}}{(n+1)!}x^{n+1}$， $0<q<1$，$-\infty<x<+\infty$。

例2 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{\cos q x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，

$0<q<1$，$-\infty<x<+\infty$。

例3 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+(-1)^{n+1}\frac{\cos q x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$，

$0<q<1$，$-\infty<x<+\infty$。

例4 $shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{chq x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，

$0<q<1$，$-\infty<x<+\infty$。

例5 $chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2n!}+\frac{chq x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$，

$0<q<1$，$-\infty<x<+\infty$。

例6 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+q x)^{n+1}}$，

$0<q<1$，$|x|<1$。

例7 $(1+x)^a=1+a x+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n$

$+\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}(1+q x)^{a-n-1}x^{n+1}$。 $0<q<1$，$|x|<1$。

有些函数 $f^{(n)}(x)$ 计算很难，但 $f^{(n)}(0)$ 可以很容易求出来，这时我们得到 Peano **余项** Taylor **展开。**

例 8 $f(x)=arctgx$，**我们已经知道** $f^{(2k)}(0)=0$，$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$，**所以**

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})\text{。}$$

例 9 $\arcsin x=x+\frac{1}{3}\frac{1}{2!!}x^3+\frac{1}{5}\frac{3!!}{4!!}x^5+\cdots+\frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$。

还有的函数，一般地计算 $f^{(n)}(x_0)$ 也比较复杂，但前 n 项导数的计算也可实现，这时我们可以计算指定阶数的 Taylor **展开。**

例 10 $e^{\cos x}$ **展开到 x^4 项的** Taylor **展开。**

解 $e^{\cos x}=e\cdot e^{\cos x-1}$

$$=e\left[1+\frac{\cos x-1}{1!}+\frac{(\cos x-1)^2}{2!}+o((\cos x-1)^2)\right]$$

$$=e\left[1+\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)+o(o(x^2)^2)\right]$$

$$=e\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right]$$

$$=e-\frac{e}{2}x^2+\frac{e}{6}x^4+o(x^4)\text{。}$$

例 11　展开$\ln(1+\sin^2 x)$**到**x^4**项的** Taylor **公式。**

解　$\ln(1+\sin^2 x)=\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin^4 x+o(\sin^4 x)$

$$=[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)]^2-\frac{1}{2}[x+o(x)]^4+o(x^4)$$

$$=x^2-\frac{5}{6}x^4+o(x^4)\text{。}$$

例 12　求极限 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x}]$。

解　$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}-x\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{x\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-x\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)+1-o(1)\right]$$

$$=1\text{。}$$

例13　$a_n=(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})-1$，**求它的等价无穷小。**

解　$a_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]-1$

$$=\left[1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1$$

$$=\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\text{。}$$

所以 $a_n\sim\frac{1}{12n^2}$。

5． Lagrange 插值多项式

函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，对区间 $[a,b]$ 给定一个分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，我们的目标是找一个 n 次多项式 $P_n(x)$，使 $P_n(x_i)=f(x_i)$。

$P_n(x)$ 有 $(n+1)$ 个未知系数，条件 $P_n(x_i)=f(x_i)$，$i=0,1,\cdots,n$，有 $(n+1)$ 个线性方程，可以解出 $(n+1)$ 个未知系数来，但我们有更简单的方法解这个问题：构造 $(n+1)$ 个插值多项式 $w_i(x)$，$i=0,1,\cdots,n$，使得 $w_i(x_i)=1$，$w_j(x_i)=0$ 对 $i\neq j$。则 $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)w_i(x)$ 即为所求。 $w_i(x)$ 构造如下：

$w(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 为 $(n+1)$ 次多项式，$\dfrac{w(x)}{x-x_i}$ 为 n 次多项式，它在 x_j 上为 0，在 x_i 上为 $\lim\limits_{x\to x_i}\dfrac{w(x)}{x-x_i}=\lim\limits_{x\to x_i}\dfrac{w'(x)}{1}=w'(x_i)$。取 $w_i(x)=\dfrac{w(x)}{(x-x_i)w'(x_i)}$，即为所求。

逼近误差 设 $f\in C^n[a,b]$，f 在 (a,b) 为 $(n+1)$ 阶可导，则

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)w_i(x)+\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}w(x)$$

Taylor 逼近用多项式是在一点局部逼近一个函数，Lagrange 插值是在一个区间 $[a,b]$ 上用多项式，比较均匀地逼近一个函数，优缺点各有千秋。

§7.6 函数的升降与极值，凸凹与拐点

1． 函数的升降

定理 1 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 上可导，则

1） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是上升的 $\Leftrightarrow f'(x)\geq 0,\ \forall x\in(a,b)$。

2） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是下降的 $\Leftrightarrow f'(x)\leq 0,\ \forall x\in(a,b)$。

证 只证 1）

必要性 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上升，$\forall x\in(a,b)$，

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0\text{，}\quad x+\Delta x\in(a,b)$$

令$\Delta x\to 0$，得$f'(x)\geq 0$。

充分性 $\forall x_1$，$x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$，在$[x_1,x_2]$用 Lagrange 定理

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(x)(x_2-x_1)\geq 0\text{，}(x_1<x<x_2)$$

所以$f(x_2)\geq f(x_1)$。

定理 2 设$f(x)\in C[a,b]$，在(a,b)可导。则$f(x)$在$[a,b]$严格上升（下降）充要条件是：

1） $f'(x)\geq 0$ （$f'(x)\leq 0$），$\forall x\in(a,b)$，

2） $f'(x)$不在(a,b)的任一子区间上恒为0。

证 **必要性** 设$f(x)$在$[a,b]$严格上升，由定理 1 知 $f'(x)\geq 0$，$\forall x\in(a,b)$。用反证法证 2)，如果$\exists(\alpha,\beta)\subset[a,b]$使得$f'(x)=0$，$\alpha<x<\beta$，则$f(x)=C$，$\alpha<x<\beta$与$f(x)$严格上升矛盾。

充分性 设 $f'(x)\geq 0$ 知$f(x)$在$[a,b]$上升。用反证法证严格上升，如果不然，$\exists\,\alpha$，$\beta\in[a,b]$，$\alpha<\beta$，使$f(\alpha)=f(\beta)$，f为上升的，所以$f(x)=f(\alpha)$，$\alpha<x<\beta$，那么$f'(x)=0$，$\alpha<x<\beta$，与 2）矛盾。

2．函数的极值

定理 3 设$f(x)$在$U(x_0;d)$可导，$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)$存在，则

1） 当$f''(x_0)<0$时$\Rightarrow f(x_0)$为严格极大值；

2） 当$f''(x_0)>0$时$\Rightarrow f(x_0)$为严格极小值。

证 Fermat 定理说$f(x_0)$是极值，必有$f'(x_0)=0$，本定理则给出判定极值点的充分条件，由 Taylor 公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

$$= f(x_0)+\left[\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)\right](x-x_0)^2。$$

当$x\to x_0$时，$o(1)$为无穷小量，$\exists d_1\in(0,d)$，使得当$x\in U_0(x_0;d_1)$时，$\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)$与$f''(x_0)$同号，故当$f''(x_0)>0$时，$f(x)>f(x_0)$，$\forall x\in U_0(x_0;d_1)$，即$f(x_0)$为严格极小值，当$f''(x_0)<0$时，$f(x)<f(x_0)$，$\forall x\in U_0(x_0;d_1)$，即$f(x_0)$为严格极大值。

例 1 证$x\ge -1$时，$\frac{x}{1+x}\le \ln(1+x)\le x$，且等号成立当且仅当$x=0$。

证 $x=0$时显然等号成立。只要证$-1<x<0$和$x>0$时严格不等式成立。

先证$\ln(1+x)<x$。考虑函数$f(x)=x-\ln(1+x)$，$f(0)=0$，$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$。当$x>0$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$[0,+\infty)$严格上升，故$f(x)>f(0)=0$，即$\ln(1+x)<x$。当$-1<x<0$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(-1,0]$严格下降，故$f(x)<f(0)=0$，即$\ln(1+x)<x$。

再证$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$。当$x>0$时，$0<\frac{x}{1+x}<1$，$-1<-\frac{x}{1+x}<0$，

$$-\frac{x}{1+x}>\ln(1-\frac{x}{1+x})=-\ln(1+x)，即\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)。$$

当$-1<x<0$时，$-\frac{x}{1+x}>0$，$-\frac{x}{1+x}>\ln(1-\frac{x}{1+x})$，也得$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$。

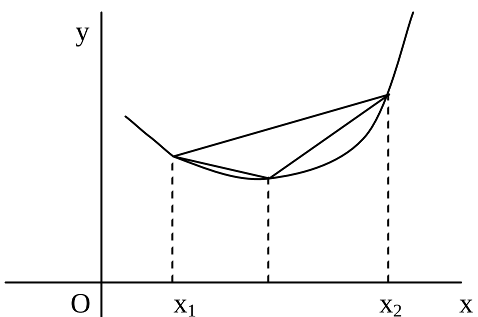
3．函数的凸凹性

定义 设$f(x)$定义于$[a,b]$，$\forall x_1$，$x_2\in[a,b]$，若

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)，\ 0<t<1，$$

则称$f(x)$为$[a,b]$上的凸函数，若$x_1\ne x_2$时严格不等号成立，称为严格凸函数；不等号反过来分别称为凹函数和严格凹函数。

直观 连接两点(x_1,y_1)和(x_2,y_2)的直线段方程为$\begin{cases}x=tx_1+(1-t)x_2\\ y=ty_1+(1-t)y_2\end{cases}$，$0\le t\le 1$。



如曲线$y=f(x)$任意两点间弧段，总位于连接两点的直线段之下，则称它为凸的。

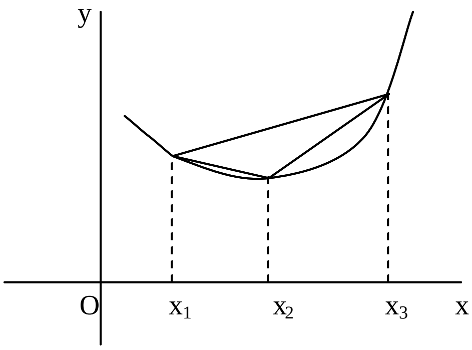
凸凹性都是从下往上看得来的概念。

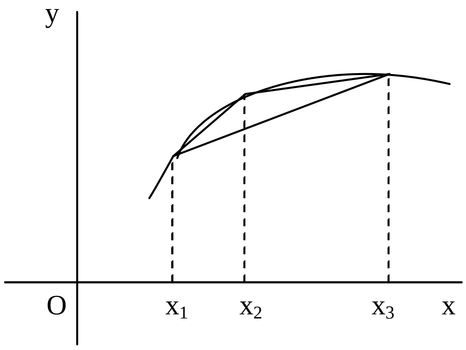
在曲线上任取三点$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，$(x_3,f(x_3))$，自变量按顺序$x_1<x_2<$

x_3，则量

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix}$$

代表连接这三点的三角形的有向面积。





$\Delta>0$ 表明这三角形是正旋的，即 $f(x)$ 为凸函数；

$\Delta<0$ 表明这三角形是负旋的，即 $f(x)$ 为凹函数。

在此行列式中，第二行减去第一行乘 t 再减去第三行乘以 $(1-t)$，我们得到

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ 0 & f(x_2)-tf(x_1)-(1-t)f(x_3) & 0 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix}$$

$$=[f(x_2)-tf(x_1)-(1-t)f(x_3)](x_1-x_3)$$

即 f 凸当且仅当凸 $f(x_2)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_3)$，$f$ 严格凸当且仅当

$f(x_2)<tf(x_1)+(1-t)f(x_3)$。

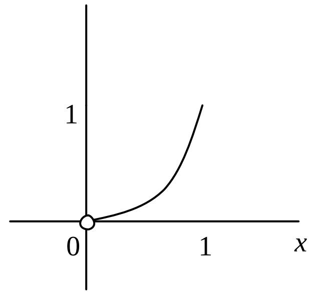
另外一个凸函数充要条件为：$x_1<x_2<x_3$ 时，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

这表明两边斜线斜率是递增的，读者可以自己证明这个充要条件。

注：f 凸，$x\in(a,b)$，$f(x)$ 在 x 左右导数存在，所以在 x 点连续，但在 a，b 处可以不连续。

比如：

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ x^2 & 0<x\le 1\end{cases}$$



定理 4　**设** $f(x)\in C[a,b]$**，在** (a,b) **可导，则** $f(x)$ **为凸函数充要条件为：** $f'(x)$ **在** (a,b) **内上升；** $f(x)$ **为严格凸函数充要条件为：** $f'(x)$ **在** (a,b) **严格上升。**

证　**必要性，** $\forall x_1$**，** $x_2\in(a,b)$**，** $x_1<x_2$**，要证** $f'(x_1)\le f'(x_2)$**，令** $h>0$**，使** x_1-h**，** $x_2+h\in(a,b)$**。由凸性有**

$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h},$$

令 $h\to 0$**，得** $f'(x_1)\le\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le f'(x_2)$**。**

若 $f(x)$ **严格凸，在** (x_1,x_2) **中任取一点** x^***，这时有**

$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h}<\frac{f(x^*)-f(x_1)}{x^*-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x^*)}{x_2-x^*}<\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h},$$

令 $h\to 0$ **得**

$$f'(x_1)\le\frac{f(x^*)-f(x_1)}{x^*-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x^*)}{x_2-x^*}\le f'(x_2),\quad f'(x_1)<f'(x_2)。$$

充分性　**要证** $f(x)$ **凸，只要对** x_1**，** x_2**，** $x_3\in[a,b]$**，** $x_1<x_2<x_3$ **时，有**

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}。$$

由 Lagrange **中值定理，** $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_1)$**，** $\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(x_2)$**，** $x_1<x_1<x_2<x_2<x_3$**，由** $f'(x_1)\le f'(x_2)$**，即得** $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$**。若** $f'(x)$ **严格上升，严格不等号成立，** $f(x)$ **严格凸。**

定理 5 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 上二阶可导，则 $f(x)$ 凸的充要条件为 $f''(x)\ge 0$；$f(x)$ 严格凸的充要条件为 1）$f''(x)\ge 0$， 2）$f''(x)$ 不在 (a,b) 任一子区间上恒为零。

例2 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上凸函数，$x_i\in[a,b]$，$t_i>0$，$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$，则有

$$f(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)\le t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots t_nf(x_n)\text{。}$$

$f(x)$ 严格凸，$x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 不全相等，则上式严格不等号成立。

证 $n=2$，这是凸函数定义。

设 $n=k$ 成立，要证 $n=k+1$ 也成立，设 $t_i>0$，$i=1,2,\cdots,k+1$，$\sum_{i=1}^{k+1} t_i=1$。取

$l_i=\dfrac{t_i}{1-t_{k+1}}$，$i=1,2,\cdots,k$，有

$$\begin{aligned}
&f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_kx_k+t_{k+1}x_{k+1})\\
&=f[(1-t_{k+1})(l_1x_1+l_2x_2+\cdots+l_kx_k)+t_{k+1}x_{k+1}]\\
&\le(1-t_{k+1})f(l_1x_1+l_2x_2+\cdots+l_kx_k)+t_{k+1}f(x_{k+1})\\
&\le(1-t_{k+1})(l_1f(x_1)+l_2f(x_2)+\cdots+l_kf(x_k))+t_{k+1}f(x_{k+1})\\
&=t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots t_kf(x_k)+t_{k+1}f(x_{k+1})\text{。}
\end{aligned}$$

$f(x)$ 严格凸时，$x_i(i=1,2,\cdots,k+1)$ 不全相等，分两种情况，$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 不全相等，由归纳法假设，可得严格不等号成立；$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 相等，但不等于 x_{k+1}，则 $l_1x_1+l_2x_2+\cdots+l_kx_k\ne x_{k+1}$，严格不等号也成立。

例3 设 $a_i>0$，（$i=1,2,\cdots,n$）不全相等，证明当 $x\ne 0$ 时

$$x\frac{a_1^x\ln a_1+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+\cdots+a_n^x}-\ln\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}>0\text{。}$$

证 要证的不等式等价于

$$\frac{1}{n}a_1^x\ln a_1^x+\cdots+\frac{1}{n}a_n^x\ln a_n^x>\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\ln\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\text{，}$$

令 $f(x)=x\ln x$， $f'(x)=\ln x+1$， $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0 \quad (x>0)$，所以 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上严格凸函数，又 $a_i^x\ (i=1,2,\cdots,n)$ 不全相等，有

$$f\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)<\frac{1}{n}f(a_1^x)+\cdots+\frac{1}{n}f(a_n^x),$$

这正是所要的。

例 4 设 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 不全相等，证明 $f(x)=\left(\dfrac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上严格增函数。

证 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，令 $f(0)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，则 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$。$l\neq 0$ 时，对 $\ln f(x)$ 求导，得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^2}\left[x\frac{a_1^x\ln a_1+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+\cdots+a_n^x}-\ln\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right],$$

因为 $f(x)>0$，得 $x\neq 0$ 时， $f'(x)>0$。故 $f(x)$ 在实轴上严格递增。

注意 $f(-1)=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots\frac{1}{a_n}}$， 称为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的调和平均，

$f(0)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 称为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的几何平均，

$f(1)=\dfrac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}$ 称为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的算术平均，

$f(-\infty)=\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，

$f(+\infty)=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。

我们有 $f(-\infty)<f(-1)<f(0)<f(1)<f(+\infty)$。

例 5 设 $a_i>0$， $b_i>0$， $i=1,2,\cdots,n$。证明 $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_ib_i\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$，

其中 $1<p,q<\infty$， $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。

此不等式称为 Hölder 不等式，当 $p=q=2$ 时，称为 Schwartz 不等式或 Cauchy 不等

式，它表明两个n维空间的向量夹角余弦之绝对值≤ 1。

证 令$f(x)=x^{\frac{1}{q}}$，$f''(x)=\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}-1\right)x^{\frac{1}{q}-2}<0$，$f(x)$为凹函数，若$x_i>0$，$t_i>0$，$\sum_{i=1}^{n}t_i=1$，取$t_i=\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n}a_i^p}$，$x_i=\frac{b_i^q}{a_i^p}$，代入，得

$$\frac{a_1b_1+\cdots a_nb_n}{\sum_{i=1}^{n}a_i^p}\le\frac{(b_1^q+\cdots b_1^q)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{q}}}$$

即 $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$。

4．拐点

定义 函数$f(x)$在$U(x_0;d)$上连续，如果它在x_0的左右侧凹凸性相反，称x_0为一个拐点。

定理 6 如果x_0是$f(x)$的拐点，$f''(x_0)$存在，则$f''(x_0)=0$。

证 $f''(x_0)$存在表明$f'(x)$在x_0附近存在，$f(x)$在x_0的左右凹凸性相反，表明$f'(x)$在x_0的左右升降性相反，即x_0是$f'(x)$一个极值点，由 Fermat 定理，$f''(x_0)=0$。

定理 7 如果$f(x)$在$U(x_0;d)$二阶可导，$f''(x_0)=0$且$f'''(x_0)$存在不为零，则x_0是$f(x)$拐点。

证 对$f''(x)$用 Taylor 公式，

$$\begin{aligned}f''(x)&=f''(x_0)+f'''(x_0)(x-x_0)+o((x-x_0))\\&=(f'''(x_0)+o(1))(x-x_0)\text{。}\end{aligned}$$

所以$\exists d_1<d$，使得当$x\in U(x_0;d_1)$时，$f'''(x_0)+o(1)$与$f'''(x_0)$有相同符号，从而$f''(x)$在x_0左右符号相反，即$f(x)$在x_0左右凸凹性相反，所以x_0是拐点。

5．函数作图

计算机作图是$[a,b]$把分得充分细，在每个x_i点上计算$f(x_i)$，描点$(x_i, f(x_i))$，当分辨率达到一定程度时，我们就看见$y = f(x)$的图形，本书中图全部是这样做出来的。作出图形后我们可以直观地研究函数各种性质。

手工作图不能这样，计算量太大。反过来我们先把函数各种性质尽可能的搞清楚，然后再作出草图，具体步骤如下：

1）求出函数的定义域；

2）研究函数的有界性，奇偶性，周期性；

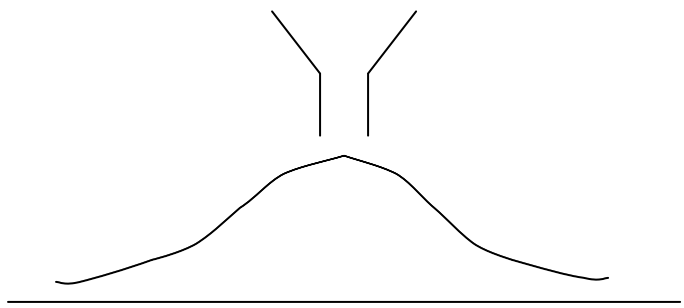
3）解方程$f'(x)=0$，列表求出函数升降区间和极值点；

4）解方程$f''(x)=0$，列表求出函数的凸凹区间和拐点；

5）求出函数的斜渐近线与垂直渐近线；

6）重要点上（如$x=0$点）函数值。

例1　用计算机作$y=e^{-x^2}$的图形，并研究它的奇偶性，升降性和凸凹性。



解　$y=e^{-x^2}$定义域为$(-\infty,+\infty)$，且为偶函数，它在概率上很重要。物理上做个实验，立着的平面上放一漏斗向下漏小绿豆，则小绿豆在下面堆成一堆，边缘曲线即是$y=e^{-x^2}$。

由于$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}=0$，所以$x$轴为一水平渐近线，$y'=-2xe^{-x^2}=0$，其解为$x=0$。

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	-
y	↗	1 极大	↘

$y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}=0$，解为$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

x	$(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$
y''	-	0	+
y		0.6 拐点	

例 2 描绘 $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的草图。

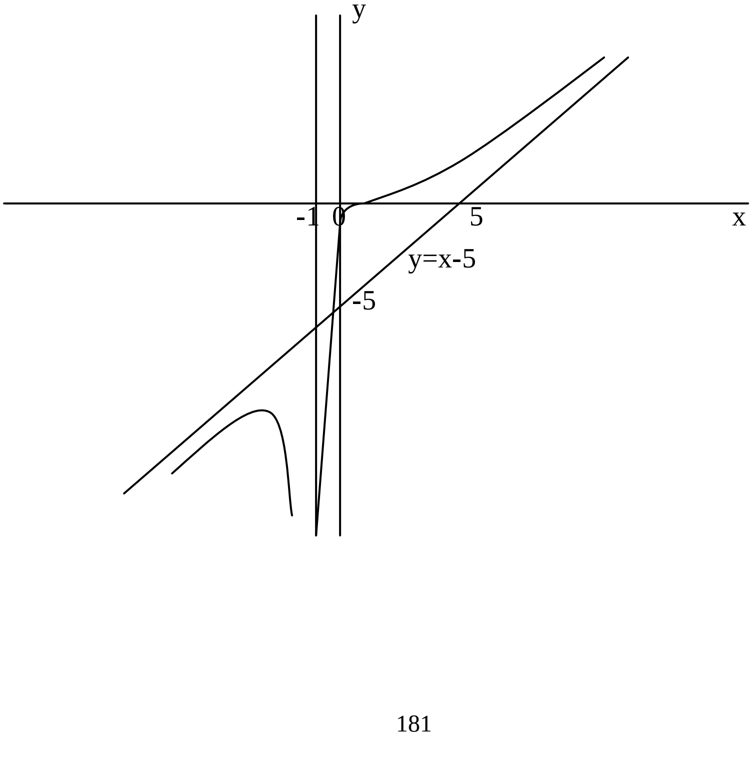
解 除 $x=-1$ 外，$f(x)$ 在实轴上都有意义。$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$，因此 $x=-1$ 是垂直渐近线。又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=-5$，所以 $y=x-5$ 是另一条渐近线，斜的。

$f(1)=0$。

$f'(x)=\dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$，$f'(1)=0$，$f'(-5)=0$。

$f''(x)=\dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$，$f''(1)=0$。

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	-	+	0	+
y''	-	-	-	-	0	+
y		极大			拐点	



习题：

7.1　**求下列曲线所围图形的面积：**

（1） $y = x^2$ **与** $y = x + 5$ ；

（2） $y^2 = 2x$ **与** $x = 5$ ；

（3） $y^2 = 1 + 2x - x^2$ **与** $x + y = 1$ ；

（4） $x^2 + 9y^2 = 1$ ；

（5） $y = x$ **与** $y = x + \sin^2 x \quad (0 \le x \le p)$。

7.2　**求下列用极坐标表示的曲线所围成图形的面积：**

（1） $r^2 = a^2 \cos 2j$ ；

（2） $r = a \sin 3j$ ；

（3） $r = a\cos q + b \quad (b \ge a)$。

7.3　**求下列用参数方程表示的曲线所围成图形的面积：**

（1） $x = 2t - t^2$， $y = 2t^2 - t^3$ ；

（2） $x = a(t - \sin t)$， $y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2p)$ **以及** x **轴；**

（3） $x = a\cos^3 t$， $y = a\sin^3 t$ ；

（4） $x = a(\cos t + t\sin t)$， $y = a(\sin t - t\cos t)$，$(0 \le t \le 2p)$。

7.4　**求下列曲面所围成的体积：**

（1）**椭球面：** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ ；

（2）**正圆台：其上下底分别为半径为** a **与** b **的圆，而其间的距离为** h；

（3）**正长方台：上底的长与宽为** a_1， b_1，**下底的长与宽为** a_2， b_2，**而两底的间距为** h；

（4）**抛物面** $2z = x^2 + y^2$ **与球面** $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ **所围成的部分。**

7.5　**求下列旋转体的体积：**

（1）**旋转抛物体，其底面积为** S，**高为** H；

（2）**椭圆** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **与直线** $x = h \quad (|h| < a)$，**所围成部分绕** x **轴旋转产生的旋转**

体；

（3）双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 与直线 $x=\pm h$ 所围成的图形绕 x 轴旋转产生的旋转体；

（4）摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $\quad (0\le t\le 2p)$ 绕 x 轴旋转产生的旋转体。

7.6 求下列曲线分别绕 Ox 轴与 Oy 轴旋转所成曲面包围的体积：

（1） $y=\sin x$， $y=0$， $0\le x\le p$ ；

（2） $y=b(\frac{x}{a})^2$， $y=b\left|\frac{x}{a}\right|$， $a,b>0$

7.7 求下列曲线的弧长：

（1） $y=x^3$， $0\le x\le 1$ ；　　（2） $y=e^x$， $1\le x\le 2$ ；

（3） $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$， $1\le y\le e$ ；　　（4） $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ；

（5） $r=a(1+\cos q)$， $0\le q\le 2$， $a>0$ ；

（6） $x=a(\cos t+t\sin t)$， $y=a(\sin t-t\cos t)$， $a>0$；$0\le t\le 2p$ 。

7.8 求下列曲线的曲率及曲率半径：

（1） $y^2=2px,\ p>0$ ；　　（2） $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ ；

（3） $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$ ；

（4） $r=a(1+\cos q)$ ；　　（5） $r=2a^2\cos 2q$ 。

7.9 （1）求证：用极坐标表示的曲线 $r=r(q)$ 在 (r,q) 点的曲率为：

$$K=\frac{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}。$$

（2）求 $r=ae^{bq}$ 的曲率。

7.10 求下列曲线旋转体的表面积：

（1） $r=a(1+\cos q),0\le q\le 2p$ ，绕极轴旋转；

（2） $x=a(t-\sin t)$， $y=a(1-\cos t)$， $a>0$， $0\le t\le 2p$ ，绕直线 $y=2a$ 旋转；

（3） $x=a\cos^3 t$， $y=a\sin^3 t$，绕 x 轴旋转；

（4）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$a>b$，绕 x 轴旋转。

7.11　求下列曲线的质量（设密度为 1）与重心坐标：

（1）$y=1-x^2$，$-1\le x\le 1$；

（2）$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$a>0$，$0\le t\le 2p$；

（3）$x=a\cos j$，$y=a\sin j$，$|j|\le\dfrac{p}{4}$。

7.12　（1）求半圆 $0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}$ 的重心；

（2）求半圆周 $y=\sqrt{R^2-x^2}$　$(|x|\le R)$ 的重心。

7.13　应用重心公式计算定积分

$$\int_0^p \frac{x}{1+\cos^2 x}dx\text{。}$$

7.14　质量为 m 的物体，以初速 v_0 发射使其脱离地球，求证：

（1）物体脱离地球时（即引力自 R 到 R' 做功，再令 $R'\to\infty$）所做的功为

$$W=G\frac{mM}{R}\text{，}$$

其中 M,R 分别为地球的质量及半径，G 是引力常数；

（2）$v_0=\sqrt{2gR}$；

（3）若 $R=6370$ 公里，$g=9.8$ 米/秒^2，求 v_0（即第二宇宙速度）。

7.15　求下列量的等价无穷小量 $(x\to 0)$：

（1）$\ln(1+x)$；　　（2）e^x-1；

（3）$\sqrt[n]{1+x}-1$；　　（4）$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$。

7.16　求下列量的等价无穷大量：

（1）$2x^3+3x^2-5x+6\quad(x\to\infty)$；　　（2）$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\quad(x\to+\infty)$；

（3）$\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}\quad(x\to 0)$；　　（4）$\dfrac{arctgx}{x^2}\quad(x\to 0)$。

7.17　写出下列函数在 $x=0$ 的带有皮亚诺余项的泰勒展开式：

（1）e^{2x}；　　（2）$\cos x^2$；

（3）$\ln(1-x)$；　　（4）$\dfrac{1}{(1+x)^2}$；

（5）$\dfrac{x^3+2x+1}{x-1}$；　　　　（6）$\sin^3 x$。

7.18　写出下列函数在 $x=0$ 的泰勒展开式至所指的阶数：

（1）$1-x+x^2$　(x^3)；　　　　（2）$e^x\cos x$　(x^4)；

（3）$\dfrac{x}{\sin x}$　(x^4)；　　　　（4）$\ln(\cos x+\sin x)$　(x^4)；

（5）$\dfrac{x}{2x^2+x-1}$　(x^3)；　　　　（6）$\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$　(x^4)；

（7）$\ln(1+x+x^2+x^3)$　(x^6)；　　　　（8）$\ln\dfrac{1+x}{1-2x}$　(x^n)。

7.19　在 $x=0$ 处将下列函数展开到 x^4：

（1）$\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}}$；　　　　（2）$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2+x^4}}$。

7.20　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x})$；　　　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x}]$；　　（4）$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\dfrac{1}{2})\ln(1+\dfrac{1}{n})$。

7.21　（1）把多项式 $P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ 表成 $(x+1)$ 的幂的多项式；

（2）把多项式 $P(x)=x^3-2x^2+3x+5$ 表成 $(x-1)$ 的幂的多项式。

7.22　设 $f(x)=e^{x^2}$

（1）求证：$f^{(n)}(x)=P_n(x)e^{x^2}$，其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式，满足 $P_0(x)=1$，

$P_1(x)=2x$，　$P_{n+1}(x)=2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)$　；

（2）求 $f^{(n)}(0)$ 的值。

7.23　用泰勒公式求证：

（1）$0<x-\ln(1+x)<\dfrac{x^2}{2}$　$(0<x\le 1)$；

（2）$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{k}-\ln(1+\dfrac{1}{k})\right]$存在。

7.24　求证：

（1） $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{q}}{(n+1)!} \qquad (0<q<1)$；

（2） e 是无理数。

7.25　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则 $\exists c\in(a,b)$，使

$$\left|f''(c)\right|\geq\frac{4}{(b-a)^{2}}\left|f(b)-f(a)\right|$$

提示：在 $x=\frac{a+b}{2}$ 点写出函数的展开式。

7.26　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可微，且 $f(a)=f(b)=0$。求证：

（1） $\max\limits_{a\leq x\leq b}\left|f(x)\right|\leq\frac{1}{8}(b-a)^{2}\max\limits_{a\leq x\leq b}\left|f''(x)\right|$ ；

（2） $\max\limits_{a\leq x\leq b}\left|f'(x)\right|\leq\frac{1}{2}(b-a)\max\limits_{a\leq x\leq b}\left|f''(x)\right|$。

提示：在最大点写出函数的展开式。

7.27　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微，且 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 时，有 $\left|f(x)\right|\leq M_{0}$，$\left|f''(x)\right|\leq M_{2}$。

（1） 写出 $f(x+h)$，$f(x-h)$ 的泰勒展开式；

（2） 求证：$\forall h>0$，有 $\left|f'(x)\right|\leq\frac{M_{0}}{h}+\frac{h}{2}M_{2}$；

（3） 求 $\frac{M_{0}}{h}+\frac{h}{2}M_{2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值；

（4） 求证：$\left|f'(x)\right|\leq\sqrt{2M_{0}M_{2}}$。

7.28　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二次可微，且 $\left|f(x)\right|\leq M_{0}$，$\left|f''(x)\right|\leq M_{2} \quad (x>0)$。求证：

$$\left|f'(x)\right|\leq 2\sqrt{M_{0}M_{2}}\ (x>0)。$$

7.29　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义，并满足

$$\left|f(x)-f(y)\right|\leq k\left|x-y\right|^{2} \qquad \forall x,y\in[a,b]。$$

求证：$f(x)\equiv$ 常数。

7.30　求证下列不等式：

（1） $\sin x>\frac{2}{p}x \quad (0<x<\frac{p}{2})$；　　　（2） $\cos x>1-\frac{x^{2}}{2} \quad (x\neq 0)$；

(3) $e^x > 1+x \quad (x \neq 0)$；　　(4) $e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2} \quad (x \neq 0)$；

(5) $\dfrac{1-x}{1+x} \leq e^{-2x} \quad (0 \leq x \leq 1)$。

7.31 **求证下列不等式：**

(1) $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1} \quad (x > 1)$；　　(2) $\sin x + \cos x > 1 + x - x^2 \quad (x > 0)$；

(3) $\ln(1+x) \geq \dfrac{arctgx}{1+x} \quad (x \geq 0)$。

7.32 (1) **求证：** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ **在** $(0, p)$ **上单调下降；**

(2) **求证：圆内接正** n **边形的面积随边数的增加而增加。**

7.33 **求证：**

(1) $(1+\dfrac{1}{x})^x$ **在** $x > 0$ **上单调上升；**

(2) $(1+\dfrac{1}{x})^{1+x}$ **在** $x > 0$ **上单调下降；**

(3) $(1+\dfrac{1}{x})^x < e < (1+\dfrac{1}{x})^{1+x} \quad (x > 0)$。

7.34 **求下列函数的最大值：**

(1) $f(x) = x^2\sqrt{a^2 - x^2} \quad (0 \leq x \leq a)$；

(2) $f(x) = x^n(1-x)^m \quad (0 \leq x \leq 1, n, m$ **为正整数**$)$；

(3) $f(x) = x^2 e^{-nx} \quad (x \geq 0, n$ **为正整数**$)$；

(4) $f(x) = x^a \ln\dfrac{1}{x} \quad (x > 0, a > 0)$。

7.35 **求证：** $\sqrt{a + bx^2} \quad (a > 0, b > 0)$ **为凸函数。**

7.36 **求四次多项式是凸函数的条件。**

7.37 **设** $f(x), g(x)$ **是** (a, b) **上的凸函数，求证：** $\max(f(x), g(x))$ **也是** (a, b) **上的凸函数。**

7.38 **求证：**

(1) $|a|^p + |b|^p \geq 2^{1-p}(|a| + |b|)^p \quad (p > 1)$；

(2) $|a|^p + |b|^p \leq 2^{1-p}(|a| + |b|)^p \quad (0 < p < 1)$。

7.39 **设** $f(x)$ **在** $[0, a]$ **上二次可导，且** $f(0) = 0$，$f''(x) < 0$。

求证： $\dfrac{f(x)}{x}$ **严格单调下降。**

7.40 **设** $n \geq 2$，$r > 0$，$f^{(n)}(x)$ **在** $[a-r, a+r]$ **上连续，并设** $f^{(k)}(a) = 0 \, (1 \leq k \leq n-1)$，

$f^{(n)}(a) \neq 0$，**求证：**

（1）**当** n **为偶数时，**a **是极值点；**
（2）**当** n **为奇数时，**a **是拐点。**

7.41　**作下列函数的图形：**

（1）$y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^3}$；　　（2）$y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$；

（3）$y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$；　　（4）$y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$。

7.42　**作下列函数的图形：**

（1）$y=(1+x^2)e^{-x^2}$；　　（2）$y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$。

7.43　**作下列函数的图形：**

（1）$y=\sin^3 x+\cos^3 x \quad (0 \le x \le 2p)$；

（2）$y=\sin x+\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3} \quad (0 \le x \le p)$。

7.44　**作** $y=x^3-x^2-x+1$ **的图形，方程** $x^3-x^2-x+k=0$ **当** k **取何值时有三个实根？**

7.45　**已知某商品每周生产** x **单位时，总费用的变化率** $f(x)=0.4x-12$ **（元/单位），求总费用** $F(x)$**。 如果这种商品的销售单价是** 20 **元，求总利润** $L(x)$**。 每周生产多少产品才能得到最大利润？**