*第九章　Grassmann 代数与微分形式

上一章多重积分中，面积和体积微元是有方向性的，即与坐标顺序有关，但表达式 $dxdy$ 等并不反映它的方向性．在作变量替换时 $dxdy=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$，要出现一个 Jacobi 行列式，这显然也不能从通常的实数乘法推导出来．这一章我们将用 Grassmann 代数工具将这一乘法讲清楚．事实上面积微元 $dxdy$ 应该用 Grassmann 代数中乘法（外积）来定义 $dx ? dy$，这样既解决了方向性问题：$dy ? dx=-dx ? dy$，又能很自然地推出变量替换时的公式．在更高维数时它也适用．

§7.1 Grassmann 代数与微分形式

1.1 Grassmann 代数

在 n 维线性空间中取定一组基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，对任何两个向量 $x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ 和 $y=y_1e_1+\cdots+y_ne_n$，我们定义一个乘法 $x ? y$，将 n 维线性空间扩张为一个代数．为此我们只要规定好基向量之间的乘法，它们由下面定义

1）$e_i ? e_i=0,\ i=1,2,\cdots,n;$

2）$e_i ? (e_j ? e_k)=(e_i ? e_j) ? e_k;$　（结合律）

3）$e_1 ? \cdots ? e_n\neq 0;$　（非退化）

4）$e_i ? e_j=-e_j ? e_i;$　（非交换）

在这个线性运算和乘法下我们得到一个代数，称为 Grassmann 代数，记为 G_n．

例 1: G_3 中有基元素

$$\begin{cases}1\\ e_1,e_2,e_3\\ e_1 ? e_2,e_1 ? e_3,e_2 ? e_3\\ e_1 ? e_2 ? e_3.\end{cases}$$

它是 $2^3=8$ 维的．比如其中有两个元素 $c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$ 和 $d_1e_1+d_2e_2+d_3e_3$，它们的外积

$$
\begin{aligned}
&\left(c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3\right)?\left(d_1e_1+d_2e_2+d_3e_3\right)\\
&=(c_1d_2-c_2d_1)e_1?e_2+(c_1d_3-c_3d_1)e_1?e_3+(c_2d_3-c_3d_2)e_2?e_3.
\end{aligned}
$$

如果有三个元素 $a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$, $b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$ **和** $c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$，**它们三者的外积**

$$
\begin{aligned}
&\left(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3\right)?\left(b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3\right)?\left(c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3\right)\\
&=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} e_1?e_2?e_3.
\end{aligned}
$$

例 2: G_n **中有基向量** 2^n **个，分阶表示为**

$$
\begin{array}{ll}
\Lambda^0 : 1 & 1\text{维}\\
\Lambda^1 : e_1, e_2, \cdots, e_n & n\text{维}\\
\Lambda^2 : e_1?e_2, e_1?e_3, \cdots, e_{n-1}?e_n & C_n^2\text{维}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\Lambda^n : e_1?e_2?\cdots?e_n & 1\text{维}
\end{array}
$$

每个子空间 Λ^k **（称为** k **阶元素）维数为** C_n^k，**总维数为** $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. **显然有**

$$
\Lambda^k ? \Lambda^l \subset \Lambda^{k+l},
$$

即 k **阶元素与** l **阶元素的外积是** $k+l$ **阶元素，如果** $k+l>n$ **时，外积为** 0.

G_n **是个非交换、不可除但结合的代数，也称为外代数.**

1.2 $\mathbf{R}^n$ 中微分形式

在 $\mathbf{R}^n$ **的微分学中，我们有** n **个基本一阶微分元素** $dx_1, \cdots, dx_n$. **令**

$$
dx_1 = e_1, dx_2 = e_2, \cdots, dx_n = e_n,
$$

则所有 $\mathbf{R}^n$ **中微分形式恰好形成一个** Grassmann **代数** G_n. **按** G_n **的结构，** $\mathbf{R}^n$ **中的微分形式分为** $n+1$ **个不同阶的微分形式，分别称为** 0-**形式**, 1-**形式**, $\cdots$, n-**形式. 它们的基本形式分别为**

$$\begin{aligned}
&\Lambda^0 : 1\\
&\Lambda^1 : dx_1, dx_2, \cdots, dx_n\\
&\Lambda^2 : dx_1 \wedge dx_2, dx_1 \wedge dx_3, \cdots, dx_{n-1} \wedge dx_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Lambda^n : dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n .
\end{aligned}$$

例如Λ^1**中元素一般可写为**

$$f_1(x)dx_1 + \cdots + f_n(x)dx_n ,$$

它就是我们熟知的 1 **阶（微分）形式，它有形式不变性，即在坐标变换下，形式不变.** Λ^2 **中元素一般可写为**

$$\sum_{i<j} f_{ij}(x)dx_i \wedge dx_j \ .$$

当 $n=3$ **时，有一个数值函数** $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$，**它就是一个 0-形式；它的微分** $f_1'(x)dx_1 + f_2'(x)dx_2 + f_3'(x)dx_3$ **是一个 1-形式；再有一个向量值函数** (P, Q, R)，**则** $Pdx_2 \wedge dx_3 + Qdx_3 \wedge dx_1 + Rdx_1 \wedge dx_2$ **就是一个 2-形式，由它可生成一个 3-形式**

$$\left(P'_{x_1} + Q'_{x_2} + R'_{x_3}\right)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 .$$

一般地，两个微分形式

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{S=\{i_1,\cdots,i_k\}\subset\{1,2,\cdots,n\}} f_S dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} ,\\
h &= \sum_{S=\{i_1,\cdots,i_k\}\subset\{1,2,\cdots,n\}} g_S dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} ,
\end{aligned}$$

我们用 Grassmann 中乘法$\wedge$ **定义它们的外积**$x \wedge h$，**它也是一个微分形式.**

1.3 外微分

对于一个微分形式，我们可定义它的外微分.

定义：令$w = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} f_{i_1\cdots i_k}(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \in \Lambda^k$，**定义它的外微分如下**

$$dw = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \sum \frac{\partial f_{i_1\cdots i_k}(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \in \Lambda^{k+1} .$$

例 1: 在$\mathbf{R}^n$ **中** $f(x) \in \Lambda^0$，**则**

$$df(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n ,$$

它就是通常的函数的一阶微分式，是个 1-形式.

例 2: $w = f_1(x)dx_1 + \cdots + f_n(x)dx_n \in \Lambda^1$，则

$$\begin{aligned} dw &= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j\right) ?\, dx_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} dx_j\right) ?\, dx_n \\ &= -\sum_{j=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_1 ?\, dx_j + \cdots + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} dx_j ?\, dx_n, \end{aligned}$$

它是一个 2-形式.

例 3: 在$\mathbf{R}^2$中$w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \in \Lambda^1$，则

$$dw = \frac{\partial P}{\partial y} dy ?\, dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx ?\, dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx ?\, dy .$$

例 4: 在$\mathbf{R}^3$中$w = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \in \Lambda^1$，则

$$\begin{aligned} dw &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy ?\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz ?\, dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx ?\, dy \\ &= \begin{vmatrix} dy ?\, dz & dz ?\, dx & dx ?\, dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

后一种表达式对$\mathbf{R}^3$是一种偶然，对一般$\mathbf{R}^n$没有这么简捷的表达式.

例 5: 在$\mathbf{R}^3$中$w = P(x,y,z)dy ?\, dz + Q(x,y,z)dz ?\, dx + R(x,y,z)dx ?\, dy \in \Lambda^2$，则

$$dw = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx ?\, dy ?\, dz.$$

如果 $\vec{F} = (P, Q, R)$ 是三维空间中的一个向量场，比如流体运动的速度场，电磁波中的电场强度或磁场强度，或一个力场，用$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$表示向量微分算子，则

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \vec{F}$$

称为向量场的散度，也记为$\operatorname{div}\vec{F}$，它的物理意义是“源泉密度”. 在流体力学中，$\operatorname{div}\vec{F} > 0$ 表示该点是“源泉”（出水之处），$\operatorname{div}\vec{F} < 0$ 时表示该点是“源尾”（漏水之处）；在电场中，$\operatorname{div}\vec{F} > 0$ 表示正电荷密度，$\operatorname{div}\vec{F} < 0$ 表示负电荷密度.

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

称为向量场的强度，它不是一个向量场，记为$\mathrm{curl}\vec{F}$ **或**$\mathrm{rot}\vec{F}$，**它的物理意义是"旋涡密度"**.

一个向量场 $\vec{F}$，**若**$\mathrm{div}\,\vec{F} = 0$，**称为无源场，如静磁场就是，即熟知的不存在单独磁北极或磁南极；若**$\mathrm{curl}\,\vec{F} = 0$，**称为无旋场，如静电场就是，即不存在封闭的静电力线**.

$F(x,y,z)$ **是一个数值函数，也称为一个数量场，**$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$**称为它的梯度，它是一个向量场，其方向表示** $F(x,y,z)$ **增加最大的一个方向，大小表示在该方向上的变化率**.

命题：外微分有如下性质:

1）$d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$；

2）$d(kw_2) = kdw$；

3）$d(w?h) = dw?h + (-1)^k w?dh, \quad w \in \Lambda^k, h \in \Lambda^l$；

4）$w \in \Lambda^k$，**则**$d(dw) = d^2 w = 0$.

证明：1），2）**表明外微分是个线性运算，证明是简单的，从略**.

3）**是微分中链锁法则的推广，我们只需对**

$$w = a(x)dx_{i_1} ? \cdots ? dx_{i_k},$$
$$h = b(x)dx_{j_1} ? \cdots ? dx_{j_l}$$

来证明，一般情况结果 1），2）**线性性质可得到．按定义**

$$w?h = a(x)b(x)dx_{i_1} ? \cdots ? dx_{i_k} ? dx_{j_1} ? \cdots ? dx_{j_l}.$$

再由外微分定义

$$\begin{aligned} d(w?h) &= \sum_{s=1}^{n} \left(b(x)\frac{\partial a(x)}{\partial x_s} + a(x)\frac{\partial b(x)}{\partial x_s} \right) dx_s ? dx_{i_1} ? \cdots ? dx_{i_k} ? dx_{j_1} ? \cdots ? dx_{j_l} \\ &= \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial a(x)}{\partial x_s} dx_s ? dx_{i_1} ? \cdots ? dx_{i_k} \right) ? \left(dx_{j_1} ? \cdots ? dx_{j_l} \right) \\ &\quad + (-1)^k \left(a(x)dx_{i_1} ? \cdots ? dx_{i_k} \right) ? \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial b(x)}{\partial x_s} dx_s ? dx_{j_1} ? \cdots ? dx_{j_l} \right) \\ &= dw?h + (-1)^k w?dh. \end{aligned}$$

4）**如果**$a(x) \in \Lambda^0$，**则**

$$
\begin{aligned}
d^2 a = d(da) &= \sum_{p=1}^{n} d\left(\frac{\partial a}{\partial x_p}\right) ?\, dx_p \\
&= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \frac{\partial^2 a}{\partial x_q \partial x_p} dx_q ?\, dx_p \\
&= \sum_{p<q}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_q \partial x_p} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_q \partial x_p}\right) dx_q ?\, dx_p \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

定义：$w \in \Lambda^k$，

1） **若** $dw = 0$，**称** w **为闭微分形式**;

2） **若** $\exists h \in \Lambda^{k-1}$，**使得** $dh = w$，**称** w **为恰当形式或正合形式**.

显然，恰当形式 $\Rightarrow$ **闭形式，因为** $dw = d(dh) = 0$．**但闭形式不一定是恰当形式，看反例**:

$$
w = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy, \quad \Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.
$$

容易验证 $dw = 0$，**但不存在** $h \in \Lambda^0$，**使得** $dh = w$.

如果 $\Omega =$ **右半平面，令** $h = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \in \Lambda^0$，**使得** $dh = w$，**表明这时** w **是恰当形式**.

§7.2 微分形式的拉回

2.1 微分形式的拉回映射

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ **为一区域，记** Ω **上的** r **次正则的** k **-形式为** $\Lambda_r^k(\Omega)$，**即**

$$
w = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \cdots i_k}(x) dx_{i_1} ? \cdots ?\, dx_{i_k}, \quad a_{i_1 \cdots i_k}(x) \in C^r(\Omega).
$$

设 $D \subset \mathbf{R}^m$ **也是一区域，多元向量值函数**

$$
x = j(u) : D \to \Omega .
$$

微分形式 w **在** $x = j(u)$ **下的变量替换称为** w **的拉回，严格的定义如下**.

定义：给定 $x = j(u) : D \to \Omega\,(m \le n),\ j \in C^{r+1}(D),\ k \le m$，**则称微分形式**

$$
\begin{aligned}
j\ {*}w &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} a_{i_1\cdots i_k}(j\,(u))\,dj_{\,i_1} ? \cdots ?\, dj_{\,i_k} \\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} a_{i_1\cdots i_k}(j\,(u))\left(\sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}}du_{j_1}\right) ? \cdots ? \left(\sum_{j_k=1}^{m}\frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}}du_{j_k}\right) \\
&\in \Lambda_r^k(D)
\end{aligned}
$$

是 w **经** j **的拉回**.

性质: **拉回映射** $j\,{*}:\Lambda_r^k(D)\to\Lambda_r^k(D)$ **有如下性质**.

1） $j\,{*}(w_1+w_2)=j\,{*}w_1+j\,{*}w_2$;

2） $w=a(x)dx_{i_1} ? \cdots ? dx_{i_k}\ \ (k\le m)$, **则**

$$
j\,{*}w=a(j\,(u))\sum_{1\le s_1<\cdots<i_k\le m}\frac{\partial\left(x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\right)}{\partial\left(u_{s_1},\cdots,u_{s_k}\right)}du_{s_1} ? \cdots ? du_{s_k};
$$

3） $w\in\Lambda_r^k(D),\ h\in\Lambda_r^l(D),\ k+l\le m$, **则**

$$
j\,{*}(w ? h)=j\,{*}w ? j\,{*}h;
$$

4） $x=j\,(u)\in C^{r+1}(D),\ w\in\Lambda_r^k(D),\ r\ge 1$, **则**

$$
j\,{*}(dw)=d(j\,{*}w);
$$

5） $u=y\,(t):G\subset\mathbf{R}^l\to D\subset\mathbf{R}^m,\ y\in C^{r+1}(G),$

$x=j\,(u):D\to\Omega\subset\mathbf{R}^n,\ j\in C^{r+1}(D),\ l\le m\le n,$

$w\in\Lambda_r^k(D),\ k\le l$, **则**

$$
(j\circ y\,)\,{*}w=y\,{*}(j\,{*}w).
$$

证明: 1）**是平凡的**.

2） **的证明**. **由定义**

$$
\begin{aligned}
j\,{*}w &= a(j\,(u))\left(\sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}}du_{j_1}\right) ? \cdots ? \left(\sum_{j_k=1}^{m}\frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}}du_{j_k}\right) \\
&= a(j\,(u))\sum_{j_1,\cdots,j_k=1}^{m}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}}\cdots\frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}}du_{j_1} ? \cdots ? du_{j_k} \\
&= a(j\,(u))\sum_{1\le s_1<s_2<\cdots<s_k\le m}\left(\sum_{(j_1,\cdots,j_k)}(-1)^{[\,j_1,\cdots,j_k\,]}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}}\cdots\frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}}\right)du_{s_1} ? \cdots ? du_{s_k} \\
&= a(j\,(u))\sum_{1\le s_1<s_2<\cdots<s_k\le m}\frac{\partial\left(x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\right)}{\partial\left(u_{s_1},\cdots,u_{s_k}\right)}du_{s_1} ? \cdots ? du_{s_k}.
\end{aligned}
$$

这里关键是用了线性代数中$k\times k$行列式$\dfrac{\partial\left(x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\right)}{\partial\left(u_{s_1},\cdots,u_{s_k}\right)}$展开式

$$\sum_{(j_1,\cdots,j_k)}(-1)^{[j_1,\cdots,j_k]}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}}\cdots\frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}}.$$

3）的证明. 不妨设

$$w=a(x)dx_{i_1}?\cdots?dx_{i_k},\quad h=b(x)dx_{j_1}?\cdots?dx_{j_l},$$

则

$$\begin{aligned}j*(w?h)&=a(j(u))b(j(u))dj_{i_1}?\cdots?dj_{i_k}?dj_{j_1}?\cdots?dj_{j_l}\\&=j*w?j*h.\end{aligned}$$

4）的证明. 当$k=0$时，$w=f(x)$是个函数，$dw=\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}dx_j$就是通常的一阶微分.

$$\begin{aligned}j*(dw)&=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(j(u))}{\partial x_j}dx_j\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial x_j}{\partial u_s}du_s\\&=\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(j(u))}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u_s}du_s\\&=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial f(j(u))}{\partial u_s}du_s=d(j*w),\end{aligned}$$

这就是一阶微分形式不变性.

当$k>0$时，令$w=a(x)dx_{i_1}?\cdots?dx_{i_k}$,

$$\begin{aligned}j*w&=a(j(u))dj_{i_1}?\cdots?dj_{i_k}\\&=a(j(u))d\left(x_{i_1}\circ j\right)?\cdots?d\left(x_{i_k}\circ j\right)\\&=j*a?d\left(j*x_{i_1}\right)?\cdots?d\left(j*x_{i_k}\right),\\d(j*w)&=d(j*a)?\left[d\left(j*x_{i_1}\right)?\cdots?d\left(j*x_{i_k}\right)\right]\\&\quad+j*a?d\left[d\left(j*x_{i_1}\right)?\cdots?d\left(j*x_{i_k}\right)\right]\\&=j*(da)?\left[j*dx_{i_1}?\cdots?j*dx_{i_k}\right]\\&=j*\left[da?dx_{i_1}?\cdots?dx_{i_k}\right]\\&=j*(dw).\end{aligned}$$

5）的证明. 设$w=a(x)dx_{i_1}?\cdots?dx_{i_k}$，由

$$j*w=(a\circ j)(u)d\left(x_{i_1}\circ j\right)?\cdots?d\left(x_{i_k}\circ j\right)$$

得

$$\begin{aligned} y\,*(j\,*w) &= [(a\circ j\,)\circ y\,](t)d[(x_{i_1}\circ j\,)\circ y\,]?\cdots?d[(x_{i_k}\circ j\,)\circ y\,] \\ &= [a\circ(j\,\circ y\,)](t)d[x_{i_1}\circ(j\,\circ y\,)]?\cdots?d[x_{i_k}\circ(j\,\circ y\,)] \\ &= (j\,\circ y\,)*w. \end{aligned}$$

2.2 重积分的换元公式

定义： $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ **为定向区域**, $w\ =\ f(x)dx_1?dx_2?\cdots?dx_n\in\Lambda_0^n(\Omega)$，**定义**

$$\begin{aligned} \int_\Omega w &= \int_\Omega f(x)dx_1?dx_2?\cdots?dx_n \\ &= \pm\int_\Omega f(x)dx_1dx_2\cdots dx_n. \end{aligned}$$

换元公式: $x=j\,(u):D\subset\mathbf{R}^n\to\Omega\subset\mathbf{R}^n$**为微分同胚变换（**$1\text{–}1$ **对应**, **正、反变换都光滑可微**, **即**C^1**）**, **且取定**D**的定向**, $w\in\Lambda_0^n(\overline{\Omega})$, **则**

$$\int_\Omega w=\int_D j\,*w\,.$$

例如: **在**$\mathbf{R}^2$**中**$w\ =\ f(x,y)dx?dy$,

$$j\;:\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$$

是一个微分同胚变换, **则**

$$\begin{aligned} j\,*w\ &=\ f(x(u,v),y(u,v))\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)?\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right) \\ &=\ f(x(u,v),y(u,v))\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du?dv. \end{aligned}$$

我们得到变量替换公式

$$\iint\limits_\Omega f(x,y)dx?dy=\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v))\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}du?dv.$$

与二重积分变量替换不同之点是, **这里我们考虑的是有向区域**Ω **和** D, **微分形式** $f(x,y)dx?dy$ **也是有方向定义的（反方向时** $f(x,y)dy?dx=-f(x,y)dx?dy$ **）**, **所以** Jacobi **行列式**$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$**就不必取绝对值**, **它的正负号恰好与**Ω, D **和**w **的定向相协调**.

同理在$\mathbf{R}^3$**中**

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dx?\,dy?\,dz = \iiint_{D} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\cdot$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} du?\,dv?\,dw.$$

这里解释了面积微元和体积微元$dxdy$**与**$dxdydz$**的正确理解应该** 1）**有定向的**, 2）**其间的乘法不是通常的乘积，而应该是** Grassmann **代数中的乘积**？. **这样当作变量替换时，自然地也就采用微分形式的拉回映射，出现的** Jacobi **矩阵正是拉回映射性质** 2）**中的矩阵**.

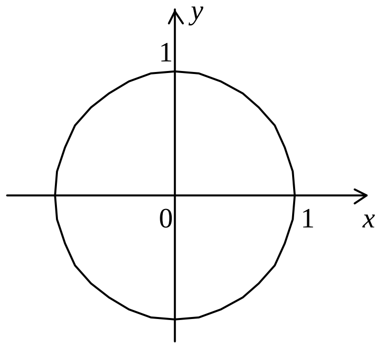
§7.3 微分流形

先看一个最简单的例子：平面上的单位圆周 T .

我们想给它一个坐标系，之后就可以在上面定义函数，以及微分形式，从而可以求积分．但是无论怎样做，不可能给出一个整体坐标．通常用

$$j:\begin{cases} x=\cos q \\ y=\sin q \end{cases},\qquad 0\le q \le 2p\ .$$

$$(0,2p)\overset{j}{\underset{1-1\text{对应}}{\longleftrightarrow}} T\setminus\{(1,0)\}.$$



j **是**$(0,2p)$**与**$T\setminus\{(1,0)\}$**之间一个微分同胚，我们可以把**$q\in(0,2p)$**看作**$T\setminus\{(0,0)\}$**上一个坐标．但找不到** T **与** $\mathbf{R}$ **上一个区间之间的微分同胚．我们可以退一步，我们可以用两块大半弧复盖**T，**每一块是个开集，可以与**$(-d,d)$**建立微分同胚．这样我们就可以借助于**$(-d,d)$**给出**T**的局部坐标．当然这须要在两大半弧相交之处，微分同胚应该具有一种协调关系**.

定义：$S\subset\mathbf{R}^n$，**如果存在局部坐标系**$\{(U_a,j_a)\}$，**其中**U_a**是**S**的开集，且**$S=\bigcup_a U_a$，$j_a:U_a\to j_a(U_a), V_a=j_a(U_a)$**为**$\mathbf{R}^k$**中开集，**$k\le n$，$j_a$**是微分同胚映射，则称**$S$**为**$k$**维流形**.

k**维流形是局部与**$\mathbf{R}^k$**中开集微分同胚的集合**S，**它是**$\mathbf{R}^n$**上的**k**维光滑超曲面．通常我们设**S**是连通的．**$j_a=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$, x_k**称为局部坐标函数，**$j_a^{-1}:V_a\to U_a$**为**S**的局**

部坐标表示.

k 维流形的切空间：$\varphi_a: U_a \to V_a$ 可以看成 $\mathbf{R}^n$ 上某个开集上 C^1 函数 Φ_a 到 U_a 的限制：$\varphi_a = \Phi_a\big|_{U_a}$. 复合函数 $\Phi_a \circ \varphi_a^{-1} = \varphi_a \circ \varphi_a^{-1} = id_{V_a}: V_a \to V_a$ 是个恒等. 取系数，得

$$D\Phi_a \cdot D\varphi_a^{-1} = I_{k\times k}.$$

这说明 $D\varphi_a^{-1}$（即 φ_a^{-1} 的 Jacobi 矩阵）在 V_a 上每一点秩 $=k$，所以有 k 个线性无关切向量 $\dfrac{\partial \varphi_a^{-1}}{\partial x_j}(j=1,2,\cdots,k)$ 组成 U_a 中相对应点的切空间一组基，这样我们就给出 S 上每一点切空间的定义. 标架 $\left(\dfrac{\partial \varphi_a^{-1}}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial \varphi_a^{-1}}{\partial x_k}\right)$ 给出 S 上每一点切空间的一个定向.

k 维流形 S 的定向：S 上两个局部坐标系 (U_a,φ_a) 和 (U_b,φ_b) 如果相交，$U_a \cap U_b \neq \varnothing$. 在 $U_a \cap U_b$ 上，$\varphi_a = (x_1,\cdots,x_k), \varphi_b = (\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_k)$，考虑复合映射

$$\varphi_b \circ \varphi_a^{-1}: \varphi_a(U_a \cap U_b) \to \varphi_b(U_a \cap U_b),\ \ x \mapsto \tilde{x} \in C^1,$$

它的逆

$$\varphi_a \circ \varphi_b^{-1}: \varphi_b(U_a \cap U_b) \to \varphi_a(U_a \cap U_b),\ \ \tilde{x} \mapsto x \in C^1,$$

所以有

$$\frac{\partial(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_k)}{\partial(x_1,\cdots,x_k)} \neq 0 \ \ \text{及}\ \ \frac{\partial(x_1,\cdots,x_k)}{\partial(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_k)} \neq 0.$$

它们的符号规定了 S 的定向.

定义：$S \subset \mathbf{R}^n$ 为 k 维微分流形（$k \le n$），如果存在一组局部坐标系 $\{(U_a,\varphi_a)\}$，满足 $S=\bigcup\limits_a U_a$，对任意 $U_a \cap U_b \neq \varnothing$，令 $\varphi_a = (x_1,\cdots,x_k), \varphi_b = (\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_k)$，总有

$$\frac{\partial(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_k)}{\partial(x_1,\cdots,x_k)} > 0,$$

则称 S 是定向的.

例 1：$\mathbf{R}^3$ 中单位球面 $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2=1\right\}$ 即为一个可定向的二维微分流形.

证明：用如下方法选 $\{(U_i,\varphi_i)\}, 1 \le i \le 6$.

$$U_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\},\quad D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\},$$
$$U_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1,\ x>0\},\quad D_2=\{(y,z)\mid y^2+z^2<1\},$$
$$U_3=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1,\ y>0\},\quad D_3=\{(z,x)\mid z^2+x^2<1\},$$
$$U_4=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1,\ z<0\},\quad D_4=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\},$$
$$U_5=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1,\ x<0\},\quad D_5=\{(y,z)\mid y^2+z^2<1\},$$
$$U_6=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1,\ y<0\},\quad D_6=\{(z,x)\mid z^2+x^2<1\}.$$

$j_i:U_i\to j_i(U_i)=D_i$.

$$j_1(x,y,z)=(x,y),\quad j_1^{-1}(x,y)=\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right),$$
$$j_2(x,y,z)=(y,z),\quad j_2^{-1}(y,z)=\left(\sqrt{1-y^2-z^2},y,z\right),$$
$$j_3(x,y,z)=(z,x),\quad j_3^{-1}(z,x)=\left(x,\sqrt{1-z^2-x^2},z\right),$$
$$j_4(x,y,z)=(y,x),\quad j_4^{-1}(y,x)=\left(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}\right),$$
$$j_5(x,y,z)=(z,y),\quad j_5^{-1}(z,y)=\left(-\sqrt{1-y^2-z^2},y,z\right),$$
$$j_6(x,y,z)=(x,z),\quad j_6^{-1}(x,z)=\left(x,-\sqrt{1-x^2-z^2},z\right).$$

比如$U_2\bigcap U_1\neq\varnothing$, $(y,z)=j_2\circ j_1^{-1}(x,y)$.

$$\begin{cases}y=y,\\ z=\sqrt{1-x^2-y^2},\end{cases}\qquad \text{Jacobi}\ \begin{vmatrix}y_x & y_y\\ z_x & z_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{x}{z} & -\dfrac{y}{x}\end{vmatrix}=\frac{x}{z}>0.$$

又比如$U_4\bigcap U_6\neq\varnothing$, $(x,z)=j_6\circ j_4^{-1}(y,x)$.

$$\begin{cases}x=x,\\ z=-\sqrt{1-x^2-y^2},\end{cases}\qquad \text{Jacobi}\ \begin{vmatrix}x_y & x_x\\ z_y & z_x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{y}{z} & -\dfrac{x}{z}\end{vmatrix}=\frac{y}{z}>0.$$

类似地可以验证$\forall U_i\bigcap U_j\neq\varnothing$, $j_j\circ j_i^{-1}$**的** Jacobi **行列式**>0. **所以**S**为可定向的. 如果取定一个定向, 通常采用比较"自然"的方法. 在上半球面一点取定切平面定向为**$\left(\dfrac{\partial j_1^{-1}}{\partial x},\dfrac{\partial j_1^{-1}}{\partial y}\right)$, **再取外法线**$\vec{n}$, **这样**$\left(\dfrac{\partial j_1^{-1}}{\partial x},\dfrac{\partial j_1^{-1}}{\partial y},\vec{n}\right)$**成右手系, 这就取定了**$S$**的定向, 这时我们可简单地说取**$S$**的外法向为其定向.**

§7.4 微分流形上微分形式的积分

4.1 单位分解

设S**为**k**维可定向的微分流形,** D**是**S**上紧集(任何开复盖都有有限子复盖). 如果**S**本身是紧的,** D**可取作**S.

定理： S **为** k **维可定向的微分流形，** $D \subset S$ **为紧集，则在** S **上存在局部坐标系** (U_i, j_i)

$(i = 1,2,\cdots,n)$，**使** $D \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ **和单位分解，即存在** n **个函数** $g_i(x) \ge 0$，**满足**

1）$g_i \circ g_i^{-1}$**在** $j_i(U_i)$ **上属于** $C^1, i = 1,2,\cdots,n$；

2）$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) \equiv 1, x \in D$；

3）$\mathrm{supp} g_i = \overline{\{x \in S \mid g_i(x) \ne 0\}} \subset U_i,\ i = 1,2,\cdots,n$，**称** $\mathrm{supp} g_i$ **为** g_i **的支集.**

证明：由 S **定义，** $\forall x \in S$，**存在** x **的一个邻域** U_x，**与** $\mathbf{R}^k$ **一个开集** V **微分同胚. 对** V **经平移、伸缩变换后，总可取单位球** $V_1 = \{(u_1,\cdots,u_k) \mid u_1^2 + \cdots u_k^2 < 1\}$**包含在** V **内，再经逆变换得** U_x **中邻域，仍记为** U_x，**即有微分同胚映射** $j_x : U_x \to V_1$. **记** $V_{\frac{1}{2}}$ **为半径为** $\frac{1}{2}$ **的球：** $u_1^2 + \cdots u_k^2 < \frac{1}{4}$，**和** $\widetilde{U}_x = j_x^{-1}\left(V_{\frac{1}{2}}\right)$. **则开集** $\{\widetilde{U}_x \mid x \in S\}$**构成** D **的一个开复盖，** D **紧的，存在有限子复盖** $\{\widetilde{U}_1,\cdots,\widetilde{U}_n\}$. **特别** $\{V_1,\cdots,V_n\}$**更复盖** D. **若** $D \ne S$，**则开集** $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i$，**满足** $D \subset \Omega \subset S$. **对紧集** $\partial\Omega$，**存在** $\{U_{n+1},\cdots,U_{n+p}\}$**复盖** $\partial\Omega$，**且** $\bigcup_{i=1}^{p} U_{n+i}$ **与** D **不交. 注意到**

$$j_i : U_i \to V_1,\ \widetilde{U}_i \to V_{\frac{1}{2}},\ i = 1,2,\cdots,n+p.$$

考虑实数轴上无穷次可微函数

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

令 $f(u) = h\left(\frac{1}{4} - |u|^2\right)$，**则** $f(u)$ **在** $\mathbf{R}^k$ **上无穷次可微，令**

$$y_i(x) = \begin{cases} f \circ j_i(x), & x \in U_i, i = 1,2,\cdots,n+p, \\ 0, & x \notin U_i. \end{cases}$$

则 $y_i(x) : S \to \mathbf{R}^1$ **为** C^1**光滑函数，且**

$$\begin{aligned} y_i(x) > 0, \quad x \in U_i, \\ y_i(x) = 0, \quad x \notin U_i, \end{aligned} \qquad i = 1,2,\cdots,n+p.$$

因$D \subset \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i$，若$D = S$，当$x \in D$时，有

$$0 < \sum_{i=1}^{n} y_i(x) < +\infty .$$

若$D \neq S$，当$x \in \overline{\Omega}$时，有

$$0 < \sum_{i=1}^{n+p} y_i(x) < +\infty .$$

为统一起见，约定$D = S$时，$p = 0$．再令

$$g_i(x) = \begin{cases} \dfrac{y_i(x)}{\sum_{i=1}^{n+p} y_i(x)}, & x \in U_i, \\ 0 & x \notin U_i, \end{cases} \qquad i = 1,2,\cdots,n ,$$

则$\{g_i(x)\}$满足定理要求，称它为$\{U_i\}$的单位分解.

4.2 微分流形上微分形式的积分？？？？

有了单位分解我们就可以在流形上对微分形式定义积分．先定义在一个坐标邻域上积分.

定义：$S \subset \mathbf{R}^n$为k维定向微分流形（$k \le n$），(U, j)为保向局部坐标系（j^{-1}把$\mathbf{R}^k$的正定向映为S取定的方向）．若$w \in \Lambda_0^k(\Omega)$，且$w$在$U$内有紧支集，定义

$$\int_U w = \int_{j(U)} \left(j^{-1}\right)^* w .$$

可以证明定义不依赖于坐标系的选取，即对(U, j), (U, y)两个保向局部坐标系，则

$$F = j \circ y^{-1} : y(U) \to j(U)$$

是保区域正定向变换，由重积分换元公式有

$$\int_{j(U)} \left(j^{-1}\right)^* w = \int_{j(U)} F^* \left(j^{-1}\right)^* w = \int_{y(U)} \left(j^{-1} \circ F\right)^* w = \int_{y(U)} \left(y^{-1}\right)^* w .$$

现在定义流形S上紧集D上的积分.

定义：S为$\mathbf{R}^n$中k维定向微分流形（$k \le n$），D为S上紧区域，$\{(U_i, j_i)\}$ $i = 1,2,\cdots,n$为保向且复盖D的局部坐标系，$\{g_i\}_{i=1}^n$为关于$\{U_i\}_{i=1}^n$的单位分解，

$w \in \Lambda_0^k(\Omega)$，定义

$$\int_D w = \sum_{i=1}^n \int_D g_i w = \sum_{i=1}^n \int_{D \cap U_i} g_i w .$$

定义与局部坐标系的选取和单位分解的选取无关. 事实上, 设另有一组保向且复盖 D 的局部坐标系 $\{(V_j, y_j)\}$和从属于它的单位分解 $\{g_j\}_{j=1}^m$，则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \int_{D\cap U_i} g_i w &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{D\cap U_i} h_j g_i w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{D\cap U_i \cap V_j} h_j g_i w \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{D\cap U_i \cap V_j} g_i h_j w = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{D\cap V_j} g_i h_j w = \sum_{j=1}^m \int_{D\cap V_j} h_j w.\end{aligned}$$

§7.5 Stokes 公式

设 M 是一个紧的定向的 n 维微分流形, 令 $D \subset M$ 是 M 中的一个连通开子集, ∂D 是 D 的边界. 我们假定∂D是一个$n-1$维微分流形. 在 Stokes 定理中我们可以把定义微分流形的C^∞光滑性条件放宽到 C^1. 我们假定微分形式也是 C^1的. 在D 的定向中导出 ∂D 的定向.

定理（Stokes）：在上述假定下, 对于M 上的$n-1$阶微分形式有

$$\int_D dw = \int_{\partial D} w .$$

注: 我们把积分$\int_D dw$ 写成一个配对$\langle dw, D\rangle$, Stokes 定理表述为

$$\langle dw, D\rangle = \langle w, \partial D\rangle .$$

即∂ 是 d 的共轭算子: $\partial = d^*$.

我们在 D 的一定条件下证明这个定理. 首先我们证

引理：如果对$\forall P \in \partial D$, 存在P 的一个坐标邻域U，使得

$$j(U \cap \partial D) = B_{n-1} = \{x \in B_n \mid x_n = 0\},$$

且对每个支集在U 上的w 有

$$\int_D dw = \int_{\partial D} w ,$$

则对每一个w 有

$$\int_D dw = \int_{\partial D} w .$$

这引理表明 Stokes 定理事实上是个局部性定理.

引理的证明：设 M 由坐标邻域 $U_1,\cdots,U_k$ 所复盖，每一个都满足引理假定，或者使它的闭包不碰到 ∂D．设 $g_1,\cdots,g_k$ 是相应单位分解，则

$$\int_D dw = \sum_{i=1}^{k}\int_D g_i dw,$$

$$\int_{\partial D} w = \sum_{i=1}^{k}\int_{\partial D} g_i w.$$

关键要证

$$\int_D dw = \sum_{i=1}^{k}\int_D d(g_i w).$$

这是因为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} d(g_i w) &= \sum_{i=1}^{k}\left(dg_i ? w + g_i dw\right) = \sum_{i=1}^{k} dg_i ? w + \sum_{i=1}^{k} g_i dw \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} dg_i\right) ? w + \sum_{i=1}^{k} g_i dw = \left(d\sum_{i=1}^{k} g_i\right) ? w + dw.\end{aligned}$$

但是 $\sum_{i=1}^{k} g_i = 1$，所以 $d\sum_{i=1}^{k} g_i = 0$，因而

$$dw = \sum_{i=1}^{k} d(g_i w).$$

于是有

$$\int_D dw = \sum_{i=1}^{k}\int_D g_i dw = \sum_{i=1}^{k}\int_D d(g_i w) = \sum_{i=1}^{k}\int_{\partial D} g_i w = \int_{\partial D} w.$$

这是因为由引理的假设，对碰到 ∂D 的那些 U_i，有

$$\int_D d(g_i w) = \int_{\partial D} g_i w,$$

而对闭包不碰到 ∂D 的那些 U_i，有

$$\int_D d(g_i w) = \int_{\partial D} g_i w = 0.$$

证毕.

注：U_i 使得 $j_i(U_i \cap \partial D) = B_{n-1}$ 这一事实，把由 M 的定向导出 ∂D 的定向这个问题，简化成由 B_n 的定向导出 B_{n-1} 的定向的问题，即由 B_{n-1} 所界定的并碰到 $j_i(D)$ 的那一半的 B_n 的定向导出 B_{n-1} 的定向.

定理（Stokes）：如果 M **是一个紧的可定向的** n **维微分流形，** $D \subset M$ **是连通开集，边界为** ∂D**．若对** $\forall P \in \partial D$**，存在** P **的坐标邻域** U**，它的坐标映射** $j : U \to B_n$ **使得**

$$j(U \bigcap \partial D) = B_{n-1},$$

则对 M **上任何** $n-1$ **阶微分形式有**

$$\int_D dw = \int_{\partial D} w,$$

其中 ∂D **定向由** M **定向导出．**

注：边界 ∂D **本身为** $n-1$ **维流形的那种** D **都具有上述性质，但证明超出了本书范围．**

定理的证明：如果 $P \in \partial D$**，按定理条件选** U**，并设** w **支在** U **中．我们用** U **的坐标表示** w **和** dw，

$$w = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i dx_1 ? \cdots ? dx_{i-1} ? dx_{i+1} ? \cdots ? dx_n .$$

将包含 $j(D \bigcap U)$ **的** B_n **的那一半伸展到一个** n**-立方体，它的一个面为** $x_n = 0$**，则在没有定义的地方，假定** $w \circ j^{-1}$ **扩张为** 0**，应用累次积分，得出**

$$\int_D dw = \int_{\partial D} w,$$

即满足引理条件，用引理得到 Stokes **定理．**

当 M **是** $\mathbf{R}^n$ **中的** k **维流形，非紧，但** $\overline{D}$ **紧，**Stokes **公式也成立．**

下一章要讲的 Green **公式、**Gauss **公式和狭义的** Stokes **公式都是这里一般的** Stokes **公式的特例．**

习题

1．**设** $w = dx_1 ? dx_2 + dx_3 ? dx_4$.

（1）**求** $w ? w$；

（2）**求证：不存在两个一次形式** a, b**，使** $a ? b = w$.

2．**设** $a = x_1 dx_2 + x_2 dx_3 + x_3 dx_1, h = x_1 x_2 dx_1 ? dx_2 + x_2 x_3 dx_2 ? dx_3 + x_3 x_1 dx_3 ? dx_1,$

（1）**求** $a ? h$；

（2）**求** $h ? a$；

（3） $a?h$ **是否与** $h?a$ **相同**? **为什么**?

3．**设** $w=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{1\le i\le j\le n}a_{ij}dx_i?dx_j$, $a_{ij}+a_{ji}=0$. **求证**:

$$dw=\frac{1}{2}\sum_{1\le i<j<k\le n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)dx_i?dx_j?dx_k .$$

4．**设** $w=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ ，**而且** $dw=0$. **证明**:

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} .$$

5．**寻找一个** $(n-1)$ **次形式** h ，**使得**

$$dh=dx_1?dx_2?\cdots?dx_n .$$

6．**设** $w=yzdy?dz+zxdz?dx+xydx?dy$.

（1）**证明** w **是闭形式**;

（2）**求一次形式** h ，**使** $dh=w$.

7．**设**

$$\begin{aligned}&w=a_1(x)dx_1+a_2(x)dx_2+a_3(x)dx_3,\\&h=b_3(x)dx_1?dx_2+b_2(x)dx_3?dx_1+b_1(x)dx_2?dx_3,\\&x=j(a),\Omega\subset\mathbf{R}^3\to\Omega'\subset\mathbf{R}^3.\end{aligned}$$

求证:

（1） $j*(w)=\sum\limits_{j=1}^{3}\left[\sum\limits_{i=1}^{3}a_i(j(u))\dfrac{\partial j_i}{\partial u_j}\right]du_j$;

（2） $j*h=\sum\limits_{1\le i<j\le 3}\begin{vmatrix}b_1\circ j & b_2\circ j & b_3\circ j\\ \dfrac{\partial j_1}{\partial u_i} & \dfrac{\partial j_2}{\partial u_i} & \dfrac{\partial j_3}{\partial u_i}\\ \dfrac{\partial j_1}{\partial u_j} & \dfrac{\partial j_2}{\partial u_j} & \dfrac{\partial j_3}{\partial u_j}\end{vmatrix}du_i?du_j$;

（3） $j*[w?h]=\left(\sum\limits_{i=1}^{3}a_i(j(u))b_i(j(u))\right)\dfrac{\partial(j_1,j_2,j_3)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}du_1?du_2?du_3$;

（4） $j*w?j*h=j*[w?h]$.