目　录

引　言

作为微分方程的内容之一,特殊函数只不过是指某类微分方程的解由于不能用初等函数来表示而引进的级数形式解而已.然而,这样定义的特殊函数因其应用的广泛性和有效性,而成为理论物理工作者、现代科技工作者在解决实际问题时不可取代的数学工具.

特殊函数的种类很多,本篇将有选择地介绍在现代科技中常遇到的一些特殊函数,首先介绍几个由特定形式积分所定义的函数(如 Γ 函数等),以作为其他特殊函数的基础,它们与微分方程无关.然后介绍由级数定义的一些特殊函数,这些函数的主要特点是从它们所满足的微分方程的奇点来考虑的(如贝塞尔函数等).本篇力求包括常用的主要的特殊函数的运算方法和基本特性,使读者能从中得到处理特殊函数的基本方法,以增强在工作中灵活运用的能力.

由于计算技术的迅速发展,特殊函数的理论和计算便成为近代分析的许多分支及力学、物理学中不可缺少的工具.

1　由积分定义的特殊函数

1.1　Γ 函数

1.1.1　Γ 函数的概念

在微积分中,称含实参变量 x 的积分

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0) \tag{1-1}$$

为 Γ(**伽马**)**函数**(第二类**欧拉积分**).上式右边积分收敛的条件是 $x>0$.所以(1-1)式只定义了 $x>0$ 的 Γ 函数.

由(1-1)式,对 $\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt$ 进行分部积分可得**递推公式**

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

即

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1). \tag{1-2}$$

特别,当 x 为正整数 n 时,则从(1-2)式得

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!.$$

这样,Γ 函数可视为阶乘的推广.故在一般情况下也记为 $x! = \Gamma(x+1)$.

利用递推公式可把 Γ 函数向 $x<0$ 的区间延拓.例如,对于区间 $(-n, -n+1)$

$(n\in\mathbf{N})$上的 x,定义

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\Gamma(x+n),\tag{1-3}$$

$x+n$ 在区间$(0,1)$上,上式右边的 $\Gamma(x+n)$按(1-1)式是有定义的.但值得注意的是,由(1-2)式,有

$$\Gamma(0)=\frac{1}{0}\Gamma(1)=\infty,$$

$$\Gamma(-n)=-\frac{\Gamma(-n+1)}{n}=\cdots=(-1)^n\frac{\Gamma(0)}{n!}=\infty\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

(1-1),(1-2),(1-3)式定义了实变数 x 的 Γ 函数,这定义可延拓到整个复数 z 平面上,即复变数 z 的 Γ 函数定义为

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\tag{1-4}$$

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\quad 或\quad z!=z\cdot(z-1)!,\tag{1-5}$$

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\quad(\mathrm{Re}(z+n)>0).\tag{1-6}$$

1.1.2 Γ 函数的性质

1. Γ 函数的留数

由(1-6)式可看出 $\Gamma(z)$是一个**半纯函数**,它在有限区域内的奇点都是一阶极点,极点为 $z=-n(n=0,1,2,\cdots)$.在极点 $z=-n$ 处的留数为

$$\lim_{z\to-n}(z+n)\Gamma(z)=\left.\frac{\Gamma(z+n-1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\right|_{z=-n}=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

2. 欧拉无穷乘积公式

根据极限关系 $e^{-t}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ 可以把 $\Gamma(z)$作为下列积分

$$P_n(z)=\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt\quad(n\to\infty).\tag{1-7}$$

的极限.

在 $P_n(z)$中,令 $t=n\tau$,并用分部积分积分 n 次,得

$$\begin{aligned}P_n(z)&=n^z\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau\\&=n^z\left[\frac{\tau^z}{z}(1-\tau)^n\right]_0^1+\frac{n^z\cdot n}{z}\int_0^1(1-\tau)^{n-1}\tau^z d\tau\\&\cdots\\&=\frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}n^z.\end{aligned}$$

因此

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}.\tag{1-8}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(z+n)}=1$,故上式又可写为

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}.\tag{1-9}$$

(1-9)式中的最后一个因子可写为

$$n^z=\prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^z,$$

前面的因子可写为

$$\frac{1}{z}\prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}.$$

因此得到欧拉无穷乘积公式

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\right].\tag{1-10}$$

(1-8) 式中最后一个因子也可写成

$$n^z=\exp(z\ln n)=\exp\left\{z\left[\ln n-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\right\}\prod_{m=1}^{n}e^{z/m}.$$

由此得

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right],\tag{1-11}$$

其中 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\ln n\right\}=0.5772156649015328606065l\cdots$,$\gamma$ 名为**欧拉常数**.这个无穷乘积给出了任何 z 的 $\Gamma(z)$,同时指明了 $\Gamma(z)$ 的奇点为一阶极点 $z=0,-1,-2,\cdots$,而没有零点,这是魏尔斯特拉斯(Weierstrass) 给予 $\Gamma(z)$ 的定义,故名为魏氏乘积.

3. $\Gamma(z)$ 与三角函数的关系

由魏尔斯特拉斯对 $\Gamma(z)$ 的定义得

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(-z)&=-\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right\}^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n}\right)^{z/n}\right\}^{-1}\\&=-\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

而$\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$,故有

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{\pi}{z\sin\pi z}.\tag{1-12}$$

由(1-5) 式知 $\Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z)$,因此又有

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\tag{1-13}$$

或者写成下列对称形式

$$\Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = z!(-z)! = \frac{\pi z}{\sin\pi z}. \tag{1-14}$$

在(1-13)式中令 $z = \frac{1}{2}$,得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

又在$\frac{\sin\pi z}{\pi z}$的无穷乘积中令 $z = \frac{1}{2}$,得

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{m\to\infty}\left(\prod_{n=1}^{m}\frac{2n}{2n-1}\right)^2\cdot\frac{1}{2m+1}. \tag{1-15}$$

这是瓦利(Wallis)乘积.

4. 乘积公式

由极限公式(1-9)可证

$$\phi = \frac{n^{nz}}{n\Gamma(nz)}\prod_{r=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{r}{n}\right) \tag{1-16}$$

与 z 无关,特别令 $z = \frac{1}{n}$,得

$$\phi = \prod_{r=0}^{n-1}\Gamma\left(\frac{r+1}{n}\right) = \prod_{r=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{r}{n}\right) = \prod_{r=1}^{n-1}\Gamma\left(1-\frac{r}{n}\right).$$

由(1-13)式,得

$$\phi^2 = \prod_{r=1}^{n-1}\left\{\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\} = n^{n-1}\prod_{r=1}^{n-1}\left(\sin\frac{\pi r}{n}\right)^{-1}.$$

令 $z^n - 1 = 0$ 的根为 $z = e^{2\pi ri/n}$ $(r = 0,1,2,\cdots,n-1)$,则得

$$\frac{z^n-1}{z-1} = \sum_{r=0}^{n-1}z^r = \sum_{r=1}^{n-1}(z - e^{2\pi ri/n}),$$

令 $z = 1$,则得

$$n = \prod_{r=1}^{n-1}(1-e^{2\pi ri/n}) = \prod_{r=1}^{n-1}e^{\pi ri/n}\left(-2i\sin\frac{\pi r}{n}\right) = 2^{n-1}\prod_{r=1}^{n-1}\sin\frac{\pi r}{n},$$

由此得

$$\phi^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}.$$

取平方根,代入(1-16)式,即得 Γ 函数的乘积公式

$$\prod_{r=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{r}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz). \tag{1-17}$$

特别令 $n = 2$,得倍数公式

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right),$$

这又可写成

$$2^{2z}z!\left(z-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}(2z)!.$$

5. 围道积分

围道积分 $$I = \int_{+\infty}^{(0+)}e^{-t}t^{z-1}dt,$$

其中围道是从上半平面挨近正实数无穷远处出发,向左行,围绕原点正向一周,到下半平面,再向右行到下半平面挨近正实轴无穷远处(见图 1-1).

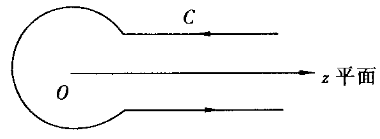

图 1-1

这个围道积分适用于任意 z 值,可以作为对 $\Gamma(z)$在任意的 z 值下定义的基础.先设 z 的值被限制在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 的范围内且不等于整数,这时,这个围道积分与 $\Gamma(z)$有如下关系

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_{+\infty}^{(0+)}e^{-t}(-t)^{z-1}dt \quad (|\arg(-t)|<\pi). \tag{1-18}$$

这个关系是在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 的条件下得到的,但按解析开拓原理,这一条件可以取消.这个关系可不适用于 z 是整数的情形,因为当 z 是正整数时,(1-18)式的右边是一个未定式,当 z 为负整数时,右边为无穷大.但由(1-13)式得

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{+\infty}^{(0+)}e^{-t}(-t)^{z-1}dt \quad (|\arg(-t)|<\pi), \tag{1-19}$$

这个表达式适用于任意 z 值,包括 z 为整数.

把(1-19)式中的 $1-z$ 换成z,得

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{-1}{2\pi i}\int_{+\infty}^{(0+)}e^{-t}(-t)^{-z}dt \quad (|\arg(-t)|<\pi), \tag{1-20}$$

再把 t 换成 $-t$,得

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}e^{t}t^{-z}dt \quad (|\arg t|<\pi), \tag{1-21}$$

其中的围道从负实轴无穷远处($t = -\infty$)出发,正向绕原点一周,再回到出发点.

上面(1-18)~(1-21)各式中的围道可以整个地绕原点转一角度 α,只要 $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$,围道积分之值不变.例如,由(1-21)式得

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty e^{i\alpha}}^{(0+)}e^{t}t^{-z}dt \quad (|\arg t-\alpha|<\pi).$$

6. Γ 函数的对数微商

令 $\ln\Gamma(z)$的一阶导数为 $\psi_1(z)$:

$$\psi_1(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

由(1-5)式取对数微商,得

$$\psi_1(z+1) = \psi_1(z) + \frac{1}{z},$$

由(1-13)式取对数微商,得

$$\psi_1(1-z)=\psi_1(z)+\pi\cot\pi z,$$

由(1-6)式取对数微商,得

$$\psi_1(z+n)=\psi_1(z)+\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{z+r}.$$

由(1-11)式求得

$$\psi_1(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right),\tag{1-22}$$

其中 γ 为欧拉常数.

在(1-22)式中令 $z=m$(整数),得

$$\psi_1(m)=\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right]_{z=m}=-\gamma+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n}.$$

作为上式的一个特殊情形:

$$\psi_1(1)=\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right]_{z=1}=-\gamma.$$

$\ln\Gamma(z)$ 的二阶导数记为 $\psi_2(z)$,n 阶导数记为 $\psi_n(z)$,即

$$\psi_2(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+z)^2},$$

$$\psi_n(z)=(-1)^n(n-1)!\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+z)^n}.$$

对于 $\ln\Gamma(z)$ 有如下第一、第二比涅(Biner)公式:

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\int_0^{+\infty}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right\}\frac{e^{-zt}}{t}dt\quad(\mathrm{Re}z>0),$$

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+2\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t/z)}{e^{2\pi t}-1}dt.$$

7. 渐近展开式

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}B_r}{2r(2r-1)}z^{-2r+1}+O(z^{-2n-1})\tag{1-23}$$

(B_r 为伯努利数),

或

$$\ln z!=z(\ln z-1)+\frac{1}{2}\ln(2\pi z)+\frac{1}{12z}-\frac{1}{360z^3}+\frac{1}{1260z^5}-\frac{1}{1680z^7}+\cdots,\tag{1-24}$$

$$z!\backsim z^z e^{-z}(2\pi z)^{1/2}\left\{1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}-\frac{571}{2488320z^4}+\cdots\right\}.\tag{1-25}$$

当 $z=x$ 为正实数时,有

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}[1+r(x)],$$

其中 $|r(x)|\leqslant\exp\left(\frac{1}{12x}\right)-1$.

$$n!\approx\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\quad(n\to\infty).$$

公式(1-23),(1-24),(1-25)称为**斯特林(Stirling)公式**.

1.2 欧拉第一类积分、B函数

1.2.1 定义和基本关系式

(1) 称定积分

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\tag{1-26}$$

为**欧拉第一类积分**,其中参变量 p,q 必须要求 $\mathrm{Re}(p)>0,\mathrm{Re}(q)>0$,以保证上述积分收敛.

(2) 由定义引出的基本关系式:

1° 作变换 $x=1-t$,可以证明

$$B(p,q)=B(q,p).\tag{1-27}$$

2° $B(p,q)$可以用 Γ 函数表达,即

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\tag{1-28}$$

为了证明公式(1-28),考虑

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{p-1}du\int_0^{+\infty}e^{-v}v^{q-1}dv,$$

令 $u=x^2,v=y^2$,得

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{+\infty}e^{-x^2}x^{2p-1}dx\int_0^{+\infty}e^{-y^2}y^{2q-1}dy$$

$$=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy.$$

引进平面极坐标:$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,得

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}d\theta.\tag{1-29}$$

在第一个积分中,令 $r^2=t$,得

$$\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{p+q-1}dt=\frac{1}{2}\Gamma(p+q),\tag{1-30}$$

在第二个积分中,令 $\cos^2\theta=x$,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{1}{2}B(p,q).\tag{1-31}$$

将(1-30),(1-31)式代入(1-29)式就得到(1-28)式.

由(1-28)式及解析开拓原理,可得到不受条件 $\mathrm{Re}(p)>0,\mathrm{Re}(q)>0$ 限制的函数称为 B 函数(**贝塔函数**).

(3) 由上述基本关系可导出一系列重要公式,例如:

1° $\mathrm{B}(m,n)=\dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}\quad(m,n\in\mathbf{N})$,

是(1-28)式当 $p=m,q=n$ 时的特殊情形.

2° $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^p(\sin\theta)^q\mathrm{d}\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}-1\right)},$$

是(1-31)式应用(1-28)式的特殊情形.其中 $2p$ 和 $2q$ 分别换为 $p+1$ 和 $q+1$.

3° $$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r^p\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right),\tag{1-32}$$

是(1-30)式的特殊情形.其中 $2(p+q)-1$ 换成 p.

4° $$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

是(1-32)式当 $p=0$ 时的特殊情形.

5° $$\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t=\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\tag{1-33}$$

是(1-26)式的特殊情形,其中 $x=t/(1+t)$.

6° $$\int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p},$$

是(1-33)式当 $q=1-p$ 时的特殊情形.

1.2.2 狄利克雷积分

作为 B 函数的一个应用,考虑**狄利克雷(Dirichlet)积分**

$$\iint\cdots\int f(t_1+t_2+\cdots+t_n)t_1^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n,$$

其中积分限为 $t_r\geqslant0(r=1,2,\cdots,n),\sum\limits_{r=1}^{n}t_r\leqslant1$,$f$ 是连续函数,为了保证积分在 $t_r=0$ 处收敛,必须 $\mathrm{Re}(\alpha_r)>0$.

先计算 t_1,t_2 两重积分,令 $\lambda=t_3+t_4+\cdots+t_n,\tau_2=t_1+t_2$,有

$$\begin{aligned}&\int_0^{1-\lambda}\mathrm{d}t_2\int_0^{1-\lambda-t_2}\mathrm{d}t_1f(t_1+t_2+\lambda)t_1^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1}\\&=\int_0^{1-\lambda}\mathrm{d}t_2\int_{t_2}^{1-\lambda}\mathrm{d}\tau_2f(\tau_2+\lambda)(\tau_2-t_2)^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1},\end{aligned}$$

交换积分次序,然后令 $t_2=\tau_2t$,得

$$\begin{aligned}&\int_0^{1-\lambda}\mathrm{d}\tau_2\int_0^{\tau_2}\mathrm{d}t_2f(\tau_2+\lambda)(\tau_2-t_2)^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1}\\&=\int_0^{1-\lambda}\mathrm{d}\tau_2f(\tau_2+\lambda)\tau_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}\int_0^1\mathrm{d}t(1-t)^{\alpha_1-1}t^{\alpha_2-1}\\&=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\int_0^{1-\lambda}\mathrm{d}\tau_2f(\tau_2+\lambda)\tau_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}.\end{aligned}$$

这样就减少了一重积分,而积分的形式不变.再把这个方法用到 τ_2 和 t_3,又可减少一重,而积分前面的因子为

$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)},$$

照此作下去,最后得公式

$$\begin{aligned}&\iint\cdots\int f\left(\sum_{r=1}^{n}t_r\right)\prod_{r=1}^{n}t_r^{\alpha_r-1}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\\&=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)}\int_0^1f(\tau)\tau^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-1}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

特别当 $f\equiv1$ 时,有

$$\underset{\substack{t_1,t_2,\cdots,t_n>0\\ \sum_{r=1}^{n}t_r\leqslant1}}{\iint\cdots\int}\prod_{r=1}^{n}t_r^{\alpha_r-1}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+1)}.$$

上式的一般情形是

$$\underset{\substack{t_1,t_2,\cdots,t_n>0\\ \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{t_r}{\beta_r}\right)^{\gamma_r}\leqslant1}}{\iint\cdots\int}\prod_{r=1}^{n}t_r^{\alpha_r-1}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n=\frac{\prod\limits_{r=1}^{n}\beta_r^{\alpha_r}}{\prod\limits_{r=1}^{n}\gamma_r}\cdot\frac{\prod\limits_{r=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\alpha_r}{\beta_r}\right)}{\Gamma\left(\sum\limits_{r=1}^{n}\frac{\alpha_r}{\gamma_r}+1\right)}.$$

当 $n=3$(三维空间)时,在三维球体的第一象限中,上式成为

$$\underset{\substack{x,y,z>0\\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma}\leqslant1}}{\iiint}x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{a^pb^qc^r}{\alpha\beta\gamma}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1\right)}.\tag{1-34}$$

在计算规则物体的体积、静矩、惯矩和惯性积时,常应用公式(1-34).例如,密度为 1 在第一象限的椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1\quad(\alpha=\beta=\gamma=2)$$

的体积、静力矩、惯性矩和惯性积分别为

1° 体积($p=q=r=1$)

$$V=\frac{abc}{8}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}=\frac{\pi}{6}abc,$$

2° 对 x 轴的静力矩($p=2,q=r=1$)

$$M_{yz} = \frac{a^2 bc}{8} \frac{\Gamma(1)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi}{16} a^2 bc,$$

3° 对 x 轴的惯性矩($p = 3, q = r = 1$)

$$I_{yz} = \frac{a^3 bc}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{\pi}{36} a^3 bc,$$

4° 对 y, z 轴的惯性积($p = 1, q = r = 2$)

$$K_{yz} = \frac{ab^2 c^2}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)[\Gamma(1)]^2}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{1}{15} ab^2 c^2.$$

1.3 误差函数(概率积分)

1.3.1 误差函数的定义

复下限积分

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)} \quad (|z| < +\infty)$$

称为**误差函数(概率积分)**. 它与标准正态分布函数 $\Phi(z)$ 有如下的关系:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

误差函数的渐近公式为

$$\operatorname{erf}(z) = 1 - \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2z^2)^k}\right]$$

$$\left(|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta, \delta > 0, |z| \to +\infty\right).$$

如果用这级数的前 n 项的和作为 $\operatorname{erf}(z)$ 的近似值,则误差为

$$|r_n(z)| \leqslant \frac{(2n+1)!!}{(2z^2)^{n+1}} \sec\delta,$$

当 z 为实数 x 时,误差不超过级数中所略去的第一项的绝对值.

1.3.2 误差函数的应用

误差函数常应用于正态概率计算和求解二阶常系数抛物型偏微分方程的定解问题.

例 1 设 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$,求 $p(|\xi - \mu| < \lambda)$.

解 $p(|\xi - \mu| < \lambda) = \int_{-\lambda+\mu}^{\lambda+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt$

$$= \Phi\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\lambda}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right) - 1 = \operatorname{erf}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

例 2 在一渠道的首端($x = 0$)有一水池,在 $t = 0$ 时突然注入浓度为 c_0 之污染液,求它向渠道的扩散规律.

解 设在时刻 t,渠道某一断面的污染浓度为 $c(x,t)$,它满足的扩散方程和边界及初始条件为

$$\begin{cases} c_t - a^2 c_{xx} = 0, \\ c|_{x=0} = c_0, c|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

令 $c(x,t) = c_0 + v(x,t)$,则上述关于 c 的定解问题化为 v 对于 x 的反对称条件的定解问题:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} -c_0 & (x > 0), \\ c_0 & (x < 0). \end{cases} \end{cases}$$

用分离变量法并注意到初始条件,解得

$$v(x,t) = \frac{c_0}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] d\xi - \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] d\xi\right\}.$$

对上式的两个积分分别作换元:

$$u = \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}, u' = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}},$$

则
$$v(x,t) = -\frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2a\sqrt{t}}^{x/2a\sqrt{t}} e^{-u^2} du = -c_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

变量换回到原来的未知函数 $c(x,t)$,得

$$c(x,t) = c_0\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

1.4 指数积分、对数积分、正弦积分、余弦积分和双曲积分

1.4.1 指数积分

(1) 复上限积分

$$\operatorname{Ei}(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^u}{u} du = \gamma + \ln(-z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k k!}$$

称为**指数积分**. 它在除去半实轴$(0, +\infty)$的 z 平面内单值解析. 式中 γ 为欧拉常数.

当 $z = x$ 为实数时,

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u} du \quad (x < 0),$$

$$\operatorname{Ei}(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^u}{u} du = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

$$= \gamma + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k k!} \quad (0 < x < +\infty),$$

$$\overline{\mathrm{Ei}}(x) = \mathrm{V.P.}\int_{-x}^{\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u = -\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-x}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u\right]$$

$$= \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}\mathrm{d}u = \gamma + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k k!} \quad (0 < x < +\infty).$$

(2) 指数积分的渐近表达式为

$$\mathrm{Ei}(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{z^k} + r_n(z)\right] \quad (|z| \to +\infty),$$

式中

$$|r_n(z)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{(n+1)!}{|z|^{n+1}} & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{3\pi}{2}\right), \\ \dfrac{(n+1)!}{|z|^{n+1}(\sin\delta)^{n+1}} & \left(0 < \delta < \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{2} \text{ 或 } \dfrac{3\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \delta\right). \end{cases}$$

$$\overline{\mathrm{Ei}}(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{x^k} \quad (x > 0, x \to +\infty).$$

特别 $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\overline{\mathrm{Ei}}(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\overline{\mathrm{Ei}}(x) = 1.$

1.4.2 对数积分

(1) 定义积分

$$\mathrm{li}(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}u}{\ln u}$$

为**对数积分**. 它在除去 $(-\infty, 0)$ 和 $[1, +\infty)$ 的 z 平面内单值解析.

当 z 为正实数时, 积分取主值:

$$\mathrm{li}(x) = \gamma + \ln(-\ln x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k x}{k k!} \quad (0 < x < 1),$$

$$\overline{\mathrm{li}}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u}\right] = \overline{\mathrm{Ei}}(x)$$

$$= \gamma + \ln\ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k x}{k!\,k} \quad (0 < x < +\infty),$$

式中 γ 为欧拉常数.

(2) 对数积分的渐近公式为

$$\mathrm{li}(z) = \frac{z}{\ln z}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{\ln^k z} + r_n(z)\right] \quad (|\arg z| < \pi,\ |z| \to +\infty),$$

式中

$$|r_n(z)| \leqslant \frac{(n+1)!}{|\ln z|^{n+1}}.$$

1.4.3 正弦积分和余弦积分

(1) 下面两积分

$$\mathrm{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u \quad (|z| < +\infty),$$

$$\mathrm{Ci}(z) = -\int_z^{\infty} \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u \quad (|\arg z| < \pi)$$

分别称为**正弦积分**和**余弦积分**. 它们的级数表达式分别为

$$\mathrm{Si}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!(2k-1)} \quad (|z| < +\infty),$$

$$\mathrm{Ci}(z) = \gamma + \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!(2k)} \quad (|\arg z| < \pi).$$

定义

$$\mathrm{si}(z) = -\int_z^{\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = \mathrm{Si}(z) - \frac{\pi}{2} \quad (|z| < +\infty),$$

$$\mathrm{ci}(z) = \mathrm{Ci}(z) \quad (|\arg z| < \pi).$$

(2) 正弦积分和余弦积分的渐近表达式分别为

$$\mathrm{ci}(z) = \frac{\sin z}{z}P(z) - \frac{\cos z}{z}Q(z) \quad (|\arg z| < \pi),$$

$$\mathrm{si}(z) = -\frac{\cos z}{z}P(z) - \frac{\sin z}{z}Q(z) \quad (|\arg z| < \pi),$$

其中

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k)!}{z^{2k}} + O(z^{-2n-2}),$$

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k+1)!}{z^{2k+1}} + O(z^{-2n-3}).$$

特别有

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\rho}\mathrm{si}(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x^{\rho}\mathrm{ci}(x) = 0 \quad (\rho < 1),$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{si}(x) = -\pi, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{ci}(z) = \pi\mathrm{i}.$$

(3) 当 $z = x$ 为实数时, 正弦积分和余弦积分之间有如下关系:

$\mathrm{ci}(x) \pm \mathrm{i}\,\mathrm{si}(x) = \mathrm{Ei}(\pm \mathrm{i}x)$, $\quad \mathrm{Ci}(x\mathrm{e}^{\pm\pi\mathrm{i}}) = \mathrm{Ci}(x) \pm \pi\mathrm{i} \quad (x > 0)$;

$\dfrac{\mathrm{dSi}(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\sin x}{x}$, $\quad \dfrac{\mathrm{dCi}(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\cos x}{x}$;

$\mathrm{Si}(x) + \mathrm{Si}(-x) = 0$, $\quad \mathrm{si}(x) + \mathrm{si}(-x) = -\pi$;

$\mathrm{Si}(x) \sim x$, $\quad \mathrm{si}(x) \sim -\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \quad (x \ll 1)$;

$\mathrm{Ci}(x) \sim \overline{\mathrm{Ei}}(x) \sim \ln\dfrac{1}{\gamma x}$, $\quad \mathrm{Si}(x) \sim \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\cos x}{x}$;

$\mathrm{si}(x) \sim -\dfrac{\cos x}{x}$, $\quad \mathrm{ci}(x) \sim \dfrac{\sin x}{x} \quad (x \gg 1)$.

1.4.4 双曲积分

下面两积分

$$\mathrm{Shi}(z)=\int_0^z \frac{\sinh u}{u}\mathrm{d}u,$$

$$\mathrm{Chi}(z)=\int_0^z \frac{\cosh u}{u}\mathrm{d}u+\gamma+\ln z \quad (|\arg z|<\pi)$$

分别称为**双曲正弦积分**和**双曲余弦积分**.式中 γ 为欧拉常数.它们的级数表达式分别为

$$\mathrm{Shi}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)},$$

$$\mathrm{Chi}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!(2k)}+\gamma+\ln z.$$

1.5 椭圆积分和椭圆函数

形如

$$\int R(x,y)\mathrm{d}x$$

(R 是 x,y 的有理函数,$y^2=P(x)$ 是 x 的三次或四次多项式)的积分称为**椭圆积分**.

1.5.1 勒让德椭圆积分

(1) 下面 3 个积分

$$\mathrm{F}(k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

$$\mathrm{E}(k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

$$\Pi(h,k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{\mathrm{d}x}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+h\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

分别称为勒让德第一类、第二类、第三类椭圆积分.数 k 称为这些积分的**模数**,数 $k'=\sqrt{1-k^2}$ 称为补模数,数 h 称为第三类积分的参数.

当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时,得到相应的 3 个**完全椭圆积分**:

$$\mathrm{K}=\mathrm{K}(k)=\mathrm{F}\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad (|k|<1),$$

$$\mathrm{E}=\mathrm{E}(k)=\mathrm{E}\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \quad (|k|<1),$$

$$\Pi\left(h,k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+h\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad (|h|<1).$$

定义

$$\mathrm{K}'=\mathrm{K}'(k)\equiv\mathrm{K}(k'),\quad \mathrm{E}'=\mathrm{E}'(k)\equiv\mathrm{E}(k'),$$

它们依勒让德关系式

$$\mathrm{EK}'+\mathrm{E}'\mathrm{K}-\mathrm{KK}'=\frac{\pi}{2}$$

联系着.

(2) 许多积分都可归结为椭圆积分,例如

1° $\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}=\mathrm{F}(k,\arcsin x)$;

2° $\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+k^2t^2}}=\mathrm{F}(\sqrt{1-k^2},\arctan x)\quad\left(令\ u=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$;

3° $\displaystyle\int_x^a\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2-t^2}\sqrt{b^2-t^2}}=\frac{1}{a}\mathrm{F}\left(\frac{b}{a},\arcsin\frac{x}{b}\right)\quad\left(令\ u=\frac{t}{b}\right)$;

4° $\displaystyle\int_x^a\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2-t^2}\sqrt{t^2-b^2}}=\frac{1}{a}\mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-b^2}}\right)$

$\displaystyle\left(令\ u=\sqrt{\frac{a^2-t^2}{a^2-b^2}}\right)$;

5° $\displaystyle\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-b^2+b^2t^2}}=\mathrm{F}(b,\arccos x)\quad(令\ u=\sqrt{1-t^2})$;

6° $\displaystyle\int_x^b\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2+t^2}\sqrt{b^2-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{F}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\arccos\frac{x}{b}\right)$

$\displaystyle\left(令\ u=\sqrt{1-\left(\frac{t}{b}\right)^2}\right)$;

7° $\displaystyle\int_a^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}}=\frac{2}{\sqrt{a-c}}\mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{b-c}{a-c}},\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\right)$

$\displaystyle\left(令\ u=\sqrt{\frac{t-a}{t-b}}\right)$;

8° $\displaystyle\int_x^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}}=\frac{2}{\sqrt{a-c}}\mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{b-c}{a-c}},\arcsin\sqrt{\frac{a-c}{x-c}}\right)$

$\displaystyle\left(令\ u=\sqrt{\frac{a-c}{t-c}}\right)$;

9° $\int_x^a \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a-t)(t-b)(t-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}}\mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a-c}}, \arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a-b}}\right)$

$$\left(令\ u = \sqrt{\frac{a-t}{a-b}}\right);$$

10° $\int_0^x \frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = \frac{1}{k^2}\mathrm{F}(k, \arcsin x) - \frac{1}{k^2}\mathrm{E}(k, \arcsin x)$;

11° $\int_0^x \sqrt{\frac{a^2-t^2}{b^2-t^2}}\mathrm{d}t = a\mathrm{E}\left(\frac{b}{a}, \arcsin\frac{x}{b}\right)$　$\left(令\ u = \frac{t}{b}\right)$;

12° $\int_x^a \sqrt{\frac{b^2+t^2}{a^2-t^2}}\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{E}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \arccos\frac{x}{a}\right)$

$$\left(令\ u = \sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}\right);$$

13° $\int_b^x \frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{t^2+a^2}{t^2-b^2}}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\mathrm{E}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \arccos\frac{b}{x}\right)$

$$\left(令\ u = \sqrt{1-\left(\frac{b}{t}\right)^2}\right);$$

14° $\int_0^x \sqrt{\frac{a^2+t^2}{(b^2+t^2)^2}}\mathrm{d}t = \frac{a}{b^2}\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \arctan\frac{x}{b}\right)$　$\left(令\ u = \frac{t}{\sqrt{b^2+t^2}}\right)$;

15° $\int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{(t^2-b^2)(a^2-t^2)}} = \frac{1}{ab^2}\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \mathrm{arc\ sin}\sqrt{\frac{1-\left(\frac{b}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}}\right)$

$$\left(令\ u = \frac{a}{t}\sqrt{\frac{t^2-b^2}{a^2-b^2}}\right).$$

1.5.2　雅可比椭圆函数

(1) 第一类椭圆积分

$$z = \int_0^w \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \mathrm{F}(R, \varphi)$$

的反函数叫做椭圆正弦,记作

$$w = \mathrm{sn}z = \mathrm{sn}(z, k), \quad \varphi = \mathrm{am}z,$$

这里 k 称为模,$k' = \sqrt{1-k^2}$称为补模,φ 称为 z 的振幅函数. 其他椭圆函数的定义为

$$\mathrm{cn}z = \cos\varphi = \sqrt{1-w^2} = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2 z}\quad(椭圆余弦),$$

$$\mathrm{tn}z = \tan\varphi = \frac{\mathrm{sn}z}{\mathrm{cn}z} = \frac{\mathrm{sn}z}{\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 z}}\quad(椭圆正切),$$

$$\mathrm{dn}z = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 z}.$$

$\mathrm{sn}z$、$\mathrm{cn}z$,$\mathrm{tn}z$、$\mathrm{dn}z$ 统称为**雅可比椭圆函数**.

(2) 雅可比椭圆函数与三角函数有许多相似的性质和基本公式.

1° 特殊点的值如表 1-1 所示.

表 1-1

z	0	$\frac{\mathrm{K}}{2}$	K	$\frac{\mathrm{iK'}}{2}$	$\mathrm{K}+\frac{\mathrm{iK'}}{2}$	$\mathrm{iK'}$	$\mathrm{K}+\mathrm{iK'}$
$\mathrm{sn}z$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	1	$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	∞	$\frac{1}{k}$
$\mathrm{cn}z$	1	$\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$	0	$\sqrt{\frac{1+k}{k}}$	$-\sqrt{\frac{k-1}{k}}$	∞	$-\frac{\mathrm{i}k'}{k}$
$\mathrm{dn}z$	1	$\sqrt{k'}$	k'	$\sqrt{1+k}$	$\sqrt{1-k}$	∞	0

2° 周期、零点、极点和留数如表 1-2 所示

表 1-2

z	基本周期	零　点	极　点	留　数
$\mathrm{sn}z$	4K;2iK′	$2m\mathrm{K}+2n\mathrm{iK'}$	$2m\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{iK'}$	$(-1)^m\frac{1}{k}$
$\mathrm{cn}z$	4K;2K+2iK′	$(2m+1)\mathrm{K}+2n\mathrm{iK'}$	$2m\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{iK'}$	$(-1)^{m+n}\frac{1}{k}$
$\mathrm{dn}z$	2K;4iK′	$(2m+1)\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{iK'}$	$2m\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{iK'}$	$(-1)^{n-1}\frac{1}{k}$

3° 诱导公式

$$\begin{cases} \mathrm{sn}(z+2m\mathrm{K}+2n\mathrm{iK'}) = (-1)^m\mathrm{sn}z, \\ \mathrm{cn}(z+2m\mathrm{K}+2n\mathrm{iK'}) = (-1)^{m+n}\mathrm{cn}z, \\ \mathrm{tn}(z+2m\mathrm{K}+2n\mathrm{iK'}) = (-1)^n\mathrm{tn}z, \\ \mathrm{dn}(z+2m\mathrm{K}+2n\mathrm{iK'}) = (-1)^n\mathrm{dn}u. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{sn}(z+(2m-1)\mathrm{K}+2n\mathrm{iK'}) = (-1)^{m+1}\mathrm{cd}z = (-1)^{m+1}\frac{\mathrm{cn}z}{\mathrm{dn}z}, \\ \mathrm{cn}(z+(2m-1)\mathrm{K}+2n\mathrm{iK'}) = (-1)^{m+n}k'\,\mathrm{sd}z = (-1)^{m+n}k'\frac{\mathrm{sn}z}{\mathrm{dn}z}, \\ \mathrm{dn}(z+(2m-1)\mathrm{K}+2n\mathrm{iK'}) = (-1)^n k'\,\mathrm{nd}z = (-1)^n k'\frac{1}{\mathrm{dn}z}, \\ \mathrm{tn}(z+(2m-1)\mathrm{K}+2n\mathrm{iK'}) = (-1)^{n+1}\frac{\mathrm{cs}z}{k'} = \frac{(-1)^{n+1}}{k'}\frac{1}{\mathrm{tn}z}. \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\mathrm{sn}(z+(2m-1)\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{i}\mathrm{K}') = \dfrac{(-1)^{m+1}}{k}\mathrm{dc}z = \dfrac{(-1)^{m+1}}{k}\dfrac{\mathrm{dn}z}{\mathrm{cn}z}, \\
\mathrm{cn}(z+(2m-1)\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{i}\mathrm{K}') = \dfrac{(-1)^{m+n}}{k}\mathrm{i}k'(\mathrm{nc}z) = (-1)^{m+n}\dfrac{\mathrm{i}k'}{k}\dfrac{1}{\mathrm{cn}z}, \\
\mathrm{dn}(z+(2m-1)\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{i}\mathrm{K}') = (-1)^{n}\mathrm{i}k'\mathrm{tn}z, \\
\mathrm{tn}(z+(2m-1)\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{i}\mathrm{K}') = \dfrac{(-1)^{n}}{k'}\mathrm{i}(\mathrm{dn}z).
\end{cases}
$$

其中 m,n 均为一切整数,i 是虚数单位 $\mathrm{i}^2=-1$.

4° 基本关系

$$
\begin{cases}
\mathrm{sn}^2 z+\mathrm{cn}^2 z=1, \\
\mathrm{dn}^2 z+k^2\mathrm{sn}^2 z=1, \\
\mathrm{dn}^2 z-k^2\mathrm{cn}^2 z=1-k^2=k'^2.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\mathrm{am}(-z)=-\mathrm{am}(z), \\
\mathrm{sn}(-z)=-\mathrm{sn}(z), \\
\mathrm{cn}(-z)=\mathrm{cn}(z), \\
\mathrm{tn}(-z)=-\mathrm{tn}(z), \\
\mathrm{dn}(-z)=-\mathrm{dn}(z).
\end{cases}
$$

5° 加法公式和乘法公式

$$\mathrm{sn}(z\pm\zeta)=\frac{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\ \mathrm{dn}\zeta\pm\mathrm{cn}z\ \mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{dn}z}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\mathrm{sn}^2\zeta}=\frac{\mathrm{sn}^2 z-\mathrm{sn}^2\zeta}{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\ \mathrm{dn}\zeta\mp\mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z},$$

$$\mathrm{cn}(z\pm\zeta)=\frac{\mathrm{cn}z\ \mathrm{cn}\zeta\mp\mathrm{sn}z\ \mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{dn}z\ \mathrm{dn}\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\mathrm{sn}^2\zeta}=\frac{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}\zeta\mp\mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{cn}\zeta\ \mathrm{dn}z}{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\ \mathrm{dn}\zeta\mp\mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z},$$

$$\mathrm{dn}(z\pm\zeta)=\frac{\mathrm{dn}z\ \mathrm{dn}\zeta\mp k^2\mathrm{sn}z\ \mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{cn}\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\mathrm{sn}^2\zeta}=\frac{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\ \mathrm{dn}z\mp\mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}\zeta}{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\ \mathrm{dn}\zeta\mp\mathrm{sn}\zeta\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z},$$

$$\mathrm{sn}(z+\zeta)\mathrm{sn}(z-\zeta)=\frac{\mathrm{sn}^2 z-\mathrm{sn}^2\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\mathrm{sn}^2\zeta},$$

$$\mathrm{cn}(z+\zeta)\mathrm{cn}(z-\zeta)=\frac{\mathrm{cn}^2 z-\mathrm{sn}^2\zeta\mathrm{dn}^2 z}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\mathrm{sn}^2\zeta},$$

$$\mathrm{dn}(z+\zeta)\mathrm{dn}(z-\zeta)=\frac{\mathrm{dn}^2 z-k^2\mathrm{sn}^2\zeta\mathrm{cn}^2 z}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\mathrm{sn}^2\zeta}.$$

6° 倍数公式和半数公式

$$\mathrm{sn}2z=\frac{2\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z}{1-k^2\mathrm{sn}^4 z},$$

$$\mathrm{cn}2z=\frac{\mathrm{cn}^2 z-\mathrm{sn}^2 z\ \mathrm{dn}^2 z}{1-k^2\mathrm{sn}^4 z}=1-\frac{2\mathrm{sn}^2 z\ \mathrm{dn}^2 z}{1-k^2\ \mathrm{sn}^4 z}=\frac{2\mathrm{cn}^2 z}{1-k^2\mathrm{sn}^4 z}-1,$$

$$\mathrm{dn}2z=\frac{\mathrm{dn}^2 z-k^2\mathrm{sn}^2 z\ \mathrm{cn}^2 z}{1-k^2\mathrm{sn}^4 z}=1-\frac{2k^2\mathrm{sn}^2 z\ \mathrm{cn}^2 z}{1-k^2\ \mathrm{sn}^4 z}=\frac{2\mathrm{dn}^2 z}{1-k^2\mathrm{sn}^4 z}-1.$$

$$\mathrm{sn}^2\frac{z}{2}=\frac{1-\mathrm{cn}z}{1+\mathrm{dn}z}=\frac{1-\mathrm{dn}z}{k^2(1+\mathrm{cn}z)}=\frac{\mathrm{dn}z-\mathrm{cn}z}{k^2+\mathrm{dn}z-k^2\mathrm{cn}z},$$

$$\mathrm{cn}^2\frac{z}{2}=\frac{\mathrm{cn}z+\mathrm{dn}z}{1+\mathrm{dn}z}=\frac{k^2\mathrm{cn}z-k'^2+\mathrm{dn}z}{k^2(1+\mathrm{cn}z)}=\frac{k'^2(1+\mathrm{cn}z)}{k'^2+\mathrm{dn}z-k^2\mathrm{cn}z},$$

$$\mathrm{dn}^2\frac{z}{2}=\frac{\mathrm{cn}z+\mathrm{dn}z}{1+\mathrm{cn}z}=\frac{k'^2+k^2\mathrm{cn}z+\mathrm{dn}z}{1+\mathrm{dn}z}=\frac{k'^2(1+\mathrm{dn}z)}{k'^2+\mathrm{dn}z-k^2\mathrm{cn}z}.$$

7° 导数和积分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{sn}z=\mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{cn}z=\mathrm{sn}z\ \mathrm{dn}z,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{dn}z=-k^2\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}z.$$

$$\int\mathrm{sn}z\ \mathrm{d}z=\frac{1}{k}\ln(\mathrm{dn}z-k\mathrm{cn}z),$$

$$\int\mathrm{cn}z\ \mathrm{d}z=\frac{1}{k}\ln(\mathrm{dn}z-\mathrm{i}k\mathrm{sn}z),$$

$$\int\mathrm{dn}z\ \mathrm{d}z=\mathrm{i}\ln(\mathrm{cn}z-\mathrm{i}\ \mathrm{sn}z).$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{sn}z}=\ln\frac{\mathrm{sn}z}{\mathrm{cn}z+\mathrm{dn}z}=\ln\frac{\mathrm{dn}z-\mathrm{cn}z}{\mathrm{sn}z},$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{cn}z}=\frac{1}{k'}\ln\frac{k'\mathrm{sn}z+\mathrm{dn}z}{\mathrm{cn}z}=\frac{1}{2k'}\ln\frac{\mathrm{dn}z+k'\mathrm{sn}z}{\mathrm{dn}z-k'\mathrm{sn}z},$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{dn}z}=\frac{1}{k'}\mathrm{argtan}\frac{k'\mathrm{sn}z-\mathrm{cn}z}{k'\mathrm{sn}z+\mathrm{cn}z}=\frac{1}{2k'}\mathrm{argtan}\frac{k'\mathrm{sn}z}{\mathrm{cn}z}.$$

1.5.3 椭圆积分应用举例

例 3 计算椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 的弧长.

解 椭圆的参数方程为 $x=a\sin\theta,y=b\cos\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$,其弧长的微分为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s&=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}
$$

这里,$\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$,为椭圆离心率.于是椭圆弧长为

$$s=a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{E}(\varepsilon,\varphi).$$

这就是第二类椭圆积分,椭圆积分由此而得名.

特别,令 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$,得椭圆周长的 $\dfrac{1}{4}$,可表示为完全椭圆积分

$$s'=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=a\mathrm{E}(\varepsilon),$$

而椭圆的周长为 $4s'=4a\mathrm{E}(\varepsilon)$.

例 4 求单摆的周期.

解 设单摆的摆长为 l,在时刻 t 的摆角为 $\theta=\theta(t)$,则摆的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0,$$

其中 g 为重力加速度.令 $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$,则上式化为

$$\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0,$$

其通解为 $\omega^2=\frac{2g}{l}\cos\theta+C$.若给定初始条件 $\omega|_{\theta=\theta_0}=0$,则其特解为

$$\omega^2=\frac{2g}{l}(\cos\theta-\cos\theta_0)=\frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

于是

$$t=\int_0^\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\omega}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$\xlongequal{\text{令 }\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\theta_0}{2}\sin\varphi}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\sqrt{\frac{l}{g}}\mathrm{F}(k,\varphi).$$

其中 $k=\sin\frac{\theta_0}{2}$,这是第一类椭圆积分.于是摆的周期可表示为第一类完全椭圆积分:

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\mathrm{F}\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=4\sqrt{\frac{l}{g}}\mathrm{K}(k).$$

例 5 求 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=r^2(R>r)$ 两柱面所围之体积.

解 由已知条件易知所求体积为

$$V=8\int_0^r\sqrt{(R^2-x^2)(r^2-x^2)}\,\mathrm{d}x,$$

作变换 $x=r\sin\theta$, $k=\frac{r}{R}$,得

$$\begin{aligned}V&=8Rr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=8Rr^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta-k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta\right]\\&=\frac{8}{3}Rr^2\left[\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\mathrm{E}(k)-\left(\frac{1}{k^2}-1\right)\mathrm{K}(k)\right]\end{aligned}$$

1.6 δ-函 数

1.6.1 δ-函数的定义

(1) δ-函数是定义在$(-\infty,+\infty)$上,并且满足以下条件的函数:

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0 & (x\neq x_0),\\+\infty & (x=x_0);\end{cases}\tag{1-35}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=1.\tag{1-36}$$

δ-函数的引进,使集中分布的量就得到了数学描述.例如,对于在 $x=x_0$ 处集中分布电量为 q 的点电荷的密度 $\rho(x)$ 可用 δ-函数表示:

$$\rho(x)=q\delta(x-x_0).$$

(2) δ-函数有一个基本性质:对任何连续函数 $\varphi(x)$,下述关系式成立:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(x_0).\tag{1-37}$$

因此,也用(1-37)式来定义 δ-函数:如果某函数乘以任意连续函数 $\varphi(x)$后,再在$(-\infty,+\infty)$上积分,其积分值为 $\varphi(x_0)$,那么该函数称为 δ-函数,记为 $\delta(x-x_0)$.

当 $x_0=0$ 时,(1-35)式与(1-36)式分别化为

$$\delta(x)=\begin{cases}0 & (x\neq 0),\\+\infty & (x=0);\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1.$$

并且对任意的连续函数 $\varphi(x)$,(1-37)式化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0).$$

由定义可以看出,δ-函数不是普通函数,它没有通常意义的"函数值",不能以"每一点对应一个函数值"来理解,它的值只能通过积分运算(1-37)式来体现,也就是说,它的"值"是在显示任意连续函数在每一点的函数时才体现出来.因此,δ-函数是一种关于分布的描述形式,只能求它的"投影值"(或"运算值").

(3) 三维空间中的 δ-函数定义为

$$\delta(M-M_0)=\begin{cases}0, & M\neq M_0,\\+\infty, & M=M_0;\end{cases}$$

$$\iiint\delta(M-M_0)\mathrm{d}M=1.$$

式中三重积分的积分域是全空间.它又可定义为:对于任意连续函数 $\varphi(M)$,下述关系式成立:

$$\iiint\delta(M-M_0)\varphi(M)\mathrm{d}M=\varphi(M_0).$$

容易证明

$$\begin{aligned}\delta(M-M_0)&=\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\\&=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0).\end{aligned}$$

类似地可定义二维 δ-函数,以及一般地定义 n 维 δ-函数.

1.6.2　δ-函数的性质

1° $\delta(x)$是偶函数:$\delta(-x)=\delta(x)$.

2° $\delta(x)$的积分变换. $\delta(x)$的傅里叶变换与拉普拉斯变换均为 1:

$$\mathscr{F}[\delta(x)]=1,\quad \mathscr{L}[\delta(x)]=1.$$

3° $\delta(x-x_0)$的傅里叶积分展开式为

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega(x-x_0)}d\omega.$$

特别,当 $x_0=0$ 时,得 $\delta(x)$的积分表达式

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}d\omega.$$

4° $\delta(x-x_0)$的广义傅里叶级数展开式. 设$\{y_n(x)\}$是$[a,b]$上的正交完全函数系,其中 $y_n(x)$的模为

$$N_n=\sqrt{\int_a^b y_n^2(x)dx},$$

则 $\delta(x-x_0)$按$\{y_n(x)\}$展开的广义傅里叶级数为

$$\delta(x-x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N_n^2}y_n(x_0)y_n(x).$$

特别有

$$\delta(x-x_0)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$\delta(x-x_0)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{(2n+1)\pi x_0}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

1.6.3　δ-函数作为函数序列的极限

设可积函数序列为$\{f_a(x)\}(a\leqslant x\leqslant b)$,如果对于任意连续函数 $\varphi(x)$,存在可积函数 $f(x)$,使得

$$\lim_{a\to a_0}\int_a^b f_a(x)\varphi(x)dx=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

则称 $f(x)$为函数序列 $f_a(x)$的弱极限.

δ-函数可看作某些函数序列——δ-型序列的弱极限,下面是常用的几个 δ-型序列的弱极限形式:

1° $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\delta_\varepsilon(x)\xlongequal{弱}\delta(x)$,其中 $\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon} & (|x|<\varepsilon),\\ 0 & (|x|>\varepsilon);\end{cases}$

2° $\lim\limits_{a\to+0}\dfrac{a}{\pi(a^2+x^2)}\xlongequal{弱}\delta(x)$;

3° $\lim\limits_{\omega\to+0}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin\omega x}{x}\xlongequal{弱}\delta(x)$;

4° $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\xlongequal{弱}\delta(x-\xi)$;

5° $\lim\limits_{r\to+0}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\xlongequal{弱}\delta(\theta-\varphi)$.

2　贝塞尔函数

2.1　贝塞尔函数的概念

2.1.1　贝塞尔方程及其来源

贝塞尔(Bessel)函数是下列贝塞尔方程的解:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0,\tag{2-1}$$

其中 n 是常数,称为方程的阶.

贝塞尔函数除了作为方程(2-1)的解而引进外,它还出现在某些函数的展开中.

贝塞尔方程常在用分离变数法解偏微分方程的边值问题或本征值问题中见到. 例如,在圆柱坐标系中解波动方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0,$$

设 $u(r,\theta,z,t)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)e^{i\omega t}$,得到关于 $R(r)$的方程

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R=0,$$

其中 k 和 m 是分离变数引进的常数. 令 $\xi=kr$, $R(r)=y(\xi)$,上式就化为贝塞尔方程(2-1).

又如在球坐标系中解波动方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0,$$

设 $u(r,\theta,\varphi,t)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)e^{i\omega t}$,得到关于 $R(r)$的方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0,$$

其中 $l=0,1,2,\cdots$. 令 $\xi=kr$, $R(r)=\xi^{-\frac{1}{2}}y(\xi)$, 得

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dy}{d\xi}+\left[1-\frac{(l+\frac{1}{2})^2}{\xi^2}\right]y(\xi)=0.$$

这是半奇数阶 $\left(l+\frac{1}{2}\right)$ 的贝塞尔方程.

2.1.2 第一类贝塞尔函数

第一类贝塞尔函数 $J_n(x)$ 是当 $n\neq$ 整数时的 n 阶贝塞尔方程(2-1)在它的正则奇点 $x=0$ 处的两个线性无关解. 下面用级数解法求解方程(2-1).

根据复变函数论中富克斯(Fuchs)定理, 方程(2-1)有级数解

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{k+r}, \tag{2-2}$$

其中 $c_0\neq 0$. 把这级数代入方程(2-1)(设 n 为任意实数), 得 $r=\pm n$, $c_1=0$.

(1) 取 $r=n$, 级数(2-2)的系数有递推公式

$$c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(2n+k)}.$$

系数间的指标差2, 故 $c_3,c_5,c_7,\cdots$ 都可用 c_1 表示, 且都等于零; 而 $c_2,c_4,c_6,\cdots$ 都可用 c_0 表示, 即

$$c_{2m}=\frac{(-1)^m c_0}{2^{2m}\cdot m!\ (n+1)(n+2)\cdots(n+m)}.$$

因此, 级数解(2-2)的一般项为

$$(-1)^m\frac{c_0 x^{2m+n}}{2^{2m}m!\ (n+1)(n+2)\cdots(n+m)},$$

其中 c_0 为任意常数, 当 c_0 取一定值, 就得到方程(2-1)的一个解(由比值法知, 级数解(2-2)的收敛半径 $R=+\infty$).

取常数 $c_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$. 这样就得到贝塞尔方程(2-1)的一级数解, 这级数的和函数称为 n 阶**第一类贝塞尔函数**, 记为 $J_n(x)$, 即

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}. \tag{2-3}$$

当 n 为正整数或零时, $\Gamma(n+m+1)=(n+m)!$, 因此

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

显然, n 为偶数时, $J_n(x)$ 为偶函数; n 为奇数时, $J_n(x)$ 为奇函数.

(2) 取 $r=-n$, 同样可得方程(2-1)的另一特解

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(-n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}. \tag{2-4}$$

对于(2-4)式应注意两点:

1° 因为当 $-n$ 为负整数 $-N$ 时, (根据 $\Gamma(s)\to\pm\infty$ $(s\to 0,-1,-2,\cdots)$) $\Gamma(-N+m+1)\to\pm\infty$ $(m=0,1,2,\cdots,N-1)$, 所以系数 $\frac{1}{\Gamma(-n+m+1)}=0$, 这时

$$J_{-N}(x)=\sum_{m=N}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(-N+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-N}.$$

2° 比较(2-3)式与(2-4)式, 可知, 不论 n 为何实数, 总可以用(2-3)式统一地表示第一类贝塞尔函数.

2.1.3 第二类贝塞尔函数

(1) 当 n 不是整数时, 由分析函数 $J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 在 $x=0$ 附近的性态(设 $n>0$, $J_n(x)\to 0$, $J_{-n}(x)\to\infty$ $(x\to 0)$), 可知 $J_n(x)$ 和 $J_{-n}(x)$ 线性无关, 因此贝塞尔方程(2-1)的通解为

$$y=AJ_n(x)+BJ_{-n}(x), \tag{2-5}$$

其中 A,B 为任意常数.

当 n 为整数时, $J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 线性相关, 它们之间有关系式

$$J_{-N}(x)=(-1)^N J_N(x)\quad(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

这时需要构造另一个与 $J_n(x)$ 线性无关的解. 通常用线性组合与极限方法作出方程(2-1)的另一解(记作 $N_n(x)$).

(2) 当 n 不是整数时,

$$N_n(x)=\cot n\pi J_n(x)-\csc n\pi J_{-n}(x)=\frac{J_n(x)\cos n\pi-J_{-n}(x)}{\sin n\pi}. \tag{2-6}$$

当 n 是整数时

$$N_n(x)=\lim_{\alpha\to n}N_\alpha(x). \tag{2-7}$$

由(2-6)式与(2-7)式所定义的函数 $N_n(x)$ 称为 n 阶**第二类贝塞尔函数**(也叫做诺伊曼(Neumann)函数). 它的级数表达式为

$$N_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},$$

其中 $\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$; 当 $n=0$ 时, 去掉第二项有限和. 特别, 在 $x=0$ 的小邻域内有近似公式

$$N_0(x)\approx\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2},$$

$$N_n(x)\approx-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\quad(n\geqslant 1).$$

(3) 不论 n 为何实数, $N_n(x)$ 与方程(2-1)的另一个解 $J_n(x)$ 线性无关, 因此方程(2-1)的通解可表示为

$$y = A\mathrm{J}_n(x) + B\mathrm{N}_n(x). \tag{2-8}$$

在一些定解问题中，n 是零或正整数，且相应的本征值问题带有自然边界条件：$y(0)$有界，因此，方程(2-1)的通解不能取(2-5)式，而应取(2-8)式. 因为当 $x \to +0$ 时，$\mathrm{N}_n(x) \to -\infty \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$，于是在(2-8)式中常取 $B = 0$，即在条件 $|y(0)| < +\infty$ 下，方程(2-1)的解($n = 0, 1, 2, \cdots$)为

$$y = A\mathrm{J}_n(x), \tag{2-9}$$

其中 A 为任意常数.

2.1.4 第三类贝塞尔函数

(1) 由第一类、第二类贝塞尔函数的线性组合可定义出第三类贝塞尔函数(又叫做**汉克尔(Hankel)函数**).

$$\mathrm{H}_n^{(1)}(x) = \mathrm{J}_n(x) + \mathrm{i}\,\mathrm{N}_n(x), \tag{2-10}$$

$$\mathrm{H}_n^{(2)}(x) = \mathrm{J}_n(x) - \mathrm{i}\,\mathrm{N}_n(x), \tag{2-11}$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 是虚数单位，n 为任何实数. 由于它们是方程(2-1)的两个线性无关解，因此，对任何实数 n，方程(2-1)通解的另一表达式为

$$y = A\mathrm{H}_n^{(1)}(x) + B\mathrm{H}_n^{(2)}(x),$$

其中 A, B 为任意常数.

(2) 当 $|x| \to +\infty$ 时，三类贝塞尔函数的渐近表达式为

$$\mathrm{J}_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n}{2}\pi\right);$$

$$\mathrm{N}_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n}{2}\pi\right);$$

$$\mathrm{H}_n^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n}{2}\pi\right)},$$

$$\mathrm{H}_n^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n}{2}\pi\right)}.$$

这些渐近公式在讨论波的散射时常用到.

贝塞尔函数还有其他许多类型，不再一一介绍. 由于贝塞尔函数主要出现在柱面坐标中，因此又把它们统称为**圆柱函数**.

2.2 贝塞尔函数的性质

2.2.1 递推公式

不同阶的贝塞尔函数之间存在一定的递推关系.

(1) 第一组是微分公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^n\mathrm{J}_n(x)] = x^n\mathrm{J}_{n-1}(x), \tag{2-12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-n}\mathrm{J}_n(x)] = -x^{-n}\mathrm{J}_{n+1}(x). \tag{2-13}$$

利用贝塞尔函数的级数表达式(2-3)可以证明：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^n\mathrm{J}_n(x)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2n}2^n \\ &= x^n\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(n+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n-1} \\ &= x^n\mathrm{J}_{n-1}(x).\end{aligned}$$

类似可证(2-13)式. 当 $n = 1$ 时，(2-12)式化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x\mathrm{J}_1(x)] = x\mathrm{J}_0(x),$$

当 $n = 0$ 时，(2-13)式化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{J}_0(x) = -\mathrm{J}_1(x).$$

由以上 4 式可得不定积分公式：

$$\int x^n\mathrm{J}_{n-1}(x)\mathrm{d}x = x^n\mathrm{J}_n(x) + C,$$

$$\int x^{-n}\mathrm{J}_{n+1}(x)\mathrm{d}x = -x^{-n}\mathrm{J}_n(x) + C,$$

$$\int x\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x = x\mathrm{J}_1(x) + C,$$

$$\int \mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x = -\mathrm{J}_0(x) + C.$$

(2) 第二组是高阶用低阶表示的递推公式：

$$\mathrm{J}_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}\mathrm{J}_n(x) - \mathrm{J}_{n-1}(x), \tag{2-14}$$

$$\mathrm{J}_{n+1}(x) = \mathrm{J}_{n-1}(x) - 2\mathrm{J}'_n(x). \tag{2-15}$$

这组公式由第一组公式推出：将(2-12)与(2-13)两式左端的导数求出来经化简后相减即得(2-14)式，相加即得(2-15)式.

又由(2-12)，(2-13)两式可以分别证明

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^p[x^n\mathrm{J}_n(x)] = x^{n-p}\mathrm{J}_{n-p}(x), \tag{2-16}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^p[x^{-n}\mathrm{J}_n(x)] = (-1)^p x^{-(n+p)}\mathrm{J}_{n+p}(x), \tag{2-17}$$

其中记号 $\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^p f(x)$ 表示运算

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^p f(x) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\left\{\cdots\left[\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)\right]}_{\text{共}p\text{次}} f(x)\right\}.$$

所有上述关于 $\mathrm{J}_n(x)$ 的递推公式对任何 n 都成立.

2.2.2 半奇阶贝塞尔函数

半奇阶贝塞尔函数 $J_{n+\frac{1}{2}}(x)(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的一个重要特点是它可以用初等函数表达.例如

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,$$

这里用到了公式

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+1\right)=\frac{2m+1}{2}\frac{2m-1}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-1)(2m+1)}{2^{m+1}}\sqrt{\pi}.$$

类似地可证

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

一般地,利用递推公式(2-17)可证得 $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$是初等函数:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^n\left\{x^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(x)\right\}$$

$$=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^n\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}\quad(n=0,1,2,\cdots),\tag{2-18}$$

利用(2-16)式可证得 $J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)$是初等函数:

$$J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^n\left\{\frac{\cos x}{x}\right\}\quad(n=0,1,2,\cdots).\tag{2-19}$$

用归纳法可以分别由(2-18)式和(2-19)式证明 $J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(x)$的明显表达式:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^m(n+2m)!}{(2m)!(n-2m)!(2x)^{2m}}+\right.$$

$$\left.\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^m(n+2m+1)!}{(2m+1)!(n-2m-1)!(2x)^{2m+1}}\right\},$$

$$J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^m(n+2m)!}{(2m)!(n-2m)!(2x)^{2m}}-\right.$$

$$\left.\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^m(n+2m+1)!}{(2m+1)!(n-2m-1)!(2x)^{2m+1}}\right\}.$$

2.2.3 母函数与积分表达式

(1) 利用复变函数的级数理论,可把函数

$$G(z,x)=\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$$

展开为 z 的级数(洛朗(Laurent)级数):

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}\right]z^n$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)z^n.\tag{2-20}$$

这说明 $\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$可生成整数阶的贝塞尔函数,因此把这函数称为贝塞尔函数的**母函数**.

(2) 在(2-20)式中,令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}.\tag{2-21}$$

上式右端是复数形的傅里叶级数,因此 $J_n(x)$ 就是上式左端函数的**傅里叶系数**,于是

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(x\sin\varphi-n\varphi)+\mathrm{i}\sin(x\sin\varphi-n\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi.$$

这里利用了欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$,因为被积函数的虚部是奇函数,它在对称区间$[-\pi,\pi]$上的积分为零,而实部是偶函数,因此得到贝塞尔函数的积分表达式为

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)\mathrm{d}\varphi.\tag{2-22}$$

把(2-21)式两端的实部与虚部分开,得

$$\cos(x\sin\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\cos n\varphi,$$

$$\sin(x\sin\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\sin n\varphi.$$

注意到 $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$,则上两式化为

$$\cos(x\sin\varphi)=J_0(x)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(x)\cos2m\varphi,$$

$$\sin(x\sin\varphi)=2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m-1}(x)\sin(2m-1)\varphi.$$

这就是以 x 为参数的函数 $\cos(x\sin\varphi)$与 $\sin(x\sin\varphi)$的傅里叶级数展开式,它在调频信号的频谱分析中有着重要的应用.

(3) (2-20)式是贝塞尔函数理论中的重要公式,利用它还可以推出一系列展开公式,下面再举几个.在(2-20)式中令 $z=\mathrm{ie}^{\mathrm{i}\varphi}$,注意 $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$,有

$$\begin{aligned}e^{ix\cos\varphi} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) i^n e^{in\varphi} \\ &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}[J_n(x) i^n e^{in\varphi} + J_{-n}(x) i^{-n} e^{-in\varphi}] \\ &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) i^n (e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}) \\ &= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(x)\cos n\varphi.\end{aligned}$$

引进符号 $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_n = 2(n = 1,2,\cdots)$,则上式可简写为

$$e^{ix\cos\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(x)\cos n\varphi. \tag{2-23}$$

比较(2-23)式两边的实部与虚部,得

$$\cos(x\cos\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_{2n}(-1)^n J_{2n}(x)\cos 2n\varphi, \tag{2-24}$$

$$\sin(x\cos\varphi) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x)\cos(2n+1)\varphi.$$

在(2-24)式中,令 $\varphi = \frac{\pi}{2}$,得

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_{2n} J_{2n}(x) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x),$$

又在(2-20)中把 z 换成 $-z$,有

$$\exp\left[\frac{-x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\cdot(-1)^n z^n,$$

上式与(2-20)式相乘,得

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) z^k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x)(-1)^m z^m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m J_m(x) J_{n-m}(x).$$

比较上式两边,得

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m^2(x) = J_0^2(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m^2(x) = 1, \tag{2-25}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m J_m(x) J_{2n-m}(x) = 0;$$

或

$$\sum_{m=0}^{2n}(-1)^m J_m(x) J_{2n-m}(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(x) J_{2n+m}(x) = 0.$$

由(2-25)式可作出下列重要结论:

$$|J_0(x)| \leqslant 1,\ |J_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

2.2.4 加法公式

把(2-20)式中的 x 换成 $x + y$,得

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x+y) z^n &= \exp\left[\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]\cdot\exp\left[\frac{y}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) z^k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(y) z^l \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) J_{n-k}(y),\end{aligned}$$

从而得**加法公式**

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) J_{n-k}(y).$$

另一个重要加法公式是

$$\begin{aligned}J_0(R) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(r_1) J_m(r_2) e^{im\theta} \\ &= J_0(r_1) J_0(r_2) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(r_1) J_m(r_2)\cos m\theta,\end{aligned}$$

其中 $R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2\cos\theta}$ 是平面上任意两点 P_1 和 P_2 之间的距离,r_1 和 r_2 分别表示由原点 O 到 P_1 和 P_2 的距离,θ 是 $\overline{OP_1}$ 和 $\overline{OP_2}$ 之间的夹角.

2.2.5 贝塞尔函数的零点

贝塞尔函数 $J_n(x)$ 的**零点**,就是方程 $J_n(x) = 0$ 的根,通常用 $\mu_m^{(n)}$ 表示 n 阶贝塞尔函数 $J_n(x)$ 的第 m 个正零点(从小到大依序编号).由 $J_n(x)$ 的表达式知,当 $n > 0$ 时,有零点 $x = 0(J_0(0) = 1)$,并且如果 $J_n(x_0) = 0$,则 $J_n(-x_0) = 0$,因此零点是关于原点对称地分布着.下面是有关零点分布的几个重要性质,它对求解定解问题是很重要的.

1° $J_n(x)$ 有无穷多个正零点,且都是单重零点.设 $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \cdots$ 是方程 $J_n(x) = 0$ 的正根,则

$$\int_0^l x J_n^2(\mu_i^{(n)} x)\mathrm{d}x = \frac{l^2}{2} J_{n+1}^2(\mu_i^{(n)} l).$$

当 $\mu_i^{(n)} \neq \mu_j^{(n)}$ 时,

$$\int_0^l x J_n(\mu_i^{(n)} x) J_n(\mu_j^{(n)} x)\mathrm{d}x = 0,$$

并且函数系 $J_n(\mu_1^{(n)} x), J_n(\mu_2^{(n)} x), \cdots$ 在区间 $(0, l)$ 上是完备系.

零点的渐近公式是

$$\mu_j^{(n)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} + j\pi \quad (|j| 愈大愈精确).$$

2° $J_n(x)$ 的零点与 $J_{n+1}(x)$ 的零点是彼此相间分布的.即 $J_n(x)$ 的任意两个相

邻零点之间必存在一个且仅存在一个 $J_{n+1}(x)$ 的零点，反之亦然.

3° $J_n(x)$ 的最小正零点小于 $J_{n+1}(x)$ 的最小正零点，即 $\mu_1^{(n)} < \mu_1^{(n+1)}$.

4° 指标 n 较大时，$J_n(x)$ 相邻两零点之距离近似于 π.

表2-1列出了 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 前6个正零点.

表 2-1

n	m					
	1	2	3	4	5	6
0	2.405	5.520	8.654	11.792	14.931	18.071
1	3.832	7.016	10.173	13.324	16.471	19.616

2.2.6　含贝塞尔函数的无穷积分

用贝塞尔函数的级数表达式，逐项求积分可得下列积分公式

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda x)\,d\lambda = (x^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (z>0);$$

$$\int_0^\infty J_1(\lambda x) e^{-\lambda z}\,d\lambda = \frac{1}{x}\left[1 - x(x^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right];$$

$$\int_0^\infty J_0(\lambda x) e^{-\lambda t}\lambda^{n+1}\,d\lambda = \frac{1}{2t}\left(\frac{x}{2t}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right);$$

$$\int_0^\infty J_0(\lambda x)\exp(-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|)(\lambda^2-k^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\lambda$$

$$= (x^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\exp(2k\sqrt{x^2+z^2});$$

$$\int_0^\infty J_m(at)\frac{J_n(b\sqrt{t^2+x^2})}{(t^2+x^2)^{\frac{n}{2}}} t^{m+1}\,dt$$

$$= \begin{cases} 0 & (a<b), \\ \dfrac{b^m}{a^n}\left(\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{x}\right)^{n-m-1} J_{n-m-1}(x\sqrt{a^2-b^2}) & (a>b). \end{cases}$$

2.3　傅里叶-贝塞尔级数

2.3.1　本征函数系——贝塞尔函数系

(1) 本征值问题是由一个带参数的微分方程与边界条件所构成的. 其中参数称为**本征值**，非零解称为(对应于本征值的)**本征函数**.

在数学物理问题中，所遇到的本征值问题大都是施图姆-刘维尔(Sturm-Liouville)本征值问题：

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda\rho^2 - n^2)R = 0 \quad (0<\rho<l), & (2\text{-}26) \\ |R(0)| < +\infty,\ R(l) = 0; & (2\text{-}27) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda\rho^2 - n^2)R = 0 \quad (0<\rho<l), & (2\text{-}28) \\ |R(0)| < +\infty,\ R'(l) = 0. & (2\text{-}29) \end{cases}$$

(2) 标准形式的贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{2-30}$$

满足有界性条件 $|y(0)| < +\infty$ 的解为 $y = AJ_n(x)$，对方程(2-30)施行自变量变换 $x=\sqrt{\lambda}\rho$，就化为方程(2-26)，它满足条件 $|R(0)|<+\infty$ 的解为

$$R(\rho) = AJ_n(\sqrt{\lambda}\rho).$$

由(2-27)式的第二个条件，可得

$$AJ_n(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

设 $J_n(x)$ 的一系列正零点为 $\mu_m^{(n)}(m=1,2,\cdots)$，则有

$$\sqrt{\lambda}l = \mu_m^{(n)},$$

从而得到本征值问题(2-26)+(2-27)式的本征值

$$\lambda = \lambda_m = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\right)^2 \quad (m=1,2,\cdots),$$

相应的本征函数为

$$R_m(\rho) = A_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right). \tag{2-31}$$

根据本征值问题的性质，本征函数系——贝塞尔函数系 $\left\{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\right\}$ 在 $[0,l]$ 上带权 ρ 正交，即

$$\int_0^l \rho J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right) J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l}\rho\right) d\rho = \begin{cases} 0 & (k\neq m), \\ N_m^2 & (k=m). \end{cases}$$

如同傅里叶级数一样，可把满足一定条件的函数 $f(\rho)$ 按这贝塞尔函数系展开成级数：

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^\infty c_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right) \quad (0<\rho<l), \tag{2-32}$$

其中系数

$$c_m = \frac{\int_0^l \rho f(\rho) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right) d\rho}{\int_0^l \rho J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right) d\rho}. \tag{2-33}$$

级数(2-32)称为函数 $f(\rho)$ 的傅里叶-贝塞尔级数.

(3) 对于第二个本征值问题(2-28)+(2-29)式，由(2-29)的第二式，可得

$$A\sqrt{\lambda}J'_n(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

设 $J'_n(x)$ 的一系列正零点为 $\nu_m^{(n)}(m=1,2,\cdots)$：

$$0 < \nu_1^{(n)} < \nu_2^{(n)} < \cdots < \nu_m^{(n)} < \cdots$$

那么 $\sqrt{\lambda}l = \nu_m^{(n)}$，从而本征值问题(2-28)+(2-29)式的本征值为

$$\lambda = \lambda_m = \left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\right)^2 \quad (m = 1,2,\cdots),$$

相应的本征函数

$$R_m(\rho) = A_m \mathrm{J}_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\rho\right). \tag{2-34}$$

当 $n=0$ 时,因为 $\mathrm{J}'_0(0)=0$,且 $\mathrm{J}_0(0)=1$,所以存在本征值 $\lambda_0=0$,相应的本征函数 $R_0(\rho)=A_0$.

本征函数系 $\left\{\mathrm{J}_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\right\}$ 在 $[0,l]$ 上带权 ρ 正交:

$$\int_0^l \rho \mathrm{J}_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\mathrm{J}_n\left(\frac{\nu_k^{(n)}}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho = \begin{cases} 0 & (k \neq m), \\ N_m^2 & (k = m). \end{cases}$$

函数 $f(\rho)$(满足一定条件)按这本征函数系的**傅里叶 - 贝塞尔级数展开式为**

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_m \mathrm{J}_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\rho\right) \quad (0 < \rho < l), \tag{2-35}$$

其中系数

$$\bar{c}_m = \frac{\int_0^l \rho f(\rho)\mathrm{J}_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho}{\int_0^l \rho \mathrm{J}_n^2\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho}. \tag{2-36}$$

2.3.2 贝塞尔函数的模

为了计算本征函数系(2-31)式和(2-34)式的模,对方程(2-26)两边同乘以 $2R'$,可得

$$2\rho^2 R'R'' + 2\rho R'^2 + 2(\lambda\rho^2 - n^2)RR' = 0.$$

将上式改写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho^2 R'^2 + (\lambda\rho^2 - n^2)R^2] - 2\lambda\rho R^2 = 0,$$

并积分,整理得

$$\int_0^l \rho R^2(\rho)\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2\lambda}[l^2 R'^2(l) + (\lambda l^2 - n^2)R^2(l) + n^2 R(0)].$$

将 $R(\rho)=\mathrm{J}_n(\sqrt{\lambda}\rho)$, $R'(\rho)=\sqrt{\lambda}\mathrm{J}'_n(\sqrt{\lambda}\rho)$ 代入上式,得

$$\int_0^l \rho \mathrm{J}_n^2(\sqrt{\lambda}\rho)\mathrm{d}\rho = \frac{l^2}{2}\left[\mathrm{J}'^2_n(\sqrt{\lambda}l) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda l^2}\right)\mathrm{J}_n^2(\sqrt{\lambda}l)\right]. \tag{2-37}$$

这里用到 $\mathrm{J}_0(0)=1$, $\mathrm{J}_n(0)=0$ $(n=1,2,\cdots)$.

分两种情形讨论:

1° $\lambda = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\right)^2$,这时有 $\mathrm{J}_n(\sqrt{\lambda}l) = \mathrm{J}_n(\mu_m^{(n)}) = 0$,于是

$$\int_0^l \rho \mathrm{J}_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho = \frac{l^2}{2}\mathrm{J}'^2_n(\mu_m^{(n)}).$$

据递推公式(2-13)

$$x^{-n}\mathrm{J}'_n(x) - nx^{-n-1}\mathrm{J}_n(x) = -x^{-n}\mathrm{J}_{n+1}(x),$$

有

$$\mathrm{J}'_n(\mu_m^{(n)}) = \mathrm{J}_{n+1}(\mu_m^{(n)}) \neq 0,$$

因此得到贝塞尔函数(2-31)的模的计算公式

$$N_m^2 = \int_0^l \rho \mathrm{J}_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho = \frac{l^2}{2}\mathrm{J}_{n+1}^2(\mu_m^{(n)}). \tag{2-38}$$

2° $\lambda = \left(\frac{\upsilon_m^{(n)}}{l}\right)^2$,这时有

$$\mathrm{J}'_n(\sqrt{\lambda}l) = \mathrm{J}'_n(\upsilon_m^{(n)}) = 0,$$

于是由(2-37)式得到贝塞尔函数(2-34)的模的计算公式

$$\bar{N}_m^2 = \int_0^l \rho \mathrm{J}_n^2\left(\frac{\upsilon_m^{(n)}}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho = \frac{l^2}{2}\left[1 - \left(\frac{n}{\upsilon_m^{(n)}}\right)^2\right]\mathrm{J}_n^2(\upsilon_m^{(n)}). \tag{2-39}$$

2.3.3 例子

例 1 将函数 $f(\rho)=\rho^2-1$ $(0\leqslant\rho\leqslant1)$ 按 $\{\mathrm{J}_0(\mu_m\rho)\}$ 展开为傅里叶 - 贝塞尔级数.这里 $\mathrm{J}_0(\mu_m)=0(m=1,2,\cdots)$.

解 $f(\rho)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数,且当 $\rho=0$ 时有界,当 $\rho=1$ 时其值为零(齐次边界条件).因此

$$\rho^2 - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \mathrm{J}_0(\mu_m\rho),$$

其中系数按(2-38),(2-33)式计算:

$$c_m = \frac{2}{\mathrm{J}_1^2(\mu_m)}\int_0^1 \rho(\rho^2-1)\mathrm{J}_0(\mu_m\rho)\mathrm{d}\rho.$$

令 $x=\mu_m\rho$,则 $\rho=\frac{x}{\mu_m}$, $\mathrm{d}\rho=\frac{1}{\mu_m}\mathrm{d}x$,那么

$$c_m = \frac{2}{\mathrm{J}_1^2(\mu_m)}\int_0^{\mu_m}\left(\frac{1}{\mu_m}\right)^4 x(x^2-\mu_m^2)\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x.$$

根据贝塞尔函数的微分和积分性质可得

$$\int_0^{\mu_m}\mu_m^2 x\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x = \mu_m^2(x\mathrm{J}_1(x))\Big|_0^{\mu_m} = \mu_m^2\mathrm{J}_1(\mu_m)$$

及

$$\begin{aligned}\int_0^{\mu_m}x^3\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x &= x^2\cdot x\mathrm{J}_1(x)\Big|_0^{\mu_m} - \int_0^{\mu_m}2x\cdot x\mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x \\ &= \mu_m^3\mathrm{J}_1(\mu_m) - 2[x^2\mathrm{J}_2(x)]_0^{\mu_m} \\ &= \mu_m^3\mathrm{J}_1(\mu_m) - 2\mu_m^2\mathrm{J}_2(\mu_m).\end{aligned}$$

将以上两个积分值代入 c_m 的积分公式,得

$$c_m = \frac{-4\mathrm{J}_2(\mu_m)}{\mathrm{J}_1^2(\mu_m)\mu_m^2}.$$

因此,所求的展开式为

$$\rho^2-1=-4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_2(\mu_m)}{\mu_m^2J_1^2(\mu_m)}J_0(\mu_m\rho).$$

例 2 将函数 $f(\rho)=\rho^2(0\leqslant\rho\leqslant1)$ 按 $\{J_2(\upsilon_m\rho)\}$ 展开为傅里叶 - 贝塞尔级数.这里 $J'_2(\upsilon_m)=0\ (m=1,2,\cdots)$.

解 依系数公式(2-39) 与(2-36),得

$$\begin{aligned}c_m&=\frac{2\upsilon_m^2}{(\upsilon_m^2-4)J_2^2(\upsilon_m)}\int_0^1\rho^3J_2(\upsilon_m\rho)\mathrm{d}\rho\\&=\frac{2\upsilon_m^2}{(\upsilon_m^2-4)J_2^2(\upsilon_m)}\cdot\frac{1}{\upsilon_m^4}\int_0^1(\upsilon_m\rho)^3J_2(\upsilon_m\rho)\mathrm{d}(\upsilon_m\rho)\\&=\frac{2\upsilon_m^2}{(\upsilon_m^2-4)J_2^2(\upsilon_m)}\cdot\frac{1}{\upsilon_m^4}[(\upsilon_m\rho)^3J_3(\upsilon_m\rho)]_0^1\\&=\frac{2\upsilon_mJ_3(\upsilon_m)}{(\upsilon_m^2-4)J_2^2(\upsilon_m)}.\end{aligned}$$

代入级数(2-35) 式,得所求的展开式

$$\rho^2=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\upsilon_mJ_3(\upsilon_m)}{(\upsilon_m^2-4)J_2^2(\upsilon_m)}J_2(\upsilon_m\rho).$$

2.4 贝塞尔函数的应用

2.4.1 边值问题

求解边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=u_{\rho\rho}+\dfrac{1}{\rho}u_\rho+\dfrac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0\quad(0<\rho<l,0<z<h), & (2\text{-}40)\\ u(l,\theta,z)=0,|u(0,\theta,z)|<+\infty, & (2\text{-}41)\\ u(\rho,\theta,0)=g_1(\rho,\theta),u(\rho,\theta,h)=g_2(\rho,\theta) & (2\text{-}42)\end{cases}$$

的基础解系.

令 $u=R(\rho)\Phi(\theta)H(z)$,代入方程(2-40),得

$$\Phi''+k\Phi=0, \tag{2-43}$$

$$\rho^2R''+\rho R'+(\lambda\rho^2-k)R=0, \tag{2-44}$$

$$H''-\lambda H=0. \tag{2-45}$$

由周期性条件 $\Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta)$,得方程(2-43)的本征值 $k_n=n^2$,相应的本征函数 $\Phi_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\ (n=0,1,2,\cdots)$.由齐次边界条件(2-41),得方程(2-44)的本征值问题:

$$\begin{cases}\rho^2R''+\rho R'+(\lambda\rho^2-n^2)R=0,\\|R(0)|<+\infty,R(l)=0.\end{cases}$$

解得本征值 $\lambda_m=\left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{l}\right)^2(m=1,2,\cdots)$,其中 $\mu_m^{(n)}$ 为 $J_n(x)$第 m 个正零点;相应的

本征函数

$$R_{n,m}(\rho)=C_{n,m}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right).$$

将 $\lambda_m=\left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{l}\right)^2$ 代入方程(2-45),得方程

$$H''-\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\right)^2H=0,$$

其通解

$$H_{n,m}(z)=D_{n,m}\cosh\frac{\mu_m^{(n)}z}{l}+E_{n,m}\sinh\frac{\mu_m^{(n)}z}{l}.$$

于是,所求的基础解系为

$$u_{n,m}(\rho,\theta,z)=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\\sin n\theta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cosh\dfrac{\mu_m^{(n)}z}{l}\\\sinh\dfrac{\mu_m^{(n)}z}{l}\end{Bmatrix}.$$

如果要求边值问题级数形式的解,就需把各基础解叠加,这时得到二重级数,其中 4 组系数由边界条件(2-42)式确定,即按二元函数系 $\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\\sin n\theta\end{Bmatrix}J_n\left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{l}\rho\right)$ 展开为广义傅里叶级数.

例 3 解边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=u_{\rho\rho}+\dfrac{1}{\rho}u_\rho+\dfrac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0\quad(\rho<l,0<z<h),\\u_\rho(l,\theta,z)=0,|u(0,\theta,z)|<+\infty,\\u(\rho,\theta,0)=g_1(\rho),u(\rho,\theta,h)=g_2(\rho).\end{cases}$$

解 由边界条件及区域的对称性,可知 $u=u(\rho,z)$,因此令 $u=R(\rho)H(z)$,代入上述方程得

$$\rho^2R''+\rho R'+\lambda\rho^2R=0,$$
$$H''-\lambda H=0.$$

由齐次边界条件 $u_\rho(l,\theta,z)=0$ 得 $R'(\rho)=0$,从而构成本征值问题

$$\begin{cases}\rho^2R''+\rho R'+\lambda\rho^2R=0,\\|R(0)|<+\infty,R'(l)=0.\end{cases}$$

这里方程是零阶贝塞尔方程,其有界解为

$$R(\rho)=AJ_0(\sqrt{\lambda}\rho).$$

由条件 $R'(l)=0$ 得

$$AJ'_0(\sqrt{\lambda}l)=0,$$

又由递推公式 $J'_0(x)=-J_1(x)$得

$$J_1(\sqrt{\lambda}l)=0.$$

于是得到本征值

$$\lambda_m=\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\right)^2 \quad (m=0,1,2,\cdots),$$

其中 $\lambda_0=0$ ($J_1(0)=0$),相应的本征函数

$$\begin{cases} R_0(\rho)=A_0, \\ R_m(\rho)=A_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\rho\right) \quad (m=1,2,\cdots). \end{cases}$$

将 λ_m 的值代入方程 $H''-\lambda H=0$,解得

$$H_0(z)=C_0+D_0 z,$$

$$H_m(z)=C_m\cosh\frac{\mu_m^{(1)}z}{l}+D_m\sinh\frac{\mu_m^{(1)}z}{l}.$$

从而得基础解(因 $J_0(0)=1$):

$$u_0=a_0+b_0 z,$$

$$u_m=R_m(\rho)H_m(z).$$

叠加得级数形式的解

$$u(\rho,z)=a_0+b_0 z+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cosh\frac{\mu_m^{(1)}z}{l}+b_m\sinh\frac{\mu_m^{(1)}z}{l}\right)J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\rho\right).$$

由非齐次边界条件,得

$$\begin{cases} g_1(\rho)=a_0+\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\rho\right), \\ g_2(\rho)=a_0+b_0 h+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cosh\frac{\mu_m^{(1)}h}{l}+b_m\sinh\frac{\mu_m^{(1)}h}{l}\right)J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\rho\right). \end{cases}$$

由系数公式(2-33),(2-28)得

$$\begin{cases} a_0=\frac{2}{l^2}\int_0^l \rho g_1(\rho)\mathrm{d}\rho=g_{10}, \\ a_0+b_0 h=\frac{2}{l^2}\int_0^l \rho g_2(\rho)\mathrm{d}\rho=g_{20}; \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} a_m=\frac{2}{l^2 J_0^2(\mu_m^{(1)})}\int_0^l \rho g_1(\rho)J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho=g_{1m}, \\ a_m\cosh\frac{\mu_m^{(1)}h}{l}+b_m\sinh\frac{\mu_m^{(1)}h}{l}=\frac{2}{l^2 J_0^2(\mu_m^{(1)})}\int_0^l \rho g_2(\rho)J_0\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho=g_{2m}, \end{cases}$$

解得系数值

$$a_0=g_{10},$$

$$b_0=\frac{1}{h}(g_{20}-a_0),$$

$$a_m=g_{1m},$$

$$b_m=\frac{1}{\sinh\frac{\mu_m^{(1)}h}{l}}\left(g_{2m}-a_m\cosh\frac{\mu_m^{(1)}h}{l}\right) \quad (m=1,2,\cdots).$$

2.4.2 混合问题

一般说来,由发展型方程的混合问题将导出高阶的贝塞尔方程.为简单起见,只讨论轴对称情形:解圆形膜的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\left(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho\right) \quad (\rho<l,t>0), & (2\text{-}46) \\ u(l,t)=0,\ |u(0,t)|<+\infty, & (2\text{-}47) \\ u(\rho,0)=f_1(\rho),u_t(\rho,0)=f_2(\rho). & (2\text{-}48) \end{cases}$$

令 $u=R(\rho)T(t)$,代入方程(2-46),得本征值问题

$$\begin{cases} \rho^2 R''+\rho R'+\lambda\rho^2 R=0, & (2\text{-}49) \\ |R(0)|<+\infty,R(l)=0 & (2\text{-}50) \end{cases}$$

与方程

$$T''+a^2\lambda T=0. \tag{2-51}$$

仿前可得本征值

$$\lambda_m=\left(\frac{\mu_m}{l}\right)^2 (m=1,2,\cdots),$$

其中 μ_m 是 $J_0(x)$ 的第 m 个正零点,相应的本征函数

$$R_m(\rho)=A_m J_0\left(\frac{\mu_m}{l}\rho\right).$$

将 λ_m 的值代入方程(2-51),得解

$$T_m(t)=C_m\cos\frac{a\mu_m t}{l}+D_m\sin\frac{a\mu_m t}{l}.$$

从而得基础解

$$u_m(\rho,t)=R_m(\rho)T_m(t),$$

叠加得级数形式的解

$$u(\rho,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{a\mu_m t}{l}+b_m\sin\frac{a\mu_m t}{l}\right)J_0\left(\frac{\mu_m}{l}\rho\right).$$

由初始条件(2-48)式确定 a_m,b_m:

$$\begin{cases} f_1(\rho)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_m J_0\left(\frac{\mu_m}{l}\rho\right), \\ f_2(\rho)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(b_m\frac{a\mu_m}{l}\right)J_0\left(\frac{\mu_m}{l}\rho\right). \end{cases}$$

由系数公式(2-38),(2-33)得

$$\begin{cases} a_m=\frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_m)}\int_0^l \rho f_1(\rho)J_0\left(\frac{\mu_m}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho, \\ b_m=\frac{2}{al\mu_m J_1^2(\mu_m)}\int_0^l \rho f_2(\rho)J_0\left(\frac{\mu_m}{l}\rho\right)\mathrm{d}\rho. \end{cases}$$

例 4 解热传导问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho \quad (0 < \rho < 1, t > 0), \\ u(1,t) = 0, \mid u(0,t) \mid < + \infty, \\ u(\rho,0) = 1 - \rho^2. \end{cases}$$

解　仿前面混合问题的求解得级数形式的解

$$u(\rho,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \exp(-\mu_m^2 t) J_0(\mu_m \rho),$$

其中 μ_m 为 $J_0(x)$ 的第 m 个正零点.

由初始条件,得

$$u(\rho,0) = 1 - \rho^2 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0(\mu_m \rho),$$

又由例 1 的计算得

$$c_m = \frac{4J_2(\mu_m)}{\mu_m^2 J_1^2(\mu_m)}.$$

于是得所求的解为

$$u(\rho,t) = 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_m)}{\mu_m^2 J_1^2(\mu_m)} \exp(-\mu_m^2 t) J_0(\mu_m \rho).$$

例 5　圆盘作径向振动,偏位移 $u(\rho,t)$ 满足

$$u_{tt} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho - \frac{4}{\rho^2}u_t,$$

试确定圆盘的半径 l,使得其中一个基础振动(简谐振动)的角频率为定值 ω(设圆盘的边界固定).

解　令 $u(\rho,t) = R(\rho)T(t)$,代入方程得

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda\rho^2 - 4)R = 0,$$
$$T'' + \lambda T = 0.$$

第一个方程是二阶贝塞尔方程,其有界解为

$$R(\rho) = AJ_2(\sqrt{\lambda}\rho).$$

由齐次边界条件 $R(l) = 0$ 得

$$\lambda_m = \left(\frac{\mu_m^{(2)}}{l}\right)^2 \quad (m = 1,2,\cdots),$$

其中 $\mu_m^{(2)}$ 为 $J_2(x)$ 的第 m 个正零点.

将 λ_m 的值代入第二个方程,得通解

$$T_m(t) = A_m \cos\left(\frac{\mu_m^{(2)}}{l}t - \theta_m\right).$$

可见振动角频率为$\frac{\mu_m^{(2)}}{l}$.令 $\omega = \frac{\mu_1^{(2)}}{l}$,得 $l = \frac{\mu_1^{(2)}}{\omega}$.其中 $\mu_1^{(2)}$ 为 $J_2(x)$ 的第一个正零点,$\mu_1^{(2)} = 5.136$,因此半径应取 $l = \frac{5.136}{\omega}$.

3　正交多项式

3.1　勒让德多项式

3.1.1　勒让德多项式的定义

勒让德多项式是下列勒让德(Legendre)方程

$$P''(\theta) + \cot\theta P'(\theta) + n(n+1)P(\theta) = 0 \tag{3-1}$$

或(令 $x = \cos\theta$ 且记 $y(x) \equiv P(\theta)$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$)

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0 \tag{3-2}$$

的多项式解.

勒让德方程来源于用分离变量法把球面坐标下的**拉普拉斯方程** $\Delta u = 0$ 分解为 3 个常微分方程,在轴对称情形下,其纬度方程就是勒让德方程(3-1)或(3-2).

可用级数解法求解方程(3-2),由富克斯(Fuchs)定理可知存在幂级数解,即可令解

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

将上式代入(3-2) 式,得系数间的递推关系

$$c_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}c_k. \tag{3-3}$$

因此方程(3-2) 的两个线性无关的升幂解为

$$y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots\right], \tag{3-4}$$

$$y_2(x) = c_2\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots\right]. \tag{3-5}$$

从而得到方程(3-2) 的通解

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

其中 A, B 为任意常数.

由系数间的关系式(3-3) 中的分子的组成结构可知,当且仅当 n 为正偶数(包括零)或负奇数时,$y_1(x)$ 为 n 次或$(-n-1)$次多项式,但 $y_2(x)$ 仍为无穷级数;当且仅当 n 为正奇数或负偶数时,$y_2(x)$ 为 n 次或$(-n-1)$次多项式,$y_1(x)$ 是无穷级数.

通常把勒让德方程(3-2) 的多项式形式的解叫做第一类**勒让德函数**(记作 $P_n(x)$). 它在闭区间$[-1,1]$上有界;而把级数形式的解叫做第二类勒让德函数(记为 $Q_n(x)$),它在闭区间$[-1,1]$上无界.

当 n 为偶数时，$\overline{P_n}(x)$ 是由(3-4)式得到的偶次幂多项式；当 n 为奇数时，是由(3-5)式得到的奇次幂多项式，为了用统一的式子表示，把它们按降幂排列，并把一切系数 c_k 都用 c_n 表示，这样取定 c_n 一个非零的值，就得到一个确定的第一类勒让德函数，在应用上，选取 c_n 为

$$c_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2},$$

然后由(3-3)式定出其他系数 $c_{n-2}, c_{n-4}, \cdots$，得到的 n 次多项式称为**勒让德多项式**，用 $\mathrm{P}_n(x)$ 表示：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n(x) &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right] \\ &= \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m},\end{aligned} \tag{3-6}$$

其中 $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}$（$n$ 为偶数）或者 $= \frac{n-1}{2}$（n 为奇数）.

特别地，前几个勒让德多项式是

$$\mathrm{P}_0(x) = 1,$$
$$\mathrm{P}_1(x) = x,$$
$$\mathrm{P}_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$
$$\mathrm{P}_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$\mathrm{P}_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$
$$\mathrm{P}_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$
$$\mathrm{P}_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

综上，n 次勒让德多项式是由以下 3 个条件确定的函数：

1° 是勒让德方程(3-2)的解；

2° 是 n 次多项式形式的解；

3° n 次幂 x^n 的系数 $c_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

符合以上 3 个条件的函数必定是 $\mathrm{P}_n(x)$.

3.1.2　勒让德多项式的性质

1. $\mathrm{P}_n(x)$ 的微分表达式与积分表达式

勒让德多项式 $\mathrm{P}_n(x)$ 可用函数 $v(x) = \frac{1}{2^n n!}(x^2 - 1)^n$ 的 n 阶导数来表示：

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2 - 1)^n]. \tag{3-7}$$

这公式称为罗德里格(Rodrigue)公式，它可以直接利用二项式定理将 $(x^2 - 1)^n$ 展开后再逐项微分 n 次得到.

根据复变函数中高阶导数的积分公式，微分表达式(3-7)可表示为复积分：

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{2\pi l}\frac{1}{2^n}\oint_C \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}}\mathrm{d}z, \tag{3-8}$$

其中 C 为 z 平面上围绕 $z = x$ 点的任意闭曲线，关系式(3-8)叫做薛拉夫利(Schlafli)积分.(3-8)式可进一步表示为定积分：

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}\right]^n \mathrm{d}\varphi.$$

回到原来变量 θ：$x = \cos\theta$，有

$$\mathrm{P}_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\cos\varphi)^n \mathrm{d}\varphi. \tag{3-9}$$

这积分叫做**拉普拉斯积分**. 由此即得

$$|\mathrm{P}_n(x)| \leqslant 1, \mathrm{P}_n(1) = 1 \text{ 及 } \mathrm{P}_n(-1) = (-1)^n.$$

2. 母函数及递推公式

勒让德多项式早先是由勒让德在势论中引进的. 它与两共点矢量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 间的距离 R 的倒数 $\frac{1}{R}$（牛顿势或库仑势）的展开有关.

$$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \quad (\theta = (\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'})).$$

令 $t = \frac{r'}{r}$，$x = \cos\theta$，则

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

只要 $|t| < \min(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$，就可以作泰勒展开：

$$G(x,t) \equiv (1 - 2xt + t^2)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n(x)t^n, \tag{3-10}$$

其中 $\mathrm{P}_n(x)$ 正好是 n 次勒让德多项式. 因此(3-10)式左方称为勒让德多项式的母函数.

特别，在(3-10)式中分别令 $x = 1, -1, 0$，即得

$$\mathrm{P}_n(1) = 1,$$
$$\mathrm{P}_n(-1) = (-1)^n;$$
$$\mathrm{P}_n(0) = 0 (n \text{ 为奇数}),$$
$$\mathrm{P}_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{(n-1)!!}{n!!} (n \text{ 为偶数}).$$

将(3-10)式两边对 t 求导，然后比较两边 t^n 的系数，即得递推公式($n \geqslant 1$)：

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x) = (2n+1)x\mathrm{P}_n(x) - n\mathrm{P}_{n-1}(x). \tag{3-11}$$

将(3-10)式两边对 x 求导，可得微商的递推公式($n \geqslant 1$)：

$$P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x). \tag{3-12}$$

并且由(3-11)式与(3-12)式,可得第3个递推公式($n \geqslant 1$):

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x).$$

3. 傅里叶-勒让德多项式级数

勒让德多项式的全体$\{P_n(x)\}$在区间$[-1,1]$上构成一个完备的带权1的**正交函数系**,即

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (k \neq n), \\ N_n^2 & (k = n), \end{cases} \tag{3-13}$$

或

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & (k \neq n), \\ N_n^2 & (k = n). \end{cases} \tag{3-14}$$

并且对满足一定条件的函数$f(x)$,可按这函数系展开为傅里叶-勒让德多项式级数,即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad (-1 < x < 1), \tag{3-15}$$

或

$$f(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\theta) \quad (0 < \theta < \pi). \tag{3-16}$$

其中系数

$$c_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x}. \tag{3-17}$$

(3-13)式与(3-14)式中的N_n是$P_n(x)$的模:

$$N_n^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}. \tag{3-18}$$

作为例子,将函数$f(x) = |x|$在$(-1,1)$内展为傅里叶-勒让德多项式级数.由于$f(x)=|x|$是偶函数,故它的展开式中的系数$c_{2k+1}=0$ $(k=0,1,2,\cdots)$.

按(3-17),(3-18)式计算系数:

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |x| \mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{4k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_{2k}(x)\mathrm{d}x = (4k+1)\int_0^1 xP_{2k}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!}\left\{x\frac{\mathrm{d}^{2k-1}}{\mathrm{d}x^{2k-1}}[(x^2-1)^{2k}] - \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}x^{2k-2}}[(x^2-1)^{2k}]\right\}\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!}\frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}x^{2k-2}}\left[\sum_{m=0}^{2k}\frac{(2k)!}{m!(2k-m)!}x^{2m}(-1)^{2k-m}\right]_{x=0} \\ &= (-1)^{k+1}\frac{(4k+1)(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}. \end{aligned}$$

因此所求的展开式为

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(4k+1)(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}P_k(x) \quad (-1 < x < 1).$$

3.1.3 连带勒让德函数

把拉普拉斯方程$\Delta u = 0$分解为3个常微分方程时,在一般情形下,纬度方程为连带勒让德方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P(\theta) = 0, \tag{3-19}$$

或(令$x=\cos\theta, y(x) = P(\arccos x)$)

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0. \tag{3-20}$$

为求解方程(3-20),对勒让德方程(3-2)微分m次,则导函数$w(x) \equiv P_n^{(m)}(x) = \frac{\mathrm{d}^m P_n(x)}{\mathrm{d}x^m}$满足方程

$$(1-x^2)w'' - 2x(m+1)w' + [n(n+1) - m(m+1)]w = 0.$$

作变换$v(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}w$,则上式化为连带勒让德方程(3-20),其中$y(x)$换成$v(x)$.这说明函数

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_n(x)}{\mathrm{d}x^m} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \tag{3-21}$$

是连带勒让德方程(3-20)的解,通常把这个函数$P_n^m(x)$称为**连带勒让德函数**.

前几个连带勒让德函数是(当$m > n$时,$P_n^m(x) \equiv 0$):

$$P_n^0(x) = P_n(x),$$
$$P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2},$$
$$P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$P_2^2(x) = 3(1-x^2),$$
$$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$P_3^2(x) = 15x(1-x^2),$$
$$P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{3/2}.$$

把$P_n(x)$的微分表达式代入(3-21)式得罗德里格公式:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}[(x^2-1)^n]. \tag{3-22}$$

如果把方程(3-20)中的m换成$-m$,方程并不改变,因此函数

$$P_n^{-m}(x) = (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}[(x^2-1)^n] \tag{3-23}$$

也是方程(3-20)的解,这函数也称为连带勒让德函数.

比较 $P_n^m(x)$ 和 $P_n^{-m}(x)$ 两函数最高次幂的系数，可得

$$P_n^m(x) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} P_n^{-m}(x). \tag{3-24}$$

对满足一定条件的函数 $f(x)$，可展为傅里叶-连带勒让德函数项级数，即（取固定 m）

$$f(x) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n P_n^m(x), \tag{3-25}$$

或

$$f(\cos\theta) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n P_n^m(\cos\theta), \tag{3-26}$$

其中系数

$$c_n = \frac{(2n+1)}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{1} f(x) P_n^m(x) dx, \tag{3-27}$$

或

$$c_n = \frac{(2n+1)}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{0}^{\pi} f(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta. \tag{3-28}$$

3.1.4 勒让德多项式的应用

(1) 求解球域内轴对称的第一边值问题

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, & (3\text{-}29) \\ u(r_0,\theta,\varphi) = g(\theta) \quad (r<r_0, 0\leqslant\theta\leqslant\pi). & (3\text{-}30) \end{cases}$$

因为区域是对称的球体，边界条件中的函数 $g(\theta)$ 只与 θ 有关，所以是轴对称：$u = u(r,\theta)$.

令 $u(r,\theta) = R(r)P(\theta)$，代入方程(3-29)，得（这时 $\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$）径向方程

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0 \tag{3-31}$$

与纬度方程

$$P'' + \cot\theta P' + n(n+1)P = 0. \tag{3-32}$$

方程(3-32)满足自然边界条件

$$|P(0)| < +\infty, \ |P(\pi)| < +\infty, \tag{3-33}$$

它们构成的本征值问题的解是：本征值为

$$\lambda_n = n(n+1) \quad (n = 0,1,2,\cdots), \tag{3-34}$$

对应的本征函数为

$$P_n = B_n P_n(\cos\theta), \tag{3-35}$$

其中 $P_n(x)$ 为 n 次勒让德多项式.

方程(3-31)是欧拉方程，其通解为

$$R = Ar^n + Br^{-(n+1)}. \tag{3-36}$$

因为是球内问题，在有界性条件 $|u(0,\theta)| < +\infty$ 下，要求 $R(0)$ 有界，所以 $B=0$，从而

$$R_n = A_n r^n, \tag{3-37}$$

因此基础解为

$$u_n(r,\theta) = a_n r^n P_n(\cos\theta). \tag{3-38}$$

将上式叠加得级数形式的解

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta). \tag{3-39}$$

把边界条件(3-30)式代入上式，得

$$u(r_0,\theta) = g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r_0^n) P_n(\cos\theta).$$

这说明 $a_n r_0^n$ 是 $g(\theta)$ 按 $\{P_n(\cos\theta)\}$ 展开的系数，根据公式(3-17)，(3-18)得

$$a_n = \frac{2n+1}{2r_0^n}\int_0^{\pi} g(\theta) P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta. \tag{3-40}$$

这样，由(3-39)式与(3-40)式就组成了边值问题(3-29)式与(3-30)式的级数形式的解：

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} g(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\right)\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad (r < r_0). \tag{3-41}$$

如果是讨论球体外部的边值问题，那么由有界性条件 $u \to 0 (r \to +\infty)$，可得方程(3-31)的解为

$$R_n = c_n r^{-(n+1)},$$

这时基础解为

$$u_n(r,\theta) = b_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta), \tag{3-42}$$

同样可得级数形式的解为

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} g(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\right)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \quad (r > r_0). \tag{3-43}$$

如果区域是由两个同心球面所围成的球套区域，那么方程(3-31)的通解为(3-36)式，这时有两个不同形式的基础解(3-38)式与(3-42)式，叠加后得级数形式的解

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos\theta). \tag{3-44}$$

再由内外边界条件

$$u(r,\theta) = g_1(\theta), u(r_2,\theta) = g_2(\theta)$$

可确定出系数 a_n, b_n.

例 1 在均匀静电场 E 中，放入均匀介质球（设半径为 1，介电常数为 ε），试求介质球内外的电场强度.

解 采用球面坐标，取球心在原点，$\bar{E}$ 方向为 Oz 轴正向，于是给定问题是轴对

称问题.

在球内,电势 u_i 满足拉普拉斯方程

$$\Delta u_i = 0 \quad (r<1),$$

并且在球面上满足连续性条件

$$u_i|_{r=1} = u_0|_{r=1}, \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial u_i}{\partial r}\bigg|_{r=1} = \varepsilon_0\frac{\partial u_0}{\partial r}\bigg|_{r=1},$$

其中 ε_0 为介电系数比.按前面的分析,可得

$$u_i(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \mathrm{P}_n(\cos\theta).$$

在球外,电势 u_0 满足拉普拉斯方程

$$\Delta u_0 = 0 \quad (r>1),$$

且在无穷远处,电势的大小应保持均匀值,即由 $\bar{E} = -\mathbf{grad}\,u_0 = \left(0,0,-\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)$ 或 $\frac{\partial u_0}{\partial z} = -E$ 得在无穷远处的条件

$$u_0|_{r\to+\infty} \sim -Ez = -Er\cos\theta.$$

按前面的说明,可得

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n r^n + c_n r^{-(n+1)})\mathrm{P}_n(\cos\theta).$$

由无穷远处条件,得渐近式

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n \mathrm{P}_n(\cos\theta) \sim -Er\cos\theta,$$

从而得 $b_1 = -E, b_2 = b_3 = \cdots = 0$.因此外电势 u_0 可表示为

$$u_0 = b_0 - Er\mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{-(n+1)}\mathrm{P}_n(\cos\theta).$$

再由连续性条件,得

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\mathrm{P}_n(\cos\theta) \equiv b_0 - E\mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\mathrm{P}_n(\cos\theta),\\ \varepsilon\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n\mathrm{P}_n(\cos\theta) \equiv -E\mathrm{P}_1(\cos\theta) - \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n\mathrm{P}_n(\cos\theta).\end{cases}$$

比较恒等式两边 $\mathrm{P}_n(\cos\theta)$ 的系数,得

$$\begin{cases}a_0 = b_0 + c_0,\\ c_0 = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1 = -E + c_1,\\ \varepsilon a_1 = -E - 2c_1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_n = c_n,\\ \varepsilon n a_n = -(n+1)c_n \quad (n\geqslant 2).\end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases}a_0 = b_0,\\ c_0 = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1 = -\dfrac{3}{\varepsilon+2}E,\\ c_2 = \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}E.\end{cases}$$

因此内外电势分别为

$$\begin{cases}u_i = b_0 - \dfrac{3}{\varepsilon+2}Er\cos\theta = b_0 - \dfrac{3}{\varepsilon+2}Ez,\\ u_0 = b_0 - Er\cos\theta + \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}E\,\dfrac{1}{r^2}\cos\theta.\end{cases}$$

从而介质球内场强(方向为 Oz 轴正向)的大小为

$$E_i = -\frac{\partial u_i}{\partial z} = \frac{3}{\varepsilon+2}E_0,$$

它仍是一个均匀电场,且按比率 $\frac{3}{\varepsilon+2}$ 削弱了.介质球外部的强度大小为

$$E_0 = -\frac{\partial u_0}{\partial z} = E - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\,\frac{E}{r^3}.$$

(2) 求解球域内边值问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0 \quad (r<r_0, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi<2\pi), & (3\text{-}45)\\ u(r_0,\theta,\varphi) = g(\theta,\varphi) & (3\text{-}46)\end{cases}$$

的基础解.

令 $u(r,\theta,\varphi) = R(r)P(\theta)\Phi(\varphi)$,代入方程(3-45),并注意到自然边界条件.则经度本征值问题为

$$\begin{cases}\Phi'' + \mu\Phi = 0,\\ \Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi).\end{cases}$$

解得本征值 $\mu_m = m^2(m=0,1,2,\cdots)$,对应的本征函数为

$$\Phi_m(\varphi) = \begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}.$$

纬度本征值问题为

$$\begin{cases}P'' + \cot\theta P' + \left[n(n+1) - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P = 0,\\ |P(0)| < +\infty, |P(\pi)| < +\infty.\end{cases}$$

解得本征值 $\lambda_n = n(n+1)$ $(n=0,1,2,\cdots)$,对应的本征函数为

$$\mathrm{P}_{n,m}(\theta) = \mathrm{P}_n^m(\cos\theta),$$

其中 $\mathrm{P}_n^m(x)$ 为连带勒让德函数.

径向方程

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$$

的有界解($|R(0)| < +\infty$)为 $R_n(r) = r^n$,因此所求基础解为

$$u_{n,m}(r,\theta,\varphi)=r^n\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix},$$

其中 $m=0,1,2,\cdots,n$; $n=0,1,2,\cdots$.

上式中的函数是球体内的调和函数,因此把它称为 n 阶球谐函数.

同样,可求得球体外的边值问题的基础解为 n 阶球谐函数,即

$$u_{n,m}(r,\theta,\varphi)=r^{-(n+1)}\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix},$$

其中 $m=0,1,2,\cdots,n$; $n=0,1,2,\cdots$.

3.2 埃尔米特多项式

3.2.1 埃尔米特多项式的定义

埃尔米特多项式是下列埃尔米特(Hermite)方程的多项式形式的解,即

$$y''-2xy'+2ny=0, \tag{3-47}$$

其中 n 为给定实数.

用幂级数解法解这个方程.设

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k,$$

并代入方程(3-47),得系数间的递推关系式

$$c_{k+2}=\frac{2(k-n)}{(k+2)(k+1)}c_k. \tag{3-48}$$

当 $k=2l-2$ 时,c_{2l}均可用 c_0 表示:

$$c_{2l}=\frac{2^l(2l-2-n)(2l-4-n)\cdots(2-n)(-n)}{(2l)!}c_0, \tag{3-49}$$

当 $k=2l-1$ 时,c_{2l+1}均可用 c_1 表示:

$$c_{2l+1}=\frac{2^l(2l-1-n)(2l-3-n)\cdots(3-n)(1-n)}{(2l+1)!}c_1. \tag{3-50}$$

于是得方程(3-47)级数形式的解

$$y=c_0\left[1-nx^2+\frac{n(n-2)}{6}x^4-\cdots\right]+c_1\left[x-\frac{n-1}{3}x^3+\frac{(n-1)(n-3)}{30}x^5-\cdots\right].$$

上式中两级数的收敛半径均为 $+\infty$,其和函数分别记为 $y_1(x)$和 $y_2(x)$:

$$y_1(x)=1-nx^2+\frac{n(n-2)}{6}x^4-\cdots+(-2)^l\frac{n(n-2)\cdots(n-2l-2)}{(2l)!}x^{2l}+\cdots, \tag{3-51}$$

$$y_2(x)=x-\frac{n-1}{3}x^3+\cdots+(-2)^l\frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2l-1)}{(2l+1)!}x^{2l+1}+\cdots \tag{3-52}$$

于是方程(3-47)的通解为

$$y=Ay_1(x)+By_2(x),$$

其中 A,B 为任意常数.

由(3-51)式与(3-52)式可知,当且仅当 n 为偶数时(包括零),$y_1(x)$为 n 次多项式(这时 $y_2(x)$仍为级数);当且仅当 n 为奇数时,$y_2(x)$为 n 次多项式(这时 $y_1(x)$仍为级数),因此要求方程(3-49)具有多项式的解(实际问题提出这个条件),那么方程(3-47)中的参数 n 应取非负整数,这时方程的解为

$$y=c\mathrm{H}_n(x),$$

其中 c 为任意常数,$\mathrm{H}_n(x)$为如下的 n 次多项式:

当 $n=0,2,4,\cdots,2m$ 时,

$$\mathrm{H}_n(x)=c_0\left[1-nx^2+\frac{n(n-2)}{6}x^4-\cdots+\frac{c_{2m}x^{2m}}{c_0}\right], \tag{3-53}$$

当 $n=1,3,5,\cdots,2m+1$ 时,

$$\mathrm{H}_n(x)=c_1\left[x-\frac{n-1}{3}x^3+\frac{(n-1)(n-3)}{30}x^5-\cdots+\frac{c_{2m+1}}{c_1}x^{2m+1}\right], \tag{3-54}$$

其中系数 c_{2m},c_{2m+1}分别由(3-49)式,(3-50)式确定.

为把(3-53)式与(3-54)式用统一式子表示,把系数递推公式改写为

$$c_k=-\frac{(k+2)(k+1)}{2(n-k)}c_{k+2},$$

这时所有的系数 $c_k(k<n)$都可用 c_n 表示为

$$c_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{2\cdot2}c_n,$$

$$c_{n-4}=(-1)^2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot2\cdot4}c_n,$$

$$c_{n-6}=(-1)^3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3\cdot2\cdot4\cdot6}.$$

因此,如果 n 为非负整数,则取定 c_n 的一个值,就得到一个 n 次多项式 $\widetilde{H}_n(x)$.当 $n=0,2,4,\cdots,2l$ 时,

$$\widetilde{H}_n=c_n\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2\cdot2}x^{n-2}+\cdots+\frac{c_0}{c_n}\right],$$

当 $n=1,3,\cdots,2l+1$ 时,

$$\widetilde{H}_n=c_n\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2\cdot2}x^{n-2}+\cdots+\frac{c_1}{c_n}\right].$$

在应用上,取 $c_n=2^n$,这时系数的一般表达式为

$$c_{n-2m}=(-1)^m\frac{n!}{m!\ (n-2m)!}2^{n-2m},$$

从而得到相应的多项式的表达式(记为 $\mathrm{H}_n(x)$):

$$\mathrm{H}_n(x)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\frac{n!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}. \tag{3-55}$$

由(3-55)式定义的多项式 $\mathrm{H}_n(x)$称为 n 次**埃尔米特多项式**.它是满足下列3个条件的函数:

1° 是方程(3-47)当 n 为非负整数时的解；
2° 是 n 次多项式形式的解；
3° n 次幂 x^n 的系数 $c_n=2^n$.
前几个 $H_n(x)$ 的具体表达式是

$$H_0(x)=1,$$
$$H_1(x)=2x,$$
$$H_2(x)=4x^2-2,$$
$$H_3(x)=8x^3-12x,$$
$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12,$$
$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x.$$

3.2.2 埃尔米特多项式的性质

1. 微分表达式

埃尔米特多项式的微分表达式为

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}). \tag{3-56}$$

事实上，函数 $v(x)=e^{-x^2}$ 是方程

$$v'+2xv=0$$

的解，将上式再求 $(n+1)$ 阶导数，并记 $y(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^nv}{dx^n}$，则 $y(x)$ 满足埃尔米特方程(3-47)，又(3-56)式的右边显然是一个 n 次多项式，且 x^n 的系数 $c_n=(-1)^n(-2)^n=2^n$，因此它是 n 次埃尔米特多项式 $H_n(x)$.

2. 正交性与模

埃尔米特多项式 $\{H_n(x)\}$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上带权 $\rho(x)=e^{-x^2}$ 正交的函数系，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx = \begin{cases}0 & (m\neq n),\\ N_n^2 & (m=n).\end{cases} \tag{3-57}$$

事实上，当 $m\neq n$(不妨设 $m<n$)时，由微分表达式(3-56)有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})H_m(x)dx\\ &= (-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})dx,\end{aligned}$$

上式右边进行 m 次分部积分，得积分值为 0.

当 $m=n$ 时，可得 $H_n(x)$ 的模为

$$\begin{aligned}N_n &= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n^2(x)dx}\\ &= \sqrt{(-1)^{2n}\cdot 2^n\cdot n!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx} = \sqrt{2^n\cdot n!\cdot\sqrt{\pi}}.\end{aligned} \tag{3-58}$$

3.2.3 埃尔米特多项式的应用

1. 薛定谔方程

在 20 世纪 30 年代，物理学家们根据实验得到微观粒子(光子、电子等)的波粒二象性，建立了非相对论量子力学的基本方程——薛定谔(Schrödinger)方程：

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi + \bar{U}\Psi, \tag{3-59}$$

这里 $i=\sqrt{-1}$ 是虚数单位，$\hbar=\frac{h}{2\pi}=1.0545\times10^{-24}$J·S 是修正的普朗克(Planck)常数，$\mu$ 是粒子的质量. 已知函数 $\bar{U}$ 为粒子在力场中的势能函数，未知函数 $\Psi=\Psi(x,y,z,t)$ 叫做波函数，其物理意义：$|\Psi|^2$ 是在时间 t 在 (x,y,z) 处粒子的概率密度函数.

如果势函数 $\bar{U}$ 与时间 t 无关，则可令

$$\Psi=\phi(x,y,z)\cdot f(t),$$

使得方程(3-59)简化为分离变量的等价方程

$$\frac{i\hbar}{f}f' = \frac{1}{\Psi}\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi + U\Psi\right),$$

记上式等于常数 E(粒子的质量)，从而得到时间方程与空间方程：

$$i\hbar f' - Ef = 0 \tag{3-60}$$

与

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi + \bar{U}(x,y,z)\Psi - E\Psi = 0. \tag{3-61}$$

方程(3-60)的解为

$$f(t)=c\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right),$$

于是方程(3-59)的解呈以下形式

$$\Psi = \Psi(x,y,z)\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right), \tag{3-62}$$

其中 $\Psi(x,y,z)$ 叫做定态波函数. 方程(3-61)叫做定态的薛定谔方程，引入哈密顿(Hamilton)算符 $\widehat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta+\bar{U}$，则方程(3-61)化为 $\widehat{E}\Psi=E\Psi$. 根据密度函数的性质，$|\Psi|^2$ 在全空间的积分值为 1：

$$\iiint |\Psi|^2 dV = 1, \tag{3-63}$$

因为 $|\Psi|^2=\left|\Psi\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right)\right|^2=\Psi^2$，所以(3-63)式化为

$$\iiint \Psi^2 dV = 1. \tag{3-64}$$

等式(3-63)与(3-64)在量子力学中叫做**归一化条件**.

由于在无穷远处粒子出现的概率为零，因此波函数还有如下性质：

$$\Psi(P) \to 0 \quad (\text{点 } P \to \infty). \tag{3-65}$$

2. 线性谐振子

线性谐振子是指如下的运动体系：势能为$\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$($\omega$ 是常数)的粒子运动. 这时体系的薛定谔方程为

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left(E - \frac{\mu\omega^2}{2}x^2\right)\Psi = 0. \tag{3-66}$$

引入新变量与记号：$\xi = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}x = \alpha x$, $\alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$ 及 $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$，则方程(3-66)化为

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\Psi = 0, \tag{3-67}$$

再引入新函数：$y(\xi) = \exp\left(\frac{\xi^2}{2}\right)\Psi(\xi)$，则方程(3-67)化为如下的埃尔米特方程

$$y'' - 2\xi y' + (\lambda - 1)y = 0. \tag{3-68}$$

这时 $2n = \lambda - 1$. 由目前的交换得波函数

$$\Psi(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)y(\xi).$$

根据(3-65)式知 $y(\xi)$ 应满足条件

$$\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)y(\xi) \to 0 \quad (\xi \to \pm\infty). \tag{3-69}$$

把 $\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$ 展为幂级数

$$\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) = 1 - \frac{\xi^2}{2} + \cdots + (-1)^k\frac{\varepsilon^{2k}}{2^k \cdot k!} + \cdots.$$

要满足条件(3-69)，$y(\xi)$不能为无穷级数，而应取为多项式，即应求解本征值问题：

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + (\lambda - 1)y = 0, \\ y(x) \text{ 为多项式}(-\infty < x < +\infty). \end{cases} \tag{3-70}$$

问题(3-70)的解为：本征值 $\lambda - 1 = 2n$，即 $\lambda_n = 2n + 1 (n = 0, 1, \cdots)$，相应的本值函数为 $y_n(\xi) = \mathrm{H}_n(\xi)$，回到原变量与记号，得波函数

$$\Psi(x) = A_n\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}x\right)\mathrm{H}_n(\alpha x),$$

其中待定系数 A_n 由归一化条件(3-64)确定：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x)|^2dx = A_n^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2x^2}\mathrm{H}_n^2(\alpha x)dx$$
$$= \frac{A_n^2}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}\mathrm{H}_n^2(\xi)d\xi = 1.$$

据 $\mathrm{H}_n(\xi)$模的公式(3-58)，有$\frac{A_n^2}{\alpha}\cdot 2^n \cdot n!\sqrt{\pi} = 1$，即 $A_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n \cdot n!\sqrt{\pi}}}$, $\alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$，从

而所求波函数为

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n \cdot n!\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}x^2\right)\mathrm{H}_n(\alpha x), \tag{3-71}$$

其中 H_n 为 n 次埃尔米特多项式.

另一方面，由(3-70)式的本征值得

$$2n + 1 = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

从而得到线性谐振子的能级为

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, \cdots),$$

这说明该体系的能级是离散分布的，两相邻能级之差都是 $E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$，这些结论与普朗克假设完全一致.

4　超几何函数与合流超几何函数

4.1　超几何级数与超几何函数

4.1.1　超几何级数与超几何函数的定义

超几何级数是下面超几何微分方程的级数解，即

$$z(1 - z)w'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]w' - \alpha\beta w = 0, \tag{4-1}$$

其中 z 是复变数，α、β、γ 是复常数.

方程(4-1)具有 3 个正则奇点 $0, 1, \infty$. 用级数解法，设

$$w(z) = \sum c_k z^{k+p} \quad (c_0 \neq 0),$$

得在奇点 $z = 0$ 处的两个指标，即 0 和 $1 - \gamma$；此外系数之间的递推关系

$$c_k = \frac{(p + k - 1 + \alpha)(p + k - 1 + \beta)}{(p + k)(p + k - 1 + \gamma)}c_{k-1}. \tag{4-2}$$

设 $\gamma \neq$ 零或负整数，由此得指标为 0 的解

$$w_1 = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\ \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n + \cdots \tag{4-3}$$

这级数的收敛半径是 1，而在$|z| < 1$ 的圆内代表一个解析函数. 级数(4-3)称为超几何级数，常用下面的符号表达：

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n \quad (|z| < 1), \tag{4-4}$$

其中引用简写记号

$$(\lambda)_0=1,$$

$$(\lambda)_n=\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}\quad(n\geqslant 1).$$

当 $\gamma\neq$ 整数时,在 $z=0$ 处(指标是 $1-\gamma$)的第二个线性无关解也可以用超几何级数表达:

$$w_2=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z).\tag{4-5}$$

根据微分方程的理论,只有方程的奇点才可能是解的奇点,因此级数(4-3)在单位圆 $|z|<1$ 内所表示的函数可以解析开拓到全 z 平面(除去奇点 $z=1$ 和 $z=\infty$ 两点).这样开拓的函数称为**超几何函数**,仍用 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 表达.除非 α 或者 β 是负整数,$z=1$ 和 $z=\infty$ 这两点一般是超几何函数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 的分支点;而在 α(或 β)是负整数时,级数(4-3)是一个多项式,因此 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 是沿实轴从1到 ∞ 割开的 z 平面上的一个单值解析函数;而级数(4-3)是这函数的一个单值支(当 $z=0$ 时函数值为1的那个分支)在 $|z|<1$ 时的幂级数表示.

许多初等函数可以用超几何函数表达,例如:

$$(1+z)^{\alpha}=F(-\alpha,\beta,\beta,-z),$$

$$\arcsin z=zF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},z^2\right),$$

$$\arctan z=zF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-z^2\right),$$

$$\ln(1+z)=zF(1,1,2,-z).$$

4.1.2 超几何函数的性质

1. 基本关系式

由定义有下列基本关系式

$$F(\alpha,\beta,\gamma,0)=1,$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=F(\beta,\alpha,\gamma,z).$$

2. 积分表达式

超几何函数的积分表达式有两种,一种是从超几何方程的积分解得到的;另一种积分表示则是从级数解导出的.

如果 $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\beta)>0$,则超几何方程的一个积分解是

$$w(z)=A\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\mathrm{d}t,\tag{4-6}$$

其中 A 是任意常数.把 $(1-zt)^{-\alpha}$ 展开为一致收敛级数

$$(1-zt)^{-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}(-zt)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}z^nt^n,$$

并代入(4-6)式,得

$$w(z)=A\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,z).$$

由此得到超几何函数的积分表达式

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\mathrm{d}t,\tag{4-7}$$

其中 $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\beta)>0$, $|\arg(1-z)|<\pi$.由此知,$z=1$ 和 ∞ 一般是 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 的分支点.

由超几何方程的级数解可导出超几何函数的巴恩斯(Bernes)积分表达式:

$$\Gamma(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s\mathrm{d}s,\tag{4-8}$$

其中 $|\arg(-z)|<\pi$, $\beta\neq 0,-1,-2,\cdots$,积分路线须使 $\Gamma(-s)$ 的极点在其右,$\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)$ 的极点在其左(巴恩斯围道)

3. $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ 之值

超几何函数在 $z=1$ 时的值可以从它的积分表达式(4-7)得到,即

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta,\gamma,1)&=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\\&(\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0,\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\beta)>0).\end{aligned}\tag{4-9}$$

4. 邻次函数之间的关系

设 l,m,n 是任意整数,则称函数

$$F(\alpha+l,\beta+m,\gamma+n,z)$$

为 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 的**邻次函数**.在任意3个邻次函数 F_1,F_2,F_3 之间存在如下的关系:

$$A_1F_1+A_2F_2+A_3F_3=0,\tag{4-10}$$

其中 A_1,A_2,A_3 是 z 的有理函数.这一定理可以利用超几何级数的积分表示来证明.

5. 递推关系

用几何函数的积分表示可以导出下列两个递推关系:

$$(\gamma-1)F(\gamma-1)-\alpha F(\alpha+1)-(\gamma-\alpha-1)F=0,\tag{4-11}$$

$$\gamma F-\beta zF(\beta+1,\gamma+1)-\gamma F(\alpha-1)=0,\tag{4-12}$$

其中 F 代表 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$;$F(\alpha\pm 1)$,$\cdots$代表 $F(\alpha,\beta,z)$ 的紧邻:

$$F(\alpha\pm1)=F(\alpha\pm1,\beta,\gamma,z),$$

$$F(\beta\pm1)=F(\alpha,\beta\pm1,\gamma,z),$$

$$F(\gamma\pm1)=F(\alpha,\beta,\gamma\pm1,z),$$

$$F(\beta+1,\gamma+1)=F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,z),$$

$$\vdots$$

利用基本递推关系式(4-11),(4-12)可导出所有的其他递推关系.例如,把(4-11)式中的 α 和 β 对调后再与(4-11)式相减得

$$\alpha F(\alpha+1)-\beta F(\beta+1)-(\alpha-\beta)F=0.\tag{4-13}$$

另外一种重要的递推关系是

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+n,z),\tag{4-14}$$

这可由 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$的级数逐项求微商得到.

4.2 雅可比多项式

4.2.1 雅可比多项式的定义

超几何函数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$当 α 或β 等于负整数 $-n$ 时是一个 n 次多项式,称为 n 次**雅可比(Jacobi)多项式**:

$$F(-n,\beta,\gamma,z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(\beta)_k}{k!(\gamma)_k}z^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k}z^k. \tag{4-15}$$

许多重要的正交多项式,如勒让德多项式、切比雪夫多项式等都是雅可比多项式的特殊情况.

4.2.2 雅可比多项式的性质

1. 求和公式

在(4-15)式中令 $z=1$,并用(4-9)式,即得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k} = F(-n,\beta,\gamma,1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\gamma-\beta)} = \frac{(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n}. \tag{4-16}$$

2. 积分表达式

由于超几何方程对 α 和β 是对称的,在(4-6)式中把 α 和β 对调一下,仍得一个积分解式

$$w(z) = \int_C t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}dt. \tag{4-17}$$

令 $\alpha=-n$,取 C 为正向绕$t=0$点一周的围道,$t=1$ 和 $t=\frac{1}{z}$在 C 外,则只要$|z|$足够小,使在 C 上$|zt|<1$,有

$$(1-zt)^{-\beta} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\beta}{k}(-zt)^k,$$

并代入(4-17)式的右边,可得

$$\int^{(0+)} t^{-n-1}(1-t)^{\gamma+n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\beta}{k}(-zt)^k dt = \frac{(-1)^n\Gamma(\gamma+n)2\pi i}{n!\Gamma(\gamma)}F(-n,\beta,\gamma,z),$$

从而得积分表达式

$$F(-n,\beta,\gamma,z) = \frac{(-1)^n\Gamma(\gamma)n!}{\Gamma(\gamma+n)2\pi i}\int^{(0+)} t^{-n-1}(1-t)^{\gamma+n-1}(1-zt)^{-\beta}dt, \tag{4-18}$$

$t=1$ 和 $t=\frac{1}{z}$在围道之外,$|\arg(1-t)|<\pi$;当 $z=0$ 时,$(1-zt)^{-\beta}=1$;$\gamma\neq 0,-1,-2,\cdots,-n+1$.

3. 母函数

在(4-18)式中令 $t=\frac{v}{(v-1)}$,得

$$(\gamma)_n F(-n,\beta,\gamma,z) = \frac{n!}{2\pi i}\int^{(0+)}\frac{(1-v)^{\beta-1}[1-(1-z)v]^{-\beta}}{v^{n+1}}dv, \tag{4-19}$$

因此有

$$(1-v)^{\beta-1}[1-(1-z)v]^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{n!}(\gamma)_n F(-n,\beta,\gamma,z). \tag{4-20}$$

上式左边的函数是雅可比多项式的母函数.

4. 微商表达式

在(4-19)式中把 v 换成$\frac{v-z}{v(1-z)}$,得

$$(\gamma)_n F(-n,\beta,\gamma,z) = z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma+n-\beta}\frac{n!}{2\pi i}\int^{(0+)}\frac{(1-v)^{\beta-\gamma}v^{\gamma+n-1}}{(v-z)^{n+1}}dv,$$

由此得雅可比多项式的微商表达式:

$$F(-n,\beta,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma+n-\beta}\frac{d^n}{dz^n}[z^{\gamma+n-1}(1-z)^{\beta-\gamma}]. \tag{4-21}$$

5. 正交性

把 β 写作$p+n$ 或 $p+m$,记雅可比多项式 $w_n=F(-n,p+n,\gamma,z)$,$w_m=F(-m,p+m,\gamma,z)$,利用(4-21)式直接计算可证明雅可比多项式具有正交性

$$\int_0^1 w_n w_m z^{\gamma-1}(1-z)^{p-\gamma}dz = \begin{cases}0 & (m\neq n), \\ \dfrac{(p+n)_n}{(\gamma)_n}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(p+n-\gamma+1)n!}{\Gamma(p+2n+1)} & (m=n).\end{cases} \tag{4-22}$$

根据正交多项式的理论,雅可比多项式 $F(-n,p+n,\gamma,z)(n=0,1,2,\cdots)$在区间$[0,1]$上构成一完备正交函数系,权为 $z^{\gamma-1}(1-z)^{p-\gamma}(\mathrm{Re}(\gamma)>0,\mathrm{Re}(p-\gamma+1)>0)$;任何一个在$[0,1]$中平方可积的函数 $f(x)$可以在平均近似的意义下用 $F(-n,p+n,\gamma,z)$展成级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n F(-n,p+n,\gamma,z), \tag{4-23}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{N_n}\int_0^1 f(z)F(-n,p+n,\gamma,z)\cdot z^{\gamma-1}(1-z)^{p-\gamma}dz, \tag{4-24}$$

而模

$$N_n = \int_0^1 w_n^2 z^{\gamma-1}(1-z)^{p-\gamma}dz.$$

雅可比多项式另外常用的一种定义是

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\binom{n+\gamma-1}{n}\mathrm{F}(-n,p+n,\gamma,z),$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$是一个完备的正交函数系,区间为$[-1,1]$,权为$(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}$.

4.3 切比雪夫多项式

4.3.1 切比雪夫多项式的定义

切比雪夫(Chebyshev)多项式 $\mathrm{T}_n(x)$(第一类)的定义是

$$\mathrm{T}_n(x)=\cos(n\arccos x). \tag{4-25}$$

显然 $\mathrm{T}_0(x)=1$,当 $n=1,2,\cdots$时,可以证明 $\mathrm{T}_n(x)$有更明显的表达式

$$\mathrm{T}_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^l(n-l-1)!}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l}. \tag{4-26}$$

注意其中 x^n 的系数是 2^{n-1}.前几个 $\mathrm{T}_n(x)$的表达式是

$$\mathrm{T}_1(x)=x,$$
$$\mathrm{T}_2(x)=2x^2-1,$$
$$\mathrm{T}_3(x)=4x^3-3x,$$
$$\mathrm{T}_4(x)=8x^4-8x^2+1,$$
$$\mathrm{T}_5(x)=16x^5-20x^3+5x.$$

令 $x=\cos\theta$,则 $y=\mathrm{T}_n(x)=\cos n\theta$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y=0.$$

回到变量 x,得 $\mathrm{T}_n(x)$满足切比雪夫微分方程

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0. \tag{4-27}$$

令 $z=\frac{(1-x)}{2}$,则(4-27)式化为超几何方程

$$z(1-z)y''+\left(\frac{1}{2}-z\right)y'+n^2y=0. \tag{4-28}$$

令参数 $\alpha=-n,\beta=n,\gamma=\frac{1}{2}$,由(4-4),(4-5)式得方程(4-28)的两个线性无关解:$\mathrm{F}(-n,n,\frac{1}{2},z)$和 $z^{1/2}\mathrm{F}(-n+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},\frac{3}{2},z)$,后者不是多项式,故必有

$$\mathrm{T}_n(x)=A\mathrm{F}\left(-n,n,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right).$$

令 $x=1$,得 $\mathrm{T}_n(1)=\cos n\theta|_{\theta=0}=1=A$,故

$$\mathrm{T}_n(x)=\mathrm{F}\left(-n,n,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right). \tag{4-29}$$

由此可见,切比雪夫多项式是雅可比多项式当 $\beta=n,\gamma=\frac{1}{2},z=\frac{(1-x)}{2}$时的特例.

4.3.2 切比雪夫多项式的性质

1. 微商表达式

由(4-29)式及(4-21)式得

$$\mathrm{T}_n(x)=(-1)^n\frac{2^nn!}{(2n)!}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}. \tag{4-30}$$

2. 正交性和归一因子

由(4-22)式得

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{T}_n(x)\mathrm{T}_m(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & (n\neq m),\\ \frac{\pi}{2} & (n=m>0),\\ \pi & (n=m=0).\end{cases} \tag{4-31}$$

3. 母函数

利用当 $x=\cos\theta$ 时 $\mathrm{T}_n(x)=\cos n\theta$,有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{T}_n(x)t^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\theta\cdot t^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[(te^{\mathrm{i}\theta})^n+(te^{-\mathrm{i}\theta})^n]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-te^{\mathrm{i}\theta}}+\frac{1}{1-te^{-\mathrm{i}\theta}}\right]\\&=\frac{1-t\cos\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}=\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}\quad(|t|<1).\end{aligned} \tag{4-32}$$

称函数$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}$为 $\mathrm{T}_n(x)$的母函数.

4. 递推关系

当 $x\leqslant1$ 时,由 $\mathrm{T}_n(x)=\cos n\theta$ 很容易推出下列递推关系

$$\mathrm{T}_{n+1}(x)-2x\mathrm{T}_n(x)+\mathrm{T}_{n-1}(x)=0, \tag{4-33}$$

$$(1-x^2)\mathrm{T}'_n(x)=\frac{n}{2}[\mathrm{T}_{n-1}(x)-\mathrm{T}_{n+1}(x)]=n[\mathrm{T}_{n-1}(x)-x\mathrm{T}_n(x)]. \tag{4-34}$$

因 $\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta$,而以上两式是代数恒等式,故对任意 x 值都成立.

4.4 合流超几何函数

4.4.1 合流超几何函数的定义

在超几何方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\alpha\beta y=0$$

中,把 z 换成$\frac{z}{b}$,然后除以 b,得

$$z\left(1-\frac{z}{b}\right)\frac{d^2y}{dz^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)\frac{z}{b}\right]\frac{dy}{dz}-\alpha\frac{\beta}{b}y=0,$$

这方程的奇点是 $0,b,\infty$，且都是**正则奇点**．现令 $b=\beta\to\infty$，得

$$z\frac{d^2y}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{dy}{dz}-\alpha y=0, \tag{4-35}$$

这新方程只有两个奇点，即 0 和 ∞；前者仍是正则奇点，后者是原来两正则奇点 b $(=\beta)$ 和 ∞ 的合流，从而成为**非正则奇点**．方程(4-35)称为合流超几何方程，或库默尔(Kummer)方程．

方程(4-35)在正则奇点 $z=0$ 处的**指标方程**是

$$\rho(\rho-1)+\gamma\rho=0,$$

其根为 $\rho=0$ 和 $1-\gamma$，当 $1-\gamma\neq$ 整数时，用级数解法得方程(4-35)的两个线性无关解

$$y_1=F(\alpha,\gamma,z),\quad y_2=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma,z),$$

其中

$$F(\alpha,\gamma,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}z^n\quad(\gamma\neq 0,-1,-2,\cdots) \tag{4-36}$$

称为**合流超几何函数**，又称为库默尔函数．$F(\alpha,\gamma,z)$ 常写为 $F_1(\alpha;\gamma;z)$．

显然合流超几何函数 $F(\alpha,\gamma,z)$，在形式上可以通过把超几何函数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 中的 z 换成 $\frac{z}{\beta}$，然后令 $\beta\to\infty$ 而得到．利用这一形式的极限过程，可以从有关超几何函数的许多公式导出相应的合流超几何函数公式．

4.4.2 合流超几何函数的性质

1. 合流超几何函数是单值解析函数

无论是从微分方程的理论还是从级数表达式(4-36)本身都容易得知 $F(\alpha,\gamma,z)$ 是全 z 平面上的单值解析函数．对于固定的 z 和 $\gamma(\gamma\neq 0,-1,\cdots)$，$F(\alpha,\gamma,z)$ 也是 α 的整函数．除去 γ 为零或负整数，$F(\alpha,\gamma,z)$ 也是 γ 的解析函数．至于 $\gamma=-m$ $(m=0,1,\cdots)$ 则是一阶极点，因为(4-36)式可写为

$$F(\alpha,\gamma,z)=1+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(\gamma+n)}z^n, \tag{4-37}$$

$\gamma=-m$ 是 $\Gamma(\gamma)$ 的一阶极点，除去因子 $\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}$，级数在 $\gamma=-m$ 时等于 $\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(n-m)}z^n$，而这级数是收敛的．综上，$\frac{F(\alpha,\gamma,z)}{\Gamma(\gamma)}$ 是 α,γ,z 的单值解析函数．

2. 库默尔变换

由于

$$e^{-z}F(\alpha,\gamma,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_l}{l!(\gamma)_l}z^l$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(\alpha)_l}{l!(n-l)!(\gamma)_l}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}(-z)^n=F(\gamma-\alpha,\gamma,-z),$$

因此得到库默尔变换公式

$$F(\alpha,\gamma,z)=e^zF(\gamma-\alpha,\gamma,-z). \tag{4-38}$$

3. 积分表达式

库默尔方程(4-35)的积分解是

$$y(z)=A\int_C e^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt, \tag{4-39}$$

其中 A 是任意常数，积分路线 C 的选取应满足 $\{e^{zt}t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha}\}_C=0$．只要选择常数 $A=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}$，选取 C 为从 0 到 1 的直线段，(4-39)式的右边就等于 $F(\alpha,\gamma,z)$．因此 $F(\alpha,\gamma,z)$ 的积分表达式是

$$F(\alpha,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 e^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt, \tag{4-40}$$

其中 $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha)>0$，$\arg t=\arg(1-t)=0$．

把(4-40)式中的 t 换成 $1-t$，得另一积分表达式

$$F(\alpha,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)e^z}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 e^{-zt}t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}dt$$
$$(\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha)>0,\arg t=\arg(1-t)=0). \tag{4-41}$$

此外，与(4-8)式相对应，合流超几何函数也可以用巴恩斯积分表示：

$$F(\alpha,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s ds$$
$$\left(\alpha\neq 0,-1,-2,\cdots;\ |\arg(-z)|<\frac{\pi}{2}\right) \tag{4-42}$$

积分路线的选取应使 $\Gamma(\alpha+s)$ 的极点在积分路线的左边，$\Gamma(-s)$ 的极点在其右边．

4. 邻次函数间的关系

设 l,m 是任意整数，则 $F(\alpha+l,\gamma+m,z)$ 称为 $F(\alpha,\gamma,z)$ 的邻次函数，与超几何函数一样，在任意 3 个邻次函数 F_1,F_2,F_3 之间存在关系式

$$A_1F_1+A_2F_2+A_3F_3=0, \tag{4-43}$$

其中 A_1,A_2,A_3 是 z 的有理函数．

5. 递推关系

用合流超几何函数的积分表示可以导出下列两个递推关系：

$$(\gamma-1)F(\gamma-1)-\alpha F(\alpha+1)-(\gamma-\alpha-1)F=0, \tag{4-44}$$

$$\gamma F-zF(\gamma+1)-\gamma F(\alpha-1)=0, \tag{4-45}$$

其中 F 代表 $F(\alpha,\gamma,z)$；$F(\alpha\pm 1)$，$F(\gamma\pm 1)$ 是 $F(\alpha,\gamma,z)$ 的 4 个紧邻的简写符号，即

$$F(\alpha\pm 1)=F(\alpha\pm 1,\gamma,z),$$
$$F(\gamma\pm 1)=F(\alpha,\gamma\pm 1,z).$$

F 和它的 4 个紧邻之间的$\binom{4}{2}=6$个关系式都可从以上两个基本递推关系式导出.

此外,还有一个与超几何函数相仿的递推公式

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)=\frac{(\alpha)_m}{(\gamma)_m}\mathrm{F}(\alpha+m,\gamma+m,z). \tag{4-46}$$

6. 渐近展开

由于 $\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)$ 的幂级数展开是在全平面上收敛的,故对于 α 和 z 的任何有限值,这级数也是当 $|\gamma|\to\infty$ 时的渐近展开,即

$$\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)=\sum_{n=1}^{N}\frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}z^n+O(|\gamma|^{-N-1})$$
$$(|\arg(\gamma)|\leqslant\pi-\delta,\delta>0). \tag{4-47}$$

若 $|\alpha|$ 与 $|\gamma|$ 同时趋于 ∞,但 $|\gamma-\alpha|$ 有界,则利用库默尔变换公式(4-38)可以从(4-47)式中把 α 换成 $\gamma-\alpha$,z 换成 $-z$,再乘上 e^z,可得到这时的渐近展开式.

4.5　拉盖尔多项式

4.5.1　拉盖尔多项式的定义

二阶线性微分方程

$$zy''+(\mu+1-z)y'+ny=0\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{4-48}$$

称为拉盖尔(Laguerre)方程,它是库默尔方程当参数 $\alpha=-n$ 时的特殊情况,故它有一个多项式解:$\mathrm{F}(-n,\mu+1,z)$.称 n 次多项式

$$\mathrm{L}_n^{\mu}(z)=\frac{\Gamma(\mu+n+1)}{n!\Gamma(\mu+1)}\mathrm{F}(-n,\mu+1,z) \tag{4-49}$$

为**广义拉盖尔多项式**.其中 μ 是不等于负整数的任意实数或复数.$\mathrm{L}_n^{\mu}(z)$ 的特殊情形:$\mathrm{L}_n^0(z)=\mathrm{L}(z)$ 称为**拉盖尔多项式**.

4.5.2　拉盖尔多项式的性质

1. 积分表示

根据定义式(4-49)及合流超几何函数的积分表示,可得拉盖尔多项式 $\mathrm{L}_n^{\mu}(z)$ 的积分表达式

$$\mathrm{L}_n^{\mu}(z)=\frac{(-1)^n}{2\pi\mathrm{i}}\int^{(0+)}\mathrm{e}^{zt}(1-t)^{\mu+n}t^{-n-1}\mathrm{d}t$$
$$(t=1 \text{ 在围道外},|\arg(1-t)|<\pi). \tag{4-50}$$

2. 微商表示

在(4-50)式中令 $t=1-\dfrac{v}{z}$,得

$$\mathrm{L}_n^{\mu}(z)=\mathrm{e}^z z^{-\mu}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int^{(0+)}\frac{\mathrm{e}^{-v}v^{\mu+n}}{(v-z)^{n+1}}\mathrm{d}v, \tag{4-51}$$

$$\mathrm{L}_n^{\mu}(z)=\frac{\mathrm{e}^z z^{-\mu}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}(z^{\mu+n}\mathrm{e}^{-z}). \tag{4-52}$$

当 $\mu=m$(正整数)时,(4-50)式可写为

$$\mathrm{L}_n^{m}(z)=\frac{(-1)^m}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\int^{(0+)}\mathrm{e}^{zt}(1-t)^{m+n}t^{-m-n-1}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{令 } t=1-\frac{v}{z}}(-1)^m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\frac{\mathrm{e}^z}{2\pi\mathrm{i}}\int^{(0+)}\frac{\mathrm{e}^{-v}v^{m+n}}{(v-z)^{m+n+1}}\mathrm{d}v,$$

利用(4-51)式,令其中的 $\mu=0$,并把 n 换成 $m+n$,即得 $\mathrm{L}_n^m(z)$ 的微商表示

$$\mathrm{L}_n^{m}(z)=(-1)^m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\mathrm{L}_{m+n}(z). \tag{4-53}$$

3. 母函数

将(4-50)式改写成

$$\mathrm{L}_n^{\mu}(z)=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int^{(0+)}\mathrm{e}^{zt}(1-t)^{\mu-1}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{-n-1}\mathrm{d}t,$$

令 $\dfrac{t}{t-1}=v$,使积分中只有 v 的幂次上含 n,得

$$\mathrm{L}_n^{\mu}(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int^{(0+)}\exp\left(-\frac{zt}{1-t}\right)(1-t)^{-\mu-1}t^{-n-1}\mathrm{d}t,$$

于是有

$$\frac{\exp\left(-\dfrac{zt}{1-t}\right)}{(1-t)^{\mu+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{L}_n^{\mu}(z)t^n\quad(|t|<1), \tag{4-54}$$

上式左边的函数称为 $\mathrm{L}_n^{\mu}(z)$ 的母函数.

4. 递推公式

把(4-54)式两边对 t 求微商,乘上 $(1-t)^2$,再用(4-54)式展开左边,并比较两边 t^n 的系数,得

$$(n+1)\mathrm{L}_{n+1}^{\mu}+(z-\mu-2n-1)\mathrm{L}_n^{\mu}+(\mu+n)\mathrm{L}_{n-1}^{\mu}=0\quad(n\geqslant1). \tag{4-55}$$

类似地,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{L}_n^{\mu}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{L}_{n-1}^{\mu}+\mathrm{L}_{n-1}^{\mu}=0\quad(n\geqslant1), \tag{4-56}$$

一般地有

$$\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}z^r}\mathrm{L}_n^{\mu}(z)=(-1)^r\mathrm{L}_{n-r}^{\mu+r}(z)\quad(r\leqslant n). \tag{4-57}$$

利用基本递推关系(4-55),(4-56)式还可导出下列递推公式

$$(n+1)(\mathrm{L}_{n+1}^{\mu})'+(z-n-1)(\mathrm{L}_n^{\mu})'-(n+1)\mathrm{L}_{n+1}^{\mu}+(\mu+2n+2-z)\mathrm{L}_n^{\mu}=0\quad(n\geqslant0), \tag{4-58}$$

$$z(\mathrm{L}_n^{\mu})'=n\mathrm{L}_n^{\mu}-(\mu+n)\mathrm{L}_{n-1}^{\mu}\quad(n\geqslant1). \tag{4-59}$$

在(4-54)式中把 μ 换成 $\mu+1$,乘以 $1-t$,然后把左边再用(4-54)式展开,并比较两边的系数得

$$\mathrm{L}_n^{\mu}(z) = \mathrm{L}_n^{\mu+1}(z) - \mathrm{L}_{n-1}^{\mu+1}(z). \tag{4-60}$$

5. 正交归一性

两个广义拉盖尔多项式乘积的积分公式是

$$\int_0^{\infty} z^{\lambda} \mathrm{e}^{-z} \mathrm{L}_n^{\mu}(z) \mathrm{L}_m^{\upsilon}(z) \mathrm{d}z = (-1)^{n+m} \Gamma(\lambda+1) \sum_k \binom{\lambda-\mu}{n-k} \binom{\lambda-\upsilon}{m-k} \binom{\lambda+k}{k}, \tag{4-61}$$

其中 $\mathrm{Re}(\lambda) > -1$,以保证积分在下限收敛.

当 $\lambda = \mu = \upsilon$ 时,即得广义拉盖尔多项式的正交归一关系

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} z^{\mu} \mathrm{e}^{-z} \mathrm{L}_n^{\mu}(z) \mathrm{L}_m^{\mu}(z) \mathrm{d}z &= \Gamma(\mu+1) \binom{\mu+n}{n} \delta_{nm} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+n+1)}{n!} \delta_{mn}, \end{aligned} \tag{4-62}$$

其中

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ 1 & (m = n). \end{cases}$$

利用(4-61),(4-62)式可得到下列展开式

$$z^s \mathrm{L}_n^{\mu}(z) = \sum_{r=0}^{n+s} a_r^s \mathrm{L}_{n+s-r}^{\mu+p}(z), \tag{4-63}$$

其中系数

$$\begin{aligned} a_r^s = (-1)^{s+r} \frac{(n+s-r)!\,\Gamma(s+\mu+p+1)}{\Gamma(n+s+\mu+p-r+1)} \times \\ \sum_k \binom{s+p}{n-k} \binom{s}{k+r-n} \binom{s+\mu+p+k}{k}. \end{aligned} \tag{4-64}$$

其中 s 是任意非负整数,p 是任意的实数或复数.

参 考 文 献

1 王竹溪,郭敦仁.特殊函数概论.北京:科学出版社,1979.

2 《数学手册》编写组.数学手册.北京:教育出版社,1979.

3 (日)近藤次郎等著.微分方程傅里叶分析.付文章译.沈阳:辽宁人民出版社,1981.

4 谢省宗,邴凤山.特殊函数.见:《现代工程数学手册》编委会.现代工程数学手册:第Ⅰ卷.武汉:华中工学院出版社,1985.

·经典数学卷·

第 9 篇

积分变换与级数变换

编　者　樊孝述

审校者　于　寅