线性代数公式大全——最新修订

1、行列式

1. n行列式共有n^2个元素，展开后有$n!$项，可分解为2^n行列式；
2. 代数余子式的性质：
   ①、A_{ij}和a_{ij}的大小无关；
   ②、某行（列）的元素乘以其它行（列）元素的代数余子式为0；
   ③、某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为$|A|$；
3. 代数余子式和余子式的关系：$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$　　　　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$
4. 设n行列式D：
   将D上、下翻转或左右翻转，所得行列式为D_1，则$D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$；
   将D顺时针或逆时针旋转90°，所得行列式为D_2，则$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$；
   将D主对角线翻转后（转置），所得行列式为D_3，则$D_3=D$；
   将D主副角线翻转后，所得行列式为D_4，则$D_4=D$；
5. 行列式的重要公式：
   ①、主对角行列式：主对角元素的乘积；
   ②、副对角行列式：副对角元素的乘积$\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；
   ③、上、下三角行列式（$|◥|=|◣|$）：主对角元素的乘积；
   ④、$|◤|$和$|◢|$：副对角元素的乘积$\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；
   ⑤、拉普拉斯展开式：$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|$、$\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}=(-1)^{m\cdot n}|A||B|$
   ⑥、范德蒙行列式：大指标减小指标的连乘积；
   ⑦、特征值；
6. 对于n阶行列式$|A|$，恒有：$|\lambda E-A|=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k S_k\lambda^{n-k}$，其中$S_k$为$k$阶主子式；
7. 证明$|A|=0$的方法：
   ①、$|A|=-|A|$；
   ②、反证法；
   ③、构造齐次方程组$Ax=0$，证明其有非零解；
   ④、利用秩，证明$r(A)<n$；
   ⑤、证明0是其特征值；

2、矩阵

1. A是n阶可逆矩阵：
   $\Leftrightarrow |A|\neq 0$（是非奇异矩阵）；
   $\Leftrightarrow r(A)=n$（是满秩矩阵）
   $\Leftrightarrow A$的行（列）向量组线性无关；
   $\Leftrightarrow$齐次方程组$Ax=0$有非零解；
   $\Leftrightarrow \forall b\in R^n$，$Ax=b$总有唯一解；
   $\Leftrightarrow A$与E等价；
   $\Leftrightarrow A$可表示成若干个初等矩阵的乘积；

$\Leftrightarrow$ A 的特征值全不为 0；

$\Leftrightarrow$ $A^T A$ 是正定矩阵；

$\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量组是 R^n 的一组基；

$\Leftrightarrow$ A 是 R^n 中某两组基的过渡矩阵；

2. 对于 n 阶矩阵 A： $AA^* = A^*A = |A|E$ 无条件恒成立；

3. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ $\quad$ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ $\quad$ $(A^*)^T = (A^T)^*$

   $(AB)^T = B^T A^T$ $\quad$ $(AB)^* = B^* A^*$ $\quad$ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

4. 矩阵是表格，推导符号为波浪号或箭头；行列式是数值，可求代数和；

5. 关于分块矩阵的重要结论，其中均 A 、 B 可逆：

   若 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，则：

   Ⅰ、 $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$；

   Ⅱ、 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$；

   ②、 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$；（主对角分块）

   ③、 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$；（副对角分块）

   ④、 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$；（拉普拉斯）

   ⑤、 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$；（拉普拉斯）

3、矩阵的初等变换与线性方程组

1. 一个 $m \times n$ 矩阵 A，总可经过初等变换化为标准形，其标准形是唯一确定的： $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$；

   等价类：所有与 A 等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类；标准形为其形状最简单的矩阵；

   对于同型矩阵 A 、 B，若 $r(A) = r(B) \Leftrightarrow A \sim B$；

2. 行最简形矩阵：

   ①、只能通过初等行变换获得；

   ②、每行首个非 0 元素必须为 1；

   ③、每行首个非 0 元素所在列的其他元素必须为 0；

3. 初等行变换的应用：（初等列变换类似，或转置后采用初等行变换）

   ①、若 $(A, E) \overset{r}{\sim} (E, X)$，则 A 可逆，且 $X = A^{-1}$；

   ②、对矩阵 (A, B) 做初等行变化，当 A 变为 E 时， B 就变成 $A^{-1}B$，即： $(A, B) \overset{c}{\sim} (E, A^{-1}B)$；

   ③、求解线形方程组：对于 n 个未知数 n 个方程 $Ax = b$，如果 $(A, b) \overset{r}{\sim} (E, x)$，则 A 可逆，且 $x = A^{-1}b$；

4. 初等矩阵和对角矩阵的概念：

   ①、初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵；

②、$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，左乘矩阵 A，λ_i 乘 A 的各行元素；右乘，λ_i 乘 A 的各列元素；

③、对调两行或两列，符号 $E(i,j)$，且 $E(i,j)^{-1}=E(i,j)$，例如：$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix}$；

④、倍乘某行或某列，符号 $E(i(k))$，且 $E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$，例如：$\begin{pmatrix}1 & & \\ & k & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \frac{1}{k} & \\ & & 1\end{pmatrix}(k\neq 0)$；

⑤、倍加某行或某列，符号 $E(ij(k))$，且 $E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$，如：$\begin{pmatrix}1 & & k\\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & -k\\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}(k\neq 0)$；

5. 矩阵秩的基本性质：

①、$0\le r(A_{m\times n})\le \min(m,n)$；

②、$r(A^T)=r(A)$；

③、若 $A\sim B$，则 $r(A)=r(B)$；

④、若 P、Q 可逆，则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$；（可逆矩阵不影响矩阵的秩）

⑤、$\max(r(A),r(B))\le r(A,B)\le r(A)+r(B)$；（※）

⑥、$r(A+B)\le r(A)+r(B)$；（※）

⑦、$r(AB)\le \min(r(A),r(B))$；（※）

⑧、如果 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，且 $AB=0$，则：（※）

Ⅰ、B 的列向量全部是齐次方程组 $AX=0$ 解（转置运算后的结论）；

Ⅱ、$r(A)+r(B)\le n$

⑨、若 A、B 均为 n 阶方阵，则 $r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$；

6. 三种特殊矩阵的方幂：

①、秩为 1 的矩阵：一定可以分解为列矩阵（向量）$\times$ 行矩阵（向量）的形式，再采用结合律；

②、型如 $\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的矩阵：利用二项展开式；

二项展开式：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+C_n^nb^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^ma^mb^{n-m}$；

注：Ⅰ、$(a+b)^n$ 展开后有 $n+1$ 项；

Ⅱ、$C_n^m=\dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$　　$C_n^0=C_n^n=1$

Ⅲ、组合的性质：$C_n^m=C_n^{n-m}$　　$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$　　$\sum_{r=0}^{n}C_n^r=2^n$　　$rC_n^r=nC_{n-1}^{r-1}$；

③、利用特征值和相似对角化：

7. 伴随矩阵：

①、伴随矩阵的秩：$r(A^*)=\begin{cases}n & r(A)=n\\ 1 & r(A)=n-1\\ 0 & r(A)<n-1\end{cases}$；

②、伴随矩阵的特征值：$\frac{|A|}{\lambda}$ $(AX=\lambda X, A^*=|A|A^{-1} \Rightarrow A^*X=\frac{|A|}{\lambda}X)$；

③、$A^*=|A|A^{-1}$、$|A^*|=|A|^{n-1}$

8. 关于 A 矩阵秩的描述：
   ①、$r(A)=n$，A 中有 n 阶子式不为 0，$n+1$ 阶子式全部为 0；（两句话）
   ②、$r(A)<n$，A 中有 n 阶子式全部为 0；
   ③、$r(A)\ge n$，A 中有 n 阶子式不为 0；
9. 线性方程组：$Ax=b$，其中 A 为 $m\times n$ 矩阵，则：
   ①、m 与方程的个数相同，即方程组 $Ax=b$ 有 m 个方程；
   ②、n 与方程组得未知数个数相同，方程组 $Ax=b$ 为 n 元方程；
10. 线性方程组 $Ax=b$ 的求解：
   ①、对增广矩阵 B 进行初等行变换（只能使用初等行变换）；
   ②、齐次解为对应齐次方程组的解；
   ③、特解：自由变量赋初值后求得；
11. 由 n 个未知数 m 个方程的方程组构成 n 元线性方程：

①、$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{nm}x_n=b_n \end{cases}$；

②、$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax=b$（向量方程，$A$ 为 $m\times n$ 矩阵，m 个方程，n 个未知数）

③、$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\beta$（全部按列分块，其中 $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$）；

④、$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\beta$（线性表出）

⑤、有解的充要条件：$r(A)=r(A,\beta)\le n$（n 为未知数的个数或维数）

4、向量组的线性相关性

1. m 个 n 维列向量所组成的向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 构成 $n\times m$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$；

   m 个 n 维行向量所组成的向量组 B：$\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_m^T$ 构成 $m\times n$ 矩阵 $B=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$；

   含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应；
2. ①、向量组的线性相关、无关 $\Leftrightarrow Ax=0$ 有、无非零解；（齐次线性方程组）
   ②、向量的线性表出 $\Leftrightarrow Ax=b$ 是否有解；（线性方程组）
   ③、向量组的相互线性表示 $\Leftrightarrow AX=B$ 是否有解；（矩阵方程）
3. 矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 行向量组等价的充分必要条件是：齐次方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解；(P_{101} 例 14)
4. $r(A^TA)=r(A)$；(P_{101} 例 15)
5. n 维向量线性相关的几何意义：
   ①、α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha=0$；
   ②、α,β 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha,\beta$ 坐标成比例或共线（平行）；

③、α,β,γ 线性相关 $\Leftrightarrow$ α,β,γ 共面；

6. 线性相关与无关的两套定理：
若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 必线性相关；
若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 必线性无关；（向量的个数加加减减，二者为对偶）
若 r 维向量组 A 的每个向量上添上 $n-r$ 个分量，构成 n 维向量组 B：
若 A 线性无关，则 B 也线性无关；反之若 B 线性相关，则 A 也线性相关；（向量组的维数加加减减）
简言之：无关组延长后仍无关，反之，不确定；

7. 向量组 A（个数为 r）能由向量组 B（个数为 s）线性表示，且 A 线性无关，则 $r \le s$（二版 P_{74} 定理 7）；
向量组 A 能由向量组 B 线性表示，则 $r(A) \le r(B)$；（P_{86} 定理 3）
向量组 A 能由向量组 B 线性表示
$\Leftrightarrow AX = B$ 有解；
$\Leftrightarrow r(A) = r(A,B)$（$P_{85}$ 定理 2）
向量组 A 能由向量组 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(A,B)$（$P_{85}$ 定理 2 推论）

8. 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使 $A = P_1P_2\cdots P_l$；
①、矩阵行等价：$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow PA = B$（左乘，$P$ 可逆）$\Leftrightarrow Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解
②、矩阵列等价：$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow AQ = B$（右乘，$Q$ 可逆）；
③、矩阵等价：$A \sim B \Leftrightarrow PAQ = B$（$P$、$Q$ 可逆）；

9. 对于矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$：
①、若 A 与 B 行等价，则 A 与 B 的行秩相等；
②、若 A 与 B 行等价，则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，且 A 与 B 的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性；
③、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；
④、矩阵 A 的行秩等于列秩；

10. 若 $A_{m\times s}B_{s\times n} = C_{m\times n}$，则：
①、C 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示，B 为系数矩阵；
②、C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示，A^T 为系数矩阵；（转置）

11. 齐次方程组 $Bx = 0$ 的解一定是 $ABx = 0$ 的解，**考试中可以直接作为定理使用，而无需证明；**
①、$ABx = 0$ 只有零解 $\Rightarrow$ $Bx = 0$ 只有零解；
②、$Bx = 0$ 有非零解 $\Rightarrow$ $ABx = 0$ 一定存在非零解；

12. 设向量组 $B_{n\times r}: b_1,b_2,\cdots,b_r$ 可由向量组 $A_{n\times s}: a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性表示为：（P_{110} 题 19 结论）

$$(b_1,b_2,\cdots,b_r) = (a_1,a_2,\cdots,a_s)K \quad (B = AK)$$

其中 K 为 $s\times r$，且 A 线性无关，则 B 组线性无关 $\Leftrightarrow r(K) = r$；（B 与 K 的列向量组具有相同线性相关性）
（必要性：$\because r = r(B) = r(AK) \le r(K), r(K) \le r, \therefore r(K) = r$；充分性：反证法）
注：当 $r = s$ 时，K 为方阵，可当作定理使用；

13. ①、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $Q_{n\times m}$，$AQ = E_m$ $\Leftrightarrow r(A) = m$、Q 的列向量线性无关；（P_{87}）
②、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $P_{n\times m}$，$PA = E_n$ $\Leftrightarrow r(A) = n$、P 的行向量线性无关；

14. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关
$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$ 成立；（定义）

$$\Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解，即 } Ax = 0 \text{ 有非零解；}$$

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) < s$，系数矩阵的秩小于未知数的个数；

15. 设 $m\times n$ 的矩阵 A 的秩为 r，则 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集 S 的秩为：$r(S) = n - r$；

16. 若 η^* 为 $Ax = b$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系，则 $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；（P_{111} 题 33 结论）

5、相似矩阵和二次型

1. 正交矩阵$\Leftrightarrow A^T A = E$ 或 $A^{-1} = A^T$（定义），性质：

   ①、A 的列向量都是单位向量，且两两正交，即 $a_i^T a_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} (i, j = 1, 2, \cdots n)$；

   ②、若 A 为正交矩阵，则 $A^{-1} = A^T$ 也为正交阵，且 $|A| = \pm 1$；

   ③、若 A、B 正交阵，则 AB 也是正交阵；

   注意：求解正交阵，千万不要忘记施密特正交化和单位化；

2. 施密特正交化：$(a_1, a_2, \cdots, a_r)$

   $b_1 = a_1$；

   $$b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} \cdot b_1$$

   ………

   $$b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} \cdot b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} \cdot b_2 - \cdots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} \cdot b_{r-1};$$

3. 对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；

   对于实对称阵，不同特征值对应的特征向量正交；

4. ①、A 与 B 等价 $\Leftrightarrow$ A 经过初等变换得到 B；

   $\Leftrightarrow PAQ = B$，P、Q 可逆；

   $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$，$A$、$B$ 同型；

   ②、A 与 B 合同 $\Leftrightarrow C^T AC = B$，其中可逆；

   $\Leftrightarrow x^T Ax$ 与 $x^T Bx$ 有相同的正、负惯性指数；

   ③、A 与 B 相似 $\Leftrightarrow P^{-1}AP = B$；

5. 相似一定合同、合同未必相似；

   若 C 为正交矩阵，则 $C^T AC = B \Rightarrow A \sim B$，（合同、相似的约束条件不同，相似的更严格）；

6. A 为对称阵，则 A 为二次型矩阵；

7. n 元二次型 $x^T Ax$ 为正定：

   $\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数为 n；

   $\Leftrightarrow A$ 与 E 合同，即存在可逆矩阵 C，使 $C^T AC = E$；

   $\Leftrightarrow A$ 的所有特征值均为正数；

   $\Leftrightarrow A$ 的各阶顺序主子式均大于 0；

   $\Rightarrow a_{ii} > 0, |A| > 0$；(必要条件)