第九讲　函数与方程

KE QIAN XUE SHENG DU YU CE

课前学生读与测

读　知识与方法梳理

一、方程的根与函数的零点

1．对于函数$y=f(x)(x\in D)$，把使$f(x)=0$成立的实数x叫做函数$y=f(x)(x\in D)$的__零点__.

2．函数$y=f(x)$的__零点__就是方程$f(x)=0$的__实数根__，亦即函数$y=f(x)$的图象与x轴交点的__横坐标__.

即：方程$f(x)=0$有__实数根__$\Leftrightarrow$函数$y=f(x)$的图象与x轴有__交点__$\Leftrightarrow$函数$y=f(x)$有__零点__.

3．求函数$y=f(x)$的零点

(1)(代数法)求方程$f(x)=0$的__实数根__.

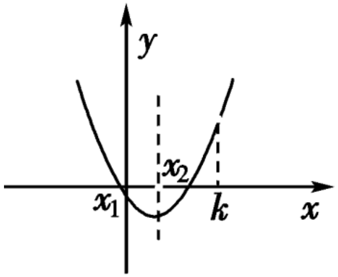
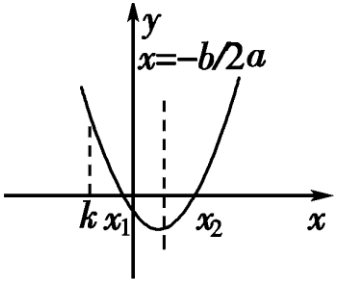
(2)(几何法)结合函数$y=f(x)$的图象，并利用函数的性质找出__零点__.

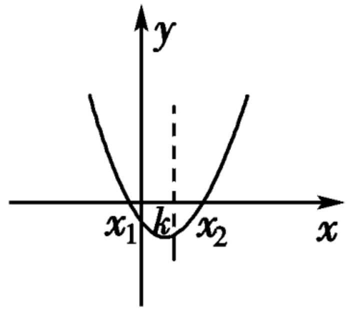
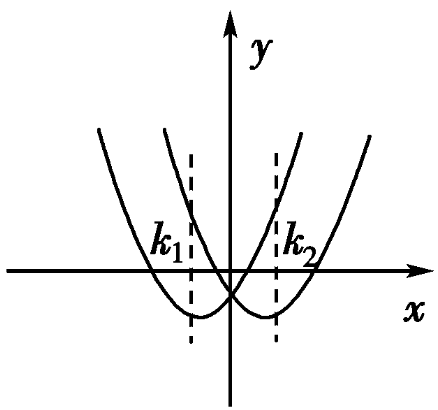
4．零点存在性定理

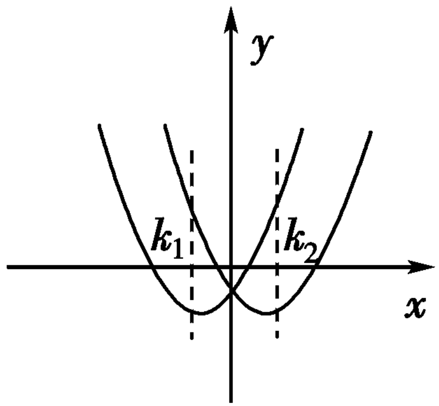
函数在区间$[a，b]$上的图象是__连续__的，且$f(a)f(b)<0$，那么函数$f(x)$在区间$[a，b]$上至少有一个零点.

5．一元二次方程根的分布

设x_1、x_2 是实系数二次方程$ax^2+bx+c=0(a>0)$的两实根，则x_1、x_2的分布范围与二次方程系数之间的关系如下表所示：

根的分布	图象	充要条件
$x_1<x_2<k$		$\begin{cases}\Delta>0\\ f(k)>0\\ -\dfrac{b}{2a}<k\end{cases}$
$k<x_1<x_2$		$\begin{cases}\Delta>0\\ f(k)>0\\ -\dfrac{b}{2a}>k\end{cases}$

根的分布	图象	充要条件
$x_1<k<x_2$		$f(k)<0$
x_1，$x_2\in(k_1，k_2)$		$\begin{cases}\varDelta\geqslant 0\\ f(k_1)>0\\ f(k_2)>0\\ k_1<-\dfrac{b}{2a}<k_2\end{cases}$

根的分布	图象	充要条件
x_1, x_2有且仅有一个在(k_1, k_2)内		$f(k_1)f(k_2)<0$ 或 $\Delta=0$ 且 $-\frac{b}{2a}\in(k_1, k_2)$或 $\begin{cases} f(k_1)=0 \\ k_1<-\frac{b}{2a}<\frac{k_1+k_2}{2} \end{cases}$ 或$\begin{cases} f(k_2)=0, \\ \frac{k_1+k_2}{2}<-\frac{b}{2a}<k_2 \end{cases}$

二、用二分法求方程的近似解

对于在区间[a，b]上连续，且满足__$f(a)\cdot f(b)<0$__的函数 $y=f(x)$，通过不断地把函数$f(x)$的零点所在的区间__一分为二__，使区间的两个端点__逐步逼近零点__，进而得到零点近似值的方法叫做__二分法__．

给定__精度ξ__，用二分法求函数$f(x)$的零点近似值的步骤如下：

1．确定区间$[a，b]$，验证$f(a)\cdot f(b)<0$，给定精度ξ.

2．求区间$(a，b)$的__中点__x_1.

3．计算$f(x_1)$：

(1)若$f(x_1)=0$，则x_1就是函数的零点.

(2)若__$f(a)\cdot f(x)<0$__，则令__$b=x_1$__(此时零点$x_0\in(a，x_1)$).

(3)若__$f(x_1)\cdot f(b)<0$__，则令__$a=x_1$__(此时零点$x_0\in(x_1，b)$).

4．判断是否达到精度ξ

即若__$|a-b|<\xi$__，则得到零点的__零点值a(或b)__；否则重复步骤2～4.

测

1．(2010·天津，4)函数$f(x)=e^x+x-2$的零点所在的一个区间是(　　)

A．$(-2,-1)$　　B．$(-1,0)$

C．$(0,1)$　　D．$(1,2)$

[解析]　$f(0)=e^0+0-2=-1<0$，

$f(1)=e+1-2=e-1>0$，

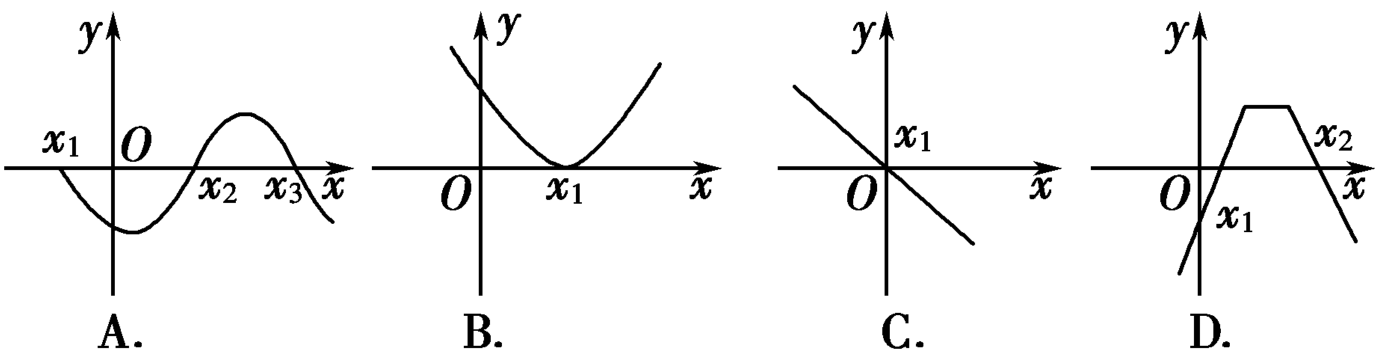
$\because y=e^x$是单调增函数，$y=x-2$是增函数，

$\therefore f(x)=e^x+x-2$在$\mathbf{R}$上是增函数，

$\therefore$在$(0,1)$区间上$f(x)$存在一个零点．故选C.

[答案]　C

2．函数图象与x轴均有公共点，但不能用二分法求公共点横坐标的是(　　)



[答案]　B

3．(2010·**广东六校联考**)方程$x^2+2x-a=0$在$[-1,1]$上有解，则a的取值范围是________．

[解析]　令 $f(x)=x^2+2x-a$，由题意知 $f(x)$在$[-1,1]$上有零点．由于 $f(x)$的对称轴为 $x=-1$，$\therefore f(x)$在$[-1,1]$上单调递增，且由零点定理知$\begin{cases} f(-1)\leqslant 0, \\ f(1)\geqslant 0, \end{cases}$　则$\begin{cases} a\geqslant -1, \\ a\leqslant 3, \end{cases}$

即 $a\in[-1,3]$.

[答案]　$[-1,3]$

KE NEI SHI SHENG JIANG YU XUE

课内师生讲与学

主要题型研究

题型1 判断给定函数有无零点以及零点个数的确定

例1 已知函数$f(x)=3^x-x^2$.问：方程$f(x)=0$在区间$[-1,0]$内有没有实数解？为什么？

[分析] 要判断$f(x)$在某个区间上是否有解，可先确定$f(x)$在这个区间上是否有零点.

[解]　因为 $f(-1)=3^{-1}-(-1)^2=-\frac{2}{3}<0$，

$f(0)=3^0-(0)^2=1>0$，

函数 $f(x)=3^x-x^2$ 的图象是连续曲线，所以 $f(x)$在区间$[-1,0]$内有零点，

即 $f(x)=0$ 在区间$[-1,0]$内有实数解.

[点评与警示]　函数零点的存在性常用方法，一是用零点定理，二是解方程，三是用图象；而求函数零点就是求相应方程的实数根；确定零点个数时，要注意重根时的表述.

◆ 变形思考1

(2010 福建，7)函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\leq 0\\ -2+\ln x, & x>0\end{cases}$，的零点个数为(　　)

A．3　　B．2

C．1　　D．0

[解析]　当$x\leq 0$时，由$x^2+2x-3=0$解得$x=1$或-3，则$f(x)$在$(-\infty，0]$上有1个零点；当$x>0$时，由$-2+\ln x=0$解得$x=e^2$，则$f(x)$在$(0，+\infty)$上有1个零点，所以$f(x)$共有2个零点，故选B.

[答案]　B

题型2　一元二次方程根的分布

例2　若关于x的方程$x^2-2ax+2+a=0$有两个不相等的实根，分别满足下列条件，求a的取值范围.

(1)方程的两根都大于1；

(2)方程一根大于1，另一根小于1.

[解]　设 $f(x)=x^2-2ax+2+a$

(1)两根大于 1，即 $f(x)$在$(1，+\infty)$上有两个不相同的零点，

$$\therefore\begin{cases}\Delta=4a^2-4(2+a)>0\\ -\dfrac{-2a}{2}=a>1\\ f(1)=3-a>0\end{cases}$$　解得 $2<a<3$

(2)方程一根大于 1，另一根小于 1，即要求 $f(x)=x^2-2ax+2+a$ 两零点在 $x=1$ 两旁，

∴只需 $f(1)<0$　∴$a>3$.

[点评与警示]　二次方程根的分布问题，常借助二次函数的图示进行等价转化，先作出二次函数的大致图象，然后列出相应满足条件的不等式组，使问题得到解决.

◆ 变形思考2

已知一元二次方程$2x^2-(m+1)x+m=0$有且仅有一实根在$(0,1)$内，求m的范围.

[解]　设$f(x)=2x^2-(m+1)x+m$

由$f(0)\cdot f(1)<0\Rightarrow m<0$.

题型3　用二分法求函数的零点

例3 (北师大版高中数学必修1改编)

求函数$f(x)=x^3-x-1$在区间[1,1.5]内的一个零点，(精确到0.01).

[解]　$\because f(1)<0 \quad f(1.5)>0$

$\therefore f(x)$在区间[1,1.5]存在零点

用二分法逐次计算列表如下:

端(中点)坐标	中点函数值	取区间	a_n-b_n
		[1,1.5]	0.5
1.25	$f(1.25)<0$	[1.25,1.5]	0.25
1.375	$f(1.375)>0$	[1.25,1.375]	0.125
1.3125	$f(1.3125)<0$	[1.3125,1.375]	0.0625
1.34375	$f(1.34375)>0$	[1.3125,1.34375]	0.03125
1.328125	$f(1.325125)>0$	[1.3125,1.328125]	0.015625
1.3203125	$f(1.3203125)>0$	[1.3203125,1.328125]	0.005

$\because |1.3203125-1.328125|=0.005<0.01$

至此可以看出，函数的零点落在区间长度小于0.01的区间[1.3203125,1.328125]内，因为该区间的所有值精确到此为0.01都是1.32，因此1.32是函数$f(x)=x^3-x-1$精确到0.01的一个近似零点.

[点评与警示]　用二分法求函数零点近似值的步骤，借助于计算器一步步求解即可，我们可以借助于表格和数轴，清楚地描写逐步缩小零点所在区间的过程，而运算终止的时候就在区间长度小于精确度ε的时候.

◆变形思考3

求方程$\ln x+x-3=0$在(2,3)的近似解(结果精确到0.1)

[解]　令$f(x)=\ln x+x-3$，即求函数$f(x)$在(2,3)内的零点，用二分法逐步计算，列表如下：

区间	中点	中点函数值
[2,3]	2.5	0.416 4
[2,2.5]	2.25	0.060 9
[2,2.25]	2.125	－0.121 2
[2.125,2.25]	2.187 5	－0.029 7
[2.187 5,2.25]		

由于区间[2.187 5,2.25]的长度$2.25-2.187\ 5=0.062\ 5<0.1$，所以其两个端点的近似值2.2就是方程的根.

题型 4　确定函数零点的大致区间

例 4　设x_0是方程$\ln x+x=4$的解，则属于区间(　　)

A．(0,1)　　B．(1,2)

C．(2,3)　　D．(3,4)

[解析]　转化为函数的零点去考虑，令$f(x)=\ln x+x-4$，在A中，当$x\to 0$时，$f(x)=\ln x+x-4<0$，$f(1)=\ln 1+1-4=-3<0$，故不能确定是否有根；在B中，$f(1)=\ln 1+1-4=-3<0$，$f(2)=\ln 2+2-4=-2+\ln 2<0$，故不能确定是否有根；在C中，$f(2)=\ln 2+2-4=-2+\ln 2<0$，$f(3)=\ln 3+3-4=-1+\ln 3>0$，$f(x)=0$有根，故$x_0$属于区间$(2,3)$；在D中，$f(3)=\ln 3+3-4=-1+\ln 3>0$，$f(4)=\ln 4+4-4=\ln 4>0$，故不能确定是否有根．故选C.

[答案]　C

◆变形思考4

设函数$f(x)=x+\ln x-3$的零点为m，则m所在的区间为 ( )

A．$(1,2)$ B．$(2,3)$

C．$(3,4)$ D．$(4,5)$

[解析] 由$f(3)>0$，$f(2)<0$.故选B.

[答案] B

JIE TI JING YAN GONG XIANG

解题经验共享

1．函数$y=f(x)$的零点就是方程$f(x)=0$的实数根，也是$y=f(x)$的图象与x轴的交点的横坐标．所以：$f(x)=0$有实根$\Leftrightarrow y=f(x)$与x轴有交点$\Leftrightarrow y=f(x)$有零点．

2．二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根的分布、存在问题，既可以用判别式、求根公式、韦达定理等代数方法，也可以借助方程对应的二次函数的图象特征列出等价条件组，解题时应选择计算量小的方法．

3．函数$F(x)=f(x)-g(x)$的零点就是方程$f(x)=g(x)$的实数根，也就是函数$y=f(x)$的图象与函数$y=g(x)$的图象交点的横坐标．

4．二分法求方程近似解的过程中，蕴涵了算法思想，体现了程序化这一现代数学方法，是信息技术与数学内容有机的整合，注意掌握用程序框图来描述二分法的求解过程以及二分法的思想内涵．

KE WAI XUE SHENG LIAN YU WU

课外学生练与悟