同济大学

高等代数与解析几何

教师： 蒋志洪

理学院数学系

§10.2 二次型与二次型的标准形

定义. 设$\mathbb{F}$为复数域或实数域, 则对于$a_{ij} \in \mathbb{F}\ (1 \le i \le jn)$, 和变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 称二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j. \tag{1}$$

为$\mathbb{F}$上n元二次型.

说明. $\mathbb{F}$上的n元二次型与对称矩阵是一一对应. 事实上, 如果f是$\mathbb{F}$上n元二次型, 则我们可以将f写成矩阵形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j = X^tAX$$

这里

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{是对称矩阵}$$

例. 写出二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_2+3x_1x_3-x_2x_3$所对应的对称矩阵.

解. 根据二次型与矩阵对应的法则得

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

例. 请将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$写成矩阵形式.

解. 令

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$f=X^tAX$$

定义. 设A和B两个n阶方阵, 如果存在可逆阵P使得$B = P^t AP$, 则称A与B合同.

命题. 矩阵间的合同关系是一个等价关系.

证明. (1) 自反性 $A = E^t AE$;

(2) 对称性 由$B = P^t AP$和P可逆, 取$Q = P^{-1}$, 得$A = Q^t BQ$;

(3) 传递性 由$B = P_1^t AP_1, C = P_2^t BP_2$, 得$C = (P_1P_2)^t A(P_1P_2)$.

命题. 如果A是对称矩阵, B与A合同, 则B是对称矩阵.

证明. 由B与A合同推出存在可逆阵P使得$B = P^t AP$, 于是

$$B^t = (P^t AP)^t = P^t A^t (P^t)^t = P^t AP = B$$

所以B是对称矩阵.

- **二次型的变量替换**

设f是关于变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次型,

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^t AX$$

进行可逆的变量替换

$$X = PY$$

其中$P = (p_{ij})$是n阶可逆阵, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t$. 则二次型$f$变成关于变量$y_1$,$y_2$,$\cdots$,$y_n$的二次型

命题. 设f是一个二次型, g是由f经过可逆变量替换$X = PY$, 如果f对应的对称矩阵为A, 则g对应的对称矩阵为$B = P^t AP$.

证明. 由命题的条件得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^t AX = Y^t P^t APY = Y^t BY = g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

由于二次型与对称矩阵是一一对应, 所以g对应的对称矩阵为$B = P^t AP$.

- **二次型的标准形**

定义. 设f是一个二次型, 如果f只含平方项, 即

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n d_ix_i^2$$

则称f为标准二次型, 简称标准形.

定理. 设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j=X^tAX$$

是$\mathbb{F}$上的二次型, 则存在可逆阵P, 使得f经变量替换$X=PY$后变为关于新变量$y_1,y_2,\cdots,y_n$的标准二次型$d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2$.

推论. 设A是对称阵, 则存在可逆阵P, 使得$P^tAP=\mathrm{diag}\{d_1,\cdots,d_n\}$.

证明. 对二次型变量的个数n进行归纳, 当$n=1$时, 则$f(x_1)=ax_1^2$是标准形.
归纳假设一个二次型的变量个数$\leq n-1$可以经过可逆变换变成标准形.
现在设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是n个变量的二次型, 如果在f 中没有平方项出现, 即$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=0$, 则至少有一个$a_{ij}\neq 0(i\neq j)$, 不妨设$a_{12}\neq 0$ 作可逆变量替换

$$\begin{cases} x_1 &= z_1+z_2 \\ x_2 &= z_1-z_2 \\ x_j &= z_j, \quad (j=3,4,\cdots,n) \end{cases}$$

由于

$$2a_{12}x_1x_2=2a_{12}(z_1^2-z_2^2)=2a_{12}z_1^2-2a_{12}z_2^2$$

f经变量替换后变成

$$g=2a_{1i}z_1^2+\cdots$$

所以可以假设在f中出现x_1^2

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j\\
=&a_{11}(x_1^2+2\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_1x_j)+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j\\
=&a_{11}[(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j)^2-(\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j)^2]+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j\\
=&a_{11}(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j)^2+\psi(x_2,\cdots,x_n)
\end{aligned}$$

其中$\psi(x_2,\cdots,x_n)=-a_{11}^{-1}(\sum\limits_{j=2}^{n}a_{1j}x_j)^2+\sum\limits_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 是关于$(n-1)$个不变量$x_2,\cdots,x_n$的二次型.

作可逆变变量替换

$$z_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j; \quad z_i = x_i, \ (i = 2, 3, \cdots, n)$$

f变成

$$g(z_1, z_2, \cdots, z_n) = a_{11} z_1^2 + \psi(z_2, \cdots, z_n)$$

由归纳假设,ψ可以经过可逆变量替换

$$w_i = \sum_{j=2}^{n} b_{ij} z_j, \ (i = 2, 3, \cdots, n)$$

变成

$$d_2 w_2^2 + \cdots + d_n w_n^2$$

因此作可逆变量替换

$$y_1 = z_1; \quad y_i = \sum_{j=2}^{n} b_{ij} z_j, \ (i = 2, 3, \cdots, n)$$

g变成

$$a_{11} y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

由于可逆变换的合成还是可逆变换, 所以f可以经过可逆变换变成标准形.

说明. (1) 上面定理的证明是一个构造性证明, 即具体给出了一个二次型标准化的方法, 这个方法称为配方法.

(2) 一个二次型的标准化, 就是设法使对称矩阵合同于对角阵. 如果A是实对称阵, 因为正交阵Q满足$Q^{-1} = Q^t$, 所以正交相似与正交合同是一致的, 即对于实对称阵, 总可找到正交阵Q, 使得A合同对角阵, 即$Q^tAQ = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$.

例. 求一个可逆变换$X = PY$将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$$

化为标准形.

解. (配方法) 由于原二次型无平方项出现, 所以先作可逆变量替换

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \end{cases} \quad \text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) - 6(z_1 - z_2)z_3 + 2(z_1 + z_2)z_3 \\ &= 2z_1^2 - 2z_2^2 - 4z_1z_3 + 8z_2z_3 \\ &= 2(z_1 - z_3)^2 - 2z_3^2 - 2z_2^2 + 8z_2z_3 \end{aligned}$$

再令

$$\begin{cases} w_1 = z_1 - z_3 \\ w_2 = z_2 \\ w_3 = z_3 \end{cases} \quad \text{即} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \text{ 或者 } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2w_1^2 - 2w_2^2 + 8w_2w_3 - 2w_3^2 \\ &= 2w_1^2 - 2(w_2 - 2w_3)^2 + 6w_3^2 \end{aligned}$$

最后令

$$\begin{cases} y_1 &= w_1 \\ y_2 &= w_2 - 2w_3 \\ y_3 &= w_3 \end{cases} \text{即} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \text{或者} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2$$

化成标准形, X 到新变量 Y, 所作的可逆变量替换,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例. 求一个正交变换$X = OY$将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$

化为标准形.

解. 写出f所对应的对称矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求出A的特征值

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

所以A的特征值为:-1和2.

属于特征值-1的特征向量:

$$(-1E-A)X=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X=\mathbf{0}$$

得基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ \eta_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

正交化η_1,η_2得

$$\xi_1=\eta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \xi_2=\eta_2-\frac{(\eta_2,\xi_1)}{(\xi_1,\xi_1)}\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

单位化ξ_1,ξ_2得

$$\varepsilon_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \varepsilon_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

属于特征值2的特征向量:

$$(2E-A)X=\mathbf{0}\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X=\mathbf{0}$$

得基础解系

$$\eta_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

单位化

$$\varepsilon_3=\frac{\eta_3}{\|\eta_3\|}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

正交矩阵

$$O=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

则f经过正交变换$X=OY$后变成

$$f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$$

注意. 一个二次型经可逆变量替换化成标准形, 一般它的标准形是不唯一的, 它依赖于所取可逆变量替换, 不同的可逆变量替换, 得到不同的标准形. 但是标准形中所含的非零平方项个数是唯一的.

定理. 二次型$f = X^tAX$经可逆变量替换$X = PY$ 化为标准形后, 标准形中所含的非零平方项个数等于对称阵A的秩.

证明. 二次型$f = X^tAX$经可逆变量替换$X = PY$. 化为标准形Y^tBY时, 对称阵$B = P^tAP$是对角阵$\mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$. 但$P$是可逆阵, 所以$B = P^tAP$与$A$有相同的秩, 而$B$的秩就是非零$d_i$的个数. 也就是标准形$d_1y_1^2 + \cdots + d_ny_n^2$中非零平方项的个数.

说明. 因为二次型$f = X^tAX$与对称阵A是一一对应, 将称对称阵A的秩为二次型f的秩.

练习1. 习题10.2:1(2),2,4

练习2. 习题9.6:1(1)