同济大学

# 高等代数与解析几何

教师： 蒋志洪

理学院数学系

## §10.3 规范形与惯性定理

**定义**. (1) 当$\mathbb{F}$是复数域时, $f$是一个二次型的标准形, 如果$f$的所有非零平方项的系数都是1, 则称为$f$ 的规范形.

(2) 当$\mathbb{F}$是实数域时, $f$是一个二次型的标准形, 如果$f$的所有非零平方项的系数都是$\pm 1$, 则称为$f$ 的规范形.

**定理**. 一个复二次型$f$可以经过可逆变量替换化为规范形, 并且规范形由该二次型的秩唯一确定.

**证明.** 设$f = X^tAX$是一个复二次型, 则$f$可以经过可逆变量替换$X = PY$化为标准形:

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2 \tag{1}$$

其中$d_i(i = 1, 2, \cdots, r)$都不为零, $r$为复对称阵$A$的秩. 因为复数总可开平方, 所以可以继续施行可逆变量替换

$$\begin{cases} y_1 & = & \frac{1}{\sqrt{d_1}}z_1 \\ & \cdots & \\ y_r & = & \frac{1}{\sqrt{d_2}}z_r \\ y_{r+1} & = & z_{r+1} \\ & \cdots & \\ y_n & = & z_n \end{cases}$$

将$f$化为

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$$

在这个标准形中, 所有非平方项的系数都是1, 所以$f$可以经过可逆变量替换化为规范形, 而且$r$由二次型的秩唯一确定的.

**推论.** 两个$n$元复二次型经可逆变量替换可以互相转化的充分必要条件是它们有相同的秩. 换言之, 两个复对称阵合同的充分必要条件是它们有相同的秩.

**证明.** 任一秩为$r$的复对称阵必复合同于对角阵

$$\mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0\} = \Lambda$$

其中1个的个数为$r$. 如果复对称阵$A, B$有相同的秩, 则它们都合同于$\Lambda$, 而合同关系是等价关系, 所以$A, B$合同.

反之, 如果$A, B$合同, 即存在可逆阵$P$, 使$B = P^t AP$. 它们当然有相同的秩.

**定理.**(惯性定理) 一个实二次型$f$可以经过可逆变量替换化为规范形，而且规范形唯一确定.

**证明.** 设$f = X^tAX$是一个秩为$r$ 的实二次型，则$f$可以经过可逆变量替换化为标准形

$$d_1y_1^2 + \cdots + d_py_p^2 - d_{p+1}y_{p+1}^2 - \cdots - d_ry_r^2$$

其中$d_i > 0(i = 1, 2, \cdots, r)$. 由于在实数域中正实数可以开平方，所以再施行一个可逆变量替换

$$\begin{cases} y_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}}z_i, & 1 \le i \le r \\ y_j = z_j, & i+1 \le j \le n \end{cases}$$

可以将$f$化为

$$z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2 \tag{2}$$

由于这个标准形的非零平方项的系数是$\pm 1$，所以它是规范形，即$f$可以经过可逆变量替换化为规范形.

(唯一性) 如果$f$经过两个不同的可逆变量替换$X=BY$和$X=DZ$后得到两个规范形

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

和

$$f=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$$

如果$p\neq q$. 不妨设$p>q$, 则

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$$

其中变量$Z$与$Y$的关系为$Z=D^{-1}BY$. 令

$$A=D^{-1}B=(a_{ij})$$

则

$$\begin{cases} z_1=a_{1,1}y_1+\cdots+a_{1,p}y_p+a_{1,p+1}y_{p+1}+\cdots+a_{1,n}y_n \\ \quad \cdots\cdots \\ z_q=a_{q,1}y_1+\cdots+a_{q,p}y_p+a_{q,p+1}y_{p+1}+\cdots+a_{q,n}y_n \\ z_{q+1}=a_{q+1,1}y_1+\cdots+a_{q+1,p}y_p+a_{q+1,p+1}y_{p+1}+\cdots+a_{q+1,n}y_n \\ \quad \cdots\cdots \\ z_n=a_{n,1}y_1+\cdots+a_{n,p}y_p+a_{n,p+1}y_{p+1}+\cdots+a_{n,n}y_n \end{cases}$$

取$y_{p+1}^0 = \cdots = y_n^0 = 0, y_1^0, \cdots, y_p^0$是满足齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,p}y_p = 0 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{q,1}y_1 + \cdots + a_{q,p}y_p = 0 \end{cases}$$

的非零解. 由于$p > q$, 所以这样的非零解存在, 由$Z = AY$得到$z_1^0 = \cdots = z_q^0 = 0$. 于是

$$\begin{aligned} 0 < (y_1^0)^2 + \cdots + (y_p^0)^2 &= (y_1^0)^2 + \cdots + (y_p^0)^2 - (y_{p+1}^0)^2 - \cdots - (y_r^0)^2 \\ &= (z_1^0)^2 + \cdots + (z_q^0)^2 - (z_{q+1}^0)^2 - \cdots - (z_r^0)^2 \\ &= -(z_{q+1}^0)^2 - \cdots - (z_r^0)^2 \le 0 \end{aligned}$$

矛盾. 所以$p > q$不成立. 同理可证$p > q$不可能. 于是$p = q$

**定义.** 在实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的规范形中, 正平方项个数$p$称为它的正惯性指数; 负平方项个数$r-p$称为它的负惯性指数; 它们的差$p-(r-p)=2p-r$称为它的符号差.

于是惯性定理可叙述为

**定理.** 实二次型的标准形中, 非零平方项个数等于该二次型的秩; 正平方项的个数等于该二次型的正惯性指数. 负平方项个数等于它的负惯性指数.

**推论.** 两个$n$元实二次型经过可逆变量替换可以互相转化的充分必要条件是它们有相同的秩和正惯性指数.

**推论.** 两个实对称阵合同充要条件这两个矩阵有相同的秩和相同正惯性指数.

**练习.** 习题10.3:1,2,3,4.