同济大学

高等代数与解析几何

教师： 蒋志洪

理学院数学系

§7.3 特征值与特征向量

定义. 设V是数域$\mathbb{F}$ 上的线性空间, T是V 上的线性变换. 如果存在$\lambda_0 \in \mathbb{F}$ 和非零向量$\alpha \in V$ 使得

$$T(\alpha) = \lambda_0 \alpha$$

则λ_0 称为线性变换T 的一个特征值, α 称为线性变换T 的属于特征值λ_0 的一个特征向量.

命题. 设λ_0 是线性变换T 的一个特征值, 则集合

$$V_{\lambda_0} = \{\alpha \in V | T(\alpha) = \lambda_0 \alpha\}$$

是V 的一个维数≥ 1 的子空间.

证明. 由于λ_0是T 的一个特征值, 所以至少有一个非零向量$\alpha \in V_{\lambda_0}$. 对于$\alpha_1, \alpha_2 \in V_{\lambda_0}$和$k \in \mathbb{F}$, 则

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 + \alpha_2) &= T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = \lambda_0\alpha_1 + \lambda_0\alpha_2 = \lambda_0(\alpha_1 + \alpha_2) \\ T(k\alpha_1) &= kT(\alpha_1) = k\lambda_0\alpha_1 = \lambda_0(k\alpha_1) \end{aligned}$$

所以$\alpha_1 + \alpha_2, k\alpha_1 \in V$. 这说明$V_{\lambda_0}$ 是V 的一个子空间. 又因为V_{λ_0} 至少含有一个非零向量, 因此$\dim V_{\lambda_0} \geq 1$.

定义. 称V_{λ_0}为属于λ_0 的特征子空间, 简称特征子空间.

练习. 习题7.3: 1,6.

设V是数域$\mathbb{F}$上的线性空间,T V上的线性变换,T在V的一个有序基$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$下的矩阵为$A$, λ_0是T的特征值, α是属于λ_0的特征向量, α在基$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$下的坐标为$X$, 则$\alpha$非零说明$X$非零,

$$T(\alpha) = \lambda_0\alpha \Leftrightarrow AX = \lambda_0 X$$

定义. 设A是n阶方阵, 如果存在$\lambda_0 \in \mathbb{F}$和非零n维列向量X使得

$$AX = \lambda_0 X$$

则λ_0称为方阵A的一个特征值, X称为方阵A的属于特征值λ_0的一个特征向量.

由于

$$AX = \lambda_0 X \Leftrightarrow \lambda_0 X - AX = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\lambda_0 E - A)X = \mathbf{0}$$

所以齐次线性方程组$(\lambda_0 E - A)X = \mathbf{0}$有非零解充要条件$|\lambda_0 E - A| = 0$

定义. 设A是n阶方阵, λ是一个不定元, 多项式$|\lambda E - A|$称为A的特征多项式, 记为$\Delta_A(\lambda)$, 特征多项式的根称为A的特征根.

注意. 方阵A的特征根就是方阵A的特征值.

方阵A 的特征多项式$\Delta_A(\lambda)$ 的一般性质

(1)设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是$\Delta_A(\lambda)$ 在复数域中的n 个根(可能有重根), 则

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\mathrm{tr}(A),\quad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$$

证明. 设$\Delta_A(\lambda)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n$, 由于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是$\Delta_A(\lambda)$ n 个根, 所以$\Delta_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$. 于是$c_1=-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$, $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=(-1)^nc_n$
另一方面

$$\Delta_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

由行列式展开可知, 除非主对角线上元素的连乘外, 在展开式的其余各项中至多只能包含$(n-2)$ 个主对角线上的元素, 所以其余各项对应的λ 的次数最多是$n-2$, 因此$\Delta_A(\lambda)$ 中含λ 的n 次幂与$n-1$ 次幂的项只能是

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}$$

所以

$$c_1=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})=-\mathrm{tr}(A)$$

在$\Delta_A(\lambda)$中令$\lambda=0$得$c_n=\Delta_A(0)=|-A|=(-1)^n|A|$

(2) 如果$A \sim B$, 则A和B有相同的特征多项式

证明. 设$B = P^{-1}AP$, 则

$$\begin{aligned}|\lambda E - B| &= |\lambda P^{-1}EP - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda E - A)P| \\ &= |P^{-1}||(\lambda E - A)||P| \\ &= |\lambda E - A|.\end{aligned}$$

注意. 这个性质的逆不成立, 例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A与B的特征多项式相同, 但是A与B不相似.

定义. 设T 是线性空间V 的线性变换, $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是V 的一个有序基T在基$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$下的矩阵为$A$, 则$T$的特征多项式记为$\Delta_T(\lambda)$, 定义为$\Delta_T(\lambda) := \Delta_A(\lambda)$.

说明. 由于相似矩阵有相同的特征多项式, 所以上面的定义确切的.

练习. 习题7.3: 7, 8(2),(3).

特征值与特征向量的计算

设V是数域$\mathbb{F}$ 上的线性空间, T是V 上的线性变换, 求T的特征值与特征向量的步骤如下:

(1) 在V中取定一个有序基$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 求出$T$ 在这组基下的矩阵A.

(2) 求出A 的特征多项式$\Delta_A(\lambda) = |\lambda E - A|$.

(3) 求出方程$\Delta_A(\lambda) = 0$的全部根, $\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 它们就是$T$ 的全部特征值.

(4) 对每个特征值λ_i , 解齐次线性方程组$(\lambda_i E - A)X = 0$, 求出它的基础解系$\eta_{i,1}, \cdots, \eta_{i,r_i}$.

(5) 求出V中的向量$\beta_{i,1}, \cdots, \beta_{i,r_i}$使得对于$(k = 1, 2, \cdots, r_i)$, $\beta_{i,k}$在有序基$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$下的坐标为$\eta_{i,k}$. 则$\beta_{i,1}, \cdots, \beta_{i,r_i}$ 构成了特征子空间V_{λ_i} 的一个基. 而V_{λ_i}中的非零向量就是属于λ_i 的全部特征向量或者说$\beta_{i,1}, \cdots, \beta_{i,r_i}$所有的非零线性组合就是属于$\lambda_i$ 的全部特征向量.

说明. 上面步骤(2)到(4)给出求方阵A的特征值和特征向量步骤, 基础解系$\eta_{i,1}, \cdots, \eta_{i,r_i}$正好是方阵$A$的特征子空间$V_{\lambda_i}$的基,所以它们所有的非零线性组合就是属于$\lambda_i$ 的全部特征向量.

例. 设V是F上的三维线性空间, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$是$V$的一个有序基, T是V上的线性空间, 它在有序基$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$下的矩阵为:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

求T的特征值和特征向量.

解. A的特征多项式

$$\Delta_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2$$

解代数方程

$$\Delta_A(\lambda)=0$$

得根: $\lambda=0,\lambda=3$(二重根), 所以T的特征值为0和3.

对于特征值0, 解齐次线性方程组

$$(0E-A)X=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0-2 & 1 & 1\\ 1 & 0-2 & 1\\ 1 & 1 & 0-2\end{pmatrix}X=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0\\ x_1-2x_2+x_3=0\\ x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$$

将系数矩阵化成简化阶梯阵

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

写出简化阶梯阵对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}$$

自由变量为x_3, 令$x_3=1$, 得齐次线性方程组的基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

所以$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$是特征子空间$V_0$的基, 属于特征值0的所有特征向量为: $k\beta_1,(k\neq 0)$

对于特征值3, 解齐次线性方程组

$$(3E-A)X=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3-2&1&1\\1&3-2&1\\1&1&3-2\end{pmatrix}X=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

将系数矩阵化成简化阶梯阵

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

写出简化阶梯阵对应的齐次线性方程组:

$$x_1+x_2+x_3=0$$

自由变量为x_2,x_3,

$$令\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},得解\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};令\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},得解\eta_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

则η_2,η_3是齐次线性方程组$(3E-A)X=\mathbf{0}$的基础解系, 所以$\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=-\alpha_1+\alpha_3$是特征子空间$V_3$的基, 属于特征值3的所有特征向量为: $k_1\beta_2+k_2\beta_3,(k_1,k_2$不全为零$)$

例. 设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求A的特征值和特征向量.

解. A的特征多项式为

$$\Delta_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

解代数方程

$$\Delta_A(\lambda) = 0$$

得根$\lambda = 2$和$\lambda = 1$(二重根), 所以A的特征值为1和2.

对于特征值1, 解齐次线性方程组

$$(1E-A)X=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}X=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2=0\\4x_1-2x_2=0\\-x_1-x_3=0\end{cases}$$

将系数矩阵化成简化阶梯阵

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

写出简化阶梯阵对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+2x_3=0\end{cases}$$

自由变量为x_3, 令$x_3=1$, 得齐次线性方程组的基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

所以η_1是特征子空间V_1的基, 属于特征值1的所有特征向量为: $k\eta_1,(k\neq 0)$.

对于特征值2, 解齐次线性方程组

$$(2E-A)X=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&-1&0\\4&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}X=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_2=0\\4x_1-x_2=0\\-x_1=0\end{cases}$$

将系数矩阵化成简化阶梯阵

$$\begin{pmatrix}3&-1&0\\4&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

写出简化阶梯阵对应的齐次线性方程组:

$$\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$$

自由变量为x_3, 令$x_3=1$得解

$$\eta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

则η_2 是齐次线性方程组$(2E-A)X=\mathbf{0}$的基础解系, 所以η_2是特征子空间V_2的基, 属于特征值2的所有特征向量为: $k\eta_2(k\neq 0)$

练习1. 设V是复数域上的线性空间, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$是$V$的有序基, T是V上线性变换它在有序基$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

求T的特征值与特征向量.

练习2. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

求A的特征值与特征向量.

命题. 设A 是$m\times n$矩阵, B 是$n\times m$矩阵并且$m\geq n$. 则

$$|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda E_n - BA|$$

证明. 下面我们分情况来证明命题

(1) 当$m=n$并且A是可逆阵时, 则

$$AB = ABAA^{-1} \Rightarrow AB \sim BA$$

所以AB和BA有相同的特征多项式, 即

$$|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$$

(2) 当$m=n$并且A是不可逆阵时, 令

$$A(t)=Et+A$$

显然$A(0)=A$. 由于$|A(t)|$是t的n次多项式, 所以满足

$$\begin{cases}|A(t)|=0\\ t\neq 0\end{cases}$$

的t不会超过n个, 不妨设它们为$\{t_1,\cdots,t_k\}$, 令

$$t_0=\min\{|t_1|,\cdots,|t_k|\}$$

则当$0<t<t_0$时, $|A(t)|\neq 0$, 即$A(t)$可逆. 于是当$0<t<t_0$时,

$$|\lambda E-A(t)B|=|\lambda E-BA(t)|$$

由于$|\lambda E-A(t)B|$和$|\lambda E-BA(t)|$都是t的多项式, 所以它们都是t的连续函数. 因此

$$\begin{aligned}|\lambda E-AB|&=|\lambda E-A(0)B|=\lim_{t\to 0}|\lambda E-A(t)B|\\&=\lim_{t\to 0}|\lambda E-BA(t)|=|\lambda E-BA(0)|=|\lambda E-BA|\end{aligned}$$

(3) 当$m > n$时, 定义m阶方阵$\widetilde{A}$和m阶方阵$\widetilde{B}$如下:

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} := \begin{pmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

则

$$\widetilde{A}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = AB, \quad \widetilde{B}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} |\lambda E_m - AB| &= |\lambda E_m - \widetilde{A}\widetilde{B}| = |\lambda E_m - \widetilde{B}\widetilde{A}| \\ &= \left| \begin{pmatrix} \lambda E_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda E_{m-n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} BA & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda E_n - BA & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda E_{m-n} \end{vmatrix} = \lambda^{m-n} |\lambda E_n - BA| \end{aligned}$$

说明. 命题告诉我们: AB和BA的非零特征值是一样的, 并且命题提供了降阶计算特征多项式的方法.

例. 设A 是$m \times n$矩阵, B 是$n \times m$矩阵. 证明$E_m - AB$可逆充要条件$E_n - BA$.

证明. $E_m - AB$可逆充要条件$|E_m - AB| \neq 0$充要条件1不是AB的特征值充要条件1不是BA的特征值逆充要条件$|E_m - BA| \neq 0$逆充要条件$E_n - BA$.

也可以这样证明:
不妨假设$m > n$, 则

$$|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda E_n - BA|$$

令$\lambda = 1$得: $|E_m - AB| = |E_n - BA|$. 所以$E_m - AB$可逆充要条件$E_n - BA$.

例. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$, 其中

$$a_{ij}=\begin{cases} 1+i\cdot j & i=j \\ i\cdot j & i\neq j \end{cases}$$

求A的特征值.

解. 设$B=(i\cdot j)_{n\times n}$, 则$A=E_n+B$. 由于$R(B)=1$, 所以B有下面的满秩分解:

$$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} |\lambda E_n-A| &= |\lambda E_n-(E_n+B)|=|(\lambda-1)E_n-B| \\ &= |(\lambda-1)E_n-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}|=(\lambda-1)^{n-1}|(\lambda-1)E_1-\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}| \\ &= (\lambda-1)^{n-1}(\lambda-1-\sum_{k=1}^{n}k^2) \end{aligned}$$

所以A特征值为1和$1+\sum_{k=1}^{n}k^2$.

练习1. 证明不可能存在n阶方阵A和B使得

$$AB - BA = E$$

练习2. 求下面矩阵的特征值

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

定义. 设V是n维线性空间, T是V上的线性变换, 如果在V中存在一个有序基使得T在这个有序基下的矩阵为对角阵, 则称T为可对角化线性变换.

定义. 设A是n阶方阵, 如果存在可逆阵P, 使得$P^{-1}AP$为对角阵, 则称A为可对角化矩阵

命题. 设V是n 维线性空间, T是V上的线性变换, T 在一个有序基下的矩阵为A. 则T是可对角化线性变换充要条件A 是可对角化矩阵

证明. (必要性)T可对角化, 即存在有序基$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 使得T在这个有序基下的矩阵Λ是对角阵. 设P是$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$到$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$的过渡矩阵则$P^{-1}AP = \Lambda$, 即$A$可对角化.

(充分性)A可对角化, 即存在可逆阵P使得$P^{-1}AP = \Lambda$ 是对角阵, 令$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P$, 由于$P$可逆, 所以$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$是$V$的一个有序基, T在有序基$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$下的矩阵$\Lambda$是对角阵, 即$T$可对角化.

例. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

证明A不可对角化

证明. (反证)如果A 可对角化, 则存在2 阶可逆阵P使得$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{a, b\}$, 即$A \sim \mathrm{diag}\{a, b\}$. 从而$|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 即$(\lambda - 1)^2 = (\lambda - a)(\lambda - b)$, 由此推出$a = b = 1$, 于是$\mathrm{diag}\{a, b\} = E$. 这时,$A = PBP^{-1} = E$. 这个矛盾证明了$A$ 不可对角化.

练习. 习题7.3: 5.