

中学物理思维方法丛书

顾 问 周培源 于光远

序 言 阎金铎

主 编 王溢然 束炳如

编 委 (按姓氏笔划为序)

 王明秋 王溢然 刘宗贤

 束炳如 岳燕宁 谢 凯

本册编著 王溢然 王明秋

插 图 朱 然

物理学中一切先验性的陈述都起源于对称性。

——魏尔

(德国数学物理学家)

序 言

在中学物理教学过程中,学生获取知识的同时,要重视从科学宝库中汲取思维营养,加强科学思维方法的训练。

思维方法是一个很大的范畴,有抽象思维、形象思维、直觉思维等。以抽象思维而言,又有众多的方法,在逻辑学中都有较严格的定义。对于以广大中学生为主的读者群,就思维科学意义上按照严格定义的方式去介绍这众多的思维方法,显然是没有必要的,也是不会收到成效的。由王溢然、束炳如同志主编的这套丛书,不追求思维科学意义上的完整,仅选取了在物理科学中最有影响、中学物理教学中最为常见的这些思维方法(包括研究方法)为对象,在较为宽泛的意义上去展开,立意新颖,构思巧妙。全套丛书共13册,各册彼此独立,都以某一二类思维方法为主线,在物理学史的恢宏长卷中,撷取若干生动典型的事例,先把读者引入到饶有兴趣的科学氛围中,向读者展示这种思维方法对人类在认识客观规律上的作用。然后,围绕这种思维方法,就其在中学物理教学中的

功能和表现、以及其在具体问题中的应用作了较为深入、全面的开掘,使读者能从物理学史和中学物理教学现实两方面较宽广的视野中,逐步领悟到众多思维方法的真谛。

这套丛书既不同于那些浩繁的物理学史典籍,也有别于那些艰深的科学研究方法论的专著,但却兼容了历史和方法、照顾了普及与提高、联系了中学教学实际、突出对中学物理教学的指导作用和具体应用。文笔生动、图文并茂,称得上是一套融史料性、科学性、实用性、趣味性于一体的优秀课外读物。无论对广大中学生(包括中等文化程度的读者)还是中学物理教师、教学研究人员以及师范院校物理专业的大学生,都不无裨益。

科学研究是一项艰巨的创造性劳动。任何科学发现和科学理论都是在一定的背景下,经过科学家精心的实验观测、复杂的思维活动后的产物。在攀登道路上充满着坎坷和危机,并不是一帆风顺、一蹴而就的。科学家常常需及时地(有时甚至是痛苦地)调整自己的思维航向,才能顺利抵达成功的彼岸。因此,任何一项科学新发现、一种科学新理论的诞生,决不会仅是某种单一思维活动的结果。这也就决定了丛书各册在史料的选用上必然存在的某些重复和交叉。这是一个不足之处,但反过来却可转化为使读者的思维层次“多元化”的一个优点。不过,作为整套丛书来说,如果在史料的选用上搭配得更精细一些、思维活动的开掘上更为深刻一些,将会使全书更

臻完美。

我把这套丛书介绍给读者,一方面希望引起广大中学生的兴趣,能从前辈科学家思维活动轨迹中汲取智慧,活化自己的灵感,开发潜在的智能;另一方面希望中学物理教师在此基础上继续开展对学生思维方法训练的研究,致力于提高学生的素质,以适应新时期的需要。

我也真诚地希望这套丛书能成为图书百花园中一朵惹人喜爱的花朵。

阎金铎

1992年10月

引 言

对称是一个很深刻的问题,其应用范围早已远远超出早期对空间图形讨论这个狭窄的领域.它已深入到哲学、美学以及自然科学的许多方面.它在现代物理学的粒子物理、固体物理、原子物理等许多领域都具有非常重要的意义.详细描述对称性有专门的数学语言——群论.这不是本书的任务.

在这本小册子中,我们希望通过直观的形象,形成关于对称的初步认识,并在基础物理范围内建立关于对称的一般概念,然后通过实际问题的分析,使广大读者领会对称思想,能运用对称思想去指导物理学习,研究和解决有关中学物理中的一些问题.

作 者

1992年5月

目 录

序言

引言

一、什么叫对称	(1)
1. 对称的初步认识	(1)
2. 对称的进一步说明	(6)
3. 对称性原理	(12)
4. 对称与物理规律	(18)
二、对称思想在科学认识中的作用	(22)
1. 由电产生磁 由磁产生电	(22)
2. 磁场变化产生电场 电场变化产生磁场	(27)
3. 德布罗意提出物质波	(33)
4. 狄拉克预言正电子	(38)
5. “ $\tau - \theta$ ”之谜	(43)
三、中学物理中几种典型的对称	(51)
1. 镜像对称	(51)
2. 中心对称	(57)
3. 结构对称	(62)
4. 电路对称	(66)
四、对称在中学物理中的应用	(70)

1. 对称对学习和运用物理知识的指导作用	(70)
2. 巧用对称性思想解题	(73)
结束语	(137)
主要参考资料	(139)

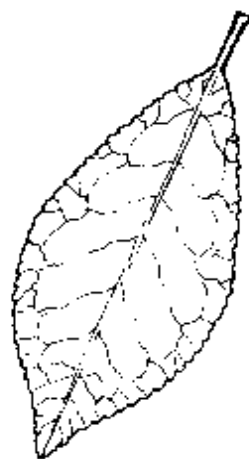
一、什么叫对称

1. 对称的初步认识

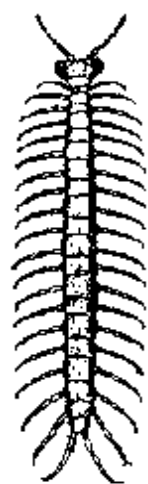
对称的概念来源于生活.最初,人们从自身的形体结构,从对植物的花、叶,从动物的骨骼分布等各种天然事物的观察中(图1),认识到普遍存在着一种左、右对应关系.这是生活中关于对称的基本含义,指的仅是几何图形对于中心点(线、面)左右两边的相对对称.我国《现代汉语词典》中的解释:“对称是指图形或物体对某个点、直线或平面而言,在大小、形状和排列上具有一一对应关系.”



脸部



树叶



蜈蚣

图 1

例如,等腰三角形对于它的中心线是相对称的(左右对称),这种左右对称的几何图形可以分成左右两个相同部分,将左右两边交换可以保持图形不变。

生活中关于对称的另一种含义是指匀称,意味着有良好的比例、良好的平衡,体现着整体各部分的协调性。从这一层意思上说,对称和美紧密相关。在《韦伯斯特辞典》中,对称的意思是“平衡的比例”或者“产生于平衡的比例的形式美”。

由于对称反映着一种和谐美,所以被广泛应用于生活和技术的各个领域。

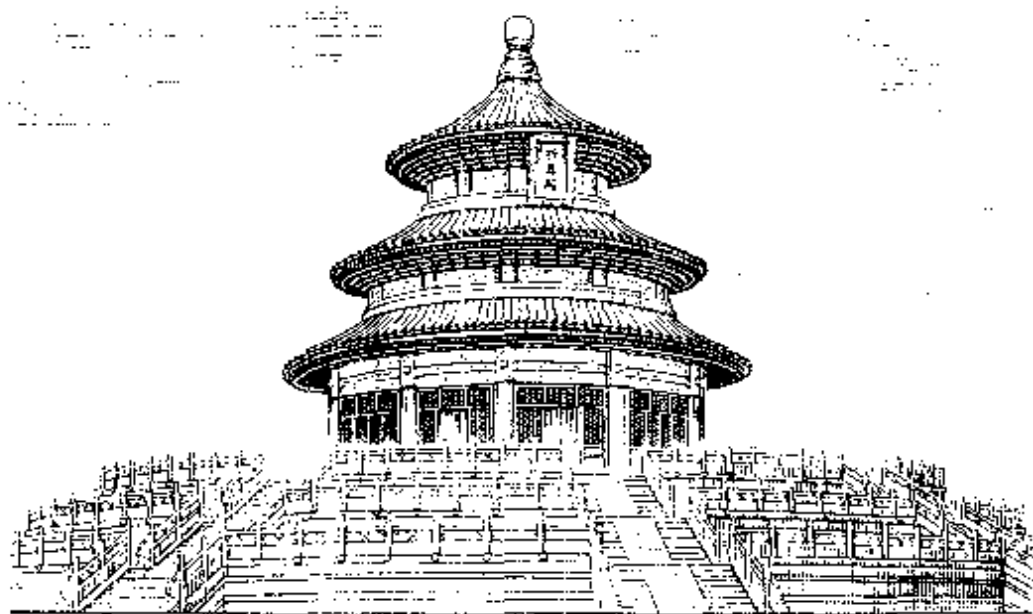


图 2 北京天坛

我国古建筑中的宫殿、寺庙、墓道等,大都是对称布局。如北京故宫建筑群的排列和天坛的结构等(图 2),能体现着一种庄严、稳重的美感。园林中许多花墙和窗格、城市中人行道砌块的图案等,也都渗透着对称性(图 3)。

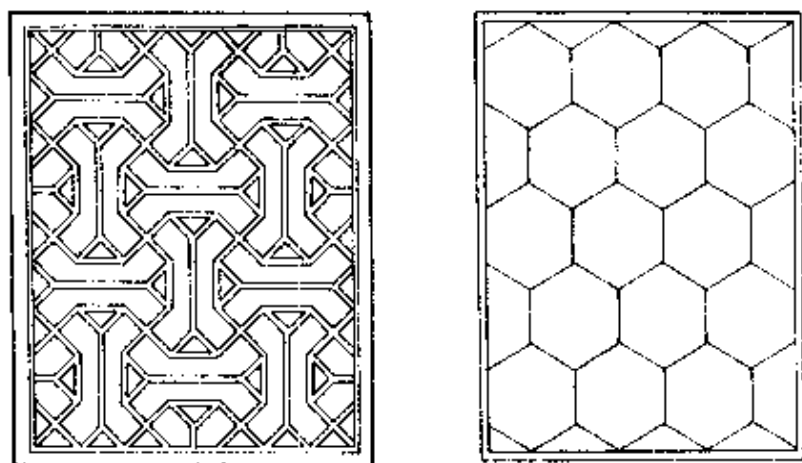
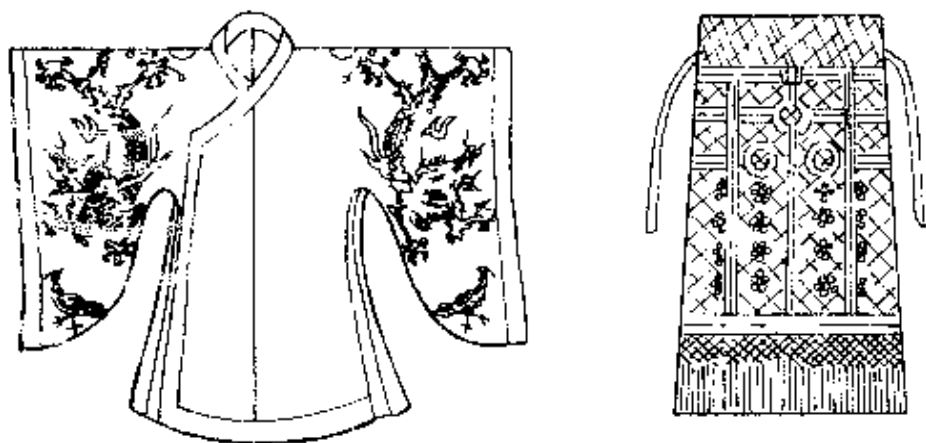


图 3

许多艺术品更是刻意追求着良好的比例和平衡、谐和的感觉。如古代衣冠、服饰的图案常对称分布,以显示主人公的端庄(图 4);绘画中人在站立和坐姿中各部分都需有一定的比例(图 5);汉字的书法更是有着严谨的间架结构,使人感到优美、匀称、舒畅(图 6)。



古代衣冠服饰

图 4



人的站姿和坐姿

图 5

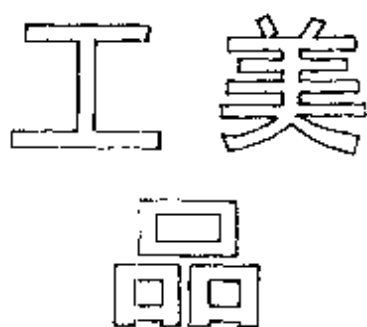


图 6



图 7

即使是筵席中服务员在圆桌面上布置的餐具,也都十分讲究对称.如图7,碟子和筷子相间,严格等距,形成一幅很整齐的画面.

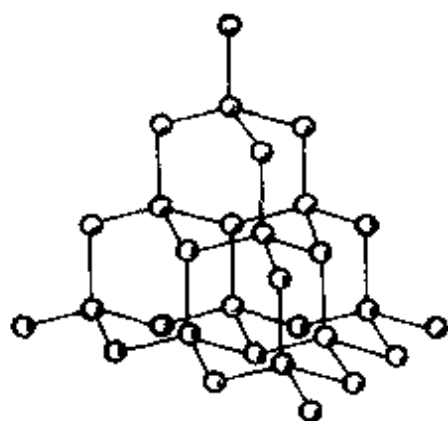
许多动物建筑师在构筑巢穴时也非常“欣赏”对称性,其中最著名的就是蜂房结构,如图8所示.



蜂房结构

图 8

在无机世界上最惊人的对称性例子是晶体.组成晶体的物质微粒(分子、原子、离子)在各自的平衡位置附近振动,好像被弹性的弦系在这个位置上,从而形成一个固定的有规则的结构,即空间点阵结构.图 9 所示就是金刚石晶体的点阵结构.由于晶体内部物质微粒的有规则排列,因此其外形常显示出美丽的对称性.如图 10 所示的雪花就是六边形对称性最有名的样品.



金刚石点阵结构

图 9

上面列举的这些对称性实例大多是静止的,但希望不要形成一个错觉.

实际上对称并非是一个静态的概念,更多的也体现在运动变化之中.

1974 年 5 月 30 日,毛泽东主席约见来访的著名美籍华人物理学家李政道教授.见面时毛泽东想了解的第一件事就是物理学中的对称性.当时,李政道和毛泽东的坐椅中间有一个小茶几,上面放着铅笔、笔记本和两杯绿茶.李政道把铅笔放在笔记本上,把笔尖指向毛泽东,然后再把笔尖指向自己,笔尖转过来,又转过去.李

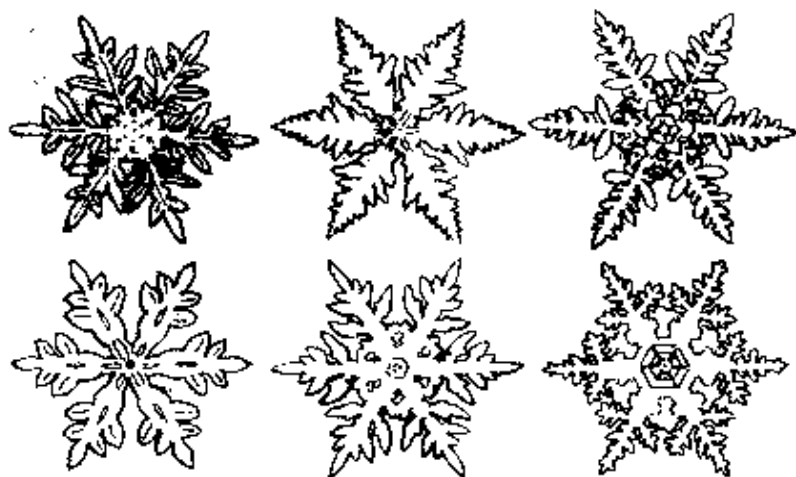


图 10 雪花

政道说：“这运动没有一刻停止，但这整个过程却具有对称性。”毛泽东很欣赏李政道的演示。李政道的这一简单生动的演示，直观地显示了对称性也存在于运动变化之中。

2. 对称的进一步说明

几何图形的左右对称，具有将左右两边交换位置保持图形不

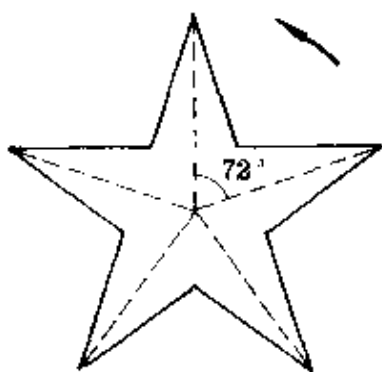


图 11

变的性质，由此推广出去：凡是一个图形由若干个相同部分组成，或者说一个图形经过左右交换、平移、转动后保持不变，它就是对称的。例如一个五角星由五个相同部分组成，将五角星绕其中心轴（垂直五角星的平面）转动 72° ，整个图形保持不变（图 11）。从这个意义上说，对称和不变具有等价性。

以后，随着人们对自然界认识的深化和自然科学的发展，对称的概念已不再局限于空间图形了。例如，季节的轮回、钟表等时间上的周期性可以作为时间的对称；自然界运动规律在空间和时间

中的不变性则是运动规律的对称等。

因此,对称的概念现在已具有普遍的意义。

如果我们把对称性问题中的研究对象称为“体系”,一个体系可以处于不同的“状态”,体系从一个状态到另一个状态的变换称为“操作”,那么,体系从一个状态变到等价的另一个状态(或者说使体系保持不变)的操作就称为“对称操作”,也可称为体系对这种操作是对称的。

在对称操作中,最基本的两种是空间反演操作和时间反演操作。

(1)空间反演操作

如果一个物体或一个空间构形能通过平面 E 的反射与自己重合,在物理学中就称这个物体或空间构形对于给定的平面 E 是对称的。如图 12 所示,平面 E 可把右边的任一点 P 变成它的像 P' ,这种对称性称“左右对称”或“镜像对称”,它就是在空间反演操作下不变的对称性。这也就是我们平常最为熟悉的一种对称性。

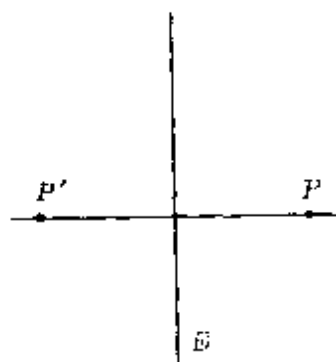


图 12

如果一个图形绕某轴的转动与自己重合,那就是具有绕该轴的转动对称性。如图 13 中平面上的圆,它绕中心轴旋转任意角度后都能与自己重合,因此这种转动都是对称操作。如果在圆内加一对相互垂直的直径(图 14),显然,只有旋转 90° 的整数倍时才与它自身重合,即才是对称操作。可见图 14 中的图形要比图 13 中单纯一个圆的对称性少。

古人对宇宙认识的重要支柱是对称性。平面上的圆、空间的球,由于它们转动时完全对称,因此被古希腊毕达哥拉斯学派认为是最完美的几何图形。亚里士多德(Aristotle, 希腊, 前 384—前 322)

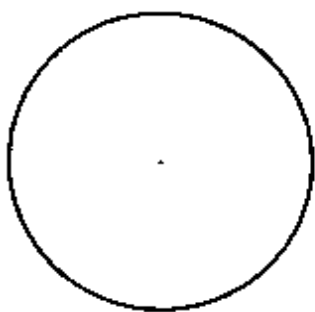


图 13

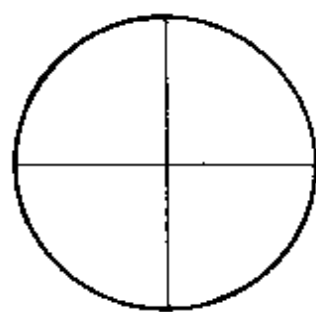


图 14

也正是从这一思想基础出发,认为各种天体的形状均为球形.

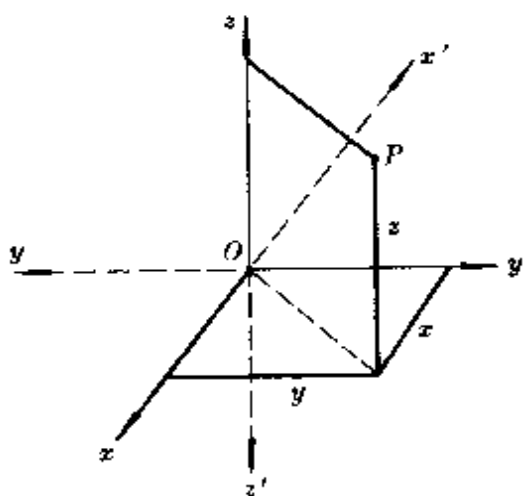


图 15

一般情况下,对于三度空间的物体,空间反演就是把各空间坐标轴同时反转.如图 15 所示直角坐标轴 x, y, z (用实线表示),当各坐标轴方向同时反向时,分别变为 x', y', z' (用虚线表示),则一质点 P 的位置坐标从原来的 (x, y, z) 变为 $(-x, -y, -z)$.物体在原坐标系与反演后的坐标系中各运动规律之间的关系,相当于物体和它在镜中

所成的像之间的关系.

应该注意,对物理中不同的矢量,空间反演后表现的结果也有所不同.如某物体在原坐标系中发生一位移 s ,对于给定的平面 E ,设位移的垂直分量为 s_{\perp} ,平行分量为 s_{\parallel} .经空间反演操作后,位移 s 变成了镜中的像 s' ,它的垂直分量和平行分量分别为 s'_{\perp} 和 s'_{\parallel} ,如图 16 所示.显然,只是其垂直分量反向,平行分量不变.其他如速度矢量 v 、加速度矢量 a 、力矢量 F 等,经空间反演操作后,与反射面垂直的分量反向,与反射面平行的矢量不变.这一类

矢量称为极矢量。

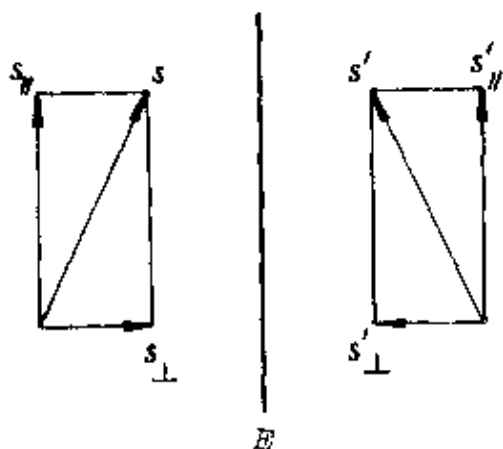


图 16

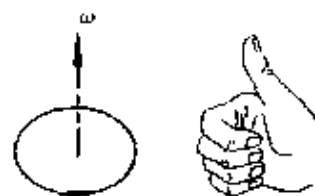


图 17

另有一类矢量的情况刚好与此相反,如转动中的角速度.设有某个物体对于给定平面 E 做匀速转动时,其转动方向与角速度矢量方向构成右螺旋系统——右手握拳,大拇指竖直,四指环绕方向表示转动方向,大拇指的指向即为角速度矢量方向(图 17).发生空间反演操作时,垂直反射面的分量不变,平行反射面的分量反向.因此,反演后的转动方向与角速度矢量方向间仍构成右螺旋系统,如图 18 所示.这一类矢量称为轴矢量.

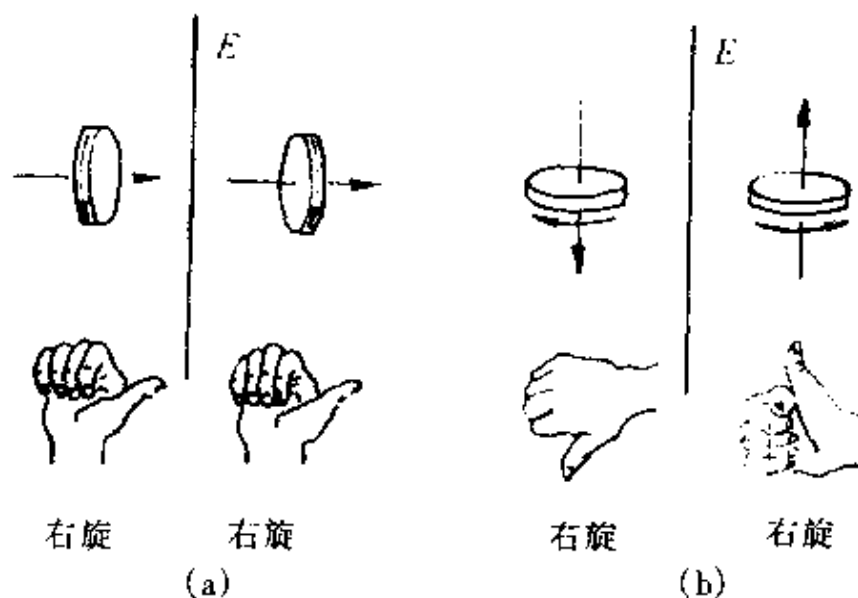


图 18

(2) 时间反演操作

时间反演就是把时间的流向倒转,使事件逆着原来的方向进行.就像我们用录像机把真实的生活过程记录下来后倒过来放映.如以放映这天为基点,则像带上摄下的前10天、前8天、前6天、前4天、前2天的生活镜头,倒着放映时,将先出现后来拍摄的生活镜头,好像我们先过后天,再过明天、今天一般,如图19所表示的那样.



图 19

拍电影时,一个演员从高墙上跃下,倒着放映时,就会表现出这个演员有绝顶的“轻功”,他能轻而易举地从地面上一跃而起,反身跳上高墙(图20).

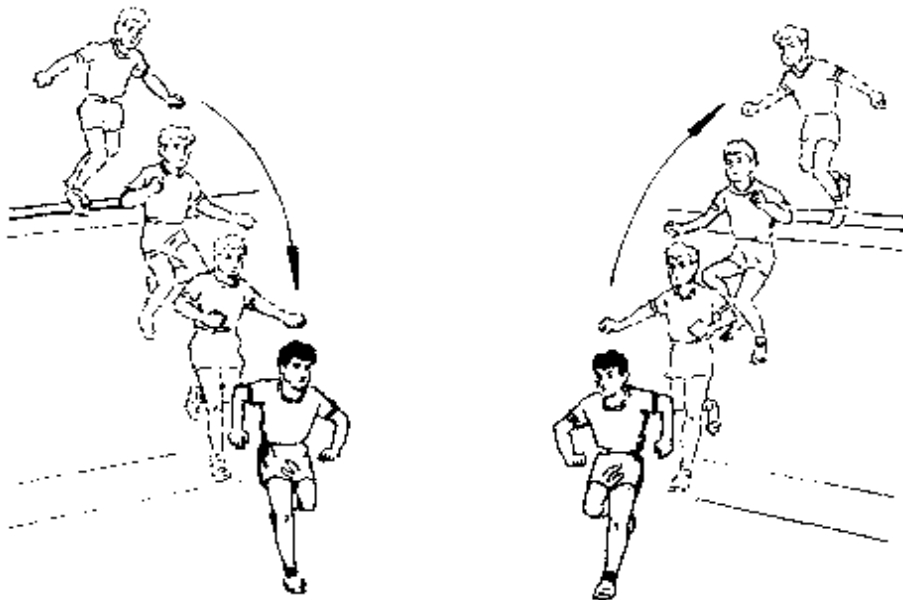


图 20

一列火车进站时,它的速度逐渐减小,最后停止.经时间反演

后,就好像这列火车从静止状态出发,倒着开行做加速运动(图 21).

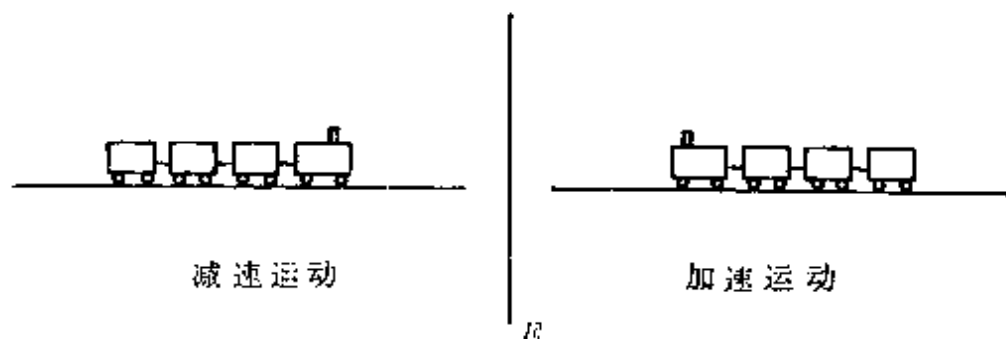


图 21

不过,日常生活中的大多数现象都不具有时间反演对称性,时间反演在现实生活中是不能实现的.我们常用流水比喻时间——看不见的、神秘的时间像河水一样均匀地流逝着向前,永不停息.古希腊哲学家赫拉克里特(Heraclitus,约前 540—约前 475)强调一切事物都是短暂的、不是永存的.他说,两脚踩不着同一股河水,因为在你四周总有新的河水流过.他的学生克拉蒂勒斯(Cratylus)补充说,你甚至不能一脚把它踩住,因为当你踩的时候,你和河水都正在变为另一个你和河水了(图 22).



图 22

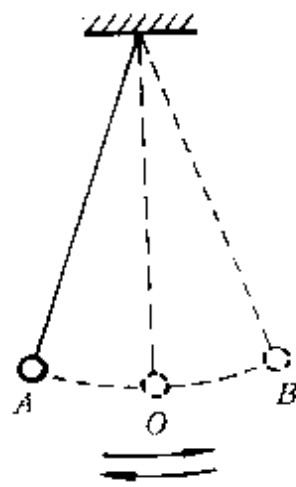


图 23

但也有少数理想体系具有这种时间反演对称性,如无阻尼单摆的振动(图 23).当单摆从左端位置 A 经 O 向右边位置 B 振动时记录下来的图景,倒着放映(即作时间反演)时,只是摆球速度反向,但加速度方向不变,表示它具有某些时间反演不变性.

综上所述,所谓对称性,就是事物经过某些变换后仍保持的不变性或某些不变性.所以,体系从一个状态变到另一个等价状态的操作,都称为对称性操作,或称为具有某种对称性.

3. 对称性原理

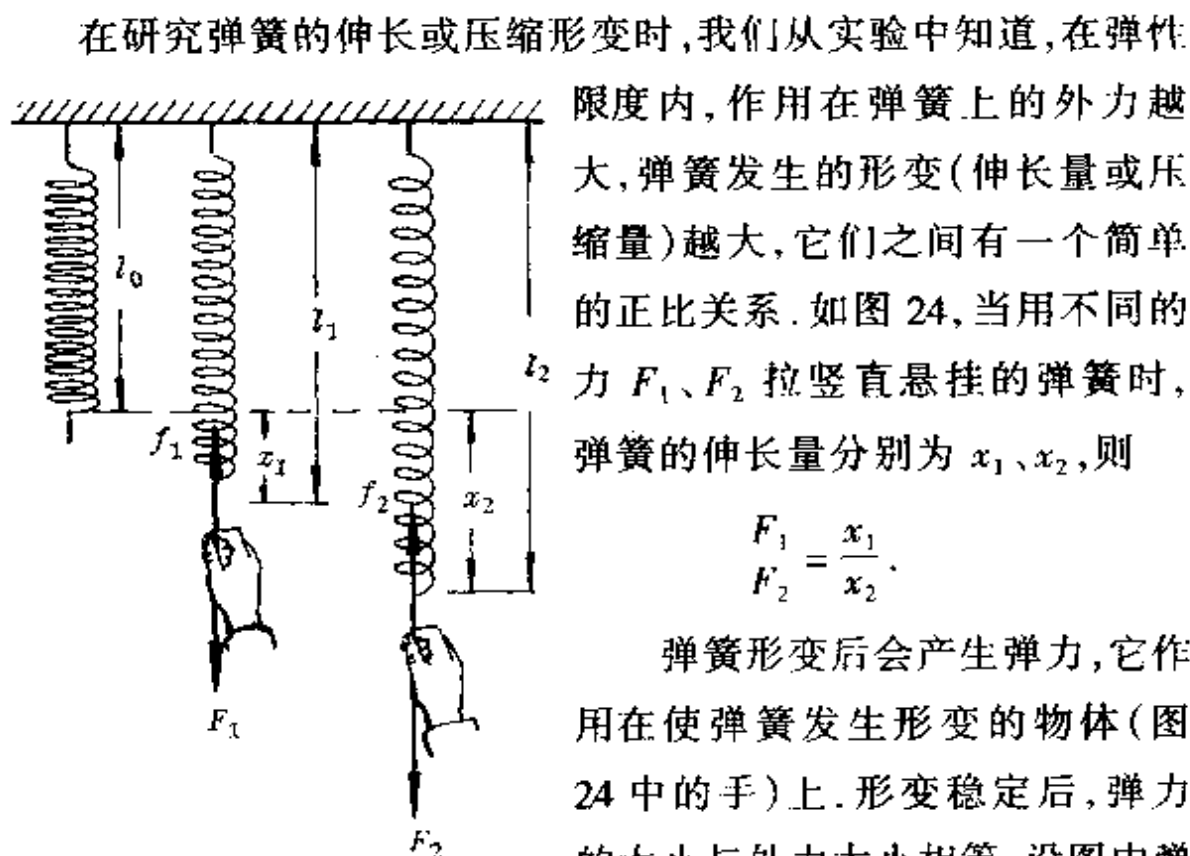


图 24

在研究弹簧的伸长或压缩形变时,我们从实验中知道,在弹性限度内,作用在弹簧上的外力越大,弹簧发生的形变(伸长量或压缩量)越大,它们之间有一个简单的正比关系.如图 24,当用不同的力 F_1 、 F_2 拉竖直悬挂的弹簧时,弹簧的伸长量分别为 x_1 、 x_2 ,则

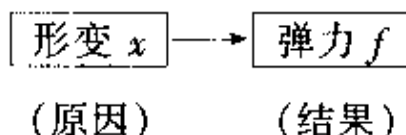
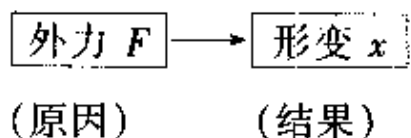
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{x_1}{x_2}.$$

弹簧形变后会产生弹力,它作用在使弹簧发生形变的物体(图 24 中的手)上.形变稳定后,弹力的大小与外力大小相等.设图中弹簧的弹力分别为 f_1 、 f_2 ,则

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{x_1}{x_2}.$$

上面的物理过程从因果关系上说:弹簧受到外力 F 的作用

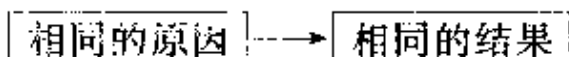
(原因),使弹簧发生形变 x (结果);由于弹簧的形变 x (原因),使它产生了弹力 f (结果).可表示为:



初中物理课本中较直观地从前一层因果关系考虑,得到一个规律:在弹性限度内,弹簧的伸长跟受到的拉力(外力)成正比.

高中物理课本较深入地从后一层因果关系考虑,得到一个规律(胡克定律):在弹性限度内,弹簧弹力的大小和弹簧伸长(或缩短)的长度成正比.

但不论是初中物理还是高中物理,我们所得到的物理规律都是反映客观事物之间的因果关系.弹簧的形变规律是这样,其他的物理规律也是这样.这里的条件是“因”,现象为“果”,两者之间的箭头代表“必定产生”.在一定条件下必然会出现一定的现象,或者说,“在相同的原因下必然产生相同的结果”,即



这就是因果关系所揭示的必然联系.

不过,在现实生活中,没有绝对相同的事物.所谓“相同”,都是近似的,或者仅是从某一方面的效果而言的.譬如,如果我们不用手拉弹簧,也可在弹簧下挂上适当的物体,只要满足条件

$$G_1 = F_1, G_2 = F_2,$$

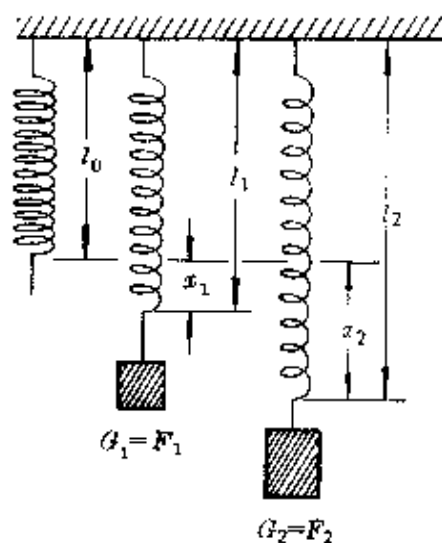


图 25

弹簧就会产生同样的伸长, 这里的重物在使弹簧形变的作用效果上就与原来用手拉弹簧的效果相同(图 25). 所以, 可以把上面的因果关系表示得更确切些, 即

[等价的原因] \longrightarrow [等价的结果]

这就是因果关系的等价原理.

因为保持等价的操作即为对称操作, 因此上面的原理又可改成:

[对称的原因] \longrightarrow [对称的结果]

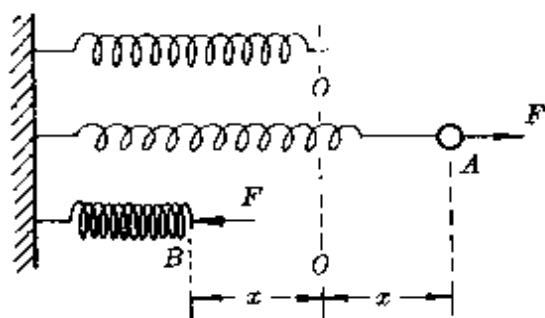


图 26

例如, 我们用同样大小的力拉弹簧或压弹簧, 弹簧的伸长或缩短相对于平衡位置是对称的(图 26).

应该注意: 因果关系中的箭头是单向的, 反过来不一定正确. 也就是说, 等价的结果有可能来源于

不等价的原因, 对称的结果有可能来源于不对称的原因. 所以, 更普遍的可表示为:

[原因中的对称性
必反映在结果中] 或者 [结果中的不对称性
必在原因中有反映]

也可说成是:

[结果中的对称性
至少有原因中的
对称性那么多] 或者 [原因中的对称性
至多有结果中的
对称性那么多]

这就是皮埃尔·居里(Pierre Curie, 法, 1856—1906)于 1894 年提出的“对称性原理”.

利用对称性原理,我们可以较方便地对一些物理现象作出直观的判断.

例如,在地球赤道平面上空发射一颗同步卫星(图 27).地球对卫星的引力(F)沿着地心 O 与卫星的连线,由它作为卫星绕地球运动的向心力,即

$$F = m \frac{v^2}{r}.$$

因此,已知某时刻的速度 v 和引力 F ,就可决定卫星的轨道.在这里,卫星运动的条件(原因)对于卫星的轨道平面(结果)呈镜像对称(图 28).按对称性原理:“原因中的对称性必反映在结果中”,由于地球对卫星引力的镜像对称性,故而卫星不可能朝某一侧偏离而离开这个平面.

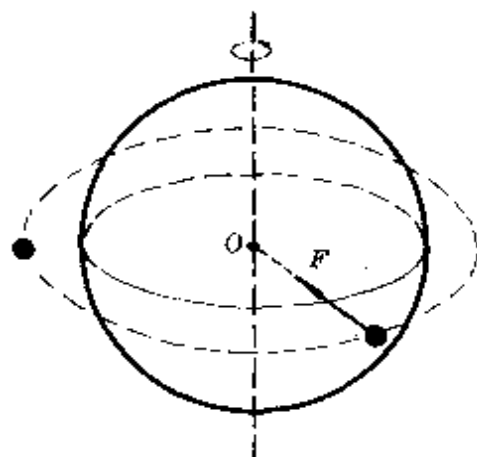


图 27

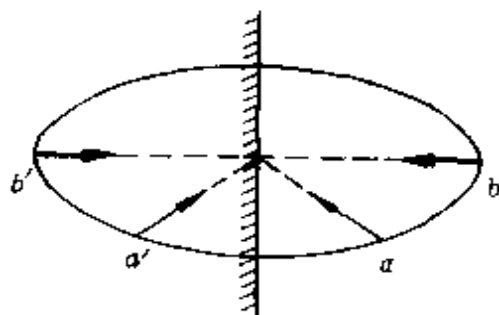


图 28

在哥白尼模型中,各行星绕太阳在一定的轨道平面内运动也是这个道理.

通常水平抛出和斜向抛出的物体,它们的轨道平面必在重力方向和初速方向所决定的竖直平面内,也是由于其原因(mg 、 v_0)对于轨道平面呈镜像对称的缘故(为便于说明用图 29 表示).

如果我们发现抛体的轨道偏离竖直平面,必定存在有对于此平面不对称的其他因素,如横向的风力作用等.

足球运动员踢出的“香蕉球”,无风时球也会按照人的意志拐弯,一些优秀的足球运动员常用它靠发“角球”直接破门得分(图

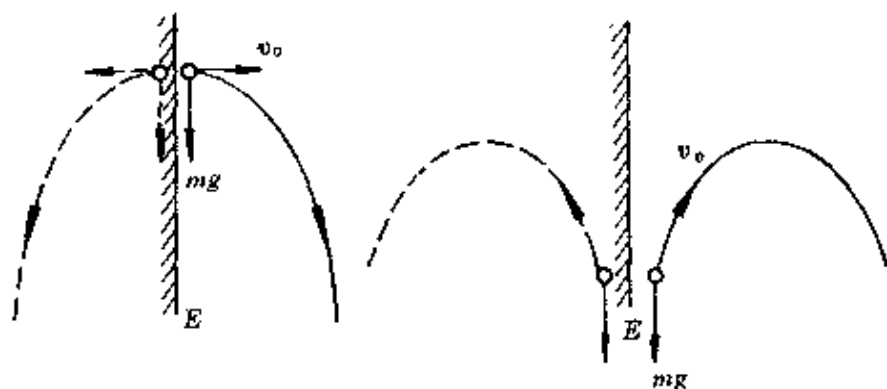


图 29

31). 这时, 足球运动的轨道平面已不在初速方向和重力方向决定的平面内. 即使我们不会踢足球, 也不知其中的空气动力学原理, 但根据“对称性原理”可以肯定一点: 其中必存在着不对称的因素. 运动员会向你坦诚相告其中的奥秘——踢球时同时使球旋转, 球的旋转方向决定了球的偏斜方向, 因为旋转着的球左右是不对称的, 足见你的判断完全正确.*

* 流体(空气或液体)中的球体做平动时, 球体左右(或上下)两侧流体分布对称, 流速相同, 无侧向压力[图 30(a)]. 当球体同时旋转时, 球体左右(或上下)两侧流体的分布不对称, 流速不同, 流速大的一侧形成低压区, 流速小的一侧形成高压区, 从而产生一个从高压区指向低压区的侧向压力, 迫使球体会偏离原来的直线发生弯曲[图 30(b)]. 这一现象是德国科学家马格努斯(Magnus)于 1852 年首先发现的, 被称为马格努斯效应.

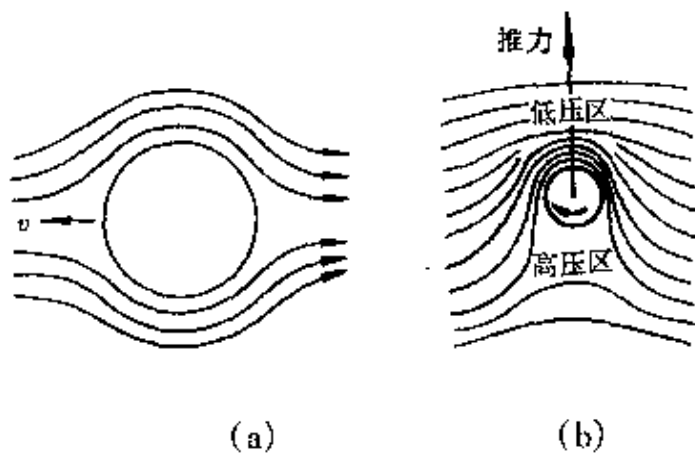


图 30 马格努斯效应

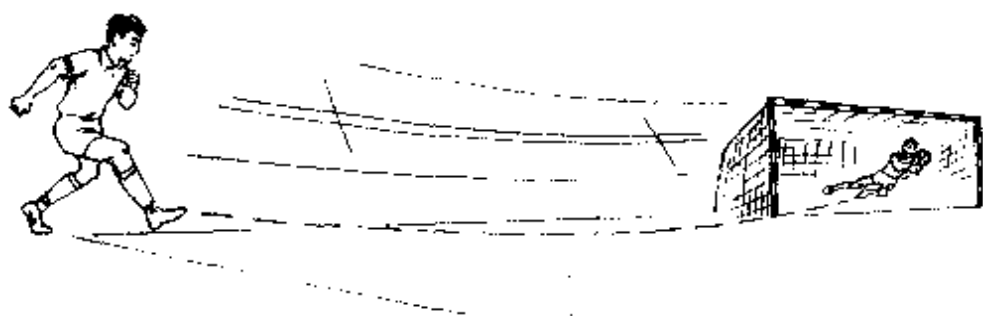


图 31 角球破门

据说,当年著名的奥地利物理学家马赫(E. Mach, 1838—1916)年轻时,刚了解到丹麦物理学家奥斯特(H. C. Oersted, 1777—1851)于1820年从实验中发现电流的磁效应(即通常所称的奥斯特实验)时,曾感到理智上受到极大的震动.因为在他看来,既然整个几何和物理的排列,包括电流和磁针的南北极在内,其各种表现都关于通过导线和磁针的平面对称,就像抛体在初速和重力所组成的平面内一样,磁针怎么会向纸外(或纸内)偏转呢?

马赫的困惑就在于他仅从外观上认为图 32 装置对包含导线和磁针的平面来说,显而易见是镜面对称的.这是由于当年的马赫还不知道磁体内部分子结构的缘故.现在我们知道,根据安培(A. M. Ampere, 1775—1836)提出的分子电流假设,组成磁体的物质微粒内部存在着一种环形电流,

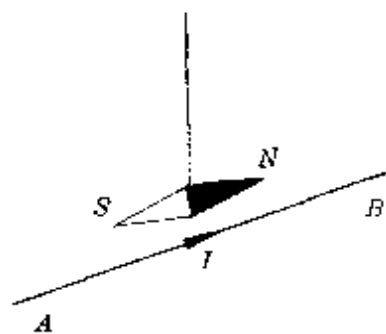


图 32

其左右本来就是不对称的.因此对包含导线和磁针的平面来说,镜面对称并不是真的(图 33).磁体在发生镜像反演时,南北极会对调.由于这种不对称因素的存在,磁针才会偏离原来的平面,就像足球运动员踢出的香蕉球一样.所以奥斯特实验并未违背对称性原理,马赫的困难也就可以得到解决.

4. 对称与物理规律

在物理学的发展过程中,人们对某一物理现象的规律认识之前,往往先从其中的对称性上去认识.而对这些对称性的认识又常常在进一步认识物理规律中起着重要作用.

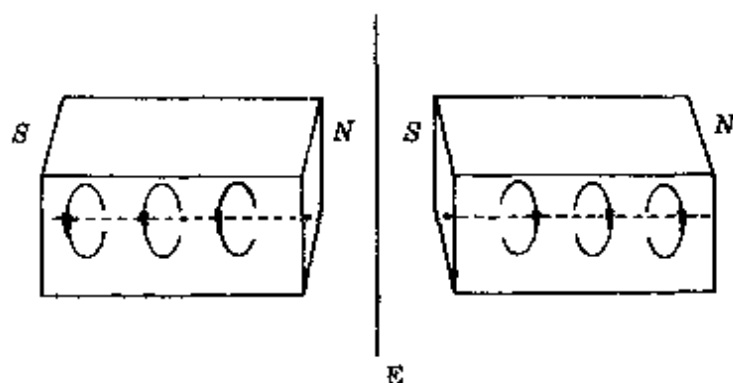


图 33

古希腊杰出的力学奠基人阿基米德(Archimedes of Syracuse, 约前 287—前 212)在《论平面的平衡》一书中,关于杠杆的第一条“不证自明的公理”是:

“在无重量的杆的两端离支点相等的距离处挂上相等的重量,它们将平衡.”

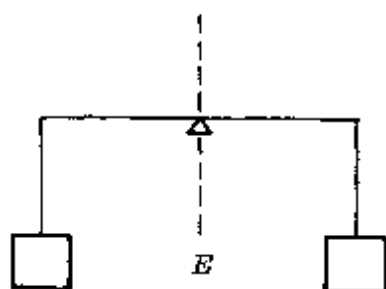


图 34

德国著名的数学家魏尔(H. Weyl)认为:阿基米德就是依据对称先验性地得出结论的.因为整个结构对杠杆的中面 E 是对称的(图 34),因此不可能一个上升,另一个下降.

现在,如果我们顺着这条思路走下去,也很容易得到杠杆平衡条件.

如图 35(a)所示,在一根轻杆上装有三个质量相等的小球,左

右两球对中间的小球对称放置, 杠杆处于平衡状态. 若把其中两个小球组合在一起, 然后把它们另置于一个较低的杆的两端, 并由其对称点把低杆悬挂起来, 杠杆仍平衡[图 35(b)]. 最后, 将这两个小球在较低的杆上滑移到一起, 并把它作为一个球悬挂起来, 杠杆也平衡[图 35(c)].

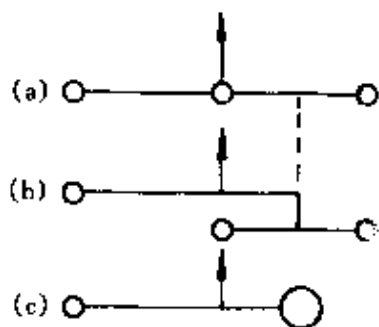


图 35

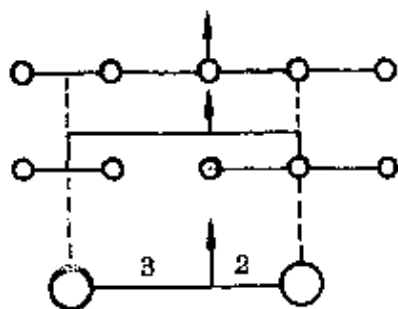


图 36

这样就得到左右两边的球重之比是 1:2 时, 它们离支点的距离之比是 2:1 的结论.

同理, 对图 36 中可以得到左右两边的球重之比是 2:3 时, 它们离支点的距离之比是 3:2 的结论.

对于任意臂长比的杠杆平衡条件, 也可从这样的对称性思考中得到.

根据对称性的一般定义: 对称性就是某个现象(或系统)在某一变换下保持的不变性. 这种不变性与物理规律有着广泛的联系, 也就是说, 许多物理规律中常蕴含着某种对称性.

例如, 一质量为 m 的物体在恒力 F 作用下沿平面做加速运动, 在时间 t 内速度从 v_1 增加到 v_2 (图 37). 根据牛顿运动定律:

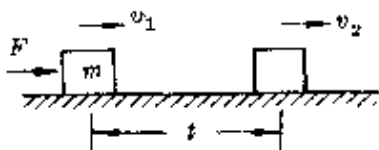


图 37

$$F = ma = m \frac{v_2 - v_1}{t}.$$

例如我们对这一物体的运动作时间反演变换,用 $(-t)$ 代替 t ,物体就像倒着做减速运动,则

$$F' = ma' = m \frac{v_1 - v_2}{(-t)} = m \frac{v_2 - v_1}{t} = F.$$

这就是说,牛顿第二定律对时间反演具有不变性,时间的过去和未来在牛顿运动方程中是对称的*.

又如图 38 所示,在光滑水平面上,用一根劲度系数为 k 的轻弹簧系住一个质量为 m 的小球,小球的平衡位置为 O 点,并以此位置作为弹性势能的零位置.当小球在平衡位置两边振动时,对于位移 x 和 $-x$ 的两位置,系统的总能量分别为

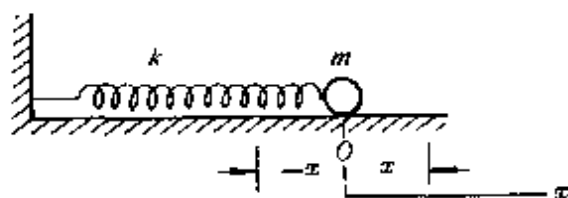


图 38

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2,$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2. \quad (x_2 = -x_1)$$

由力学知识知, $E_1 = E_2$. 这就是说,系统的总能量对于中面 E 来说,是镜像对称的,即具有空间的对称性.

综合上述两情况可以看出,如果一个体系具有时间反演对称性,则某一正向运动的逆向过程也是一种可能的运动;如果一个体

* 大学物理中,加速度表为位移对时间的二阶导数 $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$, 牛顿第二定律的方程

为 $F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$, 当 t 以 $(-t)$ 代替时明显具有不变性.

系具有空间反演对称性,则某一运动的镜像过程也是一种可能的运动。

对称性理论无论对经典物理还是量子物理都有用,而更为常用更令人感兴趣的是后者,因为在微观世界中有着更广泛的对称性。一些基本粒子性质上的一致、结构上的重复、形态上的对映等,表现得更为丰富。例如,一个电子全同于任何另外一个电子,一个碳原子全同于任何另外一个碳原子;非晶体的物质性质各个方向上都保持等价(各向同性);存在着正物质与反物质等。这里的不变性(或某一方面的不变性)就是对称性的反映。而且,由于对微观世界研究的复杂性,必须运用量子力学,也对应用对称性提供了更多的机会,有着更宽广的范围。

著名物理学家、诺贝尔奖获得者温伯格(S. Weinberg, 美, 1933—)说:“一个理论可能具有高度的、在我们日常生活中又是隐而不见的对称性。我认为在物理学中还没有比这样一个想法更有希望了。”

二、对称思想在科学认识中的作用

客观世界千差万别、千变万化,却又和谐、协调.上下、左右、阴阳、正负……互相对应,构成一个对立统一的整体.反映客观世界的这种内在的一致性、规律的不变性,这种平衡的美感,就是对称性.

在人们对客观世界的认识史上,对称性曾给予人们许多有益的启示.人们通过对称性思考,作出假设、揭示未知的规律、预言未知事件及其基本特性,并从对称性特征上去研究、分析遵循对称的条件或破坏对称的原因等.所以,对称性在物理学中有着极为重要的作用,而且其重要性正随着近代物理的发展与日俱增.

下面,我们选择若干典型事例,展示对称性在人类科学认识上的作用.

1. 由电产生磁 由磁产生电

1820年4月,丹麦物理学家奥斯特(H. C. Oersted, 1777—1851)在一次关于电和磁的讲课快结束时,抱着试试看的心情把很细的铂丝导线与玻璃罩中的磁针都沿着地磁南北极方向放好,然后接通伽伐尼电池*,结果发现小磁针会偏转一下.这个现象虽然并未

* 伽伐尼(L. Galvani, 1737—1798)是意大利医学教授,他在1780年一次解剖青蛙实验中偶然发现接触电现象.根据接触电现象的原理制成的电池称伽伐尼电池.

引起听讲的人们注意,却使奥斯特十分激动.在以后的三个月里,他做了60多个实验,并于1820年7月21日公开了他的重要发现.奥斯特在报告中写道:在通电导线周围会产生一种横向的环绕电流的“电冲突”,它可以透过非磁性物体,但却被磁性物体所阻抗,从而推动磁性物体发生偏转.

这就是现在初中学生都已熟知的奥斯特实验.如图39所示,与直导线 AB 同一平面内在导线上方或下方的小磁针,当通以从 A 到 B 的电流时,导线下方的磁场方向垂直纸面向内,导线上方的磁场方向垂直纸面向外,因此下方磁针的 N 极转向纸内,上方磁针的 N 极转向纸外(图39).

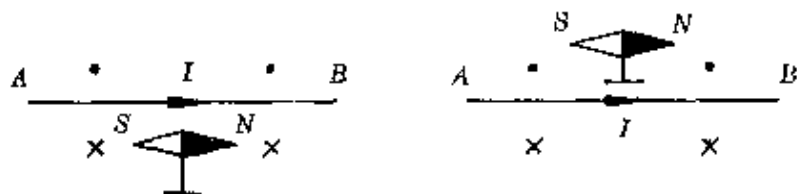


图 39

长期以来,人们把电和磁两者彼此独立起来.奥斯特的这一惊人的发现使当时整个科学界受到很大震动,从此揭开了研究电磁联系的序幕.

法拉第(M. Faraday, 1791—1867)敏锐地觉察出了奥斯特发现的重要意义,他评价道:“它猛然打开了一个科学领域的大门,那里过去是一片漆黑,如今充满了光明.”

奥斯特实验使法拉第从对称性诱发了一连串思考:这一现象的逆效应是否存在?能不能用磁体使导线中产生出电流来呢?既然磁铁可以使近旁的铁块感应出磁,静电荷可以使近旁的导体感应出电荷,那么电流是否也应当可以使放在近旁的线圈中感应出电流来?在1822年的日记里,他记下了一个大胆设想:“由电产生

磁、由磁产生电。”并使用了“感应”这个词。从此，他就开始了长期的艰苦探索。

如何从实验中去发现这种前所未有的感应现象，却非易事。从1820年到1831年的这段时期中，当时许多著名的科学家如安培(A. M. Ampere, 法, 1775—1836)、菲涅耳(A. J. Fresnel, 法, 1788—1827)、阿拉果(D. F. J. Arago, 法, 1786—1853)、沃拉斯顿(W. H. Wollaston, 英, 1766—1828)、德拉里夫等都纷纷投身于探索磁与电的关系之中。他们用各种很强的磁铁试图产生电流，但均无结果。究其原因，都是思想方法上的片面性。他们认为奥斯特的电流磁效应是一种稳定效应，因此在探索“磁生电”时，也都是从稳定条件着手，而没有考虑动态效果。

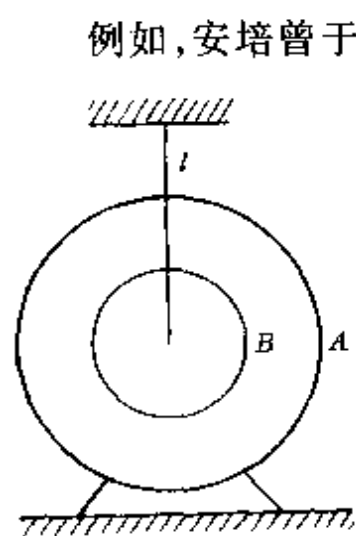


图 40

例如，安培曾于1822年做了不少实验，其中一个实验装置如图40所示。将一个铜质多匝线圈A固定在绝缘支架上，另将一单匝线圈B用细线*l*悬挂起来，两者在同一平面内。然后在A线圈中通以强电流，另用一个强磁铁接近B。安培认为B中会感应出电流，这样B相当于一个磁铁就会转动起来。结果实验失败了。不过在实验过程中有一个重要的现象被安培忽视了，那就是当线圈A在通电的瞬间，线圈B似乎动了一下。由于安培缺乏思想准备，一瞬间的现象所包含的一个真理从他的眼皮底下溜走了。

瑞士物理学家德拉里夫的助手科拉顿(J. D. Colladen, 1802—1892)更有意思。1823年，他把一个螺线管与电流计相连，为了避免强磁铁的影响，他把电流计用长导线连着放到另外一个房间里。当他把磁铁插入螺线管以后，立即跑到另一个房间去观测电流计指

针是否有偏转,结果当然也失败了.可以说,真是失之交臂,十分可惜.

法拉第开始也根据这种思想方法,简单地认为用强磁铁靠近导线,导线中就会产生稳定的电流;或者在一根导线里通以强大的电流,在邻近的另一根导线中也会感应出稳定的电流.在 10 年时间里,他做了大量的试验,均以毫无结果而告终.

1831 年 8 月 29 日,法拉第和他的助手继续进行试验.他们在一个 $\frac{7}{8}$ 英寸(1 英寸 = 25.4 毫米)厚、外

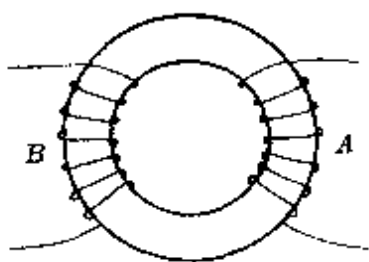


图 41

径约 6 英寸的软铁圆环上绕了两个彼此绝缘的线圈 A 和 B(图 41). B 的两端仍用长导线和电流计连接成闭合回路(目的是防止线圈 A 的影响),然后在导线下面放置一个与导线平行的小磁针. A 和一个电池组相连,接在一个开关上.他们把电池组增加到 120 个电瓶,法拉第小心翼翼地合上了开关.强大的电流通过 A 线圈,线圈很快就发热了.然而法拉第看到 B 线圈回路中电流计的指针仍像以往许多次实验一样,纹丝不动.

法拉第心情沉重地打开了开关,一个可怕的念头油然而生:“安培、菲涅耳、德拉里夫、科拉顿、阿拉果都退却了,难道下一个该轮到自已了吗?”他又记起了父亲那颇有哲理的教诲:“在铁匠面前永远没有顽铁.”法拉第又一次鼓足了勇气.他忽然想到,每次合上开关才去看电流计,会不会是电流计放得太远了?法拉第抱着试一试的心情把电流计放在眼前,就在法拉第合上开关的这一瞬间,电流计的指针抖了一下.法拉第苦苦盼望的现象终于出现了.这真是“踏破铁鞋无觅处,得来全不费工夫”.法拉第获得了成功.

使法拉第感到十分意外的是,由磁感应电的现象竟是一种短

暂效应.只有在电流有变化时才有感应作用.也就是说,只有当磁场有变化时才会产生感应电流.法拉第猛然领悟了其中的原因,接着顺利地做了一系列实验.10月17日,他用一个线圈与电流计相连,然后将一永久磁铁插入或拔出线圈(图42),发现电流计指针会偏转,而且偏转的方向不同.真正完成了名符其实的“磁生电”的对称性设想.

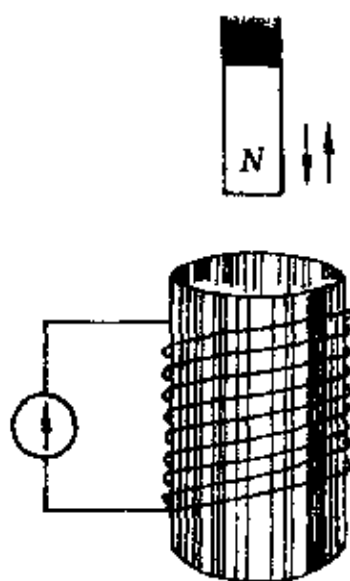


图 42

法拉第还尝试着获得持续的电流.

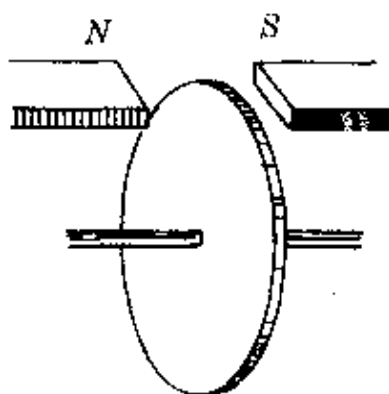


图 43

同年10月28

日,他把直径为12英寸、厚为1/5英寸的铜盘装在水平的黄铜轴上,又将两条长为6~7英寸、宽约1英寸、厚约1/2英寸的小磁铁相对放置在铜盘边缘(图43).他又从一个电流计的两个接线柱上引出两个碳刷(图中未画出).实验时让铜盘快速转动,同时把两个碳刷分别接到铜

盘的不同位置.他发现由盘心到磁极所对的铜盘边缘,可以感应出最大的电流.这个实验装置,就是人类历史上第一台发电机.

1831年11月24日,法拉第向英国皇家学会报告了整个实验情况,并把这种现象正式定名为“电磁感应”.* 法拉第成为19世

* 美国物理学家亨利(J. Henry, 1797—1878)于1827年也进行了电磁感应实验,并发现了自感现象.但他没有公开发表这一结果,为此他十分后悔和沮丧,失去了这份划时代的荣誉.

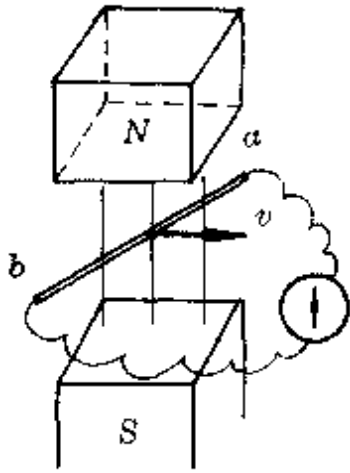
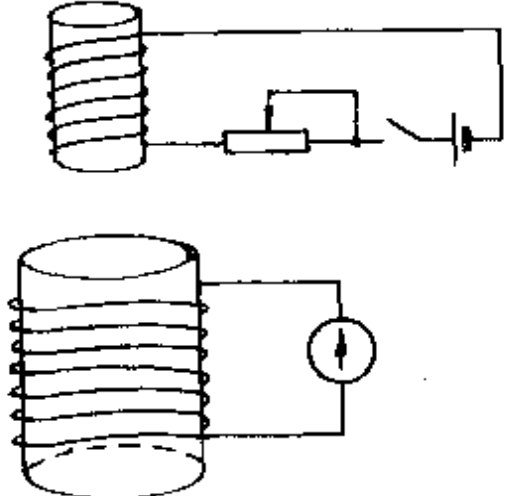
纪电磁学领域中最伟大的实验物理学家。

法拉第这一划时代的发现,找到了把机械能转化为电能的方法,开创了电的时代,发动了又一次工业革命,对整个人类社会产生了极其深远的影响。

2. 磁场变化产生电场 电场变化产生磁场

对于法拉第电磁感应现象,为了应用上的方便,常有两种说法即切割法和磁通变化法,它们所对应的判断感应电流的方向和计算感应电动势的公式,列表于下。

为什么会产生电磁感应现象呢?

比较项目	切割法	磁通法
产生电磁感应现象条件	闭合电路一部分导体做切割磁感线的运动 	通过闭合电路的磁通发生变化 
	图 44	图 45

* 电磁感应现象发现后,紧接着于 1833—1834 年间,亨利发明了第一台可供实用的电动机。1844 年美国的莫尔斯(S. F. B. Morse, 1791—1872)在亨利帮助下实现了有线电报传递信息实用线路。1860 年德国西门子公司设计制成第一台高效率发电机。1876 年美籍苏格兰的贝尔(A. G. Bell, 1847—1931)发明有线电话。1879 年美国的爱迪生(T. A. Edison, 1847—1931)设计制造成功第一只白炽灯,1888 年美国成功地建立了一套交流发电系统……至 19 世纪末,人类已正式跨入了电气时代。

续表

比较项目	切割法	磁通法
判断感应电流方向	右手法则	楞次定律
计算感应电动势大小	$\mathcal{E} = Blv \sin \alpha$	$\mathcal{E} = n \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$

导体与磁场因相对运动(做切割运动)而产生的电磁感应现象,可以用洛仑兹力解释:

如图 46(a),一段长 l 的直导线 ab 在磁感应强度为 B 的匀强磁场中,以垂直磁场的速度 v 匀速右移.由于导线中的每个自由电子同时都叠加了这样一个宏观的运动速度,会受到一个方向向下的洛仑兹力作用,使自由电子向下端 b 聚积.下端因多余自由电子带负电,上端因缺少自由电子带正电,同时在导体内建立一个方向从正电荷指向负电荷的静电场 E' [图 46(b)].

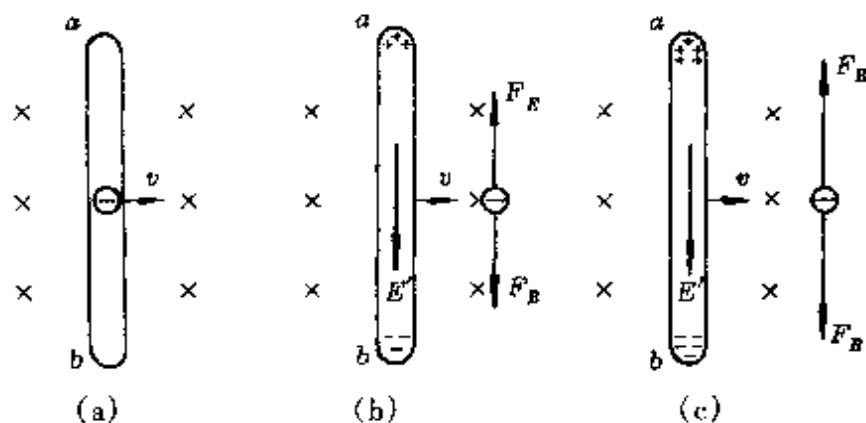


图 46

这个静电场对自由电荷的作用力 F_E 指向 a 端,将阻碍自由电子的迁移.

当导体棒两端积累的电荷不多时,静电场 E' 较弱,洛仑兹力 F_B 大于静电场作用力 F_E ,自由电子继续下移,两端积累的电荷增加,电势差增大,场强增大.当内电场增强到对自由电子的作用力和洛仑兹力相等时,达到动态平衡状态,两端建起稳定的电势差[图 46(c)].由

$$Ee = \frac{U}{l}e = evB,$$

得两端电势差的大小

$$U = Blv.$$

它就等于棒中产生的感应电动势,即

$$\mathcal{E} = U = Blv.$$

所以这根导体棒就起了电源的作用,当它两端与外电路接通时,就能向外电路供电.

导线的运动速度与磁场不垂直时,同样可得证.

导体与磁场无相对运动时,就不能用洛仑兹力解释.麦克斯韦(J.C. Maxwell, 英, 1831--1879)认为,闭合电路内磁通变化就表示闭合电路内磁场发生了变化,磁场变化时会感应出一个电场(称感应电场).闭合电路内的自由电子在感应电场的作用下,产生定向移动才形成了感应电流,如图 47 所示.

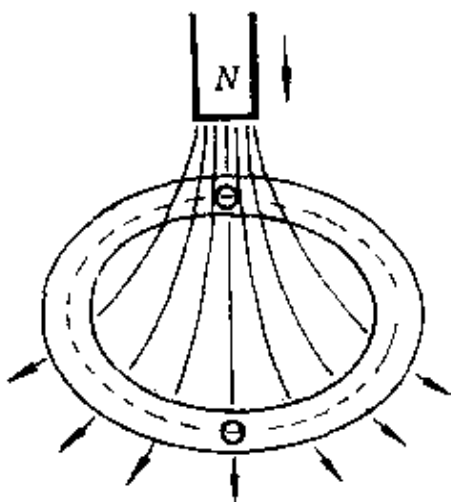


图 47

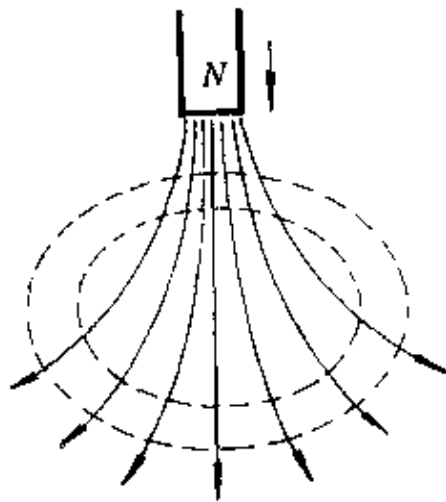


图 48

这个感应电场与静电场的根本区别是:感应电场的电场线是闭合曲线,无头无尾(又称涡旋场).

因为法拉第电磁感应定律指出,感应电动势的大小仅与磁通的变化率有关,与闭合电路的组成无关.对图 47 中的线圈,无论它

的电阻多大,由什么材料组成,围绕这个线圈的感应电动势的大小都相同,即都等于 $\mathcal{E} = n \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$. 因此,如果我们丢开这个具体的线圈,那么当磁棒同样情况下落时,在空间同样大小的一个区域内也会产生同样大小的感应电场,如图 48 所示.

麦克斯韦用感应电场解释了导体与磁场无相对运动时产生电磁感应的原由后,便作了进一步的思考:既然变化的磁场能感应出电场,那么变化的电场会不会感应出磁场呢? 麦克斯韦的这种想法完全符合事物的对称性规律,于是他从分析电容器在交流电路中的作用着手作了回答.

我们知道,电容器具有“隔断直流、通交流”的特性. 如图 49(a)所示,在电容器和小灯的串联电路中,接入直流电源时,小灯不亮,表示电路中无电流;接入交流电源时[图 49(b)],小灯就发光,表示电路中有电流.

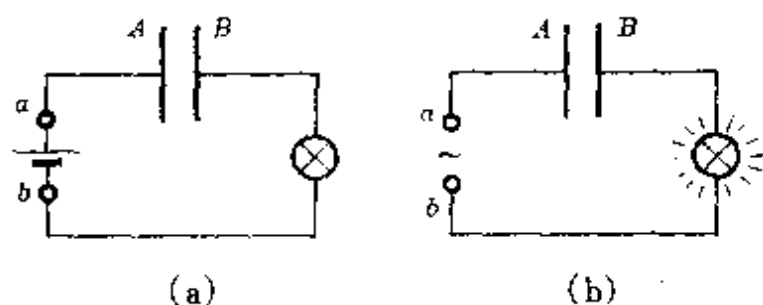


图 49

是不是接入交流电源时,电路中的自由电子能越过电容器两板间的介质,从一板跃到另一板呢? 并不是的. 这是由于电容器的充放电所造成的. 现以只有电容器的纯电容电路为例说明.

设输入交流电压如图 50 中 $u-t$ 图线所示,正半周时, a 端电势高. 在交流电变化一周中,电容器的充、放电和电路中的电流变化如下:

在 $0 - \frac{T}{4}$ 内,交流电压逐渐增大,在电源电场力作用下,把电容器 A 板上的自由电子送到 B 板,使 A 板带正电, B 板带负电,形成顺时针向的充电电流. 电容器两板间形成了从 A 指向 B 的电场. 至 $\frac{T}{4}$ 的瞬间, A 、 B 两板上累积

的正负电荷达到最多,板间场强达到最大.

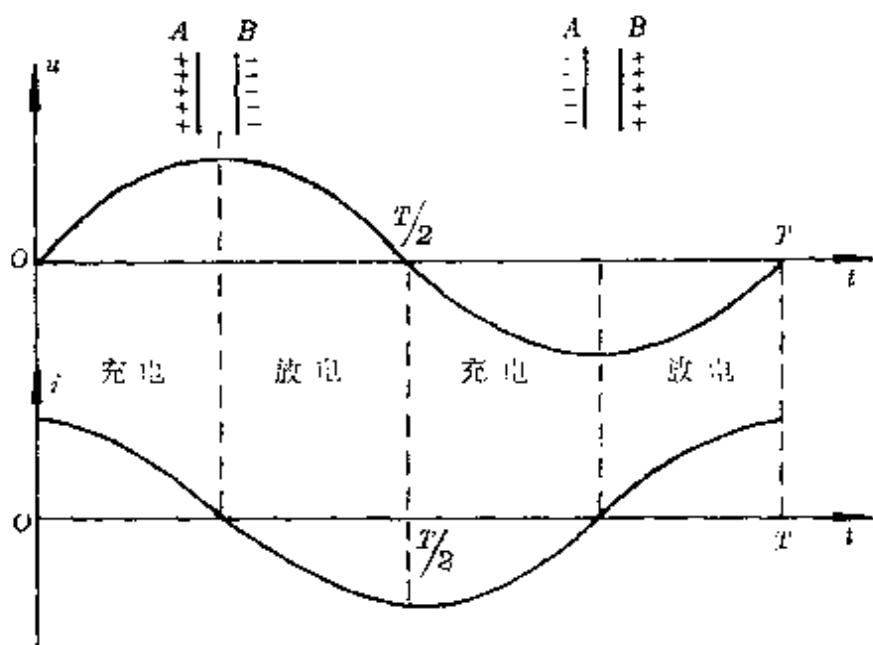


图 50

在 $\frac{T}{4} - \frac{T}{2}$ 内, 交流电压逐渐降低, 造成 A 板的电势高于电源 a 端电势, 电容器开始放电, 电路中形成逆时针向的放电电流, 同时随着电容器的放电, 板上电荷减少, 场强减小. 至 $\frac{T}{2}$ 时, 电源瞬时电压为零, 电容器的放电结束, 板间场强降为零, 瞬间逆时针向放电电流达到最大.

在 $\frac{T}{2} - \frac{3}{4}T$ 内, 电压反向增大, 给电容器反向充电, 即 A 板带负电、B 板带正电, 两板间形成从 B 指向 A 的电场. 随着电场的逐渐增强, 反时针向充电电流逐渐减小, 至 $\frac{3}{4}T$ 的瞬间, 电源电压达到最大, 两板上聚积的电荷达到最多, 板间场强达到最大, 电路中瞬时电流为零.

在 $\frac{3}{4}T - T$ 内, 反向电压逐渐降低, B 板电势高于电源 b 端电势, 电容器开始放电, 形成顺时针向放电电流. 同时板间场强逐渐减小, 至 $t = T$ 时, 电源瞬时电压为零, 电容器放电结束, 板间场强又降为零, 瞬间顺时针向放电电流达到最大.

在电压变化一周期内,电容器完成了两次充、放电,电路中电流方向改变了两次,只是电压与电流的相位不同.在纯电容电路中,电流相位超前电压相位 $\frac{\pi}{2}$,如图 50 所示.

正是由于电容器的这种反复的充、放电的结果,使电路中才会形成持续的电流.这就是电容器“通交流”的实质.这本是一个极普通的现象,麦克斯韦联系了他符合对称性思考的命题,使思维跃上了新的高度.

在电容器反复的充、放电过程中,电容器两板间的电场也时刻在变化.为了与导线中的电流保持连续性,麦克斯韦设想了一种虚假的电流——位移电流.这是一种由电场变化引起的电流.于是,在电容器的交流电路中,整个电路里可以认为有两种电流:导线中由自由电子定向移动产生的电流,称为传导电流;电容器中由电场变化产生的电流,称为位移电流.这两种电流相“接通”,形成电流的环流.

传导电流能激发磁场,早在 1820 年已由奥斯特实验中发现.麦克斯韦给予位移电流同等的待遇,认为位移电流也能产生磁场,也即变化的电场也能产生磁场,从而完成了对称性的构思.

麦克斯韦在这个基础上进一步研究,提出了电磁场理论.其大意可对称地表示如下:

麦克斯韦电磁场理论	
变化的磁场能产生电场	变化的电场能产生磁场
磁场的变化是均匀的,产生的电场是稳定的	电场的变化是均匀的,产生的磁场是稳定的
磁场的变化是不均匀的,产生的电场是变化的	电场的变化是不均匀的,产生的磁场是变化的

在电磁场理论中,麦克斯韦用一组十分简洁的方程统一了电

和磁的基本特性.由于这一组方程把电场、磁场之间的关系,对应得非常优美、和谐,充分显示了内在的对称性,令人赞叹不已.有人称誉为“出自上帝之手的方程”.* 爱因斯坦(A. Einstein, 德, 1879—1955)对麦克斯韦的理论作了高度的评价:“这个理论从超距作用**过渡到以场作为基本变量,以致成为一个革命性的理论.”20世纪初爱因斯坦的相对论就是在这个革命性的理论基础上发展起来的.麦克斯韦也由于他对电磁学发展的重大贡献,在当时被公认为是“自牛顿以后世界上最伟大的数学物理学家”.量子论的创立者普朗克(M. Planck, 德, 1858—1947)盛赞麦克斯韦:“他的名字永远镌刻在经典物理学的门扉上,永放光芒.从生地来说他属于爱丁堡,从个性来说他属于剑桥大学,从功绩来说,他属于全世界.”

3. 德布罗意提出物质波

人们在对光的本性的漫长的研究过程中,如果不算早期牛顿的微粒说,那么对于光本性的认识,人们是首先认识它的波动性.从托马斯·杨(T. Young, 1773—1829)通过双缝干涉实验所猜想的某种机械波到麦克斯韦(J. C. Maxwell, 1831—1879)提出的电磁波,普遍认为光就是一种波长很短的电磁波.然后,从赫兹(H. R. Hertz, 1857—1894)发现光电效应现象到爱因斯坦(A. Einstein, 1879—1955)提出光子说,又认识了光的粒子性,最后,才形成对光本性的全面的认识——光是一种具有波粒二象性的物质,既有波

* 实际上,麦克斯韦的原始方程组并不简洁,后来归纳为四个高度对称和极为简洁的方程组,是英国“天才狂人”亥维赛(O. Heaviside, 1850—1925)根据简洁和对称两条原则简并而成的.

** 超距作用是早期人们对电磁波和光的传播特性还不清楚时形成的概念,认为电磁波和光的传播是不需要时间的,可超越任何距离.

动性,又有粒子性.大量光子行为容易显示出波动性;少数光子行为容易显示出粒子性.光子的能量和动量分别为

$$E = h\nu,$$
$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu}{\lambda\nu} = \frac{h}{\lambda}.$$

式中波长 λ 表示了波的特征.

另一方面,在对物质结构的研究上,人们长期认识的都是它的粒子性.古代原子论者已有了粒子性的萌芽,以后从分子运动论到原子核式结构以及核的组成等,都认为整个自然界是由许多种实在的粒子组成的.既然光有波动性,也具粒子性,那么具有粒子性的实物粒子(原子、电子、质子等)是否也具有波动性呢?

1923 年到 1924 年间,年轻的法国巴黎大学的研究生德布罗意(L. de Broglie, 1892—)正是从这种完全符合对称性的思考上反复提出这一问题.德布罗意说:“整个世纪以来,在光学上比起波动的研究方法来,是过于忽略了粒子的研究方法,在物质理论上,是否发生了相反的错误呢?是不是我们把关于‘粒子’的图象想得太多,而过分地忽视了波的图象?”德布罗意认为,原子、电子等实物粒子在一定条件下也应显示出波动性.他通过对原子、电子等实物粒子的性质和光的性质之间的深刻研究后,于 1924 年在博士论文答辩中提出了一个大胆的假设:“‘一般的’物质也具有波粒二象性.”他假设每一个运动的粒子都有一个波与之对应,这个粒子的能量 E 和动量 p 与它所对应的波的频率 ν 和波长 λ 之间,也像光子一样遵从下面的关系:

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}.$$

这个关系式通常称为德布罗意公式(或称爱因斯坦—德布罗意公

式). 与某种实物粒子所对应的波就称为物质波或德布罗意波.

德布罗意关于物质波的假设, 从经典物理学的观念来看是无法理解的. 虽然当考试委员会主席询问他“怎样才能观察到你所推想的这种微观粒子的波”时, 德布罗意建议用电子在晶体上做衍射实验. 但在当时缺乏实验验证时, 并没有引起人们的注意. 德布罗意感慨地意识到, 他的这些思想, 很可能被看作是“没有科学特征的狂想曲”. 但当德布罗意的导师、法国著名物理学家朗之万(P. Langevin, 1872—1940)把德布罗意的论文寄给爱因斯坦时, 爱因斯坦慧眼独具, 大加赞赏, 称赞道:“瞧瞧吧, 看来疯狂, 可真是站得住脚呢”, 并认为德布罗意已揭开了“自然界巨大面罩的一角”.

三年以后的 1927 年, 美国物理学家戴维森(G. J. Davisson, 1881—1958)和英国著名物理学家 J. J. 汤姆生的儿子——G. P. 汤姆生(G. P. Thomson, 1892—1975)几乎同时发表了证实电子波动性的实验结果.

戴维森和他的助手革末(Germer, 1896—1971)的实验装置如图 51 所示. 他们将从电子枪发射的电子束垂直投射到晶体表面, 电子遇到表面上规则排列的原子后将向不同方向散射. 如果电子确如德布罗意所假设的具有波动性, 图 52 中晶体表面上的原子 A、B、C……都处于同一入射波的波前上, 于是到达这些原子的波便具有相同的波程. 然而对于同一方位角 θ 的散射波来说, 从不同原子上散射出来的波的波程不同.

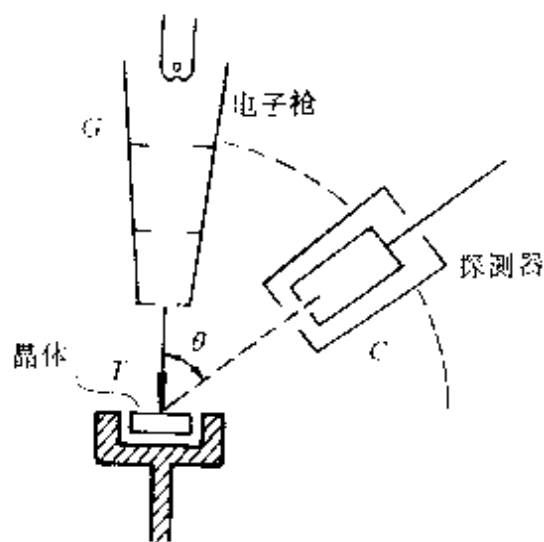


图 51 戴维森和革末实验

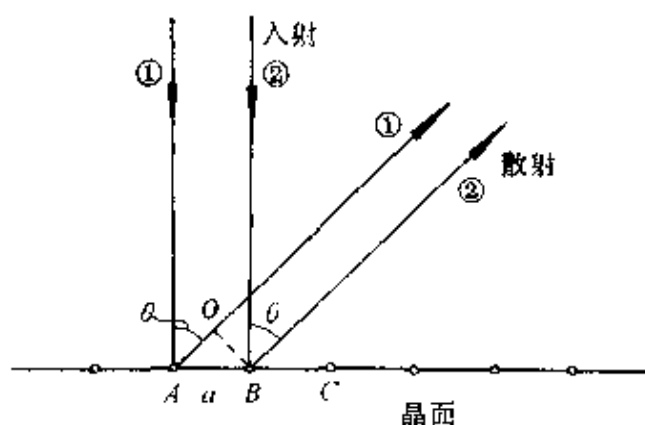


图 52 电子在晶体表面的散射

设晶体表面上原子间距为 a (称为晶格常数), 则图 52 中从 A、B 两原子上向 θ 角方向散射波的波程差为

$$\Delta l = AO = a \sin \theta.$$

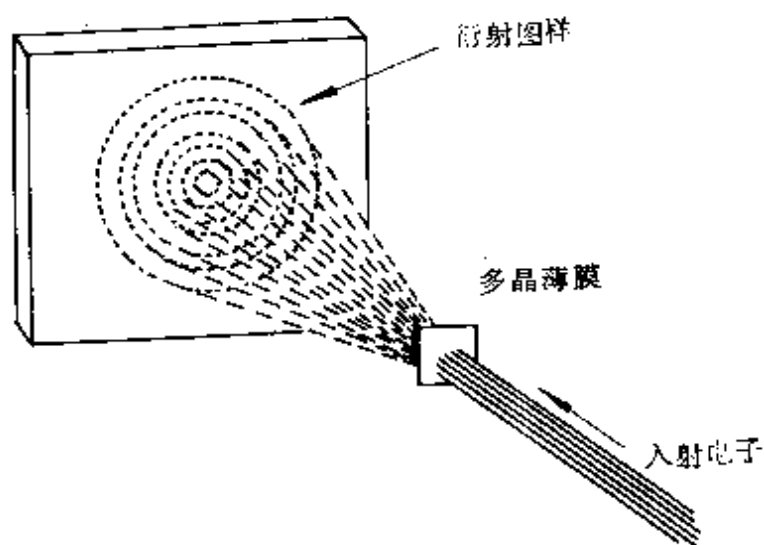
所以, 如果对于某一 θ 角, 波程差等于相应波的波长 λ 的整数倍 (或半波长 $\frac{\lambda}{2}$ 的偶数倍), 两波叠加后振动加强, 而在另外一些方向上, 波程差等于半波长 $\frac{\lambda}{2}$ 的奇数倍, 两波叠加后振动减弱.

戴维森根据从实验中测得的衍射强度分布曲线, 证实了电子确有波动性, 而且, 其波长满足德布罗意公式

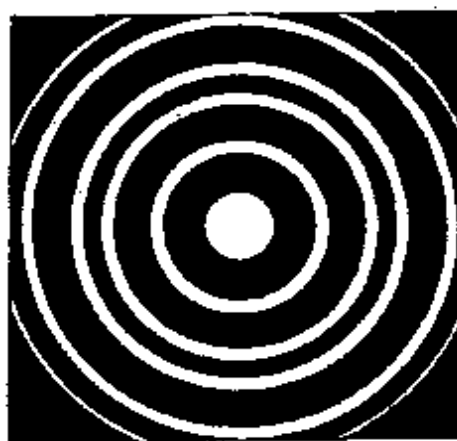
$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

同年, G. P. 汤姆生用多晶薄膜做实验, 也得到了十分漂亮的衍射图样(图 53).

德布罗意的物质波假设终于得到了确认, 从而使人们对物质结构有了更深层次的认识, 开创了一门研究具有二象性的微观粒子运动的新理论. 德布罗意因这一从对称性思考引发的大胆假设荣获 1929 年度诺贝尔物理学奖. 戴维森和 G. P. 汤姆生也因证实



(a)电子在多晶薄膜上的衍射



(b)电子的衍射图样
图 53

电子的波动性共同获得 1937 年度诺贝尔物理学奖,老汤姆生因证实电子是粒子而获诺贝尔奖,小汤姆生因证实电子是波动而获诺贝尔奖,这真是物理学史上的一件趣事。

也许有人会进一步问道:既然一切微观粒子(包括原子、分子等复杂系统)都具有波粒二象性,那么由这些微观粒子组成的宏观物体是否也具有波粒二象性呢?也就是说,宏观物体是否具有波动性?回答是肯定的,但必须指出:具有波动性和波动性的表现能否被观察到是两回事,根据德布罗意公式,可计算出宏观物体的对

应波长.例如,一个质量 $m = 1$ 克、以速度 $v = 1$ 米/秒运动的小球的德布罗意波长为

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{1 \times 10^{-3} \times 1} \text{米} \\ &= 6.626 \times 10^{-31} \text{米}.\end{aligned}$$

这样一个质量很小、速度很低的小球的德布罗意波长尚且如此之短,其他宏观物体的物质波长更是微乎其微了,因此其波动性是很难表现出来也极难被观察到的.读者自然也不用担心:手中捧个大西瓜时,决不会变成波跑掉的!

4. 狄拉克预言正电子

自从1900年12月4日量子论诞生以后,量子力学得到迅速的发展,取得了令人满意的成就.然而它也存在着一个严重的困难,就是如何使它适合相对论.因为当微观粒子的速度可与光速相比拟时,必须考虑其相对论效应.1928年,初露头角的狄拉克(P. A. M. Dirac, 英, 1902—)从相对论和量子力学的一般原理出发,建立了一个“相对论性”的电子运动方程(现称为狄拉克方程).利用这个方程讨论氢原子的能量分布以及高速运动电子的许多性质,都与实验结果符合得很好.

但是,狄拉克方程也有一个严重的困难,就是这个方程有两个解,一个解对应的是普通的电子,它的总能量是正的;另一个解对应的粒子的能量都是负的,并且正能态和负能态的分布是完全对称的.由于物理状态的能量越低就越稳定,如果电子可以有负能量,那么所有正能量的电子必定都会放出光子而跳到负能量状态去.这样一来,宏观物体中的电子都要像跳下万丈深渊一样,一点一点地把能量完全释放出去.我们的物质世界就不稳定了.

为了对这个负能态解的物理意义作出合理的说明,狄拉克作了一年多时间的潜心思索,他依据量子力学中泡利不相容原理*,从对称性出发,大胆预言,一定还存在着一种质量与电子完全相等、电量也相等但符号相反的粒子,这种粒子称为“正电子”。

狄拉克的这个预言在 1932 年被安德森(C. D. Anderson, 美, 1905—)借助云室,在宇宙射线中首先得到了证实。

什么叫云室呢?其实它的原理很简单,冬天,戴眼镜的同学从温度很低的室外走进暖烘烘的教室,眼镜片上常会蒙上一层薄雾,这是由于室内的水汽碰到温度较低的镜片,处于过饱和状态凝结在镜片上造成的,因此戴眼镜的同学常要先揩一下镜片方可看清室内物体,云室正是利用过饱和水汽凝结在物体上的原理制成的,它是英国物理学家威耳逊(G. T. R. Wilson, 1869—1959)在 1911 年发明的一种巧妙的仪器(后被称为威耳逊云室),其装置如图 54 所示。

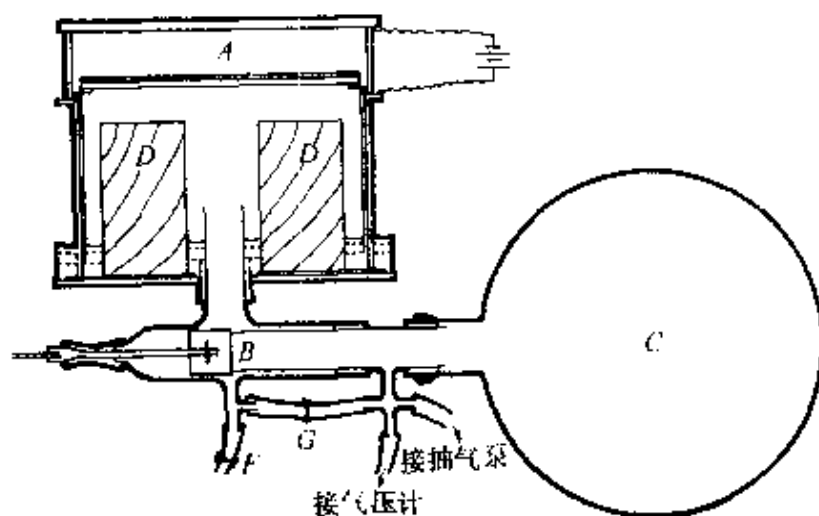


图 54 威耳逊云室

A 是一个充满水汽的容器,当突然抽气使 C 中压强降低,A 的下底会迅速下移,在极短时间内就使云室容积膨胀,A 中水汽由于突然膨胀,温度会立

* 泡利(W. Pauli, 1900—1958)——奥地利物理学家,曾发现电子的一个重要性质——两个电子不能处于完全相同的状态,被称为泡利不相容原理。

即降低,使云室内的水汽变成过饱和.如果这时有一个带电粒子通过云室,它就会在自己的运动轨迹上不断与气体分子碰撞,使其电离成为正负离子.云室内的过饱和水汽便以这些离子为凝结中心凝结起来.这样,云室中沿着这个粒子的途径会出现一条由水珠连成的线,用强光照射可拍摄下这条径迹.如果粒子的电量越多,它的电离本领越强,凝结的水珠越多,在云室中显示的迹径就越粗.粒子的质量不同,单位长度上的水珠个数也不同.

在威耳逊发明云室前,人们只能依靠计数管*对粒子计数.由于这些粒子很小,无法把它们的运动轨迹反映出来.云室的发明为粒子物理的实验研究提供了有力的武器.“人过留名、雁过留声”,云室可以真实地为“粒子留迹”,提供出粒子的多种讯息(质量、电量等),从而帮助人们记录了原先不为人知道的许多新现象,发现了许多新粒子.正电子是云室摄到的第一个新粒子,也是人们所发现的第一个反粒子.

宇宙线是来自外层空间的射线.是海斯(V. F. Hess, 1883—1964)于1911—1912年在研究地球上和大气中的放射性时发现的.最初称为“海斯辐射”,后来被多年致力于宇宙线研究的专家密立根(R. A. Millikan, 美, 1868—1953)命名为“宇宙线”.

1932年,密立根的年轻同事安德逊让宇宙线穿过云室中的匀强磁场,每隔15秒钟对云室拍一次照.在仔细分析了几千张云室照片后,发现其中有一种径迹是陌生的.从这种径迹在磁场中的偏转方向看,表明是一种带正电的粒子(图55).

这种带正电的粒子会不会是质子呢?安德逊在云室中放了一块 6×10^{-3} 米厚的铅板,借以减慢其速度,使粒子径迹的曲率增大.结果发现,它与质子的径迹相比完全不符.

* 计数管是一种探测射线的装置.当射线通过计数管的充气管时,引起气体电离,离子在电场作用下向两极移动,产生一个电讯号,根据讯号出现的次数可记录出粒子通过的个数.

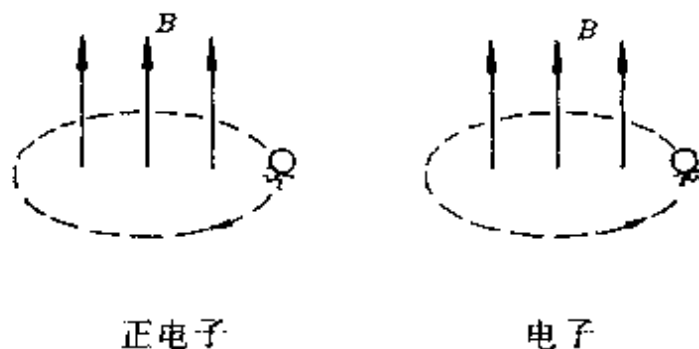


图 55 正电子与电子在磁场中旋转方向相反

安德逊在文章中写道：“1932年8月2日，对在垂直方向上的威耳逊云室中的宇宙射线照相时，发现了一些径迹，我们觉得，这些径迹只能用存在着某种粒子来解释。这些粒子具有正电荷，它的质量相当于自由的负电子通常具有的质量（图 56）。”

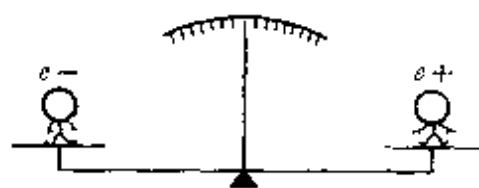


图 56 正电子与电子质量相等

据说，安德逊当时并不知道狄拉克的预言。后来，当他知道狄拉克的理论预言后，便断定这正是狄拉克预言的那种带正电的电子，他命名为“正电子”。安德逊也因发现正电子获得 1936 年度诺贝尔物理学奖。

正电子的发现引起人们极大的兴趣，纷纷展开研究。很快查明，正电子不仅存在于宇宙线中，也出现在一些核反应中。其实早在安德逊之前，约里奥—居里夫妇（J. F. Joliot, 1900—1958, I. Curie, 1897—1956）在研究钋轰击铍的核反应中，就曾在云室中看到了正电子的径迹。不过，当时他们把它理解为一个反向运动的电子而已，没有深入探究，以致失去了一个重大发现的机会*。后来通过许多实验发现，利用能量高于 1MeV 的 γ 射线（ $1\text{MeV} = 10^6\text{eV} = 10^6$

* 1932 年约里奥—居里夫妇用 α 射线轰击铍时发现一种穿透力极强的未知射线，他们误以为是 γ 射线而失去一次发现中子的机会。

$\times 1.6 \times 10^{-19} \text{J}$)对一些薄金属箔、气态介质等进行辐射时,都有可能观察到正电子,而且正电子总是与电子成对地产生.

狄拉克的理论还预言了电子和正电子可以成对地由光子从真空中产生出来(图 57);反之,如果一个电子和一个正电子相撞,它们便同时湮灭,全部转化为光子辐射出去(图 58),反应式是

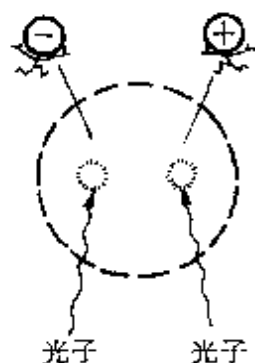
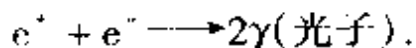


图 57 正负电子由光子成对产生

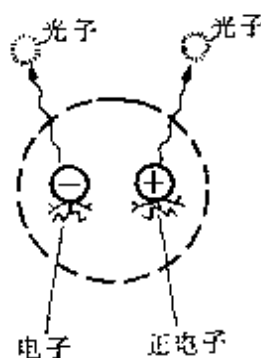


图 58 正负电子成对湮灭

应该指出,从实验中最早发现正负电子产生和湮灭的是中国著名物理学家赵忠尧.1927年,赵忠尧在美国加州理工学院研究部和安德逊一起当密立根的研究生.1929年他在博士论文课题实验中,用放射性元素钍衰变的中间产物 ThC (钍 208)作辐射源,测量它所辐射的能量为 2.6MeV 的硬 γ 射线在不同物质中的吸收系数时,发现测得的数值出现反常现象.这是硬 γ 射线通过重元素物质时产生了正负电子对的最早实验证据.后来他又做了第二个实验并写了第二篇论文公开发表.因此,1979年因发现 J 粒子荣获诺贝尔奖的美籍中国学者丁肇中在西德同步辐射中心“佩特拉”加速器落成典礼时,向许多国家的上百位科学家介绍赵忠尧时说:“这位是正负电子产生和湮灭的最早发现者,没有他的发现,就没有现在正负电子对撞机.”

中国科学院高能物理研究所自行设计建造的我国首座对撞机

(图 59)已于 1988 年 10 月 16 日成功地实现了正负电子对撞。

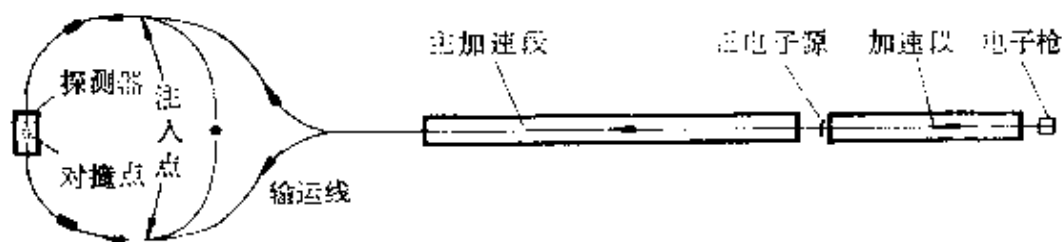


图 59 正负电子对撞机

正电子与物质中的电子发生湮灭反应,也许会使人发愁,这么一来地球上的物质岂不都要被湮灭了吗?请不用担心,因为地球上只有来自外层空间的极少数正电子,所以地球上的物质也就不会被湮灭掉了。

5. “ τ — θ ”之谜

人们从大量实验中证实,如果一个物理过程可以发生,这个过程在镜中的像所代表的过程在现实世界中一定也可以发生。

例如我们做牛顿第二定律实验时,前面放一面大镜子,那么看镜内的实验规律时将与镜外的完全相同(图 60)。

又如,一个向左飞行的火箭,它在镜中的像是向右方飞行的(图 61),这种运动实际上是可能存在的,因此,力学现象是左右对称的,即具有空间反演对称性。

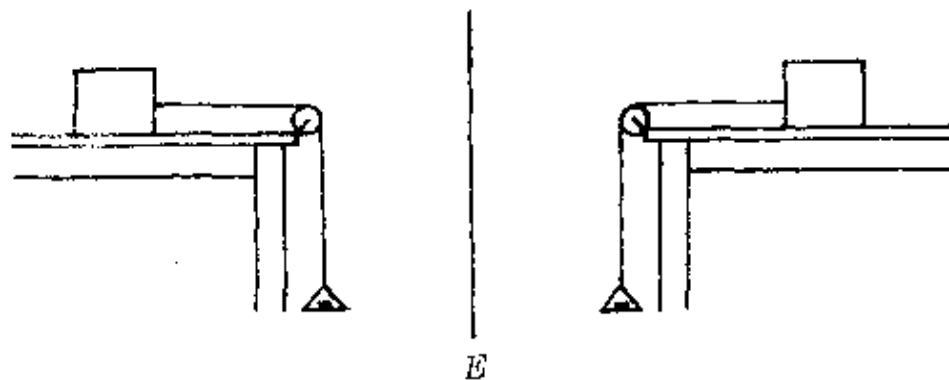


图 60

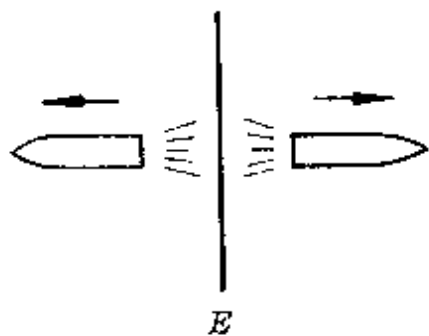


图 61

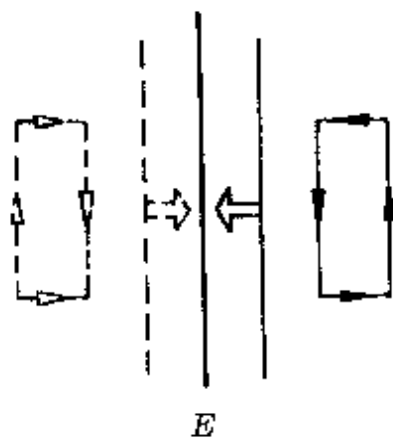


图 62

电磁学现象同样如此.例如,一根载流长直导线放置在一个载流矩形线圈的旁侧,直导线受到指向镜面的推力.它的镜像,矩形线圈的电流按反方向绕行,直导线中的电流指向不变,直导线受到从镜里向外的推力.这个镜像的实验现象在实际上是可以实现的,而且符合电磁规律(图 62).因此,电磁现象也是左右对称的,也具有空间对称性.

力学现象和电磁现象的左右对称性,归结为牛顿力学定律和麦克斯韦电磁学定律也都是左右对称的.

进一步对其他现象考察后发现,宏观的物理定律在空间反演时都保持不变,即具有空间反演对称性.

直到 1956 年,人们都不自觉地承袭从宏观现象中得到的上述经验,以为对微观现象也有这么一种对称性,即一个微观粒子的过程在镜中的像也必然是现实世界中可以发生的一个过程.

用来描述微观粒子空间反演对称性的物理量叫做“宇称”.

因为一个过程连续经过两次空间反演(镜像反射)后就等于过程本身,因此宇称这个量跟描述宏观物体的能量、动量等连续变化的物理量不同,它只能取两个分立的值(+1)或(-1).

设某个微观粒子的状态可用一个随坐标 \vec{r} 变化的波函数 $\psi(\vec{r})$ 描述, 这个波函数在镜像反射时只能有两种可能:

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{\text{空间反演}} \psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r})$$

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{\text{空间反演}} \psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r})$$

第一种情况表示经过一次空间反演波函数与原来的相同, 它的宇称记为 (+1); 第二种情况表示经过一次空间反演波函数取原来的负值, 它的宇称记为 (-1). 如果一个系统内有多个微观粒子, 那么这个系统的总宇称就等于各个粒子宇称的乘积, 显然也只能取 (+1) 和 (-1) 两个分立值.

许多实验事实表明: 对于一个多粒子系统, 不论经过怎样的相互作用(如中子、质子、介子等之间的强相互作用或电磁相互作用)和发生怎样的变化(包括可能会使粒子数发生变化), 系统的总宇称保持不变. 这就是曾被奉为金科玉律的“宇称守恒定律”.

可是在 1954—1956 年间, 在研究某种介子* 的衰变现象时出现了问题: 该介子有两种衰变方式, 一种称为 τ 粒子, 另一种称为 θ 粒子. 其中 τ 粒子衰变时变成三个 π 介子,

$$\tau^{\pm} \longrightarrow \pi^{\pm} + \pi^{\pm} + \pi^{\pm},$$

θ 粒子衰变时变成两个 π 介子,

$$\theta^{\pm} \longrightarrow \pi^{\pm} + \pi^{0**}.$$

精确的测量表明, τ 与 θ 这两种粒子的质量(均约为电子质量

* 介子是一种质量介于质子和电子之间的粒子, 它起着传递核力的作用. 由日本物理学家汤川秀树(Hidiki Yukawa, 1907—1981)首先提出.

** 粒子名称右上角的“+、-”号分别表示带有一个正与负的电荷单位, “0”表示不带电.

的 985 倍)、电荷、自旋、平均寿命(约为 10^{-8} 秒)等都相同,可是它们的衰变方式不同, τ 衰变成三个 π 介子的宇称为负; θ 衰变成两个 π 介子的宇称为正.

因此,如果确认宇称守恒定律严格成立,那么 τ 与 θ 就不可能是同一种粒子;如果认为 τ 与 θ 是同一种粒子,宇称守恒定律就不成立.究竟 τ 与 θ 是不是同一个粒子,一时难倒了众多理论物理学家.这个困难被称为“ τ — θ 之谜”.

正当许多物理学家为“ τ — θ 之谜”困惑不解之时,两位美籍华裔物理学家杨振宁(1922—)和李政道(1926—)作出了惊世之举.他们查阅了当时几乎所有关于衰变的实验资料,经过仔细的分析和研究后,对宇称守恒定律在弱相互作用*过程中是否成立提出了质疑.在 1956 年 10 月 1 日发表的名为《弱相互作用下宇称守恒问题》的论文中指出:“和一般所确信的相反,在弱相互作用

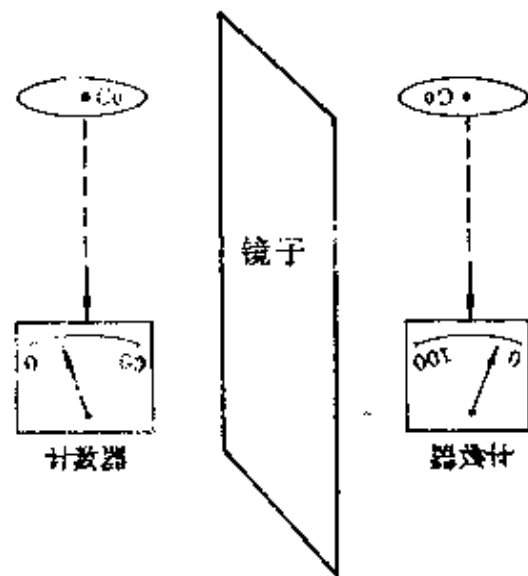


图 63 弱相互作用中宇称不守恒实验原理图

中实际上并不存在左—右对称的任何实验证据.如果左右对称在弱相互作用中并不成立,则宇称的概念就不能应用于 θ 和 τ 粒子的衰变机构中,因此 θ 和 τ 可以是同一个粒子.”他们并提出了用

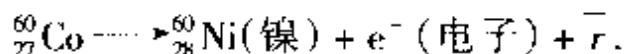
* 目前知道的相互作用共有四种,按强弱次序排列为强相互作用(原子核中质子和中子联系的核力)、电磁相互作用(静止电荷或运动电荷间的作用)、弱相互作用、万有引力相互作用.

实验进行验证的方案,其原理极为简单:建立两套包括弱相互作用、互成镜像的实验装置,然后检查这两套装置是否总能产生相同的结果(图 63)。

杨振宁和李政道的文章发表后,当初反应非常冷淡,因为人们对空间是均匀的早就习以为常,在一切其他实验中证明宇称守恒是精确成立的。当时世界上最伟大的理论物理学家之一的泡利,坚决不相信宇称守恒会遭破坏。他曾在的一封信中写道:“我不相信上帝是一个软弱的左撇子,我已经准备好下一大笔赌注,我敢打赌实验将获得对称的结果。”这位曾经用一个中微子假设拯救过能量守恒定律的杰出科学家*,现在又要从比他年轻近 30 岁(当时杨振宁 34 岁、李政道 30 岁)的两位华裔物理学家手中拯救另一条被视为神圣的守恒定律,泡利这一次打赌能取胜吗?

最权威的裁判只能是实验。可是,这个实验难度太大,大多数实验物理学家都视为畏途。正在人们翘首期望之时,在美国工作的另一位华人女物理学家吴健雄勇敢地起来响应。她在对 β 衰变现象的研究方面本有极好的基础,因此在获悉杨振宁、李政道的想法后,花了约半年的时间和她的同事安培勒(E. Ambler)、海华特(R. W. Hagward)、霍浦斯(D. D. Hoppes)、赫德逊(R. P. Hudson)安排了一个出色的实验,观测钴(^{60}Co)原子核的 β 衰变的镜像对称性。

钴(^{60}Co)原子核发生 β 衰变的核反应方程为



由于钴原子核有自旋,好像一个小磁针,在极低温度和强磁场中,它们的自旋方向都会顺着外磁场方向排列起来(图 64)。这样一来,这些核衰变所放出的电子就不再各向同性了,因此实验中只需

* 参见本丛书《猜想与假设》。

要查明：钴核衰变时，是顺着外磁场方向放出的电子多呢？还是逆着外磁场方向放出的电子多？如果向两个方向放出的电子数一样多，镜像对称，表明这一 β 衰变过程中宇称守恒，否则就不守恒。

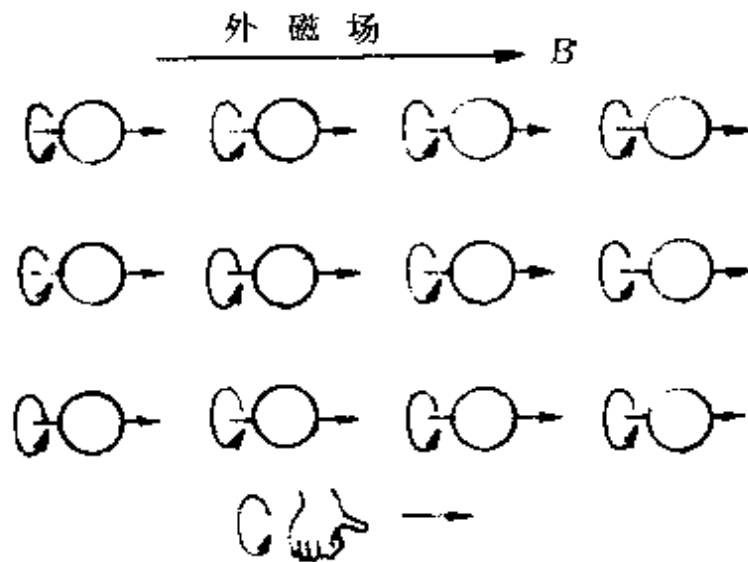


图 64

实验安排如图 65 所示。放射源置于一块硝酸铈镁晶体中，为了有效地消除电子热骚动而产生的对钴核自旋方向的影响，实验必须在低于绝对温度 0.01K 的极低温度下进行，以便使钴核自旋方向能整齐地排列。对空间反演对称性的检查是依靠改变外磁场的方向来实现的。

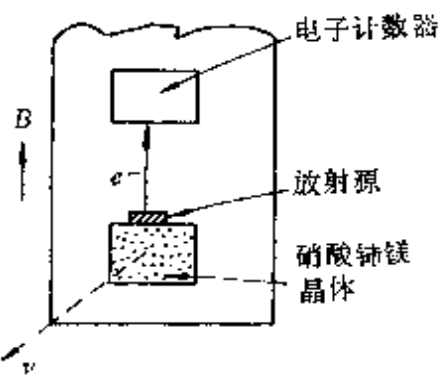


图 65

1956 年末，实验结果出来了，正如杨—李所料，当改变磁场方向时两次电子计数器上的示数之间存在非常大的差异。仪器其他部分的性质既然是左右对称的，那么结果的不对称只能起因于钴的衰变过程（即钴原子核的 β 衰变）对于空间反演的不对称性，而

这是由弱相互作用引起的.从而证明,弱相互作用中宇称不守恒.因此 τ 与 θ 确是同一种粒子,只不过有两种衰变方式而已,现在通称为 K 介子.曾经困扰理论物理学界多时的“ τ — θ 之谜”终于被这两位年轻的华裔物理学家揭开了.

弱相互作用过程中宇称的不守恒,开创了粒子物理的新局面,由此产生了许多新的研究课题.譬如,人们想到中微子是一个典型的弱相互作用粒子,根据杨—李的理论,宇称不守恒在它身上必应有所反应.一个左旋的中微子在镜中的像是右旋粒子(图 66).如果宇称

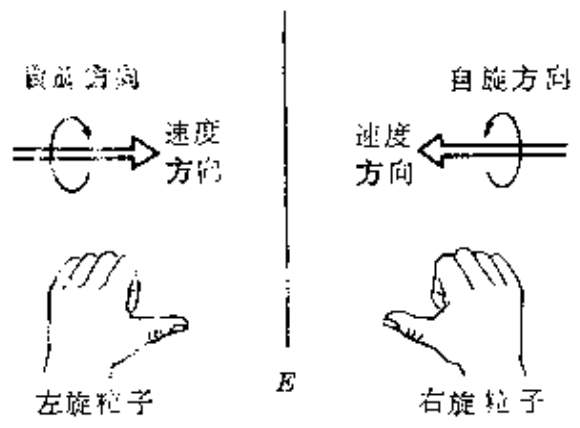


图 66

守恒,就要求镜中的右旋粒子在现实世界中应该存在.可是物理学家通过反复的实验寻找,迄今为止,确实只发现左旋的中微子,只有它的反粒子才是右旋的(图 67).这又给杨—李的理论增添了一个证据.

杨振宁和李政道由于这一重大贡献,荣获 1956 年度诺贝尔物理学奖.这也是最先获得此项殊荣的华人科学家.

著名的原子物理和原子核物理学家、诺贝尔奖获得者、吴健雄的导师赛格雷(E. Segre, 1905—)在谈到杨振宁、李政道、吴健雄三位物理学家的贡献时评论说:“违背宇称守恒,这也许是战后(指第二次世界大战——作者)最伟大的理论发现.它消除了一种偏见,这种偏见未经足够的实验验证,就被当成一条真理.”他又说:“从当代这三位中国物理学家所取得的成就,也可以看出中国这个伟大的国家在度过当前的革命震动时期,并恢复其作为世界

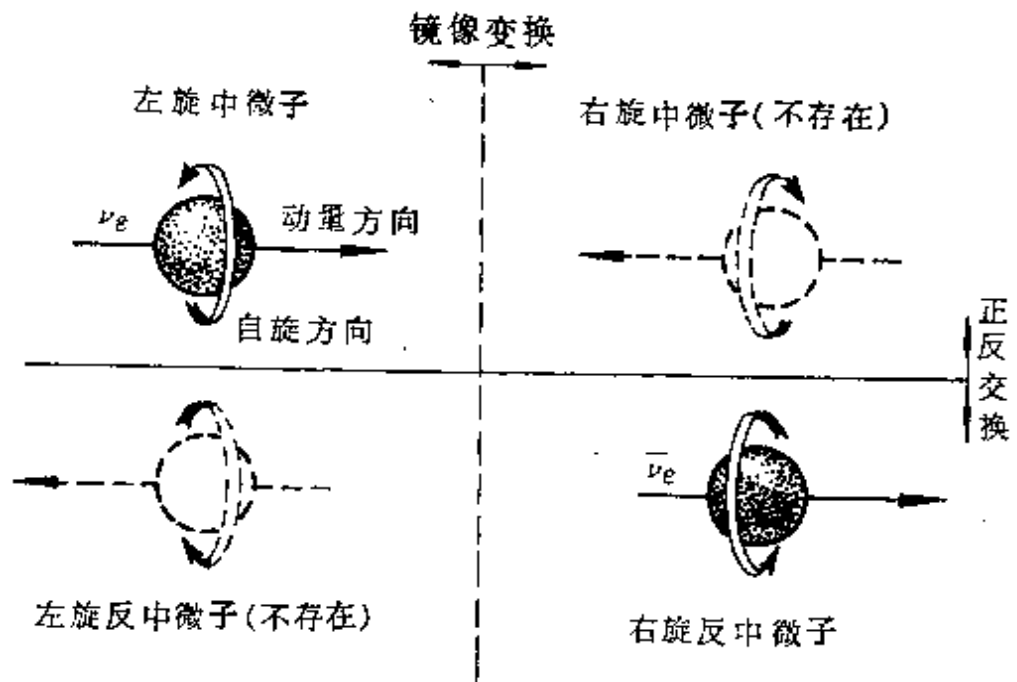


图 67

文明发源国之一的作用后,将来可能对物理学作出什么样的贡献。”

三、中学物理中几种典型的对称

在物理学中,对称性主要体现在物理现象的空间和时间性质的描述上,也就是说,一切物质和运动过程都有它对应的方面.这种对应方面表现为现象的相同、形态上的对映、物质的正反面、结构上的重复、性质上的一致、规律性的不变等.

对称性的普遍特征反映在中学物理问题中时,我们可以把它通俗地分为镜像对称、中心对称、结构对称、电路对称等几种.其中最重要的就是镜像对称.

1. 镜像对称

具有与物体和它在平面镜中的像相同特点的对称性,称为镜像对称.这是一种人们最熟知、最直观、最普遍的对称性.如图 68 所示,镜前的物(烛焰)与镜中的虚像,就是一种镜像对称——虚像与物大小相等,到镜面的距离相等.

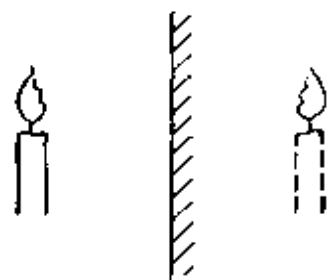


图 68

利用平面镜成像的这种对称性,给平面镜成像作图带来了方便.

如图 69,设 AB 为镜前的物体,为了作出它在平面镜中的像(虚像),可先根据物、像对镜面的对称性,找出物体上两端点 A 、 B 在镜中的像点 A' 、 B' .然后,从物体上再作任

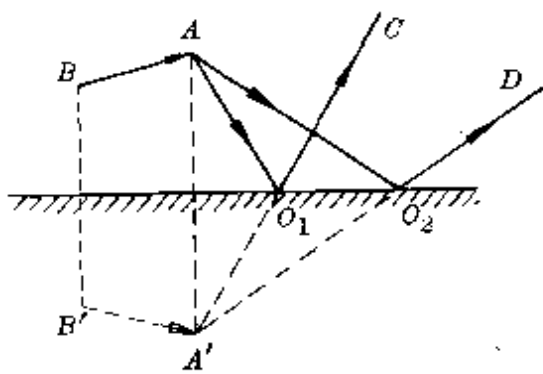


图 69

意两条投射到镜面的光线,连接入射点和像点,即可确定反射光方向,作出反射光线 AO_1C 、 AO_2D . 这种作法比先画出入射光 AO_1 、 AO_2 , 再根据反射定律,由反射线的延长线交点确定像点要方便得多.

镜像对称是一种空间反演. 它有一个重要的特点: 镜中的像与镜前的物大小相同、上下关系不变,但是左变为右,而右变为左. 例如,我们伸出右手手套于镜前,镜内出现了左手手套的情形(图 70). 实际上我们是有这种左手手套的,因此我们的手套是左右对称的. 为了使镜中的像与物保持相同的左右关系,应该经过两次镜面反射. 推广地说,经过奇次数镜面反射的像与物左右关系互换; 经过偶次数镜面反射的像与物左右关系不变.

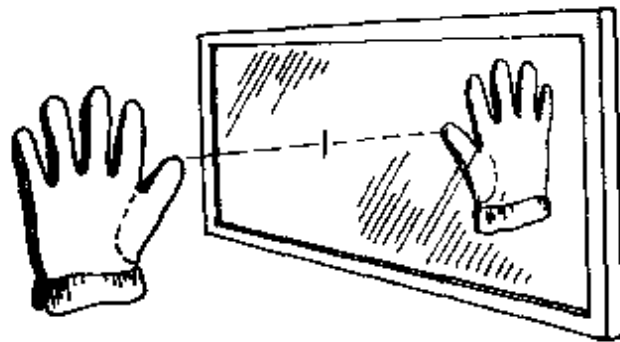


图 70

镜像对称并不局限于平面镜成像,也渗透在力学、电学等其他方面.

(1) 一个光滑小球斜射到坚硬的墙壁上,与墙壁发生弹性碰撞,小球好像是从它在镜中的像直接射出去的,小球的反弹路径的

反向延长线与入射路径对于墙面来说也互为镜像对称(图 71)。

(2)在静电学中有一种镜像法(或称电像法),也是借用了镜像对称的原理。

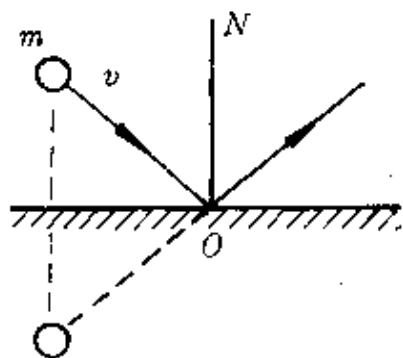


图 71

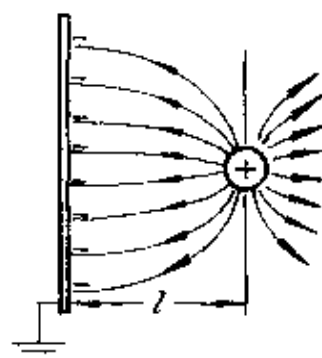


图 72

如图 72 所示,在离开一块接地的无限大导体平面距离 l 处,有一个电量为 Q 、带正电的点电荷.根据静电感应,导体板右侧会感应出一定量的负电荷.为了计算导体板上的感应电荷与点电荷 Q 之间的相互作用力,可设想以导体板为镜面,在镜中(导体板左侧)有一个电量相等的负电荷,它就好像是导体板右侧正电荷的像,板前电荷的电场线与镜中电场线的像互相对称,就好像电场线是从正电荷发出,终于负电荷一样(图 73).原来板前正电荷有多少条电场线终于导体板上,也同样会有多少条电场线终于“像电

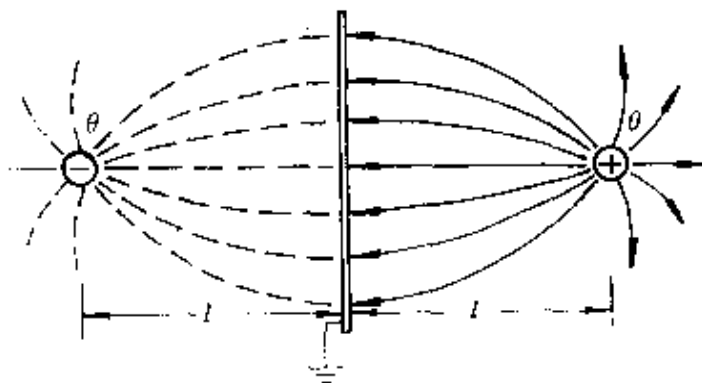


图 73 电像法

荷”上,所以,原来板前正电荷与板上感应电荷之间的相互作用力就等于板前正电荷与板后“像电荷”之间的相互作用力,于是很容易得出

$$F = k \frac{Q^2}{(2l)^2} = \frac{kQ^2}{4l^2}.$$

(3)在研究光的波动性时,可以利用镜像对称获得相干光源.

我们知道,最先证实光的波动性的实验是著名的杨氏双缝干涉.为了使两束光满足干涉条件,托马斯·杨(T. Young, 英, 1773—1829)巧妙地采用了把一束光分成两束,使两束光“同出一源”的方法,保证了两束光频率相同、位相差恒定.如图 74 所示,让一束白光(或单色光)照射到两个相距很近的狭缝上,这两个狭缝形成了两个相干光源,从狭缝射出的光在屏上一定位置处便产生干涉,形成明暗相间的条纹.

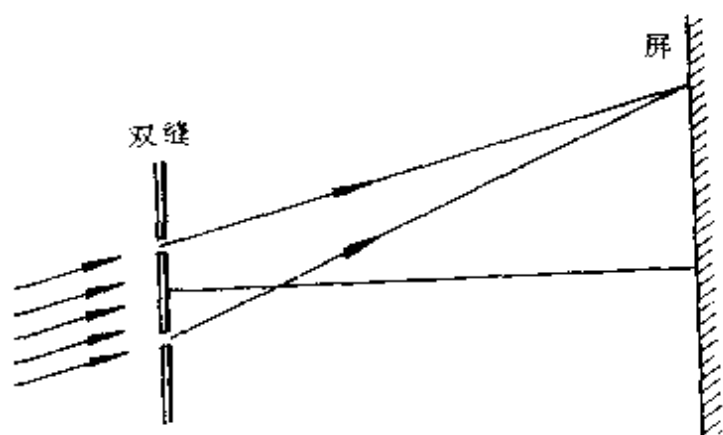


图 74 杨氏双缝干涉

根据使两束光“同出一源”的道理,利用平面镜成像的对称性也可获得相干光源.

如图 75 所示,让点光源 S 以掠入射(即入射角很大)方式投射到一块平面镜上,使得到达屏上的光一部分由光源 S 直接照射来,另一部分就可看成光源的镜像 S' 照射来的. S 与 S' 离得很近,

“同出一源”，因此在屏上一定位置处能发生干涉，这个方法称为洛埃镜法。

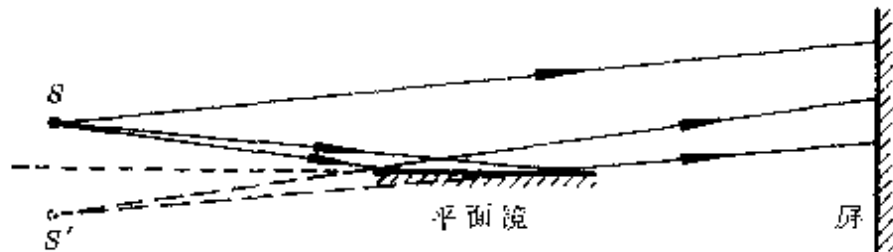


图 75 洛埃镜法

(4)研究声波的反射时，可以用一个镜像声源发出的波代替反射波。

如图 76 所示，设一个静止的声源 S 向着障碍物发出一列声波，则从障碍物返回声源的反射波，可以看成在障碍物后与声源 S 成镜面对称的镜像声源 S' 发出的。

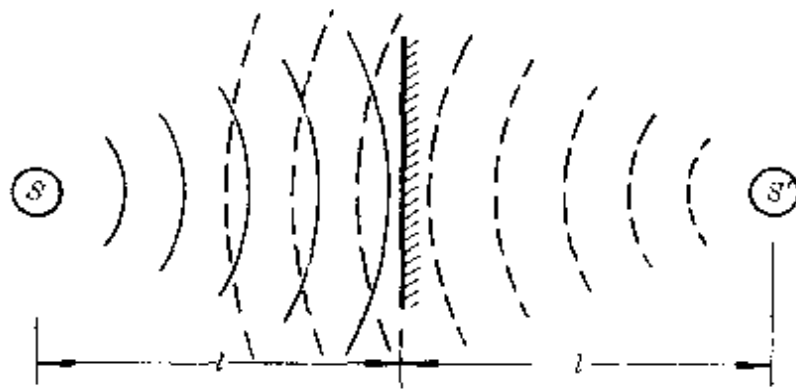


图 76 声源与它的镜像

利用反射波的这种特性，在研究声音的多普勒效应时很方便。

当声源与观察者相互接近或相互分离时，音调升高或降低的现象，称为多普勒效应。这是奥地利的多普勒 (C. Doppler, 1803—1853) 首先从光的波动理论对光现象的研究得出了结论。于 1845 年，被布伊斯——巴洛特 (Christoph Heinrich Dietrich Buys-Ballot, 1817—1890) 在铁路边证明了这个论断

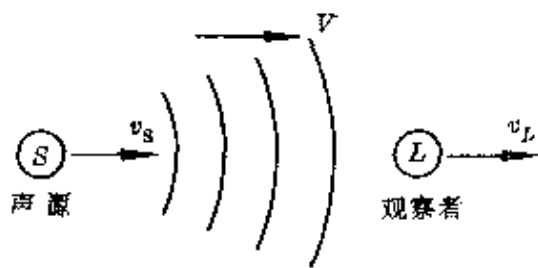


图 77 多普勒效应原理

如图 77, 设声源 S 、观察者 L 分别以速度 v_s 、 v_L 在静止介质中沿同一直线同向运动, 声源发出的声波在介质中的传播速度为 V 。

当声源不动时, 声源发出频率为 f_0 的声波, 时间 t 内在距离 Vt 内分布的波数为

$$n = \frac{Vt}{\lambda_0}.$$

当声源以 v_s 运动时, 这 n 个波分布在距离 $(V - v_s)t$ 内, 对应的波长

$$\lambda = \frac{(V - v_s)t}{n} = \frac{V - v_s}{V} \lambda_0.$$

由于观察者以 v_L 做同向运动, 则声音相对于观察者的速度为 $v - v_L$, 因此, 观察者感知(测得)的频率

$$f = \frac{V - v_L}{\lambda} = \frac{V - v_L}{V - v_s} \cdot \frac{V}{\lambda_0} = \frac{V - v_L}{V - v_s} f_0.$$

其中的几种简单情况如下:

① 观察者不动 ($v_L = 0$), 声源接近观察者, 则

$$f = \frac{V}{V - v_s} f_0 > f_0.$$

观察者感到音调变高. 站在铁路旁, 火车驶近时听到汽笛声音调升高就是这个道理.

② 观察者不动 ($v_L = 0$), 声源离开观察者, 相当于 v_s 取负值得

$$f = \frac{V}{V - (-v_s)} f_0 = \frac{V}{V + v_s} f_0 < f_0.$$

观察者感到音调变低. 站在铁路旁, 火车远去时听到的汽笛声就有这个感觉.

③ 声源不动 ($v_s = 0$), 观察者驶向声源, 相当于 v_L 取负值得

$$f = \frac{V - (-v_L)}{V} f_0 = \frac{V + v_L}{V} f_0 > f_0.$$

观察者感到音调升高.

④声源不动($v_s = 0$), 观察者远离声源, 则

$$f = \frac{V - v_L}{V} f_0 < f_0$$

观察者感到音降低.

如图 78 上所示, 一列火车沿垂直悬崖的铁路向着悬崖驶去, 车速为 v , 鸣笛的频率为 f , 声音的传播速度为 V , 要求火车司机听到的从悬崖反射回来的声音频率.

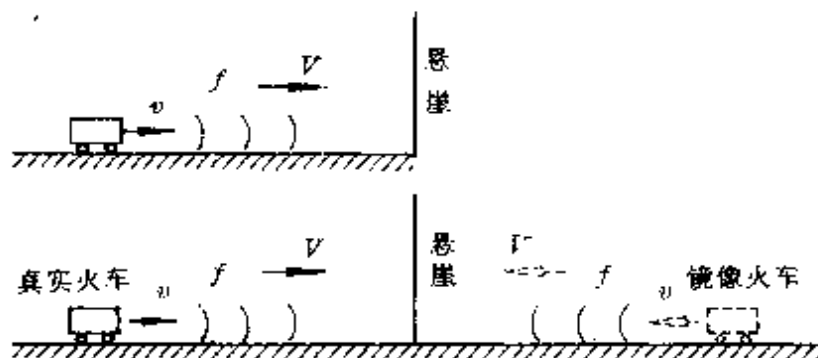


图 78 火车驶向悬崖反射声波频率增大

为此, 可设想在悬崖另一面有一列镜像火车以同样速度开来 (图 78 下), 火车司机听到的从悬崖反射回来的声音频率, 与听到从镜像火车发出的声波频率相同. 这个情况相当于声源与观察者相互接近. 令 $v_L = -v$, 代入公式, 有

$$f = \frac{V - v_L}{V - v_s} f_0 = \frac{V - (-v)}{V - v} f_0 = \frac{V + v}{V - v} f_0.$$

所以火车司机听到的反射波频率增大, 即音调变高.

2. 中心对称

相对于某个位置的一种对称性, 称中心对称.

在中学物理中, 中心对称有多种表现形式:

(1) 质点沿直线或弧线, 以某一中心位置做往复运动

如图 79 所示的单摆、弹簧振子或振动试验台上的物体,在运动(振动)过程中,它们都具有以平衡位置为中心的对称特性.根据这种对称性,很容易判知,质点在平衡位置两边对称的位置上,质点的速度、加速度、回复力、动能,势能必然是大小相等的.

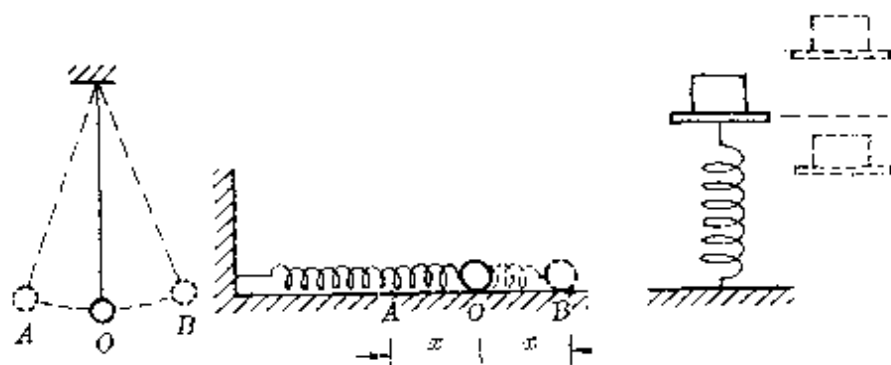


图 79

(2)以圆形(圆周、圆面、球面和球体)为特征的中心对称

匀速圆周运动,就是一种最常见的中心对称形式.质点沿圆周运动时,周而复始,表现出一种重复性.它在圆周上的任何一个位置,都可找到与它对应的另一位置,它在圆周上各处受到的向心力都指向中心,两两对应(图 80).根据这个特征,给我们对物体做圆周运动的受力分析指明了方向.如图 81,小球在一个光滑的半球形碗的内壁做匀速圆周运动,小球所受的重力 mg 和碗壁支持力 N

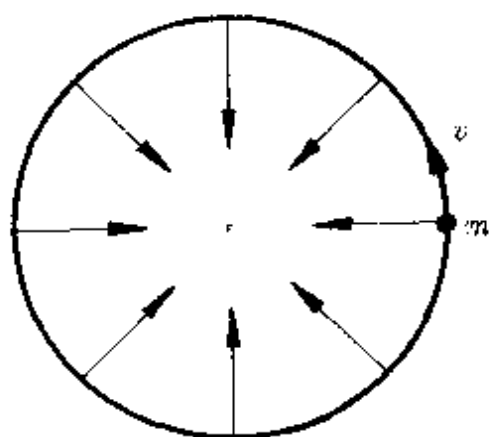


图 80

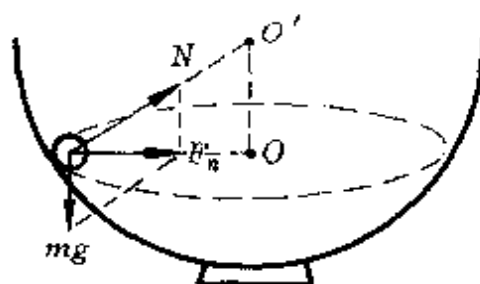


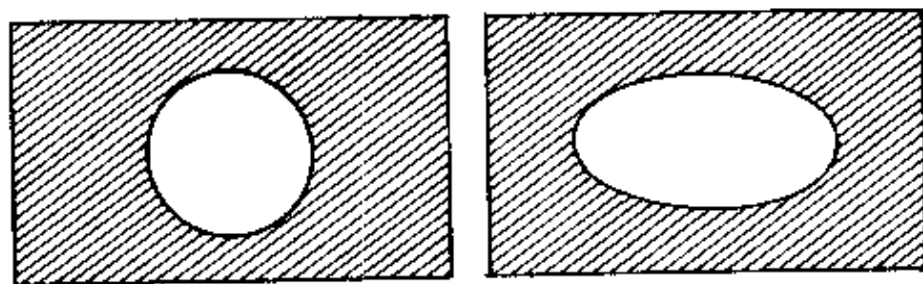
图 81

的合力 F 必在水平面内沿半径指向圆心, 否则小球的运动无法形成对圆心 O 的中心对称.

反过来, 如果在圆周上均匀地密布着一系列质量相同的质点 m , 它们对中心质点 m_0 的吸引力都沿半径背离圆心. 由于对称性的关系, 很容易判知, 中心质点所受圆周上各质点的吸引力的合力 (矢量和) 一定为零. 把这个结论推广到均质球面或均质球体也同样适用. 因为一个球面可以看成是一个圆绕轴旋转形成的, 一个球体可以看成是无数个球面叠套而成的. 所以, 一个均质球面或一个均质球体, 对球心处质点的引力的合力必为零.

圆 (或球) 的对称性在中学物理中有许多反映:

① 在研究晶体的各向异性时, 常常做这么一个实验: 在一块云母片和一块玻璃片上分别涂上薄薄的一层石蜡, 然后用一根烧烫的针 (或小球) 去接触它们的反面, 根据石蜡熔化成的图形, 可判断出它们的导热性. 如图 82 所示, 在玻璃片上的石蜡熔成圆形, 这是一个中心对称图形, 表示玻璃的导热性各向相同 (各向同性); 在云母片上的石蜡熔成椭圆形, 这不是一个中心对称图形, 表示云母的导热性各向不同 (各向异性).



玻璃

云母

图 82

② 孤立的正、负电荷的电场线都形成以点电荷为中心的对称分布图形 (图 83). 根据上面对质点引力的同样道理可以推知: 一

一个均匀带电圆环、一个均匀带电球壳(或均匀带电球体),在球心处的场强必为零.

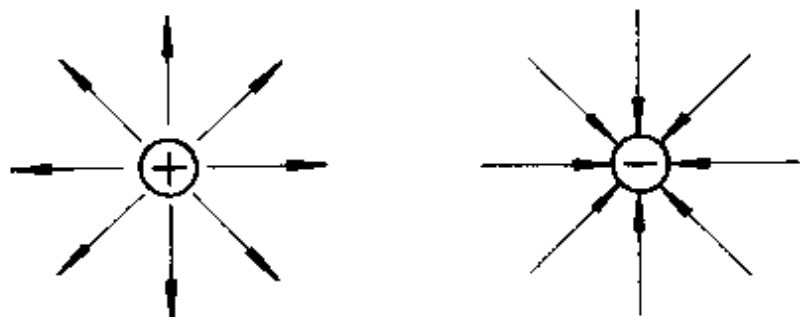


图 83

③ 一个点光源向周围空间辐射的光能也是中心对称分布的. 根据这个道理,很容易算出离开点光源某处单位面积上的光能(或光子数).

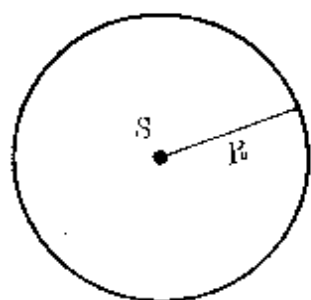


图 84

如图 84, 设点光源的功率为 P , 辐射波长为 λ , 则在时间 t 内辐射的总光子数

$$N_0 = \frac{Pt}{h\nu} = \frac{Pt\lambda}{hc}$$

这些光子分布在以点光源 S 为球心的球面上, 所以, 离开点光源 R 处的每单位面积上在时间 t 内投射的光子数

$$n = \frac{N_0}{4\pi R^2} = \frac{Pt\lambda}{4\pi R^2 hc}$$

(3) 形成以某一位置为中心的对称排列

光的干涉条纹的分布, 就是这种很典型的对称排列.

如图 85, 设屏上某处 P 到双缝 S_1 、 S_2 的距离(光程)分别为 r_1 、 r_2 . 由图中可知

$$r_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, r_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2.$$

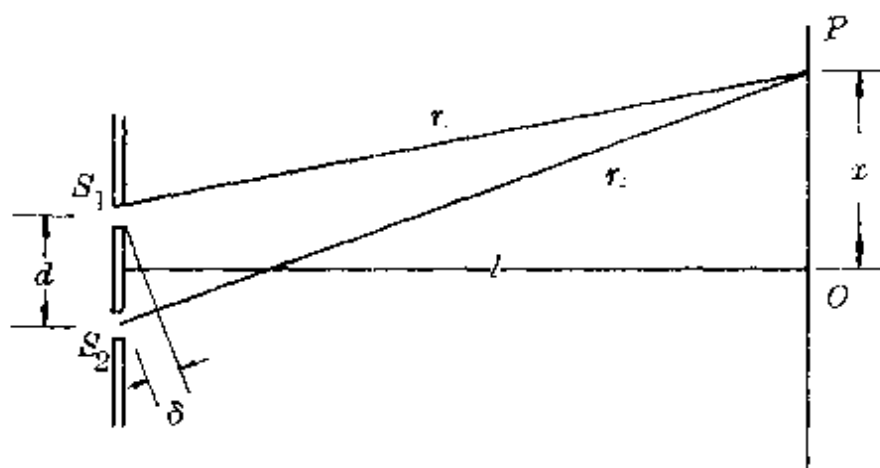


图 85 杨氏双缝干涉原理

两式相减得

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2dx.$$

由于 $l \gg d$, 且 $l \gg x$, 因此 $r_2 + r_1 \approx 2l$, 所以屏上某处 P 到双缝 S_1 、 S_2 的光程差

$$\delta = r_2 - r_1 = \frac{d}{l}x.$$

根据波的干涉理论, 程差 δ 等于波长 λ 的整数倍(或半波长的偶数倍), 两波同相到达 P 点, 振动加强, 出现亮条纹; 程差 δ 等于半波长的奇数倍, 两波反相到达 P 点, 振动相消, 出现暗条纹. 这个条件转换成屏上离中心 O 的距离时, 则出现亮条纹处

$$x = \pm k \frac{l}{d} \lambda, k = 0, 1, 2, \dots$$

出现暗条纹处

$$x = \pm (2k - 1) \frac{l}{d} \cdot \frac{\lambda}{2}, k = 1, 2, \dots$$

在中央 O 处, 程差 $\delta = 0$, 出现亮条纹. 所以, 在屏上形成以中央亮条为中心对称、两边间隔排列着明暗相间的干涉图样, 如图

86 所示。

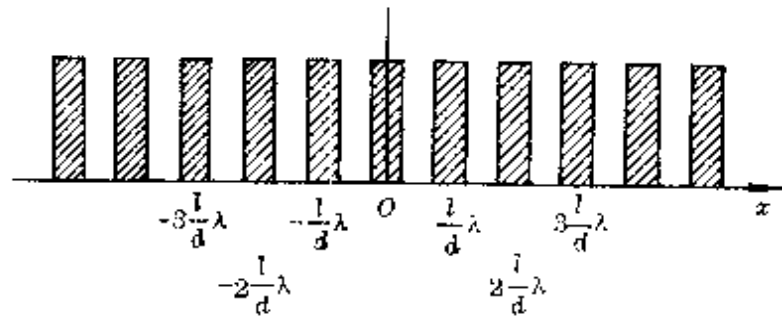


图 86

3. 结构对称

结构对称指的是某种几何形体的对称性。

许多有规则的几何形体,如正方形、长方形、三角形、菱形、正多边形以及各种柱体(圆柱、棱柱等)、一些建筑构件等,都具有结构对称性。

结构对称常会给分析问题带来很多方便。

(1)如图 87(a)所示,用一个等腰劈楔入物体中,由于对称性,当在劈背上加以外力 F 时,劈面对物体产生的推力对称分布、大小相等。不考虑劈自身重力时,外力 F 和它产生的推力 N_1 、 N_2 构成一个菱形,如图 87(b)所示,于是很容易算出推力大小

$$N_1 = N_2 = \frac{F}{2\sin\alpha}$$

当 α 角很小时,可以用一个不大的外力 F 得到很大的推力。这就是劈很容易楔入物体的道理。

(2)图 88(a)是建筑上常用的人字梁,是等腰三角形对称结构。不计梁自重时,在顶点挂上重为 G 的物体后,利用对称性很容易算出各构件所受的作用力和对墙的压力。

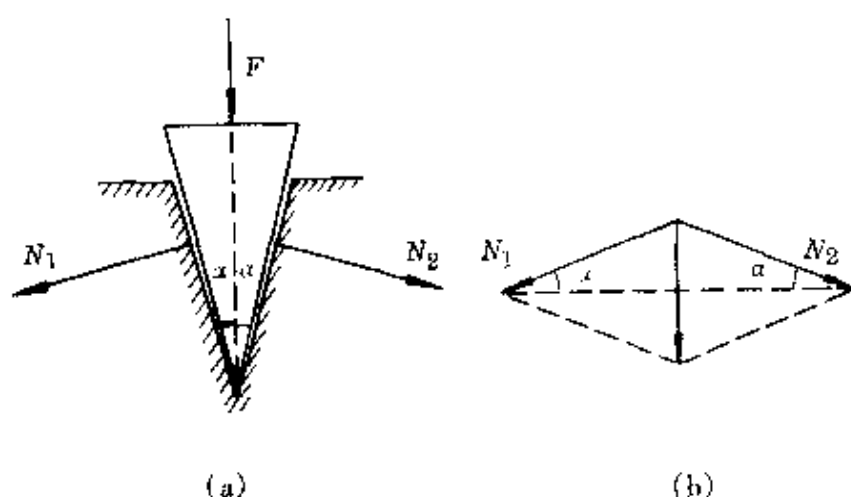


图 87

如图 88(b)所示,把对顶点 A 的拉力 $F = G$ 沿 AB 、 AC 两侧分解,由于对称,两分力大小相等($F_1 = F_2$),又 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{l}$,因此

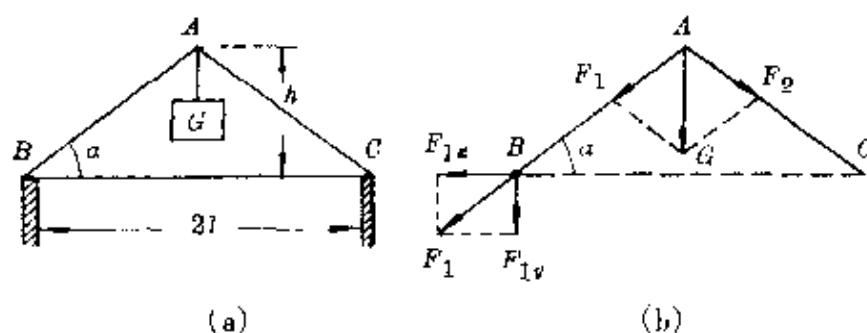


图 88

$$F_2 = F_1 = \frac{G/2}{\sin\alpha} = \frac{G}{2\sin\alpha}.$$

再把 F_1 沿水平方向和竖直方向分解:

$$F_{1x} = F_1 \cos\alpha = \frac{G}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{lG}{2h},$$

$$F_{1v} = F_1 \sin\alpha = \frac{G}{2}.$$

由于对称性, $F_{2x} = F_{1x}$ 、 $F_{2v} = F_{1v}$,所以横梁受到的推力大小为 $\frac{l}{2h}$, G 墙受到的压力均为 $\frac{G}{2}$.

(3)结构对称也简化了对重心位置的计算.由同种均质材料组

成的、具有结构对称的物体,其重心位置就在它的几何中心.根据这个特点,对于某些不规则的物体,可采用分割(或填补等)的方法,使它形成几个具有结构对称的规则物体,这样,就很容易找出重心位置了.

如图 89(a)所示,在一块边长为 a 、均匀在正方形薄片上切去 $1/4$,这样就变成了一个不规则的形体.为了求得它的重心位置,可把它分成三个具有结构对称的三角形.上、下两三角形[图 89(b)中划线部分]的重心在对顶点 O ;左边三角形的重心在三条中线的交点 O_1 ,它离开顶点的距离等于底边上高的 $\frac{2}{3}$,即 $OO_1 = \frac{2}{3} \times \frac{a}{2} = \frac{a}{3}$.于是,就可把求重心位置转化为求取使杠杆 OO_1 平衡时的支点[图 89(b)].由

$$2G_1 x = G_1 \cdot \frac{a}{3},$$

得重心位置 C 离开中心 O 的距离

$$x = \frac{a}{6}.$$

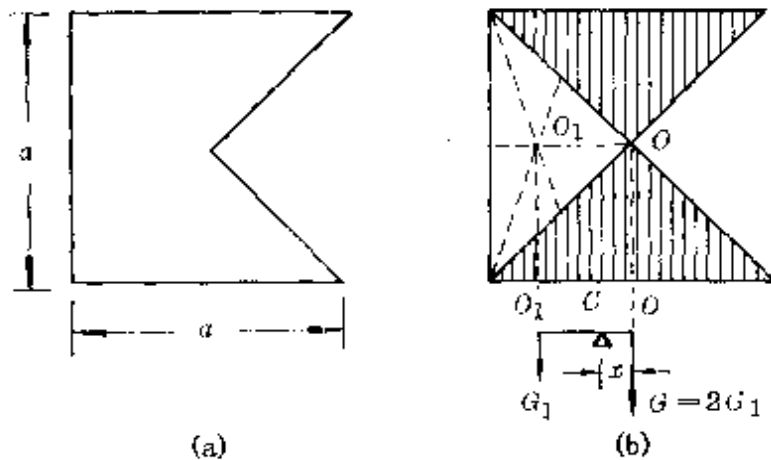
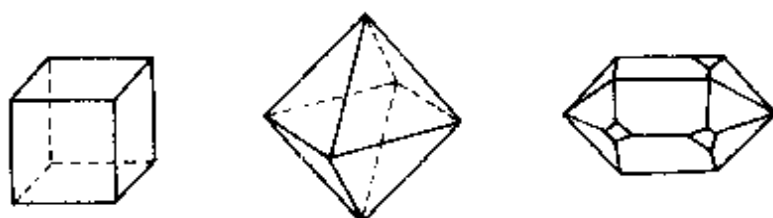


图 89

(4)在物质结构上有丰富的结构对称实例.如图 90 所示的食

盐晶体呈立方体形,明矾的晶体是八面体,石英的晶体中间是一个六面棱柱,两端是六面棱锥.晶体内部的物质微粒都按一定规则排列,构成空间点阵.



食盐

明矾

石英

图 90 空间点阵

利用对称性可以较方便地算出反映其结构的一些重要数据(称点阵常数).如食盐晶体中的钠离子和氯离子在空间三个互相垂直的方向上等距交替排列(图 91).根据钠和氯的摩尔质量 $M_{Na} = 23.0 \times 10^{-3}$ 千克/摩、 $M_{Cl} = 35.5 \times 10^{-3}$ 千克/摩,食盐的密度 $\rho = 2.16 \times 10^3$ 千克/米³,阿伏伽德罗常数 $N_0 = 6.02 \times 10^{23}$ 摩⁻¹,可算出单位体积中的钠离子和氯离子数均为

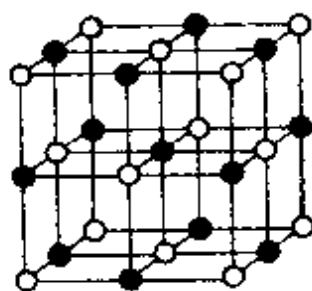


图 91

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{\rho}{\frac{M_{Na}}{N_0} + \frac{M_{Cl}}{N_0}} = \frac{\rho N_0}{M_{Na} + M_{Cl}} \\
 &= \frac{2.16 \times 10^3 \times 6.02 \times 10^{23}}{(23.0 + 35.5) \times 10^{-3}} \text{ 米}^{-3} \\
 &= 2.22 \times 10^{28} \text{ 米}^{-3}.
 \end{aligned}$$

每个离子所占的体积

$$V_1 = \frac{V}{2n} = \frac{1}{2n}.$$

把每个离子所占的体积看作一个小立方体,其边长就可看作

是相邻离子的间距,即

$$d = \sqrt[3]{V_1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2 \times 2.22 \times 10^{28}}} \text{米}$$

$$= 2.82 \times 10^{-10} \text{米}.$$

德国物理学家劳厄(M. V. Laue, 1879—1960)正是根据相邻离子的间距可以与 X 射线的波长相比拟,才想到用晶体做光栅,既证实了晶体的空间点阵结构,也证实了 X 射线的衍射现象,真是一箭双雕.

4. 电路对称

这是电学中特有的一种对称性,表现为电路元件结构上的对称或重复性.

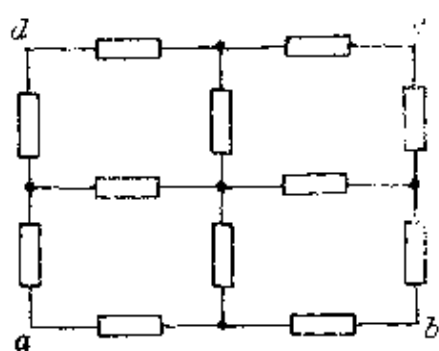


图 92

图 92 就是由 12 根相同的电阻丝构成的正方形结构.这种电路中各元件之间的关系不表现很明显的串、并联关系,一般较难求解.仅在特定条件下,其电学参数显示出某种对称性时,就可以简化处理.如图 92 中电路,对 a 、 c (或 b 、 d)两个对角顶而言,电路完全对称,

因此 a 、 c (或 b 、 d)两对角顶间的等效电阻就可以借助对称性进行计算.具体的处理方法比较常用的有:

(1) 电流分配法 设从某一端(如 a 端)流入网络的电流强度为 I ,根据对称性很容易判知各电阻分配到的电流依次为 $\frac{1}{2} I$ 、 $\frac{1}{4} I$,如图 93 所示.

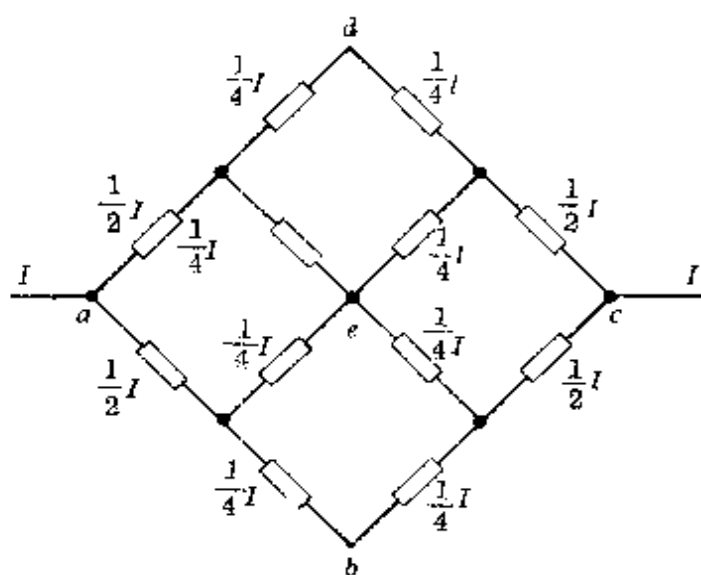


图 93 电流分配法

设每个电阻的阻值为 r , 则 a 、 c 两顶点间的电压

$$\begin{aligned}
 U_{ac} &= \frac{1}{2} I \cdot r + \frac{1}{4} I \cdot r + \frac{1}{4} I \cdot r + \frac{1}{2} I \cdot r \\
 &= \frac{6}{4} I r .
 \end{aligned}$$

以 R_{ac} 表示 a 、 c 间等效电阻, 则

$$U_{ac} = I R_{ac} .$$

$$\therefore R_{ac} = \frac{U_{ac}}{I} = \frac{\frac{6}{4} I r}{I} = \frac{6}{4} r = 1.5 r .$$

(2) 等电势点法 根据对称性找出等电势点, 然后把各等电势点连接成等电势线, 就可画出等效电路.

如图 94(1) 的电路, 电路中的电阻均为 r . 由对称性可知, a_1 、 a_2 、 b 、 e 、 d 、 c_1 、 c_2 的电势分别相等, 可连接成等电势线 (虚线所示), 于是就可根据等电势线画出图 94(2) 的等效电路.

根据图 94(2) 的等效电路很容易算出 a 、 c 两端间的等效电阻

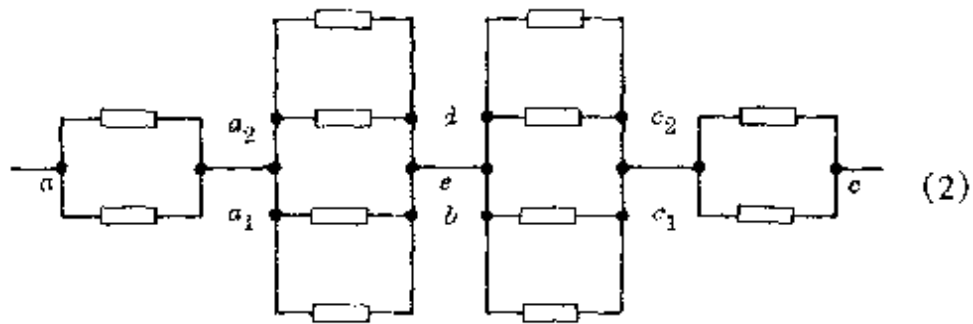
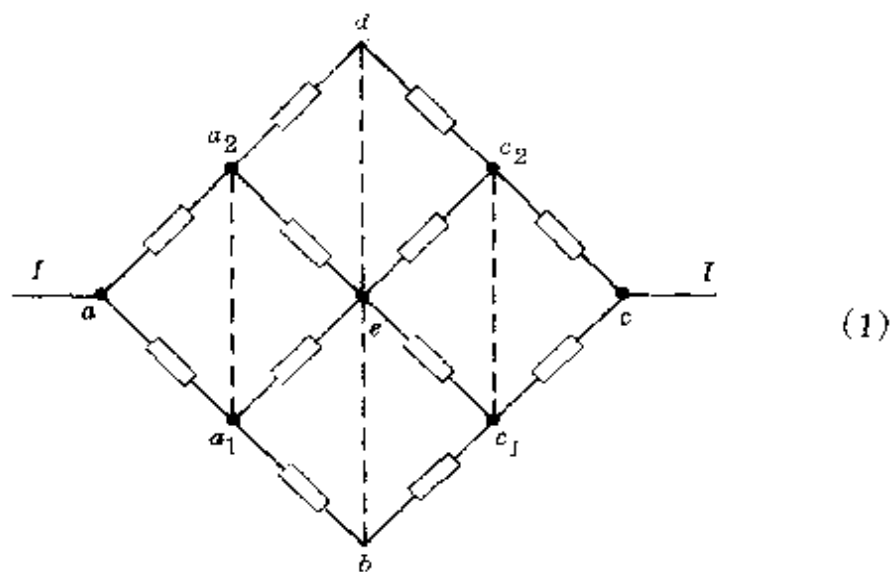


图 94 等电势法

$$R_{ac} = \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}r + \frac{1}{4}r + \frac{1}{2}r = \frac{6}{4}r = 1.5r.$$

寻找等电势点很有意义,许多电路常可根据等电势点判断是否存在电桥电路,从而简化计算.

(3)分离节点法 根据对称性,把电路中某一个节点分离成电势相等的两点,使原电路形成明显的串并联关系.

如把图 95(1)中节点 e 分成电势相同的两点 e_1 、 e_2 ,形成新的电路如图 95(2)所示,于是,立即可画出它的等效电路,如图 95(3)所示.因此 ac 两端间总电阻为

$$R_{ac} = \frac{1}{2} [r + (2r // 2r) + r] = \frac{1}{2} \times 3r = 1.5r.$$

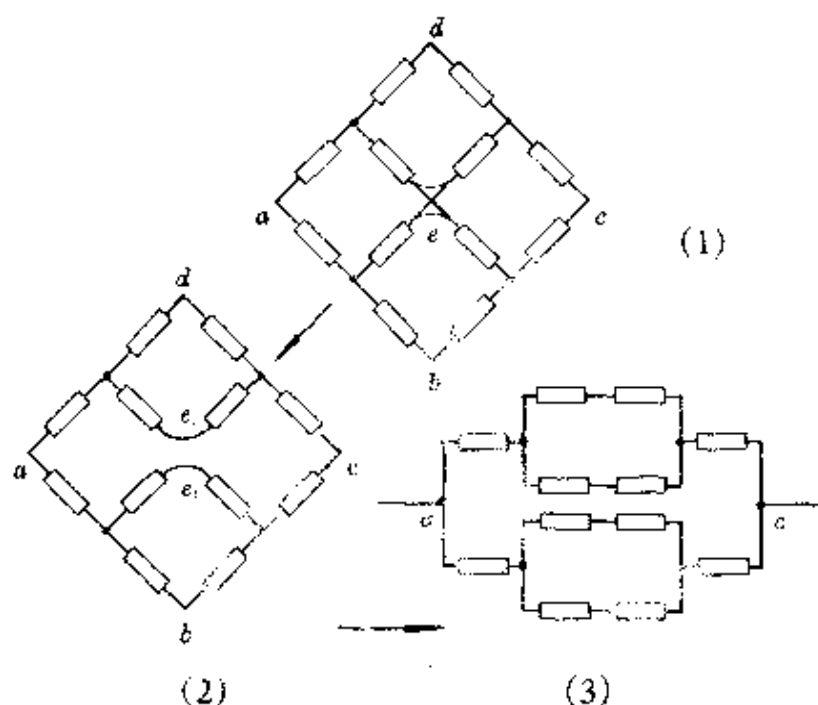


图 95 分离节点法

上面我们对中学物理中常见的对称表现归纳为四方面,其他还有如轨迹对称、过程对称等形式.实际上,所有上述这些区分都不是严格的,仅是从某一侧面而言.如图 96,一带电粒子射入一环形区域的匀强磁场内,经与环边的三次碰撞后回到出发点,完成一周.从粒子运动的轨迹来说,可称为是轨迹对称;把粒子运动的轨迹看作是一条有形的细管,也是结构对称;对于以两顶点 ac 或 bd 的平面来说,可看成镜像对称.所以,严格区分是没有意义的,也有悖于物理学习的方法和目的.我们提出区分为若干对称性,仅是为了便于从对称性思想上去剖析问题,这才是其本意.

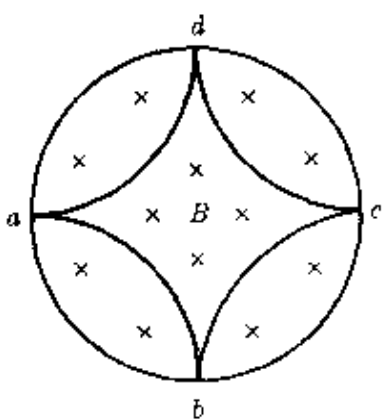


图 96

四、对称在中学物理中的应用

1. 对称对学习和运用物理知识的指导作用

对称曾启发了物理学家,它所发挥的巨大作用,已在物理学史上树立了丰碑.今后,对称还将继续推动物理学的发展,指导人们从更深层次上去探索物质结构及宏观世界之谜.

在中学物理教学中,对称同样重要.它在指导我们学习和应用物理知识上,最突出的功能是启发直觉思维.许多问题,有时不必去作论证,可以借助对称性直接作出判断.

下面,我们列举几个根据对称性作出直觉判断的问题.

(1) 一列火车沿平直轨道运行,假设车的重心在其对称轴上,很容易判知两侧轨道的支持力相等,均为 $\frac{G}{2}$ (G 为车重),如图 97 (a) 所示.

当火车在水平弯道上运行时,车厢有向外侧挤压的趋势,外侧轨道产生一个指向中心的侧压力 F ,由它提供车厢做圆运动所需的向心力[图 97(b)].显然,此时已破坏了原有的对称性,可以定性判知一定造成不对称的结果,两轨对车厢的支持力一定不会再相等.

(2) 用三个相同的电池,首尾相连构成一个闭合环形电路(图 98).要求 A 、 B 、 C 三点中任何两点之间电势差时,根据对称性立

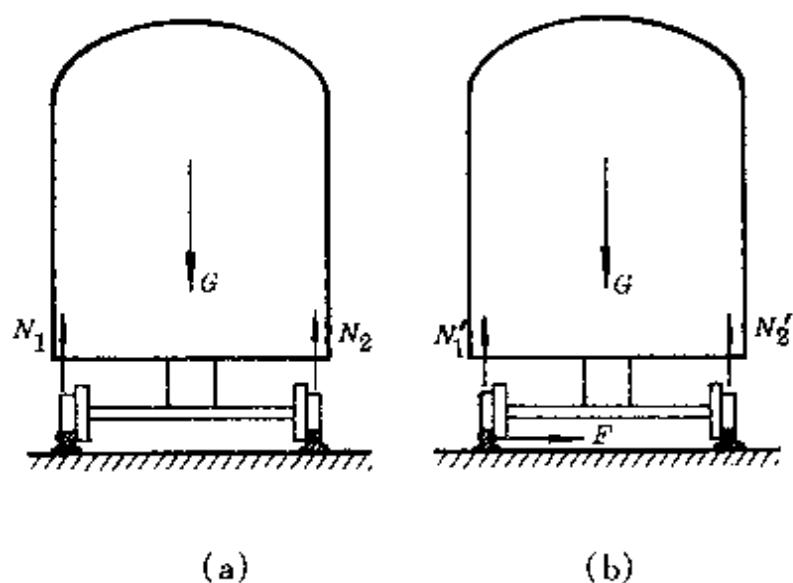


图 97

即可得到结果, $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 0$.

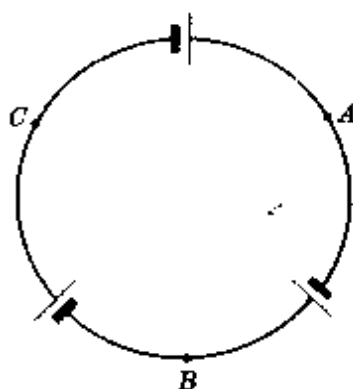


图 98

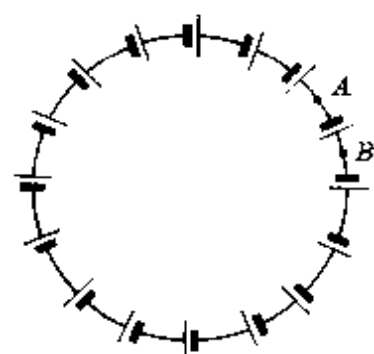


图 99

这个问题还可进一步推广. 如图 99 所示, 有 n 个相同的电池首尾相接构成闭合电路. 根据对称性, 同样可判知任何一个电池两端之间的电势差必定为零. 因为既然每个电池都相同, 取出的两点的位置对任何一个电池都是等价的, 结果也必然相同. 这正是对称性原理所指出的.

(3) 把一个薄透镜从中央对切后, 将两部分沿垂直主光轴的方向拉开一小段, 由于分开的两部分各有一根主光轴, 相当于两个透

镜,因此,原来位于透镜主光轴上与透镜相距 $u > f$ 的光点,通过这个对切透镜后一定在镜后对称位置上形成两个同样的像(图 100).



图 100

上面根据对称性得到的判断,虽然都是初步的,但往往是可靠的.严格的论证可以借助物理原理.如对图 98 电路,设每个电池的电动势为 \mathcal{E} 、内阻为 r ,不计连接导线电阻时,电路中沿顺时针向电流的电流强度

$$I = \frac{3\mathcal{E}}{3r} = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

以 A 、 B 两点为例,从右边看

$$U_{AB} = I \cdot r - \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}}{r} \cdot r - \mathcal{E} = 0,$$

从左边看

$$U_{AB} = -U_{BA} = -(I \cdot 2r - 2\mathcal{E}) = 0.$$

如图 101 所示,其结果与前面由对称性得出的完全相同.

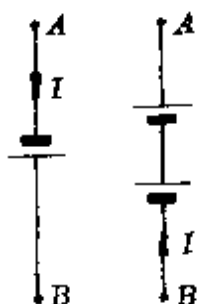


图 101

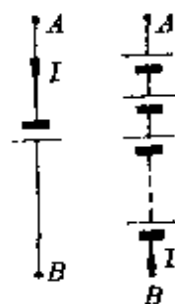


图 102

对于 n 个相同电池的闭合电路,其中顺时针向的电流强度

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{nr} = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

从 AB 间的一个电池考虑(图 102 左)

$$U_{AB} = Ir - \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}}{r} \cdot r - \mathcal{E} = 0,$$

以其他电池考虑(图 102 右)

$$U_{AB} = -(U_{BA}) = -(Inr - n\mathcal{E}) = 0.$$

由此可见,由对称性原理作出的直观判断非常有效.

2. 巧用对称性思想解题

利用对称性思想巧妙解题,常可收到化难为易、化繁为简的奇效.为便于阅读和领会,下面我们根据知识内容和应用特点分专题演解.

例 1 一根密度均匀、截面为圆形、由粗逐渐变细的长棒,使它呈水平平衡状态支起来(图 103).如通过平衡的对称性支点 O 沿垂直轴线方向把它截为两段 A 和 B ,设这两段的重力分别为 G_A 和 G_B ,则

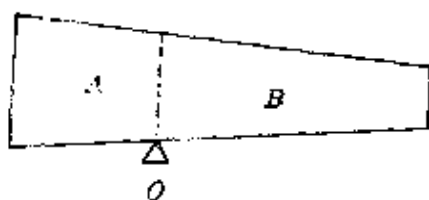


图 103

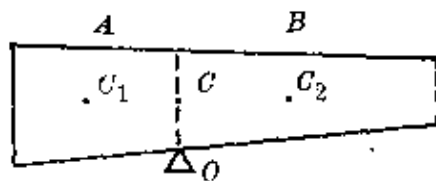


图 104

- A. $G_A > G_B$; B. $G_A = G_B$;
C. $G_A < G_B$; D. 上述三种情况都可能.

分析 棒呈水平平衡状态时,其重心 C 必在通过支点 O 的竖直线上.由于粗端重心 C_1 比细端重心 C_2 离公共重心 C 更靠近一些(图 104),根据力矩平衡原理知,粗端重力 G_A 比细端重力 G_B 大,正确答案为 A.

上面是一种常见的分析判断方法.仔细推敲一下,其理由并不充足.因为截成的 A 、 B 两段,同样具有从粗逐渐变细的几何形状,粗端重心 C_1 必偏向 A 的左端,细端重心 C_2 也偏向 B 的左端,这样就没有充分理由认为一定是 $CC_1 < CC_2$.它们的重力也不一定满足条件 $G_A > G_B$.于是,有些学生就选为 D.也有的学生采用繁复的计算还不得其解.实际上这个问题借用对称法求解是一目了然的,也不会有理由不足之虑了.

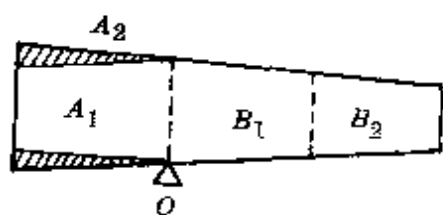


图 105

解答 由于长棒的粗细均匀变化,因此可把细段截成两段 B_1 和 B_2 ,其中 B_1 段与 A 段等长.同时,把 A 段分成两部分 A_1 和 A_2 ,使 A_1 和 B_1 对称(图 105).由于 A_2 部分的重心必在 A_1 区域内,

它显然比 B_2 部分的重心离支点 O 远一些, A_2 部分的重力 G_{A_2} 必大于 B_2 部分的重力 G_{B_2} ,

$$\text{因此 } G_{A_1} + G_{A_2} > G_{B_1} + G_{B_2}.$$

$$\text{即 } G_A > G_B.$$

所以,正确答案为 A.

例 2 如图 106 所示,一条质量为 m 的均质链挂在等高的两端,悬挂链两端点的切线方向与



图 106

水平方向间夹角为 θ , 试求链最低处两部分间的相互作用力.

分析 由于这条均质链悬挂时对通过最低点的竖直线呈对称分布, 因此两端点拉力 T_1 、 T_2 的大小必定相等, 最低处的左右两部分的相互作用力必定沿水平方向. 根据对称性作出这个直观判断后就很容易求解.

解答 分别画出整条链和半条链的受力图, 如图 107 所示.

由整条链竖直方向的受力平衡条件知[图 107(a)]

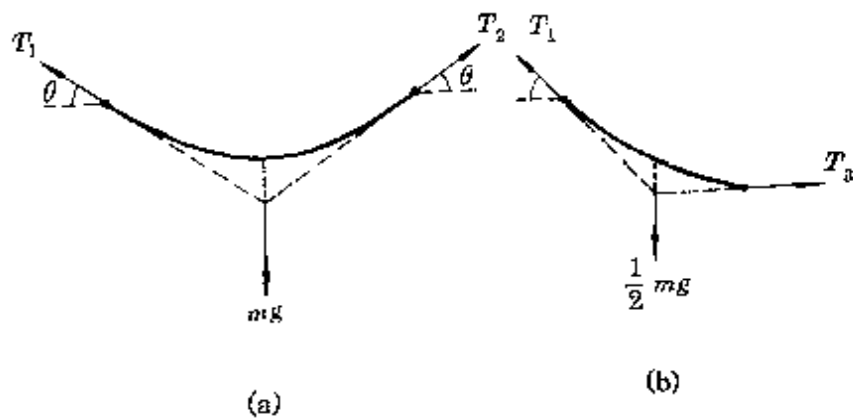


图 107

$$T_1 \sin \theta + T_2 \sin \theta = mg.$$

又 $T_1 \cos \theta = T_2 \cos \theta,$

得

$$T_1 = T_2 = \frac{mg}{2 \sin \theta}.$$

由半条链的受力平衡条件知[图 107(b)]

$$T_1 \cos \theta = T_3.$$

所以, 最低处两部分间相互作用力为

$$T_3 = T_1 \cos \theta = \frac{mg}{2 \tan \theta}.$$

例 3 在水平地面上放有两个刚接触但未曾相互挤压的相同

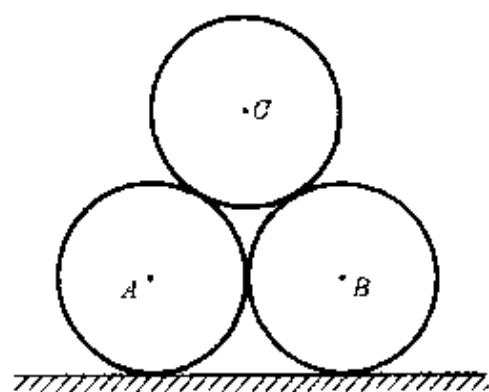


图 108

圆柱体 A 、 B ，现轻轻地 在它们上面 对称放上第三个相同的圆柱体 C (图 108)。已知圆柱体与地面的摩擦因数为 μ_1 ，圆柱体之间的摩擦因数为 μ_2 ，且不计滚动摩擦。为使三个圆柱体都处于平衡状态， μ_1 和 μ_2 必须满足什么条件？

分析 上面的圆柱体上受到重力 G 、下面两个圆柱体沿半径方向对它的弹力 N_1 、 N_2 以及沿圆柱切线方向斜向上的摩擦力 f_1 、 f_2 。下面两个圆柱体除受到重力 G 外，还受到上面圆柱体对它的压力 N_1' 、 N_2' 和摩擦力 f_1' 、 f_2' ，以及地面的支持力

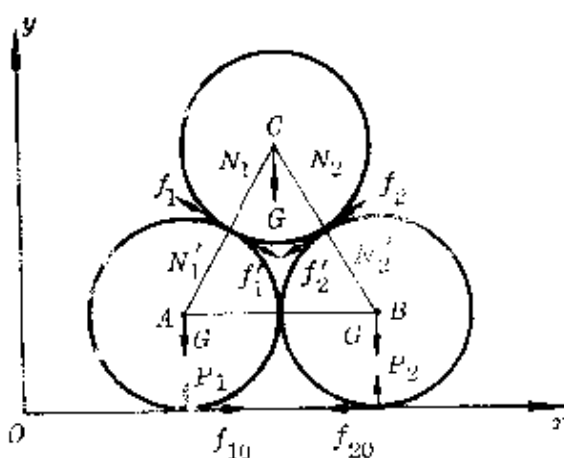


图 109

P_1 、 P_2 ，地面的摩擦力 f_{10} 、 f_{20} 。三圆柱体的受力情况如图 109 所示。

解答 根据三圆体的受力图，运用力平衡和力矩平衡条件可列方程。

对上面圆柱体 C ，由竖直方向力平衡

$$\begin{aligned} \sum F_y = N_1 \sin 60^\circ + f_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 60^\circ \\ + f_2 \sin 30^\circ - G = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

对下面圆柱体 A ，由竖直方向和水平方向力平衡

$$\sum F_y = P_1 - G - N_1' \sin 60^\circ - f_1' \sin 30^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_x = f_1' \cos 30^\circ + f_{10} - N_1' \sin 30^\circ = 0, \quad (3)$$

对下面圆柱体 A 由力矩平衡(设圆柱半径为 R)

$$\sum M_A = f_{10}R - f_1'R = 0. \quad (4)$$

结合牛顿第三定律和对称性的特点,各力的大小之间有关系式

$$N_1 = N_2 = N_1' = N_2',$$

$$f_1 = f_2 = f_1' = f_2',$$

$$P_1 = P_2, f_{10} = f_{20}.$$

考虑这些条件联立上述四个方程可解得

$$P_1 = P_2 = \frac{3}{2}G,$$

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{2}G,$$

$$f_1 = f_2 = \frac{G}{2(2+\sqrt{3})}.$$

根据静摩擦力的特点,必须满足条件

$$f_1 \leq \mu_2 N_1, f_{10} \leq \mu_1 P_1.$$

由此得圆柱体和地面间摩擦因数 μ_1 、圆柱体之间的摩擦因数 μ_2 应满足的条件为

$$\mu_1 \geq \frac{1}{3(2+\sqrt{3})}, \quad \mu_2 \geq \frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

例 4 一个桌面半径为 r 的三脚圆凳,重为 G ,重心在通过桌面圆心的轴心上,三个脚之间的距离均为 a .现将一个重为 W 的物体竖直悬挂在桌面边缘,且 OD 垂直于 A 、 C 两凳脚的连线(图 110).试求:

- (1) 三个凳脚对水平地面的压力;
- (2) W 为何值时凳子将倾倒?

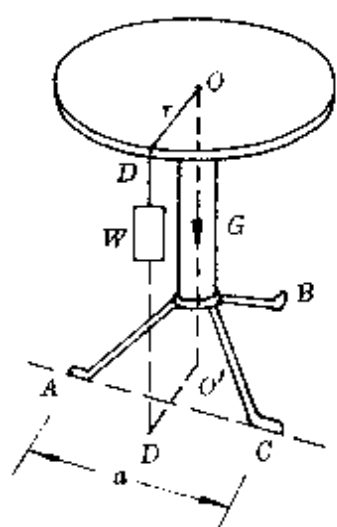


图 110

分析 地面对三个凳脚的支持力竖直向上,凳子重力和悬挂 W 的绳子对凳的拉力都竖直向下,整个凳子所受的各力是在竖直方向的一个空间平行力系.根据一般物体的平衡条件

$$\sum F = 0, \sum M = 0,$$

列出三个方程即可求出三个凳脚所受的支持力.

由于题设条件 $OD \perp AC$,使得 A 点和 C 点处于对称的位置,地面对 A 、 C 两凳脚的支持力必相等,通过列出两个平衡方程已足够了.

解答 设地面对三个凳脚的支持力分别为 N_A 、 N_B 、 N_C ,画出圆凳的受力图如图 111 所示.

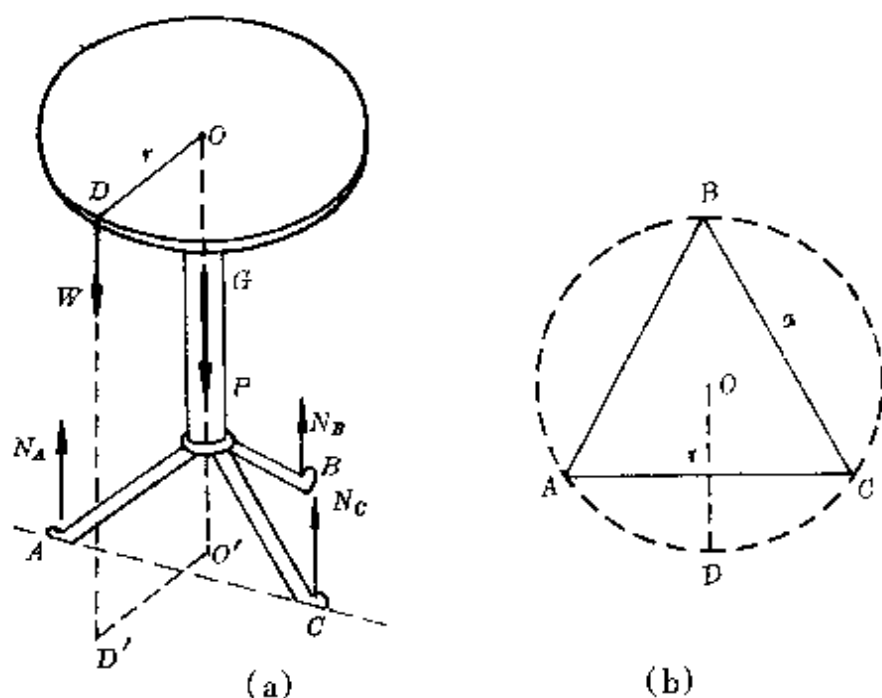


图 111

(1)由竖直方向力平衡得

$$N_A + N_B + N_C - W - G = 0, \quad (1)$$

假设以 AC 为轴, 由力矩平衡得

$$N_B \cdot a \sin 60^\circ + W \cdot \left(r - \frac{1}{3} a \sin 60^\circ \right) - G \cdot \frac{1}{3} a \sin 60^\circ = 0, \quad (2)$$

考虑到 A 、 C 两凳脚对悬挂重物的对称性

$$N_A = N_C. \quad (3)$$

由②式得地面对凳脚 B 的支持力

$$N_B = \frac{G + W}{3} - \frac{2Wr}{\sqrt{3}a}.$$

联立①②两式并代入上式结果, 得地面对凳脚 A 、 C 的支持力

$$N_A = N_C = \frac{G + W}{3} + \frac{Wr}{\sqrt{3}a}.$$

根据牛顿第三定律, 三个凳脚对水平地面的压力大小分别为

$$N_A' = N_C' = N_A = \frac{G + W}{3} + \frac{Wr}{\sqrt{3}a},$$

$$N_B' = N_B = \frac{G + W}{3} - \frac{2Wr}{\sqrt{3}a}.$$

(2) 凳子倾倒的条件, 首先是凳脚 B 离地, 即 $N_B = 0$; 其次要求 W 对 AC 转轴的力矩与 G 对 AC 轴的力矩不在同方向, 即要求桌面半径满足条件

$$r > \frac{1}{3} a \sin 60^\circ = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

并且, W 对 AC 轴的力矩应大于凳子重力 G 对 AC 轴的力矩, 即

$$W \cdot \left(r - \frac{1}{3} a \sin 60^\circ \right) > G \cdot \frac{1}{3} a \sin 60^\circ.$$

得

$$W > \frac{Ga}{2\sqrt{3}r - a}$$

例5 如图 112 所示的桁架中, 支座 A 下面有光滑的滚珠, 支座 B 是固定的, 在节点 C 和 D 上悬挂着相同的重物 $P = 1 \times 10^5$ 牛, 斜杆与水平线的夹角均为 $\alpha = 45^\circ$, 不计各杆件的重力, 试求支座的反作用力和各杆件间相互作用力。

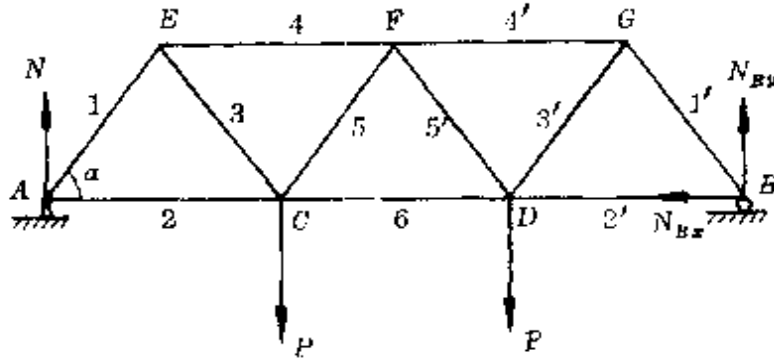


图 112

分析 由于 A 端支座是活动的, A 端支座对桁架的作用力 N , 必竖直向上. B 端支座是固定的, 可将 B 端支座对桁架的作用力 N_B 分解成 N_{Bx} 和 N_{By} , 由于整个桁架只有竖直方向的负载, N_{Bx} 必等于零, 所以整个桁架所受的外力是对称分布, 这样立即可判知两端支座的反作用力。

各杆件之间的相互作用力属于内力, 由于不计杆重, 每一杆件只能受到压力或张力, 一般需把各杆件隔离出来, 根据每一杆件的受力写出平衡方程求解. 在桁架问题中较方便的方法是通过逐一考虑每一节点的平衡, 得出各杆件的作用力, 并且, 必须选择只有两个杆件相交的节点开始. 由于各杆件结构上的完全对称性, 也只需选择其中 1、2、3、4、5、6 这几根杆件进行计算。

解答 由桁架在竖直方向受力的对称性知

$$N_A = N_B = P = 1 \times 10^5 \text{ 牛.}$$

为了计算各杆件的内力,可依次考虑节点 A 、 E 、 C 的平衡.

节点 A 除受到支座作用力 N_A 外,还受到杆件 1 和 2 的作用力,其方向未知,假定如图 113 中(a)所示.由 A 点的共点力平衡条件

$$T_2 + T_1 \cos \alpha = 0,$$

$$N_A + T_1 \sin \alpha = 0.$$

解得

$$T_1 = -\frac{N_A}{\sin \alpha} = -\sqrt{2}P = -1.41 \times 10^5 \text{ 牛,}$$

$$T_2 = -T_1 \cos \alpha = N_A = 1 \times 10^5 \text{ 牛.}$$

这里,算出的 T_1 为负值,说明 AE 杆对节点 A 的作用力方向与假设的相反(应是压节点 A),表明 AE 杆受到的力是压力; AC 杆对节点的作用力方向与假设的相同(拉节点 A),表明 AC 杆受到的力是张力.

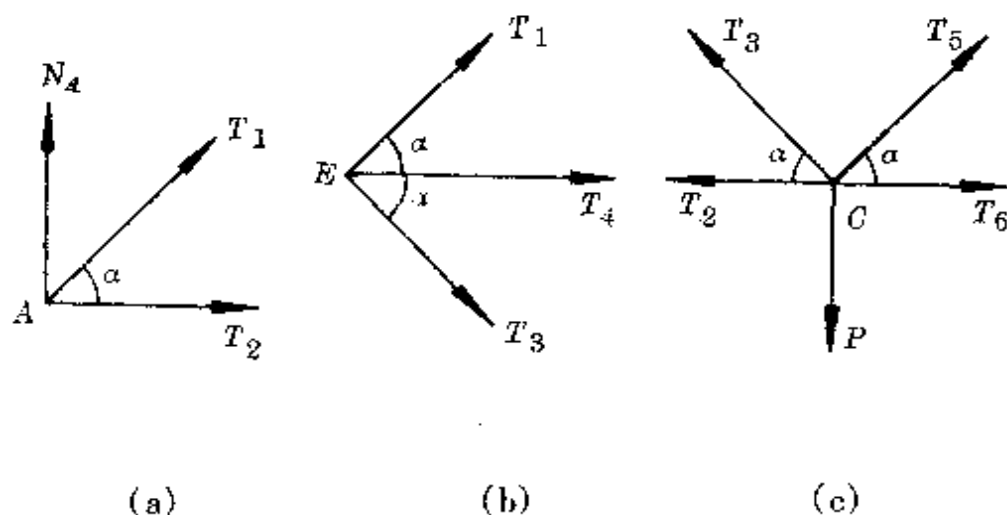


图 113

再考虑 E 点的平衡,它受到来自 AE 杆的力 T_1 ,并假定 EC 杆和 EF 杆对 E 点的力如图 113 中(b)所示.由力平衡条件

$$T_1 \cos \alpha + T_3 \cos \alpha + T_4 = 0,$$

$$T_1 \sin \alpha - T_3 \sin \alpha = 0.$$

解得

$$T_3 = T_1 = 1.41 \times 10^5 \text{ 牛},$$

$$T_4 = -2T_1 \cos \alpha = -2 \times 10^5 \text{ 牛}.$$

表明 EC 杆对节点 E 施出的确为拉力,故 EC 杆受到的是张力; EF 杆对节点 E 的力与假设的相反,应是压节点 E ,表明 EF 杆受到的是压力.

对节点 C ,除已受到确定方向的力 P 、 T_2 、 T_3 外,假设杆件 CF 和 CD 的作用力 T_5 、 T_6 如图 113(c)所示.由

$$T_6 + T_5 \cos \alpha - T_2 - T_3 \cos \alpha = 0,$$

$$T_3 \sin \alpha + T_5 \sin \alpha - P = 0.$$

解得

$$T_5 = 0, T_6 = 2 \times 10^5 \text{ 牛}.$$

表明 FC 杆不受力, CD 杆受到的是张力.

至此我们已求得了杆件 1、2、3、4、5 和 6 所受的作用力.根据对称性可知杆件 1'、2'、3'、4'、5' 所受的作用力分别为

$$T_1' = T_1, T_2' = T_2, T_3' = T_3,$$

$$T_4' = T_4, T_5' = T_5.$$

时间
反演

例 1 一节车厢沿平直轨道做匀减速滑动,通过位移 $s = 180$ 米后停下.若将这段位移分为三段,使这节车厢通过每段的时间都相等,这三段位移各为多少?

分析 一个做匀减速直线运动物体至运动停止的过程,作时间反演就是一个初速为零的匀加速直线运动(图 114).

根据反演后的运动,用位移规律即得.

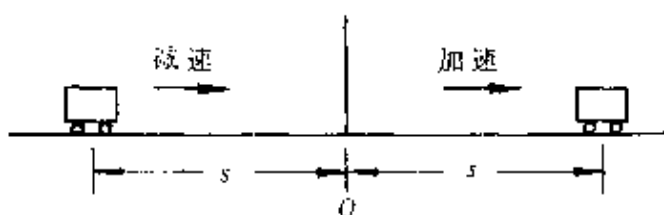


图 114

解答 初速为零的匀加速直线运动,从静止起在连续相等时间内的位移之比为

$$s_I : s_{II} : s_{III} = 1 : 3 : 5.$$

因总位移 $s = 180$ 米,则

$$s_I = 20 \text{ 米}, s_{II} = 60 \text{ 米}, s_{III} = 100 \text{ 米}.$$

所以这节车厢从开始匀减速滑行的每段相等时间内的位移依次为 100 米、60 米、20 米.

例 2 一个小球以初速 v_0 沿光滑斜面上滑,经斜面上 M 、 N 两位置的时间为 t_1 (图 115),小球到达最高点后(设斜面足够长)沿斜面下滑时经过 N 、 M 两点的的时间为 t_2 ,则



图 115

A. $t_1 > t_2$; B. $t_1 = t_2$; C. $t_1 < t_2$;

D. 由于斜面倾角未知,无法判断.

分析 小球上滑时做匀减速运动(加速度 $a_1 = g \sin \theta$),下滑时做匀加速运动(加速度 $a_2 = g \sin \theta$),这两个运动互为时间反演操作(图 116).

解答 根据对称性可判知,上行和下行过程中通过同样的两位置经历时间必定相等,即 $t_1 = t_2$,正确答案为 B.

证明 下面,我们用运动图线作一简单证明.

设上行时经过 M 点的速度为 v_M ,从 M 点至小球速度等于零

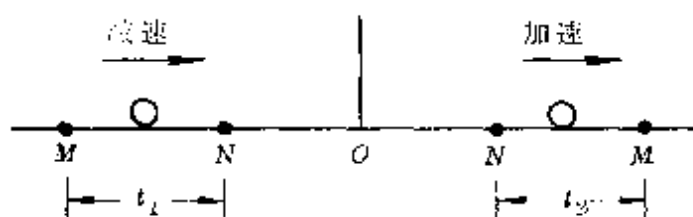


图 116

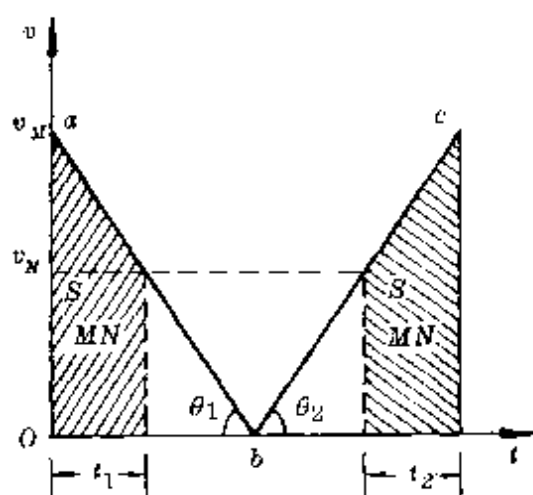


图 117

的位移为 s , 这段位移过程中的 $v-t$ 图如图 117 中 ab 斜直线所示. MN 两点间的位移等于 ab 下方阴影部分面积. 小球从最高点下滑的 $v-t$ 图如图 117 中 bc 段斜直线所示. NM 两点间的位移等于 bc 下方阴影部分面积. 由于上行和下滑的加速度相同 ($\theta_1 = \theta_2$), 两图线下方对应的面积相等, 所以经过这两位置的时间 t_1 与 t_2 也必定相等.

例 3 从离开竖直墙为 l 处的 A 点以速度 v_0 、射角 $\theta = 45^\circ$ 斜向上抛出一个球, 恰在最高处 B 点与竖直墙相碰, 碰后落至 C 点, 测得 $OC = \frac{l}{2}$, 则反弹速度 v' 与抛出的初速度 v_0 的大小之比为

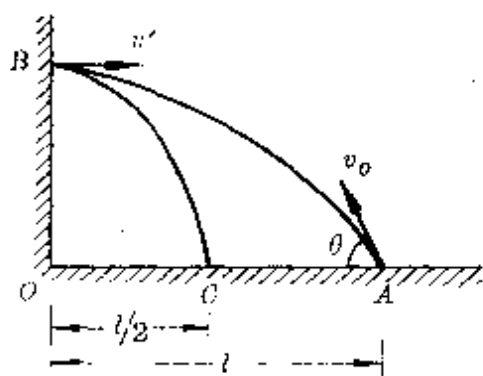


图 118

A. 1:2; B. $1:\sqrt{2}$;

C. 1:4; D. $\sqrt{2}:4$.

分析 小球从 A 抛至 B 做斜抛运动, 因为在最高处相碰, 因

此入射速度与反弹速度都垂直墙面(即沿水平方向), BC 段为平抛运动. 如果把 AB 段作时间反演, 则 BA 也是一个平抛运动, 抛射速度为 $v_0 \cos \theta$. 原题变成从同一处 B 抛出的两个平抛运动.

解答 由于 BA 和 BC 两个平抛运动的运动时间相同, 因此其抛出速度之比

$$\frac{v'}{v_0 \cos \theta} = \frac{l/2}{l}.$$

所以
$$\frac{v'}{v_0} = \frac{\cos \theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

正确答案为 D.

例 4 在水平地面上固定一个半径为 R 的半球体, 球顶处衔接着一块水平光滑薄板, 并在顶端放有一个质量为 m 的弹性小球 A (图 119). 现从地面上向着 A 斜向射出同样的一个小球 B , 要求不与半球体相碰却打中 A , 使 A 球获得沿薄板左滑的水平速度. 那么, 应该在地面上离球心 O 多远处、以多大的初速度 v_0 和怎样的抛射角 α 抛出 B 球, 才能使 A 球的速度最小?

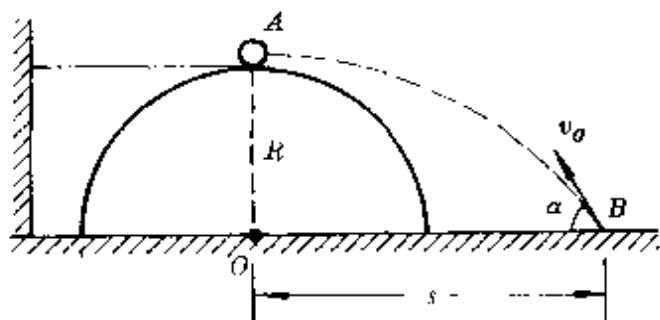


图 119

分析 小球 B 击中 A , 两者发生弹性碰撞, 质量相等时两者互换速度. 因此, 要使 A 球碰后有最小的速度, 也就是要使 B 飞越球顶时有最小速度. 由于 B 球的抛射位置、速度大小和抛射方向都

未知,因此从正面求解比较困难,为此可采用“时间反演”——使整个物理过程“倒行”,相当于使小球 B 恰能从球顶飞出做平抛运动.这样,原来 B 球的抛射点就变成平抛运动的落地点,问题就变得容易了.

解答 假设小球 B 从球顶做平抛不与球顶发生相互作用的最小速度为 v ,它必须满足的条件是小球的重力恰等于它越过球顶的向心力,即

$$mg = m \frac{v^2}{R}.$$

得 $v = \sqrt{Rg}.$

小球以速度 v 从球顶平抛的水平位移

$$s = vt = v \sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{Rg} \sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{2}R.$$

小球落地时的水平速度 v_x 和竖直速度 v_y 分别为

$$v_x = v = \sqrt{Rg}.$$

$$v_y = gt = g \sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{2Rg}.$$

因此落地速度的大小为

$$v_t = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{Rg + 2Rg} = \sqrt{3Rg}.$$

它与水平地面间的夹角设为 β (图 120),则

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{2Rg}}{\sqrt{Rg}} = \sqrt{2}.$$

即 $\beta = \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{2}.$

所以,小球 B 应从离开球心 $s = \sqrt{2}R$ 的地方,以初速 $v_0 = v_t = \sqrt{3Rg}$ 与水平方向间夹角 $\alpha = \beta = \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{2}$ 的方位斜向上抛出.

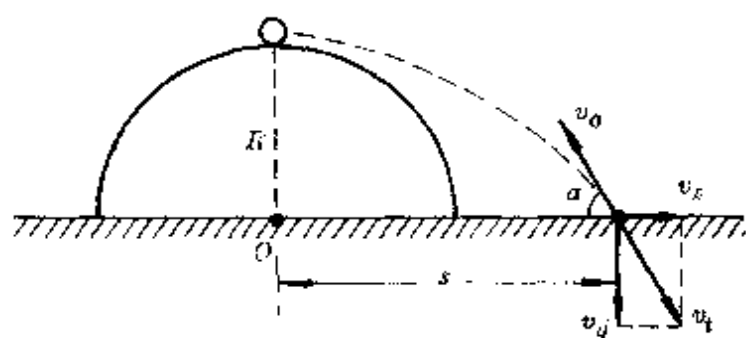


图 120

例 5 一段由斜轨和半圆环连接起来的光滑轨道放在竖直面内, 环半径 $R = 0.6$ 米. 现要在水平地面上某处 C 抛出一个小球, 使它恰好能从半圆环顶端 B 平滑地切入, 沿半圆环滑行后再滑到斜轨上高 $h = 4.4$ 米的 A 处停下 (图 121), 试求 C 处的位置、抛射速度的大小和方向角. $g = 10$ 米/秒².

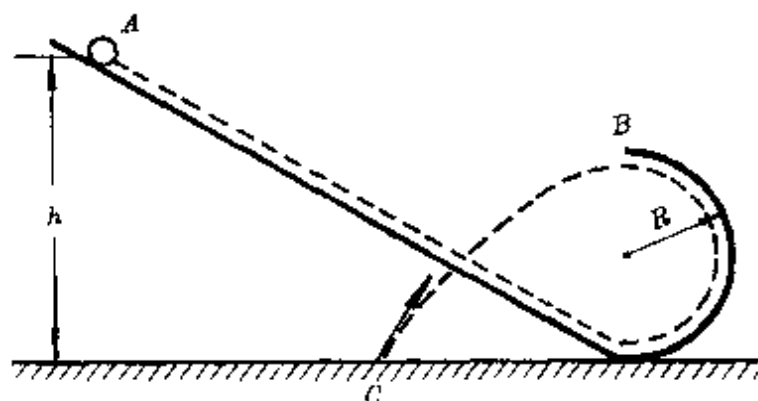


图 121

分析 本题与例 4 相仿, 由于抛射位置、速度、方向都未知, 从正面求解较困难, 同样可采用“时间反演”的方法, 原题就变成从高 h 的 A 处静止滑下的小球, 经过半圆环做平抛飞出, 求小球的落地位置、落地速度大小和方向的问题.

解答 设小球从 B 飞出做平抛的速度为 v_B , 对 AB 段, 由动能定理得

$$mg(h - 2R) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2,$$

所以 $v_B = \sqrt{2g(h - 2R)} = \sqrt{2 \times 10 \times (4.4 - 1.2)} \text{米/秒}$
 $= 8 \text{米/秒}.$

小球从环顶 B 飞出做平抛运动经过的水平位移

$$s = v_B t = v_B \sqrt{\frac{2R}{g}} = 8 \times \sqrt{\frac{2 \times 0.6}{10}} \text{米}$$

$$= 2.77 \text{米},$$

小球落地时的水平速度 v_x 和竖直速度 v_y 分别为

$$v_x = v_B = 8 \text{米/秒},$$

$$v_y = gt = \sqrt{2Rg} = \sqrt{2 \times 0.6 \times 10} \text{米/秒}$$

$$= 2\sqrt{3} \text{米/秒}.$$

所以, 小球落地速度的大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{64 + 12} \text{米/秒} = 8.72 \text{米/秒}.$$

小球落地速度方向与水平方向间夹角设为 β , 则

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{2\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{4} = 23.4^\circ.$$

所以, 小球应从离开圆环底为 $s = 2.77$ 米处, 以初速 $v_0 = v = 8.72$ 米/秒, 与水平方向间夹角 $\alpha = \beta = 23.4^\circ$ 斜向右上方抛出.

碰撞与
镜像对称

例 1 圆桶的直径 $D = 0.4$ 米, 桶高 $h = 0.45$ 米. 一个小球由桶边 A 点以速度 $v_0 = 2$ 米/秒向桶内水平抛出, 与光滑的桶壁发生弹性碰撞, 碰后以同样大小的速度反弹, 并落到桶底, 试求小球落到桶底的位置和运动时

间。(小球与桶壁相碰时间不计, $g = 10$ 米/秒²)

分析 小球从抛出到落至桶底, 共经历三个过程. 抛出后小球做平抛运动, 作弹性碰撞后改变速度方向, 最后做斜下抛运动落至桶底, 如图 122 所示. 根据上述运动过程的分析, 通常的解法如下:

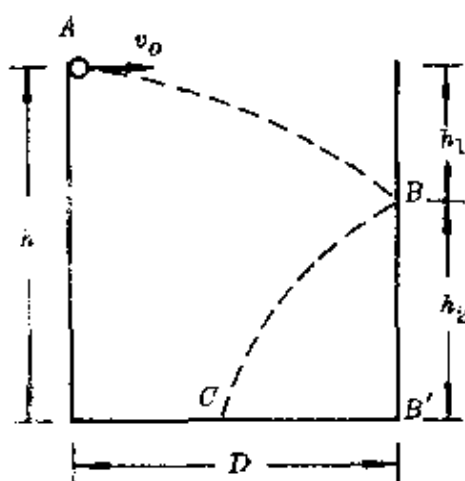


图 122

小球做平抛运动, A 到 B 的时间

$$t_1 = \frac{D}{v_0} = \frac{0.4}{2} \text{秒} = 0.2 \text{秒},$$

碰撞点 B 对抛出点 A 下落的高度

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (0.2)^2 \text{米} = 0.2 \text{米},$$

小球与桶壁碰前速度的水平分量和竖直分量分别是

$$v_x = v_0 = 2 \text{米/秒},$$

$$v_y = g t_1 = 10 \times 0.2 \text{米/秒} = 2 \text{米/秒}.$$

碰撞后小球速度的水平分量和竖直分量分别是

$$v_x' = -v_0 = -2 \text{米/秒}, (\text{负号表示与 } v_0 \text{ 反向})$$

$$v_y' = v_y = 2 \text{米/秒}.$$

小球向左做斜下抛运动时至桶底的下落高度为

$$h_2 = h - h_1 = 0.45 \text{米} - 0.2 \text{米} = 0.25 \text{米}.$$

设小球碰后至桶底的时间为 t_2 , 由

$$h_2 = v_y' t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2,$$

即
$$0.25 = 2t_2 - 5t_2^2,$$

得合理解 $t_2 = 0.1$ 秒.

落点离桶壁的水平距离大小

$$x_{CB'} = |v_x'| t_2 = 2 \times 0.1 \text{ 米} = 0.2 \text{ 米}.$$

即小球恰落在桶底的中心.

小球从抛出至桶底的运动时间

$$t = t_1 + t_2 = 0.2 \text{ 秒} + 0.1 \text{ 秒} = 0.3 \text{ 秒}.$$

上面的解法比较繁琐,为此,可根据“镜像对称”加以简化.

解答 若小球抛出后不被桶壁阻挡,则经过 B 点继续沿着抛物线运动,落至跟桶底同一水平面上的 C' . 由于经过 B 点向右做斜下抛的速度恰与在 B 点相碰后向左做斜下抛的速度互成镜像对称,它们的运动轨迹也互成镜像(图 123), $B'C = B'C'$.

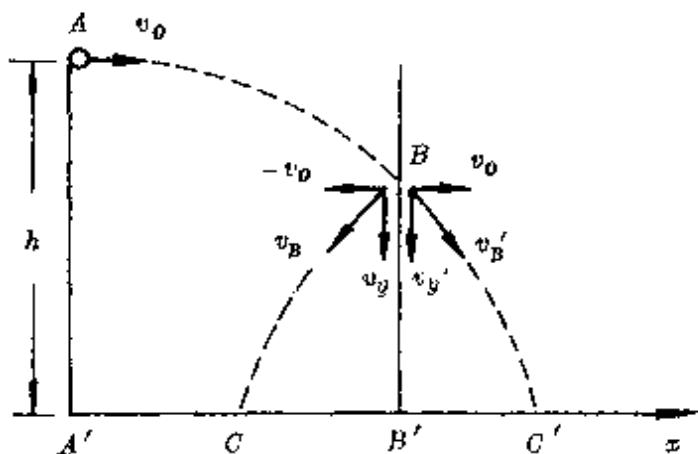


图 123

因小球从 A 到 C' 做平抛运动的时间(即小球从抛出到落到桶底的时间)

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.45}{10}} \text{ 秒} = 0.3 \text{ 秒},$$

水平位移

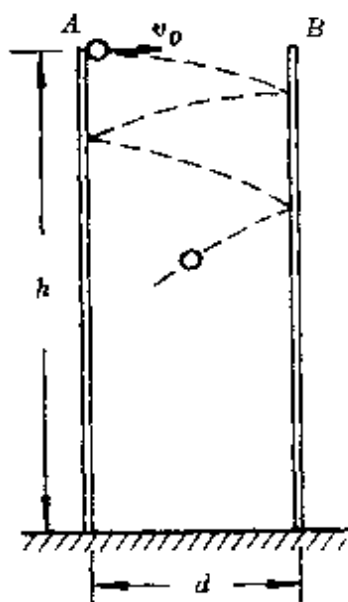
$$x_{AC'} = v_0 t = 2 \times 0.3 \text{ 米} = 0.6 \text{ 米},$$

所以落点 C 离桶边距离

$$x_{CB} = x_{BC} = x_{AC} - D = (0.6 - 0.4) \text{米} = 0.2 \text{米}.$$

显然,根据弹性碰撞的镜像对称性作出的解答要简捷得多.

例 2 在水平地面上建有相互平行的 A 、 B 两竖直墙,墙高 $h = 20$ 米,相距 $d = 1$ 米,墙面光滑.从一高墙上以水平速度 $v_0 = 5$ 米/秒抛出一个弹性小球,与两墙面反复碰撞后落地(图 124).试求:



(1)小球的落地点离 A 墙多远? 小球从抛出到落地与墙面发生的碰撞次数 n ? $g = 10$ 米/秒².

(2)小球与墙面发生 m 次 ($m < n$) 碰撞时,小球下落的高度.

图 124

分析 小球与墙面做弹性碰撞,每次碰撞后速度的竖直分量(向下)不变,水平分量反向.以墙为镜面,作出反弹轨迹的镜像,小球在两墙间反复的斜下抛运动,都可看成是整个平抛运动的延续(图 125).于是,很容易通过平抛运动的运动时间和总的水平位移得出所求结果.

解答 (1)小球从抛出到落地的时间

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 20}{10}} \text{秒} = 2 \text{秒}.$$

小球在整个运动过程中的水平路程

$$s = v_0 t = 5 \times 2 \text{米} = 10 \text{米}.$$

设小球从抛出到落地与墙面碰撞次数为 n ,则由

$$n = \frac{s}{d},$$

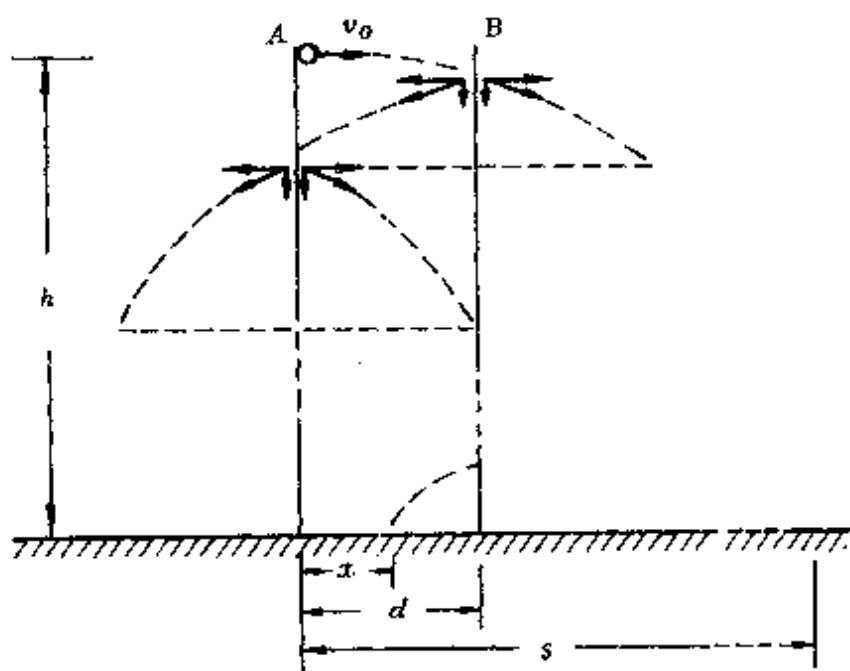


图 125

取整数解得碰撞次数

$$n = \frac{s}{d} = \frac{10}{1} = 10(\text{次}).$$

小球落点与 A 墙的水平距离(n 为偶数时)

$$x = s - nd = 10 \text{ 米} - 10 \times 1 \text{ 米} = 0.$$

表示小球最后落回 A 墙底边.

说明 当算得碰撞次数为奇数时,落点与 A 墙的水平距离应为

$$x = (n + 1)d - s.$$

(2) 因为每相邻两次碰撞的时间间隔均为

$$\Delta t = \frac{d}{v_0},$$

小球在竖直方向始终以加速度 g 下落,所以,从抛出到发生第 m 次碰撞共需时间为

$$t = m\Delta t = m \frac{d}{v_0}$$

则发生第 m 次碰撞时小球下落高度

$$h_m = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(m \frac{d}{v_0}\right)^2 = \frac{m^2 d^2 g}{2v_0^2}$$

例 3 两块竖直放置的光滑弹性板 A 、 B 相距为 d , 在板间某点 P 以初速 v_0 、与水平方向间夹角 α 斜向抛出一个光滑弹性小球 (图 126), 经与两板各碰一次后恰好返回 P 点, 试问从抛出到返回的时间是多少?

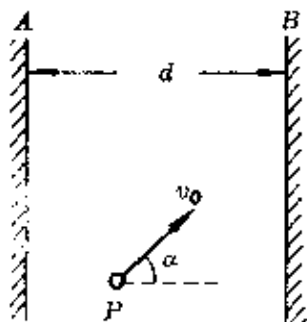


图 126

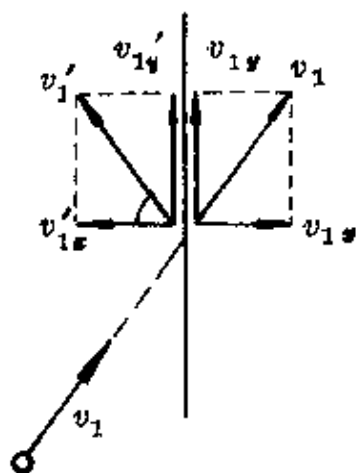


图 127

分析 小球抛出后做斜抛运动, 与弹性板 B 先发生斜碰. 因球与板光滑接触, 碰后沿板面的速度分量不变 ($v_{1y}' = v_{1y}$), 垂直板面的速度分量反向 ($v_{1x}' = -v_{1x}$), 反弹速度与入射速度大小相等 ($|v_1'| = |v_1|$), 与板面法线间夹角相等, 相当于光的反射 (图 127). 从 B 板反弹后做斜抛运动与 A 板相碰, 情况与上面的相同, 再从 A 反弹做斜抛返回 P 点. 整个运动轨迹由三段斜抛运动的抛物线组合. 如要根据斜抛运动规律算出这三段时间很复杂, 较方便

的方法是借助对称性。

解答 把小球从 P 点抛向 B 板和从 A 板反弹回 P 点的两个过程,以 B 、 A 两板为镜面作空间反演,根据弹性碰撞时的速度特点,它们的镜像恰能与两板中间的一段运动构成一条抛物线(图 128)。

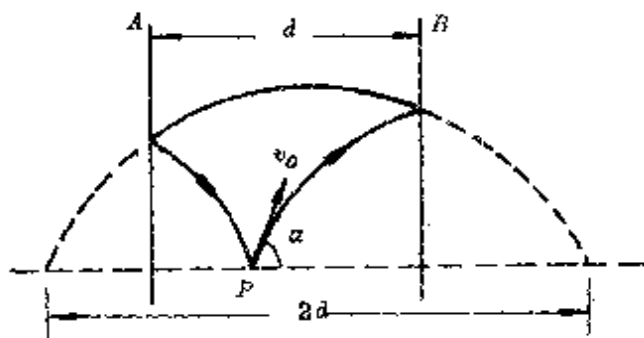


图 128

这条抛物线两端点间的水平距离为 $2d$, 小球在两板间做斜抛运动时的水平分量 $v_x = v_0 \cos \alpha$, 因此小球从抛出到反弹回 P 点经历的总时间为

$$t = \frac{2d}{v_0 \cos \alpha}.$$

例 4 长方形台球桌上的四条光滑边框分别为 Q 、 R 、 S 、 T . 在光滑桌面上有相同的两球 A 、 B (图 129). 如果要使小球 A 依次与

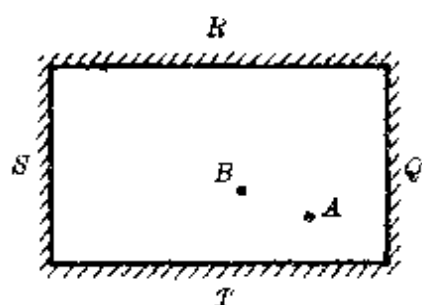


图 129

Q 、 R 、 S 、 T 四条边框发生弹性碰撞后恰好击中小球 B , 小球 A 应向边框 Q 哪里入射?

分析 由前几题的分析已知, 小球与光滑直壁做斜向弹性碰撞时, 相当于光的反射, 反射路径与入射路径的延长线以壁面为镜像对称. 因此, 可以通过找

出小球 B 依次对边框 T 、 S 、 R 、 Q 的镜像,从而确定小球 A 向边框 Q 的入射方向.

解答 如图 130 所示,先找出小球 B 对以边框 T 为镜面的像 B_1 ,像 B_1 对以边框 S 为镜面的像 B_2 ,像 B_2 对以边框 R 为镜面的像 B_3 ,像 B_3 对以边框 Q 为镜面的像 B_4 ,连结 AB_4 即得打击小球 A 的入射方向 AA_1 .

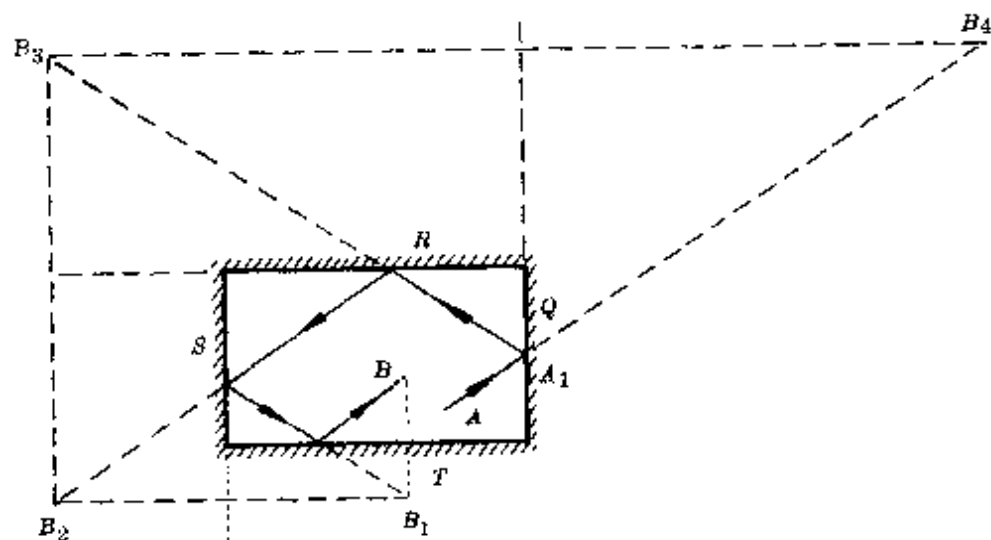
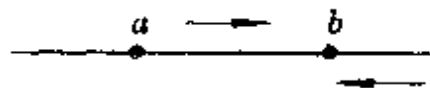


图 130

说明 若连结 AB_4 时与边框 Q 无交点,表示该题无解.也就是说,这个 A 球的位置不适当,无法通过与每边的碰撞后击中 B 球.

振动中的
中心对称

例 1 一质点沿水平直线做简谐运动,先后以相同的速度通过 a 、 b 两点,经历的时间 $t_{ab} = 1$ 秒.过 b 点后再经 $t' = 1$ 秒,质点反向第 2 次通过 b 点.在这 2 秒内质点所通过的路程是 8 厘米,试求该质点的振动周期和振幅(图 131).



分析 简谐运动是一种以平衡位置为中心对称的运动.由题意知,质点

图 131

过 a 、 b 两点时的速度相同, 可见 ab 连线的中点 O 必是振动的平衡位置. 找出平衡位置后根据振动的对称性就很容易确定周期和振幅了.

解答 质点从 b 回到 a 的时间必与从 a 到 b 的时间相同, 即

$$t_{ba} = t_{ab} = 1 \text{ 秒}.$$

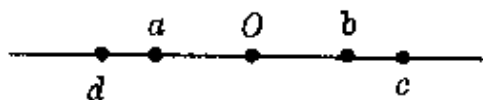


图 132

质点从 b 到右方极端位置 c 再返回 b 的时间 t_{bcb} (1 秒) 也必与质点从 a 到左方极端位置 d 再返回 a 的时间 (t_{ada}) 相等 (图 132). 因此振动周

期

$$T = t_{ab} + t_{bcb} + t_{ba} + t_{ada} = 4 \text{ 秒}.$$

根据图 132, 从质点振动的空间对称性知, 它在一个周期内通过的路程

$$\begin{aligned} s &= \overline{ab} + 2\overline{bc} + \overline{ba} + 2\overline{ad} = 2(\overline{ab} + 2\overline{bc}) \\ &= (2 \times 8) \text{ 厘米} = 16 \text{ 厘米}. \end{aligned}$$

所以振幅

$$A = \frac{s}{4} = 4 \text{ 厘米}.$$

例 2 在一个竖直悬挂的轻弹簧下挂一个小盘, 盘中放有一个质量为 m 的木块 (图 133), 使木块随盘一起在竖直方向做振幅为 A 的简谐运动. 若振动过程中木块对盘的最大压力为 $1.5mg$, 则木块对盘的最小压力为

- A. $1.0mg$; B. $0.75mg$;
C. $0.5mg$; D. $0.25mg$.

分析 木块对盘的压力与盘对木块的支持力大小相同. 以木块为研究对象, 它在竖直向下的重力和竖直向上的支持力共同作

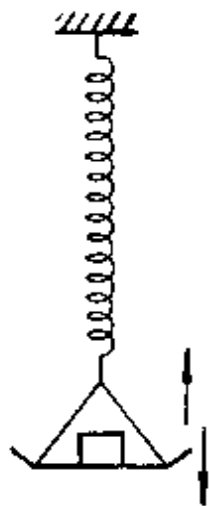


图 133

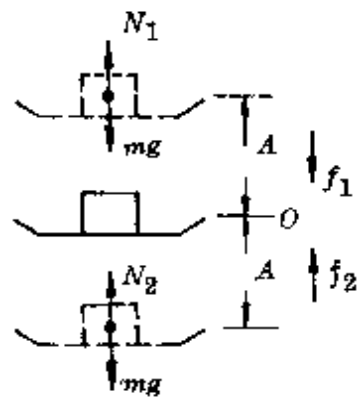


图 134

用下随盘一起做简谐运动。

支持力最大的位置是木块向下振动到最大位移的位置,支持力最小的位置是木块向上振动到最大位移的位置.这两个位置对称于平衡位置(图 134).在这两个位置上木块所受到的回复力 f_1 和 f_2 也对称于平衡位置的水平面,即 f_1 与 f_2 等值反向。

解答 木块在上方极端位置时

$$f_1 = mg - N_1 = kA,$$

木块在下方极端位置时

$$f_2 = N_2 - mg = kA,$$

两式相减,得

$$N_1 = 2mg - N_2.$$

代入题设条件 $N_2 = 1.5mg$, 得最小的支持力。

$$N_1 = 2mg - 1.5mg = 0.5mg.$$

因此,木块对盘的最小压力为 $0.5mg$, 正确答案为 C。

说明 由于振动过程中对平衡位置所呈现的对称性,物体在平衡位置两边对称位置上的回复力大小一定等值反向.对题中木

块,只要知道它在平衡位置某一方向上某处时对盘的压力,就可以用同样方法立即得出它位于对称的另一位置时的压力。

例3 图135中 S 为上下振动的振源,振动频率 $f = 100$ 赫,它所产生的横波向左右传播,波速 $v = 80$ 米/秒.在振源左右两方有 P 、 Q 两点,与振源 S 在同一直线上, $SP = 17.4$ 米, $SQ = 16.2$ 米,当 S 通过平衡位置向上振

动时, P 、 Q 两质点

- A. P 在波峰, Q 在波谷;
- B. 都在波峰;
- C. P 在波谷, Q 在波峰;
- D. P 通过平衡位置向上振动, Q 通过平衡位置向下振动.

分析 因为振源所产生的波同时向左右传播,所以任何时刻在左、右双方形成的波形都是以通过振源 O 的竖直面互为对称的两列波.当振源通过平衡位置向上振动时,左、右双方离开振源为 $\frac{1}{4}\lambda$ 的两质点恰好到达下方最大位置处,因此该时刻的波形如图136所示.画出了这个波形图,问题就迎刃而解了.



图 136

解答 振源 S 所产生的横波波长

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{80}{100} \text{ 米} = 0.8 \text{ 米.}$$

则

$$SP = 17.4 \text{ 米} = \left(21 + \frac{3}{4}\right) \lambda,$$

$$SQ = 16.2 \text{ 米} = \left(20 + \frac{1}{4}\right) \lambda.$$

可见此时 P 恰在波峰, Q 恰在波谷, 正确答案为 A.

多普勒效应
与
镜像对称

例 1 一警报器发射频率 $f = 1000$ 赫的声波, 离开静止的观察者向一悬崖运动, 其速度 $v = 10$ 米/秒, 已知声音在空气中的传播速度为 $V = 330$ 米/秒, 试问:

- (1) 观察者直接从警报器所听到的声音频率为多少?
- (2) 观察者听到从悬崖反射的声音频率是多少?

分析 第一种情况声源离开静止的观察者, 可直接代入多普勒效应公式. 第二种情况观察者听到从悬崖反射的声音, 可看成以悬崖为镜面、跟警报器对称的一个镜像声源所发出的, 如图 137 所示.

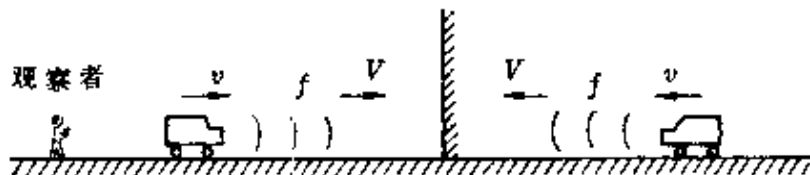


图 137

解答 根据多普勒效应的一般公式

$$f = \frac{V - v_L}{V - v_S} f_0.$$

(1) 警报器离观察者而去, 以 $v_S = -v$ 代入即得听到的声音频率

$$f = \frac{V - 0}{V - (-v)} f_0 = \frac{330}{330 + 10} \times 1000 \text{ 赫} = 970 \text{ 赫}.$$

即听到声音频率变低.

(2) 对以悬崖为镜面的对称镜像声源, 它正靠近观察者, 以 v_S

$= v$ 代入得听到的声音频率

$$f' = \frac{V}{V - v} = \frac{330}{330 - 10} \times 1000 \text{ 赫} = 1031 \text{ 赫}.$$

即听到的声音频率变高.

例 2 火车铁轨铺设在两个相距很远的山崖之间, 山崖的壁是竖直的, 且互相平行, 路轨和崖壁垂直. 在某段路上, 正好有一列火车匀速行进, 车头不断鸣笛. 设火车的速度为 v , 鸣笛的频率为 f , 声音在空气中速度为 V , 则回声返回火车司机处的频率是多少?

分析 火车司机收到的回声有这样几种:

- (1) 从前面山崖直接返回的声波;
- (2) 从前面山崖反射后再经后面山崖反射的声波;
- (3) 从后面山崖直接返回的声波;
- (4) 从后面山崖反射后再经前面山崖反射的声波.

根据镜像对称, 把从山崖反射的声波看成是从山崖后面的一个镜像声源发出的. 即可直接用多普勒公式 $f = \frac{V - v_L}{V - v_S} f_0$ 算出接收到的回声频率.

解答 对于发向前面山崖的声波

(1) 从前面山崖直接反射回来的声波, 可看成从前面山崖后的镜像声源 S' 驶向山崖发出的 (图 138 右).

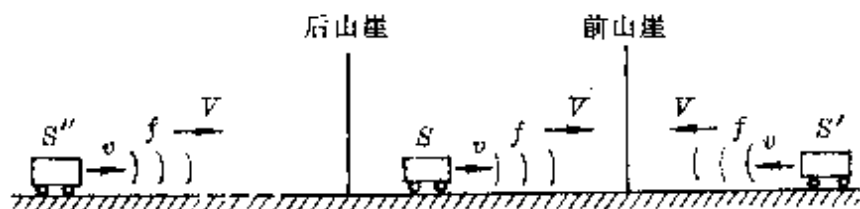


图 138

这种情况相当于声源 S' 与观察者 S 相互接近, $v_L = -v$, 则由

公式得司机接收到的声波频率

$$f' = \frac{V - v_L}{V - v_S} f_0 = \frac{V - (-v)}{V - v} f = \frac{V + v}{V - v} f;$$

即感到频率升高。

(2)从前面山崖反射再经后面山崖反射的声波,可看作在后面山崖左侧、以后面山崖为镜面有一个与 S' 对称的镜像声源 S'' ,司机 (S) 收到的被看作是从 S'' 发出的波,由于声源与观察者向同一方向以相同的速度运动(图 138 左),相当于静止观察者收到的从静止声源发出的声音,频率仍为 f 。

对于发向后面山崖的声波

(1)从后面山崖直接反射的声波,相当于从后面山崖背后的镜像声源 S' 驶离后面山崖发出的(图 139 左)。

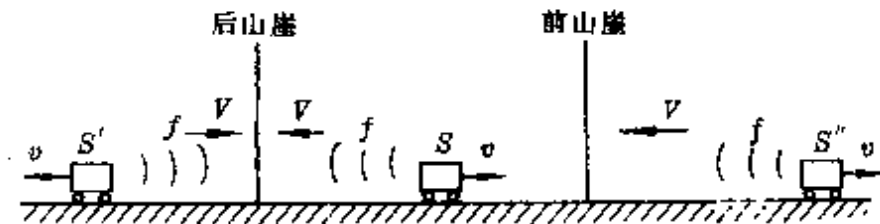


图 139

这种情况相当于声源 S' 与观察者 S 相互分离 $v_S = -v$,则由公式得司机接收到的声波频率

$$f' = \frac{V - v_L}{V - v_S} f_0 = \frac{V - v}{V - (-v)} f = \frac{V - v}{V + v} f;$$

即感到频率降低。

(2)从后面山崖反射再经前面山崖反射的声波,可看作在前面山崖右侧、以前山崖为镜面有一个与 S' 对称的镜像声源 S'' ,司机 (S) 收到的被看作是从 S'' 发出的波(图 139 右)。此时声源 S'' 与观察者 S 也相对静止,收到的频率仍为 f 。

所以火车司机听到的有三种频率： $\frac{V+v}{V-v}f$ 、 f 、 $\frac{V-v}{V+v}f$ 。

**静电学中
的对称性**

例 1 用一根细绝缘棒弯成半径 $R = 50$ 厘米的圆弧，对接处留有 $\widehat{AB} = l = 1$ 厘米的一个间隙 [图 140(a)]，棒上均匀分布着正电荷，总电量 $Q = 3 \times 10^{-9}$ 库，试估算圆心处 O 的电场强度。

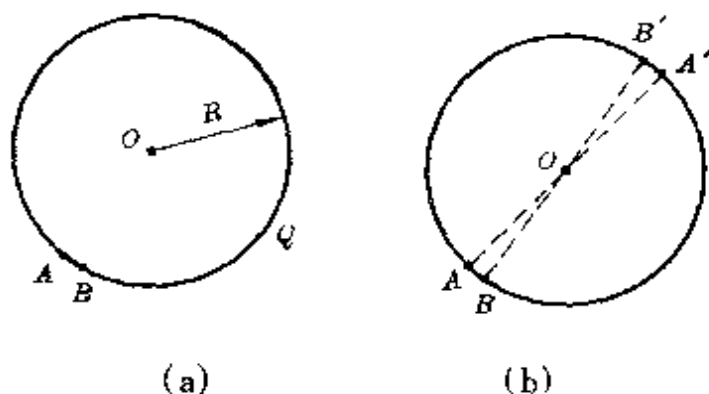


图 140

分析 有缺口的圆环是一个不均匀带电体，无法用初等数学方法直接计算场强，借助对称性就可突破这个困难。如图 140(b) 所示，作两条通过棒端 A 和 B 的直径，得到与缺口 \widehat{AB} 对称的一小段弧 $\widehat{A'B'}$ 。由于另外两段弧 $\widehat{AB'}$ 和 $\widehat{A'B}$ 上的电荷是对称的均匀分布，它们在环心 O 产生的场强互相抵消，因此，整个缺口环在环心 O 处的电场强度，就等于 $\widehat{A'B'}$ 弧上的电荷在环心 O 处产生的电场强度。

解答 $\widehat{A'B'}$ 上的电荷为

$$q' = \frac{Q}{2\pi R - l} \widehat{A'B'} = \frac{Q}{2\pi R - l} l,$$

由于 $l \ll 2\pi R - l$ ，因此这一小段圆弧 $\widehat{A'B'}$ 可看作点电荷，它在环心 O 处产生的电场强度

$$\begin{aligned}
 E &= k \frac{q'}{R^2} = k \frac{Ql}{(2\pi R - l)R^2} \\
 &= 9 \times 10^9 \frac{3 \times 10^{-9} \times 1 \times 10^{-2}}{(2 \times 3.14 \times 0.5 - 0.01) \times 0.5^2} \text{牛/库} \\
 &= 0.34 \text{牛/库}.
 \end{aligned}$$

例 2 一只半径为 R 的半球形薄壳[图 141(a)], 其表面带有密度为 σ 的正电荷, 试确定蒙在球壳的上表面(相当于鼓上的皮面) AB 上各点的场强方向, 算出各点的电势.

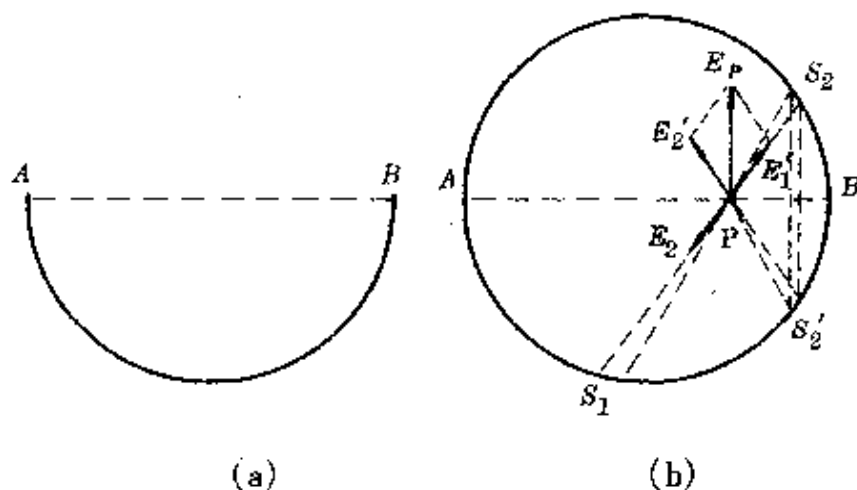


图 141

分析 半球形带电薄壳是一个不规则带电体, 难以直接确定和计算其 AB 面上的场强方向和电势. 可先设想一个完整的均匀带电球壳, 其电荷密度也为 σ , 因为一个均匀带电球壳在球内各处的场强都等于零. 而这个场强可以看成是上、下两个半球壳单独产生的场强的叠加, 然后再结合对称性思考, 就容易求解了.

解答 设想构成一个电荷密度也为 σ 的均匀带电球壳, 并以 AB 面上某点 P 为顶点作两个对顶的锥体, 其底面积分别为 S_1 和 S_2 , 如图 141(b) 所示. 显然, 以 P 为顶点, 可在上、下两个半球面上构筑一系列对顶的锥体.

因为 P 点的场强等于零, 因此由每两个对顶锥体底面上电荷

(如 σS_1 、 σS_2 等)在 P 点产生的合场强必为零,即它们在 P 点的场强必等值反向($E_1 = -E_2$).

再在下半个球面上取一个与 S_2 对称于 AB 面的面元 S_2' ,它在 P 点产生的场强 E_2' 的大小与 E_2 相等,其方向与 E_2 对称分布在 AB 面两侧.因此,由面元 S_1 和 S_2' 上电荷在 P 点产生的合场强 E_p 一定垂直于 AB 面.

由于 P 是任意选取的一点,表明上述关系对 AB 面上各点都是成立的.所以,由下半个均匀带电球壳在 AB 面上产生的场强都垂直 AB 面.根据场强和等势面的关系可知,这个平面(AB 面)就是一个等势面.

因为整个均匀带电球壳在球内产生的电势为

$$U = k \frac{Q}{R} = k \frac{4\pi R^2 \sigma}{R} = 4\pi k R \sigma,$$

这个电势可看成上、下两个半球壳所叠加得到的,所以,半个均匀带电球壳在 AB 面上产生的电势

$$U' = \frac{1}{2} U = 2\pi k R \sigma.$$

例 3 电荷 q 均匀分布在半球面 ACB 上,球面半径为 R , CD

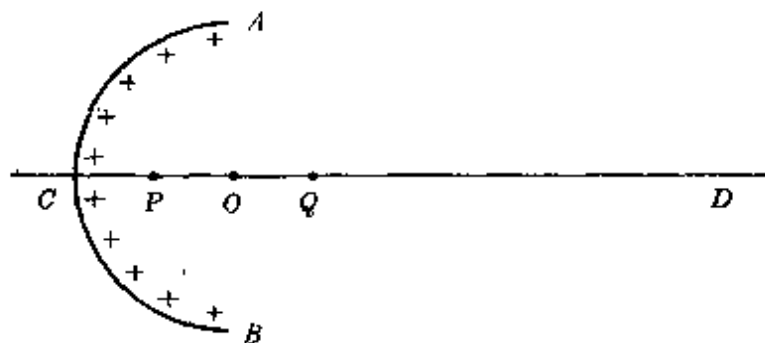


图 142

为通过半球顶点 C 与球心 O 的轴线, P 、 Q 为 CD 轴线上在 O 点两侧、离 O 点距离相等的两点(图 142). 已知 P 点电势为 U_P , 试求 Q 点的电势 U_Q .

分析 由于半球面是不规则带电体, 可仿照上题先构成完整的一个球面, 再结合对称性去思考.

解答 设想在原半球面右方加上一个电量也为 q 、相同的均匀带电的半球面 $AC'B$ (图 143), 则球内各点的电势处处相等, 均为

$$U = k \frac{2q}{R}.$$

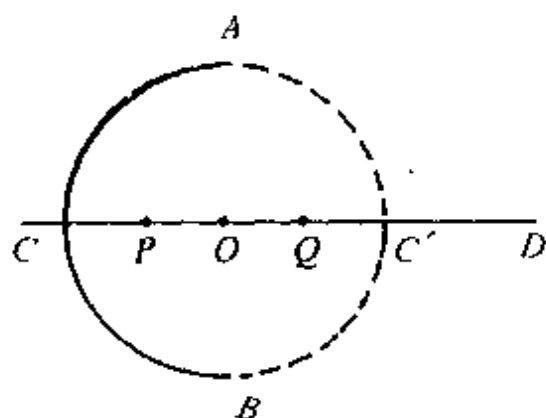


图 143

因为整个球面在球内各点的电势, 可看成由两个半球单独产生的电势叠加而成. 设左半球和右半球在 P 点的电势分别为 U_P 和 U_P' , 则

$$U = U_P + U_P' = k \frac{2q}{R}.$$

根据题设条件, P 、 Q 两点对称分布在 CD 轴上球心 O 的两侧, 由对称性知, 右半球在 P 点的电势 U_P' 必等于左半球在 Q 点的电势 U_Q , 即

$$U_P' = U_Q.$$

则 $U_P + U_P' = U_P + U_Q = k \frac{2q}{R}.$

所以, 左半球在 Q 点的电势

$$U_Q = k \frac{2q}{R} - U_P.$$

例 4 如图 144 所示,一条长 l 的细线,上端固定,下端拴一质量为 m 的带电小球.将它置于匀强电场中,电场强度大小为 E ,方向水平向右.已知当细线离开竖直位置的偏角为 α 时,小球处于平衡.如果使细线的偏角由 α 增大到 φ ,然后将小球由静止开始释放,则 φ 应为多大,才能使在细线到达竖直位置时小球的速度刚好为零?

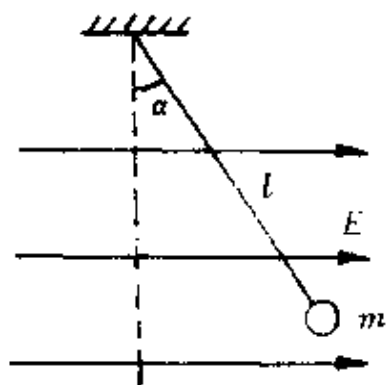


图 144

分析 通常的解法是:先由场强方向和小球平衡时细线的偏向,判知小球必带正电.

作用在小球上共有三个力,重力 mg ,线的拉力 T ,电场力 qE [图 145(a)].由共点力平衡条件得

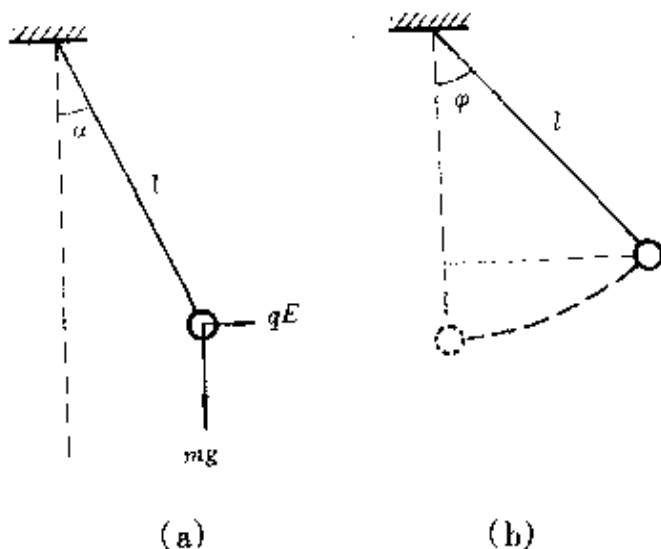


图 145

$$T \cos \alpha = mg,$$

$$T \sin \alpha = qE.$$

联立两式算出电量为

$$q = \frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{E}.$$

当小球悬线的偏角由 α 增至 φ , 再由静止释放运动到竖直位置的过程中, 重力和电场力做功分别为

$$W_G = mgl(1 - \cos \varphi),$$

$$W_E = -qEl \sin \varphi.$$

在这个过程中, 小球动能的增量

$$\Delta E_K = 0.$$

于是, 由动能定理

$$W_G + W_E = \Delta E_K.$$

即
$$mgl(1 - \cos \varphi) - qEl \sin \varphi = 0.$$

将上式改写为

$$\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{qE}{mg}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{qE}{mg} = \frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{E} \cdot \frac{E}{mg} = \operatorname{tg} \alpha.$$

所以
$$\varphi = 2\alpha.$$

上面通常用的计算方法, 整个解题过程比较复杂. 实际上, 只需通过对小球的受力和运动变化过程的分析, 借助对称性, 很快就可以找出结果.

解答 小球在匀强电场中, 受到的重力和电场力都是恒力. 小球处于细线偏角 α 位置 O 时(图 146), 由力平衡条件知

$$mg \sin \alpha = Eq \cos \alpha.$$

当细线由偏角 $\varphi > \alpha$ 位置下落至偏角 α 的位置过程中, 在垂直细线的方向上, 重力的分力大于电场力的分力, 即

$$mg \sin \theta > qE \cos \theta. (\alpha < \theta \leq \varphi)$$

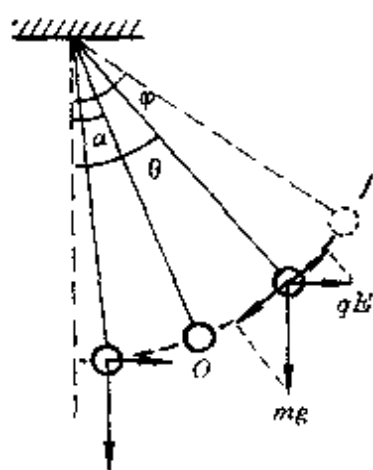


图 146

此时小球加速下落,随着 θ 角的减小,小球的加速度减小,但速度增大,至平衡位置 O 加速度为零,速度达最大.

小球依惯性越过平衡位置 O 继续下落的过程中,重力垂直细线的分力小于电场力的分力,即

$$mg \sin \theta < qE \cos \theta. (0 \leq \theta < \alpha)$$

小球向下做减速运动,速度逐渐减小,加速度逐渐增大.

要求细线到达竖直位置时,小球的速度刚好为零,必须使得小球在细线偏角为 φ 的位置和细线在竖直位置,能以细线偏角为 α 的位置成镜面对称,即小球下落后将以平衡位置 O 往复振动,所以细线对竖直方向的偏角 φ 一定满足

$$\varphi = 2\alpha.$$

与上面的算法相比较,从对称性思考作出判断的方法简便得多,它既不需要算出小球的带电量,也不必运用动能定理,避免了许多算式及较繁的数学运算(其中电场力的功很可能错写成

$W_E = qEl \sin \varphi$, 从 $\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}$ 到 $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ 需记忆三角变换公式), 表现出了

它独特的优越性.

电路
对称

例 1 图 147 电路中,用 6 根电阻都为 r 的电阻丝组成一锥形网络,试求每两个顶点之间的总电阻.

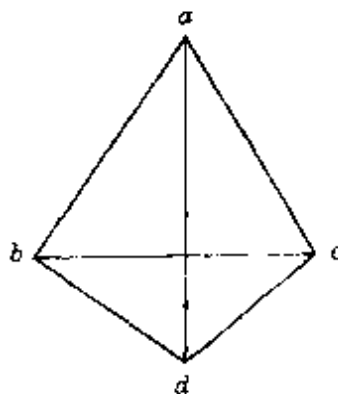


图 147

分析 对于任何两个顶点,电路结构完全对称,因此可任选两个进行计算.

解答 以 b 、 c 两顶点为例. 设电流从 b 点流入, c 点流出. 由于电路结构上的对称, a 、 d 两点的电势必定相等, ba 、 bd 和 ac 、 dc 四根电阻丝形成平衡电桥, ad 电阻丝中无电流. 因此, 为求 bc 两点间的总电阻, 原电路可简化成图 148(b) 的电路.

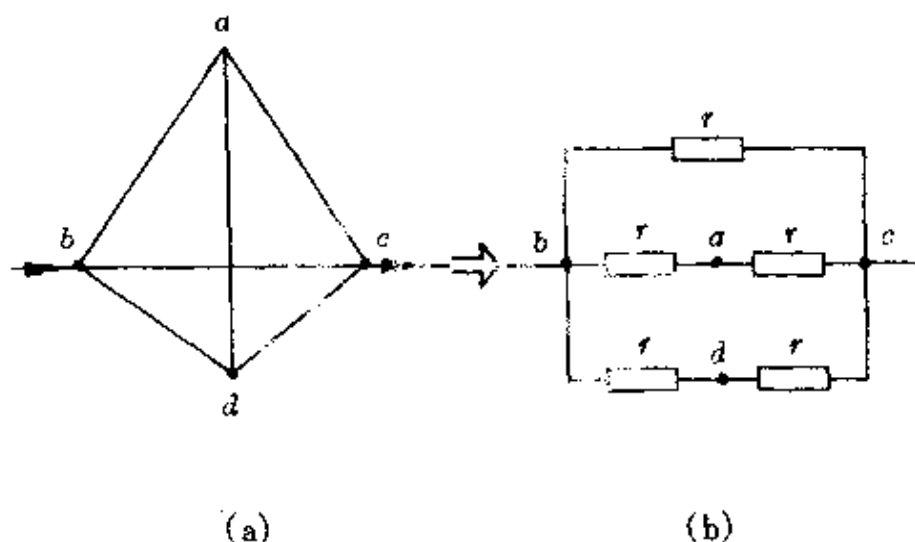


图 148

于是, 立即可算出 bc 间的总电阻

$$R_{bc} = r // 2r // 2r = \frac{r}{2}.$$

例 2 如图 149 所示, 用 12 根电阻均为 r 的电阻丝组成一个正方体形网络, 试计算 ag 两端间的总电阻.

分析 为了计算 ag 两端间的总电阻, 可设想从 a 端流入网络一个电流 I . 下面用两种方法分别作一计算.

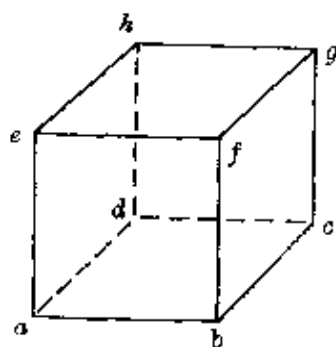


图 149

解答 (1) 电流分配法

电流 I 从 a 端流入后, 根据对称性, 从 a 端向 ab 、 ad 、 ae 三方向的电流强度都相同, 均为 $\frac{I}{3}$. 同理, 流入 b 点的电流向 bc 、 bf 两

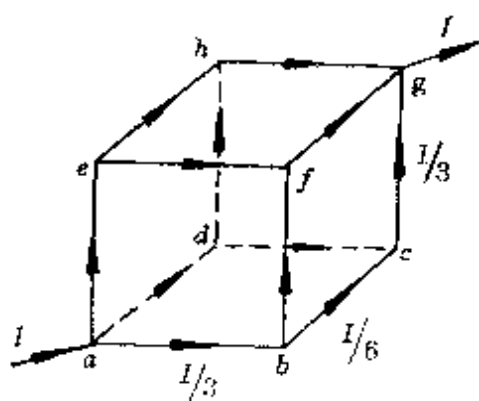


图 150

方向的电流强度均为 $\frac{I}{6}$ ，而由 c 流向 g 的电流又为 $\frac{I}{3}$ (图 150)。

根据欧姆定律知

$$U_{ag} = \frac{I}{3}r + \frac{I}{6}r + \frac{I}{3}r = \frac{5}{6}Ir,$$

所以， ag 两端点间的总电阻(等效电阻)为

$$R_{ag} = \frac{U_{ag}}{I} = \frac{5}{6}r.$$

(2) 等电势点法

根据对称性，流经 ab 、 ad 、 ae 三电阻丝的电流都是 $\frac{I}{3}$ ，在这三根电阻丝上的电势降落相等， b 、 d 、 e 三点为等电势点，因而 ab 、 ad 、 ae 三根电阻丝之间是并联关系。

同理， c 、 f 、 h 三点电势也相等， gc 、 gf 、 gh 三根电阻丝也是并联关系。

其他 6 根电阻丝的两端电势既然对应相等，自然也是并联关系。

于是，原电路图可化成图 151 的电路，立即可算出 ag 间总电阻。

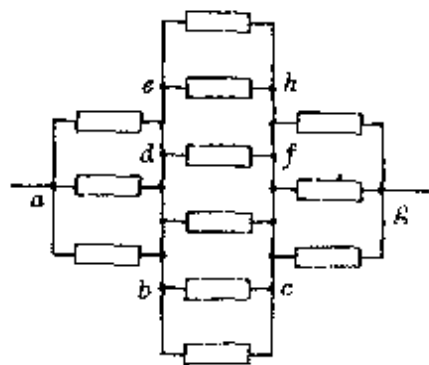


图 151

$$R_{ag} = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5}{6}r.$$

例 3 如图 152 所示电阻网络，每个电阻的阻值均为 r ，试求 AB 两端间的总电阻。

分析 对 A 、 B 两端点来说，电路结构完全对称，因此可以简化，等效电阻的具体计算同样可采用前面介绍的三种常用方

$$\begin{aligned}
 R_{AB} &= \frac{U_{AB}}{I} = \frac{2(I_1 + I_2 + I_3)r}{I} \\
 &= \frac{2\left(\frac{I}{2} + \frac{I}{4} + \frac{I}{4}\right)r}{I} \\
 &= 2r.
 \end{aligned}$$

(2)等电势线法 由对称性很容易确定原电路中的等电势点,画出等电势线如图 154 上,于是,立即可画出等效电路图,如图 154 下所示.

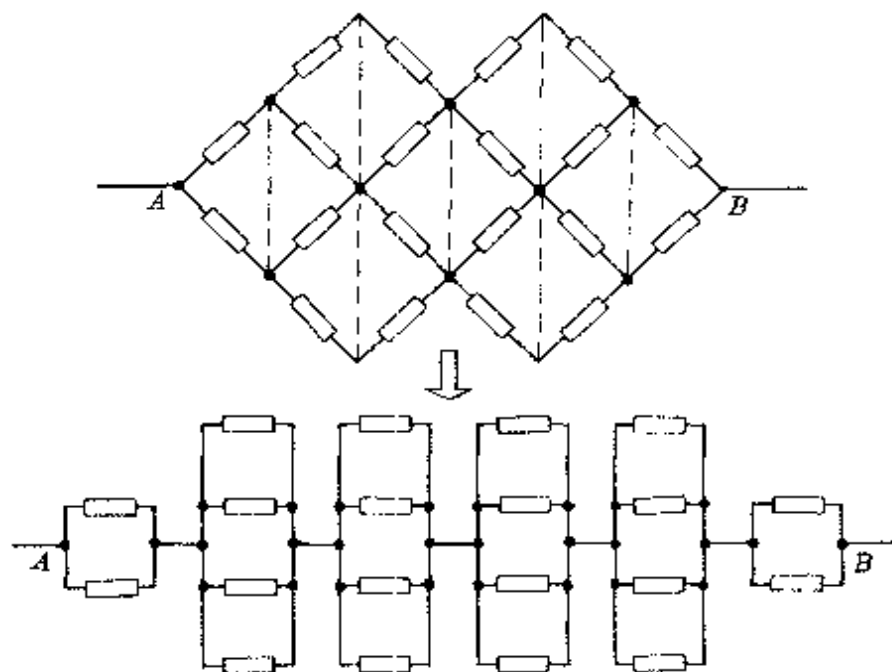


图 154

AB 间的等效电阻为

$$R_{AB} = \frac{r}{2} + \frac{r}{4} + \frac{r}{4} + \frac{r}{4} + \frac{r}{4} + \frac{r}{2} = 2r.$$

(3)分离节点法 把电路中 E 、 F 两节点分离成电势相等的 E_1 、 E_2 和 F_1 、 F_2 两节点,如图 155 所示.

这样,就构成了简单的串、并联关系,于是立即可算出总电阻

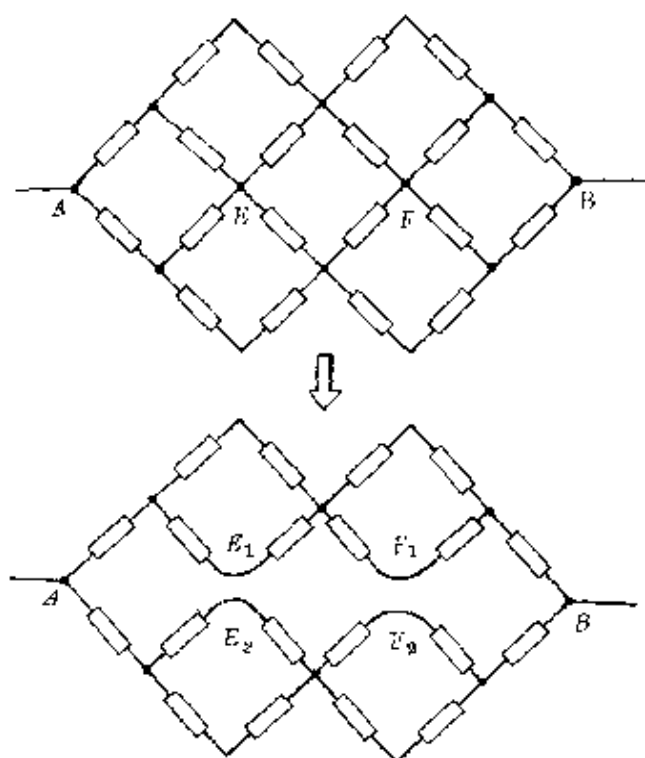


图 155

$$R_{AB} = 2r.$$

例 4 有一个无限的平面方格导线网络, 连接每两个节点的导线的电阻都为 r , 如把网络中相邻的 A 、 B 两节点接入电路(图 156), 求 A 、 B 两点间的等效电阻 R_{AB} 的阻值.

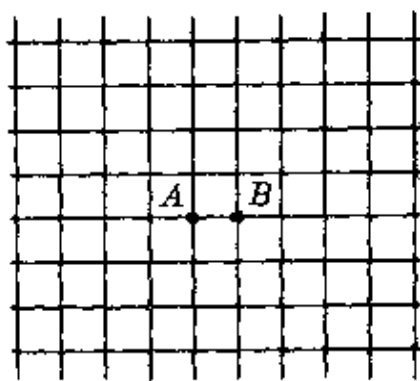


图 156

分析 由于这个无限方格网络各段电阻线之间形成很复杂的连接关系, 无法根据串、并联关系画出等效电路图计算等效电阻, 必须另辟蹊径. 常用的一个方法是结合对称性用电流叠加法——若一个线性电路有多个电流源, 则通过电路中任一支路的电流, 等于各电流源单独存在时在该支路中产生的电流之和.

解答 假设有一个电流源接入节点 A , 向网络提供电流 I , 由

于无限网络的各向对称性,从节点 A 向四个方向流出的电流都是 $\frac{1}{4}I$,即从 A 流向 B 的电流为 $\frac{1}{4}I$ [图 157(a)].

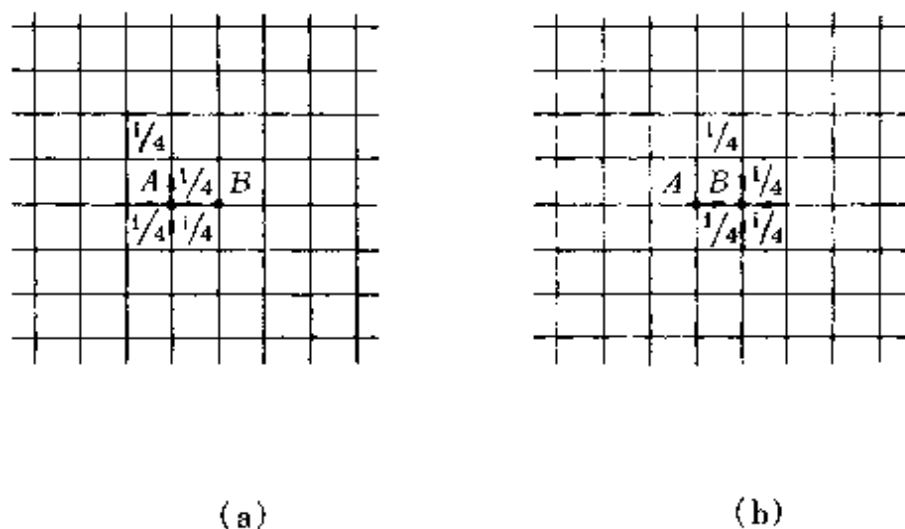


图 157

同理,如有电流 I 从节点 B 流出,则从节点 A 流向 B 的电流也为 $\frac{1}{4}I$ [图 157(b)].

因此,若同时考虑从节点 A 流入和从节点 B 流出的电流,则通过 AB 导线段的电流为

$$I_{AB} = \frac{1}{4}I + \frac{1}{4}I = \frac{1}{2}I.$$

则 AB 两节点间的电压

$$U_{AB} = I_{AB}r = \frac{1}{2}Ir.$$

根据等效电阻的物理意义, AB 两节点间的等效电阻为

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{\frac{1}{2}Ir}{I} = \frac{1}{2}r.$$

圆运动
与
对称性

例 1 一个磁感线呈锥状分布的磁场(可看成是由细长磁棒的磁极产生的),磁感强度 B 的大小与离开锥顶的距离 r 的平方成反比,可表示为 $B = \frac{a}{r^2}$ (a 为已知常数).现在锥顶处再放置一个电量为 q 的正点电荷,在它们共同的电磁场中,有一个质量为 m 、电量为 q 的负点电荷沿着圆轨道运动,从锥顶点看圆轨道的视角为 2θ ,试求轨道半径(质点的重力不计).

分析 做圆运动的点电荷以电场和磁场的作用力的合力作为它运动时所需的向心力.由问题的对称性可知,锥顶的静止正电荷一定处于运动轨迹的对称轴上[图 158(a)].

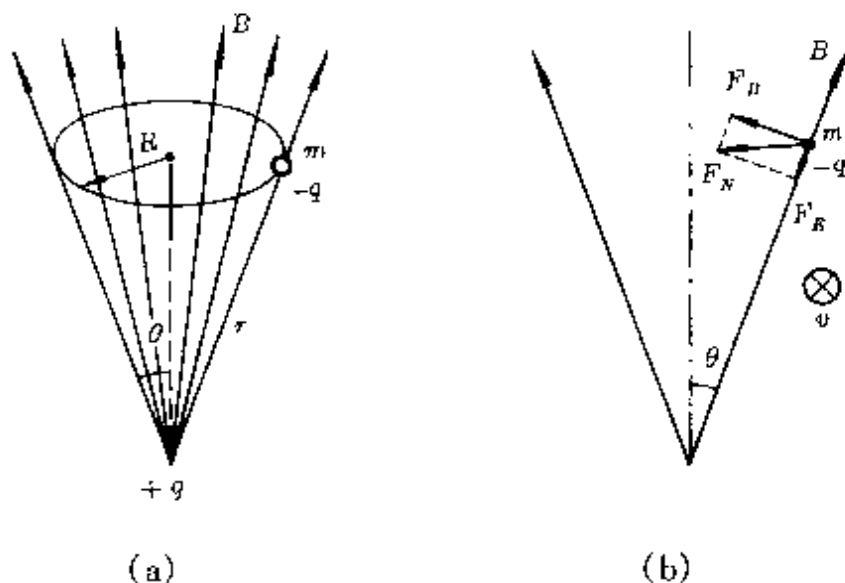


图 158

由于运动的负电荷所受正电荷的引力 F_E 必沿着锥面指向锥顶(即逆着 B 的方向),为了得到水平指向对称轴的合力 F_n (向心力),在平面图[图 158(b)]上,这个质点垂直纸面向里运动(以 \otimes 表示).也就是说,从锥顶观察该质点的运动是顺时针向绕行的.

解答 运动质点所受的电场力和磁场力分别为

$$F_E = k \frac{q^2}{r^2},$$

$$F_B = qvB = \frac{qva}{r^2}.$$

其方向如图 158(b)所示.

F_E 和 F_B 的合力作为质点运动的向心力 F_n , 它必垂直于对称轴. 由此得关系式

$$F_B \sin\theta = F_E \cos\theta.$$

或
$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{F_B}{F_E} = \frac{qva}{r^2} \cdot \frac{r^2}{kq^2} = \frac{av}{kq}.$$

因此质点做圆运动的线速度

$$v = \frac{kq}{a} \operatorname{ctg}\theta.$$

质点运动的向心力为

$$F_n = F_B \cos\theta + F_E \sin\theta,$$

或

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{qva}{r^2} \cos\theta + k \frac{q^2}{r^2} \sin\theta.$$

将上面得到的 v 的表达式代入, 并考虑到关系式

$$\sin\theta = \frac{R}{r},$$

于是可解得质点做圆运动的半径

$$R = \frac{a^2}{km} \cdot \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}.$$

例 2 在一个半径为 R 的圆筒内, 有一个匀强磁场, 从筒壁的小孔 a 以垂直于磁场

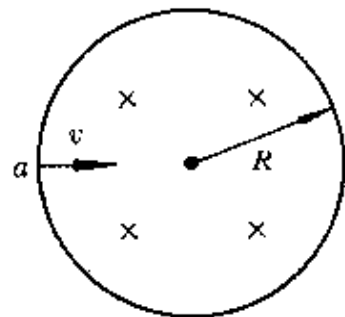


图 159

和筒壁的速度 v 射入一个质量为 m 、电量为 q 的正离子(图 159), 经过与筒壁的几次碰撞后恰能再从 a 孔射出. 假设离子与筒壁碰撞时, 电荷无迁移, 能量无损失, 求筒内磁感强度 B 的大小.

分析 离子射入磁场后, 在洛仑兹力作用下做圆弧运动. 由于碰撞后离子的电量和速度大小都不变, 反弹方向依然垂直磁场和筒壁, 因此, 入射的正离子可在圆筒内沿着不同的对称的轨迹从小孔 A 射出(图 160).

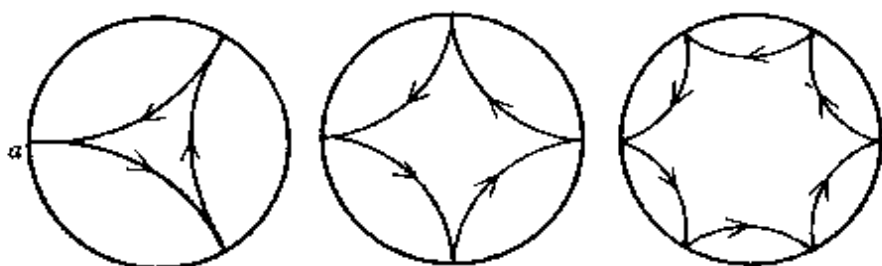


图 160

解答 设入射正离子经过与筒壁 n 次(包括射出时的一次)碰撞后射出圆筒, 它在圆筒内画出 n 段半径为 r 的圆弧, 与每段圆弧相应的圆筒上一段弧所对的圆心角大小为

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}.$$

由几何知识知(图 161)

$$r = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = R \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

正离子在磁场中做匀速圆周运动时, 由洛仑兹力作为向心力

$$F_n = qvB = m \frac{v^2}{r}.$$

联立上述两式得圆筒内的磁感强度为

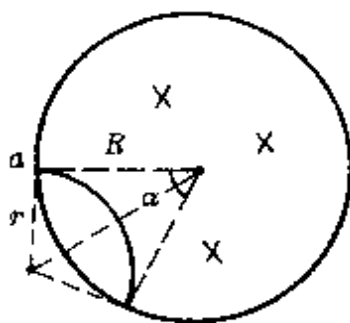


图 161

$$B = \frac{mv}{qR} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

($n = 1$ 和 $n = 2$, 对应的 B 值都不合题意, 应该舍去).

当 $n = 3, 4, 6$ 时, 画出的轨迹如图 160 所示, 相应的 B 值分别为

$$B_{n=3} = \frac{mv}{qR} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}mv}{3qR},$$

$$B_{n=4} = \frac{mv}{qR} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \frac{mv}{qR},$$

$$B_{n=6} = \frac{mv}{qR} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \frac{mv}{qR}.$$

说明 上面我们仅考虑这个正离子与筒壁相碰恰经过一周后仍从 a 孔射出的情况, 如果绕行一周后未能从 a 孔射出, 是否就会永远被禁闭在圆筒内呢? 其实并非如此, 这个正离子可能绕行 N 周后再从 a 孔射出, 上面得到的还只是一个特解, 现在我们进一步求出它的一般解.

设正离子绕圆筒 N 周, 经过 n 段圆弧后仍从小孔 a 射出, 此时与粒子运动的每段弧相应的圆筒上的这段弧所对的圆心角

$$\alpha = \frac{2\pi N}{n}.$$

设粒子做圆运动的半径为 r , 同样由几何知识(参见图 161)和向心力公式得

$$r = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = R \operatorname{tg} \frac{N\pi}{n},$$

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

联立得

$$B = \frac{mv}{qR} \operatorname{ctg} \frac{N\pi}{n}.$$

当 $N=1$ 时,得到的就是前面的特解.当 $N=2, n=5$; $N=2, n=7$ 时,其轨迹如图 162 所示,粒子在筒内的轨迹都是十分优美的对称图案.

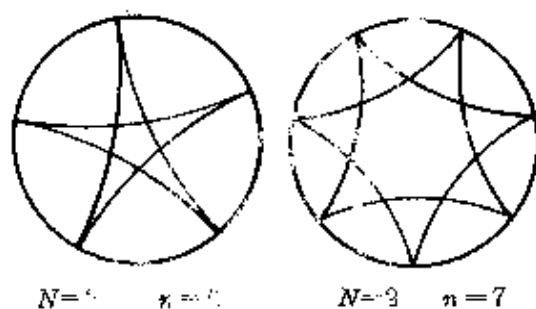


图 162

**正弦图象
的对称性**

例 1 试证明,正弦交流电压(或电流)的有效值 U (或 I)与其最大值 U_m (或 I_m)之间的关系为

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} U_m, \quad I = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m.$$

分析 有效值是根据热效应定义的.使交流电和直流电分别通过同一个电阻,在相同的时间内若电阻的发热量相同,那么这个直流电就称为对应交流电的有效值.由于交流电的瞬时值时刻变化,在某段时间内电阻上发热量的计算就变得很复杂,所以,交流电的最大值和有效值之间的关系一般难以用初等数学证明.为此,需从思维方法上另辟蹊径:下面介绍的是利用功率图线的对称特性作出的一种巧妙的证法.

解答 设一个纯电阻用电器的电阻为 R ,接入正弦交流电路中时,电阻上的电压和电流同相,令其瞬时值分别为

$$i = I_m \sin \omega t, \quad u = U_m \sin \omega t.$$

则其功率的瞬时值为

$$P = iu = I_m U_m \sin^2 \omega t = IU - IU \cos 2\omega t.$$

它的图象如图 163 所示。

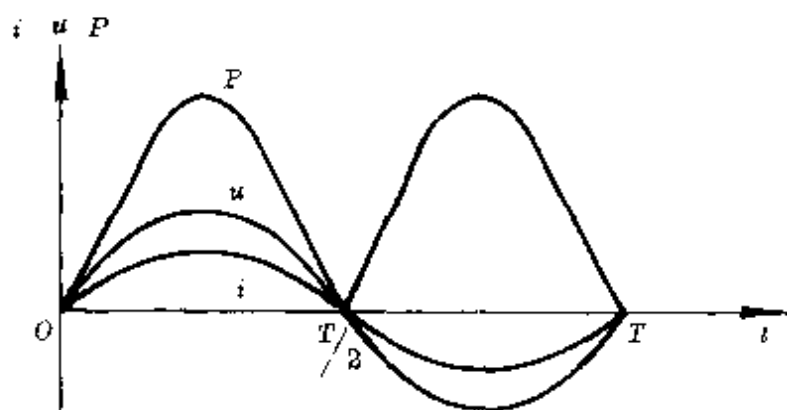


图 163

由图线可知,不论在交流电的正半周或负半周, u 、 i 总同时为正或同时为负, P 恒大于零,表示纯电阻用电器始终需从电源吸取能量,转化为热,因此电阻是一个消耗电能的元件。

因为功率恒定时,某段时间内消耗的电能数值上等于图线下方相应的一块面积(图 164),由此可以推知,图 165 中功率图线下方的面积也就等于某段时间内电阻消耗的电能(即放出的热量)。

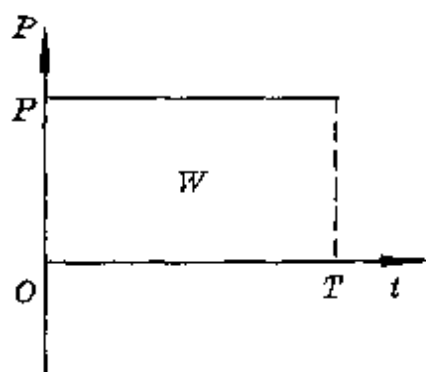


图 164

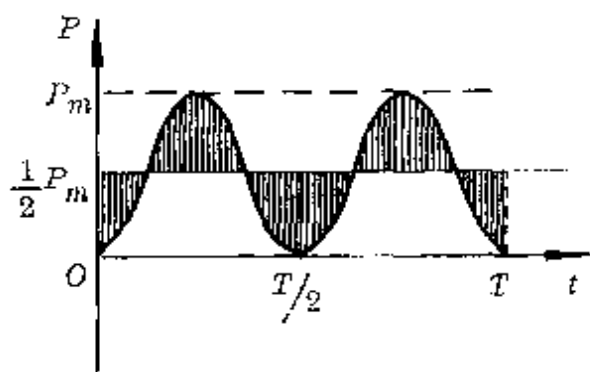


图 165

由于正弦和余弦函数图象的对称性,如果以 $P = \frac{1}{2} P_m$ (P_m 为最大功率)为高作一个矩形,则在一个周期 T 内这个矩形的面积就等于原图线下方的面积(图 165)。

因为 $P_m = I_m^2 R$, 因此图 165 中这个矩形面积所代表的发热量

$$Q = \frac{1}{2} P_m T = \frac{1}{2} I_m^2 RT.$$

根据有效值的定义, 与交流电 $i = I_m \sin \omega t$ 对应的有效值 I 应满足条件

$$Q = I^2 RT,$$

即
$$\frac{1}{2} I_m^2 RT = I^2 RT,$$

$$\therefore I = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m.$$

同理可证, 正弦交流电压有效值与最大值的关系为

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} U_m.$$

例 2 试解释, 为什么在交流电路中接入的纯电感、纯电容并不消耗电能?

解答 从能的转换来说, 纯电感和纯电容分别接入交流电路中后, 当电流增大时, 电流的能量转换成线圈中的磁场能和电容器中的电场能; 当电流减小时, 线圈中的磁场能和电容器中的电场能释放出来送还电源. 因此, 纯电感与纯电容仅起着“能量储运站”的作用, 本身并不消耗电能.

下面, 我们再根据理论计算从 $P-t$ 图的对称特性上作出严密的结论.

设通过纯电感或纯电容的交流电流和两端的电压分别为

$$i = I_m \sin \omega t, u = U_m \sin(\omega t + \varphi),$$

式中 φ 为电压与电流之间的相位差角.

它们的瞬时功率为

$$P = iu = I_m \sin \omega t \cdot U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= 2IU \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi),$$

由三角中的积化和差公式

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta),$$

上式可化为

$$P = IU \cos \varphi - IU \cos(2\omega t + \varphi),$$

以 $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ 和 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ 代入, 即得纯电感、纯电容的瞬时功率表达式

$$P_L = -IU \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = IU \sin 2\omega t$$

$$P_C = -IU \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = IU \sin 2\omega t$$

它们的图线如图 166 中(a)和(b)所示.

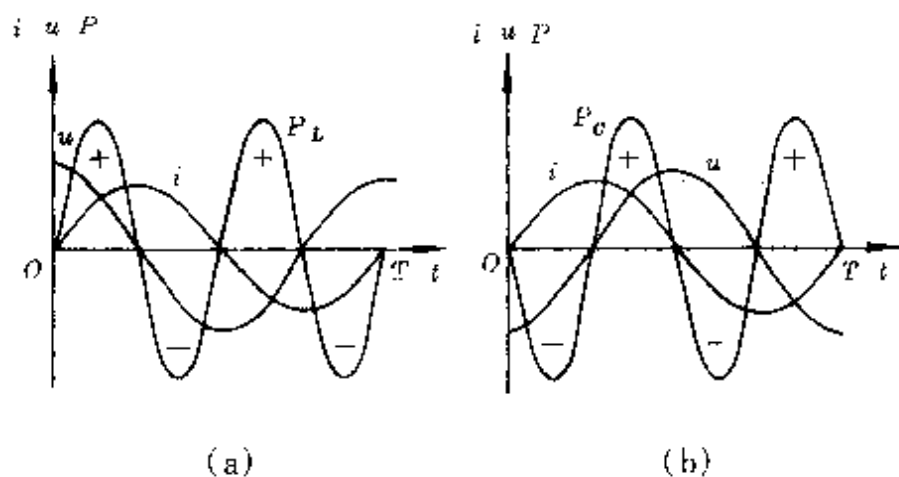


图 166

由于 i 、 u 之间存在着 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差, 纯电感与纯电容的 $P-t$ 图为频率为 2ω 的正弦曲线, $P > 0$ 时表示从电源吸收能量; $P < 0$ 时表示向电源释放能量. 由于正弦曲线的对称特性, 横轴上下对应的两块面积大小相等, 表示一个周期内从电源吸收的能量和向电

源释放的能量相等,所以,它们在交流电路中并不消耗电能.

平面镜成像
的对称性

例 1 两平面
镜 M 、 N 相交成 α

角,在镜前放一点光
源 S (图 167),试确定能从镜面同时
看到两个像的范围.

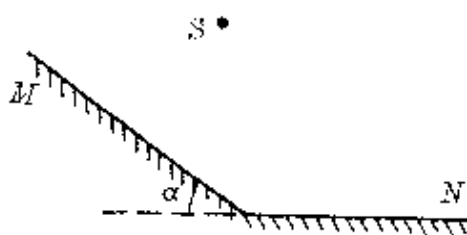


图 167

分析 观察范围需根据从光源 S 射向两镜边缘的光反射后的区域决定.为了较方便地作出反射线,可由平面镜成像的物像对称性,先确定 S 在 M 、 N 两镜中的像,镜前的反射光线都可以看成是从镜中的像直接发出来的.

解答 如图 168 所示,先由对称性作出 S 在 M 、 N 两镜中的像

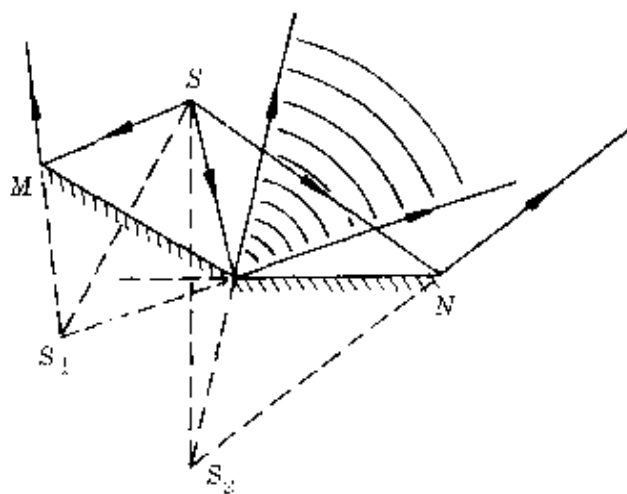


图 168

S_1 、 S_2 .然后,根据像 S_1 、 S_2 直接画出光源 S 射向两镜边缘的反射线,它们的重叠区域,就是能在镜前从镜面同时看到两个像的范围,如图 168 中弧线所示.

例 2 一个点光源 S 放在 OO' 轴的某一位置上,平面镜与 OO' 轴成 $\theta = 30^\circ$ 角倾斜放置(图 169).若保持光源不动,平面镜以

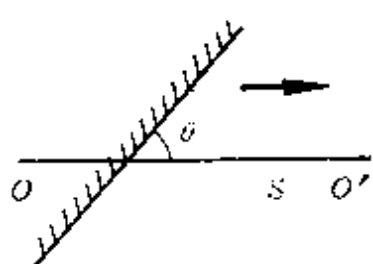


图 169

速度 v 沿 OO' 轴向光源平移, 则光源的像(图中未画出)的运动情况是

- A. 以速率 v 平行于 OO' 轴向右运动;
- B. 以速率 v 垂直于 OO' 轴向下运动;
- C. 以速率 $\sqrt{3}v$ 沿 $S'S$ 连线向 S 运动;
- D. 以速率 v 沿 $S'S$ 连线向 S 运动.

分析 先保持平面镜不动, 作出光源 S 的像 S' . 然后使平面镜向右平移, 经过一小段时间 t 后到达新位置(如图 170 中虚线所示), 发生的位移

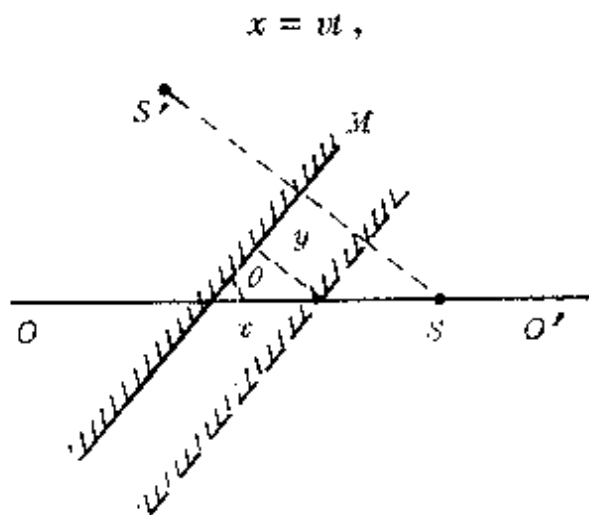


图 170

在垂直镜面方向的位移

$$y = x \sin \theta = vt \sin 30^\circ = \frac{1}{2} vt.$$

表示平面镜在垂直镜面方向的速度

$$v_y = \frac{1}{2} v,$$

为了保持平面镜中的虚像 S' 与光源 S 对称于镜面, 虚像 S' 必须沿着 $S'S$ 连线以 $v_y' = 2v_y = v$ 的速度向 S 运动.

解答 D.

说明 根据平面镜成像的物、像对称性,像的移动速度决定于物与镜在垂直于镜面方向的相互趋近(或分离)的速度.

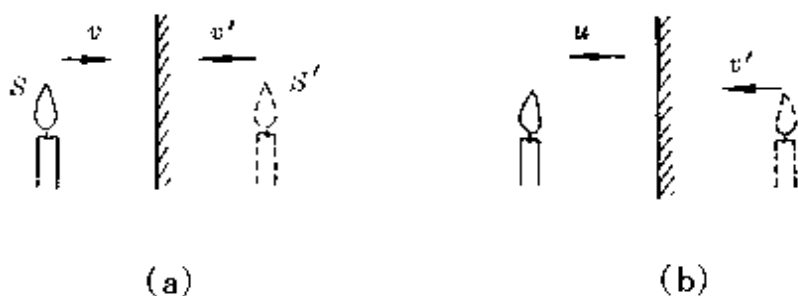


图 171

如图 171(a),保持镜不动,物 S 以垂直于镜面的速度 v 靠近,根据像与物的对称性,像 S' 必定以同样大小的速率($v' = -v$)向镜靠近.

如图 171(b),保持物 S 不动,镜子沿垂直于镜面的速度 u 向物靠近,则像 S' 必须以 $v' = 2u$ 的速度与镜面同向向物靠近.

例 3 如图 172,一发光点 S 置于不透明障碍物 AB 的左侧,障碍物竖直立在水平地面上,在发光点 S 上方有一水平放置的平面镜 M ,试用作图法确定障碍物 AB 右侧地面被照亮的区域.

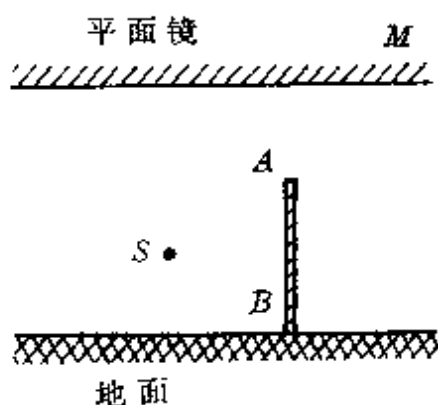


图 172

分析 从发光点 S 发出的许多光线中,其中掠过障碍物顶的光线 SA ,是能射到平面镜 M 最右方位置 C 的光线,由

它反射的光决定了地面被照亮的右方极限位置 C_1 .困难的是地面被照亮区域左方极限位置的确定.一些学生也常因此而束手无策.如果借助于平面镜成像的对称性,先作出发光点 S 在平面镜中的

像点 S' ，镜前的反射光都可以看成是从虚像点 S' 发出的，这样，就很容易确定被照亮的左方极限位置。

解答 如图 173 所示，作出发光点 S 在平面镜 M 中的像点 S' ，连结 $S'A$ ，得左方极限光线的入射点 D 。于是，即可作出入射线 SD ，反射线 DD_1 ，所以地面被照亮的区域为 C_1D_1 。

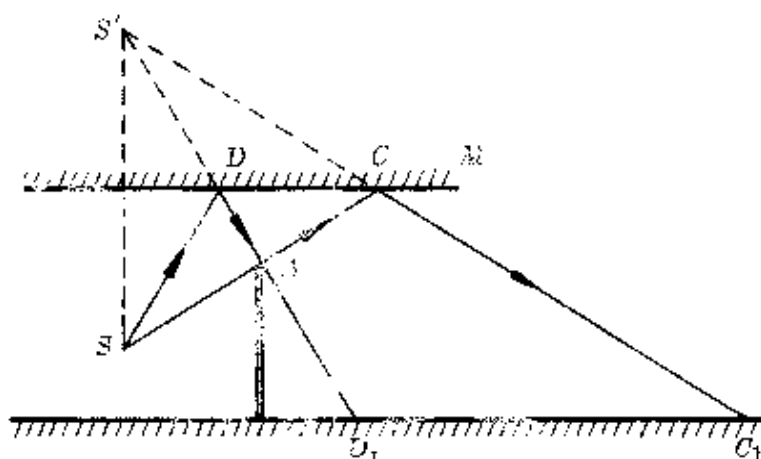


图 173

例 4 潜望镜的原理示意图如图 174 所示， L_1 、 L_2 为两块与水平面成 45° 角放置的平面镜， C 为观察小孔。试用作图法确定观察某处物体时平面镜 L_2 的最小线度。

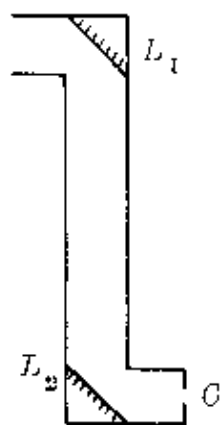


图 174

分析 平面镜 L_2 的最小线度，就是能从观察小孔 C 看到某处物体完整像的最小尺寸。

解答 如图 175 所示，先根据平面镜成像的对称性作出物体 AB 在 L_1 中的虚像 $A'B'$ ；再以 $A'B'$ 为物，根据对称性作出它在 L_2 中的虚像 $A''B''$ ；把观察孔 C 看作一点，连接 $A''C$ 、 $B''C$ ，它们与镜面的交点设为 M 、 N （图中未标出），则 MN 的长度就是能观察到完整像所需的最小线度。

图 175 察孔 C 看作一点，连接 $A''C$ 、 $B''C$ ，它们与镜面的交点设为 M 、 N （图中未标出），则 MN 的长度就是能观察到完整像所需的最小线度。

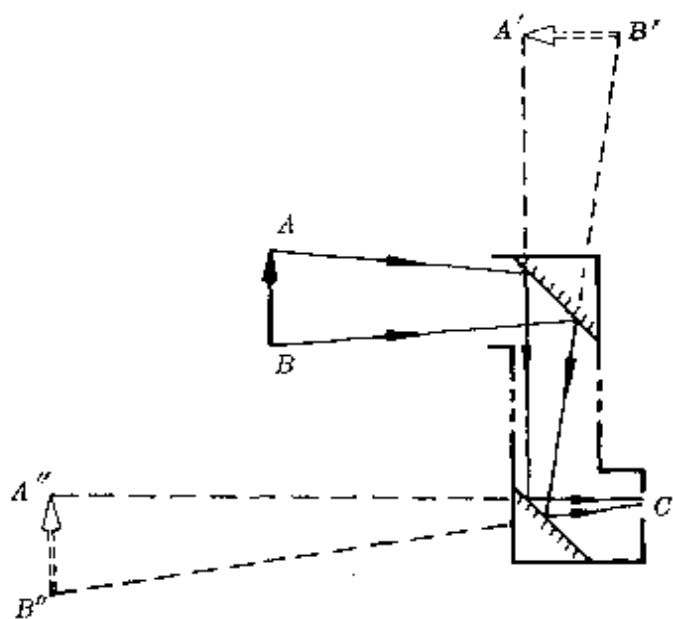


图 175

例 5 如图 176 所示, 一个长 l 、折射率为 n 的透明长方体 AB 放在空气中, 若从 A 端以某一入射角入射的光, 恰能在长方体的上、下两侧面发生多次全反射后从 B 端射出, 则光通过透明长方体的时间是多少?

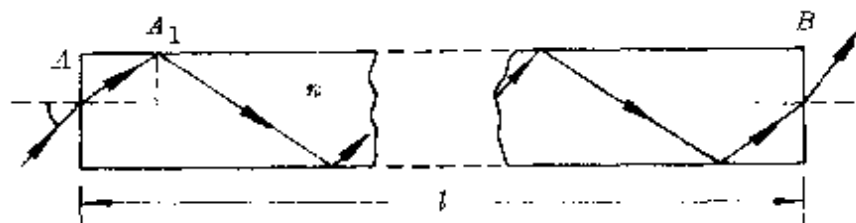


图 176

分析 常见的一种解法是先由恰能发生全反射的条件算出临界角 θ_m ,

$$\sin\theta_m = \frac{1}{n},$$

因为每反射一次, 光所通过的水平距离

$$d = s \sin\theta_m = \frac{s}{n},$$

的直线构成一个直角三角形 ABD (图 178), 其中斜边长

$$AD = \frac{l}{\sin\theta_m} = \frac{l}{\frac{1}{n}} = nl.$$

光在透明体内多次反射的时间, 等于通过斜边 AD 的时间, 故

$$T = \frac{AD}{v} = \frac{nl}{c/n} = \frac{n^2 l}{c}.$$

显然, 它比上面的方法简便得多.

例 6 用一架照相机对着太阳拍摄时, 底片离镜头 8 厘米, 用它在平面镜前 1 米处对自己拍照, 为了得到清晰的像, 底片离镜头的距离应为多少?

分析 对着太阳拍摄时, 太阳可看成平行光源, 经镜头后应成像在焦点处(在焦点外离焦点极近处), 由此得镜头焦距 $f = 8$ 厘米.

对着镜中的像拍摄时, 镜中虚像作为物, 它离开镜头的距离即为物距.

解答 作出对镜中像拍照的示意图如图 179 所示.

设底片离镜头距离为 v , 由平面镜成像的对称性, 得像离镜头距离即物距为 $u = (200 - v)$ 厘米, 由焦距 $f = 8$ 厘米, 代入凸透镜成像公式

$$\frac{1}{200 - v} + \frac{1}{v} = \frac{1}{8},$$

解得

$$v = 8.4 \text{ 厘米}.$$

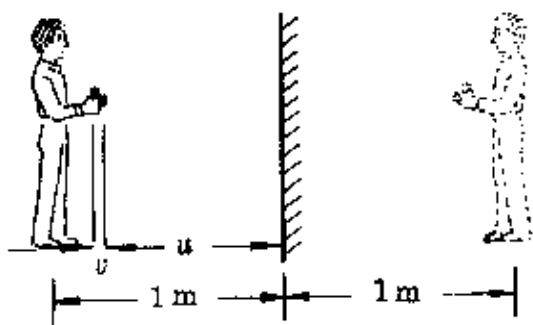


图 179

说明 本题计算中应作合理近似. 摄影师手执照相机站在镜前 1 米处, 意味着人与相机作为一个“扁平”的整体离镜都是 1 米, 镜后的像也是一个“扁平”的整体离镜 1 米, 而在考虑底片离镜头的距离时, 又需把照相机作为一个实在物体.

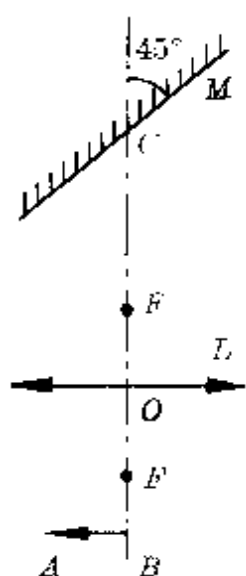


图 180

例 7 图 180 所示为教学上常用的投影仪的成像部分装置图, AB 为物, L 为物镜, 两者相距 $BO = 22$ 厘米, 物镜焦距 $OF = 20$ 厘米, M 为跟透镜主轴成 45° 角的平面镜, 光心与镜中央相距 $OC = 30$ 厘米.

(1) 画出成像光路图;

(2) 要得到清晰的图像, 屏幕应放在离平面镜中央 C 点多远处?

(3) 若 AB 长 8 厘米, 屏幕至少多高?

分析 如果没有平面镜, 放在凸透镜焦点外、

两倍焦距内的物体 AB 经凸透镜后在另一侧两倍焦距外成一倒立、放大的实像. 放有平面镜 M 后, 经凸透镜折射的光在会聚成像前, 先被平面镜反射, 在屏幕上形成的清晰像与没有平面镜时所成的实像对镜面 M 对称. 利用这种对称性, 可以较方便地作出成像光路并进行计算.

解答 (1) 成像光路图如图 181 所示.

作图时, 先利用特殊光线, 作出 AB 的像 $A'B'$ (平面镜后的这部分光线画成

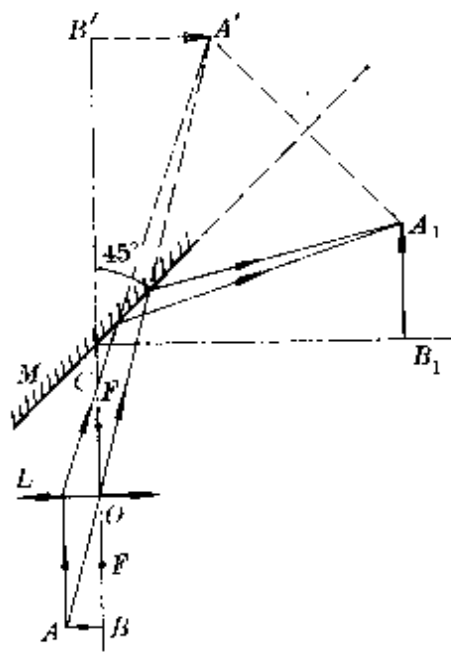


图 181

虚线,镜后得到的实际是一虚像).然后,根据平面镜的物像对称性,找出镜后虚像 $A'B'$ 在镜前的对称点 A_1B_1 ,即为屏幕上看到的实像.

(2)由物距 $u = OB = 22$ 厘米,焦距 $f = 20$ 厘米代入成像公式得像距

$$\begin{aligned} v &= \frac{uf}{u-f} \\ &= \frac{22 \times 20}{22-20} \text{厘米} \\ &= 220 \text{厘米}, \end{aligned}$$

即 $OB' = 220$ 厘米.

因为屏幕上的像 A_1B_1 与镜中虚像 $A'B'$ 对称于平面镜 M , $CB_1 = CB'$,所以屏幕离 C 点的距离

$$\begin{aligned} CB_1 &= CB' = v - OC = (220 - 30) \text{厘米} \\ &= 190 \text{厘米}. \end{aligned}$$

(3)由凸透镜成像长度放大率公式

$$m = \frac{\text{像长 } l_1}{\text{物长 } l} = \left| \frac{v}{u} \right|,$$

得平面镜后的像长,即屏幕上的像长为

$$l_1 = \left| \frac{v}{u} \right| l = \frac{220}{22} \times 8 \text{厘米} = 80 \text{厘米}.$$

所以,屏幕高度至少为 80 厘米.

说明 投影仪利用平面镜改变光路和物、像的对称性,可以使水平放置的细小物体放大并投射到竖直屏幕上.另外,还有一个设计方案——先经平面镜反射再经凸透镜放大成实像.其光路图如图 182 所示.

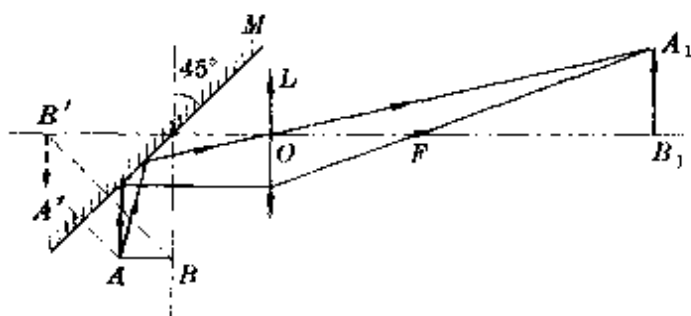


图 182

透镜成像中
的对称性

例 1 用公式 $f = \frac{L^2 - d^2}{4L}$ 测凸透镜焦距时, 在烛焰和光屏之间移动凸透镜, 能在屏上得两次清

晰的像, 这两次像的长度放大率之间有什么关系?

分析 如图 183 所示, 设烛焰与光屏间距离 L 大于四倍粗测的焦距, 在烛焰与光屏间移动凸透镜时, 一次得到放大倒立的实像, 一次得到缩小倒立的实像. 根据光路可逆原理, 这两次的物、像具有共轭对称的特性, 即成放大倒立实像时的物距和像距, 恰等于成缩小倒立实像时的像距和物距. 由此即可找出两次长度放大率的关系.

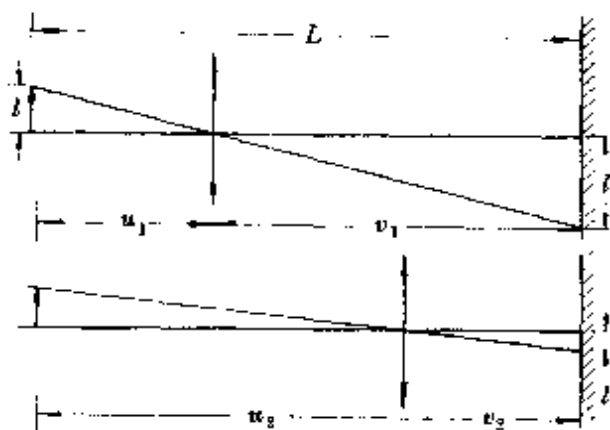


图 183

解答 根据两次物像的共轭对称特点, 它们的物距 u_1 、 u_2 与

对应的像距 v_1, v_2 间有关系式:

$$v_1 = u_2, v_2 = u_1,$$

因为两次清晰像的长度放大率分别为

$$m_1 = \frac{l'}{l} = \frac{v_1}{u_1}, m_2 = \frac{l''}{l} = \frac{v_2}{u_2}.$$

则

$$m_1 m_2 = \frac{v_1}{u_1} \cdot \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_1}{u_1} \cdot \frac{u_1}{v_1} = 1.$$

所以,两次长度放大率恰互为倒数.

说明 本题如不用物像的共轭对称性,也可直接根据凸透镜成像公式计算,由

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f}.$$

又

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2 = L.$$

联立各式找出 v_1, u_1 与 v_2, u_2 的关系代入放大率公式,可得到同样的关系,但计算过程要繁复得多.

例2 在光具座上竖立一个物体和一块光屏,在中间相距 $d = 60$ 厘米的两个位置上依次放置一块焦距 $f = 16$ 厘米的凸透镜,能在屏上得到两次清晰像,测得一次像长 $a = 25$ 厘米,另一次像长 $b = 4$ 厘米,则物体的长度和物体到屏的距离分别为多少?

分析 与上例相同,可以直接根据两次成像中的物、像共轭对称特性求解.

解答 设两次清晰像的物距和像距分别为 u_1, v_1 和 u_2, v_2 ,

如图 184 所示.

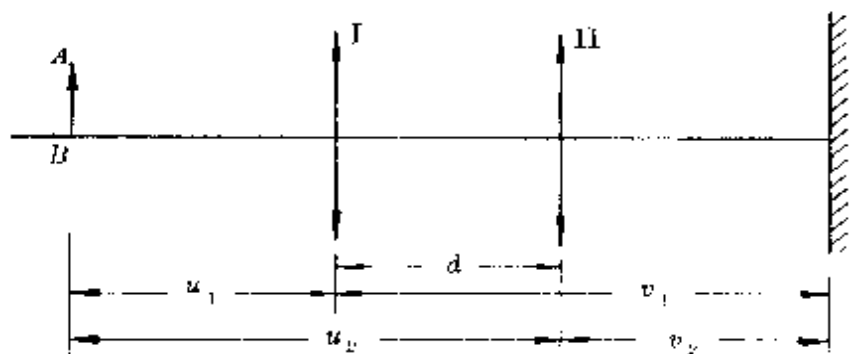


图 184

设物长为 l , 则由放大率公式和共轭对称性, 得

$$m_1 = \frac{v_1}{u_1} = \frac{a}{l}, m_2 = \frac{v_2}{u_2} = \frac{b}{l}.$$

$$m_1 m_2 = \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} = \frac{v_1}{u_1} \cdot \frac{v_2}{v_2} = 1.$$

所以物长

$$l = \sqrt{ab} = \sqrt{25 \times 4} \text{ 厘米} = 10 \text{ 厘米}.$$

由示意图 184 并结合透镜成像公式得

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2 = L,$$

$$f = \frac{u_1 v_1}{u_1 + v_1} = \frac{(L - d - v_2)(d + v_2)}{L},$$

$$f = \frac{u_2 v_2}{u_2 + v_2} = \frac{(L - v_2) v_2}{L},$$

联立得

$$L^2 - 4fL - d^2 = 0.$$

解得 $L = 100$ 厘米.

说明 下半题也可直接代入公式 $f = \frac{L^2 - d^2}{4L}$ 求出. 上面的联立方程提供了此公式的一种证明方法.

例3 一个薄凸透镜的焦距 $f = 15$ 厘米, 在它的主轴上距透镜 $u = 20$ 厘米处有一个点光源 S (图 185). 当透镜在垂直主轴的平面内上下做振幅 $A = 5$ 毫米的简谐运动时, 试画出透镜的上下极端位置的成像光路图, 并判断像点的运动情况.

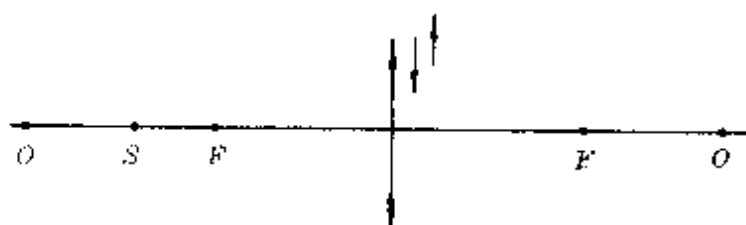


图 185

分析 透镜上下振动时, 透镜的主轴也平行于原主轴做上下振动, 振幅也为 $A = 5$ 毫米, 相当于两个对称于原主轴放置的透镜. 明确了这个实质后, 就很容易画出光路图和判断像点的运动情况.

解答 取透镜振动过程中上下两个极端位置, 作出相应的两根主光轴 O_1O_1' 、 O_2O_2' , 根据凸透镜成像作图法得到对称于原主光轴 OO' 的两个像点 S_1 、 S_2 (图 186).

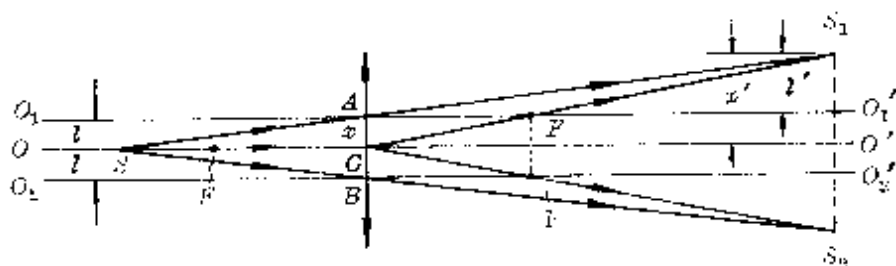


图 186

透镜向上振至极端位置时, 点光源 S 对主轴 O_1O_1' 而言, 相当于一个长 $l = 5$ 毫米的线光源, 由物距 $u = 20$ 厘米、焦距 $f = 15$ 厘米, 代入透镜成像公式得像距

$$v = \frac{uf}{u-f} = \frac{20 \times 15}{20-15} \text{厘米} = 60 \text{厘米},$$

根据长度放大率公式

$$m = \left| \frac{v}{u} \right| = \frac{l_1}{l},$$

得像点 S_1 离主光轴 $O_1 O_1'$ 的距离(相当于像长 l_1)为

$$l_1 = \left| \frac{v}{u} \right| l = \frac{60}{20} \times 5 \text{毫米} = 15 \text{毫米}.$$

透镜向下振至极端位置时,根据对称性知,其像点 S_2 与 S_1 对称于原主轴 OO' ,它偏离主光轴 $O_2 O_2'$ 的距离

$$l_2 = l_1 = 15 \text{毫米}.$$

透镜上下做简谐运动时,它的主光轴的位移 x 随时间作周期性变化,所成的实像 S_1 、 S_2 的像距不变,但像点偏离原主轴的距离 x' 时刻变化.由图 186 中相似三角形对应边的比例关系知, x' 也随时间作同样的变化.这就是说,像点与透镜做同步的简谐运动.像点的振幅

$$A' = x_m' = l_1 + l = 15 \text{毫米} + 5 \text{毫米} = 20 \text{毫米}.$$

结 束 语

写完这本小册子,我们更感到对称这个概念的含义深邃、内容丰富。限于作者水平和考虑到广大中学生读者的需要,书中仅采集了一小束花朵,奉献给读者,希望能被喜欢,也希望听到宝贵的意见。

书中所列举的一些对称性的实例或应用,多数属于空间反演操作。然而,应当清醒地认识到,牛顿第二定律也具有时间反演不变性。这就是说,时间的过去和未来在牛顿方程中是对称的,或者也可以这么说,时间的流逝在经典力学中是可逆的。

进一步的研究也发现,这种时间的可逆性在电磁学的麦克斯韦方程中、广义相对论的爱因斯坦方程中、量子力学的薛定谔方程中,都有相应的体现。

于是,我们就处于一种自相矛盾的困难境地:一方面,现实生活经验无可辩驳地指出,时间的流逝是不可逆的;另一方面,被我们所用来描述客观物质世界的物理学规律又具有时间反演不变性。“时不再来”似乎并不是不可动摇的真理!

怎样才能从根本上解决这个矛盾呢?有人曾把这个称为“时间箭头”的问题列为本世纪悬而未决的难题之一。

这真是一个十分诱人的问题!

如果在这本小册子的读者中能产生出圆满解决“时间箭头”问题的旷世之才,这正是作者所梦寐以求的。

最后,借此机会,向审读过本书初稿并提出许多宝贵意见的吴保让先生、倪汉彬教授表示衷心的感谢。

作者

1992年春于苏州烟雾楼

主要参考资料

[1]陈衡著《科学研究的方法论》,科学出版社,1982年5月第1版.

[2][德]H.魏尔著《对称》,商务印书馆,1986年2月第1版.

[3][英]J.P.艾立阿特、P.G.道伯尔著《物理学中的对称性》第一卷,科学出版社,1986年3月第1版.

[4]赵凯华著《物理学中的对称性浅释》,《物理教学》1987年第6期.

[5]华东师范大学(自然辩证法暨自然科学史研究所)编《自然科学史—自然辩证法文集》(第二辑),华东师大出版社,1987年5月第1版.

[6]杨振宁著《基本粒子发现简史》,上海科学技术出版社,1963年9月第1版.

[7]谢诒成著《粒子家族的功勋成员》,人民教育出版社,1984年4月第1版.

[8]程守洙、江之永主编《普通物理学》第三册,人民教育出版社,1961年6月第1版.

[9]申先甲主编《物理学史教程》,湖南教育出版社,1987年7月第1版.

[10]北京市物理学会《物理学史专题讲座》.

[11][美]G.L.特里格著《20世纪物理学的重要实验》,科学出

版社,1982年2月第1版.

[12]郭奕玲等编著《物理实验史话》,科学出版社,1988年9月第1版.

[13]谭树杰、王华编著《物理学中的重大实验》,科技文献出版社,1987年2月第1版.

[14]张维善《原子和原子核物理》,北京教育出版社,1987年11月第1版.

[15]江苏师范学院物理系编委会编《力学讲义》上册,人民教育出版社,1958年9月第1版.

[16][波]W.GORZKOWSKI 编著,章达君、赵凯华编译《中学物理奥林匹克趣题选及解答》,湖南教育出版社,1990年4月第1版.

