

中学物理思维方法丛书

顾 问 周培源 于光远
序 言 阎金铎
主 编 王溢然 束炳如
编 委 (按姓氏笔划为序)
王明秋 王溢然 刘宗贤
束炳如 岳燕宁 谢 凯
本册作者 王溢然
插 图 陆正言

逻辑简单的东西，当然不一定就是物理上真实的东西。但是，物理上真实的东西一定是逻辑上简单的东西，也就是说，它在基础上具有统一性。

——爱因斯坦

序 言

在中学物理教学过程中,学生获取知识的同时,要重视从科学宝库中汲取思维营养,加强科学思维方法的训练。

思维方法是一个很大的范畴,有抽象思维、形象思维、直觉思维等。以抽象思维而言,又有众多的方法,在逻辑学中都有较严格的定义。对于以广大中学生为主的读者群,就思维科学意义上按照严格定义的方式去介绍这众多的思维方法,显然是没有必要的,也是不会收到成效的。由王溢然、束炳如同志主编的这套丛书,不追求思维科学意义上的完整,仅选取了在物理科学中最有影响、中学物理教学中最为常见的这些思维方法(包括研究方法)为对象,在较为宽泛的意义上展开,立意新颖,构思巧妙。全套丛书共13册,各册彼此独立,都以某一二类思维方法为主线,在物理学史的恢宏长卷中,撷取若干生动典型的事例,先把读者引入到饶有兴趣的科学氛围中,向读者展示这种思维方法对人类在认识客观规律上的作用。然后,围绕这种思维方法,就其在中学物理教学中的

功能和表现,以及其在具体问题中的应用作了较为深入、全面的开掘,使读者能从物理学史和中学物理教学现实两方面较宽广的视野中,逐步领悟到众多思维方法的真谛。

这套丛书既不同于那些浩繁的物理学史典籍,也有别于那些艰深的科学研究方法论的专著,但却兼容了历史和方法、照顾了普及与提高、联系了中学教学实际、突出了对中学物理教学的指导作用和具体应用。文笔生动、图文并茂,称得上是一套融史料性、科学性、实用性、趣味性于一体的优秀课外读物。无论对广大中学生(包括中等文化程度的读者)还是中学物理教师、教学研究人员以及师范院校物理专业的大学生,都不无裨益。

科学研究是一项艰巨的创造性劳动。任何科学发现和科学理论都是在一定的背景下,经过科学家精心的实验观测、复杂的思维活动后的产物。在攀登道路上充满着坎坷和危机,并不是一帆风顺、一蹴而就的。科学家常常需及时地(有时甚至是痛苦地)调整自己的思维航向,才能顺利抵达成功的彼岸。因此,任何一项科学新发现、一种科学新理论的诞生中,决不会仅是某种单一思维活动的结果。这也就决定了丛书各册在史料的选用上必然存在的某些重复和交叉。这是一个不足之处,但反过来却可转化为使读者的思维层次“多元化”的一个优点。不过,作为整套丛书来说,如果在史料的选用上搭配得更精细一些、思维活动的开掘上更为深刻一些,将会使全书更

臻完美。

我把这套丛书介绍给读者,一方面希望引起广大中学生的兴趣,能从前辈科学家思维活动轨迹中汲取智慧,活化自己的灵感,开发潜在的智能;另一方面希望中学物理教师在此基础上继续开展对学生思维方法训练的研究,致力于提高学生的素质,以适应新时期的需要。

我也真诚地希望这套丛书能成为图书百花园中一朵惹人喜爱的花朵。

阎金铎

1992年10月

引 言

等效变换是物理学中常用的一种思维方法。中学物理中的合力与分力、运动的合成与分解、总电阻和总电容等都是在等效思想支配下引进的概念。等效变换在物理上的最辉煌成果，就是以此为前提创建的相对论。

本书从爱因斯坦等效变换的物理基础开始，进而概括了中学物理中常见的几类等效变换方法，指出了等效变换的运用原则，最后就等效变换在中学物理教学中的功能及其具体应用作了较详细的阐述。

希望广大读者从阅读本书中，能加深对等效变换的认识，并能自觉地运用等效变换方法去分析、研究物理问题。

作 者

1993年夏于姑苏九百居

目 录

序言

引言

一、等效原理	(1)
1. 惯性质量与引力质量	(1)
2. 质量等价实验	(4)
3. 爱因斯坦的理想实验	(8)
4. 等效原理	(11)
二、中学物理中常见的等效变换	(16)
1. 组合等效法	(16)
2. 叠加等效法	(22)
3. 整体等效法	(25)
4. 运动等效法	(30)
5. 过程等效法	(33)
三、运用等效方法的基本原则	(35)
1. 惟一的要求——保持效果相同	(35)
2. 变换的基础——明确物理实质	(44)
3. 检验的依据——物理规律的一致性	(50)
四、等效方法在中学物理中的应用	(56)
1. 等效方法对学习和运用物理知识的指导作用	(56)
2. 等效方法在中学物理解题中的应用	(71)
结束语	(136)
主要参考资料	(137)

一、等效原理

据说,有一次爱因斯坦(A. Einstein, 德国, 1878—1955)遇到了著名喜剧大师卓别林. 爱因斯坦说:“卓别林先生,您真伟大,您演的电影全世界人人都能看懂.”卓别林幽默地回答说:“爱因斯坦先生,您也很伟大,您的相对论全世界几乎没有几个人能够弄懂.”

听了这段精彩的对话后,人们也许会认为,相对论一定是建立在极其深奥复杂的基础上的.这样就猜错了,相对论的基本前提十分浅显,作为广义相对论前提的等效原理,完全是建立在中学生都熟知的一个实验基础上的——倘若不信,读下去就会明白.

1. 惯性质量与引力质量

惯性质量 飞驰的列车急刹车后要滑行一段路程,站在车中的乘客当车突然启动时会后仰,而当车紧急制动时又会前倾,……这些司空见惯的现象告诉我们:任何物体都有一种保持它原来运动状态的特性.在物理学上,把物体保持原来运动状态的这种特性称为惯性.

惯性是有大小的,惯性的大小就用它保持原来运动状态的“能力的大小”来反映.这种“能力”只与物体的质量相关.质量大的物体,不容易改变原来的运动状态,在同一个力作用下产生的加速度小,表示它的惯性大.因此,我们可以用物体的质量来量度物体惯

性的大小,这样定义的质量称为惯性质量.这也就是牛顿第二定律公式中的质量.所以,物体惯性质量的大小可表示为

$$m_{\text{惯}} = \frac{F}{a}.$$

不论任何物体,如一块铁、一段木料、一杯水等,只要它们在相同外力作用下的加速度相同,就表示这块铁、这段木料、这杯水(包括杯子)的惯性质量相同,与它们的物质组成无关.

一般地说,比较两个物体惯性质量的大小,只需观察它们在相同外力作用下加速度的大小.由牛顿第二定律可知,物体的惯性质量与其加速度成反比,即

$$m_1 : m_2 = a_2 : a_1. (F \text{ 一定})$$

航天技术上曾用这个方法判定一艘沿轨道运行的飞船的质量——发射一艘已知质量(设为 m_0)的飞船,并测出它在一定推力下的加速度(设为 a_0),然后让这艘飞船保持原来的推力去推动未知质量(设为 m)的飞船一起加速运动,再测出两者共同的加速度(设为 a),于是由

$$m_0 : (m_0 + m) = a : a_0,$$

即得未知飞船的质量

$$m = \frac{a_0 - a}{a} m_0.$$



如果问你,会不会测定物体的质量?你一定会不假思索地回答:只需用一架天平,分别放上被称物体和砝码,当天平平衡时,砝码的质量就等于被称物体的质量.

现在进一步问你,为什么可以用砝码的质量表示被称物体的质量呢?假如这架天平的臂很长很长,它的一端在北京,另一端在广州,此时还能用砝码的质量表示被称物体的质量吗?

应该明白,用天平称量物体的质量,包含着—个重要的事实——在同一地方,任何物体自由落体的加速度相同,与物体的组成及轻重无关.如图 1 中天平两边放上砝码和被称物体后,两者受地球引力作用形成对秤盘的压力分别等于 $m_1 g_1$ 、 $m_2 g_2$ (不计地球自转影响),平衡时,

$$m_1 g_1 l_1 = m_2 g_2 l_2.$$

当 $g_1 = g_2$ 、 $l_1 = l_2$ 时,得

$$m_1 = m_2.$$

如果天平两端的重力加速度不同,也就没有上面的简单关系了.

这种测定质量的方法,实际上根据的是引力大小的关系,因此这样用天平称出的质量称为引力质量,用 $m_{引}$ 表示.它也就是牛顿万有引力定律公式中的质量.因此,引力质量可表示为

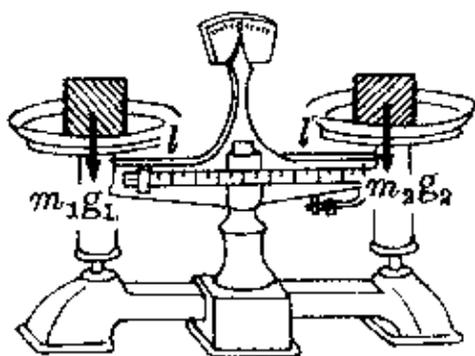
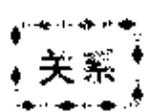


图 1 天平的原理

$$m_{引} = \frac{F}{G \frac{M_{引}}{R^2}},$$

式中 $M_{引}$ 为地球的引力质量(下面简称为 M), R 为物体离地心的距离.



从上面的讨论可知,惯性质量和引力质量是在不同的实验事实基础上,根据两条完全独立的物理定律定义出来的.它们反映着同一物体的两种不同的属性:惯性质量可以量度物体惯性的大小,引力质量可以量度物体与地球相互作用的大小.那么,对同一物体,用牛顿第二定律计算的质量 $m_{惯}$ 和用天平测出的质量 $m_{引}$ (或用万有引力定律算出的质量)之间有何关系呢?

根据万有引力定律,引力质量分别为 $m_{1引}$ 和 $m_{2引}$ 的两个物体,

在地面上同一处所受引力的大小分别等于

$$F_1 = G \frac{Mm_{1引}}{R^2}, F_2 = G \frac{Mm_{2引}}{R^2}.$$

在引力作用下,两物体产生的加速度设为 a_1 、 a_2 ,即

$$F_1 = m_{1惯} a_1, F_2 = m_{2惯} a_2.$$

或

$$G \frac{Mm_{1引}}{R^2} = m_{1惯} a_1, G \frac{Mm_{2引}}{R^2} = m_{2惯} a_2.$$

则

$$a_1 = G \frac{M}{R^2} \cdot \frac{m_{1引}}{m_{1惯}}, a_2 = G \frac{M}{R^2} \cdot \frac{m_{2引}}{m_{2惯}}.$$

由伽利略对落体实验的分析证明,同一地方不同物体的加速度都相同,即 $a_1 = a_2 = g$,所以由上式可得

$$\frac{m_{1引}}{m_{2引}} = \frac{m_{1惯}}{m_{2惯}}.$$

推广到任何其他物体,可写成

$$\frac{m_{1引}}{m_{1惯}} = \frac{m_{2引}}{m_{2惯}} = \frac{m_{3引}}{m_{3惯}} = \dots.$$

由此可见,一切物体自由下落的加速度相同这一事实,意味着“任何物体的引力质量与它们的惯性质量成正比”这样一个深刻的含义.取适当的单位后,就可以认为两者相等,即

$$m_{引} = m_{惯}.$$

2. 质量等价实验

落体
实验

验证惯性质量与引力质量相等的最简单方法,可用中学物理中的“钱毛管”(又称为“牛顿管”)做的落体实验:如图2所示,在一根一端封闭的长约120厘米、外径

约6厘米的厚壁玻璃管中,装有金属片(小钱)、羽毛或软木块,另一端装有抽气嘴和阀门.打开活栓,管内充满空气时,将玻璃管急速倒转,金属片和羽毛因所受空气阻力不同,下落快慢不同,把管内抽空(低于20毫米汞柱),再急速倒转玻璃管时,就可以看到管内不同物体将同时下落.

因为在地面附近,物体的重力加速度为

$$g = \frac{F_{引}}{m_{惯}} = \frac{G \frac{Mm_{引}}{R^2}}{m_{惯}} = \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{m_{引}}{m_{惯}}$$

如物体的引力质量与惯性质量成正比,可表示为

$$m_{引} = km_{惯},$$

代入上式,得重力加速度

$$g = \frac{kGM}{R^2}.$$

在地面上同一地方,它不随物体的材料、轻重而变化,钱毛管实验中不同轻重物体同时下落的事实,正证明了这一点,因而也就是间接证明了 $m_{引} = km_{惯}$ (或 $m_{引} = m_{惯}$).

◆◆◆
◆ 牛 顿
◆ 实 验
◆◆◆

牛顿(I. Newton, 英国, 1642—1727)在提出运动定律和万有引力定律时,必然会碰到两种质量的意义问题.为此,他亲自做了实验——用不同材料做成单摆的摆锤,比较它们的振动周期,从而确定这两种质量的关系.

从振动理论得知,单摆做小振幅振动时,振动周期可表示为

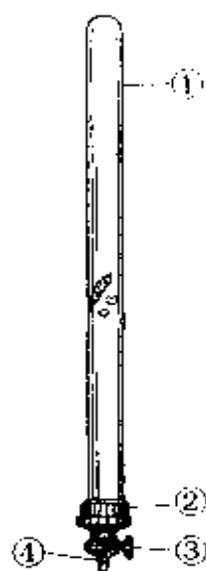


图 2 钱毛管

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt{\frac{m_{\text{惯}}}{m_{\text{引}}}}$$

如果用不同材料做的摆锤,在摆长 l 相同时,测得的振动周期都相同,就表示 $\frac{m_{\text{惯}}}{m_{\text{引}}}$ 为一常数.

牛顿用空心容器作摆锤,里面放进质量精确相等的各种不同物质,如金、银、铅、玻璃、砂粒、食盐、木料、水和麦子等.他写道:“我做了两个一样的木盒,一个装满木材,另一个在摆动中心处挂上等量的金(尽可能准确).两个木盒用 11 英尺(1 英尺 = 30.48 厘米——注)长的同样的细线挂起来成为一对摆,它们的重量和形状完全一样,并同样地受到空气阻力.把两者挨着放,我观察到,它们长时间地以同一频率一起来回摆动.因此,金里的物质的量与木料里的物质的量之比同作用在全部金上的力与作用在全部木料上的力之比是相同的.”

牛顿的实验结果用数学式表示可写成

$$\frac{m_{\text{惯(金)}}}{m_{\text{惯(木)}}} = \frac{m_{\text{引(金)}}}{m_{\text{引(木)}}},$$

或

$$\frac{m_{\text{惯(金)}}}{m_{\text{引(金)}}} = \frac{m_{\text{惯(木)}}}{m_{\text{引(木)}}}.$$

表明两种质量之比是常数.当选用适当单位时,就可以使得 $m_{\text{惯}} = m_{\text{引}}$.所以,牛顿在创建经典力学的理论体系时,就不再区分引力

* 单摆做小振幅振动时的运动微分方程为

$$m_{\text{惯}} l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -G \frac{M m_{\text{引}}}{R^2} \theta,$$

式中 l 为摆长, θ 为摆角.这个方程与中学物理中小球做简谐运动时的运动方程 $m a = -k x$ 相当.

质量和惯性质量了。

厄缶实验

无论是落体实验还是牛顿的单摆实验,测量的精确度都不高.据牛顿的记载,他的实验精度为千分之一^{*}.后来,人们对牛顿的单摆方法作了改进,实验精度有了很大提高.

验证两种质量等价的更精确的实验,是匈牙利物理学家厄缶(Fötvös)在 1889 年用扭秤方法完成的.

厄缶实验的设计思想可用图 3 说明.我们知道,悬挂在地面上的物体,平衡时它受到三个力作用:(1)地球引力(重力) F_g , 指向地球中心;(2)悬线中张力 F_T , 方向沿着悬线;(3)因地球自转而受到的“惯性离心力” F_c , 方向垂直地球的自转轴向外^{**}. 这里, F_g 正比于物体的引力质量, F_c 正比于物体的惯性质量,它们的大小分别为

$$F_g = m_{引} g,$$

$$F_c = m_{惯} \omega^2 R \cos \varphi. (\varphi \text{ 为所在处的纬度})$$

厄缶据此设计了一个扭秤,改用静态方法直接比较两个物体的引力质量和惯性质量.厄缶实验的原理图如图 4 所示.

用一根铂铱合金丝悬挂一根长 40 厘米的横杆,两端对称地固

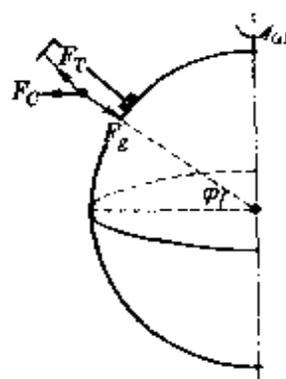


图 3 地面上物体的受力

* 如果我们引入参数 $\eta(A, B)$ 表示 A, B 两种质量的差异, 定义为

$$\eta(A, B) = \left[\left(\frac{m_{引}}{m_{惯}} \right)_A - \left(\frac{m_{引}}{m_{惯}} \right)_B \right] / \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m_{引}}{m_{惯}} \right)_A + \left(\frac{m_{引}}{m_{惯}} \right)_B \right],$$

则对牛顿的实验而言, $\eta(A, B) \leq 1 \times 10^{-3}$.

** 这是在随地球一起转动的参照系内观察到的结果, 其中, 与 F_c 等值反向作用在物体上的力, 就是使物体随地球一起自转的向心力 $F_n = m\omega^2 R \cos \varphi$.

定着两个材料不同、重量相等的重物 A 和 B. 两个物体都会受到重力和因自转造成的惯性离心力. 如果惯性质量与引力质量等价, 则两物体所受的惯性离心力相等, 其力矩互相抵消, 扭秤仍维持平衡. 如果惯性质量与引力质量不等, 则扭秤失去平衡, 会使悬丝扭转.

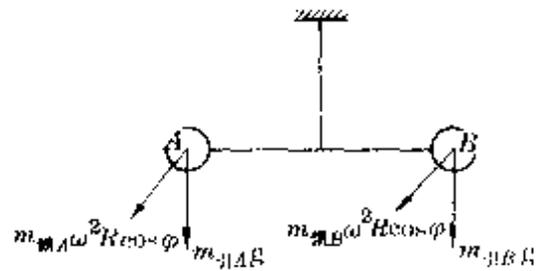


图 4 厄缶实验原理图

厄缶实验的装置如图 5 所示.

厄缶用望远镜对准悬丝上挂的小反射镜, 通过反复的仔细观察, 并且比较了许多不同物质(如木、铜、铂、石棉、水、硫化铜等), 为了避免系统误差, 厄缶还将横杆转过 180° 重新进行测量, 但始终看不到悬丝的扭转, 即实验结果是“零”.

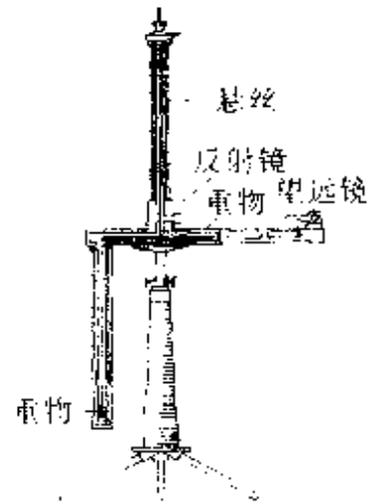


图 5 厄缶实验装置图

厄缶在 1889 年的实验精度已达到 5×10^{-8} , 在 1908 年的第二次实验, 精度又提高到 3×10^{-9} , 也就是说, 如果惯性质量与引力质量不等, 它们之间的偏差也不会超过三十亿分之一.

两种质量的等价实验, 激起了许多物理学家浓厚的兴趣. 迪克 (Dicke) 等人在 1960—1964 年间分析研究了厄缶实验, 重新进行了设计, 把实验精度提高到 3×10^{-11} . 1972 年, 苏联物理学家布拉金斯基 (Braginsky) 和班诺夫 (Panov) 又把迪克等人的实验精度推进了两个数量级, 达到 9×10^{-13} .

3. 爱因斯坦的理想实验

惯性质量与引力质量相等, 这是从伽利略 (G. Galilei, 意大利,

1564—1642)和牛顿以来,经典物理学家普遍承认的实验事实,从来没有人作进一步的理论解释,都认为是不言而喻的.爱因斯坦却不然,他认为两者间的物理本质完全不同.爱因斯坦曾生动地用地球与石头间的引力为例说明这一点.他说:

“地球以重力吸引石块而对其惯性质量毫无所知,地球‘召唤力’与引力质量有关,而石块所‘回答’的运动则与惯性质量有关.”

他从两者相等的事实出发,产生了深刻的联想.为了理解爱因斯坦深邃的思想,下面先介绍一下他所设想的几个理想实验.

**电梯内外
的争论** 假设在一座极高极高的建筑物内,有一个松脱了缆绳的电梯毫无阻碍地下坠.电梯里有一群物理学家,他们正在专心致志地做着实验,一点也不知道灾难当头.一位物理学家从口袋里拿出一块手帕和一块表,让它们从手中释放(图6).在电梯里的物理学家和电梯外站在地面上透过窗子观察电梯内实验的物理学家对所发生的现象看法不同.

电梯内的物理学家:手帕和表都停留在放手的地方,这都表明在这个系统内没有任何力作用在这两个物体上.若用手把这两个物体朝任何方向轻推一下,它们在碰壁之前会一直做着匀速直线运动.用脚一蹬向上跳的话,也会一直向上飞去,直到头顶碰到天花板.好像一切物体都在一个惯性坐标系内一样,经典力学的定律完全有效.

电梯外的物理学家:手帕、表、电梯内的人连同整个电梯,以同样的加速度下落,完全符合伽利略所论证的“一切落体的加速度与它们的质量无关”的结论.

这里,双方分歧的焦点是:电梯外的物理学家认为存在一个引

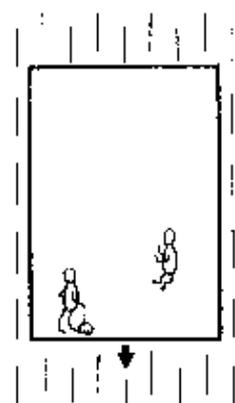


图6 下坠中的电梯

力场,各种不同质量的物体以同样加速度下落,是引力场作用的结果;电梯里的物理学家认为不存在这个引力场——或者说,引力场在他们的坐标系外,完全可以不管引力场的影响。

转桶内外 的争论

这一次,爱因斯坦让这群物理学家处在一个巨大的密封的转桶内,这时他们的感觉,他们所做的实验跟桶外站在地面上的物理学家的看法又不同。

桶内物理学家:出乎意料地感到有一种奇怪的力,企图把他们拉离桶的中心,当把手中的手帕、表放掉后,它们会沿着桶的半径飞向桶壁,似乎顷刻间重力场改变了方向,变成沿着桶壁向外,桶壁就像是屋子里的“地板”。

桶外物理学家:这一切都是旋转圆桶所特有的惯性的表现——做圆运动的物体都有离开中心沿切线方向飞出去的倾向(称离心倾向)。

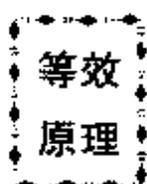
这里双方分歧的焦点是:桶内物理学家认为是重力的作用;桶外物理学家认为仅是一种惯性的表现。

远在天外

爱因斯坦又换一下想象的情景:把这座乘坐物理学家的电梯,确确实实放到毫无其他物体存在的空间,远在天外任何天体之外,假设有一种超自然的力拉紧缆绳上曳,使电梯以匀加速度愈来愈快地“向上”升去。当然,电梯内的人同样不明白他们又处于怎样的一种险境,只是他们觉得自己的脚像突然被某种强大的力吸引着紧紧地贴着地面,要是用脚蹬地上跳的话,不会再轻飘飘地浮起向上直冲梯顶了。如果再把手中的手帕和表放掉,它们也不再停留在原处,而是向下落,但是若把它们水平抛出的话,这些东西不再做匀速直线运动,而是沿着一条弧线下落。于是,电梯内的物理学家认为,这一切都是由于他们处于一个强大的引力场中的缘故,就像他们附着在地球上时受到重力一样。显

然,连这些绝顶聪明的物理学家也无法知道,他们到底是停在重力场中?还是在毫无重力的虚无缥缈的太空做匀加速上升运动?

4. 等效原理



从爱因斯坦所设计的上面几个理想实验中,我们可以建立这样的关系:

电梯加速下降 $\xrightarrow{\text{(相当于)}}$ 重力场的减弱,

电梯加速上升 \longrightarrow 重力场的增强,

圆桶急速旋转 \longrightarrow 重力场的倾斜.

这就是说,一个加速系统可以与一定的重力场(引力场)等价,或者说,物体的惯性与一定的重力场(引力场)等价.任何因速度大小变化或方向变化而发生的其他惯性作用,都可以看作重力场(引力场)变化的结果.这就有可能找到引力质量与惯性质量之间联系的线索.仿照一定电量的电荷 q 在电场强度为 E 的场中受到电场力 $F = Eq$ 的公式,可以写出如下的等式:

$$\begin{aligned} & (\text{惯性质量}) \times (\text{加速度}) \\ & = (\text{引力质量}) \times (\text{引力场强度}). \end{aligned}$$

例如,电梯自由下落时,

$$m_{\text{惯}} a = m_{\text{引}} g',$$

由于 $m_{\text{惯}} = m_{\text{引}}$,因此,等效于这个加速运动的引力场强度 $g' = a$.

如电梯以 $a < g'$ 的加速度下落,则道理相同.

这样,爱因斯坦就以引力质量与惯性质量相等作为“一把可以更加深入地了解引力和惯性的钥匙”,提出了一个普遍的假设:“引力场与参考系的相当的加速度在物理上完全等价”,或者简单地说成:“引力与惯性等价”.这就是所谓的“等效原理”.

等效原理是以引力质量与惯性质量相等这一事实为基础的,反过来,承认了这一原理,引力质量与惯性质量的相等性也相当自然了.

· · · · · ·
· 广 义 ·
· 相 对 论 ·
· · · · · ·

根据等效原理可以知道,我们在局部范围内(如上面所说的电梯内)由于惯性(无论是平动还是转动)所产生的运动和重力(引力)所产生的运动将无法区分.换句话说,我们在局部范围内所做的实验将无法区分自己所在的系统(K')究竟相对于另一个参考系(K)是在加速运动呢?还是受到一个引力场的作用?因此,我们用参考系 K' (相对惯性系做加速运动)或者 K (内部有一个引力场)来描述物理过程的规律,应该是完全等效的.

这样,爱因斯坦就把他在狭义相对论中所指出的“各惯性系在描述自然定律上是等效的”这一结论作了推广,他进一步地指出:“自然定律对一切任意运动着的非惯性系(加速运动的系统)也有效.”奠基于这样一个“广义相对性原理”上的理论,便称为“广义相对论”.

广义相对论实质上是一种关于引力的理论,它把牛顿建立在超距作用上的引力理论改造为建立在场的观念上的引力理论,其内容相当深奥.爱因斯坦在广义相对论中做出了三个惊心动魄的预言.下面,我们简单介绍其中的一个预言——光线经过太阳附近会发生弯曲*.

* 爱因斯坦的另两个预言是:①水星近日点的进动——水星绕日运动会由于太阳引力场作用,每一百年近日点进动 $43''$;②光谱线的引力红移——从巨大质量的星体表面发射到地球上的光谱线,会向光谱的红端移动.

光线
弯曲

我们先回到那座加速向上的电梯中,假设有一束光正好穿过一个侧面窗口水平地射进电梯内,并在极短时间内射到对面的壁上,电梯内外的物理学家对这个现象的解释也不同:

电梯外的物理学家:光射进窗口后水平地以恒定速度沿直线射到对面的壁上.由于电梯正在朝上运动,在光未碰壁而射的极短时间内,电梯已改变了位置,因此光线所射到的点不会与入射的点恰好相对,而会稍微低一些.尽管这个差异是极小的,可总是存在的,因此相对于电梯而言,光束不是沿着直线传播,而是沿着稍微弯曲的路径传播(图7).

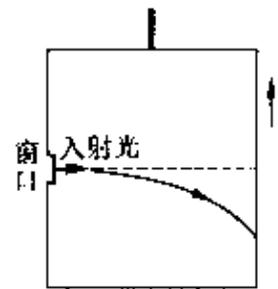


图7 加速电梯中光线的弯曲

电梯内的物理学家:电梯不存在加速运动,只有引力场作用.电梯内一切物体都受到引力场的作用,光也不例外.光束虽然没有重量,但它具有能量,而一定的能量与一定的质量相当($E = mc^2$).由于惯性质量与引力质量是等价的,所以任何具有惯性质量的物体,都受到引力场的吸引.光束也不例外,于是因引力作用而使它的路径变得弯曲起来了.

这也是爱因斯坦的一个理想实验.这个实验不仅又一次指出了引力场与系统的加速运动在物理上的等价,更重要的是指出了光会受引力场的作用而发生弯曲.由此可以推断,光经过巨大质量的天体(如太阳)附近时也必然会受到影响(图8).

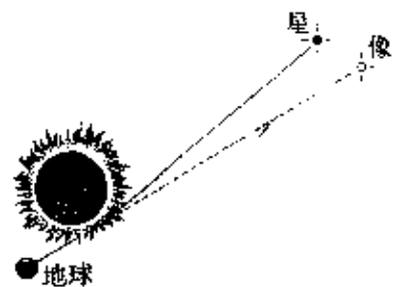


图8 星光在太阳引力场中的偏斜

爱因斯坦根据广义相对论精确地算出,光线经过太阳表面附

近,会产生 $1.75''$ 的偏转,而用经典牛顿引力理论算出的偏角仅为 $0.87''$. 爱因斯坦的这一预言引起了全世界物理学家极大的兴趣,也是对广义相对论最明确和最严峻的考验.

由于白天天空的背景太亮看不到星光,要求同时可以在天空看到太阳与星星,只有在日全食时最为理想.因此,爱因斯坦建议在日全食时,把最靠近遮暗了太阳面的那些星拍成照片,把它与别的时候拍摄的这些星的照片相比较进行检验.

1919年5月29日,爱丁顿(A. S. Eddington, 英国, 1882—1944)率领的考察队,在西非几内亚湾的普林西比岛进行日食观测.结果表明,星光在太阳引力场中的偏斜度平均为 $1.64''$. 由于仪器精度的限制,可以说,这个结果与爱因斯坦的预言非常相符.消息传出后,全球为之轰动.当爱因斯坦听到爱丁顿的观测结果时,他说:“我没有期待过其他的结果.”美国著名哲学家怀特海(A. N. Whitehead)高度评价了这次预言的证实:“一场伟大的思想领域内的探险终于安然结束了.”

后来人们采用无线电望远镜作了进一步精确的验证.1969年以后,世界各国有好几个研究小组对类星体 3C279 和 3C273 发出的 3.7 厘米和 11.1 厘米波长的无线电波经过太阳表面时的偏折作了测量,又一次证实了广义相对论的结果.

· · · · · ·
· 无尽的 ·
· 启 示 ·
· · · · · ·

从伽利略——牛顿建立经典力学体系以来的几百年中,一代又一代的物理学家对于引力质量与惯性质量相等的事实都熟视无睹,谁也没有去作深层次的思考.惟有爱因斯坦,慧眼识珠,从这样一个人见人知的平常的事实出发,提出了一个等效原理,并以此为基点建立了一个深刻的理论.爱因斯坦说:“在引力场里,一切物体都以同一加速度下落,或者说——这不过是同一事实的另一种讲法——物体的引力质量同

惯性质量在数值上是彼此相等的。这种数值上的相等，暗示着性质上的相同。引力同惯性能够是同一的吗？这个问题直接导致了广义相对论。”爱因斯坦所发现的定律，已在人类探求物质世界真相的缓慢奋斗中，占有非常重要的地位，并且其影响已远远超过科学范围，引起了对传统的宇宙观的彻底革命。

一个在物理学史上自牛顿以来最伟大的理论，却植根于一个人所熟知的质量等价的事实，由一个普通的等效思维方法发扬光大而诞生出来。仅此一点，已足以给后人无尽的启示了。

二、中学物理中常见的等效变换

爱因斯坦用引力场与加速系统之间的互相置换,就是一种等效变换的思维方法.这种思维方法在分析、研究中学物理问题中极为常用,它的含义也非常宽泛.只要研究对象(物理量、物理过程或系统)在某一方面的作用效果与另一个对象所起的作用效果相同,就可以在相互间进行变换.

根据中学物理中常用的各种等效变换,概括起来,可以把它们分为以下五种典型方法.

1. 组合等效法

用一个物体代替组合起来的其他几个物体,或把一个物体分割成许多物体而保持效果不变的方法,我们把它们统称为组合等效法.这种等效方法,形式上是较简单的合并或分割,等效量的计算往往直接从定义出发求得.常常用于有标量特性的物理量的情况.例如:

几个物体的总质量等于各个物体的质量之和,因此,用一个等于各物体质量之和的“大物体”,可以代替原来几个“小物体”的某种作用,就是一种简单的等效方法.即等效质量为

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i.$$

几个电阻串联或并联后的总电阻(等效电阻),几个相同电池串联或并联后的总电动势(等效电动势)和总内阻(等效内阻)等,都是组合等效.此外,还有其他一些情况.

等效劲度系数 用几根弹簧并联或串联组合起来,它的作用可以被单独一根弹簧所取代,这单独一根弹簧的劲度系数就称为那儿根并联或串联弹簧的等效劲度系数.

(1) 并联弹簧的等效劲度系数

先讨论每根弹簧都相同的情况.如图9所示,设有三根弹簧并联,每根弹簧的劲度系数为 k_0 .当每根弹簧两端受拉力 F_0 后,平衡时每根弹簧中的弹力大小 $f_0 = F_0$,每根弹簧的伸长量

$$\Delta x_0 = \frac{f_0}{k_0}.$$

整个并联弹簧组两端受力 $F = 3F_0$.当与它等效的一根弹簧两端也受力 $F' = 3F_0$ 后,平衡时,这根弹簧中的弹力 $f' = 3f_0$,要求其伸长量也为 Δx_0 ,则其劲度系数

$$k_{\text{并}} = \frac{f'}{\Delta x_0} = \frac{3f_0}{\Delta x_0} = 3k_0.$$

当有 n 根相同的弹簧并联时,可推知并联弹簧组的等效劲度系数

$$k_{\text{并}} = nk_0.$$

即 n 根相同弹簧并联后的等效劲度系数等于一根弹簧劲度系数的 n 倍.因此,并联弹簧的劲度系数加大,要使它伸长或压缩更不容易了.

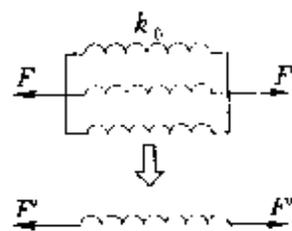


图 9

如果 n 根长度相同、劲度系数依次为 k_1, k_2, \dots, k_n 的不同弹簧并联组合起来, 设并联弹簧组两端受力 F 后, 每根弹簧伸长量相同, 均为 Δx_0 , 则每根弹簧中的弹力分别为

$$f_1 = k_1 \Delta x_0, f_2 = k_2 \Delta x_0, \dots, f_n = k_n \Delta x_0.$$

要求与这并联组合弹簧等效的一根弹簧受力 F 时伸长量也为 Δx_0 , 则其弹力 f 应满足条件

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n = \sum_{i=1}^n f_i.$$

因此其劲度系数应为

$$k_{\#} = \frac{f}{\Delta x_0} = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{\Delta x_0} = k_1 + k_2 + \dots + k_n,$$

或者

$$k_{\#} = \sum_{i=1}^n k_i.$$

即同样长度、不同劲度系数的弹簧并联后的等效劲度系数等于各弹簧劲度系数之和。

(2) 串联弹簧的等效劲度系数

同样先讨论每根弹簧都相同的情况, 如图 10 所示有三根弹簧串联, 每根弹簧的劲度系数为 k_0 . 当两端受拉力 F 后, 平衡时每根弹簧内的弹力大小 $f_0 = F$, 每根弹簧的伸长量均为

$$\Delta x_0 = \frac{f_0}{k_0}.$$

三根串联弹簧总的伸长量 $\Delta x = 3\Delta x_0$. 当与它等效的一根弹簧受力 F 后, 平衡时其弹力 $f = F$, 要求其伸长量也为 Δx , 则其劲度系数应为

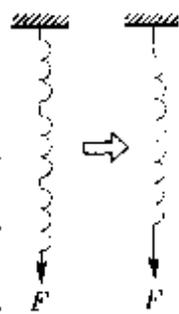


图 10

$$k_{\text{串}} = \frac{f}{\Delta x} = \frac{F}{3\Delta x_0} = \frac{f_0}{3 \cdot \frac{f_0}{k_0}} = \frac{k_0}{3}.$$

即等于原来一根弹簧劲度系数的 $1/3$ 。

当有 n 根相同的弹簧串联时,可以推知,串联弹簧组的等效劲度系数

$$k_{\text{串}} = \frac{k_0}{n}.$$

即 n 根相同的弹簧串联后的等效劲度系数等于原来一根弹簧劲度系数的 $\frac{1}{n}$ 。

如果 n 根劲度系数分别为 k_1, k_2, \dots, k_n 的不同弹簧串联组合起来,则当两端受力 F 达平衡后,每根弹簧中的弹力 $f = F$,但其伸长量依次为

$$\Delta x_1 = \frac{f}{k_1}, \Delta x_2 = \frac{f}{k_2}, \dots, \Delta x_n = \frac{f}{k_n},$$

总的伸长量

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n = f \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \right).$$

与串联弹簧组等效的单独一根弹簧受力 F 后,其伸长量也为 Δx ,由于平衡时的弹力 $f = F$,则其劲度系数

$$k_{\text{串}} = \frac{f}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}},$$

或者
$$\frac{1}{k_{\text{串}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}.$$

即 n 根劲度系数不等的弹簧串联后的等效劲度系数的倒数,等于各根弹簧劲度系数的倒数之和.由此可见,串联得越多,等效劲度

系数越小,并且比其中最小的劲度系数还要小.

**等效
电容**

几个电容并联或串联组合后,它的作用可以被单独一个电容所取代,这单独的一个电容就称为那几个并联或串联电容的等效电容.

(1) 并联电容的等效电容

先讨论相同电容并联的情况.如图 11 所示,设有三个电容并联,其电容量均为 C_0 ,则当两端电势差为 U 时,每个电容的带电量

$$Q_0 = C_0 U,$$

整个并联电容器组的带电量 $Q = 3Q_0$. 当与它等效的单独一个电容带电量 $Q' = Q = 3Q_0$ 时,要求其两端电势差也为 U ,则其电容量为

$$C_{\text{并}} = \frac{Q'}{U} = \frac{3Q_0}{U} = 3C_0.$$

当有 n 个相同电容并联时,可推知并联电容器组的等效电容

$$C_{\text{并}} = nC_0.$$

即相同电容器并联后的等效电容,等于一个电容器电容的 n 倍. 因此,并联后,电容量增大,相当于正对面积增大.

如果 n 个电容量分别为 C_1, C_2, \dots, C_n 的电容器并联起来,充电后当两端电势差为 U 时,每个电容的带电量依次为

$$Q_1 = C_1 U, Q_2 = C_2 U, \dots, Q_n = C_n U.$$

要求与这并联电容器组等效的单独一个电容带电量为

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) U,$$

且其两端电势差也为 U ,则其电容量必然应等于

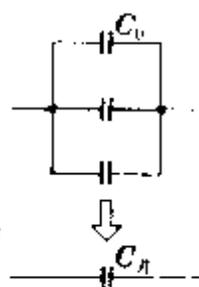


图 11

$$C_{\#} = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i.$$

即 n 个并联电容器组的总电容(等效电容)等于各并联电容的容量之和. 所以, 并联电容器越多, 等效电容越大.

(2) 串联电容的等效电容

这里直接从一般情况进行讨论. 如图 12 所示, 设有三个容量分别为 C_1 、 C_2 、 C_3 的电容串联, 充电后每个电容器带电量相等, 设均为 Q_0 . 每个电容器两端的电势差则依次为

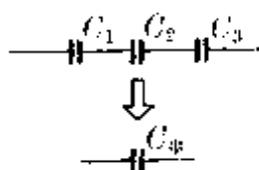


图 12

$$U_1 = \frac{Q_0}{C_1}, U_2 = \frac{Q_0}{C_2}, U_3 = \frac{Q_0}{C_3}.$$

整个串联电容器组两端的电势差为

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = Q_0 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right).$$

要求与这个串联电容器组等效的单独一个电容器的带电量为 Q_0 时, 两端电势差也为 U , 则其等效电容

$$C_{\#} = \frac{Q_0}{U} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}.$$

或者
$$\frac{1}{C_{\#}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

当 n 个不同电容串联时, 可以推知其等效电容

$$C_{\#} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}},$$

或者
$$\frac{1}{C_{\#}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$

即串联总电容(等效电容)的倒数等于各串联电容的倒数之和,所以,电容器串联得越多,等效电容量越小,并且比其中最小的电容量还要小.

组合等效法的范围很广泛,除了上面这些典型情况外,根据处理具体问题的需要,可以有不同的形式.

例如,如图 13 所示,在一个半径为 R 的圆柱形区域内,存在着磁感强度为 B 的匀强磁场,其方向与圆柱的轴线平行.一根长 $l = R$ 的细金属棒与磁场方向垂直放在磁场区域内,两端恰在圆周上.当磁



图 13

感强度的大小以 $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ 的速率增加时,为了计算这根金

属棒两端的电势差,可以再用另外五根相同的棒与它组合成一个正六边形,显然,每一根棒中产生的感应电动势应该等于整个六边形中产生电动势的 $1/6$,即

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ab} &= \frac{1}{6} \varepsilon = \frac{1}{6} \cdot \frac{S \Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{6} \cdot \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \right) \frac{\Delta B}{\Delta t} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}. \end{aligned}$$

它就等于 ab 棒两端的电势差.

这也是一种组合等效法.

2. 叠加等效法

一个量对物体的作用能代替其他几个量对物体的共同作用,并且需用平行四边形法则确定等效量的方法,我们把它称为叠加等效法.这种等效变换常常用于有矢量特性的物理量,如力、位移、速度、加速度、电场强度、磁感强度等的分解与合成法则,都可归纳为叠加等效变换.

叠加等效变换的鲜明特点是“方向性”，即等效量不仅有大小，而且有方向，并且它的大小不仅与每一个分量的大小有关，还与各个分量的作用方向有关。

两个量叠加 最简单的情况是两个量的等效叠加。如图 14 所示，在空间同一点 O 作用着大小、方向不同的两个矢量 A_1 、 A_2 ，它们的夹角为 θ 。那么与这两个矢量在该点的作用等效的矢量 A 可用这两个矢量为邻边的平行四边形对角线表示，即等效矢量（合矢量）的大小为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\theta}.$$

它与其中矢量 A_2 的夹角设为 φ ，则

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\theta}{A_2 + A_1 \cos\theta}.$$

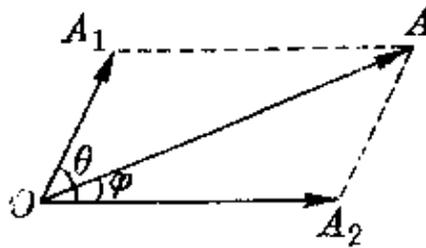


图 14

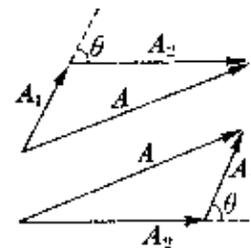


图 15

这个平行四边形法则也可演变成三角形法则：如图 15 所示，按照原来 A_1 、 A_2 的作用方向和大小，首尾相接，则连接始、末两端完成封闭三角形的有向线段就表示它们的等效矢量（合矢量）。

几个量叠加 几个同类矢量叠加时，可依次应用平行四边形法则，求出它们的等效量，或者采用把三角形法推广为多边形的方法。

如图 16(a) 所示，设空间 O 点同时作用着 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 四个矢量。可选取其中任何一个矢量（如 A_1 ）为基准，按照原来各个量

的作用方向和大小,依次首尾相接,则最后完成封闭多边形的有向线段就代表它们的等效矢量,如图 16(b)所示.

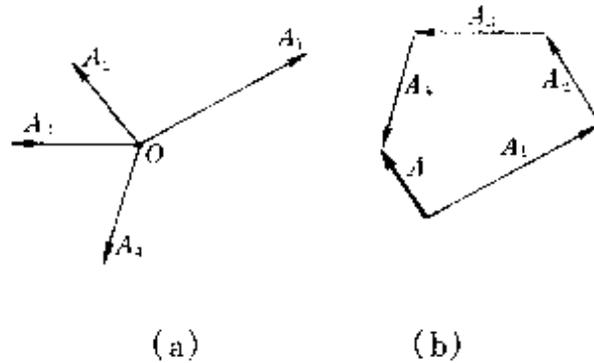


图 16

一个量的分解

运用同样的平行四边形法则也可把一个矢量分解成与它等效的两个分量.不过,这种时候,只有满足一定的条件才有确定的解.

(1) 已知两个分量的方向

如图 17 所示,已知矢量 A 和它的两个分量的作用方向 OB 、 OC .则由矢量 A 的末端分别向 OB 、 OC 两方向作平行线,即可构成一个平行四边形,从而得出它的两个等效分量 A_1 、 A_2 .

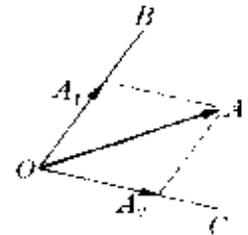


图 17

(2) 已知一个分量的大小及另一个分量的方向

如图 18 所示,已知矢量 A 和它的一个分量 A_1 的大小及另一个分量 A_2 的作用方向 OB .则以矢量 A 末端为圆心、以分量 A_1 的长度为半径作弧与 OB 相交,即可找出另一个分量 A_2 的大小.这种情况下,一般会有两解,如图中得两组分量 $A_1'A_2'$ 、 $A_1''A_2''$.但也

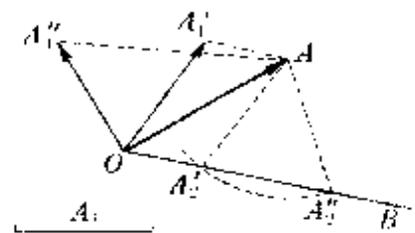


图 18

可能只有一解或无解。

(3) 已知两分量的大小

如图 19 所示, 已知矢量 A 和它的两个等效分量 A_1 、 A_2 的大小, 则可以以矢量 A 的始端和末端分别为圆心, 以 A_1 、 A_2 为半径作弧, 相交即可画出平行四边形, 确定两等效分量 A_1 、 A_2 的作用方向。

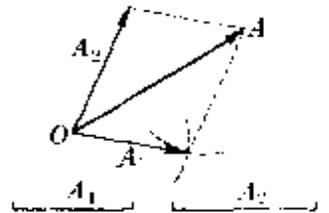


图 19

3. 整体等效法

对某个物体(或某种系统)作整体性的等效代换的方法, 我们把它称为整体等效法。这种等效变换较为广泛, 等效量的确定往往是从整个物体(或整个系统)对外部的作用效果(或影响)出发得出的。

如图 20 所示, 用两根长为 l 的细线悬挂一个质量为 m 的小球, 每根细线与水平面夹角为 α , 被这两根细线制约的小球在垂直于纸面的平面内前后振动, 可以等效于用一根长为 $l' = l \sin \alpha$ 的细线悬挂这个小球在同一平面内的振动。这也就是说, 整个双线摆可以等效于一个单摆。

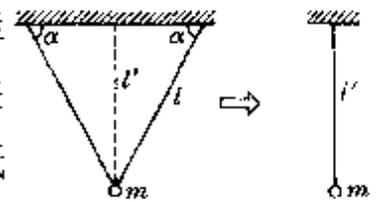


图 20

整体等效法在电路问题中极为常用, 请看下面的例子。

等效
电压源

如图 21(a) 所示的电路, 电源电动势为 \mathcal{E} 、内阻为 r , 外电路中串联着两个电阻 R_0 与 R_f 。根据闭合电路欧姆定律, 通过电路的电流强度为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_0 + R_f}$$

外电阻 R_f 两端的电压为

$$U_f = IR_f = \frac{R_f \mathcal{E}}{r + R_0 + R_f}$$

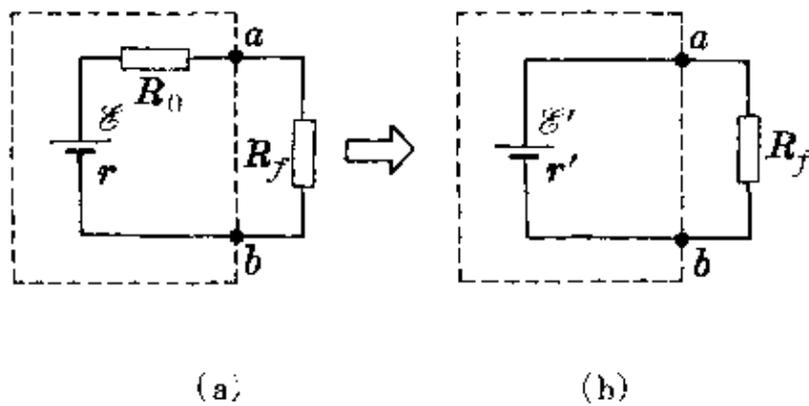


图 21

如果只需要研究电阻 R_f 上的电压与通过 R_f 的电流,也可把图 21(a)中虚线部分等效成一个新的电源,如图 21(b)所示.这个等效电源的电动势 \mathcal{E}' 就是负载电阻 R_f 断开时从两输出端 a 、 b 测得的电压,即 $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$;这个等效电源的内阻 r' 就是把电动势短路(保留内阻)从一个输出端到另一输出端的总电阻,即 $r' = r + R_0$.由图 21(b)所画出的等效电源,同样可算出通过负载电阻 R_f 的电流和 R_f 上的电压,即

$$I = \frac{\mathcal{E}'}{r' + R_f} = \frac{\mathcal{E}}{r + R_0 + R_f}$$

$$U_f = IR_f = \frac{R_f}{r + R_0 + R_f} \mathcal{E}$$

一般情况下,任何一个包含电源的、有两个输出端的网络(称有源二端网络),对“外部”而言,可以等效于一个电源和一个内阻的串联电路,这个等效电源电动势,就等于外电路开路时,在两输出端测得的电压;这个等效电源的内阻,就是当原网络中各电动势短路而保留其内阻时,在两输出端测得的电阻,可表示成如图 22 所示.这个规律称为戴维宁定理或等效发电机原理.

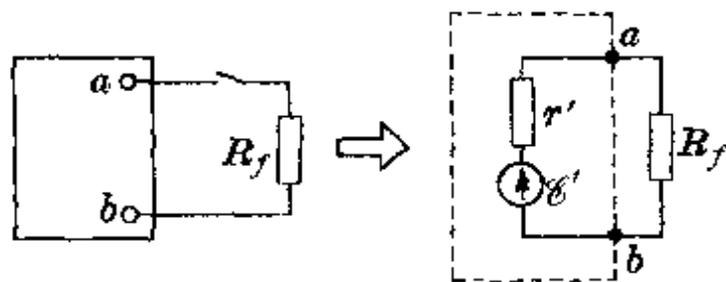


图 22

利用戴维宁定理,可以对一些复杂电路加以简化,便于进行电路计算,在直流电路和电子技术中有广泛的应用。

等效电流源 如图 23(a)所示电路[即图 21(a)的电路],也可把虚线框中的这一部分等效成一个恒流 I' 和一个电阻 r' 的并联电路,如图 23(b)所示。

这个恒流 I' 等于原来的有源二端网络当外电路电阻全部短路时,通过外电路的电流;这个并联电阻 r' 等于原有的有源二端网络中的电动势去掉后(内阻保留),两引出端之间的总电阻(它与

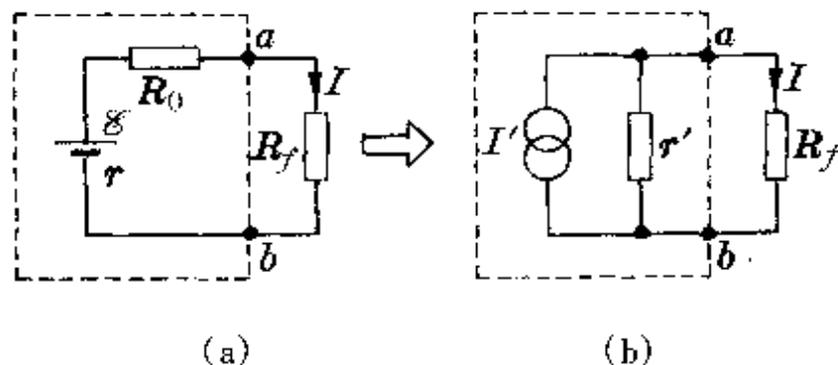


图 23

等效电压源内阻相同)。在图 23(a)中将 R_f 短路得恒流 I' , 将 R_f 断开、电池短路(r 保留)得并联电阻 r' , 其值分别为

$$I' = \frac{E}{r + R_0}, r' = r + R_0.$$

这个规律称为诺尔顿定理,它很容易证明:

设图 23(b)中通过 R_f 的电流为 I , 由并联分流规律得

$$I = \frac{r'}{r' + R_f} I' = \frac{r + R_0}{r + R_0 + R_f} \cdot \frac{I_0}{r + R_0} = \frac{I_0}{r + R_0 + R_f},$$

这个结果跟图 23(a) 中用闭合电路欧姆直接求得 R_f 中的电流一样, 可见, 上面的等效是正确的.

等效电流源法在求解直流电路计算问题, 尤其是晶体管电路中同样有着广泛的应用.

星形——三角形
电路变换

将三个电阻接成如图 24(a)、(b) 所示的形状, 分别称为星形电路和三角形电路, 统称为无源三端网路. 这三个电阻之间有如下的等效关系:

当星形电路换成三角形电路时:

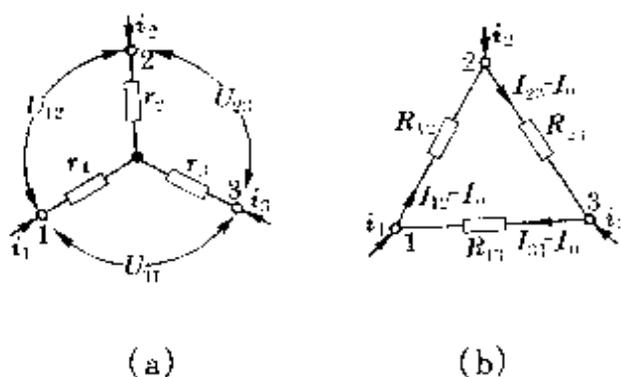


图 24

$$R_{12} = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_3}, R_{23} = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_1},$$

$$R_{31} = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_2}.$$

当三角形电路换成星形电路时:

$$r_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}, r_2 = \frac{R_{21} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}},$$

$$r_3 = \frac{R_{31} R_{32}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}.$$

证明如下:设在三角形接法中通过各支路电流分别为 $(I_{12} - I_0)$ 、 $(I_{23} - I_0)$ 、 $(I_{31} - I_0)$;星形接法中三点间电压分别为 U_{12} 、 U_{23} 、 U_{31} .欲使两接法相等,则三点间的电压和流过三点的电流,都必须相等.三角形接法为一闭合无源电路,三电压之和为零,即

$$U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0,$$

流过三节点的电流,彼此应相应地等效,故

$$i_1 = I_{12} - I_{31}, i_2 = I_{23} - I_{12}, i_3 = I_{31} - I_{23}.$$

在三角形接法中,由欧姆定律得

$$U_{12} = (I_{12} - I_0)R_{12}, U_{23} = (I_{23} - I_0)R_{23},$$

$$U_{31} = (I_{31} - I_0)R_{31}.$$

将上述三式相加

$$\begin{aligned} U_{12} + U_{23} + U_{31} &= I_{12}R_{12} + I_{23}R_{23} + I_{31}R_{31} \\ &\quad - I_0(R_{12} + R_{23} + R_{31}) = 0, \end{aligned}$$

于是得

$$I_0 = \frac{I_{12}R_{12} + I_{23}R_{23} + I_{31}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{I_{12}R_{12} + I_{23}R_{23} + I_{31}R_{31}}{\sum R}.$$

把这个结果代入三角形接法的电压表达式,得

$$U_{12} = \frac{R_{12}R_{31}}{\sum R}i_1 - \frac{R_{12}R_{23}}{\sum R}i_2,$$

$$U_{23} = \frac{R_{12}R_{23}}{\sum R}i_2 - \frac{R_{23}R_{31}}{\sum R}i_3,$$

$$U_{31} = \frac{R_{23}R_{31}}{\sum R}i_3 - \frac{R_{12}R_{31}}{\sum R}i_1.$$

若从星形接法考虑,按欧姆定律,得

$$U_{12} = r_1 i_1 - r_2 i_2, U_{23} = r_2 i_2 - r_3 i_3, U_{31} = r_3 i_3 - r_1 i_1.$$

比较上述两式得从三角形换成星形时等效电阻

$$r_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{\sum R}, r_2 = \frac{R_{21}R_{23}}{\sum R}, r_3 = \frac{R_{31}R_{32}}{\sum R}.$$

如已知星形接法中各电阻 r ,把三角形接法中各电阻作为未知数,即可

得由星形换成三角形时的等效电阻计算式：

$$R_{12} = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_3}, R_{23} = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_1},$$

$$R_{31} = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_2}.$$

4. 运动等效法

用一种(或两种)运动代替另一种运动保持效果不变的方法,我们称它为运动等效法.

例如,研究一个做变速直线运动的物体在某段时间内的位移,可以把它等效成一个匀速直线运动,这个匀速直线运动的速度就等于原来变速直线运动的平均速度,这两个运动在同一时间内的位移相同.在 $v-t$ 图上,相当于用一个矩形面积代替原来曲边四边形的面积,如图 25 所示.

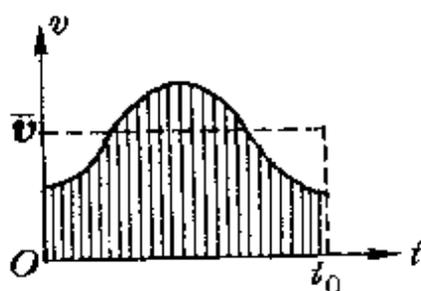


图 25

通常所说的运动的合成与分解原理,就是一种运动等效变换.

例如,在地面附近平抛物体的运动,阻力不计时,水平方向不受外力,竖直方向仅受重力作用,因此可以把平抛物体沿抛物线的运动等效成沿水平方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动.

斜抛物体的运动,不计阻力时也是仅受重力作用的匀变速曲线运动,同样可以把它等效成两个较简单的运动,并且,根据需要可以有不同的等效方法.

当物体在平面上斜抛时,常见的有两种方法:

①把斜抛运动等效成水平方向的匀速直线运动和竖直方向的

上抛运动.

如图 26 所示,以抛出点 O 为原点建立直角坐标系,沿 x 方向和 y 方向两个等效运动的方程为

$$x = v_0 \cos t,$$

$$y = v_0 \sin at - \frac{1}{2} g t^2.$$

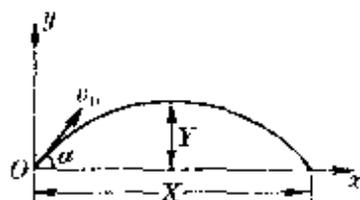


图 26

由 $y = 0$ 得斜抛物体的运动时间

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

把这个结果代入上面的运动方程,即得斜抛物体的水平射程 X 和射高 Y ,即

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad Y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

由 x 、 y 两方向的运动方程中消去 t ,即得轨道方程

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

这是一个抛物线方程,因此斜抛物体的运动轨迹是一条抛物线.

②把斜抛运动等效成沿抛射方向的匀速直线运动和竖直向下的自由落体运动.

如图 27 所示,设不计重力时,物体抛出后沿 v_0 方向做匀速直线运动,经时间 T 后运动到 A 点,由于受重力作用,在同一时间内物体下落距离 $h = \frac{1}{2} g t^2$,结果物体便沿着抛物线运动到 B .

由图 27 很容易算出:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{\frac{1}{2} g T^2}{v_0 T}, \quad \cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{X}{v_0 T},$$

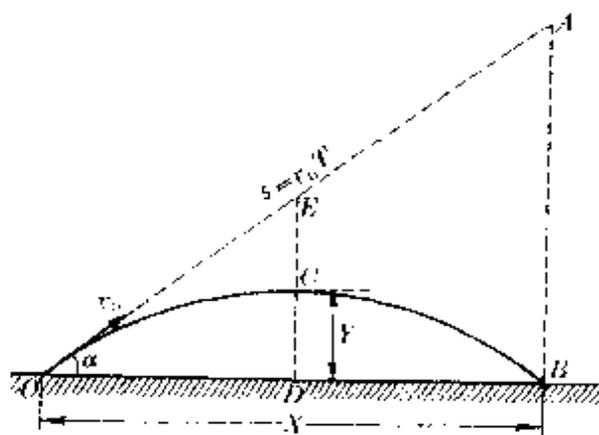


图 27

由此即得斜抛物体的运动时间 T 和水平射程 X 分别为

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, \quad X = v_0 T \cos \alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

设抛物线最高点为 C , 它对应于 OA 直线上 E 点, 由对称性知, 从抛出到运动至最高点的时间为 $\frac{T}{2}$, 则

$$EC = \frac{1}{2} g \left(\frac{T}{2} \right)^2$$

由 $\triangle OAB \sim \triangle OED$, 即得射高

$$\begin{aligned} Y = ED - EC &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g T^2 \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{T}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{8} g T^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{aligned}$$

这种等效运动比上面的直观, 便于理解, 但无法直接给出轨道方程.

当物体在斜面上斜抛时, 也可等效成两个匀变速直线运动.

如图 28 所示, 设斜面倾角为

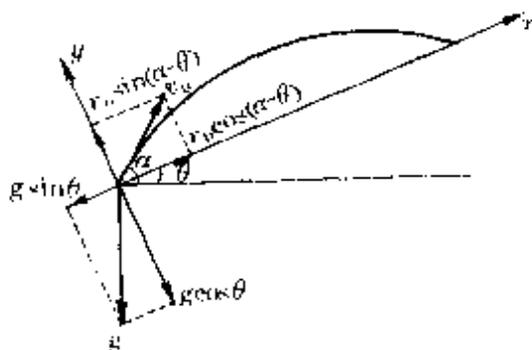


图 28

θ , 发射方向与水平方向间夹角为 α , 沿斜面向上和垂直斜面向上分别为 x 、 y 轴的正方向建立直角坐标系, 并把初速度 v_0 和重力加速度 g 沿两坐标轴分解. 于是, 原来沿斜面向上的斜抛运动就可以等效成沿着斜面方向和垂直斜面方向的两个匀减速运动, 其位移方程分别为

$$x = v_0 \cos(\alpha - \theta)t - \frac{1}{2} g \sin\theta t^2,$$

$$y = v_0 \sin(\alpha - \theta)t - \frac{1}{2} g \cos\theta t^2.$$

由 $y = 0$ 得斜抛物体的运动时间

$$T = \frac{2v_0 \sin(\alpha - \theta)}{g \cos\theta}.$$

以 T 和 $T/2$ 分别代入 x 、 y 的表达式, 即得相对于斜面的射程和射高

$$s = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin(\alpha - \theta)}{g \cos^2\theta}, H = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha - \theta)}{2g \cos\theta}.$$

若物体由斜面上向下抛射时, 可根据同样道理确定与它等效的运动.

5. 过程等效法

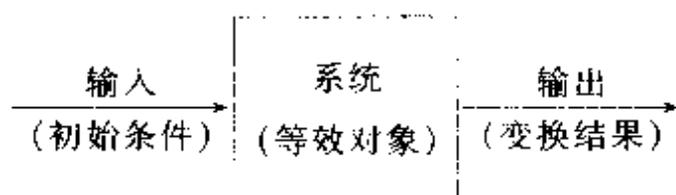
在许多问题中, 当不需涉及物体从一个状态到另一个状态所经过的细节, 只需考虑状态变化的最终效果时, 我们就可以用另外一个过程代替原来的过程而保持最终效果不变. 这种等效方法, 称为过程等效法.

例如, 我们用加热的方法使一个铁块的温度升高, 也可以改用将铁块不停地摩擦通过做功的方式使它升高到同样的温度. 加热是一个热传递过程, 它是通过分子间的相互作用, 将分子的无规则

运动的能量由一个物体转移到另一个物体；或由物体的一部分转移到另一部分，一般并不发生宏观的位移。做功是通过物体间有宏观的相对位移，使物体的机械能转化为系统分子的无规则运动的能量的过程。这就是我们常说的改变内能的两种途径。但事后我们仅从铁块的温度变化上将无法分辨使铁块温度升高究竟采用了哪一种方法，因为两者可达到相同的效果。英国物理学家焦耳正是从这种等效性上对能的转化逐渐有了更深层次的认识。

过程等效法在气体问题的研究中应用很普遍。一定质量理想气体在两个平衡态之间所遵循的变化规律，与它所经历的中间过程无关，于是我们可以作多种假设，简化对问题的研究。

上面，我们就中学物理中等效思维的常用情况分成五类，但必须注意，这种分类仅就某一侧面而言，并不是惟一的。如果我们把被等效的对象（无论是一个物体或一物体组，或是它们发生的运动、进行的某个过程，形成的某种装置等）看作一个系统，把被等效对象的初始条件看作输入讯号，等效变换后的结果看作输出讯号。那么，可以把上述不同情况的等效变换概括地表示如下：



因此，重要的是把握等效方法的精髓——效果相同，实际应用中可以交织运用多种等效方法，绝对不能囿于某种机械的划分。

三、运用等效方法的基本原则

“等效”是一种思维方法，也可作为一种分析、研究问题的手段，运用上非常灵活，它没有刻板的程序和模式，针对不同的具体问题，需要从不同的角度去建立和寻觅其中的等效关系，但不论采用怎样的一种等效变换，它们的基本原则是相同的。

1. 惟一的要求——保持效果相同

保持“效果”相同，是等效的灵魂，也是惟一的要求或准则。

譬如，随着宇航技术的发展，宇宙科学家目前正在积极酝酿一个宏伟的规划——建设一座月亮城，并预计到 2050 年，会拥有 5000—10000 的居民。由于月球上的重力只有地球的 $1/6$ ，为了解决月球上的失重问题，就需要创建一个大气压的人造重力环境，也就是需建立一个与生活在地球上等效的人工重力场，这样，月球居民才能正常生活与工作。今后，人们进一步向宇宙深处进军时，还必须在太空建设供人类居住的基地——太空城，同样需要形成一个与地球等效的生活环境。宇宙科学家已对未来的太空城构思了一个美丽的轮廓——未来的太空城外壳是用高强度的金属板制成的、直径约 1600 米的大圆环，远看像一个巨大的车轮，“轮胎”是空心的，内部直径约 150 米，是太空城的生活区，可供 1 万人居住。圆环每分钟绕中心轴自转一周，使环的外缘产生与地面重力等效的

人造重力,因此太空城的居民,不会像宇航员那样飘浮在空中,而是结结实实地踩在“地上”.圆环的内缘是太空城的“天”,有一排排拱形的玻璃窗,用来接受圆环外面巨大的凹面反光镜反射的太阳光,给太空城带来光明和温暖.太空城的上地当然是人造的,中央是一条环形马路,两边绿树成荫,里面露出不同颜色的住宅、商店、咖啡屋、运动场,还有起伏的青山、潺潺的小溪和鲜花盛开的花园……

显然,无论是月亮城或太空城,基本的一点都必须建立一个与地球重力场等效的人工重力环境.

必须注意,等效变换时的保持“效果”相同,仅是对所研究的问题而言的,不是指它的全部,更不能认为等效对象与原对象“全同”.在宇航技术中的人工重力场不“全同”于地球,这是显而易见的.在其他物理问题中同样如此.

例如,一个半径为 R 、电量为 $+Q$ 的均匀带电导体球壳,对它外部($r \geq R$)空间任一点来说,它的效果与一个位于球心、电量为 $+Q$ 的点电荷等效,其场强分布及电势分布两者完全相同.因此,我们计算这个球壳对球外某处的试验电荷的作用或计算球外某处试验电荷所具有的电势能时,就可以把它作为一个点电荷看待,如图 29 所示.但并不是说,这个球壳永远可以被这个点电荷所代替,当研究球内($r < R$)的场强分布及电势分布时,两者不再等效.

从效果相同寻找等效关系,确定等效对象(物理量或物理过程、物理系统),在中学物理中主要有以下三种情况.

瞬时效果 这种情况是针对研究对象某一瞬间特性(或各个瞬间特性)去确定等效对象.

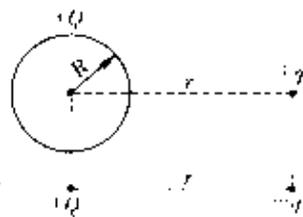


图 29

先来考察一个实验：在一个水平圆盘上竖立一根细棒，棒端有一小球，用电动机带动水平圆盘做匀速圆周运动(图 30)，则小球也将以一定半径 R 在水平面内做匀速圆周运动。另外，在水平圆盘左方，跟小球做匀速圆周运动的同一水平面内，垂直小球做圆运动的水平直径装置一个弹簧振子，并用一束水平向右的平行光照射弹簧振子和小球。调整水平圆盘的转速，可使小球做圆运动时在直径上的投影的运动与水平弹簧振子的运动同步，即每一瞬间做圆运动的小球和弹簧振子在圆盘右方竖直屏上的投影重合，如图 31 所示。

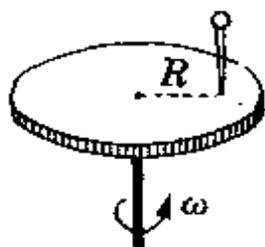


图 30

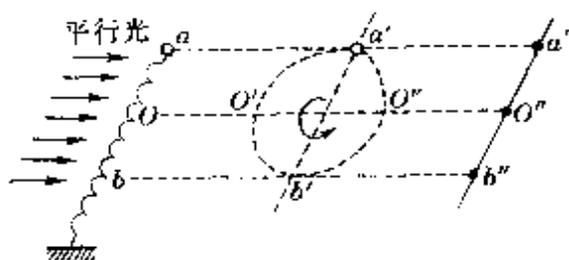


图 31

设弹簧振子从极端位置 a 开始振动，此时做圆运动的质点从直径的一端 a' 开始沿逆时针方向转动，它们在右方竖直屏上的投影点为 a'' 。

经时间 $t = T/4$ (T 为弹簧振子的振动周期)，振子到达平衡位置 O ，调整小球的转速，恰使它转过 $1/4$ 周到达 O' ，则它们的投影点重合在 O'' 点。

经时间 $t = T/2$ ，振子到达另一方的极端位置 b ，小球运动到直径的端点 b' ，它们的投影又重合在 b'' 点。

此后，弹簧振子在振动过程中的每一瞬间都和做匀速圆周运动的小球在直径上的投影点重合。

由此可见，一个简谐运动可以等效于一个匀速圆周运动在直

径上的投影点的运动.如果我们把地球看作一个均匀的球体,并设想正对南北极开凿一条隧道,那么从北极洞口轻轻放下一个小球,它在洞内的运动等效于沿地球表面飞行的人造地球卫星在地轴上投影点的运动.

我们从瞬时效果上建立了这个等效运动的关系后,很容易从匀速圆周运动在直径上的投影确定做非匀变速运动(简谐运动)的许多特征.有关对应量如下表所示:

简谐运动	匀速圆周运动
振幅 A	半径 R
周期 T ($T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$)	周期 T ($T = \frac{2\pi R}{v}$)
平衡位置	水平直径(x 轴)两端点
极端位置	垂直直径(y 轴)两端点
振动过程中的位移	质点在 y 轴上的投影
振动中的速度	线速度在 y 轴上的投影
振动中的加速度	向心加速度在 y 轴上的投影

从瞬时效果上确定等效关系,还有许多其他问题.如图 32 所示,用两根细绳 AO 、 BO 悬挂一个质量为 m 的小球,当把 BO 绳剪断的瞬间,由于 AO 绳中张力的突变,可等效于一个振动到极端位置的单摆.前面所说的运动的合成与分解,也可以认为是瞬时意义上的等效变换.

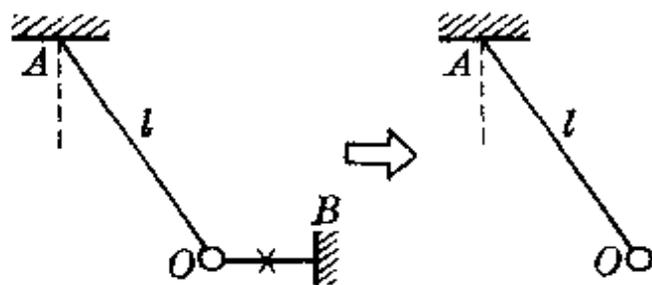


图 32

平均效果

这是从研究对象在某段时间中运动变化的平均效果去确定等效关系. 前面所说的计算某段时间内变速直线运动的位移, 可用一个匀速直线运动代替, 就是从平均效果出发的一种等效变换. 中学物理中各个部分经常遇到的平均阻力、平均压强、平均速度、平均电流、平均电动势等, 从思维方法的意义上, 都可以认为是从平均效果上作的一种等效变换.

例 1 质量为 m 的汽锤, 从高 h 处自由落下, 接触锻件后经时间 Δt 汽锤的速度降为零, 试求锻件受到的平均压力(图 33).

解答 根据汽锤接触锻件前后的动量变化, 由动量定理得锻件所受的平均压力大小为

$$\bar{F} = mg + \frac{\Delta p}{\Delta t} = mg + \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t}.$$

当 Δt 很小时, $\frac{\Delta p}{\Delta t} \gg mg$, 于是上式可写成

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t}.$$

这个平均压力所表示的物理意义, 就是把碰撞过程中锻件所受的复杂的变力(如图 34 中虚线所示)用一个恒力作等效代换(如图 34 中直线所示). 所谓效果不变, 是要求在 Δt 内直线与 t 轴间的矩形面积等于曲线下方的面积(图中划线部分).

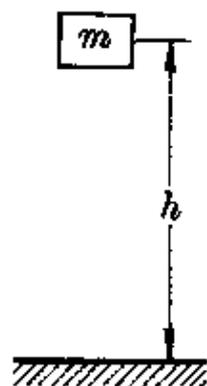


图 33

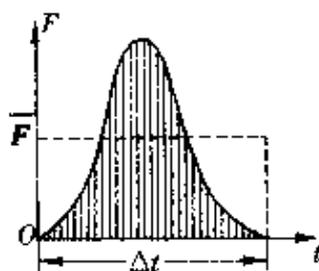


图 34

例 2 一条水坝长 $L = 200$ 米, 它的截面呈三角形, 底宽 $b = 3$ 米, 高 $H = 6$ 米, 当水深 $h = 4$ 米时(图 35), 水对坝侧壁的平均压力是多少? 取 $g = 10$ 米/秒².

解答 设侧壁浸没部分的长度是 a , 由相似三角形得

$$a = \frac{h}{H} \sqrt{b^2 + H^2} = 2\sqrt{5} \text{ 米,}$$

取 $\bar{h} = \frac{h}{2}$, $\bar{p} = \rho g \bar{h}$, 因此水对侧壁的平均压力大小为

$$\bar{F} = \bar{p}S = \rho g \bar{h} \cdot aL = 1.788 \times 10^7 \text{ 牛.}$$

这个平均压力的物理意义是容易理解的. 由于坝侧壁浸没各部分水深不同, 由水重产生的静压强也不同, 因此在不同深度处平行于坝长方向上的各狭条面积上所受的压力也不同, 如图 36 所示. 由静力学知识这些力的合力作用在液面下 $\frac{2}{3}h$ 处. 这就是说, 水对坝侧壁各处的不同压力, 可以用一个大小等于 \bar{F} , 作用在水面下 $\frac{2}{3}h$ 处的恒力代替.

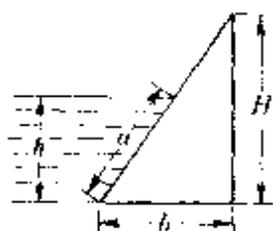


图 35

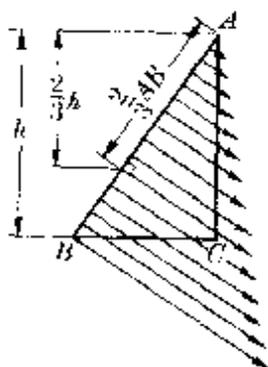


图 36

例 3 试求氢原子核外电子在基态时绕核运转的等效电流. 已知基态轨道半径 $r = 0.53 \times 10^{-10}$ 米.

解答 电子绕核运转时由库仑力作为向心力,即

$$k \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}.$$

电子绕核一周的时间 $T = \frac{2\pi r}{v}$. 由电流强度的定义式,得等效电流为

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} = \frac{e^2}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{mr^3}}.$$

代入数据 $m = 9.1 \times 10^{-31}$ 千克, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ 库, $k = 9 \times 10^9$ 牛·米²/库², $r = 0.53 \times 10^{-10}$ 米,得

$$I = 1.05 \times 10^{-3} \text{ 安}.$$

这个等效电流由计算时所依据的电流强度的定义式已显示出是从平均效果出发的.

运动电荷受洛仑兹力作用在磁场中做匀速圆周运动时,同样可从平均效果的意义上算出它所等效的电流强度.

例 4 一根长为 l 的金属棒 OA , 在垂直于磁场的平面内绕 O 为轴以角速度 ω 匀速转动, 已知磁感应强度为 B , 试求棒两端电势差.

解答 棒旋转时, 各处线速度不同, 它的大小与离转轴 O 的距离成正比, 如图 37 所示. 其平均速度

$$\bar{v} = \frac{\omega l}{2},$$

因此由切割运动产生的感应电动势

$$\mathcal{E} = Bl\bar{v} = \frac{1}{2} Bl^2 \omega.$$

它就等于棒两端的电势差 ($U_O > U_A$).

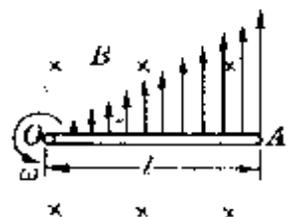


图 37

上面的计算中,我们把这根金属棒旋转时产生感应电动势的效果,用以棒的中点速度做平动的切割运动所代替.

整体效果

许多时候,也可以从研究对象总体效果出发确定等效关系,如前面所说的双线摆、等效电源以及等效电阻、等效电容等,都属于整体效果的一种等效变换.

从整体效果上确定等效关系,并不限于某种具体的结构,它可以有多种形式.

例 1 如图 38(a)所示,用两根细绳系住一重物,保持绳 OA 与天花板间夹角不变,当用手拉绳 OB ,使绳 OB 由水平状态缓缓转向竖直状态的过程中, OB 绳中的拉力如何变化?

解答 本题可以有多种解法,考虑到绳 OA 始终绷紧且与天花板间夹角保持不变,因此也可以采用一根细杆代替 OA 绳,把原题看作绕 A 为固定转动轴的问题,整体效果不变,如图 38(b)所示.

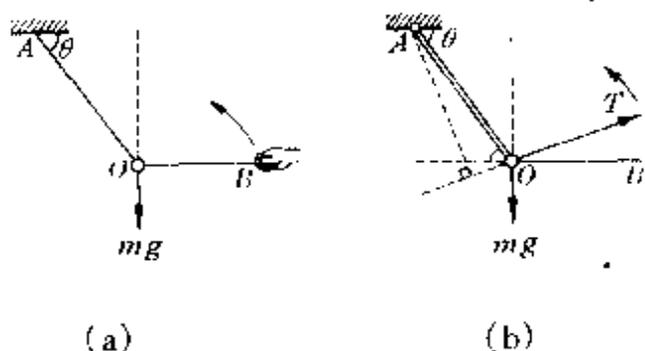


图 38

由于 OB 绳向上转动的过程中,小球重力对转轴 A 的力矩不变,由固定转动轴平衡条件可知,绳 OB 中拉力对转轴 A 的力矩大小也应不变.因为 OB 绳向上转动时,其力臂的变化是由小变大,然后再由大变小, OB 与 AO 垂直时力臂最大,所以 OB 绳中的拉力应该是先变小,再增大.

例 2 如图 39 所示,一根长为 $2l$ 的均质细链 AB 对称地挂在轻小、光滑的定滑轮上,滑轮半径相对于长度 l 极小,当受到轻微的扰动,细链脱离定滑轮时的速度多大?

解答 细链脱离滑轮时的情况,可以等效成把其中一部分(如右边半段)整体地接到另一部分下面.由这移动部分重力势能的减少转化为整个链条的动能,于是由

$$\frac{1}{2} mgl = \frac{1}{2} mv^2,$$

得链条脱离时的速度

$$v = \sqrt{gl}.$$

例3 如图40所示,已知电源电压 $u = 220\sqrt{2}\sin 314t$ 伏, D 为理想二极管,则电阻 R 两端电压的有效值为

- A. 220 伏. B. 110 伏.
C. 156 伏. D. 312 伏.

解答 有效值是根据热效应定义的,这是某段时间内流经电阻的电流做功的整体效果的反映.设电阻 R 两端电压的有效值为 U' ,则其发热功率(每秒内的发热量)为

$$P' = \frac{U'^2}{R}.$$

因为半波整流中,每周期内只有半个周期有电流通过,半波时电阻的发热量显然只有全波时的一半.对于理想二极管,不考虑它的压降,全波时的热功率就等于把原来的交流电直接加在电阻 R 两端时的功率,即

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

于是由 $P' = \frac{1}{2} P$, $U = 220$ 伏,联立上述两式得

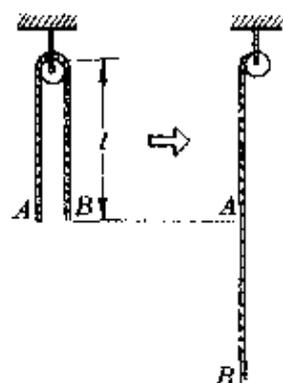


图 39

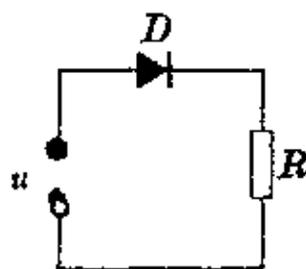


图 40

$$U' = \frac{\sqrt{2}}{2} U = 110\sqrt{2} \text{伏} = 156 \text{伏}.$$

所以正确答案为 C.

这个答案的物理意义就是说,经半波整流后加在电阻 R 两端的脉动电压(图 41 中虚线所示),在产生热量的整体效果上,与一个电压恒为 $U = 156$ 伏的直流电等效(图 41 中直线所示).

上面我们虽然分三个方面讨论了等效关系的确定,希望同样不要囿于机械的理解,重要的是把握等效变换的准则——效果相同.

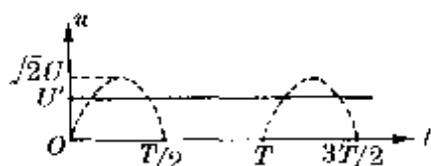
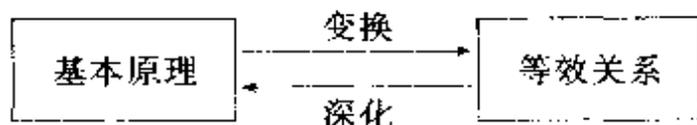


图 41

2. 变换的基础——明确物理实质

等效变换是一种更高层次的抽象思维活动,建立在透彻理解物理原理的基础上.很难设想,一个连欧姆定律都掌握不好的学生,会懂得等效电源的含义.可见,等效方法的运用是有条件、分层次的.一般说,在学习活动中,对一个新问题的认识,都应该从基本原理开始,当认识发展到一定程度,产生一个飞跃——形成某种等效变换关系,然后再反过去对原来的问题加以重新认识,从而加深对基本物理原理的理解.待到对基本物理原理相当熟悉以后,也就可以自如地运用等效变换方法了.所以,它们之间的关系应该是



只有这样,才能通过等效方法的运用,深化基础,活化思维.应该注意,切不可生搬硬套,以至被“等效变换”掩盖物理实质.

下面,我们选择若干物理问题,通过在物理原理分析的基础上,指出如何抽象出等效关系,希望能有助于加深对两者间联系的认识.

改变
参照物

对物体运动的描述,可以选用不同的参照物.理解了同一个物体的运动对不同参照物(坐标系)所呈现的规律,也就等于建立了一个等效关系.

例如,甲车在平直轨道上以速度 v_1 运动,司机发现在它前方 s_0 处,有乙车正以速度 v_2 ($v_2 < v_1$) 同向行驶,为避免相撞,甲车司机拉制动闸匀减速行驶,则甲车减速行驶中加速度的数值至少多大,两车才不致相撞(图 42)?

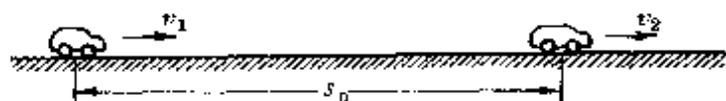


图 42

以地面为参照物时,两车分别做不同的运动:甲车以 v_1 为初速做匀减速运动,乙车以速度 v_2 做匀速运动,经时间 t 两车相遇时的速度应该正好相等才不致相撞.设此时乙车的位移为 s ,则

对乙车 $s = v_2 t, v_{2t} = v_2;$

对甲车 $s + s_0 = v_1 t - \frac{1}{2} at^2, v_{1t} = v_1 - at;$

不相撞 $v_{1t} = v_{2t}.$

由上述各式得

$$v_1 - at = v_2, t = \frac{v_1 - v_2}{a},$$

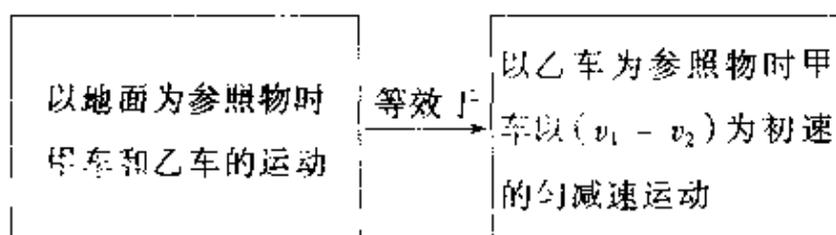
$$v_2 t + s_0 = v_1 t - \frac{1}{2} at^2,$$

即 $s_0 = (v_1 - v_2)t - \frac{1}{2} at^2 = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a},$

所以甲车的加速度至少为

$$a = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2s_0}.$$

上述算式中 $(v_1 - v_2)$ 就是甲车相对于乙车的速度, $t = \frac{v_1 - v_2}{a}$ 和 $s_0 = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$ 就表示了以初速 $v_0 = v_1 - v_2$ 、加速度为 a 做减速滑行至停止的时间和位移. 因此, 我们若站在乙车上观察甲车, 看到的就是一个初速为 $(v_1 - v_2)$ 、加速度为 a 的匀减速运动, 相遇时速度恰减为零. 懂得了这个道理, 一个等效关系自然建立起来了.



熟悉了这种由改变参照物建立的等效关系后, 有些问题可一目了然.

例题 长均为 $l = 1$ 米的细棒 A 和 B , A 悬于顶板下, B 竖立在地面上, A 棒下端和 B 棒上端相距 $s = 20$ 米. 当 A 棒的悬线断裂自由下落时, B 棒以初速 $v_B = 40$ 米/秒保持直立状态竖直上抛, 试求两棒从相遇到分离的时间(图 43).

解答 在地面参照系中 A 棒的自由下落与 B 棒竖直上抛的运动, 等效于以 A 棒为参照物时 B 棒以 v_B 向上的匀速直线运动, 因此两棒从相遇到分离的时间

$$\Delta t = \frac{2l}{v_B} = \frac{2 \times 1}{40} \text{秒} = 0.05 \text{秒}.$$

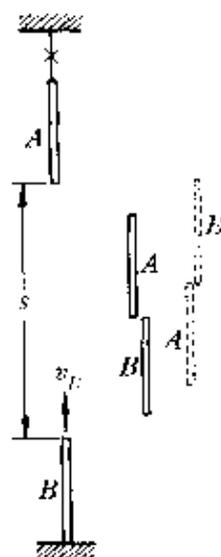


图 43

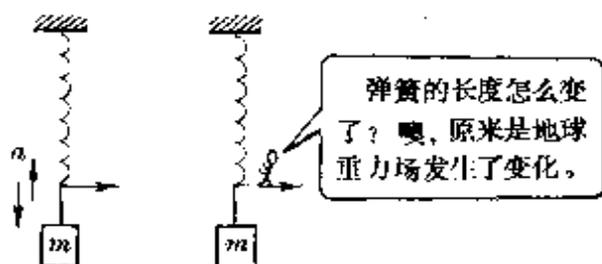
变动为静 前面在介绍爱因斯坦“等效原理”时已说过, 电梯的加速上下等效于重力场的变化. 现在再较详细地说明一下, 由加速运动与力场的等效, 导致对同一问题研究角度

的变化。

如图 44(a)所示,同一根轻弹簧竖直悬挂一个质量为 m 的物体,物体在竖直方向上做加速度为 a ($a < g$) 的匀加速运动时,弹簧的长度及其弹力会发生变化。

$$\text{加速向上时的弹力 } T_1 = mg + ma,$$

$$\text{加速向下时的弹力 } T_2 = mg - ma.$$



(a) (b)

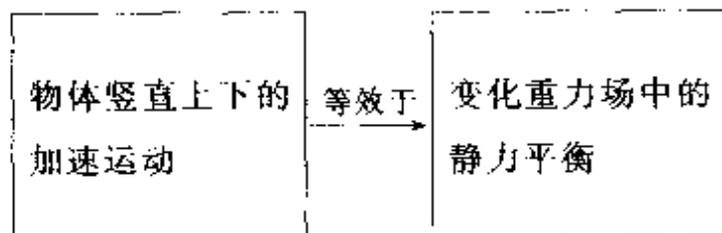
图 44

现在,假设你像神话中的孙悟空一样,变得非常轻小,能跳到弹簧秤的指针上,由于你已与物体处于同样的运动状态中,自然无法看到物体的运动,但是,弹簧长度的变化终究是客观存在的,那么你将作怎样的解释呢?只能认为是地球的重力场突然间发生了变化[图 44(b)].因此,

$$\text{弹簧变长时的弹力 } T_1' = mg_1' = m(g + a),$$

$$\text{弹簧变短时的弹力 } T_2' = mg_2' = m(g - a).$$

这里的 $g_1' = g + a$, $g_2' = g - a$,称为等效重力加速度,于是,一个等效关系自然建立起来了



从而实现了“变动为静”的等效变换.当然,这里也闪烁着坐标变换的思想.

物体在水平面上做加速运动时,也可用同样道理作等效变换.

如图 45 所示,在一节沿平直轨道加速运动的车厢内,一个质量为 m 的小球被弹簧拴着放在光滑水平桌面上,与车厢一起做加速运动.地面观察者由牛顿第二定律得弹簧中的弹力 $T = ma$.车内观察者只看到弹簧像受到一股“魔力”一样被压缩,而小球仍处于静止状态.他写出的是一个力平衡方程,即 $T - F' = 0$.这个 F' ,就是车内观察者所感受到的“场力”.

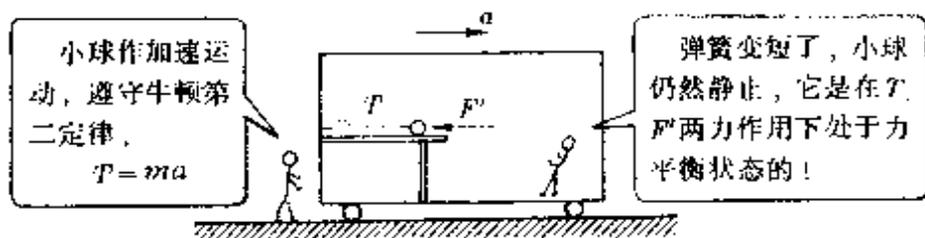


图 45

如果小球是悬挂在车厢中的,车厢加速运动时,悬线会变得倾斜.地面观察者用牛顿运动定律解释的问题,对车内观察者来说,又变成一个静力平衡问题——重力场倾斜起来了(图 46).

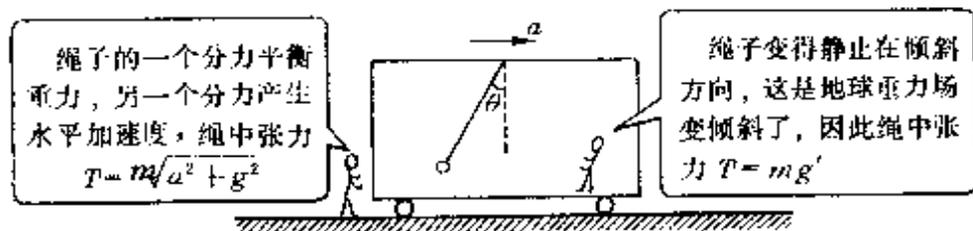


图 46

变曲为直 一条曲线所产生的效果,可以被一条直线代替,这是在明白了其中的物理原理后才能接受的事实.

如图 47 所示,在磁感强度 B 的匀强磁场中,平行于 B 的平面

内放置一根弯曲的导线 ab , 导线中通以强度为 I 的恒定电流. 为了计算这根曲导线所受到的磁场力(安培力), 可把它分割成许许多多段很短的直导线, 如 aa_1 、 a_1a_2 、 a_2a_3 、 \cdots 、 a_nb . 设各小段直导线与磁感应强度 B 之间的夹角依次为 α_0 、 α_1 、 α_2 、 \cdots 、 α_n , 则各小段所受的安培力依次为

$$F_0 = BI \overline{aa_1} \sin\alpha_0,$$

$$F_1 = BI \overline{a_1a_2} \sin\alpha_1,$$

$$F_2 = BI \overline{a_2a_3} \sin\alpha_2,$$

.....

$$F_n = BI \overline{a_nb} \sin\alpha_n.$$

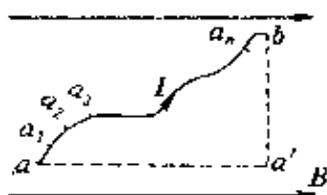


图 47

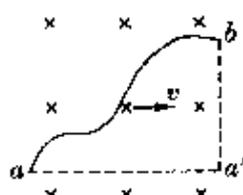


图 48

这根导线所受的合力

$$\begin{aligned} F &= F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n \\ &= BI(\overline{aa_1} \sin\alpha_0 + \overline{a_1a_2} \sin\alpha_1 + \cdots + \overline{a_nb} \sin\alpha_n). \end{aligned}$$

上式括号内为各小段导线在垂直于 B 方向的投影之和, 用 l_{\perp} 表示, 于是上式可写成

$$F = BI l_{\perp}.$$

这就是说, 原来的弯曲导线 ab 所受的安培力, 等效于垂直磁感强度方向的一根直导线 $a'b$, 如图 47 中虚线所示.

同样, 一根弯曲导线在垂直于磁感强度 B 的匀强磁场中, 以恒定速度 v 做切割运动时产生的感应电动势, 等效于垂直速度方向的一根直导线, 如图 48 所示.

分清主次

有时,所建立的等效关系是近似的.这就要求用物理原理作分析时,必须抓住本质因素,即分清主次.

如图 49 所示,在一对相距为 d 、长为 l 的平行金属板上加有交变电压 $u = U_0 \sin \omega t$,在两板中央、沿着平行于板面的方向以速度 v_0 射入一个电子.由于板上电压的变化,使板间场强时刻变化,入射的电子在垂直板面方向受到的是一个变力,电子在板间的运动情况较为复杂.

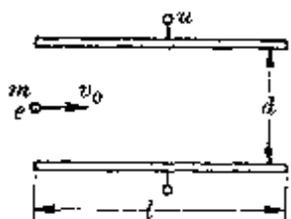
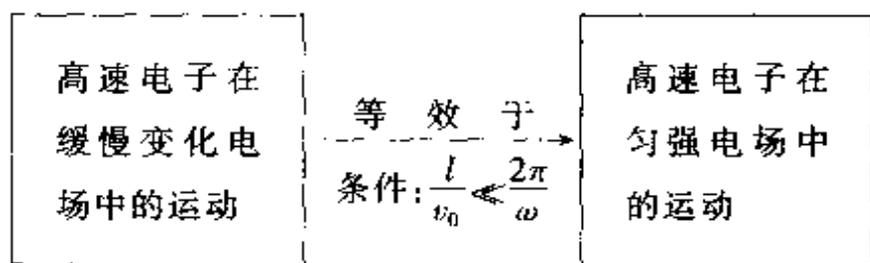


图 49

如果题设条件中 v_0 很大,而 ω 较小,电子以速度 v_0 水平匀速穿越两板间的时间 Δt 甚小于交变电压的变化周期 T ,即满足条件

$$\Delta t \ll T \quad \text{或者} \quad \frac{l}{v_0} \ll \frac{2\pi}{\omega},$$

那么在电子穿越两板的过程中可以认为板上的电压不变,板间是一个匀强电场,因此电子仍然做着类似于平抛物体的运动.这里的等效关系是



倘若不能从运动时间与电压变化周期关系上抓住主要因素,也就无法建立上述等效关系.

3. 检验的依据——物理规律的一致性

建立的等效关系是否合理,或者说,它与原来的研究对象是否真正等效,检验的依据也是物理规律.只有当原来的对象与等效后

的对象能保持物理规律的一致性时,才能确认所建立的等效关系是合理的.下面,我们结合几个具体问题加以说明.

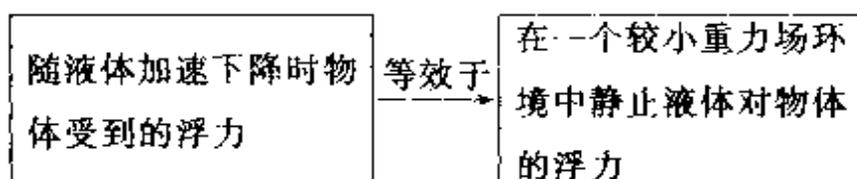
加速系统
中的浮力

如图 50 所示,一块物体浮在容器中的水面上.当容器由静止开始匀加速下降时,讨论浸没在水中部分体积的变化.



图 50

因为浸在液体中的物体受到的浮力大小,等于它所排开的液体的重力.根据等效原理,容器(包括其中的水和物体)加速下降时,等效于重力场的减弱,物体的重力和液体的重力按同样规律减小,所以,可具体地建立这样一个等效关系:



结论是:物体浸没在水中部分的体积不变.

上面的等效关系是否合理,或者说这个结论是否正确,我们可以依据物理规律作一检验.

设物体的体积为 V , 密度为 ρ , 则其重力 $G = mg = \rho Vg$. 设水的密度为 ρ_0 , 物体原来静浮于水面时浸在水中部分的体积是 V' , 物体所受的浮力 $Q = \rho_0 V'g$. 由平衡条件

$$\rho Vg = \rho_0 V'g,$$

得

$$V' = \frac{\rho}{\rho_0} V.$$

当容器以加速度 a 下降时, 设此时水对物体的浮力变为 Q' , 则物体的运动方程为

$$mg - Q' = ma.$$

假设这时物体浸没在水中部分的体积是 V'' , 设想把物体拿开并让体积是 V'' 的一部分水占据这一空间, 那么周围的水对这一部分水的作用力仍应该是 Q' . 而这一部分水所受的重力是 $\rho_0 V'' g$. 这部分水同样以加速度 a 下降, 它的运动方程为

$$\rho_0 V'' g - Q' = \rho_0 V'' a,$$

由此得

$$Q' = \rho_0 V'' (g - a).$$

把这个结果代入物体的运动方程中, 即为

$$mg - \rho_0 V'' (g - a) = ma,$$

或者

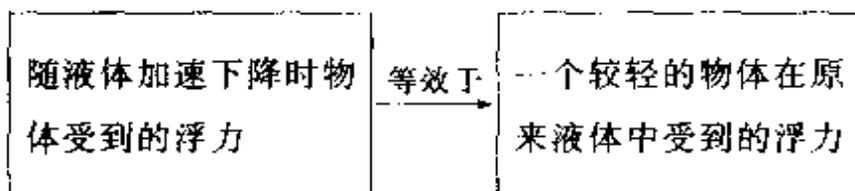
$$\rho V g - \rho_0 V'' (g - a) = \rho V a,$$

于是得加速下降时浸没在水中的体积

$$V'' = \frac{\rho}{\rho_0} V_0.$$

它正好等于原来容器静止时物体浸没在水中的体积, 即 $V'' = V'$. 所以, 容器加速下降时物体的浸没部分体积不变. 也就是说, 我们在上面建立的等效关系是合理的.

如果我们只考虑到物体的“失重”, 忽视了水的浮力的变化, 建立这样一个等效关系:



结论是: 物体浸没在水中部分的体积减少.

通过物理规律的检验可知, 这样的等效关系不合理, 由此得出的结论也不正确.



在前面组合等效法中说过, 用一个等于各物体质量之和的“大物体”, 可以代替原来几个小物体. 这个等效关系在刚体转动中是否成立呢?

如图 51 所示, 在一根长 $2l$ 的细杆 AB 的中点 O 和 一端 B , 分别固定两个质量为 m_1 、 m_2 的均质小球, 细杆可以另一端 A 为轴在竖直平面内转动, 则当杆从水平位置轻轻释放, 转动到竖直位置时, 系统重心的速度多大?

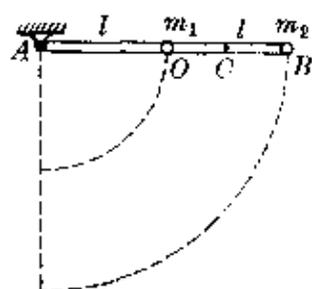


图 51

一些学生先根据上述等效关系, 找出系统重心的位置. 设系统重心在 C 点, 它离转轴 A 的距离为 r , 则由静力学中力矩平衡原理知

$$m_1 gl + m_2 g \cdot 2l = (m_1 + m_2) gr,$$

得
$$r = \frac{m_1 l + 2m_2 l}{m_1 + m_2}.$$

然后由机械能守恒定律, 有

$$(m_1 + m_2) gr = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_c^2.$$

代入上面算出的 r 值, 即得系统重心的速度

$$v_c = \sqrt{2gl \cdot \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2}}. \quad (1)$$

这个结果是否可靠? 或者说上面的等效关系在刚体转动中是否合理? 可以从物理规律上作一检验.

从水平位置转到竖直位置的过程中, 细杆做变加速运动, 在竖直位置时杆上离转轴 A 不同距离的各点线速度不同, 但角速度都相同, 设为 ω . 两球的速度分别为

$$v_1 = \omega l, v_2 = \omega \cdot 2l.$$

由机械能守恒定律, 得

$$m_1 gl + m_2 g \cdot 2l = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

代入 v_1, v_2 的值后可解出转至竖直位置瞬间杆的角速度

$$\omega = \sqrt{\frac{2(m_1 + 2m_2)g}{(m_1 + 4m_2)l}}$$

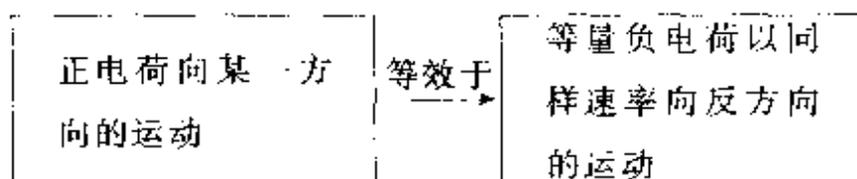
同样由力矩平衡找出重心位置 C , $AC = r = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2}l$, 因而得系统重心的瞬时速度

$$v_c = \omega r = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gl \cdot \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + 4m_2}} \quad (2)$$

比较①②两式的结果, 显然不同. 由于②式是从基本物理规律出发的, 它应该是正确的, 说明①式的结果不正确. 究其原因, 是因为先采用了等效质量的缘故. 由此可见, 前面的等效质量关系在刚体转动中不一定成立.

霍耳效应

在提出这个问题之前, 从初中物理开始, 我们已形成一个根深蒂固的等效关系



无论是金属导电、电解液导电或半导体, 我们在解释电流现象和电路计算中, 都应用了这个等效关系. 譬如在电解液中的电流强度, 就是在时间 t 内通过某一截面正离子的电量 Q_+ 和负离子的电量 Q_- 的共同贡献(图 52), 即

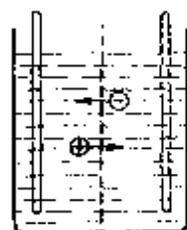


图 52

$$I = \frac{Q_+ + Q_-}{t}$$

只有在霍耳效应中, 上述等效关系不再成立了. 在半导体技术中, 我们也正是利用这个不等效性, 才可以方便地检测究竟是空穴

导电(P型半导体)还是电子导电(N型半导体)。

如图 53 所示,在垂直于磁感应强度 B 的匀强磁场中,分别放置一块 P 型半导体和一块 N 型半导体,并通以纵向电流 I 。

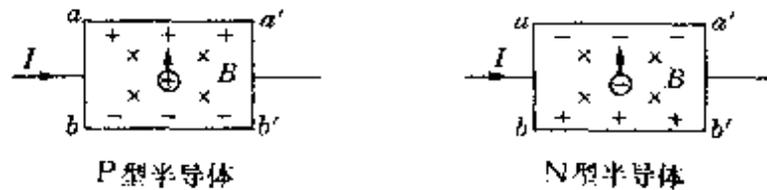


图 53

P 型半导体中的电流可以看成是带正电荷的空穴的定向运动,在洛仑兹力作用下于薄片的横向积聚了不同的电荷, aa' 侧带正电荷, bb' 侧带负电荷,形成的电势差 $U_{aa'} > U_{bb'}$ 。

N 型半导体是电子导体,当通以同样电流时电子所受洛仑兹力的方向不变,使 aa' 侧带负电荷, bb' 侧带正电荷,形成的电势差 $U_{bb'} > U_{aa'}$ 。

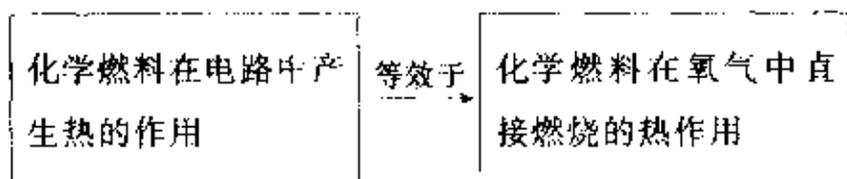
显然,在霍尔效应中,正电荷的运动与等量负电荷的反向运动已不再等效。

必须记住,无论怎样的等效关系,只有经受过物理规律的检验,才是可靠的、合理的。

四、等效方法在中学物理中的应用

1. 等效方法对学习和运用物理知识的指导作用

等效方法在科学认识史上曾起过重要的作用。“能的转化与守恒定律”的发现过程,就体现着等效思想的光辉.1841年,英国物理学家焦耳(J. P. Joule, 1818--1889)首先发现了电流热效应定律.焦耳认为,在电池中燃烧一定量的化学燃料,则在电路中(包括电池本身)就会发出相应的热,和这些燃料在氧气中点火直接燃烧所得到的热应该一样多.这个意思可表示为



焦耳正是从这个关系上认识到热、化学作用和电流之间的等价性,才做了四百多次不同的实验,完成了热功当量的实验测定.

等效方法最辉煌的成就,当然莫过于爱因斯坦以此为基础创建的广义相对论.

在中学物理教学中,等效方法在指导我们学习和运用物理知识上同样有着重要的功能.概括起来,主要体现在以下三个方面.

(1) 深化认识

等效方法是认识上的一次飞跃,并不是狭隘的解题技巧.通过等效变换,往往能帮助我们透过表面现象的迷雾,拨开错综复杂的次要因素,直达问题的本质,从而使我们对所研究问题的物理实质看得更深、更透.

譬如,许多机械和仪器、仪表的实际结构一般都是很复杂的,但从总体作用来说,往往都可作简单的等效代换.这样,我们就容易从基本原理上,也就是从整个机械或仪表的物理实质上去把握它的功能,进而再洞察各部分的奥秘.

图 54 是实验室中常用的托盘天平结构中的复式杠杆(罗伯威尔结构),从各杆件间力的传递来说较为复杂,但总体上等效于一个简单的等臂杠杆.

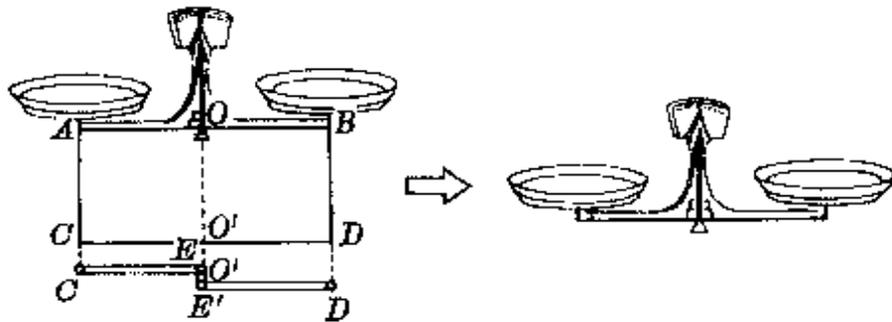


图 54

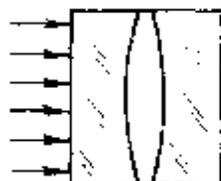
照相机是我们常用的光学仪器,从很普通的到极高级的各类照相机的光学镜头都是由好几个不同的透镜(凸的、凹的、平凸、凹凸等)胶合而成的.如果仔细考虑从物体上反射的光经各透镜的作用,那是一项十分复杂的工作.但总体上,它们都等效于一个单凸透镜,因此其成像原理都可用凸透镜成像光路说明.

我们自身的眼睛,其生理结构由角膜、晶状体、水样液、玻璃体

等组成,整体上可简单地等效于一个凸透镜.整个眼睛的视物原理,等效于一架变焦距照相机.

从等效关系上把握住物理实质后,也便于指导我们去分析、解决许多物理问题.下面,我们通过一些例题进行说明.

例 1 在一块长方形的光学玻璃中,挖出一个凸透镜状的空腔(图 55),一束垂直其表面入射的平行光,经过这个有空腔的长方形玻璃块后的透射光

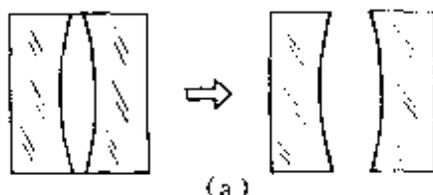


- A. 仍保持平行.
- B. 变成会聚光束.
- C. 变成发散光束.
- D. 上述三种情况都有可能.

图 55

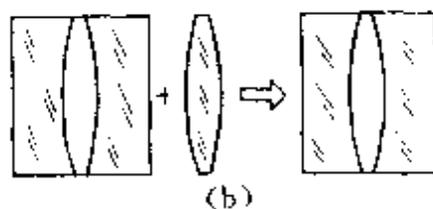
解答 设想沿空腔的中心线把长方体分割成两部分,如图 56 (a)所示,平行光通过原来有空腔的长方体,物理实质上等效于连续通过两个平凹透镜,光束两次被发散,正确结果为 C.

也可以把完整的长方形玻璃等效成有空腔的长方体和一块凸透镜的组合,如图 56(b)所示.因为凸透镜对光束有会聚作用,而平行光束垂直长方体入射时透射光方向不变,可知挖有空腔的长方体对平行光必有发散作用,所以结果为 C.



(a)

例 2 在空中某点以相同速率同时分别竖直向上、竖直向下、水平向左和水平向右抛出四个小球,不计空气阻力,在小球落地前任一瞬间,以四个小球所在位置为顶点构成的图形是



(b)

图 56

- A. 任意四边形.
- B. 长方形.
- C. 菱形.
- D. 正方形.

解答 从物理本质上说,任何抛体运动,不计阻力时都可等效成抛出方向的匀速直线运动和自由落体运动的合成.再变换参照物,从自由下落的坐标系中看这四个小球,它们都沿着抛出方向做匀速直线运动.因此,落地前任一瞬间以四个小球所在位置为顶点构成的图形是一个正方形,正确答案为 D

节日里的焰火,升空散开后形成美丽的球形,也是这个道理.焰火的公共重心和上述正方形的中心都做着自由落体运动.

本题如果不从等效运动的物理实质出发,而是从计算进行论证,是十分繁复的.

例 3 在一块圆形的均匀薄电阻片上开一圆孔,按如图 57 (a)、(b)两方式沿着圆的直径接到同样的恒压电源上,那么在同一时间内两者的发热量

- A. $Q_a > Q_b$. B. $Q_a = Q_b$. C. $Q_a < Q_b$.

解答 设想沿接入电路的直径两端 MN 和 $M'N'$ 把电阻片分成两部分.情况(a)中,等效于两个相同电阻的并联;情况(b)中,等效于大小不同的两个电阻的并联,而其中阻值较小的半片的电阻值比情况(a)中半片的电阻值更小,因此并联的结果,其总电阻比情况(a)中的小.

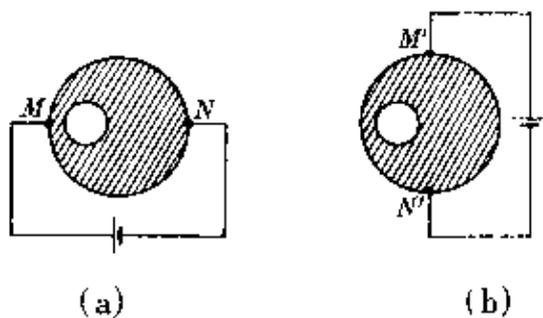


图 57

由焦耳定律, $Q = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t$ 可知,电压恒定时,电阻越小,在同样时间 t 内的发热量越多.因此情况(b)的发热量多,正确答案为 C.

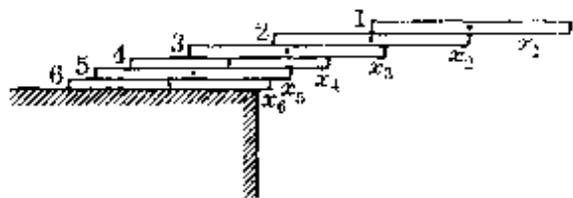
显然,本题的关键是用组合等效法把开孔电阻片等效成两个电阻的并联.如果把握不住这个物理实质,判断是很困难的.

(2) 活化思维

等效方法可以有效地活化人们的思维. 许多时候, 当被难题困扰、陷于绝境时, 由等效方法引燃的智慧火花, 常会给你带来希望的曙光, 从而顺利地突破困境. 或者, 由等效方法唤起的灵感, 构筑出一条别致的思路, 从而巧妙地化难为易. 在中学物理中有丰富的实例可以佐证.

例 1 6 块各长 $l=1$ 米的相同均质薄板, 叠在一起伸出桌边以外, 要求最下面的一块不离开桌面, 各板又尽量往外伸出, 那么最上面的一块的远端离桌边的距离是多少?

常规解法 设 6 块木块从上而下的编号依次为 1、2、3、4、5、6, 上面一块伸出下面一块(包括桌面)的距离分别为 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 、 x_6 , 如图 58 所示.



第 1 号板伸出最远时, 它的重心正好位于第 2 号板的棱边上方, 因此 $x_1 = \frac{1}{2}$ 米.

图 58

把第 1、2 两号板看成一个整体, 其重力为 $2G$ (设每块板重为 G), 伸出最大距离时它们的公共重心应位于第 3 号板的棱边上方, 故 $x_2 = \frac{1}{4}$ 米.

以第 3 号板为研究对象, 用第 4 号板的棱边作为转动轴, 由力矩平衡条件

$$2G \cdot x_3 = G \left(\frac{l}{2} - x_3 \right),$$

得 $x_3 = \frac{1}{6} l = \frac{1}{6}$ 米.

接着,把第 1、2、3 号三块板作为整体,其公共重心落在第 4 号板的棱边上方,由力矩平衡条件

$$3G \cdot x_4 = G \cdot \left(\frac{l}{2} - x_4 \right),$$

得
$$x_4 = \frac{l}{8} = \frac{1}{8} \text{米}.$$

同理,对第 5 号、第 6 号板可由力矩平衡条件

$$4G \cdot x_5 = G \cdot \left(\frac{l}{2} - x_5 \right), 5G \cdot x_6 = G \cdot \left(\frac{l}{2} - x_6 \right),$$

得
$$x_5 = \frac{l}{10} = \frac{1}{10} \text{米}, \quad x_6 = \frac{l}{12} = \frac{1}{12} \text{米}.$$

所以,最上面的第 1 号伸出桌边的最大距离为

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \right) \text{米} \\ &= 1.225 \text{米}. \end{aligned}$$

等效变换 如果我们用悬线代替棱边,用悬吊代替叠放,把原来 6 块板倒着排列,最上面吊起的为第 6 号板,往下依次是第 5、4、3、2、1 号板,如图 59 所示,原题的效果保持不变.

这样,就变换成一个较简单的杠杆平衡问题,由下而上各悬绳中的张力大小依次为 $T, 2T, 3T, 4T, 5T, 6T (T = G)$. 于是,一下子就可算出 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, 同样得 $x = 1.225$ 米.

比较两种解法,可以看到,由于采用了整体等效方法后可以避开并合质量的麻烦,显得更为方便.当然,这样一条等

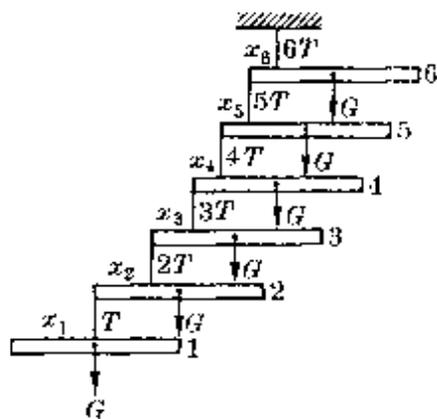


图 59

效变换的思路,只有对物理原理透彻理解,等效方法的运用已较为熟练时,才能脱颖而出.读者欣赏后,一定也会津津乐道的.

例 2 从离开地面高 $h = 20$ 米处由静止下落一个小球,与地面碰撞后弹起的高度 $h_1 = \frac{3}{4}h$,然后又下落与地面相碰后再弹起,若每次弹起的高度都为本次下落高度的 $\frac{3}{4}$,如此反复直至静止,试求小球通过的总路程.空气阻力不计.

常规解法 小球运动的示意图如图 60 所示.

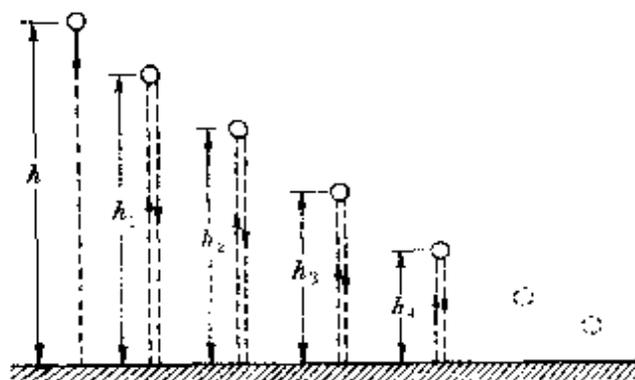


图 60

其中

$$h_1 = \frac{3}{4}h,$$

$$h_2 = \frac{3}{4}h_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 h,$$

$$h_3 = \frac{3}{4}h_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 h,$$

.....

$$h_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n h.$$

从第一次反弹的高度 h_1 开始的各次反弹高度 ($h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$) 组成一无穷递减等比数列,其公比 $q = \frac{3}{4}$.由数列的求和公式知,每次单程的总路程为

$$s' = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{4}h}{1-\frac{3}{4}} = 3h.$$

所以,小球从开始下落至静止通过的总路程为

$$s = h + 2s' = 20 \text{ 米} + 2 \times 3 \times 20 \text{ 米} = 140 \text{ 米}.$$

等效变换 由于每次下落后的反弹高度恒为下落时的 $3/4$, 因此可以把原物理过程变换:

原来小球运动中不受阻力, 与地面相碰有能量损失	等效于	小球运动中受恒定阻力 f , 与地面相碰时无能量损失
-------------------------	-----	------------------------------

对其中任一次的下落—反弹过程, 小球重力势能的减小都等于下落—反弹过程中克服阻力的功, 即

$$\frac{1}{4} mgh_i = fh_i + f \cdot \frac{3}{4} h_i = \left(1 + \frac{3}{4}\right) fh_i,$$

得
$$f = \frac{1}{7} mg.$$

小球从开始下落到静止, 小球重力势能的减小应等于整个路程中克服阻力的功, 即

$$mgh = fs = \frac{1}{7} mgs,$$

$$\therefore s = 7h = 140 \text{ 米}.$$

采用这样一个过程等效法, 就把原来“纯运动学”中路程的数列求和问题, 转化为一个功能转换问题, 计算上方便不少, 而且不易因疏忽了上跳的这段路程而误算为 $s = h' + s' = 80$ 米.

例 3 在光滑的水平绝缘桌面上, 放置一个半径为 R 的导线环, 并通以恒定电流 I . 穿过导线环垂直桌面向下有一匀强磁场, 磁感应强度为 B , 如图 61 所示. 试求导线环各截面间的张力.

常规解法 把圆环分割成许多小段,取其中任意一小段作研究对象,如图 62 中 ab 段.它所对的圆心角为 $\Delta\theta$,在桌面内作用于这一小段上有三个力:两端导线的张力 T ,安培力 F .平衡时

$$2T \sin \frac{\Delta\theta}{2} = F,$$

式中

$$F = IB\Delta l = IBR\Delta\theta.$$

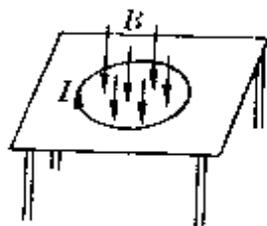


图 61

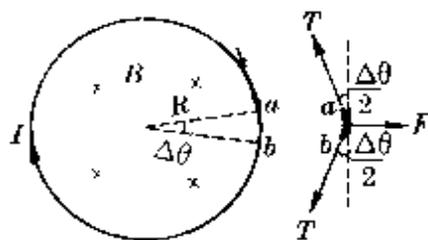


图 62

当分割的小段很多时,每一小段所对的圆心角很小很小,因此 $\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$.代入 F 和 $\sin \frac{\Delta\theta}{2}$ 的结果,力平衡方程变为

$$2T \frac{\Delta\theta}{2} = IBR\Delta\theta,$$

∴

$$T = IBR.$$

等效变换 把原来的圆环分成两半,以半环为研究对象,两端截面所受张力均为 T ,整个半环受到安培力 F ,如图 63 所示.因为半圆环的安培力等效于作用在长度等于直径 $2R$ 导线上的力,即 $F = IB \cdot 2R$,于是立即可得

$$T = IBR.$$

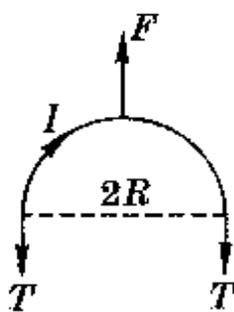


图 63

采用了分割和以曲代直的两种等效方法后,就把原来需涉及极限概念的一个较难解决的问题,变得十分轻松了.

例 4 用同样的金属材料制成三个大小相同的线圈 a 、 b 、 c .其中线圈 a 的线径较粗, b 、 c 两个的线径较细,且 a 、 b 是闭合的,

c 是开口的. 它们从同样高度处自由落下, 途中经一匀强磁场区域后着地(图 64), 则它们运动时间的关系是

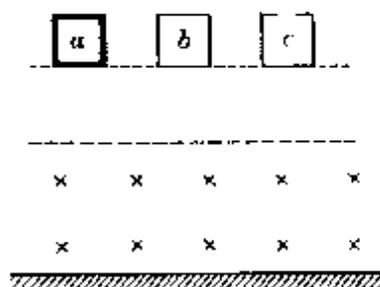


图 64

A. $t_a = t_b = t_c$.

B. $t_a > t_b > t_c$.

C. $t_b > t_a > t_c$.

D. $t_a = t_b > t_c$.

E. $t_a = t_b < t_c$.

常规解法 a 、 b 两线圈进入磁场后, 因切割磁感线会产生感应电流, 受到向上的磁场力阻碍其下落, 加速度小于 g . 线圈 c 不受磁场力, 以恒定加速度 g 做自由落体运动. 因此, 线圈 c 落得最快, 上列各答案中仅 B、C、D 有可能正确.

接着的事情是需比较 a 、 b 两线圈下落的快慢.

设线圈的总长度为 L 、每边长为 l 、导线截面积为 S 、材料的电阻率为 ρ 、密度为 D . 线圈进入磁场时的速度为 v , 线圈进入磁场后切割磁感线产生的电流为

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Blv}{\rho \frac{L}{S}} = \frac{BlSv}{\rho L}$$

线圈受到方向向上的安培力为

$$F_B = IlB = \frac{B^2 l^2 Sv}{\rho l}$$

线圈一边进入磁场做减速运动时的加速度为

$$\begin{aligned} a &= \frac{mg - F_B}{m} = g - \frac{B^2 l^2 Sv}{\rho L \cdot D l S} = g - \frac{B^2 l^2 v}{D \rho L^2} \\ &= g - kv. \end{aligned}$$

式中 $k = \frac{B^2 l^2}{D\rho L^2}$, 对两线圈是一恒量. 由此可见, 线圈落进磁场后的加速度仅与下落速度有关. 由于 a 、 b 两线圈从等高处下落, 进入磁场的速度相同, 因此, 它们在磁场中的加速度也相同, 它们必同时落地.

所以, 正确答案应该是 D.

等效变换 把粗线圈 a 分割成与 b 一样粗细的若干个细线圈, a 的每个细线圈与线圈 b 的下落情况相同, 它们必然同时落地. 立即可选出正确答案为 D.

用了一次组合分割等效法, 把原来的计算过程都可抛开, 等效方法展尽了风采.

相信读者朋友从这几个题目中, 已可领略到等效方法对活化思维所起的作用了.

(3) 指导实验

等效思维方法在物理实验上的指导作用, 体现在用以解释实验现象、作等效替代测量和分析实验误差等方面.

解 释
实验现象

用等效方法解释实验现象, 比较简便、直观, 便于初学者理解和接受.

例如, 图 65(a) 表示一个均匀的薄圆环, 当加热后, 关于圆孔半径的变化, 初学者中往往有不同的看法: 有的认为受热膨胀后, 圆孔内径变小; 有的认为变大; 也有的认为两种可能都存在. 众说纷纭, 莫衷一是.

利用组合分割等效法, 就很容易说明这个问题. 设想把圆环分割成许许多多条很细很细的细丝, 并把它们拉直后按从长到短排列起来, 如图 65(b) 所示. 温度升高后, 每一条细丝的长度都会增

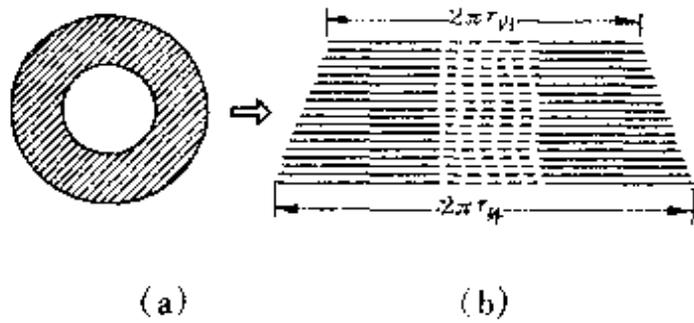


图 65

长,那么由这些细丝围成的圆环,其内、外径都必然增大.

图 66 所示的是一个很典型的实验.在托盘秤上盛水的杯中分别悬挂一个铁球和漂浮着一个木球.当剪断细线,在铁球下沉过程中(未碰底)和木球上升过程中(未浮出水面),托盘秤的示数如何变化?

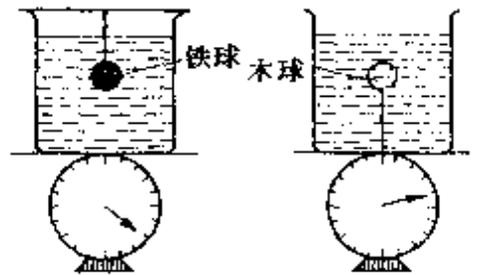


图 66

如果要建立一个物理模型,通过计算论证,那是较为复杂的.用等效方法却很好解释.

铁球下沉时,必然导致有等体积的水去填补铁球原来所占有的位置.从杯中水和铁球这一整体上说,系统的重心位置在下降,等效于系统向下做加速运动,相当于部分失重,因此铁球下沉时托盘秤示数减少.

木球上浮时,同样会有等体积的水去填补木球原来的位置.从整体上说,系统的重心位置同样也在下降,因此木球上浮时托盘秤的示数也减少.

等效
替代测量

说起等效替代测量,我们都会想起一个脍炙人口的故事——曹冲称象.三国时代(公元 220—260 年)的枭雄曹操的儿子曹冲,为了称出邻邦进贡的一头大象的体重,他命人先把象牵在小船中,待船平稳后,在船舷刻

出吃水深度的记号,然后牵出象,把石块装入小船,直到小船的吃水深度达到刚才的记号处为止.分别称出各石块的重量后相加,就可知道这头大象的体重了.

曹冲用的方法就是等效替代,这也是现在我们在物理实验中常用的一个方法.

例如,用伏安法测电阻时,无论是电流表内接还是外接,都会产生系统误差.为了减少这个误差,可用电阻箱作为“标准电阻”替代原待测电阻.实验电路如图 67 所示.具体实验步骤如下:

①先在 a 、 b 两端点接入被测电阻 R_x ,合上电键 S ,调节滑动变阻器,记下电流表和电压表的示数;

②用电阻箱取代 R_x 接入 a 、 b 两端间,保持滑动变阻器不变,调节电阻箱,使电流表和电压表的示数与接入 R_x 时相同;

③读出电阻箱上指示的电阻值,它就等于被测电阻 R_x 的阻值.

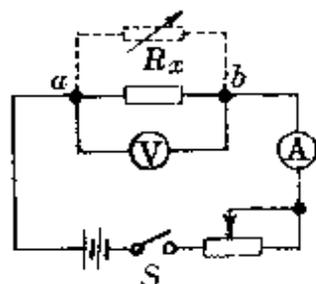


图 67

显然,利用这样的等效替代测量,完全可以排除电表内阻的影响了.

在测定凹透镜焦距的实验中,其中的一个方法就是等效替代法.实验步骤如下:

①将凹透镜、凸透镜、光屏从左到右依次竖立在光具座上,并调成共轴;

②用平行光照射凹透镜,调节两透镜和光屏的位置,使平行光通过两透镜后会聚于光屏上 S' 处,量出两透镜之间的距离 d ,其光路如图 68 所示;

③取走凹透镜,保持凸透镜和光屏的位置不变,将点光源 S 放在凸透镜的主轴上,调节点光源 S 的位置,使点光源 S 通过凸

透镜后也成像于 S' ，量出点光源与凸透镜之间的距离 L ；

④算出凹透镜的焦距 $f = L - d$ 。

这个方法的原理是：当平行光和点光源 S 经两透镜后都会聚（成像）

于 S' ，表示两者等效，因此点光源 S

在主轴上的位置恰与凹透镜的焦点重合，所以，这种方法称为等效替代法。

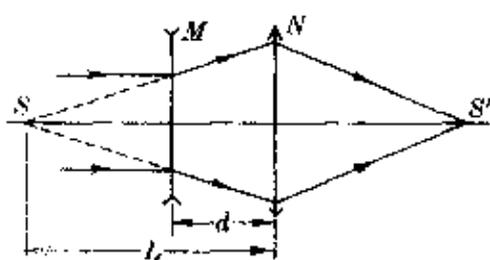


图 68

其实，广义地说，物理实验中的一切测量都是等效替代——用量具、量仪的指示值代替待测的真值，仅此一点，已足以说明等效思维方法的重要意义了。

分析实验
误差

用等效方法分析实验误差，我们以等效电源为典型实例加以说明。

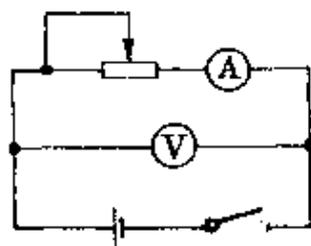


图 69

图 69 为用电压表和电流表测量电池电动势和内阻的内接法电路图。由于电压表的分流作用，电流表的示数小于通过电池的电流，因而带来系统误差。用闭合电路欧姆定律和等效电源法都可计算误差的大小。

用闭合电路欧姆定律 设当滑动变阻器取两个不同值时，对应的电流表和电压表的示数分别为 I_1 、 U_1 和 I_2 、 U_2 。不计电表内阻时，由闭合电路欧姆定律

$$\mathcal{E} = U_1 + I_1 r, \mathcal{E} = U_2 + I_2 r,$$

联立得电池的电动势和内阻的测量值为

$$\mathcal{E} = \frac{U_1 I_2 - U_2 I_1}{I_2 - I_1}, r = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1}.$$

考虑电压表内阻 R_V 的分流作用后, 则电动势和内阻的真实值的表达式应为

$$\mathcal{E}_0 = U_1 + \left(I_1 + \frac{U_1}{R_V} \right) r_0, \quad \mathcal{E}_0 = U_2 + \left(I_2 + \frac{U_2}{R_V} \right) r_0.$$

联立两式得

$$r_0 = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} \left(1 + \frac{r_0}{R_V} \right) = r \left(1 + \frac{r_0}{R_V} \right) > r,$$

$$\mathcal{E}_0 = \frac{U_1 I_2 - U_2 I_1}{I_2 - I_1} \left(1 + \frac{r_0}{R_V} \right) = \mathcal{E} \left(1 + \frac{r_0}{R_V} \right) > \mathcal{E}.$$

所以, 实验值都比真实值小. 其相对误差分别为

$$\eta_r = \left| \frac{r_0 - r}{r_0} \right| = \frac{r \left(1 + \frac{r_0}{R_V} \right) - r}{r \left(1 + \frac{r_0}{R_V} \right)} = \frac{r_0}{R_V + r_0},$$

$$\eta_{\mathcal{E}} = \left| \frac{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \right| = \frac{\mathcal{E} \left(1 + \frac{r_0}{R_V} \right) - \mathcal{E}}{\mathcal{E} \left(1 + \frac{r_0}{R_V} \right)} = \frac{r_0}{R_V + r_0}.$$

用等效电源法 如图 70 所示, 把虚线框中部分等效成一个电源. 根据戴维宁定律, 这个等效电源的等效电动势 (\mathcal{E}') 和等效内阻 (r') 分别为

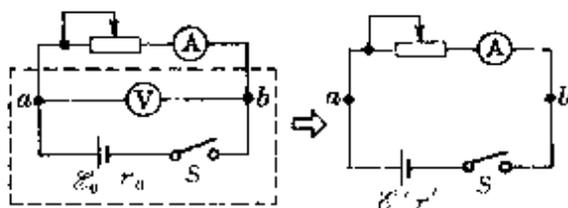


图 70

$$\mathcal{E}' = \frac{R_V}{r_0 + R_V} \mathcal{E}_0,$$

$$r' = r_0 // R_V = \frac{r_0 R_V}{r_0 + R_V}.$$

实验中测出的电动势和内阻,实际上就是这个等效电源的电动势和内阻,即测量值

$$\mathcal{E}_{\text{测}} = \mathcal{E}' = \frac{R_V}{r_0 + R_V} \mathcal{E}_0, r_{\text{测}} = r' = \frac{r_0 R_V}{r_0 + R_V}.$$

或写成

$$\mathcal{E}_0 = \left(1 + \frac{r_0}{R_V}\right) \mathcal{E}_{\text{测}}, r_0 = \left(1 + \frac{r_0}{R_V}\right) r_{\text{测}}.$$

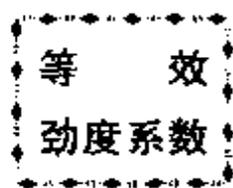
它们就是上面用闭合电路欧姆定律算出的结果.

两者相比,用等效电源法显得非常简便.

2. 等效方法在中学物理解题中的应用

等效方法在研究和解决中学物理问题中的应用非常普遍,也非常灵活和巧妙.在学习中,也只有通过对具体问题的应用,才能深刻领会和得心应手地驾驭这种方法.

下面,就中学物理中最具典型意义的一些等效变换,分专题举例说明它们的应用.



几根弹簧串联或并联后可以等效成一根弹簧.前面已经证明,串联弹簧的等效劲度系数与各弹簧劲度系数之间的关系是

$$\frac{1}{k_{\text{串}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}.$$

相同长度的并联弹簧的等效劲度系数与各弹簧劲度系数之间的关系是

$$k_{\text{并}} = k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

上述两个关系,也适用于弹力与其形变量成正比的各种弹性

材料。

例 1 在光滑水平面上的两挡板间,用两根劲度系数分别为 k_1 、 k_2 的轻弹簧系着一个质量为 m 的小球,小球静止时,两根弹簧都处于自然长度,现把小球稍向一边(如左边)推过一小段距离 x 后轻轻释放,试求小球的振动周期。

分析与解答 小球移位后,一根弹簧被压缩,另一根弹簧被拉伸,作用在小球上的回复力大小

$$F = k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2) x.$$

因此,原来的两根弹簧可等效为劲度系数 $k = k_1 + k_2$ 的一根弹簧,如图 71 所示。

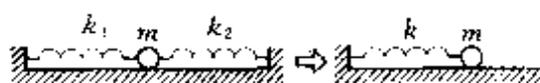


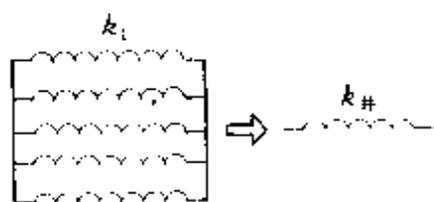
图 71

由简谐运动周期公式得小球的振动周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

例 2 健身用的弹簧拉力器,通常有五根弹簧并列,若每根弹簧原长 $l_0 = 0.5$ 米,把它拉至长 $l_1 = 1.0$ 米时需要的拉力 $F_1 = 100$ 牛,则五根弹簧都装上后把它们拉到长 $l_2 = 1.7$ 米时需要多少拉力? 假设始终在弹性限度内。

分析与解答 平衡时,弹簧的弹力 (f) 等于它所受到的拉力 (F),因此每根弹簧的劲度系数



$$k_1 = \frac{f_1}{x_1} = \frac{F_1}{l_1 - l_0} = 200 \text{ 牛/米}.$$

图 72

五根弹簧并列后,等效于一根弹簧(图 72),其等效劲度系数为

$$k_{\#} = 5k_1 = 1000 \text{ 牛/米}.$$

由胡克定律得伸长到 l_2 时所需要的拉力

$$F_2 = f_2 = k_{\#}(l_2 - l_0) = 1200 \text{ 牛.}$$

例 3 将三根劲度系数分别为 k_1 、 k_2 和 k_3 的轻弹簧按图 73 (a) 连结起来, 悬挂一个质量为 m 的小球, 推动小球使其在竖直方向振动, 试求小球的振动周期.

分析与解答 劲度系数为 k_2 、 k_3 的两根弹簧并联, 可等效成一根弹簧, $k_{\#} = k_2 + k_3$ [图 73(b)]. 它与劲度系数 k_1 的弹簧串联后, 最后可等效成一根弹簧, 如图 73(c) 所示. 三根弹簧的等效劲度系数

$$k = \frac{k_1 k_{\#}}{k_1 + k_{\#}} = \frac{k_1 (k_2 + k_3)}{k_1 + k_2 + k_3}.$$

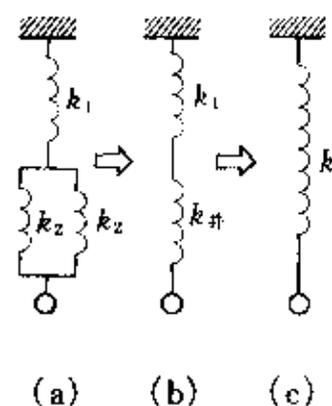


图 73

所以小球做简谐运动的周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{(k_1 + k_2 + k_3)}{k_1 (k_2 + k_3)}} m.$$

例 4 一根钢梁长 $l = 12$ 米, 截面积 $S = 64$ 厘米², 被固定在两堵墙之间. 为了判定它由于温度变化引起钢梁对墙产生的推力或拉力, 用长 $l_0 = 1$ 米, 截面积 $S_0 = 1$ 毫米² 的同样材料的钢丝作了试验. 实验结果表明, 这根钢丝受到拉力 $F_0 = 220$ 牛时能伸长 $\Delta x_0 = 1$ 毫米. 试问, 当这根钢梁因温度变化可能的最大伸缩量为 $\Delta x = 12$ 毫米时, 对墙的作用力多大? 假设钢梁的伸缩量与弹力之间的关系同样服从胡克定律.

分析与解答 假设钢梁能自由伸缩, 为了计算最大伸缩量 $\Delta x = 12$ 毫米时钢梁中的弹力, 必须知道钢梁的劲度系数. 为此, 先设想把钢梁分割成许

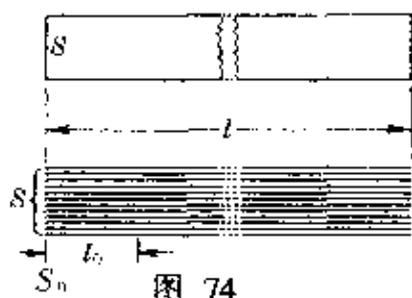


图 74

多多截面积等于 S_0 的细钢丝(图 74), 共计为 $n = \frac{S}{S_0} = 6400$ 根. 每一根细钢丝又可以看成由长 $l_0 = 1$ 米的细钢丝串接起来的.

由实验知, 每根长 l_0 、截面积 S_0 的细钢丝的劲度系数为

$$k_0 = \frac{f_0}{\Delta x_0} = \frac{F_0}{\Delta x_0} = \frac{220}{1 \times 10^{-3}} \text{牛/米} = 2.2 \times 10^5 \text{牛/米}.$$

根据弹簧串、并联后的等效劲度系数表达式, 这根钢梁的劲度系数为

$$\begin{aligned} k &= \frac{S}{S_0} \cdot \frac{1}{l/l_0} k_0 = 6400 \times \frac{1}{12} \times 2.2 \times 10^5 \text{牛/米} \\ &= 1.17 \times 10^8 \text{牛/米}. \end{aligned}$$

这根钢梁自由伸缩 $\Delta x = 12$ 毫米时产生的弹力为

$$f = k\Delta x = 1.17 \times 10^8 \times 12 \times 10^{-3} \text{牛} = 1.4 \times 10^6 \text{牛}.$$

由于钢梁被固定不能自由伸缩, 相当于墙应该用力在它伸长(或缩短)时把它压缩(或拉伸)到原长. 同样, 钢梁会对墙产生推力或拉力. 这种因温度变化产生的力称为热应力. 根据上面计算可知, 这根钢梁因温度变化引起对墙的最大作用力为

$$F = f = 1.4 \times 10^6 \text{牛}.$$

例 5 长为 L 的轻质硬杆, 一端固定在理想的铰链上, 另一端搁在劲度系数为 k 的轻弹簧上呈水平状态. 若在硬杆上加一质量为 m 的重物(图 75), 试确定硬杆在竖直方向做小振动的周期与重物在杆上的位置之间的关系.

分析与解答 设重物在竖直方向的位移为 x , 弹簧对应的压缩量为 x_1 , 由图 76, 根据几何知识知

$$L:l = x_1:x,$$

得

$$x_1 = \frac{L}{l}x.$$

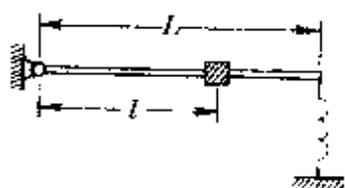


图 75

弹簧中产生的弹力

$$F_1 = kx_1 = \frac{kL}{l}x.$$

由硬杆对铰链的力矩平衡,得

$$mgl = F_1 L = \frac{kL^2}{l}x,$$

或
$$mg = k\left(\frac{L}{l}\right)^2 x = k'x. \quad \left[k' = k\left(\frac{L}{l}\right)^2 \right]$$

这就是说,放上重物后,等效于使整个系统受到一个回复力 $F' = k'x$. 这里的 k' 起着劲度系数的作用,也可称为等效劲度系数. 这个系统的振动周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = \frac{2\pi l}{L}\sqrt{\frac{m}{k}},$$

它显示了 T 与 l 成正比的关系.

例 6 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个物体,用一根原长 l_0 、劲度系数 k 的轻弹簧连接着放在光滑水平桌面上,今先把弹簧压缩至 a ($a < l_0$),用细线缚住,然后烧断细线,试求两物体运动中的最大速度.

分析与解答 细线烧断前后,整个系统水平方向不受外力,由于系统初动量为零,因此在以后的运动过程中系统质心的位置始终不变,也就是说,运动过程中系统上有一个静止的点,它就是质心 O (图 77). 两物体离质心 O 的距离分别为

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a, \quad x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a.$$

细线烧断后,两个物体仿佛系在两根轻弹簧上构成两个独立的弹簧振子,分别做着简谐运动.这两个弹簧的原长就是弹簧恢复为 l_0 时两者离质心 O 的距离,分别为

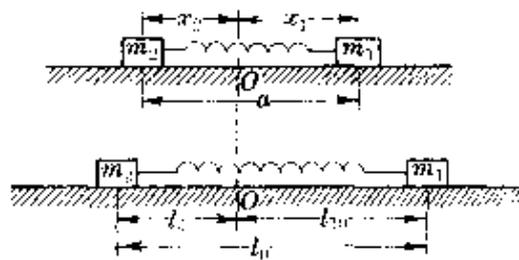


图 77

$$l_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l_0, \quad l_{20} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l_0.$$

根据串联弹簧性质得这两根弹簧的劲度系数分别为

$$k_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} k, \quad k_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} k.$$

这就是每个弹簧振子的等效劲度系数.

所以,细线烧断后两物体做简谐运动,其周期分别为

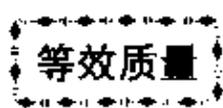
$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) k}},$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) k}} = T_1.$$

由前面从参考圆得出的关系知,振动中的最大速度 $v_m = \omega R = \omega A$, 所以两物体的最大速度分别为

$$v_{1m} = \omega_1 A_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} (l_{10} - x_1) = \sqrt{\frac{m_2 k}{(m_1 + m_2) m_1}} (l_0 - a),$$

$$v_{2m} = \omega_2 A_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} (l_{20} - x_2) = \sqrt{\frac{m_1 k}{(m_1 + m_2) m_2}} (l_0 - a).$$



等效质量有时又称有效质量.我们先通过一个熟悉的问题说明它的含义.

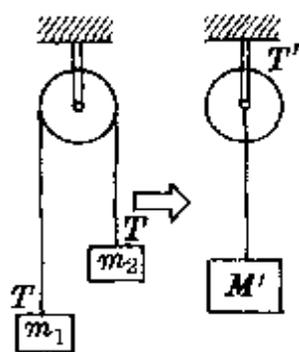
如图 78(a) 所示, 在定滑轮两边用细绳系着质量分别为 m_1 、 m_2 的两个物体(已知 $m_1 > m_2$), 不计滑轮和绳子之间的摩擦时, 由牛顿第二定律

$$m_1 g - T = m_1 a,$$

$$T - m_2 g = m_2 a,$$

联立得绳中张力

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$



(a) (b)

图 78

如从滑轮本身考虑, 由于它处于相对静止状态, 因此, 就相当于在滑轮中心悬挂一个质量为 $M' = \frac{2T}{g} = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 的物体, 如图 78 (b) 所示. 所以, 对悬绳而言, 原来的运动系统就等效成一个平衡系统了. 这个平衡系统中的物体的质量就称为原来两物体的等效质量.

利用等效质量的概念, 可以较方便地处理一些稍为复杂的问题.

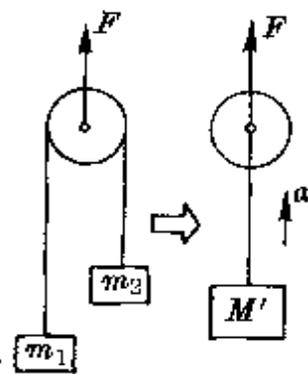
例 1 如图 79(a) 所示的滑轮悬绳不是固定在顶板上, 而是拉着悬绳以加速度 a 向上运动, 则拉力 F 和滑轮两侧绳中张力分别多大?

分析与解答 把滑轮两边的物体用等效质量代替, 如图 79(b) 所示. 即得

$$F = M'(g + a) = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g + a).$$

不计滑轮质量时, 滑轮两侧绳中张力

$$T = \frac{1}{2} F = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g + a).$$



(a) (b)

图 79

例 2 如图 80(a)所示的滑轮系统,已知 $m_1 > m_2 + m_3$, $m_2 > m_3$, 则悬挂滑轮 A 的绳子中张力多大?

分析与解答 用二次等效法,即先把图 80(a)等效成图 80(b),再把图 80(b)等效成图 80(c).于是,立即可知滑轮 A 的悬绳中张力

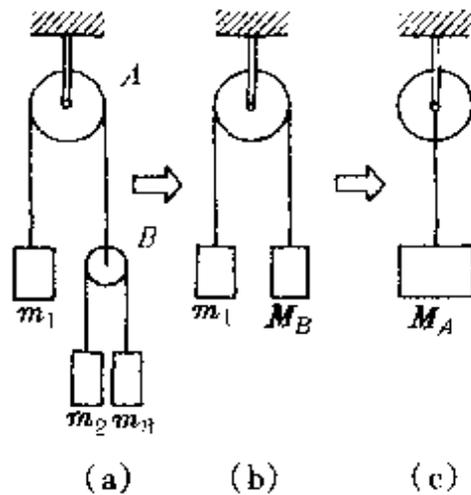


图 80

$$T_A = M_A g = \frac{4m_1 M_B}{m_1 + M_B} g = \frac{4m_1 \cdot \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3}}{m_1 + \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3}} g$$

$$= \frac{16m_1 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g.$$

例 3 如图 81 所示装置中, $m_1 = m_2 + m_3$, 这时杠杆保持平衡. 如果把 m_3 移到 m_1 下面, 杠杆能否继续保持平衡? m_3 移动前后悬挂滑轮的细绳中张力变化了多少?

分析与解答 m_3 移到 m_1 下面后, 滑轮的左边部分 ($m_1 + m_3$) 加速下落, 右边部分 m_2 加速上升. 对整个滑轮系统来说, 公共重心位置加速下降, 等效于失重状态, 因此悬挂滑轮的细绳中张力减小, 杠杆不能继续保持平衡, 将做逆时针向的转动.

m_3 未移动时, 设悬挂滑轮的细绳中张力为 T_0 [图 82(a)], 则

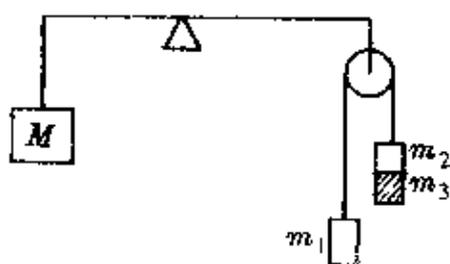


图 81

$$T_0 = (m_1 + m_2 + m_3)g = 2(m_2 + m_3)g.$$

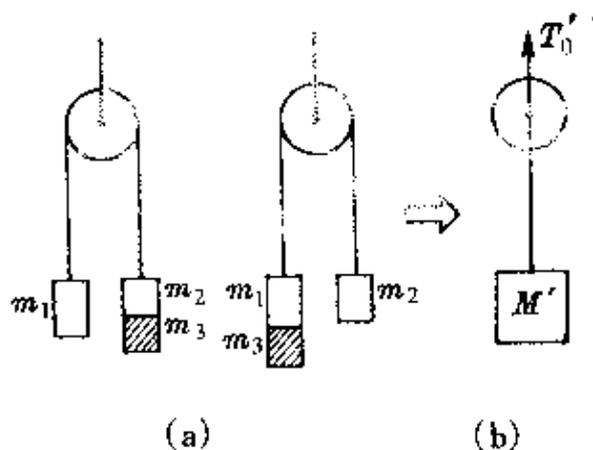


图 82

m_3 移到 m_1 下面后, 设悬挂滑轮的细绳中张力为 T_0' , 它等效于滑轮下方挂一个质量 $M' = \frac{4(m_1 + m_3)m_2}{m_1 + m_2 + m_3}$ 的物体. 因此, 此时悬挂滑轮的细绳中张力为

$$T_0' = M'g = \frac{4(m_1 + m_3)m_2}{m_1 + m_2 + m_3}g = \frac{2(m_2^2 + 2m_2m_3)}{m_2 + m_3}g.$$

移动 m_1 前后细绳中张力之差为

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_0 - T_0' = 2(m_2 + m_3)g - \frac{2(m_2^2 + 2m_2m_3)}{m_2 + m_3}g \\ &= \frac{2m_3^2}{m_2 + m_3}g. \end{aligned}$$

由计算出的 $\Delta T = T_0 - T_0' > 0$, 可见 m_3 移至 m_1 下面后, 杠杆

右端悬绳中张力减小,所以杠杆将做逆时针向转动,与上面的定性判断是一致的。

等效质量的概念,也可以用于有相互作用的两物体间发生相对运动的情况。

如图 83 所示,设在光滑平面上的两物体间的相互作用力分别为 F_{12} (物体 1 对 2 的力) 和 F_{21} (物体 2 对 1 的力),两物体对地的加速度分别为

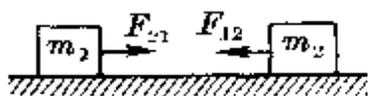


图 83

$$a_1 = \frac{F_{21}}{m_1}, \quad a_2 = \frac{F_{12}}{m_2}.$$

假设其中一个物体 m_2 不动,则 m_1 相对 m_2 的加速度(即站在 m_2 上看到 m_1 的加速度)为

$$a' = a_1 - a_2 = \frac{F_{21}}{m_1} - \frac{F_{12}}{m_2}.$$

考虑到 $F_{12} = -F_{21}$, 并引入等效质量 $m' = \frac{F_{21}}{a'}$. 它的意义表示,以 m_2 为参照物看到物体 m_1 在原来的力 F_{21} 作用下产生 a' 加速度时所相应的质量. 有时,也常称之为“折合质量”,含有对假设静止的 m_2 来说, m_1 的质量折算为多少的意思. 于是我们可得到关系式

$$\frac{F_{21}}{m'} = \frac{F_{21}}{m_1} + \frac{F_{21}}{m_2},$$

即

$$\frac{1}{m'} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

或者

$$m' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

利用这个等效质量的关系,也可以很方便地处理一些问题。

例 4 如前面例 6(见本书第 75 页), 计算烧断细线后系统的振动周期.

分析与解答 烧断细线, 两物体都做加速运动, 仍假设 m_2 不动时, 同样有关系式

$$m' = \frac{F}{a'}$$

式中 F 为弹簧的弹力, 因为 m_1 运动中对 m_2 的折合质量为

$$m' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

所以, 系统的振动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

这个结果与前面用等效 k 的解法相同.

等效摆长 这是与单摆的振动相比较而引入的一个等效关系, 如图 84 所示, 在一根竖直悬挂的轻弹簧上悬挂一个质量为 m 的物体后, 弹簧从原长 l_0 伸长到 l , 伸长量 $\delta = l - l_0$, 由平衡条件

$$mg = k\delta,$$

因此小球竖直上下做简谐运动的周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}}$$

这就是说, 一个静力伸长为 δ 的弹簧振子的振动周期与一个摆长为 δ 的单摆的振动周期相同, δ 就称为等效摆长.

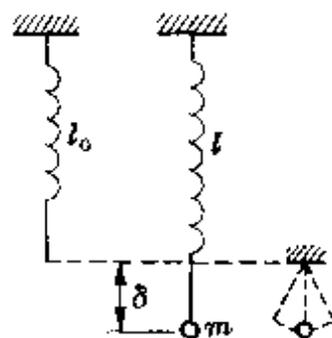


图 84

在不同的问题中等效摆长有不同的表达式, 如图 85(a) 所示的圆锥摆, 等效摆长 $l' = l\cos\alpha$, 因此它的振动周期为 $T =$

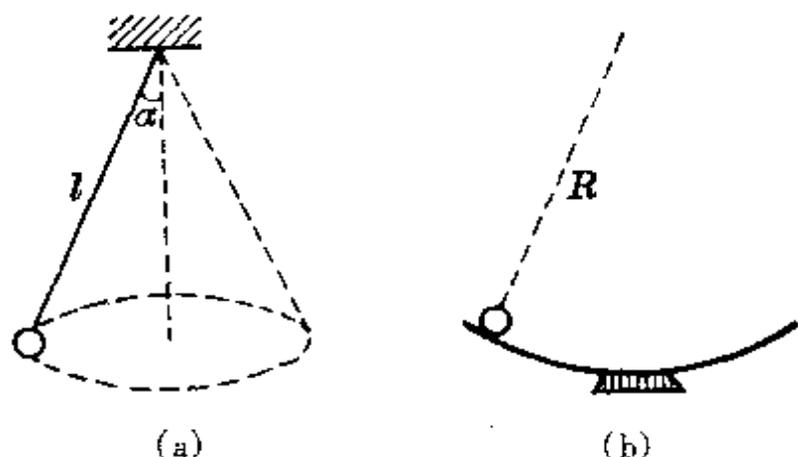


图 85

$2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}$. 图 85(b)中, 一个小球沿半径很大的光滑碟子底部附近来回运动, 其等效摆长 $l' = R$, 因此它往复一周的时间 $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

研究有关简谐运动的具体问题时, 如能找出等效摆长, 就可以直接根据单摆的周期公式算出它们的振动周期.

例 1 在两根竖杆的同一平面内, 用长度分别为 l_1 、 l_2 的两根细线悬挂一个小球, 两根竖杆相距为 a , 两细线的结点 O_1 、 O_2 的高度相差 b , 并且 $l_1^2 + l_2^2 = a^2 + b^2$ (图 86). 试求这个小球在垂直于两竖杆的平面方向做小振幅振动的周期.

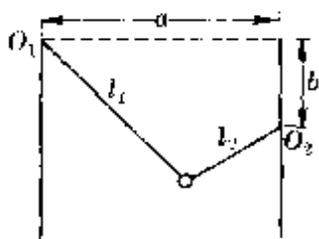


图 86

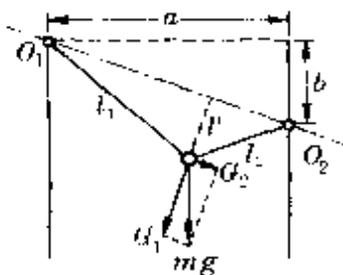


图 87

分析与解答 因为小球振动时, 是绕着通过两结点 O_1 、 O_2 的轴而转动的, 等效于一个倾斜的单摆 (图 87). 这个单摆的等效摆

长等于小球至 O_1O_2 连线的垂直距离 l' . 由题设条件 $a^2 + b^2 = l_1^2 + l_2^2$, 可见 l_1 与 l_2 互相垂直, 于是由面积公式

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} l' = \frac{1}{2} \sqrt{l_1^2 + l_2^2} l' = \frac{1}{2} l_1 l_2,$$

得
$$l' = \frac{l_1 l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} = \frac{l_1 l_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

对于这个倾斜的单摆, 摆球重力变为 $G_1 = mgsina$ (另一个分力 G_2 平行 O_1O_2 轴, 对振动不起作用), 或等效的重力加速度 $g' = g \sin \alpha = g \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. 所以, 小球的振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g'}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_1 l_2}{ag}}.$$

例 2 两根光滑的细杆组成夹角为 α 的竖立人字形架, 一根长为 l 的轻线套在架子上, 并在线上悬挂一个重球, 如图 88 所示. 试求重球在人字架平面内做小振动的周期.

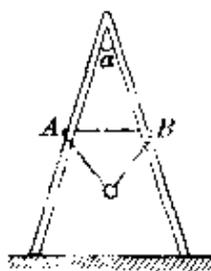


图 88

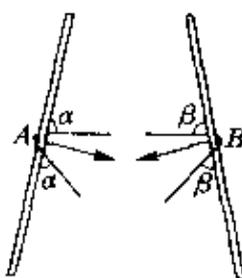


图 89

分析与解答 由于细杆光滑, 因此每根杆两侧细线与杆之间的夹角必定相等, 才能保证杆两侧线中张力的合力垂直细杆 (图 89). 否则, 细线无法处于稳定状态.

假设重球摆动后, 某时刻在人字架平面内从原来的平衡位置运动到某位置 C . 作出 C 点相对于两杆的对称点 C' 、 C'' , 则 $AC = AC'$, $BC = BC''$, 且 AC' 与 BC'' 跟细杆间的夹角分别等于 AC 与 BC

跟细杆间的夹角,所以 $OC = OC' = OC''$,如图 90 所示.由上面的对称关系知 $\angle C'OC'' = 2\alpha$.这就是说,当重球在竖直平面内摆动时, $\triangle C'OC''$ 在架子平面内只改变位置,但保持原形不变,意味着 OC 长与球的位置无关.

设 $OC = OC' = OC'' = R$,则由球移到架子左边杆的极端情况知 $\sin\alpha = \frac{l/2}{R}$,所以

$$R = \frac{l/2}{\sin\alpha}$$

这就是重球在摆动中的等效摆长,也就是说,重球的运动与长为 R 的单摆的运动完全等效.所以,它的振动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g\sin\alpha}}$$

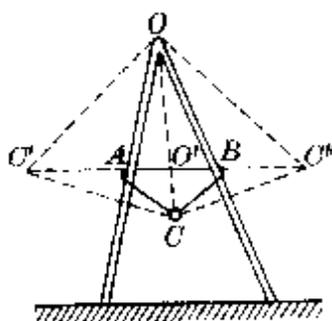


图 90



图 91

例 3 如图 91 所示,在水平光滑轨道上有一块质量为 M 的重物.重物上固定一个单摆,摆球质量为 m .假定重物只能沿导轨移动,试求摆在平行导轨的平面内做小振幅振动的周期与重物固定时摆做小振幅振动的周期之比.

分析与解答 重物沿导轨滑动时,对 $(M + m)$ 这个物体系统,水平方向不受外力,因此系统的质心位置 O 点应保持不动.设质心 O 到小球 m 的距离为 l_1 、摆长为 l ,由

$$mgl_1 = Mg(l - l_1),$$

得

$$l_1 = \frac{Ml}{m + M}.$$

这就是说,当重物 M 沿导轨运动时,小球 m 实际上可看成以质心 O 为悬点、 l_1 为等效摆长的振动.它做小振幅振动时的周期为

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}.$$

当重物 M 固定时,摆球做小振幅振动时的周期为

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

$$\therefore \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l}} = \sqrt{\frac{M}{m + M}}.$$

参考圆

前面已经说过,一个简谐运动等效于一个匀速圆周运动在其直径上的投影的运动.这个圆周称为参考圆.

利用参考圆可以很方便地找出质点的振动方程、速度公式和加速度公式.

如图 92 所示,设参考点 M' 沿半径为 A 的圆周以角速度 ω 逆时针方向做匀速圆周运动.在 $t = 0$ 时,它处于 P' 点,并以平衡位置 O 向上方向为正方向.经时间 t 后,质点运动到位置 M' ,它在直径上的投影点为 M .其位移为

$$x = A\cos\omega t.$$

这就是质点做简谐运动的位移方程, A 就是振幅.

质点在 M' 时的速度 $v_m = \omega A$, 加速度 $a_m = \omega^2 A$, 它们在直径上的投影就是质点做简谐运动时的速度和加速度,因此速度公式和加速度公式分别为

$$v_i = -v_m \sin \omega t = -\omega A \sin \omega t,$$

$$a_i = -a_m \cos \omega t = -\omega^2 A \cos \omega t.$$

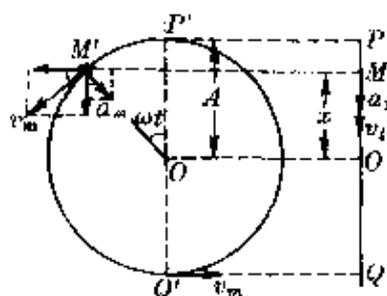


图 92

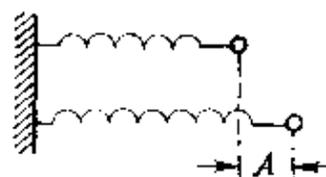


图 93

例 1 在光滑水平直杆上套有一根劲度系数 $k = 10\pi^2$ 牛/米的轻弹簧，一端固定，另一端拴着一个质量 $m = 100$ 克的小球。用手拉球使弹簧伸长 4 厘米，然后轻轻放手让小球自由振动（图 93）。试求小球开始运动后经时间 $t = 0.12$ 秒时的位置、速度和加速度。

分析与解答 小球振动中的振幅等于初始位移的大小，即 $A = 4$ 厘米。小球的振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{100 \times 10^{-3}}{10\pi^2}} \text{ 秒} = 0.2 \text{ 秒}.$$

根据上述由参考圆得到的公式，小球经 $t = 0.12$ 秒时的位移、速度、加速度分别为

$$x = A \cos \omega t = A \cos \frac{2\pi}{T} t = 4 \times 10^{-2} \cos \left(\frac{2\pi}{0.2} \times 0.12 \right) \text{ 米}$$

$$= -3.2 \times 10^{-2} \text{ 米},$$

$$v = -\omega A \sin \omega t = -\frac{2\pi}{T} \times A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

$$= -\frac{2\pi}{0.2} \times 4 \times 10^{-2} \sin \left(\frac{2\pi}{0.2} \times 0.12 \right) \text{ 米/秒}$$

$$= 0.74 \text{ 米/秒,}$$

$$\begin{aligned} a &= -\omega^2 A \cos \omega t = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \cos \frac{2\pi}{T}t \\ &= -\left(\frac{2\pi}{0.2}\right)^2 \times 4 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{2\pi}{0.2} \times 0.12\right) \text{ 米/秒}^2 \\ &= 31.55 \text{ 米/秒}^2. \end{aligned}$$

这就是说,小球从开始运动后经过 0.12 秒时,它位于平衡位置左方 3.2 厘米处,正以速度为 0.74 米/秒、加速度为 31.55 米/秒² 向着平衡位置做加速运动。

例 2 一根弹簧受到 29.4 牛的拉力时伸长 9 厘米.现在弹簧下挂一个质量 $m = 2.5$ 千克的物体,并从平衡位置往下拉 6 厘米后无初速释放,任它自由振动。

(1) 写出振动方程,画出振动图象;

(2) 若以物体经平衡位置上方 3 厘米处并正在向上运动的时刻开始计时,写出振动方程并画出振动图象。

分析与解答 弹簧的劲度系数 $k = \frac{29.4}{9 \times 10^{-2}} \text{ 牛/米} = \frac{980}{3}$

牛/米.自由振动的周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2.5 \times 3}{980}} \text{ 秒} \approx 0.55 \text{ 秒.}$$

振动中的平衡位置就是挂上物体后达静平衡时的位置.振幅就等于向下拉过的距离,即 $A = 6$ 厘米。

(1) 为了确定振动方程和画出振动图象,以平衡位置为圆心画出参考圆(图 94).其半径等于振幅,参

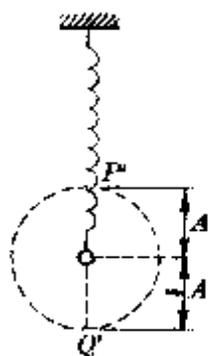


图 94

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.55} \text{ 弧度/秒.}$$

当规定以平衡位置向上为位移的正方向,并以正向最大位移处(对应参考圆中最高点 P')开始计时,则得标准式 $x = A \cos \omega t$. 如今从负向最大位移(对应参考圆中 Q' 点)起振,位相差 π ,因此振动方程为

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \pi) = 6 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{2\pi}{0.55}t + \pi\right) \text{ 米} \\ &= -6 \times 10^{-2} \cos 3.6\pi t \text{ 米.} \end{aligned}$$

对应的振动图象如图 95 所示.

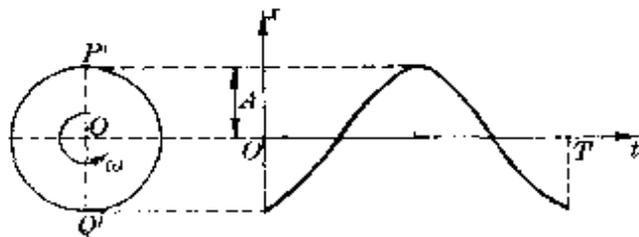


图 95

(2)物体经平衡位置上方 $x_0 = 3$ 厘米处且向上运动时,对应于如图 96 所示参考圆中的 M' 点,它落后于最高点 P' 的相位角设为 φ_0 ,由图可知

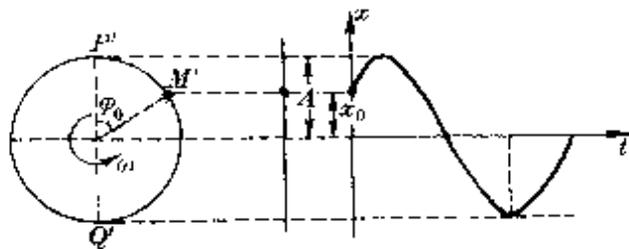


图 96

$$\cos \varphi_0 = \frac{x_0}{A}, \text{ 或 } \varphi_0 = \cos^{-1} \frac{x_0}{A} = \cos^{-1} \frac{1}{2}.$$

所以其振动方程为

$$x = A \cos(\omega t - \varphi_0) = 6 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{2\pi}{0.55}t - \cos^{-1} \frac{1}{2}\right) \text{ 米}$$

$$= 6 \times 10^{-2} \left(3.6\pi t - \frac{\pi}{3} \right) \text{米}.$$

对应的振动图象如图 96 所示.

例 3 试根据图 97 中的振动图线写出物体的振动方程.

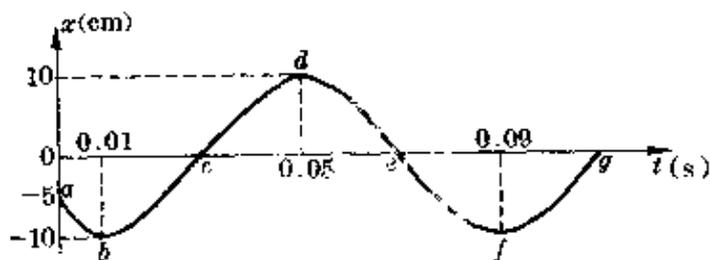


图 97

分析与解答 由图线得振幅 $A = 10$ 厘米, 周期 $T = 0.08$ 秒,

圆频率 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 25\pi$ 秒⁻¹.

为了确定初相位, 可画出对应的参考圆, 如图 98 所示. 由图 98 可以看出, 初相角

$$\varphi_0 = \pi - \alpha = \pi - \cos^{-1} \frac{x_0}{A} = \pi - \cos^{-1} \frac{5}{10} = \frac{2\pi}{3}.$$

所以, 该物体的振动方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) = 10 \cos\left(25\pi t + \frac{2}{3}\pi\right) \text{厘米}.$$

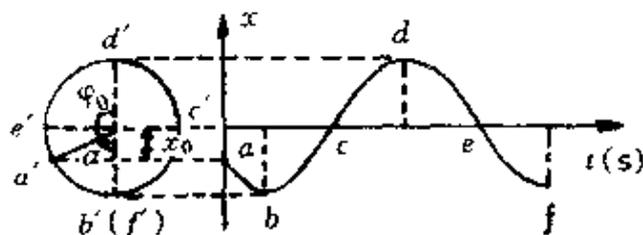


图 98

例 4 在一个振动台上放一台质量 $m = 1$ 千克的仪器, 当振动台以频率 $f = 5$ 赫、振幅 $A = 2$ 毫米做竖直方向简谐运动时, 仪器对

台面的最大压力与最小压力各为多少? 取 $g = 10$ 米/秒².

分析与解答 画出振动所对应的参考圆,如图 99 所示.仪器在最低位置 P 时,加速度向上,台面对仪器的支持力最大,表明仪器对台面的压力也最大.仪器在最高位置 Q 时,加速度向下(其数值与最低处相同),台面对仪器的支持力最小,表明仪器对台面的压力也最小.由牛顿第二定律得仪器在最低和最高位置时的运动方程为

$$\text{在最低处 } N_{\max} - mg = ma,$$

$$\text{在最高处 } mg - N_{\min} = ma.$$

$$\text{式中 } a = \omega^2 A = (2\pi f)^2 A.$$

$$\begin{aligned} \therefore N_{\max} &= mg + 4\pi^2 f^2 mA \\ &= 1 \times 10 \text{ 牛} + 4\pi^2 \times 5^2 \times 1 \times 2 \times 10^{-3} \text{ 牛} \approx 12 \text{ 牛}, \\ N_{\min} &= mg - 4\pi^2 f^2 mA \\ &= 1 \times 10 \text{ 牛} - 4\pi^2 \times 5^2 \times 1 \times 2 \times 10^{-3} \text{ 牛} \approx 8 \text{ 牛}. \end{aligned}$$

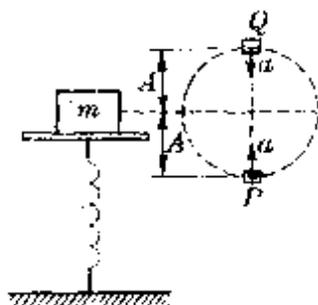


图 99

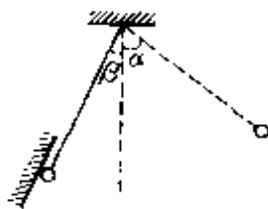


图 100

例 5 一根细的刚性轻杆,下端系一个小球,拉起小球从细杆偏离平衡位置一个小角度 α 时轻轻放下.当杆摆过平衡位置与竖直线成 β 角($\beta < \alpha$)时,小球与斜墙发生完全弹性碰撞(图 100).试求这个摆的振动周期与它自由摆动时的周期之比是多少?

分析与解答 这个摆自由摆动时,可以看成是一个单摆,在小角

度时的振动周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ，当 α 角很小时，摆的振幅可认为 $A = l\alpha$ (l 为摆长)，因此，与摆的自由振动所对应的参考圆的半径 $R = A = l\alpha$ ，参考点的角速度为 ω 。

摆与斜墙发生弹性碰撞后，反弹速度与碰前速度大小相同，忽略碰撞时间，在参考圆中相当于从左方刹那间跳到右方，因此，它比自由振动时就可以减少了沿圆周从左方到右方的时间，如图 101 所示。

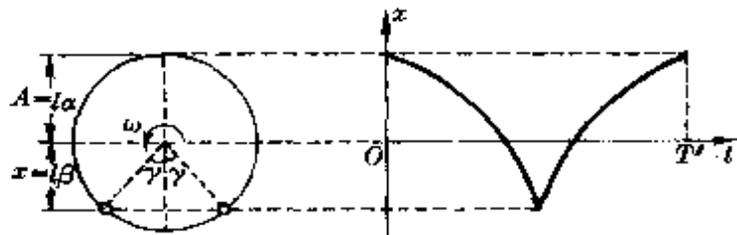


图 101

因为图 101 中的角度 $\gamma = \cos^{-1} \frac{x}{A} = \cos^{-1} \frac{\beta}{\alpha}$ ，参考点做圆运动时从左方到右方 C 的时间 $\Delta t = \frac{2\gamma}{\omega}$ ，所以这个摆与自由振动的摆周期之比为

$$\frac{T'}{T} = \frac{T - \Delta t}{T} = 1 - \frac{\frac{2\gamma}{\omega}}{\frac{2\pi}{\omega}} = 1 - \frac{\gamma}{\pi} = 1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \frac{\beta}{\alpha}.$$

等效电容

电容器串、并联后的等效电容，前面已经证明

$$C_{\#} = \sum_{i=1}^n C_i, \quad \frac{1}{C_{\text{串}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$

研究等效电容问题中，重要的是正确确定各电容器之间的连接关系。

例 1 如图 102 所示， $C_2 = 10$ 微法， $C_1 = C_3 = C_4 = C_5 = 4$ 微

法,求 A 、 B 两端之间的等效电容.

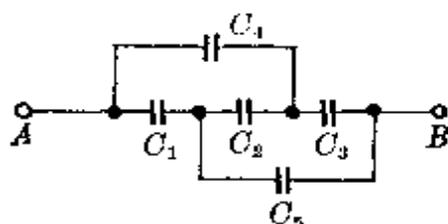


图 102

分析与解答 画出等效电路如图 103 所示. 由于 $C_1 = C_3 = C_4 = C_5$, 因此 C_2 两端电势差 $U_{ab} = 0$, 这就等效于 a 、 b 间断路(或短路), 电容 C_2 不起作用. 所以 A 、 B 两端间的等效电容

$$C_{AB} = \frac{C_4 C_3}{C_4 + C_3} + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_5} = \left(\frac{4 \times 4}{4 + 4} + \frac{4 \times 4}{4 + 4} \right) \text{微法}$$

$$= 4 \text{微法}.$$

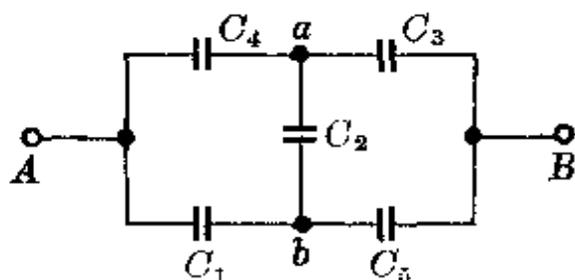


图 103

例 2 一平行板电容器由 A 、 B 两板组成, 相距为 d , 电容量为 C . 现把它放在金属盒 KK' 内, 金属盒上下两内壁与 A 、 B 的距离均为 $d/2$ (图 104), 则此时 a 、 b 两端间的电容是多少? 若把电容器的一极板与盒相连, 则 a 、 b 两端间的电容又为多少?

分析与解答 电容器放入金属盒 KK' 内后, A 板与盒的上侧、 B 板与盒的下侧分别构成一个平行板电容器 C' 、 C'' . 由于它们两极板之间的距离仅为 $d/2$, 因而其电容量 $C' =$



图 104

$C'' = 2C$. 于是, 整个装置可等效成 C' 与 C'' 串联后再与 C 并联的电路(图 105), 所以等效电容为

$$C_{ab} = C + \frac{C' C''}{C' + C''} = C + C = 2C,$$

即为原来的 2 倍.

若一个极板(如 A 板)与盒相连, 相当于 C' 被短路, 整个装置等效于 C 与 C'' 的并联(图 106). 其等效电容为

$$C'_{ab} = C + C'' = C + 2C = 3C,$$

即为原来的 3 倍.

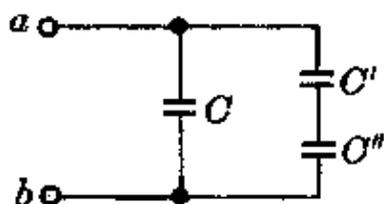


图 105

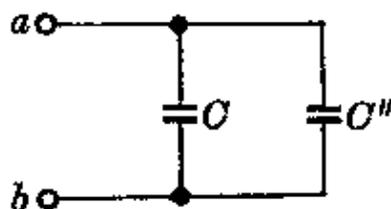


图 106

例 3 一平行板电容器, 极板面积为 S , 间距为 d , 中间放有厚度分别为 d_1 、 d_2 、 d_3 , 介电常数分别为 ϵ_1 、 ϵ_2 、 ϵ_3 的三种介质[图 107(a)]. 求此平行板电容器的电容.

分析与解答 原电容器等效于三个平行板电容器串联, 如图 107(b)所示. 其电容量依次为

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 S}{4\pi k d_1}, C_2 = \frac{\epsilon_2 S}{4\pi k d_2}, C_3 = \frac{\epsilon_3 S}{4\pi k d_3}.$$

设总电容(等效电容)为 C , 则由

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2}{C_1 C_2 C_3},$$

得

$$C = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2}$$

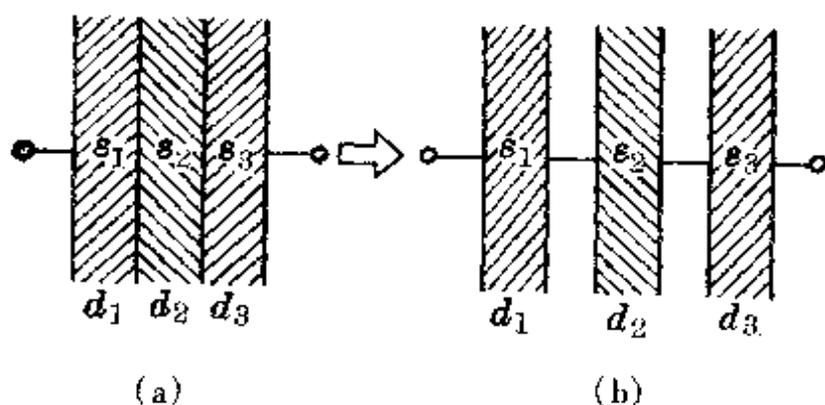


图 107

$$\begin{aligned}
 &= \frac{S}{4\pi k} \frac{\frac{\epsilon_1}{d_1} \cdot \frac{\epsilon_2}{d_2} \cdot \frac{\epsilon_3}{d_3}}{\left(\frac{\epsilon_2}{d_2} \cdot \frac{\epsilon_3}{d_3} + \frac{\epsilon_1}{d_1} \cdot \frac{\epsilon_3}{d_3} + \frac{\epsilon_1}{d_1} \cdot \frac{\epsilon_2}{d_2} \right)} \\
 &= \frac{S}{4\pi k} \cdot \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} + \frac{d_3}{\epsilon_3}}
 \end{aligned}$$

例 4 一平行板电容器, 两板间距为 d , 中间放有面积分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 , 介电常数分别为 ϵ_1 、 ϵ_2 、 ϵ_3 的三种介质, 如图 108(a) 所示, 求此电容器的电容.

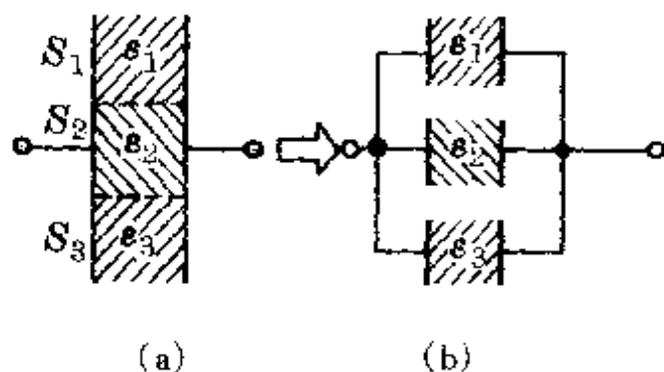


图 108

分析与解答 原电容器等效于三个平行板电容器并联, 如图 108(b) 所示. 其电容量依次为

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 S_1}{4\pi k d}, C_2 = \frac{\epsilon_2 S_2}{4\pi k d}, C_3 = \frac{\epsilon_3 S_3}{4\pi k d}.$$

所以,等效电容为

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

$$= \frac{1}{4\pi kd} (\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2 + \epsilon_3 S_3).$$

例 5 一平行板电容器由两块边长各为 a , 相距 $d \ll a$ 的方形导体板组成, 板间充满三种不同材料的介质, 如图 109 所示. 这个电容器的电容量是多少? 如果介电常数为 ϵ_3 的介质和介电常数为 ϵ_1 、 ϵ_2 的介质的交界面是一薄层导体, 结果有何变化?

分析与解答 两板间充满这三种介质时, C_1 和 C_3 、 C_2 和 C_3 之间的整个界面, 上、下两半部分的电势不等, 因此左边 ϵ_3 介质上、下两半部分形成两个电容器, 原电容器可等效成图 110 的电容器组. 其中

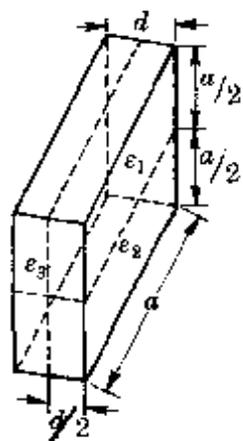


图 109

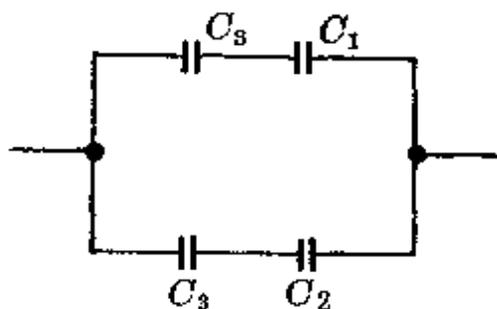


图 110

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 \cdot \frac{S}{2}}{4\pi k \cdot \frac{d}{2}} = \frac{\epsilon_1 S}{4\pi kd},$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_2 \cdot \frac{S}{2}}{4\pi k \cdot \frac{d}{2}} = \frac{\epsilon_2 S}{4\pi kd},$$

$$C_3 = \frac{\epsilon_3 \cdot \frac{S}{2}}{4\pi k \cdot \frac{d}{2}} = \frac{\epsilon_3 S}{4\pi kd}$$

整个电容器组的等效电容为

$$C = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$

$$= \frac{a^2}{4\pi kd} \left(\frac{\epsilon_1 \epsilon_3}{\epsilon_1 + \epsilon_3} + \frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3} \right)$$

当介质 ϵ_3 与 ϵ_1 、 ϵ_2 的交界面为一薄层导体时,其各部分电势相等,相当于图 110 中 C_3 的右侧被短路,原电容可等效成图 111 的电容器组,其等效电容为

$$C' = \frac{C_3' (C_1 + C_2)}{C_3' + (C_1 + C_2)} = \frac{2C_3 (C_1 + C_2)}{2C_3 + C_1 + C_2}$$

$$= \frac{a^2}{2\pi kd} \cdot \frac{\epsilon_3 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\epsilon_1 + \epsilon_2 + 2\epsilon_3}$$

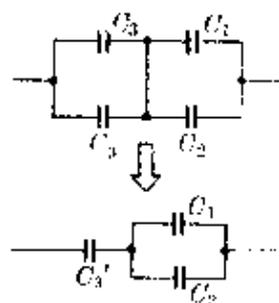


图 111

例 6 一平行板电容器的极板面积为 S , 相距为 d , 当其中的 $1/4$ 部分充有介电常数为 ϵ 的介质后(图 112), 则这个电容器的电容量与原来两板间都为空气时的电容量之比是多少?

分析与解答 设原来充有空气时的电容量为 C_0 , 即

$$C_0 = \frac{S}{4\pi kd}$$

画出充有 $1/4$ 部分介质后的等效电容, 如图 113 所示, 原电容相当于三个电容器的混联, 其中

$$C_1 = \frac{S/2}{4\pi kd} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{4\pi kd} = \frac{C_0}{2}$$

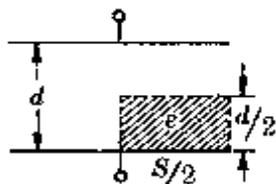


图 112

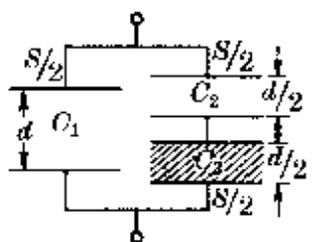


图 113

$$C_2 = \frac{S/2}{4\pi k \cdot \frac{d}{2}} = \frac{S}{4\pi kd} = C_0,$$

$$C_3 = \frac{\epsilon \cdot \frac{S}{2}}{4\pi k \cdot \frac{d}{2}} = \frac{\epsilon S}{4\pi kd} = \epsilon C_0.$$

所以,充有部分介质后的等效电容为

$$C = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{C_0}{2} + \frac{C_0 \epsilon C_0}{C_0 + \epsilon C_0} = \frac{1 + 3\epsilon}{2(1 + \epsilon)} C_0.$$

它与原来两板间都为空气时的电容量之比为

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1 + 3\epsilon}{2(1 + \epsilon)}.$$

说明 有人把充有部分介质后的电容等效成图 114 中的混联电容器,计算结果为 $\frac{C}{C_0} = \frac{2(1 + \epsilon)}{3 + \epsilon}$,这是不正确的.实质上图 114 的

混联电容器与图 112 中的电容不等效.因为在图 112 中充有部分介质后,中心面左、右两半电势不同(与例 5 同理),两板间的空间形成三个匀强电场区域——左半部分 E_1 区域,右半部分上层为 E_2 区域,下层为 E_3 区域.改画成图

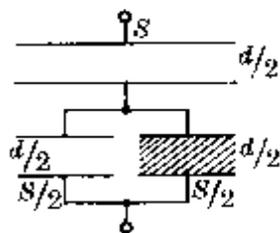


图 114

113 的电容器组,三个场强区域的分布不变,两者等效.画成图 114 的电容器组,显然已改变了板间电场的分布,因此它与原电容器不

等效.我们在任何时候都必须牢记,惟一的准则是保持效果相同.

等效电路 等效电路的含义很广,无论是求等效电阻或进行电路计算时画出标准化电路,以及把电路中某一部分的作用等效成为一个电源等,都可归并为等效电路.下面,我们侧重于从等效思维的角度研究几个等效电路的问题.

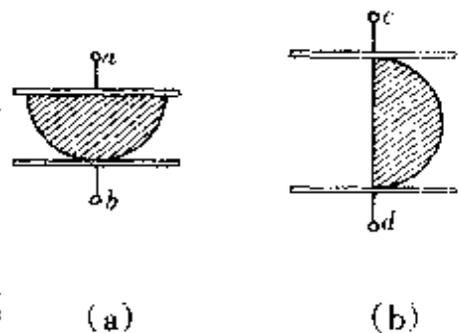


图 115

例 1 一个半圆形的薄电阻片,如图 115(a)夹在两导体板之间时,测得电阻为 R ,则如图 115(b)夹在两导体之间时测得的电阻为多少?

分析与解答 半圆薄片是一个不规则导体,无法直接用电阻定律进行计算.为此,可用组合(分割)等效法把它进行变换.

方法 1 在原半圆形电阻片上补上相同的一片,形成一个整圆形.此时 a 、 b 和 c 、 d 两端测得的电阻都为 $2R$,因此图 115(b)测得的电阻为 $4R$.如图 116 所示.

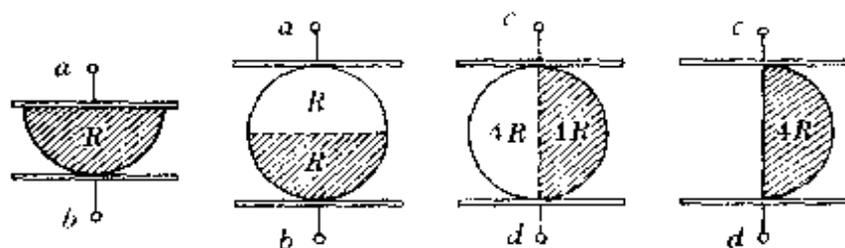


图 116

方法 2 把原半圆形电阻片分成相同的两半,设每个 $1/4$ 圆片的电阻为 R_0 ,则图 115 中 a 、 b 两端等效于两个电阻的并联,由此得 $R_0 = 2R$.图 115 中 c 、 d 两端等效于两个电阻的串联,测得的阻值为 $4R$ (图 117).

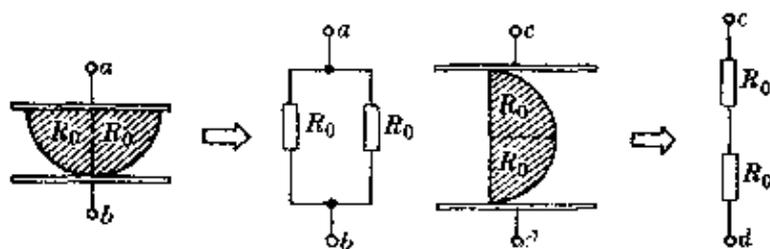


图 117

例 2 用 12 根电阻均为 r 的相同电阻丝构成如图 118 所示的立方体框架, 试求两对顶角 A 、 G 之间的等效电阻.

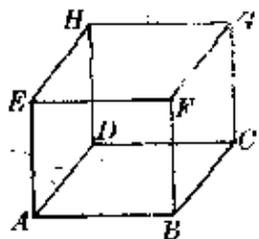


图 118

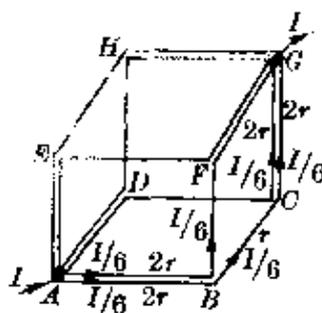


图 119

分析与解答 设从 A 点流入框架的电流为 I , 由对称性知, AB 、 AD 、 AE 和 CG 、 FG 、 HG 中的电流均为 $\frac{I}{3}$, 其余 6 根导线中电流均为 $\frac{I}{6}$. 因此, 可以把 AB 、 AD 、 AE 和 CG 、 FG 、 HG 这 6 根电阻丝都看成是两根阻值为 $2r$ 的电阻丝并联而成的, 于是, 原电路可等效成图 119 的电路. 它变成 6 条阻值为 $5r$ 的电阻丝并联而成的, 所以 AG 间的等效电阻为 $\frac{5}{6}r$.

本题有多种解法, 这里采用组合等效法, 也是一个很富有启发性的方法.

例 3 为了使图 120 所示的电路中 A 、 B 两端的等效电阻 R_{AB} 与格子数无关, 电阻 R_x 的取值为多少? R_{AB} 为多少?

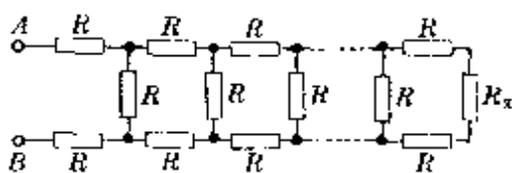


图 120

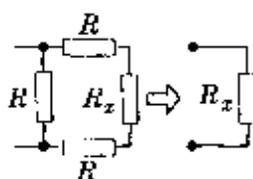


图 121

分析与解答 要求接上 R_x 后总电阻与格子数无关, 表示接上 R_x 后的最后一格的等效电阻必须等于 R_x , 如图 121 所示, 由

$$R // (2R + R_x) = R_x,$$

即

$$\frac{R(2R + R_x)}{R + (2R + R_x)} = R_x,$$

得合理值 $R_x = (\sqrt{3} - 1)R$.

所以 A 、 B 间的等效电阻为

$$R_{AB} = 2R + (\sqrt{3} - 1)R = (1 + \sqrt{3})R.$$

例 4 电阻 $R_1 = 600$ 欧, $R_2 = 400$ 欧, 串联后接在电压恒为 $U = 90$ 伏的电路(图 122), 试求:

(1) 用一只内电阻是 $R_v = 1200$ 欧的电压表跟 R_1 并联, 测得的电压是多少?

(2) 用这只电压表跟 R_2 并联, 测得的电压是多少?

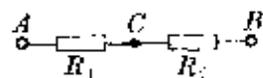


图 122

分析与解答 实际电压表可看成是一个内阻无限大的理想电压表和内阻 R_v 并联而成.

(1) 电压表并联在 R_1 上时, 可等效成图 123 的电路. AC 部分的等效电阻为

$$R_{AC} = \frac{R_1 R_v}{R_1 + R_v} = \frac{600 \times 1200}{600 + 1200} \text{ 欧} = 400 \text{ 欧}.$$

因此,电压表上测得的示数是

$$U'_{AC} = \frac{R_{AC}}{R_{AC} + R_2} U = \frac{400}{400 + 400} \times 90 \text{ 伏} = 45 \text{ 伏}.$$

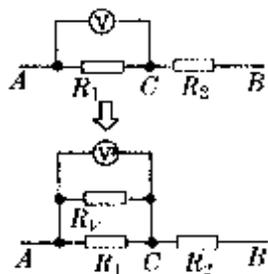


图 123

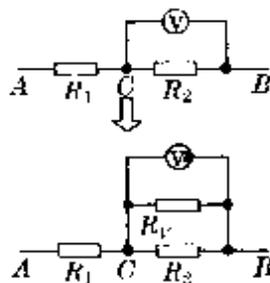


图 124

(2)电压表并联在 R_2 上时,同理可等效成图 124 所示的电路.

CB 部分的等效电阻为

$$R_{CB} = \frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V} = \frac{400 \times 1200}{400 + 1200} \text{ 欧} = 300 \text{ 欧}.$$

所以,电压表上测得的示数是

$$U'_{CB} = \frac{R_{CB}}{R_1 + R_{CB}} \times 90 \text{ 伏} = 30 \text{ 伏}.$$

例 5 用一个电源电压 $U = 600$ 伏的恒压直流电源,通过两条电阻可忽略不计的输电线与负载电阻 R 相连.由于输电线绝缘材料的限制,使两条输电线对地构成一定的绝缘电阻 R_1 和 R_2 ,如图 125 所示.若把开关 S 扳到触点 1 时,电压表的示数为 -300 伏;把开关 S 扳到触点 2 时,电压表的示数为 $+120$ 伏.已知电压表内阻 $R_V = 200$ 千欧,试求输电线对地绝缘电阻 R_1 、 R_2 的大小.

分析与解答 把电压表等效于电阻 R_V 与理想电压表的并联.由于输电线的电阻忽略不计,因此 S 扳向 1 时,原电路等效于电压表内阻与 R_1 并联后,再与 R_2 相串联,然后并接在电源两端,如图 126 所示.由此可得

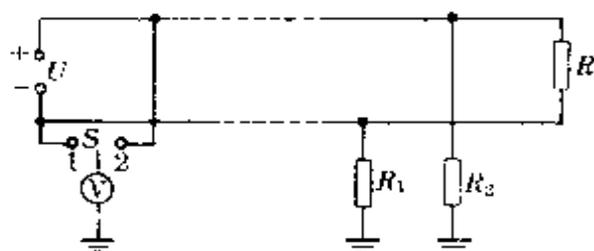


图 125

$$(R_V // R_1) : R_2 = 300 : (600 - 300) = 1 : 1.$$

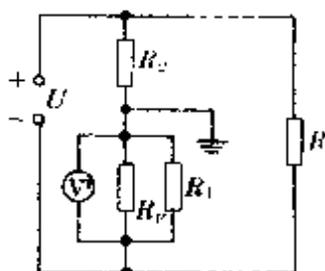


图 126

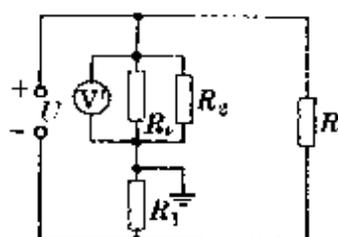


图 127

同理,当 S 扳向 2 时,原电路等效于电压表内阻与 R_2 并联后,再与 R_1 相串联,然后并接在电源两端,如图 127 所示.同理可得

$$(R_V // R_2) : R_1 = 120 : (600 - 120) = 1 : 4.$$

联立两式即可解得

$$R_1 = 300 \text{ 千欧}, R_2 = 120 \text{ 千欧}.$$

例 6 图 128 所示为用电压表和电流表测定电源电动势及内阻的电流表外接法电路.试分析,用这个电路测得的电源电动势及内阻的相对误差多大?

分析与解答 设实验中的测量值分别为 $\mathcal{E}_{\text{测}}$ 、 $r_{\text{测}}$,真实值分别为 \mathcal{E} 、 r ,电压表和电流表的内阻分别设为 R_V 和 R_A .因此,实际电压表可以看成理想电压表 V' (内阻为无限大)和内阻 R_V 的并联;实际电流表可看成理想电流表(内阻等于零)和内阻 R_A 的串联.

于是,原电路可以等效成图 129 的电路.把 R_V 并入 R ,把 R_A 并入电源内阻,最后又可等效成图 130 的电路.这样一来,原来是两个实际电表的测量电路,摇身一变就成为用两个理想电表在一个新的条件下的测量.这个新电池的电动势 $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$,内阻 $r' = r + R_A$.

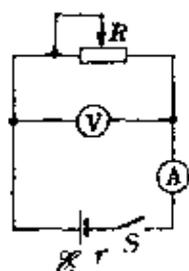


图 128

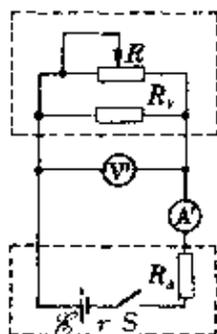


图 129

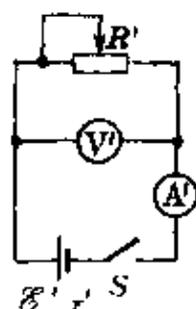


图 130

可见,电动势和内阻的测量值分别为

$$\mathcal{E}_{\text{测}} = \mathcal{E}, r_{\text{测}} = r' = r + R_A > r.$$

所以,它们的相对误差分别为

$$\eta_{\mathcal{E}} = \left| \frac{\mathcal{E}_{\text{测}} - \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right| = 0,$$

$$\eta_r = \left| \frac{r_{\text{测}} - r}{r} \right| = \frac{R_A}{r}.$$

例 7 如图 131 所示,虚线框内电池的电动势和内阻以及电阻 R_1, R_2 的阻值均不知.现在 a, b 两端接入电阻 $R_{x1} = 10$ 欧时,测得通过 R_{x1} 的电流 $I_{x1} = 1$ 安;当改换接入电阻 $R_{x2} = 18$ 欧时,测得通过它的电流 $I_{x2} = 0.6$ 安.试问,当 R_{x3} 为多少时,通过它的电流 I_{x3} 恰等于 0.1 安?

分析与解答 图 131 中的整个虚线框对负载电阻 R_x 来说,起

着电源的作用,因此可以把它整个等效成一个电源,设等效电源的电动势为 \mathcal{E}' 、内阻为 r' ,如图 132 所示.

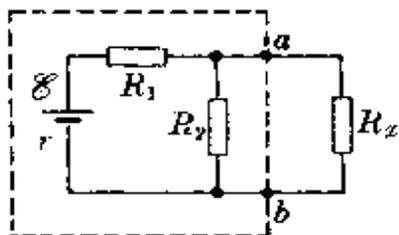


图 131

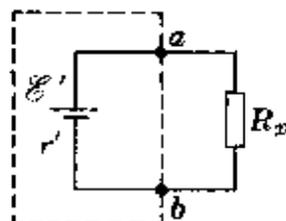


图 132

由题设条件根据闭合电路欧姆定律得

$$I_{x1} = \frac{\mathcal{E}'}{r' + R_{x1}}, I_{x2} = \frac{\mathcal{E}'}{r' + R_{x2}}.$$

两式相比
$$\frac{I_{x1}}{I_{x2}} = \frac{r' + R_{x2}}{r' + R_{x1}},$$

即
$$\frac{1}{0.6} = \frac{r' + 18}{r' + 10}.$$

得
$$r' = 2 \text{ 欧}.$$

代入电流表达式,可求得 $\mathcal{E}' = 12$ 伏.于是由

$$I_{x3} = \frac{\mathcal{E}'}{r' + R_{x3}},$$

得
$$R_{x3} = \frac{\mathcal{E}'}{I_{x3}} - r' = \left(\frac{12}{0.1} - 2 \right) \text{ 欧} = 118 \text{ 欧}.$$

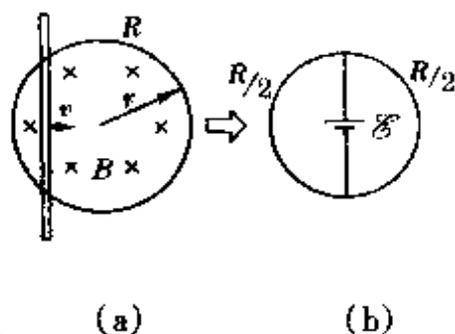
例 8 用一根电阻为 R 的导线,做成一个半径为 r 的圆环,垂直磁场方向放置在磁感应强度为 B 的匀强磁场中.环上放置一根电阻不计的铜棒,铜棒以速度 v 贴着环面运动[图 133(a)].试求,当铜棒刚好运动到通过圆心的位置时,通过铜棒中的电流为多少?

分析与解答 铜棒切割磁感线产生感应电动势,它等效成一个电源.当铜棒经过圆心位置时可画成如图 133(b)所示的等效电路.由法拉第电磁感应定律知电源电动势

$$\mathcal{E} = B \cdot 2r \cdot v = 2Brv.$$

所以流过铜棒的电流为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} // \frac{R}{2}} = \frac{2Brv}{\frac{1}{4}R} = \frac{8Brv}{R}.$$



例 9 如图 134 所示, 边长为 l 和 L 的矩形线圈 aa' 、 bb' 互相垂直, 彼此绝

图 133

缘, 可绕中心轴 $O_1 O_2$ 转动. 将两线圈的始端并在一起接至滑环 C , 末端并在一起接至滑环 D , C 、 D 彼此绝缘. 外电阻 $R = 2r$, 通过电刷跟 C 、 D 连接. 线圈处于磁铁和圆柱形铁心之间的磁场中. 磁场边缘对中心张角为 45° , 如图 135 所示, 不论线圈转到磁场中的什么位置, 磁场的方向总是沿着线圈平面, 磁场在长为 l 的边所在处的磁感应强度大小恒为 B , 设线圈 aa' 和 bb' 的电阻都是 r , 两个线圈以角速度 ω 逆时针匀速转动.

(1) 求线圈转动过程中电阻 R 上的电压最大值.

(2) 从线圈 aa' 进入磁场开始计时, 求外力驱动这两个线圈转动一圈所做的功.

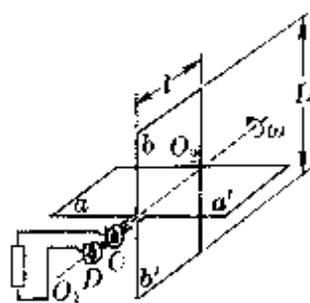


图 134

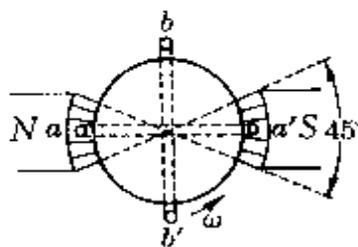


图 135

分析与解答 两个线圈转动时, 最多只能有一个线圈在磁场中做切割运动, 切割运动方向始终垂直磁感线. 所以, 线圈进入磁场区域时产生的感应电动势恒为

$$\mathcal{E} = B\omega S = B\omega L.$$

(1) 当一个线圈在磁场中做切割运动等效成一个电源时, 另一个线圈作为负载与外电阻 R 并联, 这个电源的电动势 $\mathcal{E} = B\omega L$, 内阻等于 r , 因此其等效电路如图 136 所示.

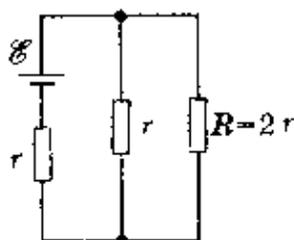


图 136

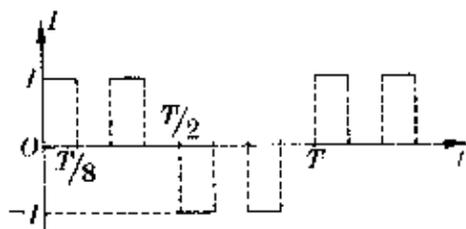


图 137

电阻 R 上电压的最大值为

$$\begin{aligned} U_R &= \frac{\mathcal{E}}{r + (r // R)} \cdot (r // R) = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{r \cdot 2r}{r + 2r}} \cdot \frac{r \cdot 2r}{r + 2r} \\ &= \frac{2}{5} \mathcal{E} = \frac{2}{5} B\omega L. \end{aligned}$$

(2) 线圈转动时, 两个线圈每隔 $T/8$ 交替进入磁场, 电源中通过的是大小恒定的间歇电流, 如图 137 所示. 电流强度的大小由等效电路得

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + (r // R)} = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{2}{3}r} = \frac{3}{5r} \mathcal{E} = \frac{3B\omega L}{5r}.$$

两个线圈转动一周的时间内, 只有半个周期需做功, 所以外力做功的大小为

$$W = I\mathcal{E} \cdot \frac{T}{2} = \frac{3B^2 \omega^2 l^2 L^2}{5r} \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{3\pi B^2 \omega l^2 L^2}{5r}.$$

例 10 如图 138 所示, 螺线管匝数 $n = 4$, 截面积 $S = 0.1$ 米². 管内均匀磁场以 $\frac{\Delta B_1}{\Delta t} = 10$ 特/秒逐渐增强, 螺线管两端分别与两根

在竖直平面内的平行光滑直导轨相接,垂直导轨的水平匀强磁场的磁感强度 $B_2 = 2$ 特.现在导轨上垂直放置一根质量 $m = 20$ 克、长 $l = 0.1$ 米的铜棒,假设铜棒与导轨、螺线管组成的回路电阻恒为 $R = 5$ 欧,试求铜棒从静止下落的最大速度.取 $g = 10$ 米/秒².

分析与解答 螺线管内因磁通变化产生电动势

$$\mathcal{E}_1 = n \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = nS \frac{\Delta B_1}{\Delta t} = 4 \times 0.1 \times 10 \text{ 伏} = 4 \text{ 伏}.$$

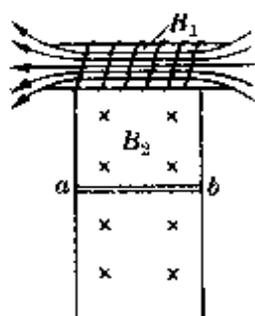


图 138

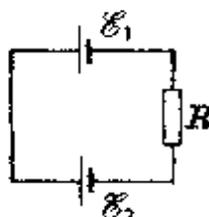


图 139

铜棒中产生从左端 a 流向右端 b 的电流,受到向上的磁场力

$$F = I_1 l B_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{R} l B_2 = \frac{4}{5} \times 0.1 \times 2 \text{ 牛} = 0.16 \text{ 牛}.$$

由于铜棒的重力 $G = mg = 20 \times 10^{-3} \times 10 \text{ 牛} = 0.2 \text{ 牛}$,它大于向上的磁场力,因此铜棒下落,切割磁感线,产生感应电动势 \mathcal{E}_2 ,整个回路可等效成如图 139 所示的电路.它相当于两个电池相串联,通过铜棒的电流增大,下落的加速度减小.当满足条件

$$mg = I B_2 l = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R} l B_2 = \frac{\mathcal{E}_1 + B_2 l v_m}{R} l B_2$$

时,铜棒下落的速度达最大.所以速度的最大值

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{mgR - \mathcal{E}_1 l B_2}{l_2 B_2^2} = \frac{20 \times 10^{-3} \times 10 \times 5 - 4 \times 0.1 \times 2}{0.1^2 \times 2^2} \text{ 米/秒} \\ &= 5 \text{ 米/秒}. \end{aligned}$$

例 11 如图 140 所示日光灯电路,已知灯管电阻为 300 欧,镇流器电阻为 40 欧,电感为 1.3 亨,试求电路中各部分的电压.已知电源电压有效值 $U = 220$ 伏,频率 $f = 50$ 赫.

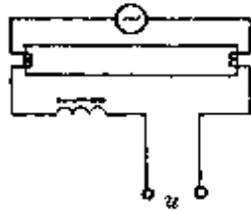


图 140

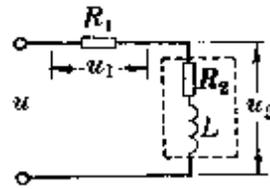


图 141

分析与解答 画出日光灯电路的等效电路,如图 141 所示.其中 $R_1 = 300$ 欧, $R_2 = 40$ 欧, $L = 1.3$ 亨.

电路的总电阻

$$R = R_1 + R_2 = 300 \text{ 欧} + 40 \text{ 欧} = 340 \text{ 欧},$$

镇流器的感抗

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \times 50 \times 1.3 \text{ 欧} = 408 \text{ 欧},$$

电路的总阻抗

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{340^2 + 408^2} \text{ 欧} = 532 \text{ 欧},$$

电路中的电流强度

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{532} \text{ 安} = 0.414 \text{ 安}.$$

所以,灯管两端和镇流器两端的电压分别为

$$U_1 = IR_1 = 0.414 \times 300 \text{ 伏} = 124.2 \text{ 伏},$$

$$\begin{aligned} U_2 &= IZ_2 = I\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2} = 0.414 \sqrt{40^2 + 408^2} \text{ 伏} \\ &= 169 \text{ 伏}. \end{aligned}$$

例 12 如图 142 所示为单管放大器电路.试确定其电压放大倍数 $(K_u = \frac{u_2}{u_1})$ 与电流放大倍数 β 的关系.

分析与解答 因为在晶体管的输入端加上交流讯号电压(u_1)时,将产生相应的基极电流 i_b ,因此,晶体管的输入端可以等效成一个电阻 r_{be} ,如图 143 所示.

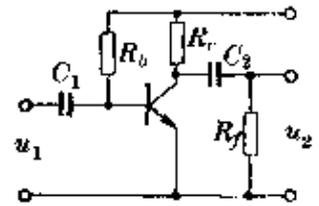


图 142

由于晶体管是一个电流控制元件,集电

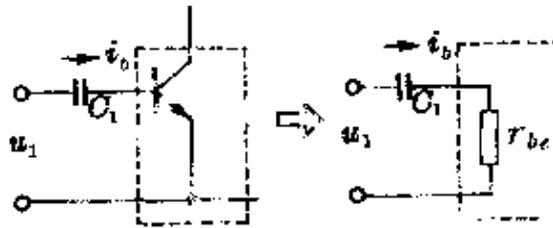


图 143

极电流 i_c 恒为基极电流的 β 倍,即电流放大倍数 $\beta = \frac{i_c}{i_b}$.因此,输出部分可以等效成产生电流 βi_b 的恒流源.整个晶体管的等效电路如图 144 所示.

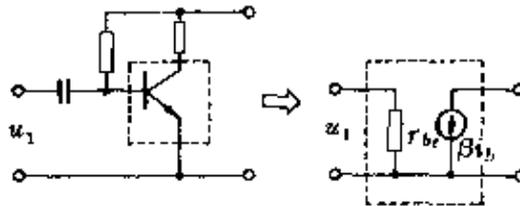


图 144

因为对交流讯号来说,电容和电源都可认为短路, R_b 、 R_c 好像分别并接在输入、输出端,如图 145 所示(称为交流通道).所以,最后又可等效成如图 146 所示的电路.

由

$$i_b = \frac{u_1}{r_{be}}, \quad i_c = \beta i_b,$$

$$u_2 = -i_c R_f' = -i_c (R_c // R_f),$$

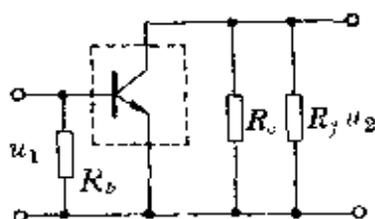


图 145

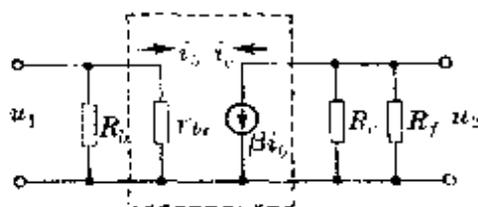


图 146

式中负号表示输出与输入反位相。

得电压放大倍数

$$K_u = \frac{u_2}{u_1} = - \frac{-i_c R_f'}{i_b r_{be}} = -\beta \frac{R_f'}{r_{be}}$$

或者

$$\left| \frac{K_u}{\beta} \right| = \frac{R_f'}{r_{be}}$$

也就是说,单管放大器的电压放大倍数与电流放大倍数之比值的
大小,等于输出电阻与输入电阻的比值。

等效力场 我们已经知道,物体做加速运动时,可以引入一个等效重力场,把运动问题转化为平衡问题。当物体在同时有重力、电场力、磁场力的复合力场中运动时,也可以引入一个等效力场,把复合场中的问题简化为类似于重力场中的运动问题。这两种情况,在中学物理中都有着普遍的反映。

例 1 在升降机中固定一个倾角为 θ 的斜面,斜面上放一块质量为 m 的物体,当升降机以加速度 a 匀加速上升时,物体静止在斜面上(图 147),那么斜面对这个物体的作用力

- A. 大小为 $m(g+a)$, 方向竖直向上。
- B. 大小为 $m(g+a)\cos\theta$, 方向竖直向上。
- C. 大小为 $m(g+a)$, 方向垂直斜面向上。
- D. 大小为 $m(g+a)\cos\theta$, 方向垂直斜面向上。

分析与解答 斜面对物体的作用力指支持力与摩擦力的合

力.如图 148 所示.由

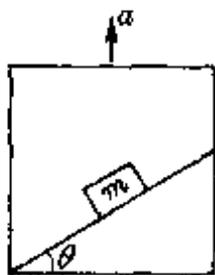


图 147

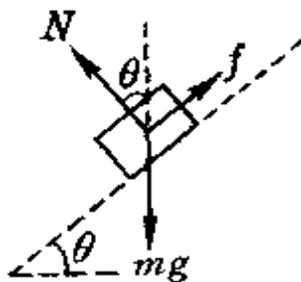


图 148

$$N \cos \theta + f \sin \theta - mg = ma,$$

$$N \sin \theta - f \cos \theta = 0,$$

又
$$F = \sqrt{N^2 + f^2}.$$

联立三式即得斜面对物体的支持力大小为

$$F = m(g + a),$$

方向竖直向上.所以正确答案为 A.

如果引力等效重力场 $g' = g + a$, 立即可知 $F = mg' = m(g + a)$, 如图 149 所示.这种方法对判断性问题尤为适宜.

例 2 一个举重运动员在地面上最多能举起质量 $m_1 = 60$ 千克的物体, 在一个匀加速下降的电梯内却最多能举起质量 $m_2 = 80$ 千克的物体, 这个电梯的

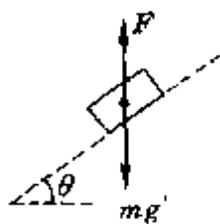


图 149

加速度大小为多少? 若电梯以同样大小的加速度匀加速上升, 那么这个运动员在电梯内最多能举起质量为多少的物体? 取 $g = 10$ 米/秒².

分析与解答 电梯加速下降或加速上升, 其等效重力场强度分别为 $g' = g - a$ 、 $g'' = g + a$. 举重运动员举起最大质量物体时, 它们的重力都相同. 于是由

$$F = m_1 g = m_2 (g - a) = m_3 (g + a),$$

得电梯加速度大小

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2} g = \frac{80 - 60}{80} \times 10 \text{ 米/秒}^2 \\ = 2.5 \text{ 米/秒}^2.$$

运动员在加速向上电梯中能举起物体的质量为

$$m_3 = \frac{g}{g + a} m_1 = \frac{10}{10 + 2.5} \times 60 \text{ 千克} = 48 \text{ 千克}.$$

例 3 用一根长 l 的细线悬挂一个密度为 ρ 的小球, 并把它放在密度为 ρ_0 ($\rho_0 < \rho$) 的液体里, 不计液体对小球运动的阻力, 试求小球在平衡位置两边做小振幅的振动时, 小球的振动周期.

分析与解答 小球在液体中运动时, 受到恒定的重力 $mg = \rho g V$ 和恒定的浮力 $Q = \rho_0 g V$ (式中 V 为小球体积), 可以把它们合成为一个等效力场, 这个力场的强度

$$g' = \frac{\rho g V - \rho_0 g V}{\rho V} = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) g,$$

如图 150 所示.

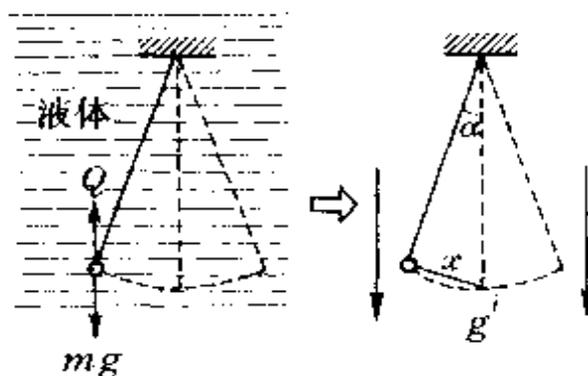


图 150

小球做小振幅振动时, 其回复力

$$F_r = mg' \sin \alpha \approx mg' \frac{x}{l}.$$

即与位移成正比, 且方向相反, 所以在液体中的小球也做简谐运动, 其周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{\rho - \rho_0} \cdot \frac{l}{g}}$$

说明 运用等效力场的概念,许多情况下可直接得出摆的振动周期,例如:

(1) 一个带负电的单摆小球,在竖直向上的匀强电场中,就像处于一个强度为 $g' = g + \frac{Eq}{m}$ 的等效力场中(图 151),因此,这个小球做小振幅振动时的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{Eq}{m}}}$$

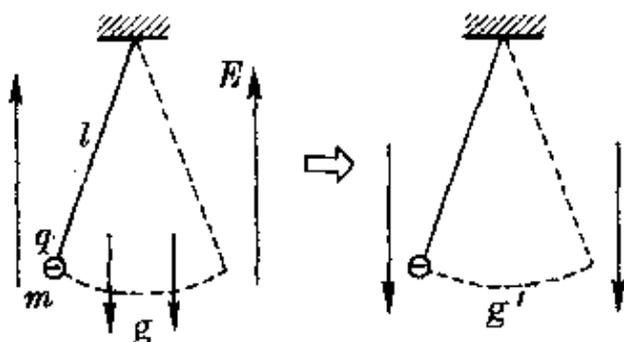


图 151

(2) 沿平直轨道以加速度 a 做匀加速运动的车厢中,用一根长 l 的细线悬挂一个质量为 m 的小球,就像这个小球处于强度为 $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$,与竖直方向间夹角 $\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{a}{g}$ 的等效力场中(图 152),这个小球在平衡位置附近做小振幅振动时的周期为

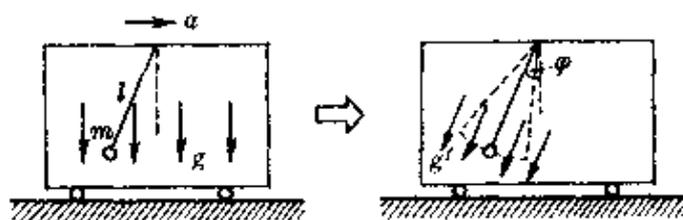


图 152

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$$

例 4 一个升降机高 $l = 2.8$ 米, 以加速度 $a = 1.2$ 米/秒² 匀加速上升, 当上升速度为 $v = 2.4$ 米/秒时, 有一螺钉自升降机的天花板上松落. 试求螺钉落到升降机地板上的时间. 取 $g = 10$ 米/秒².

分析与解答 对于升降机内的观察者(以及升降机内一切物体), 相当于处在一个新的重力场中, 这个重力场强度(等效重力加速度) $g' = g + a$, 如图 153 所示. 因此, 螺钉从顶板落到地板上的时间

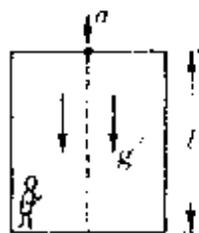


图 153

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g'}} = \sqrt{\frac{2l}{g+a}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.8}{10 + 1.2}} \text{ 秒} \approx 0.7 \text{ 秒}.$$

例 5 一艘宇宙飞船在某阶段分成质量比为 1:2 的两部分, 相距为 L , 由辅助发动机使它们相对共同质心旋转. 今发现装在质量较大的这部分座舱内的摆钟的振动比在地球上时慢一半, 试求两部分绕公共质心旋转的周期.

分析与解答 摆的振动周期 $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 由题意知, 质量较大的这部分(设为 m_2)座舱内形成的等效重力加速度 $g_2 = \frac{g}{4}$. 这个等效重力加速度相当于等效力场强度, 就是由于绕公共质心旋转而产生的向心加速度, 即

$$g_2 = a_n = \frac{4\pi^2 r_2}{T^2}.$$

式中 r_2 为 m_2 离公共质心 C 的距离. 设质量较小的这部分 m_1 离公共质心 C 的距离为 r_1 (图 154). 由

$$r_1 + r_2 = L,$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2},$$

得 $r_2 = \frac{1}{3}L.$

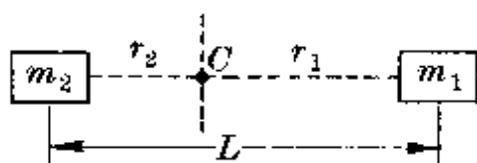


图 154

所以,它们绕公共质心 C 转动的周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_2}{g_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}L}{\frac{1}{4}g}} = 2\pi \sqrt{\frac{4L}{3g}}.$$

说明 两部分物体绕公共质心旋转的周期,也可以看成是在等效力场中以质心为悬点、旋转半径为等效摆长的单摆的振动周期.

例 6 一封闭、弯曲的玻璃管 ABC 处于竖直平面内,其中充满某种液体,液体中有一块木块,它的密度为液体密度 ρ_0 的一半.木块从 A 端由静止开始运动,运动中木块和管壁间的动摩擦因数 $\mu = 0.5$ (图 155).已知玻璃管两壁 $AB = BC = l = 2$ 米, B 附近是一小段光滑圆弧, $\alpha = 37^\circ$,取 $g = 10$ 米/秒².求

- (1) 木块到达最高点 B 的速度;
- (2) 木块从开始运动到第一次速度为零的时间;
- (3) 木块最终静止在何处? 木块从开始运动到静止经历的总路程是多少?

分析与解答 木块在运动过程中受到恒定的重力 mg 和浮力 $Q = \rho_0 g \frac{m}{\frac{1}{2}\rho_0} = 2mg$,可以把它看成处于 $g' = g$ 、方向竖直向上的等效力场中,如图 156(a)所示.

由于木块运动过程中只压紧管内的上表面,因此,如果把整个

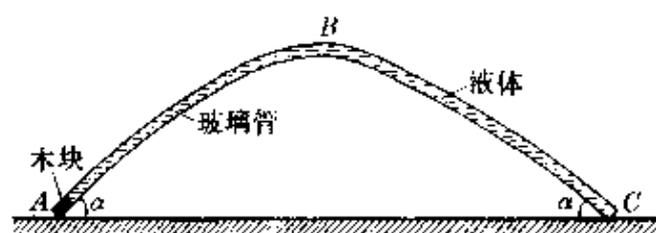


图 155

装置以 AC 为轴旋转 180° , 就变成了在重力场 g' 中沿对接斜面的运动, 如图 156(b) 所示.

(1) 由动能定理

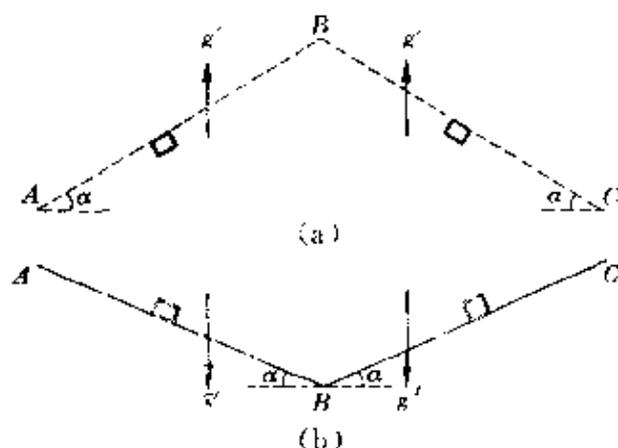


图 156

$$mg' \sin \alpha - \mu mg' \cos \alpha \cdot l = \frac{1}{2} mv_B^2,$$

得

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{2g'l(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} \\ &= \sqrt{2 \times 10 \times 2(0.6 - 0.5 \times 0.8)} \text{ 米/秒} \\ &= 2\sqrt{2} \text{ 米/秒}. \end{aligned}$$

(2) 设第一次速度为 0 时在 BC 段上的某处 D (未画出), 从 A 到 B 的时间为 t_1 , 从 B 到 D 的时间为 t_2 , 则由动量定理

$$mg' \sin \alpha \cdot t_1 - \mu mg' \cos \alpha \cdot t_1 = mv_B - 0,$$

$$-mg' \sin \alpha \cdot t_2 - \mu mg' \cos \alpha \cdot t_2 = 0 - mv_B,$$

得

$$t_1 = \frac{v_B}{g'(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} = 1.41 \text{ 秒},$$

$$t_2 = \frac{v_B}{g'(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = 0.28 \text{ 秒}.$$

所以从开始运动到第一次速度为零的时间

$$t = t_1 + t_2 = 1.69 \text{ 秒}.$$

(3)由图 156(b)的运动可以判知,木块最终必停在 B 点.因为木块的初始总能量完全消耗于克服摩擦力所做的功,所以由

$$mg' l \sin \alpha = \mu mg' \cos \alpha \cdot s,$$

立即可得木块的总路程

$$s = \frac{l \sin \alpha}{\mu \cos \alpha} = \frac{2 \times 0.6}{0.5 \times 0.8} \text{ 米} = 3 \text{ 米}.$$

例 7 半径为 R_1 的导电球,其外围是半径为 R_2 的同心导电薄球壳,球和球壳均不带电.在球与球壳之间,离球心距离为 R ($R_1 < R < R_2$) 处放一个点电荷 q ,再用细导线将球与球壳相连,如图 157 所示.试问在球壳上将产生多少电荷?

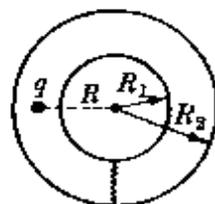


图 157

分析与解答 设球壳上的感应电荷为 Q ,则中央球体上的感应电荷为 $-Q$.根据点电荷电势公式和电势的叠加法则*,球体的电势(即球中心的电势)为

$$U_{\text{球}} = k \left(-\frac{Q}{R_1} + \frac{q}{R} + \frac{Q}{R_2} \right).$$

* 点电荷电势公式为 $U = k \frac{q}{r}$.

对于这个带电系统来说,总电量为 q ,在 $r \geq R_2$ 的外部空间(包括球壳表面),系统的电场等效于把点电荷 q 放在球心时形成的电场,因此球壳的电势(即 $r = R_2$ 时)为

$$U_{\pi} = k \frac{q}{R_2}.$$

由于球体和球壳相连,为一等势体,即

$$k \left(-\frac{Q}{R_1} + \frac{q}{R} + \frac{Q}{R_2} \right) = k \frac{q}{R_2},$$

得球壳的感应电荷电量为

$$Q = \frac{\frac{R_2}{R} - 1}{\frac{R_2}{R_1} - 1} q.$$

例 8 如图 158 所示,在一个足够大的铅板 A 的右表面上贴一放射源 P , P 可以向各个方向释放出 β 粒子,设速度大小 $v = 10^7$ 米/秒.在 A 板右边相距 $d = 2$ 厘米处放一平行于 A 的金属板 B ,使 A 带负电, B 带正电后,板间形成场强大小为 $E = 3.64 \times 10^4$ 牛/库的匀强电场,试求 β 粒子打在 B 板上的范围(β 粒子的质量 $m = 9.1 \times 10^{-31}$ 千克,电量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ 库).

分析与解答 A 、 B 两板带电后,板间形成水平向左的匀强电场. β 粒子带负电,它从放射源释放后受到恒定的水平向右的电场力 $F = Ee$.把 A 、 B 两板顺时针向转过 90° ,可以看成板间有一个等效重力场,重力加速度 $g' = \frac{Ee}{m}$ (图 159).由于放射源 P 能向各个方向放射 β 粒子,所以打在 B 板上的范围由沿着 A 板放射的粒子决定,它在板间做平抛运动.由

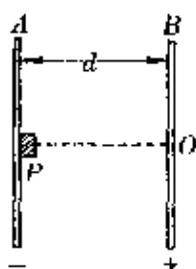


图 158

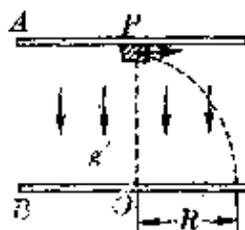


图 159

$$l = \sqrt{\frac{2d}{E}} = \sqrt{\frac{2d}{Ee/m}} = \sqrt{\frac{2dm}{Ee}},$$

得
$$R = vt = v \cdot \sqrt{\frac{2dm}{Ee}} = 10^7 \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \times 10^{-2} \times 9.1 \times 10^{-31}}{3.64 \times 10^4 \times 1.6 \times 10^{-19}}} \text{ 米}$$

$$= 2.5 \times 10^{-2} \text{ 米.}$$

表示在 B 板上将形成一个以 O 为圆心、R 为半径的圆。

例 9 两带电平行板相距 $d = 0.1$ 米，电势差 $U = 10^3$ 伏。在两板中央 O 点用一根长 $l = 0.01$ 米的细丝线悬挂一个质量 $m = 0.2$ 克、带正电荷 $q = 10^{-7}$ 库的小球。现将小球 A 拉到丝线恰呈水平位置后轻轻释放，小球摆到 B 点时丝线突然从悬点 O 处脱开，以后小球恰能经过 B 点正下方的 C 点(图 160)，则 BC 相距多远？取 $g = 10$ 米/秒²。

分析与解答 两平行板间场强大小 $E = \frac{U}{d}$ ，方向为水平向右。由于小球带正电，因此从 A 点释放后，细丝线处于紧张状态，小球从 A 到 B 做变速圆周运动。由动能定理

$$mgl - q \frac{U}{d} l = \frac{1}{2} m v_B^2,$$

得小球落至 B 处时的速度

$$v_B = \sqrt{2gl - \frac{2Uql}{dm}}$$

$$= \sqrt{2 \times 10 \times 0.01 - \frac{2 \times 10^3 \times 10^{-7} \times 0.01}{0.1 \times 0.2 \times 10^{-3}}} \text{ 米/秒}$$

$$= 0.32 \text{ 米/秒.}$$

在 B 点时丝线从 O 处脱开后, 小球在竖直方向做自由落体运动, 因此

$$h_{BC} = \frac{1}{2} g t^2.$$

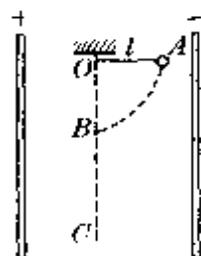


图 160

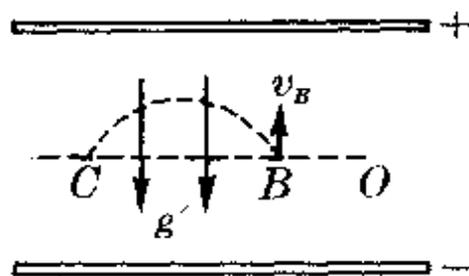


图 161

为了确定从 B 到 C 的时间 t , 可把平行板顺时针向旋转 90° , 如图 161 所示. 因此在垂直板面方向可把小球看成在等效力场

($g' = \frac{Eq}{m} = \frac{Uq}{dm}$) 中做一次竖直上抛运动, 从 B 到 C 的运动时间

$$t = 2 \frac{v_B}{g'} = 2 \frac{dmv_B}{Uq} = 2 \times \frac{0.1 \times 0.2 \times 10^{-2} \times 0.32}{10^3 \times 10^{-7}} \text{ 秒}$$

$$= 0.128 \text{ 秒}$$

$$\therefore h_{BC} = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (0.128)^2 \text{ 米} = 0.08 \text{ 米.}$$

例 10 倾角 $\alpha = 37^\circ$ 的光滑绝缘斜面, 处在水平向右、范围较大的匀强电场中, 场强 $E = 10^3$ 牛/库, 有一质量 $m = 3 \times 10^{-3}$ 千克的带电小球, 以速度 $v = 1$ 米/秒沿斜面匀速下滑, 如图 162 所示. 取 $g = 10$ 米/秒². 试求:

(1) 小球带何种电荷? 电量为多少?

(2) 在小球沿斜面匀速下滑的某一时刻撤去斜面, 小球在此后经时间 $t = 0.2$ 秒内的位移 s 的大小为多少?

分析与解答 (1) 小球做匀速运动, 它所受重力与电场力的合力必然与斜面对小球的支持力等值反向, 可见小球必带正电. 或者说, 小球所受的等效重力 mg' 与支持力 N 等值反向, 如图 163 所示. 由

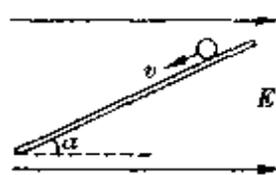


图 162

$$\frac{Eq}{mg} = \operatorname{tg} \alpha,$$

得小球带电量

$$\begin{aligned} q &= \frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{E} = \frac{3 \times 10^{-3} \times 10 \times 0.75}{10^3} \text{ 库} \\ &= 2.25 \times 10^{-5} \text{ 库}. \end{aligned}$$

(2) 撤去斜面, 小球仅受等效重力 mg' . 如把原图顺时针向转过 α 角, 立即可以看出, 小球在等效重力场 g' 中做平抛运动 (图 164). 经时间 t 后的水平位移和竖直位移 (即沿斜面方向和垂直斜面方向) 分别为

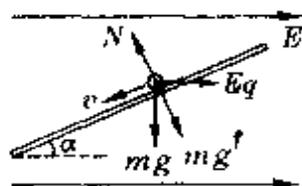


图 163

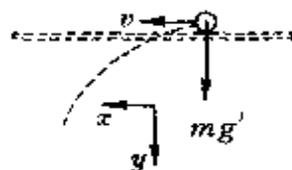


图 164

$$x = vt = 1 \times 0.2 \text{ 米} = 0.2 \text{ 米},$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} g' t^2 = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + \left(\frac{Eq}{m}\right)^2} t^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{100 + \frac{(10^3 \times 2.25 \times 10^{-5})^2}{(3 \times 10^{-3})^2}} \times 0.2^2 \text{ 米} \end{aligned}$$

$$= 0.25 \text{ 米.}$$

所以,在时间 t 内的位移为

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0.2^2 + 0.25^2} \text{ 米} = 0.32 \text{ 米.}$$

等效过程

当我们只对物体运动变化的初始条件和最终结果感兴趣,并不计较于中间所发生的具体过程时,常用一些较简单的过程代替原来较复杂的过程,这种等效变换在中学物理各个部分都是屡见不鲜的.

例 1 一个质量为 m 的物体,从离开倾角为 α 的斜面底部 x_0 处以初速 v_0 运动,物体与斜面间的动摩擦因数为 μ ,物体滑到底部时与垂直斜面的弹性墙发生碰撞,不损失机械能地反弹,以后又下滑、反弹,如此往复直至静止.试求物体从开始运动至静止所通过的总路程.

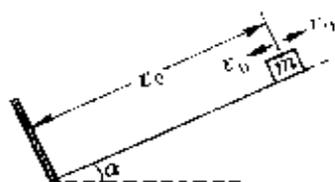


图 165

分析与解答 由于物体的初速方向未知,若要分别假设向上或向下并通过动力学、运动学公式计算,将十分繁复.根据对运动过程的分析,物体最后必静止在斜面底端,在整个运动过程中物体所受的阻力(摩擦力) f 的大小恒定($f = \mu mg \cos \alpha$).因此,可根据它的初始条件(总机械能 $E = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g x_0 \sin \alpha$)和最终效果(静止于斜面底端)把原物理过程进行等效变换——用一个水平单向运动代替原来斜面上的往复运动(图 166).

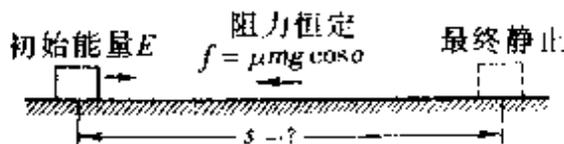


图 166

于是,立即可由功能转换关系

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgx_0 \sin\alpha = \mu mg \cos\alpha \cdot s,$$

得物体从开始运动至静止时的总路程为

$$s = \frac{v_0^2 + 2gx_0 \sin\alpha}{2\mu g \cos\alpha}.$$

例 2 图 167 所示为二极电子管电路. 当在阳极和阴极 K 之间加上直流电压 $U = 80$ 伏时, 测得通过阳极的电流 $I = 0.5$ 安. 设从阴极发射电子的初速为零, 电子在管内加速运动撞上阳极板后的速度又立即降为零. 试估算电子撞击阳极板的平均冲击力多大? 电子质量 $m = 9.1 \times 10^{-31}$ 千克, 电子电量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ 库.

分析与解答 电子撞击阳极板是一个近乎连续的过程, 计算冲击力(最终效果)的初始条件是电子碰板前后的动量变化, 在保持这个条件不变的前提下可把某段时间内电子对板的多次碰撞变换为一次完成的过程.

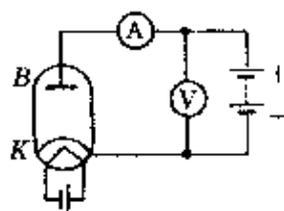


图 167

设在时间 Δt 内阴极 K 发射 n 个电子, 则由电场加速、动量变化和电流定义式得

$$eU = \frac{1}{2}mv^2,$$

$$\bar{F}\Delta t = nmv,$$

$$n = \frac{I\Delta t}{e}.$$

联立三式即得电子对阳极板平均冲击力的大小为

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \sqrt{\frac{2mU}{e}} I = \sqrt{\frac{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 80}{1.6 \times 10^{-19}}} \times 0.5 \text{ 牛} \\ &= 1.5 \times 10^{-5} \text{ 牛}. \end{aligned}$$

例 3 如图 168 所示, 潜水艇位于水面下 200 米, 艇上有一个

容积为 $V_1 = 2 \text{ 米}^3$ 的贮气钢筒,筒内贮有压缩空气,将筒内一部分空气压入水箱,水箱有排水孔与海水相连,排出海水 10 米^3 ,此时筒内剩余空气的压强是 95 个大气压.设在排水过程中温度保持不变,求贮气筒内原来的压缩空气的压强.计算时取 1 大气压 = $10 \times 10^4 \text{ 牛/米}^2$,海水密度 $\rho = 1 \times 10^3 \text{ 千克/米}^3$, $g = 10 \text{ 米/秒}^2$.

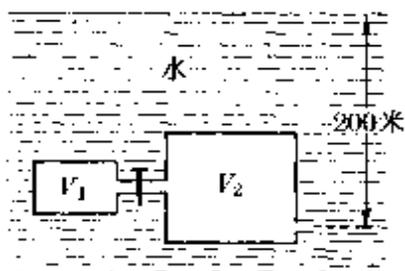


图 168

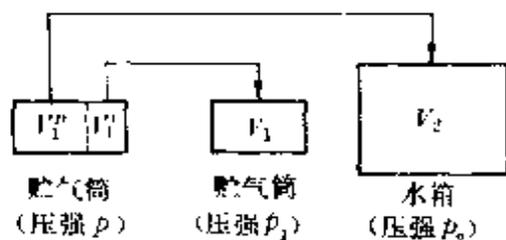


图 169

分析与解答 贮气筒内的空气压入水箱的过程是一个等温变化过程,在这过程中,筒内空气的压强和体积同时发生变化,最终结果是筒内仍充满空气,但压强减小为 95 大气压,水箱中也充满空气,压强等于 200 米深处水底压强.因此,可把贮气筒内空气发生的变化过程进行变换——其中体积为 V_1' 部分仍留在筒内,体积为 V_1'' 部分充满水箱.如图 169 所示.

根据玻意耳定律和几何条件有关系式

$$pV_1' = p_1 V_1', pV_1'' = p_2 V_2, V_1' + V_1'' = V_1.$$

联立得
$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V}.$$

其中 $p_2 = p_0 + \rho gh = \left(1 + \frac{1 \times 10^3 \times 10 \times 200}{10^5}\right) \text{ 大气压} = 21 \text{ 大气压}.$

得 $p = 200 \text{ 大气压}.$

例 4 如图 170 所示为一个光学黑盒,盒中有一个焦距为 $f_1 = 20 \text{ 厘米}$ 的凸透镜和一个焦距为 $|f_2| = 18 \text{ 厘米}$ 的凹透镜,应如何

放置才能使入射黑盒的平行光束经盒子出射时仍为平行光束?



图 170

分析与解答 这里更明显地体现了等效过程的特点,只要满足输入、输出的要求,对中间细节不作计较.由于盒中只有两个光学元件,因此在盒内的光路传播过程也只有两种可能:先经凸透镜会聚,再经凹透镜发散而成平行光;先经凹透镜发散,再经凸透镜会聚成平行光.根据两透镜的焦距参数,具体放置方法如图 171 中(a)、(b)所示.

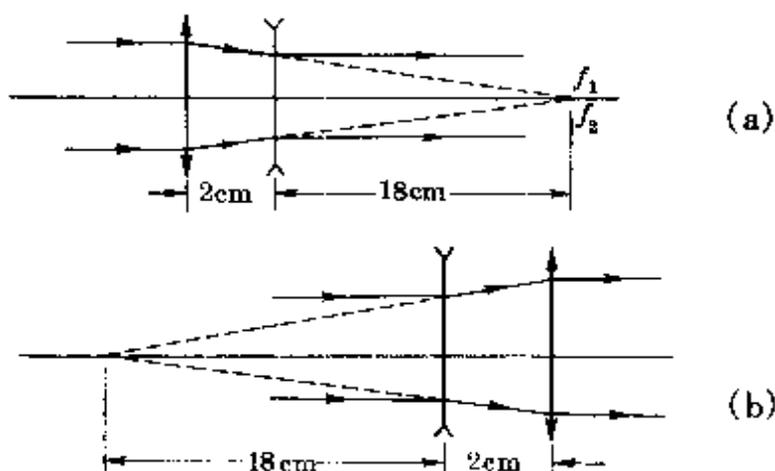


图 171

例 5 两个氘核(${}^2_1\text{H}$)聚合成一个氦核(${}^4_2\text{He}$),共放出多少能量?

分析与解答 原子核的聚合反应是一个瞬息万变的过程,其初始条件是两个氘核,最后结果合成为一个氦核,在保持这个要求的前提下我们可用一个简单的“先拆散,后结合”的过程代替真实的聚合反应.

把两个氘核拆散成四个自由核子需消耗能量为

$$E_1 = 1.11 \times 4\text{MeV} = 4.44\text{MeV},$$

把四个自由核子再合成一个氦核时可放出的能量为

$$E_2 = 7.07 \times 4 \text{MeV} = 28.28 \text{MeV}.$$

式中 1.11MeV 和 7.07MeV 分别为氘核和氦核的平均结合能. 由上述两过程的“收、支”核算, 在这个聚合反应中净获能量为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 23.84 \text{MeV}.$$

曲直互换 一个磨光的平面, 在高倍显微镜下会看到很多凹凸不平的“峰”和“谷”; 一个物体沿圆周运动, 在极短时间内可以看成是直线运动; 一条弯曲的通电导线在垂直于磁场的平面内受到的安培力, 与连接导线两端的通电直导线所受的安培力相同(图 172); 一条弯曲的导线在垂直于磁场的平面内做切割磁感线运动时产生的感应电动势, 与连接导线两端的直导线做切割运动产生的感应电动势相同(图 173)* ……



图 172

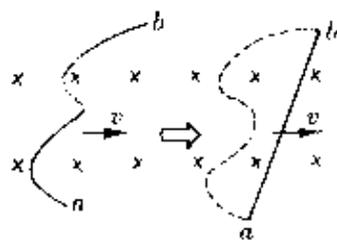


图 173

诸如此类许多事实都说明了, 在物理学中“曲”和“直”在一定条件下可以完美地统一起来, 互相转化, 或者说, 可以互相等效, 即“曲”可以等效于“直”, “直”可以等效于“曲”. 利用这种曲直互换, 处理物理问题时常可带来方便.

例 1 图 174 所示为一台螺旋起重机示意图. 已知起重螺旋的螺距 $h = 0.5$ 厘米, 手柄长 $l = 0.6$ 米, 机械效率 $\eta = 0.8$, 为了起重 $G = 2000$ 牛的重物, 手柄末端的推力 F 应为多少?

* 参见本丛书《分割与逼近》的证明.

分析与解答 当用力使手柄旋转一周时,重物上升一个螺距,克服重力的功 $W_G = Gh$. 在这一周里,推力作用点的路径是一个圆周,为了计算推力的功,可以把它等效成一段直线,如图 175 所示. 因此推力的功 $W_F = F \cdot 2\pi l$.

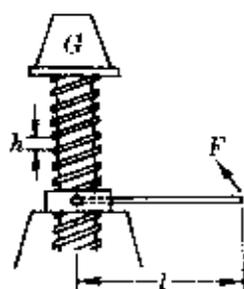


图 174

由机械效率的定义

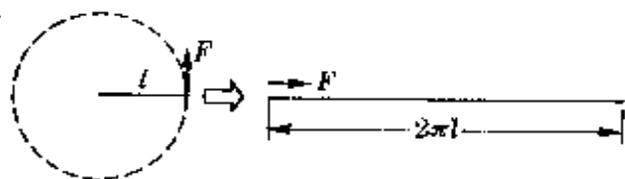


图 175

$$\eta = \frac{W_G}{W_F} = \frac{Gh}{F \cdot 2\pi l},$$

$$\therefore F = \frac{Gh}{2\pi l \eta} = \frac{2000 \times 0.5 \times 10^{-2}}{2 \times 3.14 \times 0.6 \times 0.8} \text{ 牛} = 3.3 \text{ 牛}.$$

例 2 1654 年,德国的马德堡市市长格里凯(O. V. Guericke, 1602—1686)曾做了两个中空的金属半球,直径为 1.2 英尺(1 英尺 = 0.3048 米),扣在一起,然后抽去空气,用了 16 匹马分列两边才把球拉开. 这就是科学史上传为美谈的“马德堡半球”. 如果测得大气压 $p_0 = 10^5$ 帕,试估算一下,需用多大的力才能拉开?

分析与解答 假设球内完全真空,半球仅在垂直于球表面的大气压力作用下被压紧在一起. 两个半球互相压紧的力(也就等于拉开半球所需的力)等效于作用在半球底面(圆面)上的力,如图 176 所示.

所以,压力的大小为

$$F = p_0 \cdot \pi R^2.$$

代入数据 $p_0 = 10^5$ 帕, $R = \frac{d}{2} = 0.6$ 英尺 ≈ 0.18 米, 得

$$F = 10^5 \times 3.14 \times (0.18)^2 \text{ 牛} = 10173.6 \text{ 牛}.$$

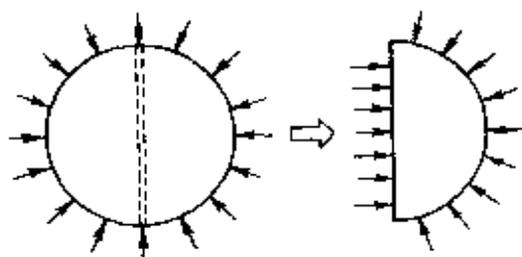


图 176

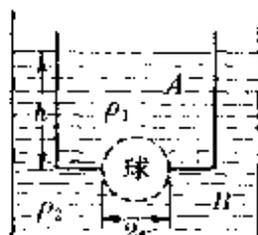


图 177

例 3 如图 177 所示, 容器 A 底部有一个半径略小于 r 的圆洞, 上面要用一个半径为 r 的小球盖住, 然后在容器 A 中注入密度为 ρ_1 的液体后, 把容器 A 放入容器 B 中, 在容器 B 中盛有密度为 ρ_2 的液体, 结果两容器内液面相平, 距容器 A 底部高为 h . 试问: 小球至少多重才能将圆洞盖住?

分析与解答 小球能盖住圆洞处于平衡状态, 小球的重力必须大于或至少等于小球所受到向上的合力.

因为小球浸在液体内会受到浮力, 由于浮力的实质是浸在液体内的物体受到液体向上和向下的压力差, 如今小球都只有一半浸在某种液体里, A 中液体对上半球无向上压力, B 中液体对下半球无向下压力, 因此不能直接从排液体积计算, 必须从受力平衡考虑.

上下两半球因排液的向上浮力分别为

$$F_{A1} = \rho_1 g V_{排} = \frac{2}{3} \pi r^3 \rho_1 g,$$

$$F_{B1} = \rho_2 g V_{排} = \frac{2}{3} \pi r^3 \rho_2 g.$$

容器 A 中液体对上半球产生的向下压力, 等效于作用在洞口

圆面上的压力[图 178(a)]; 容器 B 中液体对下半球产生的向上压力, 也等效于作用在洞口圆面上的压力[图 178(b)]. 这两个压力的大小分别为

$$F_{A2} = \rho_1 g h \pi r^2,$$

$$F_{B2} = \rho_2 g h \pi r^2.$$

小球所受的向上的合力为

$$\begin{aligned} F &= F_{A1} + F_{B1} + F_{B2} - F_{A2} \\ &= \frac{2}{3} \pi r^3 g (\rho_1 + \rho_2) + \pi r^2 g h (\rho_2 - \rho_1). \end{aligned}$$

所以, 小球自重必须满足的条件是

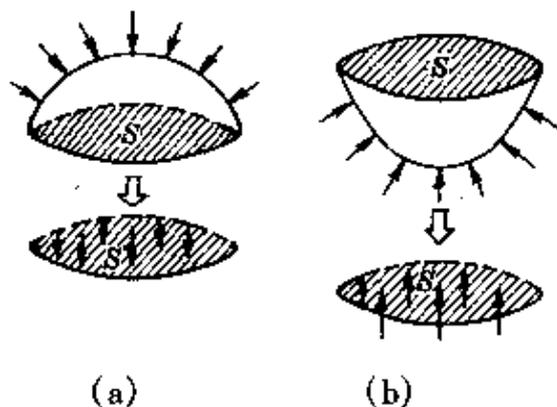


图 178

$$G \geq \frac{2}{3} \pi r^3 g (\rho_1 + \rho_2) + \pi r^2 g h (\rho_2 - \rho_1).$$

或者说, 小球重力的最小值应为

$$G_{\min} = \frac{2}{3} \pi r^3 g (\rho_1 + \rho_2) + \pi r^2 g h (\rho_2 - \rho_1).$$

例 4 一根半径为 r 的半圆形导线 ab , 在垂直于磁场的平面内以一端 a 为轴匀角速转动, 如图 179(a) 所示. 已知磁感强度为 B , 角速度为 ω , 试求 ab 两端的电势差的大小.

分析与解答 半圆形导线旋转时的切割运动, 等效于长度等于直径的直导线的旋转运动[图 179(b)]; 由于直导线转动时各处

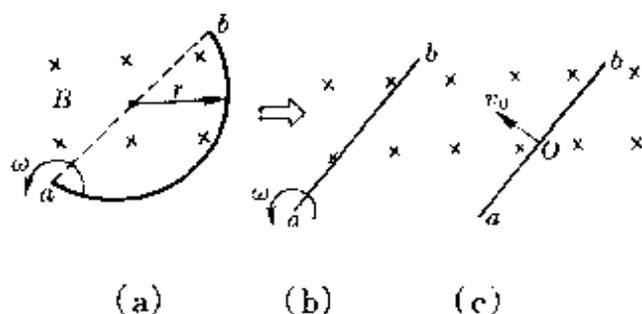


图 179

线速度不同,且与其离开转轴的距离成正比,因此又等效于以中点速度做平动的切割运动[图 179(c)],所以导线两端的电势差的大小为

$$U = \mathcal{E} = Blv_0 = B \cdot 2r \cdot \frac{\omega \cdot 2r}{2} = 2B\omega r^2.$$

例 5 在磁感强度为 B 、水平方向的匀强磁场中,有一个细金属丝环以速度 v_0 做无滑动的滚动.环上有长度为 l 的很小的一个缺口,磁场方向垂直环面.求当缺口与环心的连线与竖直方向成 α 角时(图 180),金属环产生的感应电动势.

分析与解答 如果用一段长 l 的导线把环的缺口补没,圆环滚动时由于穿过环面的磁通量不变,不会产生感应电动势.因此,有缺口的环滚动时所产生的感应电动势一定与长为 l 的这一小段导线所产生的感应电动势大小相等.由于这个缺口很小,因此填补缺口的这

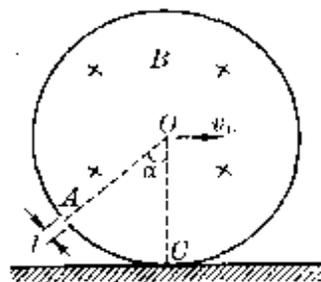
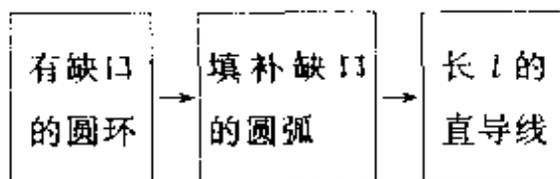


图 180

一小段导线又可看成直线,从产生感应电动势的大小而言,这里的等效方法可表示为:



圆环做纯滚动时,环上各处的线速度 v 的大小都等于环心的平动速度 v_0^* . 由于环上各处既随环以速度 v_0 平动,又绕环心转动,当缺口转至题中位置时,由图 181 可知,填补缺口的小段导线 l 的速度(即速度 v 与 v_0 的合速度)为

$$u = 2v \sin \frac{\alpha}{2}.$$

式中 $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \varphi$, φ 即为速度 u 与 l 所成的夹角.

所以,小段导线 l 所产生的感应电动势的大小为

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= B l u \sin \varphi = B \cdot 2v \sin \frac{\alpha}{2} \cdot l \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= B l v \sin \alpha. \end{aligned}$$

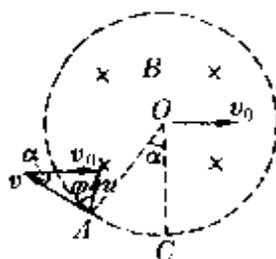


图 181

这也就是有缺口的圆环所产生的感应电动势的大小.

由此可见,环中电动势随缺口位置按正弦规律变化.

极值问题

利用等效方法研究极值问题,侧重于物理内涵上的思考,常可避开许多繁复的数学计算,显得比较方便.

例 1 从倾角 $\alpha = 30^\circ$ 的斜面顶端,以初速 $v_0 = 10$ 米/秒水平抛出一个小球(图 182),试求从抛出开始经多少时间,小球与斜面的距离最大? 设斜面足够长,取 $g = 10$ 米/秒².

分析与解答 把原来在重力物 g 中的抛体运动等效成在力场 g' 、 g'' 中的运动,如图 183 所示. $g' = g \cos \alpha$, 小球在 g' 力场中以

* 做纯滚动时,环与地面接触点 C 的瞬时速度为零,由 $v_0 = \omega R$ 得绕环心的角速度

$\omega = \frac{v_0}{R}$, 所以环上各处线速度大小 $v = \omega R = v_0$.

$v_0' = v_0 \sin \alpha$ 为初速做“竖直”上抛运动,它到达轨道最高点时与斜面的距离最大,所需时间

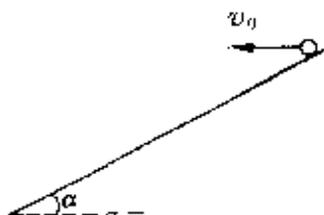


图 182

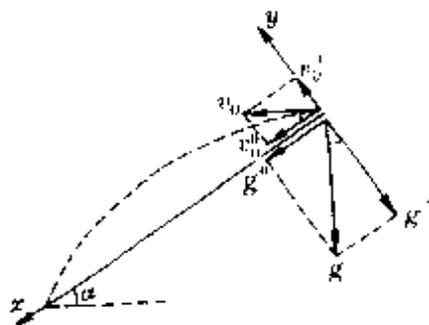


图 183

$$t = \frac{v_0'}{g'} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g \cos \alpha} = \frac{v_0}{g} \operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{10} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 秒} \\ = 0.58 \text{ 秒.}$$

例 2 在两块竖直带电平行板 MN 间,用一根长 $l = 0.1$ 米的丝线,悬挂一个带正电荷的小球,在电场力作用下,使小球从悬点正下方的 A 点向 M 板偏转,直到悬线成水平拉直状态,以后小球从位置 B 静止下落,至位置 A 时的速度又刚好为 0(图 184),此后小球一直在 A 、 B 间来回运动,试求小球运动过程中的最大速度.

分析与解答 由 A 到 B 时瞬时速度为 0 的条件,根据动能定理

$$- mgl + qEl = 0,$$

得

$$mg = qE.$$

因为小球所受的重力和电场力都是恒力,所以,可以把两板之间的空间等效成一个重力加速度为 g' 的力场, $g' = \sqrt{2}g$,如图 185 所示.小球在 A 、 B 两位置间的运动,可以等效成在重力场 g' 中的摆动,显然,在“最低处” D 的速度最大.最大值

$$v_m = \sqrt{2g'l(1 - \cos 45^\circ)} = \sqrt{2 \times \sqrt{2}gl \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$\approx 0.91 \text{ 米/秒.}$$

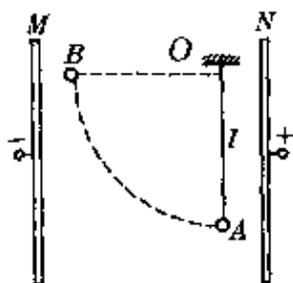


图 184

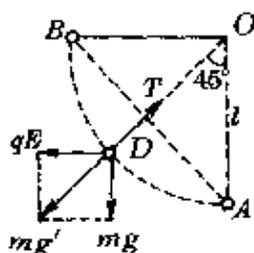


图 185

例 3 如图 186 所示电路中, 电源电动势为 \mathcal{E} , 内阻为 r , 当可变电阻器 R_2 取值为多少时, 它所得到的电功率最大? 最大值为多少?

分析与解答 把 R_1 和电源合并, 等效成一个新的电源(图 187). 根据等效电压源定理(戴维宁定理), 这个新电源的等效电动势和内阻分别为

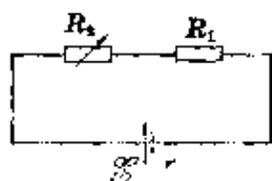


图 186

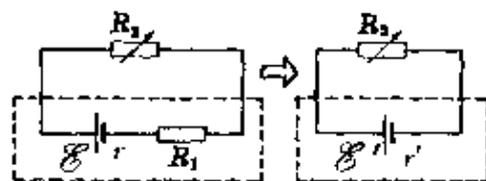


图 187

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}, r' = r + R_1.$$

由电路知识知道, 当外电阻等于电源内阻时电源的输出功率最大, 所以可变电阻器阻值应为

$$R_2 = r + R_1.$$

R_2 上得到的最大电功率为

$$P_m = \frac{\mathcal{E}'^2}{4r'} = \frac{\mathcal{E}^2}{4(r + R_1)}.$$

例 4 如图 188 所示的电路,电源电动势为 \mathcal{E} ,内阻为 r .外电路上并联着 R_1 、 R_2 两个电阻,调节可变电阻 R_2 ,它取值为多少时, R_2 上得到的电功率最大? 最大值为多少?

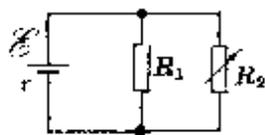


图 188

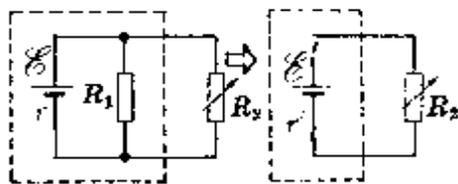


图 189

分析与解答 把 R_1 和电源合并为一个等效电源(图 189),根据等效电压源定理,这个等效电源的电动势和内阻分别为

$$\mathcal{E}' = \frac{R_1}{r + R_1} \mathcal{E}, r' = r // R_1 = \frac{rR_1}{r + R_1}.$$

要求 R_2 上得到最大的电功率,应使 R_2 的阻值等于电源内阻,即

$$R_2 = r' = \frac{rR_1}{r + R_1}.$$

这时 R_2 上得到的最大电功率为

$$P_m = \frac{\mathcal{E}'^2}{4r'} = \frac{\left(\frac{R_1}{r + R_1}\right)^2 \mathcal{E}^2}{4 \cdot \frac{rR_1}{r + R_1}} = \frac{R_1}{4r(r + R_1)} \mathcal{E}^2.$$

例 5 如图 190 所示无穷格子电路,每个电阻的阻值均为 R .当在 A 、 B 两端间接入电动势为 \mathcal{E} 、内阻为 r 的电源后,网格中的电阻 R 应满足什么条件,电源的输出功率才最大?

分析与解答 要求电源的输出功率最大,必须使整个无穷格子电路的等效电阻等于电源内阻 r .

为了计算这无穷格子电路的电阻,可假设接入最后一个格子

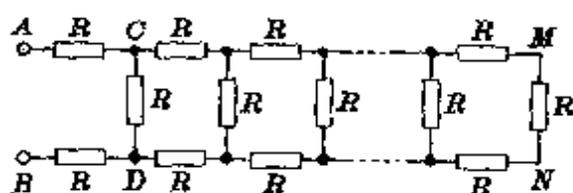


图 190

MN 间的电阻为 R_x . 由于是无穷多格子, 因此去掉一个格子, 总电阻不会变化, 这就要求最后一个格子的等效电阻也等于 R_x . 依此类推, 于是, 上述无穷格子电路可转化为一个有限网络, 如图 191 所示. 最后等效于在 CD 间接入电阻 R_x 的一个简单串联电路.

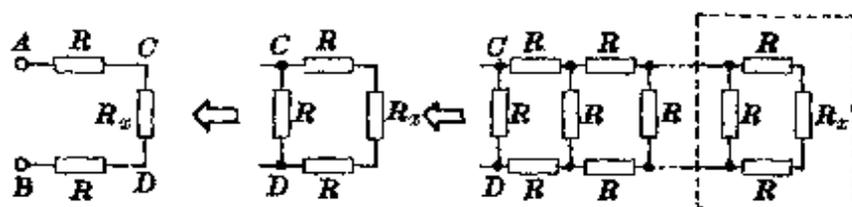


图 191

由前面等效电路中例 3(参见第 99 页)的结果可知

$$R_x = (\sqrt{3} - 1)R,$$

$$\therefore R_{AB} = 2R + R_x = (1 + \sqrt{3})R.$$

电源输出功率最大时, 应满足条件 $R_{AB} = r$,

$$\therefore R = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} r.$$

结 束 语

也许,你在孩提时候已听到过曹冲称象的故事.今天再听到这则故事时,如果不仅只是赞美曹冲的聪明,还能在思维方法上对自己有所启迪的话,那么,这就是作者所期望的.也是作者用去相当篇幅介绍等效变换的具体应用的一个动机.

等效方法在物理学中的应用实在是太广泛了,并且,随着科学技术的发展,等效方法的应用领域还将继续拓展.如果阅读过本书的读者能以等效方法为一把利剑,在科学发展的道路上披荆斩棘,创立殊勋,作者将感到莫大的欣慰.

最后,借此机会,对阅读本书初稿,并提出宝贵意见的吴保让先生、倪汉彬教授,表示衷心的感谢.

作者

于苏州九百居

1993年夏

主要参考资料

[1] A. 爱因斯坦、L. 英费尔德著《物理学的进化》，上海科学技术出版社，1962年3月第1版。

[2] 巴涅特著，仲子译《相对论入门》，三联书店，1989年4月第1版。

[3] 郭奕玲等编著《近代物理发展中的著名实验》，湖南教育出版社，1990年12月第1版。

[4] 倪光炯、李洪芳《近代物理》，上海科学技术出版社，1979年8月第11版。

[5] 林德宏著《科学思想史》，江苏科学技术出版社，1985年7月第1版。

[6] 刘海生编译《苏联高考与竞赛物理试题精选》，上海科学普及出版社，1992年9月第1版。