考试点 kaoshidian.com 考试就来点一点

全国硕士研究生入学考试

张三慧《大学物理学》

名校真题解析及典型题精讲精练

主讲老师：

目 录

第 1 讲　质点刚体运动学

基本公式：

$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},\quad d\mathbf{r}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k},\quad |d\mathbf{r}|\neq dr.$

$\Delta\mathbf{r}=\Delta x\mathbf{i}+\Delta y\mathbf{j}+\Delta z\mathbf{k}.|\Delta\mathbf{r}|\neq\Delta r,\quad |\Delta\mathbf{r}|\neq\Delta s$（路程）.

$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k}=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k},$

$\mathbf{v}=\frac{ds}{dt}\mathbf{e}_t.\mathbf{e}_t$是轨道切线方向的单位矢量.

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{dv_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}=\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a}=\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t+v\frac{d\mathbf{e}_t}{dt}=\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t+\frac{v^2}{R}\mathbf{e}_n=a_t\mathbf{e}_t+a_n\mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\int_0^t\mathbf{a}(t)dt$$

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}_0t+\int_0^t[\int_0^{t'}\mathbf{a}(t'')dt'']dt'$$

$$v(t)^2-v_0^2=2\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}(t)}\mathbf{a}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

$\mathbf{a}=$常矢量.

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\mathbf{a}t,\qquad \mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}_0t+\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2,\qquad v(t)^2-v_0^2=2\mathbf{a}\cdot\Delta\mathbf{r}.$$

一维问题且 a = 常数

$v(t)=v_0+at,$

$$x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2,$$

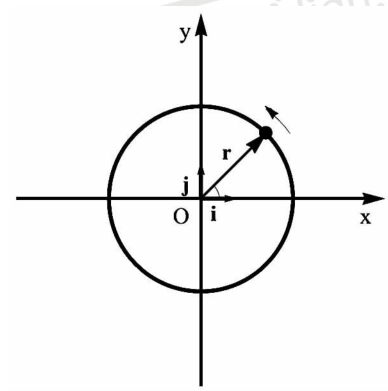
$v(t)^2-v_0^2=2a\Delta x.$

圆周和刚体运动：

$$\omega=\frac{d\theta}{dt},\qquad \alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

$\mathbf{v}=r\omega\mathbf{e}_t=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r},$

$$v=r\omega=\frac{ds}{dt}.$$



$\mathbf{a}=\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}=\mathbf{a}_t+\mathbf{a}_n,,$

$\mathbf{a}_t=R\alpha\mathbf{e}_t=\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}.\mathbf{a}_n=R\omega^2\mathbf{e}_n=-\omega^2\mathbf{r}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v},$

匀加速转动：$\omega=\omega_0+\alpha t,\quad \theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2,\quad \omega^2-\omega_0^2=2\alpha\theta.$

抛体运动：

$\mathbf{v}_0=v_{0x}\mathbf{i}+v_{0y}\mathbf{j}=v_0\cos\theta\mathbf{i}+v_0\sin\theta\mathbf{j},\quad \mathbf{a}=-g\mathbf{j}$

$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0-\mathbf{g}t=v_0\cos\theta\mathbf{i}+(v_0\sin\theta-gt)\mathbf{j}$

$\mathbf{r}(t)==(x_0+v_0\cos\theta\, t)\mathbf{i}+(y_0+v_0\sin\theta\, t-\frac{1}{2}gt^2)\mathbf{j}$

$v(t)^2-v_0^2=2\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}(t)}\text{-}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{r}=-2\mathbf{g}\cdot\Delta\mathbf{r}=-2g(y_b-y_a)=-2gh$

相对运动

$\mathbf{v}_{pK}=\mathbf{v}_{K'K}+\mathbf{v}_{pK'}$

$\mathbf{a}_{pK}=\mathbf{a}_{K'K}+\mathbf{a}_{pK'},\quad \mathbf{a}_{K'K}=0\Rightarrow\mathbf{a}_{pK}=\mathbf{a}_{pK'}.$

名校真题解析

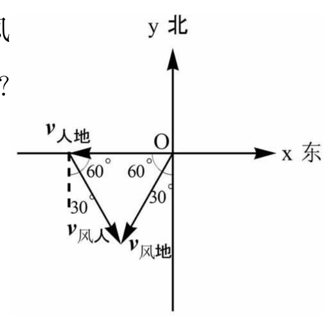
1.（2011 年电子科技大学）质点沿半径为 R 的圆周作匀速率运动，每 t 秒转一圈，在 2t 时间间隔，其平均速度大小与平均速率分别为（　　）

(A) $\frac{2\pi R}{t},\ \frac{2\pi R}{t}$;　(B) 0, $\frac{2\pi R}{t}$;　(C) 0, 0;　(D) $\frac{2\pi R}{t}$, 0

解：2t 秒末，质点回到出发点，$\Delta r=0$，故平均速度大小为 0；

每 t 秒转一圈，路程为$2\pi R$，故平均速率为$\frac{2\pi R}{t}$. 选（B）.

2.（2011 年电子科技大学）某人骑自行车以速率 v 向西行驶，今有风以相同速率从北偏东$30°$方向吹来，试问人感觉到风从哪个方向吹来？（　　）



(A) 北偏东$30°$,　(B) 南偏东$30°$,

(C) 北偏西$30°$,　(D) 西偏南$30°$.

答案详见考试点视频

3.（河北工业大学 2012 年）一质点沿半径为 R 的圆周运动，其路程 s 随时间 t 变化的规律为 $S=bt-\frac{1}{2}ct^2\ (SI)$，式中 b, c 为大于零的常量，且$b^2>Rc$，则此质点运动的切向加速度$a_t=$____________；法向加速度$a_n=$________ .

解：$v=\frac{dS}{dt}=b-ct,\quad a_t=\frac{dv}{dt}=-c$.

$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(b-ct)^2}{R}$.

4.（杭州师范大学 2012 年）一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表示式为$\vec{r}=at^2\vec{i}+bt^2\vec{j}$

(其中 a、b 为常量),则该质点作(　　)

(A)匀速直线运动；　(B)变速直线运动；　(C)抛物线运动；　(D)一般曲线运动.

解：因$v_x = 2at, \quad v_y = 2bt, \quad \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{b}{a}, \quad v = 2\sqrt{a^2+b^2}t$,

所以该质点作变速直线运动， 选(B).

5.(杭州师范大学 2012 年)一辆作匀加速直线运动的汽车,在 6s 内通过相隔 60 m 远的两点,已知汽车经过第二点时的速率为 15 m/s,则汽车通过第一点时的速率 v_1 =________.

答案详见考试点视频

6.(杭州师范大学 2012 年)在 20m 高的窗口处平抛出一个小球,落地时落点距抛点的水平距离为 10m。空气阻力忽略不计,g 取 $10m/s^2$。求

(1)小球的初速度多大?

(2)何时速度方向与水平方向成 45°角? 此时速度有多大?

(3)此时小球的切向加速度和法向加速度有多大?

(4)小球落地时的速度有多大?

答案详见考试点视频

7.(深圳大学 2012)质点沿半径为 r = 1m 的圆周运动,其角位置θ随时间 t 的变化规律为 $\theta = 2 + t^2$ (rad),求 t = 1.5s 时质点的总加速度大小.

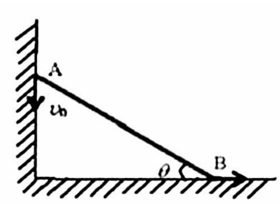
答案详见考试点视频

8.(广东工业大学 2012 年)一运动质点在某瞬时位于矢径$\vec{r}(x,y)$的端点处,其速度大小为(　　)

$(A)\ \dfrac{dr}{dt}; \quad (B)\ \dfrac{d\vec{r}}{dt}; \quad (C)\ \dfrac{d|\vec{r}|}{dt}; \quad (D)\ \sqrt{(\dfrac{dx}{dt})^2+(\dfrac{dy}{dt})^2}$

解：选(D).

9.(2010 年南京航空航天大学)如图所示,长度不变的细杆 AB 一端点 A 靠墙,以匀速率v_0下滑,则当细杆滑至与水平面的角为θ时,另一端 B 在水平面上滑动的速率为________.



答案详见考试点视频

10.(江苏大学 2011 年)质点沿半径为 R 的圆周运动,运动学方程为$\theta = 3 + 2t^2$(SI),则 t 时质点的法向加速度大小为______；角加速度$\beta =$__________.

解：角速度$\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = 4t$,　角加速度　$\beta = 4$

$a_n = \omega^2 R = 16t^2 R$

11.(2011 年南京理工大学)一质点作平面运动,运动方程为$\vec{r} = (2\sin\omega t)\vec{i} + (3\cos\omega t)\vec{j}$, ω为常量, 则t时刻质点的速度为________. 加速度为___________.

答案详见考试点视频

12.(2011 年河北工业大学)一质点沿半径为 R 的圆周运动,在$t=0$时经过 p 点,此后它的速率V按$V=A+Bt$(A,B 是已知常量)变化,则质点沿圆周运动一周再经过 p 点时的切向加速度 a_t = ________,法加速度 a_n = ______.

答案详见考试点视频

13.(2011 年杭州师范大学)从等高的 A 点和 B 点同时斜抛两个物体,倾斜角分别为 30 度和 45 度,它们的轨道在同一竖直平面内.两物体在最高点可以同方向相遇,已知最高点离地 10 米,A 球抛出的速度为 10m/s.问 AB 两点之间相距多远?

答案详见考试点视频

14.(2011 年太原科技)一质点从静止出发沿半径 R = 1 m 的圆周运动,其角加速度随时间 t 的变化规律是 $\beta = 12t^2 - 6t$ (SI) ,则质点的角速度 ω = ________;切向加速度 a_t = ________ .

答案详见考试点视频

15.(2011 年江西理工大学) 已知质点的运动方程:$x=2t,\ y=2t^2$(SI 制)则 t 时刻质点的位矢________,速度________,加速度________.

解:$\vec{r}=2t\vec{i}+2t^2\vec{j},\quad \vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=2\vec{i}+4t\vec{j},\quad \vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=4\vec{j}$

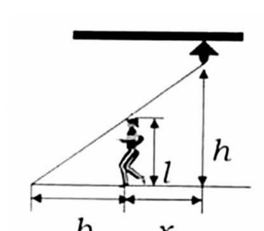
16.(2011 年江西理工大学、2011 年广东工业大学)某物体的运动规律为 $dv/dt = -kv^2t$,式中的 k 为大于零的常量。当 t = 0 时,初速为 v_0,则速度 v 与时间 t 的函数关系是(　　)

(A) $v=\dfrac{1}{2}kt^2+v_0$　　　　(B) $v=-\dfrac{1}{2}kt^2+v_0$

(C) $\dfrac{1}{v}=-\dfrac{1}{2}kt^2+\dfrac{1}{v_0}$　　　　(D) $\dfrac{1}{v}=\dfrac{1}{2}kt^2+\dfrac{1}{v_0}$

解:$\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v^2}=\int_0^t -ktdt \implies \frac{1}{v_0}-\frac{1}{v}=-\frac{1}{2}kt^2 \implies \frac{1}{v}=\frac{1}{2}kt^2+\frac{1}{v_0}$ 选(D)

17.(2011 年西南大学)路灯高度为 h,人高度为ℓ,步行速度为 v_0. 试求:

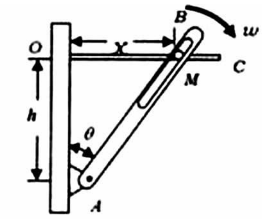


(1)人影中的头顶的移动速度;

(2)影子长度增长的速率.

答案详见考试点视频

18.(2011 年西南大学)如图所示,杆 AB 以匀角速度 ω 绕 A 点转动,并带动水平杆 OC 上的质点 M 运动.



(1)设起始时杆在竖直位置,OA = h. 列出质点 M 沿水平杆的运动方程;

(2)质点 M 沿杆 OC 运动的速度和加速度大小.

答案详见考试点视频

19.(2011 年广东工业大学)一质点沿 x 方向运动,其加速度随时间变化关系为 a = 3 + 2t (SI),如果初始时质点的速度 v_0为 5 m/s,则当 t 为 3s 时,质点的速度 v = ________.

解： $v(t)=v_0+\int_0^t(3+2t)dt=5+3t+t^2$

$v(3)=5+3\times3+3^2=23\ m/s$

20.（2011 年广东工业大学）质点 p 在一直线上运动，其坐标和时间 t 有如下关系：$x=-A\sin\omega t\quad(SI)$ （A 为常数）

（1）任意时刻 t，质点的加速度$a=$________；

（2）质点速度为零的时刻$t=$________.

答案详见考试点视频

21.（2010 年南京航空航天大学）已知一质点作半径为 R 的圆周运动，质点走过的路程与时间的关系是$s=b_0+b_1t+b_2t^2$，则在 t 时刻，质点运动的法向加速度a_n大小等于______，切向加速度a_t大小等于________.

答案详见考试点视频

22.（2010 年南京航空航天大学）已知一电子的运动方程为$\vec{r}=a\cos\omega t\vec{i}+b\sin\omega t\vec{j}+ct\vec{k}$，式中$a,b,c,\omega$为常量，t 以秒记，r 以米记，则在 t 时刻，电子的速度为____，加速度________.

解：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=-a\omega\sin\omega t\vec{i}+b\omega\cos\omega t\vec{j}+c\vec{k}$

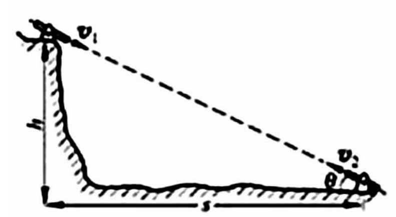
$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-a\omega^2\cos\omega t\vec{i}-b\omega^2\sin\omega t\vec{j}$

23.（2010 年中国计量学院）一质点沿曲线运动，其运动方程为$\vec{r}(t)=(10-5t^2)\vec{i}+10t\vec{j}$（SI），则质点在 t = 1s 时的切向加速度和法向加速度的大小是多少？（提示：只求大小，不考虑方向）

答案详见考试点视频

典型题精讲精练

1. 山上和山下两炮各瞄准对方同时以相同的初速率发射一枚炮弹. 这两枚炮弹会不会在空中相碰？为什么？（忽略空气阻力）. 如果山高 h = 50m，两炮相隔的水平距离 s = 200m. 要使这两枚炮弹在空中相碰，它们的速率至少应等于多少？



解法 1：S 系：已知$v_1=v_2=v$，

$$\begin{array}{ll}
v_{1x0}=v_1\cos(\theta), & v_{1y0}=-v_1\sin(\theta);\\
v_{2x0}=-v_2\cos(\theta), & v_{2y0}=v_2\sin(\theta);\\
a_{1x}=0, & a_{1y}=-g;\\
a_{2x}=0, & a_{2y}=-g;\\
x_{10}=0, & y_{10}=h;\\
x_{20}=s, & y_{20}=0.
\end{array}$$

用

$x_1=x_{10}+v_{1x0}t,\ y_1=y_{10}+v_{1y0}t+\frac{1}{2}a_{1y}t^2,$
$x_2=x_{20}+v_{2x0}t,\ y_2=y_{20}+v_{2y0t}+\frac{1}{2}a_{2y}t^2.$

解 $x_1=x_2,\quad y_1=y_2$

得 $t=\dfrac{s}{2v\cos(\theta)}=\dfrac{h}{2v\sin(\theta)}.$

两枚炮弹相碰处

$y_c=-\dfrac{gs^2}{8v^2\cos(\theta)}+\dfrac{1}{2}s\tan(\theta)\geq 0$得

$v\geq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gs}{\sin(\theta)\cos(\theta)}}=\sqrt{\frac{g(s^2+h^2)}{4h}}=\sqrt{\frac{9.8\times(200^2+50^2)}{4\times 50}}=45.6m/s.$

解法2：S’系：已知$v_1=v_2=v$

$$\begin{array}{llll} v_{1x0}=v_1, & v_{1y0}=0, & v_{2x0}=-v_2, & v_{2y0}=0; \\ a_{1x}=g\sin(\theta), & a_{1y}=-g\cos(\theta), & a_{2x}=g\sin(\theta), & a_{2y}=-g\cos(\theta); \\ x_{10}=0, & y_{10}=0, & x_{20}=\sqrt{s^2+h^2}, & y_{20}=0. \end{array}$$

用

$x_1=x_{10}+v_{1x0}t+\frac{1}{2}a_{1x}t^2,\ y_1=y_{10}+v_{1y0}t+\frac{1}{2}a_{1y}t^2,$
$x_2=x_{20}+v_{2x0}t+\frac{1}{2}a_{2x}t^2,\ y_2=y_{20}+v_{2y0}t+\frac{1}{2}a_{2y}t^2.$

可以看出恒有 $y_1=y_2$. 只要解$x_1=x_2$

$t_c=\dfrac{\sqrt{h^2+s^2}}{2v}$.得

相碰点:$x_c=\dfrac{\sqrt{h^2+s^2}(gh+4v^2)}{8v^2},\quad y_c=-\dfrac{gs\sqrt{h^2+s^2}}{8v^2}.$

相碰条件为:$y_c+(\sqrt{s^2+h^2}-x_1)\tan(\theta)\geq 0,$

同样解得:$v\geq\sqrt{\frac{g(s^2+h^2)}{4h}}.$

解题方法总结:给定$\vec{r}(t)$可直接求导得$\vec{v}(t)$,再求导可得$\vec{a}(t)$. 同样,知道$\theta(t)$,求导可得角速度$\omega(t)$,再求导可得角加速度$\alpha(t)$. 知道$\vec{a}(t)$和初速度$\vec{v}_0$,积分可得$\vec{v}(t)$;知道$\vec{v}(t)$和初始时的位置矢量$\vec{r}_0$,积分可得$\vec{r}(t)$. 对直线运动(或直线分运动)，若加速度a为常量，可直接代公式，反之要积分. 若加速度a是x的函数，要用技巧$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$,再积分. 对圆周运动可作类似处理. 对一般曲线运动，从$\vec{r}(t)$可得$\vec{v}$和$\vec{a}$,进而得v和a,从$\frac{dv}{dt}$可得a_t，从$\sqrt{a^2-a_t^2}$可得a_n.

对相对运动. 要会用速度的“串联”法则： $\mathbf{v}_{pK}=\mathbf{v}_{K'K}+\mathbf{v}_{pK'}$. 对简单问题,可直接用矢量方法解之，对复杂问题,可用串联公式的分量式. 无论简单问题还是复杂问题都要明确各个速度是”谁对谁”的速度.

对定轴转动的刚体,要会用

$\mathbf{v}=r\omega\mathbf{e}_t=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r},v=r\omega=\dfrac{ds}{dt}.$

$\mathbf{a}=\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}=\mathbf{a}_t+\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_t=\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r},\quad\mathbf{a}_n=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$

求刚体中一点的速度,切向加速度和法向加速度.

第 2 讲　质点刚体动力学

基本公式：

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}=\frac{dm}{dt}\mathbf{v}+m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{dm}{dt}\mathbf{v}+m\mathbf{a}$$

$F=mg$,　　　$F=-kx$,

$f_k=\mu_k N$,　　$f_s\le f_{s,max}=\mu_s N$

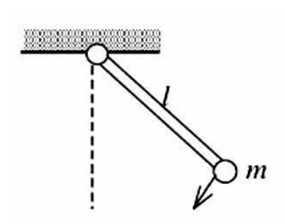
$F=-\frac{Gm_1m_2}{r^2}$,　　$\mathbf{F}=-\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}$.

$\mathrm{M}_z=J_z\alpha$.

$J_z=\sum\Delta m_i r_i^2\Rightarrow\int_{rigid}r^2dm$

平行轴定理：$J=J_c+md^2$.

名校真题解析



1. (2012 年北京科技大学)一长为 l,质量可以忽略的直杆,可绕通过其一端的水平光滑轴在竖直平面内作定轴转动,在杆的另一端固定着一质量为 m 的小球,如图所示. 现将杆由水平位置无初转速地释放. 则杆刚被释放时的角加速度$\beta_0=$__________,杆与水平方向夹角为 60°时的角加速度$\beta=$__________。

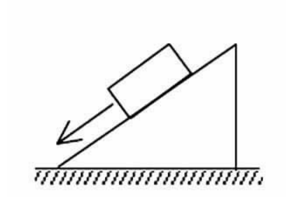
解：杆与水平方向成 θ 时，m 对轴的力矩为 $mg\ell\cos\theta$，m 对轴的转动惯量为 $m\ell^2$，

$$M=J\beta\implies\beta=\frac{M}{J}=\frac{mg\ell\cos\theta}{m\ell^2}=\frac{g\cos\theta}{\ell}\quad\theta=0,\quad\beta=\frac{g}{\ell};\quad\theta=60°,\quad\beta=\frac{g}{2\ell}$$

注：如果匀质杆的质量 M 不能忽略,结果又如何?

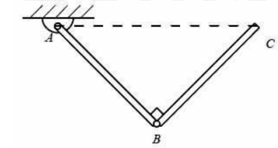
2. (2012 年北京科技大学)一根质量为 m、长为ℓ的均匀细杆,可在水平桌面上绕通过其一端的竖直固定轴转动. 已知细杆与桌面的滑动摩擦系数为μ,则杆转动时受的摩擦力矩的大小为____________.

答案详见考试点视频



3. (2011 年华南理工大学)倾角为 30°的一个斜面体放置在水平桌面上. 一个质量为 2 kg 的物体沿斜面下滑,下滑的加速度为 3.0 m/s². 若此时斜面体静止在桌面上不动,则斜面体与桌面间的静摩擦力 f =________.

答案详见考试点视频



4.（2012 年中国科学院研究生院）两根相同的均质杆 AB 和 BC，质量均为 m，长均为 l，A 端被光滑铰链到一个固定点，两杆始终在竖直平面内运动。C 点有外力使得两杆保持静止，A、C 在同一水平线上，$\angle ABC = 90°$。某时刻撤去该力，

(1)若两杆在 B 点固结在一起，求初始瞬间两杆的角加速率；

(2)若两杆在 B 点光滑铰接在一起，求初始瞬间两杆的角加速率。

解：(1)初始瞬间仍有$\angle ABC = 90°$，

$$M = mg\frac{\ell}{2}\cos 45° + mg(\ell + \frac{\ell}{2})\cos 45° = \sqrt{2}mg\ell$$

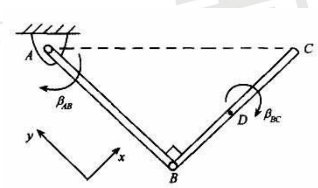
$$J = \frac{1}{3}m\ell^2 + \int_0^\ell (\ell^2 + x^2)\frac{m}{\ell}dx = \frac{5ml^2}{3}$$

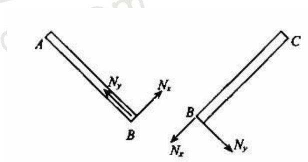
或用平行轴定理

$$J = \frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{1}{12}m\ell^2 + m[\ell^2 + (\ell/2)^2] = \frac{5m\ell^2}{3}$$

角加速率 $\alpha = \frac{M}{J} = \frac{\sqrt{2}mg\ell}{\frac{5ml^2}{3}} = \frac{3\sqrt{2}g}{5\ell}$

(2) 如图建立坐标系，





BC 杆对 AB 杆的作用力为 $\vec{N}_x$和$\vec{N}_y$，AB 杆对 BC 杆的作用力为 $\vec{N'}_x = -\vec{N}_x$和$\vec{N'}_y = -\vec{N}_y$. 对 AB 杆用转动定律：

$$\frac{1}{3}m\ell^2\alpha_{AB} = mg\frac{\ell}{2}\cos 45° - N_x\ell \qquad ①$$

设 BC 杆的质心为 D，则有

$$\frac{1}{12}m\ell^2\alpha_{BC} = -N_y\frac{\ell}{2} \qquad ②$$

$$ma_{Dx} = -N_x - mg\cos 45° \qquad ③$$

$$ma_{Dy} = -N_y - mg\cos 45° \qquad ④$$

对 B 点，从 AB 杆考虑有$a_{Bx} = -\ell\alpha_{AB}$，$a_{By} = 0$ ⑤

从 BC 杆考虑有$a_{Bx} = a_{Dx}$，$a_{By} = a_{Dy} + \alpha_{BC}\frac{\ell}{2}$ ⑥

从⑤，⑥得$a_{Dx} = -\ell\alpha_{AB}$，$a_{Dy} = -\frac{\ell}{2}\alpha_{BC}$ ⑦

用⑦,③,④可写成

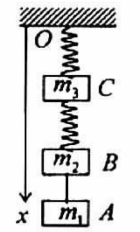
$$-m\ell\alpha_{AB}=N_x-mg\cos 45^\circ \quad ③$$

$$-m\frac{\ell}{2}\alpha_{BC}=-N_y-mg\cos 45^\circ \quad ④$$

解①,②和③,④得:

$$\alpha_{AB}=\frac{9g}{8\sqrt{2}l},\quad \alpha_{BC}=\frac{3g}{2\sqrt{2}l},\quad N_x=\frac{mg}{8\sqrt{2}},\quad N_y=-\frac{mg}{4\sqrt{2}}$$

5.(2011 年电子科技大学)质量分别为m_1, m_2, m_3的三个物体 A,B,C,用一根细绳和两根轻弹簧连接并悬挂与固定点 O,如图. 取向下为 x 轴正向,开始时系统处于平衡状态,后将细绳剪断,则在刚剪断瞬时,物体 B 的加速度$\vec{a}_B=$______;物体 C 的加速度$\vec{a}_C=$______.



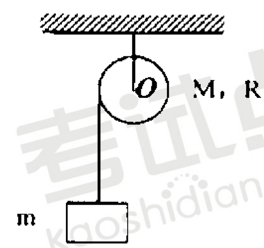
答案详见考试点视频

6.(2011 年电子科技大学)一轴承光滑的定滑轮,质量为 M = 2 kg,半径为 R = 0.1m,一根不能伸长的轻绳,一端固定在定滑轮上,另一端系有一质量为 m = 5kg 的物体,如图所示。已知定滑轮的转动惯量为$J=\frac{1}{2}MR^2$,其初角速度 ω_0 = 10 rad/s,方向垂直纸面向里。求:

(1)定滑轮的角加速度;

(2)定滑轮的角速度变化到 ω = 0 时,物体上升的高度;

(3)当物体回到原来位置时,定滑轮的角速度。



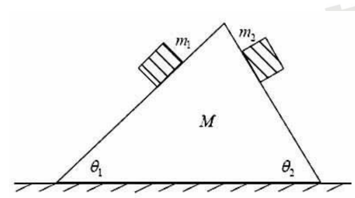
解:(1) $mg-T=ma,\quad TR=J\alpha,\quad a=R\alpha,\quad J=\frac{1}{2}MR^2$

解得:$\alpha=\frac{2mg}{(2m+M)R}$, 方向垂直纸面向外.

(2)$-\omega_0^2=-2\alpha\frac{h}{R},\implies h=\frac{\omega_0^2R}{2\alpha}=\frac{(2m+M)R^2\omega_0^2}{4mg}=6.12\times10^{-2}\ m$

(3) $\omega^2=2\alpha\frac{h}{R},\implies \omega=10\ rad/s$, 方向垂直纸面向外.

7.(2012 年中国科学院研究生院)如图所示,质量为 m_1 和 m_2 的两个小滑块分别放置于三角形大滑块 M 的左右两斜面上。滑块 M 放置于光滑水平面上,忽略一切摩擦,当 m_1 和 m_2 同时从静止开始在斜面上滑下,则此刻 M 向右运动的条件是( )

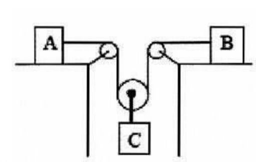


(A) $m_1\sin2\theta_1>m_2\sin2\theta_2$; (B) $m_1\sin2\theta_1<m_2\sin2\theta_2$;

(C) $m_1\sin2\theta_1-m_2\sin2\theta_2>M$; (D) $m_1\sin2\theta_1+m_2\sin2\theta_2>M$.

答案详见考试点视频

8.(2012 年中国科学技术大学)在图示的装置中,物体 A、B、C 的质量分别为 m_1、m_2、m_3,且两两不等. 若物体 A、B 与桌面间的摩擦系数均为μ,求三个物体的加速度及绳内张力. 不计绳和滑轮质量,不计轴承摩擦,绳不可伸长.

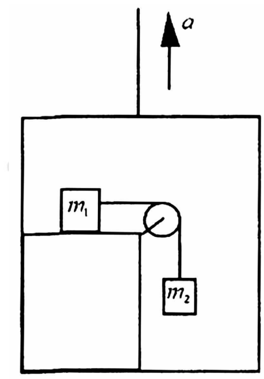


答案详见考试点视频

9.（2011 年中国科学技术大学）一线轴质量为 m，绕质心轴的转动惯量为 I，大小半径分别为 R 和 r，小半径的轴上绕线，以力 F 拉线，拉力方向与水平面的夹角为θ. 线轴放在水平桌面上，与桌面之间的摩擦系数μ. 问：当摩擦系数μ满足什么条件时，线轴为纯滚动；此时线轴的加速度和角加速度各为多少？

答案详见考试点视频

10.（2010 年中国科学技术大学）如图所示的升降机内物体 m_1，m_2用滑轮连接；升降机以加速度 a = g/2 上升，求：



（1）在机内的观察者看到这两个物体的加速度是多少？

（2）在机外地面上的观察者看到的加速度又是多少？

解：建立和地面上连在一起的坐标系 Oxy，y 轴竖直向上，x 轴向右；

再建立和升降机连在一起的坐标系 O'x'y'，y'轴竖直向上，x'轴向右. 则 O'x'y'坐标系相对 Oxy 坐标系的加速度是 g/2，向上. 又设

m_1，m_2相对两个坐标系的加速度分别为$\vec{a}_1, \vec{a}_2$和$\vec{a'}_1, \vec{a'}_2$，则

$$\begin{array}{ll} a_{1x} = a'_{1x} + 0 = a'_{1x} = a'_1, & a_{1y} = a'_{1y} + \frac{g}{2} = \frac{g}{2} \\ a_{2x} = a'_{2x} + 0 = 0, & a_{2y} = a'_{2y} + \frac{g}{2} = -a'_2 + \frac{g}{2} \end{array}$$

在 Oxy 系中列两物体的动力学方程：

$$\begin{array}{l} T = m_1 a_{1x} = m_1 a'_{1x} = m_1 a'_1, \\ N - m_1 g = m_1 a_{1y} = \frac{1}{2} m_1 g \\ T' - m_2 g = m_2 a_{2y} = m_2(\frac{1}{2}g - a'_2) \end{array}$$

另有$a'_1 = a'_2, \quad T = T'$

解得$a'_1 = a'_2 = \dfrac{3gm_2}{2(m_1 + m_2)}$,

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \frac{1}{2}g\sqrt{1 + \frac{9m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}}$$

$$a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2} = \frac{g|m_1 - 2m_2|}{2(m_1 + m_2)}$$

解题方法总结：

用牛顿定律和转动定律解题关健是要认识目标，分析力（矩），列方程. 为此，要作隔离体图，建坐标，规定力，力矩，（角）加速度的正向等. 用牛顿第三定律找出作用力和反作用力之间的关系，根据题给的几何关系找出必要的加速度之间的关系，线加速度与角加速度之间的关系. 要特别注意牛顿定律仅适用于惯性系. 对刚体，所有的力矩，转动惯量和角加速度必须对同一轴而言.

第3讲　各种守恒定律综合应用

基本公式：

$\mathbf{I}=\int_{t_0}^{t'}\mathbf{F}dt=\int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}'}d\mathbf{p}=\Delta\mathbf{p}$,

火箭：$v_2-v_1=uln\frac{m_1}{m_2}$.

火箭发动机的推力：　$F=u\frac{dm}{dt}$

力矩：$\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$

角动量（动量矩）对点：$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}$.

对刚体：$L_z=J_z\omega$.　　　$\mathrm{M}_z=\frac{d\mathrm{L}_z}{dt}=J_z\alpha$.

$\int_{t_0}^{t}M_zdt=\int_{L_{z0}}^{L_z}dL_z=L_z-L_{z0}=J\omega-(J\omega)_0=\Delta L_z$　（角动量定理）

$M_z=0$ 时 $\mathrm{L}_z=J\omega=(J\omega)_0=$常量.　（角动量守恒定律）

质心：$\mathbf{v}_c=\frac{d\mathbf{r}_c}{dt}=\frac{\sum_i m_i\mathbf{v}_i}{m}$.

总动量：$\mathbf{p}=m\mathbf{v}_c=\sum_i m_i\mathbf{v}_i$.

牛顿碰撞定律：$e=\frac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}}$,　　e：恢复系数.

质心运动定理：$\mathbf{F}=m\mathbf{a}_c$.

$$A_{AB}=\int_{v_A}^{v_B}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=E_{kB}-E_{kA}=\Delta E_k.$$

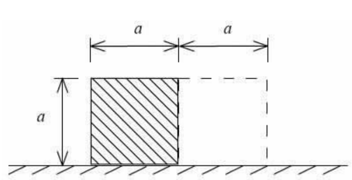
势能：$E_{p(A)}=\int_{(A)}^{"0"}\mathbf{F}_{cons}\cdot d\mathbf{r}$　　　　$E_{p"0"}=0$.

$A_e+A_{id}=\Delta E_k+\Delta E_p=\Delta E$，$E=E_k+E_p$.

$A_e=0,\ A_{id}=0\Rightarrow\Delta E=0,\ \ E_a=E_b$　　机械能守恒定律

名校真题解析

1.（2012年中国科学院研究生院）如图所示，现需要将边长为 a 、质量为 m 的均质正方体移至虚线所示位置，已知正方体和地面间的滑动摩擦系数为0.3。问平推做功小还是翻滚做功小。



解： 平推的功$A_1 = \mu mga$

翻滚的功$A_2 = mg(\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{2} - \frac{a}{2}) = mga(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2})$

$\mu = 0.3 > \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = 0.207 \implies A_1 > A_2$,

即翻滚做功小.

2.(2012 年中科大)从地球表面,沿着与铅垂方向成$\alpha = 60°$角的方向发射一抛体,初速率$v_0 = \sqrt{GM/R}$,忽略空气阻力和地球的自转影响,问抛体能上升多高(相对于地球表面)?

答案详见考试点视频

3.(2011 年电子科技大学)一个圆柱体质量为 M,半径为 R,可绕固定的通过其中心轴线的光滑轴转动,原来处于静止. 现有一质量为 m、速度为 v 的子弹,沿圆周切线方向射入圆柱体边缘. 子弹嵌入圆柱体后的瞬间,圆柱体与子弹一起转动的角速度$\omega =$———.(圆柱体绕固定轴的转动惯量$J = \frac{1}{2}MR^2$)

答案详见考试点视频

4.(2012 年北京科技大学)花样滑冰运动员绕通过自身的竖直轴转动,开始时两臂伸开,转动惯量为 J_0、角速度为 ω_0。然后她将两臂收回,使转动惯量减少为 $J_0/3$。这时她转动的角速度变为(　　)

(A) $\frac{1}{3}\omega_0$. (B) $(1/\sqrt{3})\omega_0$. (C) $\sqrt{3}\omega_0$. (D) $3\omega_0$.

解:角动量守恒 $J_0\omega_0 = \frac{J_0}{3}\omega \implies \omega = 3\omega_0$.

5.(2012 年北京科技大学)质量为 m 的小球放在光滑的水平木版上,一轻质细绳穿过水平木版上 O 点的洞与小球连接,如图所示。若初始时刻 m 作半径为 r 圆周运动,今用力向下拉绳子使 r 减小,问 r 减小过程中下列说法正确的是(　　)

(A)m 的动量守恒;

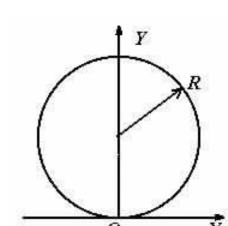
(B)m 与地球的机械能守恒;

(C)m 过 O 轴的角动量守恒;

(D)不能确定。

解:选(C)

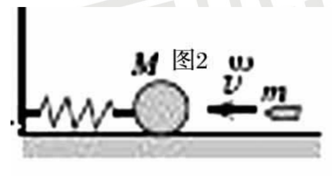
6.(2012 年北京科技大学)一质点在如图所示的坐标平面内作半径为 R 的圆周运动,有一力$\vec{F} = F_0(x\vec{i} + y\vec{j})$作用在质点上. 在该质点从坐标原点运动到(0,2R)位置过程中,力$\vec{F}$对它所作的功为(　　)



(A) F_0R^2. (B) $2F_0R^2$. (C) $3F_0R^2$. (D) $4F_0R^2$.

答案详见考试点视频

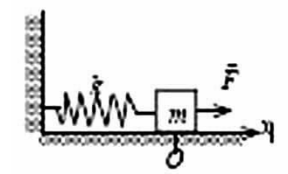
7.（2012 年北京科技大学）一质量为 M 的弹簧振子，水平放置且静止在平衡位置，如图所示. 一质量为 m 的子弹以水平速度$\vec{v}$射入振子中，并随之一起运动. 如果水平面光滑，此后弹簧的最大势能为（　　）



$(A)\ \frac{1}{2}mv^2.$,$(B)\ \frac{m^2v^2}{2(M+n)}.$ $(C)\ (M+m)\frac{m^2}{2M^2}v^2.$ $(D)\ \frac{m^2}{2M^2}v^2.$

答案详见考试点视频

8.（2011 年华南理工大学）如图所示，劲度系数为 k 的弹簧，一端固定在墙壁上，另一端连一质量为 m 的物体，物体在坐标原点 O 时弹簧长度为原长. 物体与桌面间的摩擦系数为μ. 若物体在不变的外力 F 作用下向右移动，则物体到达最远位置时系统的弹性势能 E_p =________.

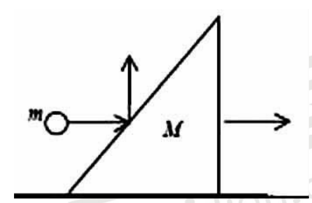


解：到达最远位置时，弹簧伸长量为Δx，同时 F 和摩擦力做功

$$A=(F-\mu mg)\Delta x=E_p=\frac{1}{2}k\Delta x^2 \implies \Delta x=\frac{F-\mu mg}{k}$$

再把Δx代入$E_p=\frac{1}{2}k\Delta x^2=\frac{2(F-\mu mg)^2}{k}$

9.（2011 年华南理工大学）如图所示，质量为 M 的滑块正沿着光滑水平地面向右滑动. 一质量为 m 的小球水平向右飞行，以速度$\vec{v}_1$（对地）与滑块斜面相碰，碰后竖直向上弹起，速率为$\vec{v}_2$（对地）. 若碰撞时间为Δt，试计算此过程中滑块对地的平均作用力和滑块速度增量的大小.



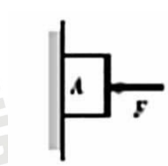
解： m 和 M 水平方向动量守恒，设 M 未碰前的速度和其速度增量的大小分别为V和ΔV，则

$$mv_1+MV=M(V+\Delta V) \implies \Delta V=\frac{m}{M}v_1$$

设碰撞期间地面给 M 和 m 系统向上的平均作用力为$\overline{N}$，则 $\overline{N}\Delta t=mv_2$，

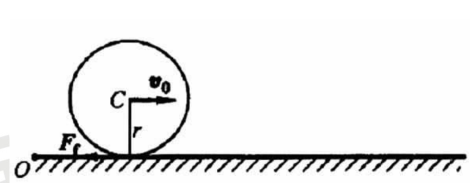
M 和 m 系统作用到地面的平均作用力，即滑块对地的平均作用力$\overline{N'}=\overline{N}=\frac{mv_2}{\Delta t}.$

10.（2012 年杭州师范大学）沿水平方向的外力 F 将物体 A 压在竖直墙上，由于物体与墙之间有摩擦力，此时物体保持静止，并设其所受静摩擦力为f_0，若外力增至 2F，则此时物体所受静摩擦力为__________.



解：$f=mg=f_0$

11.（2012 年中科大）质量为 m 半径为 r 的匀质球置于粗糙的水平桌面上，球与桌面间的摩擦系数为μ，球在水平冲力作用下获得一平动初速度v_0，问球经过多少距离后变为纯滚动？纯滚动时质心的速率为多大？

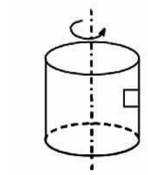


答案详见考试点视频

12.（2012 年中山大学）质量为 M 的木块静止于光滑的水平面上，一质量为 m，速度为 v 的子弹水平地射入木块后陷在木块内，并与木块一起运动. 求(1)木块施于子弹的力所作的功；(2) 子弹施于木块的力所作的功；(3) 系统耗散的机械能.

答案详见考试点视频

13.（2012 年浙江师范大学）竖立的圆筒形转笼，半径为 R，绕中心轴 OO 转动，物块 A 紧靠在圆筒的内壁上，物块与圆筒间的摩擦系数为 μ，要使物块 A 不下落，圆筒转动的角速度 ω 至少应为(　　)



(A) $\sqrt{\dfrac{\mu g}{R}}$　(B) $\sqrt{\mu g}$　(C) $\sqrt{\dfrac{g}{\mu R}}$　(D) $\sqrt{\dfrac{g}{R}}$

解：$\mu m\omega^2 R > mg \implies \omega > \sqrt{\dfrac{g}{\mu R}}$　选（C)

14.（2012 年浙江师范大学）12N 的恒力作用在质量为 2kg 的物体上，使物体在光滑平面上从静止开始运动，设力的方向为正方向，则在 3s 时物体的动量应为(　　)

(A) −36kg · m/s　　(B) 36kg · m/s　　(C) −24kg · m/s　　(D) 24kg · m/s

解：$p = \Delta p = F\Delta t = 12 \times 3 = 36(kg \cdot m/s)$　选(B)

解题方法总结：

动能定理涉及功的计算，要注意功是过程量，要做好线积分. 动量定理涉及冲量的计算. 冲量是矢量. 有两种情况，一是从动量的增量得冲量(含方向)，二是从冲量得动量改变量. 对复杂问题，用分量式. 简单问题可直接用矢量解之. 用动量矩定理解题与用动量定理的方法基本相同，但要注意问题中的力矩，动量矩必须对同一点(轴)而言.

用守恒定律解题，对复杂问题往往可达事半功倍的效果. 用守恒定律时，首先分析系统所进行的过程是否满足相应的守恒定律的条件，一般地，

(1)系统受合外力为零时，系统总动量守恒，某一方向受合外力为零时，系统在该方向动量守恒.

(2)系统受合外力矩为零时，系统动量矩守恒. 要分清动量守恒和动量矩守恒.

(3)系统所受合外力做的功与非保守内力做的功之和为零时，系统机械能守恒. 最常见的情况是系统所受合外力为零，因此只要分析系统是否有非保守内力做功即可确定能否用机械能守恒定律.

在确定系统可用某一守恒定律后，要正确写出守恒定律中所涉及的系统初末状态的物理量. 计算势能要选好参考点. 对物体地球系统，若物体在地表附近，用重力势能；物体远离地球时用万有引力势能.

第 4 讲　狭义相对论

基本原理和公式：

爱因斯坦相对性原理：

物理定律在一切惯性参考系中都具有相同的形式，也就是说，所有惯性系对于描述物理现象都是等价的（背，且与力学相对性原理比较）.

光速不变原理：在彼此相对作直线运动的任一惯性参考系中，所测得的光在真空中的速度都是相等的.（背）

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\quad y' = y,\quad z' = z,\quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\text{（正变换）}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\quad y = y',\quad z = z',\quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\text{（反变换）}$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\quad \Delta y' = \Delta y,\quad \Delta z' = \Delta z,\quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\quad \Delta y = \Delta y',\quad \Delta z = \Delta z',\quad \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x},\quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x},\quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}.$$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x},\quad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x},\quad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}.$$

$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \geq t_0.$　（t_0是固有时）．固有时最短。

$l' = l\sqrt{1 - v^2/c^2}.$　（l是固有长度）

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m_0,\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$

$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}.$$

$$\begin{aligned} E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 &= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) \\ &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2 \end{aligned}$$

质量亏损：$\Delta E = \Delta m_0 c^2$.

$\sum_i E_i = \sum_i m_i c^2$ =常量。

名校真题解析

1.（2012 年浙江师范大学）有下列几种说法：

（1）所有惯性系对物理基本规律都是等价的；

（2）在真空中，光的速度与光的频率、光源的运动状态无关；

（3）在任何惯性系中，光在真空中沿任何方向的传播速率都相同。若问其中哪些说法是正确的，答案是（　　）

（A）只有（1）、（2）是正确的；　　（B）只有（1）、（3）是正确的；

（C）只有（2）、（3）是正确的；　　（D）三种说法都是正确的。

解：选（D）

2.（2012 年广东工业大学）某不稳定粒子的固有寿命是$1.0\times10^{-6}s$，在实验室参考系中测得它的速度为$2.0\times10^{8}\ m/s$，则此粒子从产生到湮灭能飞行的距离为（　　）

（A）149 m　　（B）200m　　（C）268 m　　（D）402 m

解：$\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}} = \dfrac{3\tau_0}{\sqrt{5}}$

$$s = \tau v = \frac{3\tau_0}{\sqrt{5}} v = \frac{3\times1.0\times10^{-6}\times2.0\times108}{\sqrt{5}} = 268m$$

3.（2012 年广东工业大学）α 粒子在加速器中被加速，当其质量为静止质量的 5 倍时，其动能为静止能量的_______倍.

解：$E_k = mc^2 - m_0c^2 = 5m_0c^2 - m_0c^2 = 4m_0c^2$，填 4.

4.（2011 年河北工业大学）观察者甲和乙静止于两个惯性参考系 K 和 K' 中，甲测得在同一地点发生的两个事件的时间间隔为 4s. 而乙测得这两个事件的时间间隔为 5s. 乙测得这两个事件发生地点的距离.

答案详见考试点视频

5.（2012 年中国科学技术大学）一个光子把一个以 0.6 c 运动的电子加速到 0.8 c，试用电子静止质量m_e表示该光子最小可能的能量.（提示：能量最小的可能是光子从"后面正碰电子反弹回新光子）

答案详见考试点视频

6.（2011 年广东工业大学）把一个静止质量为 m_0的粒子，由静止加速到 v＝0.6 c（c 为真空中光速），需要作的功（　　）

$(A)\ 0.18m_0c^2$　　$(B)\ 0.25m_0c^2$　　$(C)\ 0.36m_0c^2$　　$(A)\ 1.25m_0c^2$

解：$A = mc^2 - m_0c^2 = (\frac{1}{\sqrt{1-(0.6c/c)^2}} - 1)m_0c^2 = 0.25m_0c^2$

7.（2011 年广东工业大学）根据相对论力学，动能为 0.25 MeV 的电子，其运动速度约等于（　　）

（A）0.1c；　（B）0.5 c；　（C）0.75 c；　（D）0.85 c.

答案详见考试点视频

8.（2011 年南京理工大学）S 系中一质量密度为ρ_0的立方体，若使此立方体沿平行于一边的方向以$v = 0.6c$速度运动，则在 S 系中测得其质量密度为ρ_0.

答案详见考试点视频

9.（2011 年中国科学技术大学）一艘静长为 90 米的飞船以速度$v = 0.8c$飞行. 当飞船的尾部经过地面上某信号站时，该信号站发出一光信号.

（1）当光信号到达飞船头部时，飞船头部离地面信号站的距离为多远？

（2）按地面上的时间，信号从信号站发出共需多少时间Δt才到达飞船头部？

解：设飞船为 S’系，地面为 S 系. 信号发出和到达飞船头部分别为事件 1 和事件 2. 则 $\ell_0 = \Delta x' = 90m, \quad \Delta t' = \frac{90}{c}.$

解法 1：解$\frac{v\Delta t + \ell_0\sqrt{1-(0.8c/c)^2)}}{c} = \Delta t$

得信号从信号站到达飞船头部所用时间　$\Delta t = \frac{270}{c} = 9.0 \times 10^{-7}\ s$

当光信号到达飞船头部时，飞船头部离地面信号站的距离为

$v\Delta t + \ell_0\sqrt{1-(0.8c/c)^2)} = 270\ m$

解法 2：$\Delta x = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{90 + 0.8c \cdot 90/c}{\sqrt{1-0.8^2}} = 270\ (m)$

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{90/c + \frac{0.8c}{c^2} \cdot 90}{\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{270}{c} = 9.0 \times 10^{-7}\ (s)$$

10.（2010 年中国科学技术大学）如图，两相互平行且完全相同的刻度尺，其长度是ℓ_0. 现各以$v = 0.6c$的速率（相对于惯性系 K）相向运动，运动方向平行于尺子. 求任一尺子的察者测量另一尺子的长度.

答案详见考试点视频

11.（2010 年南京理工大学）π介子相对静止时测得其平均寿命$\tau_0 = 1.8 \times 10^{-8}s$，若使其以$v = 0.8c$的速率离开加速器，则从实验室观测，$\pi$介子的平均寿命为________，$\pi$介子在实验室中飞跃的距离________.

答案详见考试点视频

12.（2010 年电子科技大学）质子在加速器中被加速，当其动能为静止能量的 4 倍时，其质量为静

止质量的____________ 倍。

解：$E_k = mc^2 - m_0c^2 = 4m_0c^2 \implies m = 5m_0$

13.（2010 年电子科技大学）匀质细棒静止时的质量为 m_0，长度为ℓ_0，线密度$\rho_0 = m_0/\ell_0$.根据狭义相对论，当此棒沿棒长方向以v作高速线运动时，测棒的线密度为(　　).

$(A)\ \rho = \dfrac{\rho_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}$　　$(B)\ \rho = \dfrac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$　　$(C)\ \rho = \rho_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$　　$(D)\ \rho = \rho_0$

答案详见考试点视频

解题方法总结：解狭义相对论运动学问题，要搞清楚已知的和待求的事件的时空坐标是在哪个惯性系中测量的，然后套洛伦兹变换公式解之. 对长度收缩和时间膨胀及同时性问题，要明确固有长度和固有时是在哪个惯性系中测量的，而运动长度和两事件任意的时间间隔又是如何测量的，然后用长度收缩和时间膨胀公式求解，也可回避这两个公式，直接用两个事件的时空间隔在不同惯性系间的洛伦兹变换解之.

对狭义相对论动力学问题，要注意在质量动量和能量公式中的因子$\sqrt{1-v^2/c^2}$中的v是粒子在选定的坐标系中的速度，而不是不同的惯性系的相对运动速度.

无论解哪类问题，都不要忘了而是要自觉地应用光速不变原理.

第5讲　电学

基本公式：

$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{x}{\pm a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} + C,$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + C.$$

$E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}$，$\mathbf{E} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i$，

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda dl}{r^2}\mathbf{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda dl}{r^3}\mathbf{r} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma dS}{r^2}\mathbf{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma dS}{r^3}\mathbf{r} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho dV}{r^2}\mathbf{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho dV}{r^3}\mathbf{r} \end{cases}$$

$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon}\sum q_{oin}$，　$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum(q_{oin} + q'_{in})$.

$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{oin}$

$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}$,　$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$.

$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

电势：$V_M = \frac{W_M}{q_0} = \int_M^{"0"} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$,　$(V_{"0"}) = 0)$.（场强积分法）

$U_{MN} = V_M - V_N = \int_M^N \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$.　　$A_{MN} = q_0(V_M - V_N)$

$V_p = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$,　$V_\infty = 0$.

$V_p = \sum V_{p_i}$,　$V_p = \displaystyle\int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$　$(V_\infty = 0)$.（电势叠加法）

$$\mathbf{E} = -(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}) = -\text{grad } V = \nabla V.$$

$W = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} q_i\phi_i$,　$W = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_q \phi dq$

$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$,　$W = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV$.

电偶极子：$\mathbf{p} = q\mathbf{l}$，$\mathbf{F} = 0$,　$M = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$.　$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$.

导体：$\mathbf{E}_{in} = 0$，$\mathbf{E}_s \perp$导体表面. 导体是等势体.

电荷分布：$\sigma = \varepsilon_0 E$，腔内无电荷时，电荷只能分布在导体外表面；腔内有电荷时，腔内电荷和内表面电荷代数和为0. 面电荷密度与导体表面曲率有关.

电极化：$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}$.

$\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n$.　　$q'_{in} = -\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$.　　$(\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P})$

$C=\frac{Q}{U}$, $\frac{1}{C}=\sum\frac{1}{C_i}$, $C=\sum C_i$.

$W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$.

恒定电流:$\mathscr{E}=\frac{dA}{dq}=\int_B^A \mathbf{E}_K\cdot d\mathbf{l}$, $\mathscr{E}=\oint \mathbf{E}_K\cdot d\mathbf{l}$

$U=IR$, $\mathbf{J}=\gamma E$, $R=\rho\frac{l}{S}=\frac{l}{\sigma S}$, $I=\frac{\mathscr{E}}{R+r}$,

$\sum I_i=0.\sum(\mp\mathscr{E}_i)+\sum(\pm I_iR_i)=0$.

名校真题解析

1.（2012 年中国科学院研究生院）一个带正电荷 Q 、质量为 M 的质点绕另一个带负电 q 、质量为 m 的固定质点作匀速圆周运动。则这两个质点电荷间的距离与运动周期的 2/3 次方（　　）

（A）成正比；　（B）成反比；　（C）不成比例；　（D）无关。

解:$M\frac{v^2}{r}=k\frac{Qq}{r^2}\implies v=\sqrt{\frac{kQq}{Mr}}$

$vT=\sqrt{\frac{kQq}{Mr}}T=2\pi r\implies r=(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kQq}{M}}T)^{2/3}\propto T^{2/3}$　选（A）

2.（2012 年中国科学院研究生院）半径为 R 的球形体内均匀带电，总带电量为 Q ，求：

（1）电场强度和电势随半径的分布；

（2）如果在球内离球心 R / 2 处挖去一半径为 R / 2 的小球，球体其余部分带电不被改变，计算被挖去的空腔中心的电场强度.

解：（1）电场：

由对称性知$\vec{E}=E\vec{e}_r$，即球内外$\vec{E}$沿径向.

球外:$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$　$(r\geq R)$

球内:$\oint\vec{E}\cdot d\vec{s}=E4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{in}$

$\sum q_{in}=\rho\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{Qr^3}{R^3}$

$E=\frac{Qr^3/R^3}{4\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0R^3}$,　$(r\leq R)$

电势：

球外：　$u=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r}$,　$(r\geq R)$

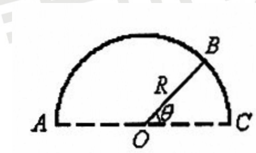
球内：

$$u=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{R}\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0R^3}dr+\int_R^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}dr$$
$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0R}-\frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0R^3}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R}=\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0R^3}\quad(r\le R)$$

(2)用"补偿法".可认为原球未挖,但在空腔处补体电荷密度为$-\rho$的球体,根据均匀带电球体内的电场公式 $\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^3}\mathbf{r}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r},\quad(r<R).$ 和电场强度叠加原理知空腔中心的电场强度:

$E_{o'}=\frac{qR/2}{4\pi\varepsilon_0R^3}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0R^2}$,方向平行于$\overrightarrow{OO'}$.

3.(2012 中科大)如图,电荷分布在半径为 R 的半圆环 ABC 上,线电荷密度为$\lambda_0\sin\theta$,其中λ_0为常数,求圆心 O 处的电场强度.若无穷远处电势为零,求 O 点出的电势.



答案详见考试点视频

4.(2012 年中国科学技术大学)在真空中有一直径为 d,长为$\ell(\ell>>d)$的圆柱形导体棒.已知棒均匀带电,棒表面附近(远离棒的两端)的电场强度为E_0,求在圆柱轴线上距离棒的中心$r(r>>\ell)$处的电场强度.

答案详见考试点视频

5.(2012 年河北大学)一半径为 R 的带电球体,其电荷体密度分布为:

$\rho=\frac{qr}{\pi R^4}\quad(r\le R)\quad(q$为一正的常量)

$\rho=0\quad(r>R)$

试求:(1) 带电球体的总电荷;

(2)球内、外各点的电场强度;

(3)球内、外各点的电势

解:(1) 在球内取半径为 r、厚为 dr 的薄球壳,该壳内所包含的电荷为:

$$dq=\rho dv=\frac{qr}{\pi R^4}4\pi r^2dr=\frac{4qr^3}{R^4}dr$$

则球体所带的总电荷为:

$$Q=\int_0^R\frac{4qr^3}{R^4}dr=q$$

(2)在球内作一半径为 r_1 的高斯球面,按高斯定理有:

$$4\pi r^2E=\oint\vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r\rho4\pi r^2dr=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r\frac{qr}{\pi R^4}4\pi r^2dr=\frac{qr^4}{\varepsilon_0R^4}$$

$E=\frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0R^4},\quad(r\le R)$方向沿半径向外.

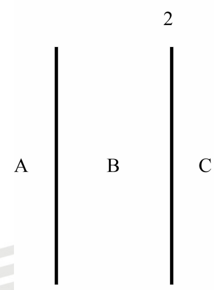
电荷分布具有球对称性,球外的电场等于电荷全部集中在球心产生的电场,

$E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad (r>R)$方向沿半径向外.

(3)球内电势：

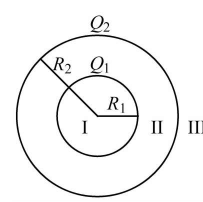
$$u=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^R\frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0R^4}dr+\int_R^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}dr$$
$$=\frac{q}{12\pi\varepsilon_0R}-\frac{qr^3}{12\pi\varepsilon_0R^4}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R}=\frac{q}{12\pi\varepsilon_0R}[4-\frac{r^3}{R^3}],\quad (r\le R)$$

球外电势：$u=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},\quad (r>R)$



6.(北京科技大学2012年)两个平行的“无限大”均匀带电平面，其电荷面密度分别为$+\sigma$和$+2\sigma$，如图所示，则A、B、C三个区域的电场强度分别为E_A = ________；E_B = ______________； E_C = __________。(设方向向向右为正)

答案详见考试点视频

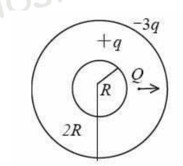


7.(北京科技大学2012)如图所示，两个均匀带电球面半径分别为R_1和R_2，带电量分别为Q_1和Q_2，求：这两个均匀带电球面产生的电势分布？

解：根据均匀带电球面电势公式：

$$\phi=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r\ge R,\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r\le R.\end{cases}$$

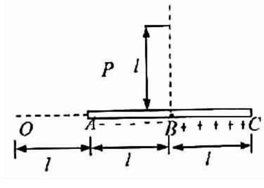
$$\phi_I(r)=\tfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\tfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_2},\ 0\le r\le R_1;$$
$$\phi_{II}(r)=\tfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0r}+\tfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_2},\ R_1\le r\le R_2;$$
$$\phi_{III}(r)=\tfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0r},\qquad r\ge R_2.$$



8.(2011年华南理工大学)如图所示，在真空中半径分别为R和2R的两个同心球面，其上分别均匀地带有电荷+q和-3q. 今将一电荷为+Q的带电粒子从内球面处由静止释放，则该粒子到达外球面时的动能为(　　)

$(A)\ \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0R}\quad (B)\ \dfrac{Qq}{2\pi\varepsilon_0R}\quad (C)\ \dfrac{Qq}{8\pi\varepsilon_0R}\quad (D)\ \dfrac{3Qq}{8\pi\varepsilon_0R}$

答案详见考试点视频



9.(2012年河北工业大学)AC为一根长为2ℓ的带电细棒，左半部均匀带有负电荷，右半部均匀带有正电荷，电荷线密度分别为$-\lambda$和λ，如图所示，O点在棒的延长线上，距A端的距离为ℓ。P点在棒的垂直平分线上，到棒的垂直距离为ℓ. 以棒的中点B为电势零点. 则O点电势U = ________ ；P点电势U_0 = ________.

解：以无穷远处为电势零点时，棒的垂直平分线上与B点距离为y的一点的电势

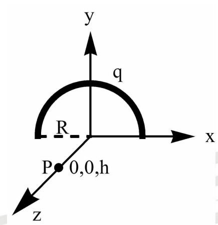
$$u_y=\int_{-\ell}^{0}\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2+x^2}}dx+\int_0^{\ell}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2+x^2}}dx$$
$$=\int_{\ell}^{0}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2+x'^2}}dx'+\int_0^{\ell}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2+x^2}}dx=0$$

因上式$u_y=0$与y无关，所以$y_B=0$，B 点电势与无穷远处电势相等. 空间各点以 B 点为电势零点的电势与以无穷远处为电势零点的电势相等.

P 点电势$U_0=0$

O 点电势$U=\int_{-\ell}^{0}\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0(2l+x)}dx+\int_{0}^{\ell}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0(2l+x)}dx=-\frac{\lambda\ln(\frac{4}{3})}{4\pi\varepsilon_0}$

10.（2012 年浙江师范大学）一根玻璃细棒被弯成半径为 R 的半圆环，并将其均匀地带上电荷 q。设该半圆环位于 xy 平面上，坐标原点位于半圆环的圆心 O，如图所示。设 z 轴上任一点 P 的坐标为(0, 0, h)，求轴线上 P 点的电势和电场强度。



答案详见考试点视频

11.（2012 年浙江师范大学）一个球形电容器，其内导体球的半径为 a，外导体球的半径为 b。在两导体球面间填满相对介电常数为ε_r，电导率为γ的介质。设内导体球带 +q，外导体带 −q，试求：

(a)该电容器的电容；

(b)两导体球面间介质的电阻 R；

(c)从内导体球经介质流向外导体球的电流 I。

解：(a)两球面间的电场强度

$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2},\quad (a\le r\le b),,\quad$ 沿径向向外.

两球面间的电势差

$$u=\int_a^b\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})=\frac{q(b-a)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r ab}$$

$$C=\frac{q}{u}=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r ab}{b-a}$$

(b)$R=\int_a^b\frac{dr}{\gamma 4\pi r^2}=\frac{1}{\gamma 4\pi}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})=\frac{b-a}{4\pi\gamma ab}$

(c)$I=\frac{u}{R}=\frac{\frac{q(b-a)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r ab}}{\frac{b-a}{4\pi\gamma ab}}=\frac{q\gamma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$

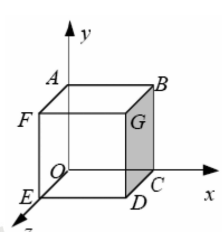
另一种解法：

$$\vec{J}=\gamma\vec{E}=\gamma\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^3}\vec{r}$$

$$I=\oint\vec{J}\cdot d\vec{S}=\frac{q\gamma}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}4\pi r^2=\frac{q\gamma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

12.（2012 年浙江师范大学）一边长为 a 的立方体置于直角坐标系中，如图所示。现空间中有一非均匀电场$\vec{E}=(E_1+kx)\vec{i}+E_2\vec{j}$，$E_1,E_2$为常量，

求：电场对立方体各表面的电场强度通量。



答案详见考试点视频

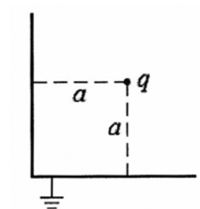
13. 氨分子在外电场中的极化是(　　)

（A）位移极化，与温度无关；　　（B）取向极化，与温度无关；

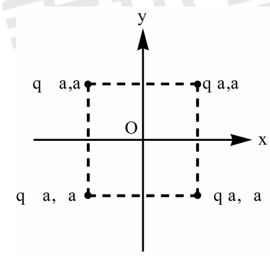
（C）位移极化，与温度有关；　　（D）取向极化，与温度有关；

解：选（D）

14.（2011 年中国科学技术大学）两个接地的半无限大导体板垂直相接，点电荷 q 与两个板的距离均为 a. 求 q 所受的静电力以及整个体系的相互作用能.



解：用如下的三个镜象电荷可实现两个半无限大导体板$U=0$的边界条件. $-q(-a,a)$, $q(-a,-a)$, $-q(a,-a)$. 三个镜象电荷在点电荷 q 所在点(a,a)的电场强度是：



$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-2a\vec{i}}{(2a)^3}+\frac{2a\vec{i}+2a\vec{j}}{[(2a)^2+(2a)^2]^{3/2}}+\frac{-2a\vec{j}}{(2a)^3}\right]$$
$$=\frac{(-4+\sqrt{2})q}{64a^2\pi\varepsilon_0}(\vec{i}+\vec{j})$$

q 所受的静电力$\vec{f}=q\vec{E}=\dfrac{(-4+\sqrt{2})q^2}{64a^2\pi\varepsilon_0}(\vec{i}+\vec{j})$　　$f=|\vec{f}|=\dfrac{(-2\sqrt{2}+1)q^2}{32a^2\pi\varepsilon_0}$

方向与 x 轴正向成$45°$角.

用 $u_i(i=1,2,3,4)$ 表示第 i 个点电荷所在处由其它三个点电荷所产生的电势：

$$u_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a}+\frac{1}{\sqrt{2}2a}\right)=\frac{\left(-4+\sqrt{2}\right)q}{16a\pi\varepsilon_0}$$

$$u_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{\sqrt{2}2a}\right)=-\frac{\left(-4+\sqrt{2}\right)q}{16a\pi\varepsilon_0}$$

$$u_3=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}2a}-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a}\right)=\frac{\left(-4+\sqrt{2}\right)q}{16a\pi\varepsilon_0}$$

$$u_4=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{\sqrt{2}2a}+\frac{1}{2a}\right)=-\frac{\left(-4+\sqrt{2}\right)q}{16a\pi\varepsilon_0}$$

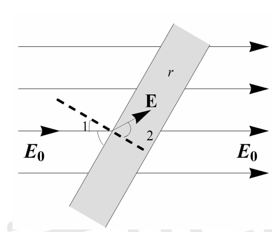
整个体系的相互作用能是：

$$W=\frac{1}{2}(qu_1-qu_2+qu_3-qu_4)=\frac{\left(-4+\sqrt{2}\right)q^2}{8a\pi\varepsilon_0}$$

典型题精讲精练

1. 一块大的均匀电介质平板放在一电场强度为E_0的均匀电场中，电场方向与板的夹角为θ，如图所示. 已知板的相对介电常量为ε_r，求板的面束缚电荷密度.

解：如图所示，根据静电场的边界条件得：



$D_{1n}=D_{2n}\Rightarrow\varepsilon_0E_0\cos\alpha_1=\varepsilon_0\varepsilon_rE\cos\alpha_2\Rightarrow E_0\cos\alpha_1=\varepsilon_rE\cos\alpha_2$,

即$E_0\sin\theta=\varepsilon_rE\cos\alpha_2$,　①

$E\sin\alpha_2=E_0\sin\alpha_1=E_0\cos\theta$,　②

解，①，②得：$E=\frac{E_0}{\epsilon_r}\sqrt{\sin^2\theta+\epsilon_r^2\cos^2\theta}$，

$\sigma'=P\cos\alpha_2=\epsilon_0(\epsilon_r-1)E\cos\alpha_2=\frac{\epsilon_0(\epsilon_r-1)}{\epsilon_r}E_0\sin\theta.$

解题方法总结：

求电荷系统在空间产生的电场和电势时，首先考虑系统是否是简单带电系统（无限长均匀带电直线，均匀带电球面或球体，均匀带电圆环或圆盘，无限大均匀带电平面等）的组合，若是，则可用相应的已知的简单问题的结果和叠加原理解之；其次，考虑问题是否具有对称性（球对称，轴对称和平面对称性），若有，则可用高斯定理求电场强度$\vec{E}$或电位移$\vec{D}$. 用高斯定理解题的关键是根据问题的对称性做"合适"的高斯面，以保证能把 E 或 D 提到积分号外. 得到$\vec{E}$之后，可用场强积分法求电势；第三，对一般的带电系统可根据点电荷的电场强度或电势和电场强度或电势叠加原理求$\vec{E}$和 U. 这一方法的基本点是要正确地选取"电荷元"，写出"电荷元"产生的电场和电势的表达式，然后正确地进行积分. 求电势，既可用"电势叠加法"，也可用"场强积分法". 电势与其零点的选取有关，同一问题中的电势必须是对同一参考点而言. 而求电场，除上边介绍的方法外，还可用电势梯度法（$\vec{E}=-\Delta u$）.

解静电场中的导体问题，要牢记导体静电平衡时导体内电场强度必为零，整个导体是等势体，导体表面是等势面，导体外紧靠导体表面处的电场强度与导体表面垂直. 导体内无净电荷，电荷只能分布在导体表面. 对有腔导体，解题时要充分利用腔内电荷与内表面电荷的代数和为零这一性质.

对介质中的电场问题，要用含$\vec{D}$的高斯定理，然后再根据$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$得到$\vec{E}$. 要注意电介质的两种极化机理和极化（束缚）电荷的求法. 对电容器，即可用电容的定义$C=q/u$求 C，也可用电容器的能量公式$w=\frac{1}{2}CU^2$求 C. 应记电容器的串并联公式. 对电容器进行各种操作（改变尺寸，介质）时，不摘电源，电压不变，摘掉电源，总电荷不变. 解电场电势问题，还可用补偿法、镜像法等.

第 6 讲　磁学

基本公式：

$d\mathbf{B}=\frac{\mu_0 Id\mathbf{l}\times\mathbf{e}_r}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0 Id\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{4\pi r^3}, \mathbf{B}=\int_L\frac{\mu_0 Id\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{4\pi r^3}$

$\Phi=\int_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$

$$\oint_L\mathbf{B}\cdot d\mathbf{r}=\mu_0\sum I_{in}.$$

$I_d=\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_S\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\varepsilon_0\frac{d\Phi_e}{dt},\qquad \mathbf{J}_d=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$

$$I=I_c+I_d,\qquad \oint_L\mathbf{B}\cdot d\mathbf{r}=\mu_0(I_c+I_d)=\mu_0(I_c+\varepsilon_0\frac{d\Phi_e}{dt})=\mu_0(I_c+\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_S\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}).$$

$\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}.$

$R=\dfrac{mv}{qB},\qquad T=\frac{2\pi m}{qB},\quad h=\frac{2\pi m}{qb}v_{\|}.$

霍尔效应：$U=V_1-V_2=\dfrac{IB}{nqd}.$

上式中n是载流子密度，d是导体沿磁场方向的宽度。

$d\mathbf{F}=Id\mathbf{l}\times\mathbf{B},\qquad \mathbf{F}=\int_L Id\mathbf{l}\times\mathbf{B}.$

均匀磁场中的载流线圈：

$\mathbf{F}=0,\quad M=\mathbf{m}\times\mathbf{B},\qquad \mathbf{m}=I\mathbf{S}=IS\mathbf{e}_n,\quad W_m=-\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}.$

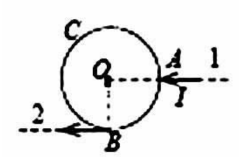
顺磁质($\mu_r>1$)，抗磁质($\mu_r<1$)，铁磁质($\mu_r>>1$).

$\mathbf{M}=\frac{\sum m_i}{\Delta V}=\frac{\mu_r-1}{\mu_0\mu_r}\mathbf{B}=\chi_m\mathbf{H},\quad \mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M},\ \mathbf{H}=\frac{B}{\mu_0\mu_r}=\frac{B}{\mu}.$

$\oint_L\mathbf{H}\cdot d\mathbf{r}=\sum I_{0in}.$

$\mathbf{j}'=\mathbf{M}\times\mathbf{e}_n,\quad I'=\oint_L\mathbf{M}\cdot d\mathbf{r}.$

名校真题解析



1.（2011 年华南理工大学）如图所示，用均匀细金属丝构成一半径为 R 的圆环 C，电流 I 由导线 1 流入圆环 A 点，并由圆环 B 点流入导线 2. 设导线 1 和导线 2 与圆环共面，则环心 O 处的磁感强度大小为____________，方向____________.

解：导线 1 的电流在 O 点产生的磁场$B_1=0.$

导线 2 的电流在 O 点产生的磁场$B_2=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$，方向$\otimes$.

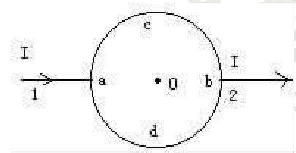
$I_{AB}=\frac{3}{4}I,\quad I_{AcB}=\frac{1}{4}I$

AB 弧的电流在 O 点产生的磁场$B_3=\frac{\mu_0(3I/4)}{2R}\frac{1}{4}=\frac{3\mu_0 I}{32R}$, 方向$\otimes$.

AcB 弧的电流在 O 点产生的磁场 $B_4=\frac{\mu_0 I/4}{2R}\frac{3}{4}=\frac{3\mu_0 I}{32R}$, 方向$\odot$

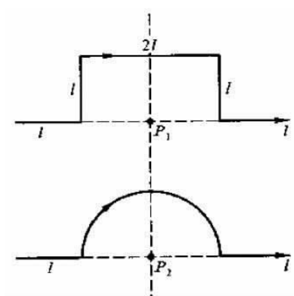
$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3+\vec{B}_4=\vec{B}_2,\qquad B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$ 方向$\otimes$

2.(2012 年杭州师范大学)电流由长直导线 1 沿半径方向经 a 点流入一电阻均匀分布的圆环,再由 b 点沿半径方向流出,经长直导线 2 返回电源(如图),已知直导线上的电流强度为 I,圆环的半径为 R,且 a、b 和圆心 O 在同一直线上,则 O 处的磁感应强度的大小为____________.



解:O 点在 1 和 2 两条半无限长电流的延长线上,1 和 2 两电流在 O 处磁感应强度均为零. 两条半圆电流在 O 点产生的磁感应强度大小相等,方向相反, 所以$B_o=0$.

3.(2012 年浙江师范大学)一段导线先弯成图(a)所示形状,然后将同样长的导线再弯成图(b)所示形状。在导线通以电流 I 后,求两个图形中 P 点的磁感应强度之比.



解:两图中两段半无限长直线电流在其延长线上产生的磁感应强度均为 0.

故对上图只需考虑三段直线段电流在 p_1点产生的磁场,对下图只需考虑半圆电流在 p_2点产生的磁场.

上图中三段直线段电流在 p_1点产生的磁场方向相同,垂直纸面朝里 $\otimes$.

设左上右三段直线电流在 p_1 点产生的$\vec{B}$的大小分别为B_1,B_2,B_3,根据直线电流磁场公式

$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$得

$$B_1=B_3=\frac{\mu_0 I}{4\pi\ell}(\cos 90^\circ-\cos 135^\circ)=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi\ell}$$

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi\ell}(\cos 45^\circ-\cos 135^\circ)=\frac{\mu_0 I}{4\pi\ell}\sqrt{2}$$

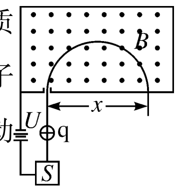
$$B_{p_1}=B_1+B_2+B_3=2\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi\ell}+\frac{\mu_0 I}{4\pi\ell}\sqrt{2}=\frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi\ell}$$

下图中半圆电流在 p_2点产生的磁场

$$B_{p_2}=\frac{\mu_0 I}{4R}\otimes,\qquad \pi R=4\ell\implies R=\frac{4\ell}{\pi}$$

$$\frac{B_{p_1}}{B_{p_2}}=\frac{\frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi\ell}}{\frac{\mu_0 I}{4R}}=\frac{2\sqrt{2}R}{\pi\ell}=\frac{2\sqrt{2}4\ell/\pi}{\pi\ell}=\frac{8\sqrt{2}}{\pi^2}$$

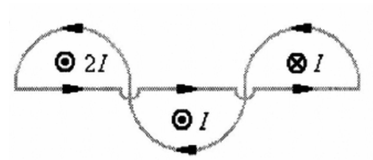
4.（2011 年北京科技大学）图示为测定离子质量所用的装置。离子源 S 产生一质量为 m、电荷量为 +q 的离子。离子从源出来时的速度很小，可以看作是静止的。离子经电势差 U 加速后进入磁感应强度为 B 的均匀磁场，在这磁场中，离子沿一半圆周运动后射到离入口缝隙 x 远处的感光底片上，并予以记录。试证明离子的质量$m=\frac{B^2q}{8U}x^2$.



证：设离子进入磁场时的速度为v，$qU=\frac{1}{2}mv^2 \implies v=\sqrt{\frac{2qU}{m}}$

$$\frac{x}{2}=\frac{mv}{qB}=\frac{\sqrt{2mU}}{\sqrt{q}B} \implies m=\frac{qB^2}{8U}x^2$$

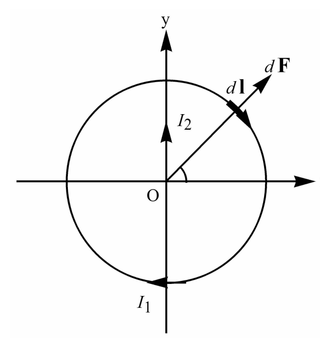
5.（2011 年中国科学技术大学）三根导线的电流强度如图所示，则磁场强度沿指定路径的环路积分等于(　　)



$(A)\ -I;$　　$(B)\ 0;$　　$(C)\ 2I;$　　$(D)\ 4I.$

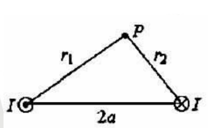
解：选（B）.

6.（2012 年浙江师范大学）在 xy 平面内有一半径为 R 的圆形导线回路，通以顺时针方向的电流 I_1，圆心与坐标原点 O 重合。另有一根无限长直导线与 y 轴重合，通以电流 I_2，并沿 y 轴方向流动，两电流间是相互绝缘的，如图所示。求该圆形导线回路所受的磁力（安培力）。（视导线回路为刚体）



答案详见考试点视频

7.（2012 年中国科学技术大学）如图，载有反向电流 I 的两条无限长平行直导线相距 2a，空间任一点 P 到两条导线的距离分别是 r_1 和 r_2，求 P 点磁感应强度的大小.



答案详见考试点视频

8.（2012 年中国科学技术大学）已知质子质量 $m=1.67\times10^{-27}$kg，地球半径 6370km，地球赤道上地面的磁场 $=0.32$G $=0.32\times10^{-4}$T。

(1)要使质子在地球磁场的作用下，沿赤道地面作圆周运动，试求质子的速率 v. 提示：质子的质量要考虑相对论效应，光速$c=3\times10^8 m/s$.

(2)若使质子以速率 $v=1.0\times10^7$m/s 沿赤道作圆周运动，试问地磁场的磁感应强度多大？

解：(1)质子的运动方程为　$evB=\frac{m_p v^2}{r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$,

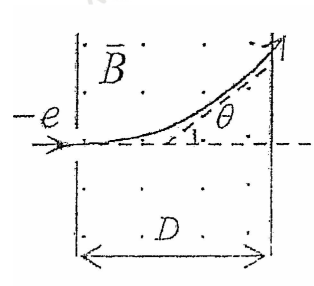
即$\left[m_p^2+\left(\frac{Ber}{c}\right)^2\right]v^4-(Ber)^2v^2=0$

解得 $v=\frac{Ber}{\sqrt{m_p^2+(\frac{Ber}{c})^2}}$，代入数据得 $v=2.99965\times10^8 m/s$

（2）从$evB=\frac{m_pv^2}{r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$得

$$B=\frac{m_pv}{er\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1.67\times10^{-27}\times1.0\times10^7}{1.6\times10^{-19}\times6370\times10^3\times\sqrt{1-\frac{(1.0\times10^7)^2}{(3.0\times108)^2}}}$$
$$=1.64\times10^{-8}\,T$$

9.（2012年广东工业大学）一动量为$\vec{p}$的电子，沿图示方向射入并能穿过一个宽度为D，磁感应强度为$\vec{B}$的均匀磁场，其磁感应强度方向垂直纸面向外，该电子出射方向与入射方向的夹角为(　　)



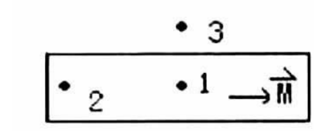
$(A)\ \theta=\sin^{-1}\frac{BD}{ep}$;　　$(B)\ \theta=\cos^{-1}\frac{BD}{ep}$;
$(C)\ \theta=\sin^{-1}\frac{eBD}{p}$;　　$(D)\ \theta=\cos^{-1}\frac{eBD}{p}$;

答案详见考试点视频

10.（2012年中国科学技术大学）在磁化强度为常量M的均匀磁介质中挖去一半径为R的球形空腔，求磁化电流的磁矩及其在球心处产生的磁感应强度.

答案详见考试点视频

11.（2011年太原科技大学）如图所示，一根沿轴向均匀磁化的细长永磁棒，磁化强度为$\vec{M}$，图中所标各点的磁感应强度是(　　)

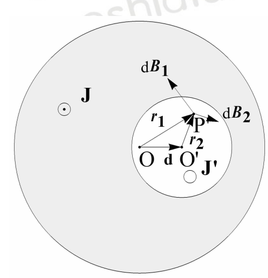


$(A)\ B_1=B_2=\mu_0M,\ B_3=0$;
$(B)\ B_1=\mu_0M,\ B_2=B_3=\frac{1}{2}\mu_0M$;
$(C)\ B_1=\frac{1}{2}\mu_0M;\ B_2=\mu_0M,\ B_3=0$;
$(D)\ B_1=\mu_0M;\ B_2=\frac{1}{2}\mu_0M,\ B_3=0.$

答案详见考试点视频

典型题精讲精练

12. 有一圆柱形导体，截面半径为R，今在导体中挖去一个与轴平行的圆柱体，形成一个截面半径为r的圆柱形空洞，其截面如图所示. 在有洞的导体柱内有电流沿柱轴方向流通. 求洞中各处的磁场分布. 电流密度为J，从柱轴到空洞轴之间的距离为d.



解：设想柱中没有挖洞，但在挖洞的地方有一个与挖去的洞相同的但电流密度为$\mathbf{J'}=-\mathbf{J}$的柱

体. 设两柱体在洞中 P 点的磁感应强度分别为$\mathbf{B}_1$和$\mathbf{B}_2$，则 P 点的磁感应强度是

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2=\frac{\mu_0}{2}\mathbf{J}\times\mathbf{r}_1+\frac{\mu_0}{2}\mathbf{J'}\times\mathbf{r}_2$$
$$=\frac{\mu_0}{2}\mathbf{J}\times(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\frac{\mu_0}{2}\mathbf{J}\times\mathbf{d}.\qquad \mathbf{d}=\overrightarrow{oo'}.$$

解题方法总结：类似于求电场强度，求磁感应强度或磁场强度时，首先考虑问题是否可化成已知的简单问题的组合，若是，则用已知问题的结果{直线电流的磁场，无限长圆柱面或圆柱电流的磁场，圆形电流轴线上一点的磁场等}和叠加原理得结果；其次，考虑电流分布是否具有对称性，若问题具有对称性，则用安培环路定律解之. 最后，一般情况下，用毕萨定律求解. 用安培环路定律的关键是根据问题的对称性做"合适的"安培回路，以保证能把 B 或 H 提到积分号外，另外，还要注意电流与回路的正负关系. 毕萨定律是一个矢量公式，应用时首先要写出所选的电流元在场点的$d\vec{B}$，然后进行积分. 对复杂问题，用分量式积分. 对洛伦兹力，要注意电荷的正负及其速度$\vec{v}$的方向，牢记洛伦兹力不做功，只能改变速度$\vec{v}$的方向. 对安培力，要注意电流的流向，$Id\vec{\ell}$永远沿着导线的切线方向并指向电流流向的一方. 对复杂问题，同样建议用分量式积分. 对磁介质问题，要明确磁介质的分类及各类磁介质的特性. 当磁场中有介质时，要记住$\vec{B}$与$\vec{H}$的关系及$\vec{M}$与$\vec{B}$或$\vec{H}$的关系，面束缚电流和体束缚电流的公式. 另外还要记在两种磁介质分界面处磁场的边值关系.

第 7 讲　电磁感应及麦克斯韦方程

基本公式：

$$\mathscr{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^{n}\Phi_i)=-\frac{d\psi}{dt}.$$

$$\mathscr{E}_{ab}=\int_a^b(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l},\quad \mathscr{E}=\oint(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}.$$

$$\mathscr{E}=\oint\mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{l}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\int_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}.$$

自感：$L=\dfrac{\Phi_N}{I},\quad \mathscr{E}_L=-L\dfrac{dI}{dt},W_m=\dfrac{1}{2}LI_0^2.$

互感：$M=\dfrac{\Phi_{21}}{I_1}=\dfrac{\Phi_{12}}{I_2}.,\ \mathscr{E}_{21}=-M\frac{dI_1}{dt},\quad \mathscr{E}_{12}=-M\frac{dI_2}{dt}.$（$M$一定）

$M=k\sqrt{L_1L_2},\quad 0\le k\le 1$　k 称为耦合系数

磁场能量：$\omega_m=\dfrac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$

$$w_m=\frac{B^2}{2\mu}=\frac{1}{2}BH,\ W_m=\int_v w_m dv=\int_V\frac{1}{2}BHdv$$

麦克斯韦方程组：

位移电流：$I_d=\dfrac{d\Psi_D}{dt},\quad \mathbf{j}_d=\dfrac{d\mathbf{D}}{dt},\quad \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I_d=\dfrac{d\Psi_D}{dt}$

全电流定律：$I_t=I+I_d$，

$$\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\sum(I+I_d)=\iint\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}+\iint\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

$\oint_S\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\sum q=\int_V\rho dV$
$\oint_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0;$
$\oint_L\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\int_S\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S},$
$\oint_L\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I+I_d=\int_S\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}+\int_S\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}.$

电磁场量与介质的关系：　$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B}=\mu\mathbf{H},\ \mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}.$

电磁波：$\vec{E},\vec{B}(\vec{H}),\vec{c}$三者相互垂直且成右手系.

$$\sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H,\qquad \vec{B}=\frac{\vec{c}\times\vec{E}}{c^2}.\omega=\omega_e+\omega_m=\tfrac{1}{2}\varepsilon E^2+\tfrac{1}{2}\mu H^2=\varepsilon E^2=\mu H^2=\tfrac{EH}{c}..$$

能流密度（坡印亭矢量）：$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}.$

电磁波的强度（平均辐射强度）：

$$I=\overline{S}=\frac{1}{2}\varepsilon_0cE_0^2=\frac{1}{2}\mu_0cH_0^2=\frac{1}{2}E_0H_0.$$

电磁波的动量，辐射压力（光压）

动量密度（单位体积中电磁波的动量）：

$$g=\frac{\omega}{c^2}c=\frac{\omega}{c}=\frac{S}{c^2},\quad \vec{g}=\frac{1}{c^2}\vec{S}$$

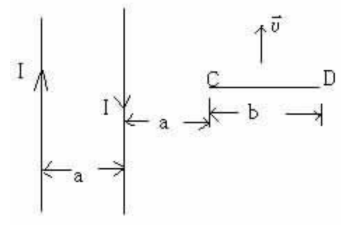
绝对黑体受的垂直入射电磁波的辐射压强：

$$p_r=cg=\varepsilon_0E^2=\omega.$$

完全反射的表面受的垂直入射电磁波的辐射压强

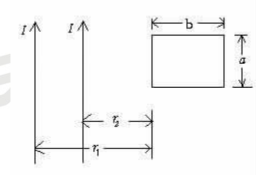
$$p=2p_r=2\omega.$$

名校真题解析



1.（2012 年河北大学）两相互平行无限长的直导线载有大小相等方向相反的电流，长度为 b 的金属杆 CD 与两导线共面且垂直，相对位置如图. CD 杆以速度$\vec{v}$平行直线电流运动，求 CD 杆中的感应电动势，并判断 C、D 两端哪端电势较高？

答案详见考试点视频



2.（2012 年河北工业大学）如图所示，两条平行长直导线和一个矩形导线框共面，且导线框的一个边与长直导线平行，到两长直导线的距离分别为 r_1 和 r_2，已知两导线中电流都为 $I=I_0\sin\omega t$，其中 I_0 和 ω 为常数，t 为时间，导线框长为 a 宽为 b，求导线框中的感应电动势。

解：两个载同向电流的长直导线在空间任一点所产生的磁场为

$$B=\frac{\mu_0I}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-r_1+r_2}\right)$$

选顺时方向为回路正方向，则

$$\Phi_m=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=\frac{\mu_0Ia}{2\pi}\left(\int_{r_1}^{r_1+b}\frac{1}{x}dx+\int_{r_1}^{r_1+b}\frac{1}{x-r_1+r_2}dx\right)$$
$$=\frac{\mu_0Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{r_1+b}{r_1}\cdot\frac{r_2+b}{r_2}\right)$$

$$\mathscr{E}_i=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-\frac{\mu_0a}{2\pi}\ln\left(\frac{(r_1+b)(r_2+b)}{r_1r_2}\right)\frac{dI}{dt}$$

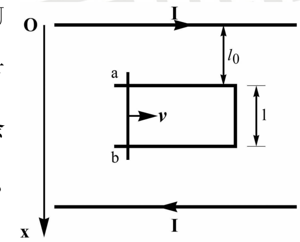
$$=-\frac{\mu_0I_0a\omega}{2\pi}\ln\left(\frac{(r_1+b)(r_2+b)}{r_1r_2}\right)\cos\omega t$$

3.（2012 年中国科学院研究生院）将电感为 L、电阻为 R 的电感器连接到电动势为$\mathscr{E}$、内阻为零的理想电源两端。在合上电源开关的瞬间，电路中的电流增长率是（　　）

(A) $2\mathscr{E}/L$:　(B) $\mathscr{E}/L$:　(C) $\mathscr{E}/L+R$:　(D) $\mathscr{E}R/L$:

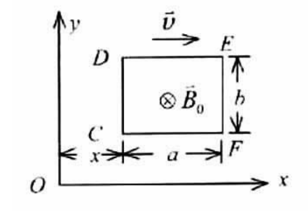
答案详见考试点视频

4.（2012 年浙江师范大学）一根无限长直导线中通以电流 I,其旁的 U 形导线上有根可滑动的导线 ab,如图所示。设三者在同一平面内,今 ab 向右以速度 v 运动,求线框中的感应电动势。如果在图中的下方对称地增加一条与原长直导线平行的长直导线,电流大小与原长直导线电流相等,流向相反,这时线框中的感应电动势又为多少?



答案详见考试点视频

5.（2012 年深圳大学题）如图所示,有一矩形线框,边长分别为 a 和 b,它在 xy 平面内以匀速$\vec{v}$沿 x 轴方向右移动,空间磁场的磁感应强度$\vec{B}$与回路平面垂直,且为坐标 x 和时间 t 的函数,即 $\vec{B}(x,t)=\vec{B}_0\sin\omega t\sin kx$,其中$\vec{B}_0,\omega,k$,均为已知常量. 设在 t = 0 时, 回路在 x = 0 处,某时刻 t 时,线框左边坐标为 x,求



（1）在 t 时刻,穿过线框的磁通量;

（2）在 t 时刻, 回路中感应电动势的大小.

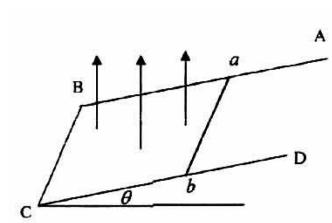
解:选线框法线方向垂直纸面朝里,在线框中选一宽度为 dr,离 y 轴距离为 r 的长条,通过此长条的磁通量为

$$d\Phi_m=bB_0\sin\omega t\sin krdr$$

$$\begin{aligned}\Phi_m&=\int_x^{x+a}bB_0\sin\omega t\sin krdr=\frac{1}{k}bB_0\sin\omega t[\cos kx-\cos k(x+a)]\\&=\frac{2bB_0}{k}\sin(\frac{1}{2}ka)\sin\omega t\sin\left[kx+\frac{1}{2}ka\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}&=-\frac{d\Phi_m}{dt}\\&=-\frac{2bB_0}{k}\sin(\frac{1}{2}ka)\left[kv\cos(\frac{ak}{2}+kx)\sin\omega t+\omega\cos\omega t\sin(\frac{ak}{2}+kx)\right]\end{aligned}$$

6.（2012 年深圳大学）如图, 质量为 M,长度为ℓ的金属棒 ab 从静止沿着倾斜的绝缘架下滑,设磁场 B 垂直向上,求



(1)棒内的动生电动势与时间的函数关系. 假设摩擦可忽略不计.

(2)如果金属棒 ab 沿光滑的金属框架下滑,试求这根金属棒下滑时所达到的稳定速度为多少?（设回路的电阻为 R,并作为常量考虑).

解:(1) 金属棒下滑的加速度$a=g\sin\theta$, t 时刻速度$v=at=gt\sin\theta$.

设金属棒 a 端为正(+),b 端为负(-), 则其动生电动势

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_i&=\int_b^a(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\int_0^\ell vB\sin(\theta+\pi/2)d\ell\\&=vB\cos\theta\ell=B\ell gt\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}B\ell gt\sin(2\theta)\end{aligned}$$

(2) 当金属棒沿金属框架下滑时,回路中的感应电流为

$$i=\frac{\mathscr{E}_i}{R}=\frac{B\ell v\cos\theta}{R}$$

金属棒受到的磁力$f_m=Bi\ell=\dfrac{B^2\ell^2 v\cos\theta}{R}$,方向水平向右,棒下滑达到稳定速度时,沿斜面方向受的合力为零,即$mg\sin\theta=f_m\cos\theta=\dfrac{(B\ell\cos\theta)^2 v}{R}\implies v_s=\dfrac{MgR\sin\theta}{(B\ell\cos\theta)^2}$

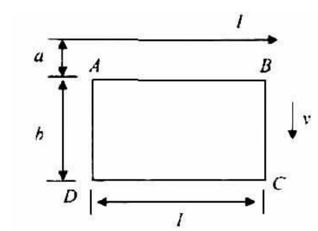
思考:本题第二问也可改成:求棒下滑时速度 v(或$\mathscr{E}_i$)与时间 t 的函数关系?

这时 $Mg\sin\theta-f_m\cos\theta=M\dfrac{dv}{dt}$,即 $Mg\sin\theta-\dfrac{(B\ell\cos\theta)^2 v}{R}=M\dfrac{dv}{dt}$

$$t=\int_0^t dt=-\int_0^v\frac{MRdv}{(B\ell\cos\theta)^2 v-MgR\sin\theta}$$
$$=-\frac{MR}{(B\ell\cos\theta)^2}\ln\frac{mgR\sin\theta-(B\ell\cos\theta)^2 v}{MgR\sin\theta},$$

解出 $v=\dfrac{MgR\sin\theta}{(B\ell\cos\theta)^2}[1-e^{-\frac{(B\ell\cos\theta)^2}{MR}t}]$ 显然，$t\to\infty$时,$v\to v_s=\dfrac{MgR\sin\theta}{(B\ell\cos\ theta)^2}$.

7.(2012 年深圳大学)载流长直导线与矩形回路 ABCD 共面,导线平行于 AB,如图所示.求下列情况下 ABCD 中的感应电动势:



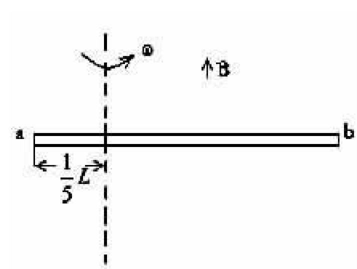
(1)长直导线中电流$I=I_0$不变,ABCD 以垂直于导线的速度 v 从图示初始位置远离导线移到某一位置时(t 时刻);

(2)长直导线中电流$I=I_0\sin\omega t$,ABCD 不动;

(3) 长直导线中电流$I=I_0\sin\omega t$,ABCD 以垂直于导线的速度 v 远离导线匀速运动,初始位置也如图;I_0,ω为恒量.

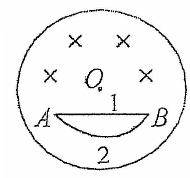
答案详见考试点视频

8.(2011 年太原科技大学;2011 年杭州师范大学)如图所示,一根长为 L 的金属细杆 ab 绕竖直轴 O_1O_2以角速度 ω 在水平面内旋转。O_1O_2在离细杆 a 端 L /5 处。若已知地磁场在竖直方向的分量为$\vec{B}$。求 ab 两端间的电势差 U_a-U_b。



答案详见考试点视频

9.(2012 年广东工业大学)圆柱形空间内均匀磁场的变化率$\dfrac{dB}{dt}$为正的常量,A、B 两点间有两条导线: 直线 1 和弧线 2,如图所示,则两条导线中感应电动势的大小(　　)

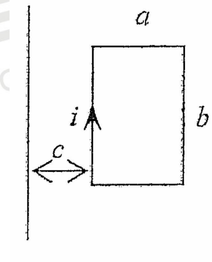


(A) $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2=0$ (B) $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2\neq 0$ (C) $\mathscr{E}_2>\mathscr{E}_1$ (D) $\mathscr{E}_2<\mathscr{E}_1$

解:连接 OA 和 OB,因感生电场与 OA 和 OB 垂直,所以三角形回路 OAB 中的电动势等于直线 1 中的感应电动势,扇形回路 OAB 中的电动势等于弧线 2 中的感应电动势. 又因扇形回路 OAB 包围的面积大于三角形回路 OAB 包围的面积，因而$\mathscr{E}_2>\mathscr{E}_1$，选(C).

10.（2012 年广东工业大学）长直导线与单匝矩形线圈共面放置,导线与线圈的长边平行，矩形

线圈的边长分别为 a、b,它到直导线的距离为 c,如图所示. 求:



(1) 长直导线与单匝矩形线圈的互感系数 M;

(2) 若在矩形线圈中通一正弦交流电$i = I_0\sin\omega t$,求直导线中的感应电动势$\mathscr{E}_i$.

解 (1) 设长直导线通有向上的电流 I,选矩形线圈的法线方向垂直纸面朝里(⊗),则通过矩形线圈的磁通量

$$\Phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_c^{a+c} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\frac{a+c}{c}$$

$$M = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{a+c}{c}.$$

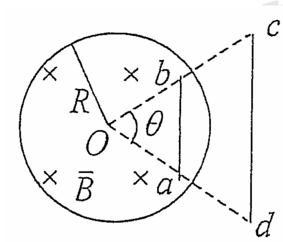
(2)直导线中的感应电动势

$$\mathscr{E}_i = M\frac{di}{dt} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{a+c}{c}\omega I_0\cos\omega t = \frac{\mu_0 b\omega I_0}{2\pi}\ln(\frac{a+c}{c})\cos(\omega t).$$

11.(2012 年北京科技大学)一面积为 S 的平面导线闭合回路, 置于载流长螺线管中,回路的法向与螺线管轴线平行. 设长螺线管单位长度上的匝数为 n,通过的电流为$I = I_m\sin\omega t$(电流的正向与回路的正法向成右手关系),其中 I_m和ω为常数,t 为时间,则该导线回路中的感生电动势为________.

答案详见考试点视频

12.(2011 年广东工业大学)均匀磁场被限制在半径 R =10cm 的无限长圆柱空间内,方向垂直纸面向里. 取一固定的等腰梯形回路 abcd,梯形所在平面的法向与圆柱空间的轴平行,位置如图所示. 设磁感应强度以 dB/dt =1T/s 的匀速率增加,已知$\theta = \frac{1}{3}\pi, \overline{oa} = \overline{ob} = 6cm$,求等腰梯形回路中感生电动势的大小和方向。

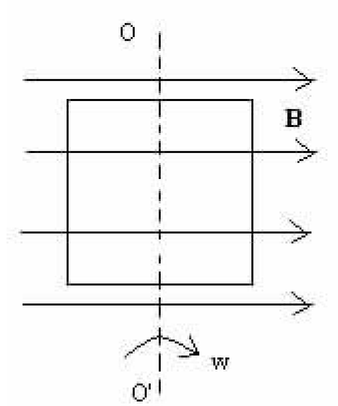


解:选回路法向朝里,感生电动势

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{SdB}{dt} = -(\frac{\pi R^2}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\overline{oa}^2\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{dB}{dt} \\ &= -(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{1}{2}\overline{oa}^2\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot 1 = -(\frac{\pi 0.1^2}{6} - \frac{1}{2}0.06^2\frac{\sqrt{3}}{2}) = -3.7mV\end{aligned}$$

感生电动势的大小为 3.7mV,方向为逆时针.

13.(2011 年太原科技大学; 2010 年华南理工大学)一闭合正方形线圈放在均匀磁场中,绕通过其中心且与一边平行的转轴 OO’ 转动,转轴与磁场方向垂直,转动角速度为 ω,如图所示. 用下述哪一种办法可以使线圈中感应电流的幅值增加到原来的两倍(导线的电阻不能忽略)?



(A)把线圈的匝数增加到原来的两倍;

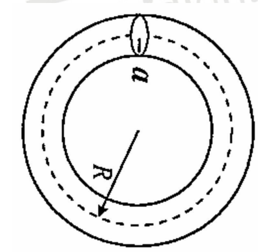
(B)把线圈的面积增加到原来的两倍,而形状不变;

(C)把线圈切割磁力线的两条边增长到原来的两倍;

(D)把线圈的角速度增大到原来的两倍。

答案详见考试点视频

14.（2010 年南京理工大学）一螺绕环，横截面的半径为 a，中心线的半径为 R，R > > a，其上由表面绝缘的导线均匀地密绕两个线圈，一个 N_1 匝，一个 N_2 匝. 求：



（1）两线圈的自感 L_1 和 L_2；

（2）两线圈的互感 M.

解：设螺绕环中有电流 I，则通过螺绕环的磁通链为

$$\Psi_m = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}\pi a^2 N = \frac{\mu_0 N^2 I a^2}{2R} = LI \implies L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2R},$$

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 a^2}{2R}, \quad L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 a^2}{2R}$$

（2）$\Psi_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1}{2\pi R}\pi a^2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1 a^2}{2R} = MI_1 \implies M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 a^2}{2R}$

15.（2010 年南京理工大学）在真空中，一平面电磁波的磁场为 $B = B_y = B_0\cos[\omega(t+\frac{z}{c})](T)$，则该电磁波的传播方向为________，电场强度为________.

解：该电磁波的传播方向为负 z 方向.

根据 $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{E}}{c^2}$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}[-c\mathbf{k}\times(-E\mathbf{i})] = B_0\cos[\omega(t+\frac{z}{c})]\mathbf{j}$$

电场强度为

$$E = E_x = -cB_0\cos[\omega(t+\frac{z}{c})](v/m).$$

解题方法总结：

无论动生还是感生电动势都可直接用法拉第电磁感应定律求解. 用法拉第电磁感应定律求非闭合导线中的感生电动势时，必要时要做辅助线，使感生电场与辅助线垂直，因而在其上不产生电动势. 用动生和感生电动势公式时，一定要规定好导体的正负端或回路的绕行方向，根据计算结果确定实际电动势的正负端或绕向，必要时可用楞次定律检验. 自感与互感和回路中的电流无关，仅与回路的形状尺寸相对位置及介质有关，但求自感时比须假定回路中有电流 I. 可用磁能与自感的关系、磁通量（链）与自感的关系或自感电动势与自感的关系求自感系数. 求互感时可假定两个回路中任一个有电流 I，但要使这个电流 I 在另一个回路中产生的磁通量易于求出. 对电磁波问题，要搞清楚题中 $\mathbf{E}$、$\mathbf{B}$ 和电磁波的传播方向，然后选用相应的公式求解.

第 8 讲　气体动理论

基本公式：

$PV = \nu RT = \dfrac{m}{M_{mol}}RT.$　　$P = \dfrac{N}{V}\dfrac{R}{N_A}T = nkT.$

$\overline{z} = \sqrt{2}\pi d^2\overline{v}n.$　　$\overline{\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$

$p = \dfrac{1}{3}nm\overline{v^2} = \dfrac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t},$　　$\overline{\varepsilon_t} = \dfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \dfrac{3}{2}kT$

$$f(v) = \frac{dN_v}{Ndv} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2e^{-mv^2/2kT}.$$

$$\int_0^\infty f(v)dv = 1.$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M_{mol}}} = 1.41\sqrt{\frac{RT}{M_{mol}}}.$$

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2e^{-mv^2/2kT} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}v_p^{-3}v^2e^{-(\frac{v}{v_p})^2}.$$

$$f(v_p) = \frac{4}{v_p e\sqrt{\pi}.}$$

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{mol}}} = 1.6\sqrt{\frac{RT}{M_{mol}}}.$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{mol}}} = 1.73\sqrt{\frac{RT}{M_{mol}.}}$$

$$v_p < \overline{v} < \sqrt{\overline{v^2}}.$$

能量按自由度均分定理：

每个自由度的平均能量为：$\dfrac{1}{2}kT.$

平均平动动能：$\overline{\varepsilon_t} = \dfrac{3}{2}kT.$

平均动能：$\overline{\varepsilon_k} = \dfrac{i}{2}kT.$　　i是分子的总自由度.

1 mol 理想气体的内能：$N_A\dfrac{i}{2}kT = \dfrac{i}{2}RT.$

ν(mol)理想气体的内能：$E = \dfrac{i}{2}\nu RT = \dfrac{m}{M}\dfrac{i}{2}RT.$

名校真题解析

1.（河北工业大学 2012）

简答题:理想气体分子运动的统计假设是什么?

答：每个分子运动速度各不相同,通过碰撞不断发生变化;平衡态时忽略重力影响，分子按位置分布均匀;分子速度按方向的分布是均匀的，因而有 $\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$.

2.(河北工业大学 2012)

简答题:从分子动理论的观点来看,温度的实质是什么?

答:温度具有统计意义,它是大量分子平均平动动能的量度,反映物体内分子热运动的剧烈程度.

3.(杭州师范大学 2012)理想气体中仅由温度决定其大小的物理量是(　　)

(A）气体的压强；　　(B）气体的内能；

(C)气体分子的平均平动动能.　　(D）气体分子的平均速率.

答. 选（C）.

4.（深圳大学 2012）

简答题：理想气体分子的微观模型、统计假设及压强公式.

答:理想气体分子的微观模型是:

(1)假设分子本身的限度比分子之间的平均距离小得多,可以忽略不计；

(2）除碰撞瞬间外，分子之间和分子与容器壁之间均无相互作用.

(3）分子不停地运动，分子之间和分子与容器壁之间的碰撞频繁，这些碰撞是弹性碰撞,动能守恒；

(4）分子的运动遵从经典力学规律.

统计假设是:

(1)每个分子运动速度各不相同,通过碰撞不断发生变化.

(2)平衡态时忽略重力影响，分子按位置分布均匀.

(3)分子速度按方向的分布是均匀的,因而有$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$.

压强公式具有统计意义，$p=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}=\frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t}$. 它把宏观量$p$和统计平均值$n$和$\overline{\varepsilon_t}$联系起来了.

5.(2010 年北京科技大学)20 个质点的速率如下：2 个具有速率 v_0, 3 个具有速率 $2v_0$,　5 个具有速率 $3v_0$, 4 个具有速率 $4v_0$, 3 个具有速率 $5v_0$, 2 个具有速率 $6v_0$,1 个具有速率 $7v_0$. 试计算：

(1)平均速率；(2）方均根速率；(3)最概然速率.

答案详见考试点视频

6.(2010 年浙江工业大学)导体中自由电子的运动可看作类似于气体分子的运动(故称电子气).设导体中共有 N 个自由电子,其中电子的最大速率为v_F,(称为费米速率),电子速率在$v\sim v+dv$之

间的概率为 $\frac{dN}{N}=\frac{4\pi A}{N}v^2dv\ (v_F>v>0, A为常数)$， $\frac{dN}{N}=0\ (v>v_F)$.

(1)画出分布函数图； (2)用 N, v_F 定出常数 A；

(3) 证明电子气中电子的平均动能 $\bar{\varepsilon}=\frac{3}{5}\varepsilon_F$,其中 $\varepsilon_F=\frac{1}{2}mv_F^2$

答案详见考试点视频

7.(广东工业大学 2012 年)两瓶不同种类的理想气体,设分子平均平动动能相等,但其分子数密度不同,则它们( )

(A) 温度和压强都相同； (B) 温度相等,压强不相等；

(C)压强相等,温度不相等； (D)方均跟速率相等.

答：选(B). 根据 $\overline{\varepsilon_t}=\frac{3}{2}kT$ 和题意只能得出 $T_1=T_2.p=nkT$, $n_1\neq n_2$(A) (C)错；方均根速率：$v_{rms}=\sqrt{\frac{3RT}{\pi M_{mol}}}$ 与 M_{mol} 有关, (D)错.

8. (北京科技大学 2011 年)相同条件下,氧原子的平均动能是氧分子(视为刚性分子)的平均动能的多少倍?( )

(A)3/5 倍； (B)5/3 倍； (C)1/3 倍； (D)1 倍.

解：选(A).

9.(广东工业大学 2011 年)关于分子的平均自由程 $\bar{\lambda}$,下列几种说法是否正确? 若有错误请改正.

(1)不论压强是否恒定, $\bar{\lambda}$ 都与温度 T 成正比；

(2)不论压强是否恒定, $\bar{\lambda}$ 都与压强 p 成反比；

(3)若分子数密度 n 恒定, $\bar{\lambda}$ 与 p、T 无关.

答案详见考试点视频

10.(中科院 2012)

关于平衡态下理想气体,以下哪个说法是错误的?

(A) 分子大小比分子间的平均距离小得多,分子的大小可以忽略不计；

(B) 除碰撞瞬间外,分子之间以及分子与容器壁之间都没有相互作用力；

(C) 各个分子的速度大小相同；

(D) 分子向各个方向运动的几率相等.

解：选(C).

11.(华南理工大学 2011)容器中储有 1 mol 的氮气,压强为 1.33Pa,温度为 $7°C$,则

(1) 1 m^3 中氮气的分子数为________________ .

(2)容器中氮气的密度为________________.

(3)1 m^3 中氮气的总平动动能为________________ .

解：(1) $n=\frac{P}{kT}=\frac{1.33}{1.38\times10^{-23}\times(273+7)}=3.44\times10^{20}$ 个/m^3。

（2）根据$PV=\frac{m}{M_{mol}}RT$得

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{PM_{mol}}{RT}=\frac{nkTM_{mol}}{N_AkT}=\frac{nM_{mol}}{N_A}$$
$$=\frac{3.44\times10^{20}\times28\times10^{-3}}{6.02\times10^{23}}=1.6\times10^{-5}kg/m^3..$$

（3）1 立方米氮气的总平动动能为

$$n\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}\times3.44\times10^{20}\times1.38\times10^{23}\times280=1.99(J).$$

12.（南京航空航天大学 2011 年）设在平衡态下理想气体分子的麦克斯韦速率分布函数为$f(v)$,则由此函数表示的分子的平均速率为____________.

解:$\overline{v}=\int_0^\infty vf(v)dv.$

13.（南京航空航天大学 2011 年）已知某理想气体分子的方均根速率为 400 则当其压强为 1.013×10^5Pa时,该气体的质量密度为____________.

答案详见考试点视频

14.（南京理工大学 2011 年）1 mol 37°的氧气分子的平均速率为______,分子的平均动能为____________.

答案详见考试点视频

15.（江西理工大学 2011 年）氧气和氦气分子的平均平动动能分别为ω_1和ω_2,他们的分子数密度分别为n_1和n_2,若他们的压强不同但温度相同,则(　　)

$(A)\ \omega_1=\omega_1,n_1\neq n_2$　　$(B)\ \omega_1\neq\omega_1,n_1=n_2$

$(C)\ \omega_1\neq\omega_1,n_1\neq n_2$　　$(D)\ \omega_1=\omega_1,n_1=n_2.$

答案详见考试点视频

16.（江西理工大学 2011 年）两瓶不同种类的理想气体,它们的分子平均平动动能相同但单位体积内的分子数不同,两气体的(　　)

（A）内能一定相同；　　（B）分子的平均动能一定相同；

（C）压强一定相同；　　（D）温度一定相同；

答案详见考试点视频

17.（江西理工大学 2011 年）下列说法正确的是（　　）

（A）物体的温度越高,其热量越多；

（B）物体的温度越高,其分子热运动平均能量越大；

（C）物体的温度越高,对外作功越多.

解:选（B）.

18.（中科院 2012）关于温度的物理意义,以下哪个说法是错误的？（　　）

（A）气体的温度表示每个气体分子的冷热程度；

（B）气体的温度可用来度量分子平均平动动能；

（C）气体的温度是大量气体分子热运动的集体表现,具有统计意义；

（D）平衡态物质内部分子运动的剧烈程度可由温度来反映.

答：选（A）.

19.（北京科技大学 2011 年）温度和压强相同的氦气和氧气,它们分子的平均动能$\overline{E}$和平均平动动能$\overline{w}$有如下关系（　　）

（A）$\overline{E}$和$\overline{w}$都相等；　　（B）$\overline{E}$相等而$\overline{w}$不相等；

（C）$\overline{w}$相等而$\overline{E}$不相等；　　（D）$\overline{E}$和$\overline{w}$都不相等；

答案详见考试点视频

20.（2012 年广东工业大学）自由度为 i 的一定量刚性分子理想气体,当其体积为 v,压强为 p 时,其内能 E = ________.

解：$pv=\nu RT,\quad E=\frac{i}{2}\nu RT=\frac{i}{2}pv.$

21.（2010 年北京科技大学）容器中储有一定量的处于平衡状态的理想气体,温度为 T,分子质量为 m,则分子速度在 x 方向分量平均值为（根据理想气体分子模型和统计假设讨论）（　　）

$(A)\ \overline{V}_x=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}};\ \ (B)\ \overline{V}_x=\sqrt{\frac{8kT}{3\pi m}};\ \ (C)\ \overline{V}_x=\sqrt{\frac{3kT}{2m}};\ \ (D)\ \overline{V}_x=0.$

解：选（D）

提示：当心题目要求分子速度在 x 方向分量平均值而不是分子速度在 x 方向分量平方的平均值.

解题方法总结：注意热力学温度 T 与摄氏温度 t 的换算,大气压 atm 与 P_a的换算. 涉及分子数密度时用$p=nkT$.理解下列各式的物理意义：$\frac{3}{2}kT,\quad \frac{i}{2}kT,\quad \frac{3}{2}RT,\quad \frac{i}{2}RT,\quad \frac{i}{2}\nu RT$；

$f(v),\quad f(v)dv,\quad Nf(v)dv,\quad vNf(v)dv,$

$\int_{v_1}^{v_2}f(v)dv,\quad \int_{v_1}^{v_2}Nf(v)dv,\quad \int_{v_1}^{v_2}vNf(v)dv,$

$\frac{\int_{v_1}^{v_2}vf(v)dv}{\int_{v_1}^{v_2}f(v)dv}=\frac{\int_{v_1}^{v_2}vNf(v)dv}{\int_{v_1}^{v_2}Nf(v)dv}=\frac{\int_{v_1}^{v_2}vf(v)dv}{N_{v_1,v_2}}=\overline{V}_{v_1,v_2}.$

速率分布曲线与分子量 m 和 T 的变化关系。

求含有麦克斯韦速率分布函数的积分时,若积分区间很小,则用近似.

第9讲　热力学

基本公式：

$Q = E_2 - E_1 + A = \Delta E + A, \quad \text{đ}Q = dE + \text{đ}A.$

$\text{đ}A = pdV, \quad A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$.

$C_{v,m} = \frac{i}{2}R, \quad C_{p,m} = \frac{i+2}{2}R$

$C_{p,m} - C_{v,m} = R, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} = \frac{i+2}{i}$

等体过程：$dV = 0. \quad \frac{p}{T} = Const. \quad A = 0.$

$Q = \Delta E = \nu C_v \Delta T = \frac{i}{2}\nu\Delta p.$

$\Delta E = \nu C_v \Delta T = \frac{i}{2}\nu\Delta p = Q.$

等压过程：$dp = 0. \quad \frac{V}{T} = Const. \quad A = p\Delta V = \nu R\Delta T. \quad Q = \nu C_p \Delta T = \frac{i+2}{2}p\Delta V.$

$\Delta E = \nu C_v \Delta T = \frac{i}{2}p\Delta V.$

等温过程：$dT = 0. \quad pV = Const. \quad A = \nu RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \nu RT\ln\frac{p_1}{p_2}.$

$Q = A. \quad \Delta E = 0.$

绝热过程：$dQ = 0, \quad pv^{\gamma} = Const.$

$A = -\Delta E = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2).$

$Q = 0. \quad \Delta E = \frac{i}{2}\nu R\Delta T = \frac{i}{2}(p_2V_2 - P_1V_1).$

在 p_V 图上，绝热线比等温线陡.

循环过程：特点：$\Delta E = 0$。

热循环：系统从高温热库吸热 Q_1，对外做功 A，向低温热库放热 Q_2，效率为 $\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

致冷循环：系统从低温热库吸热 Q_2，外界对系统做功 A，向高温热库放热 Q_1，为致冷系数为

$\omega = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$

卡诺循环：系统从温度为T_1 的高温热源吸热，向温度为 T_2 的低温热源放热， $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$

$\omega_c = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$.

热力学第二定律的两种表述,可逆过程与不可逆过程的概念。

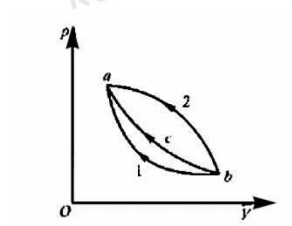
熵: $S = k\ln W, \qquad \Delta S > 0.$

$$dS = \frac{đQ}{T}, \quad \Delta S = S_2 - S_1 = {}_{rev}\int_1^2 \frac{đQ}{T}$$

$$dS > \frac{đQ}{T}, \Delta S \geq 0。$$

真题解析

1.(北京科技大学 2011 年)如图,bca 为理想气体绝热过程,b1a 和 b2a 是任意过程,则上述两过程中作功与吸收热量的情况是(　　)



(A)b1a 过程放热,作负功;b2a 过程放热,作负功;

(B)b1a 过程吸热,作负功;b2a 过程放热,作负功;

(C)b1a 过程吸热,作正功;b2a 过程吸热,作负功;

(D)b1a 过程放热,作正功;b2a 过程吸热,作正功;

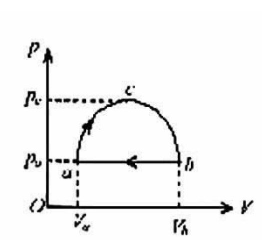
解:三个过程体积均减小,故都作负功.

由 bca 为理想气体绝热过程得$A_{bca} = -\Delta E_{ba}$,

$Q_{b1a} = \Delta E_{ba} + A_{b1a} = -A_{bca} + A_{b1a} > 0$, 吸热;

$Q_{b2a} = \Delta E_{ba} + A_{b2a} = -A_{bca} + A_{b2a} < 0$, 放热. 选(B).

2.(北京科技大学 2011 年,河北工大 2011 年)有ν摩尔理想气体,作如图所示的循环过程 acba,其中 acb 为半圆弧,b－a 为等压线,$p_c = 2p_a$. 若气体进行$a \to b$的等压过程时吸热Q_{ab},则在此循环过程中气体净吸收热量 Q___Q_{ab}(填入:>,<或=).



解:

$$Q_{ab} = \nu C_p(T_b - T_a) = \frac{i+2}{2}\nu R(T_b - T_a) = \frac{i+2}{2}(p_b\nu_b - p_a\nu_a)$$
$$\geq \frac{3+2}{2}p_a(\nu_b - \nu_a) > \frac{\pi}{4}p_a(\nu_b - \nu_a)$$

$$Q = A_{acba} = \tfrac{1}{4}\pi(p_c - p_a)(\nu_b - \nu_a) = \tfrac{\pi}{4}p_a(\nu_b - \nu_a) < Q_{ab}.$$

填<.

3.(北京科技大学 2011 年)某种理想气体定体摩尔热容为C_v,若气体经历无摩擦准静态过程,其压强按$p = p_0e^{\alpha v}$规律变化,其中p_0、α为常数,求这种气体经历该过程时的摩尔热容与其体积 V 的关系式。

解:设这种过程为 x 过程,其热容为C_x,则

$$C_x=\frac{1}{\nu}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_x=\frac{1}{\nu}\left(\frac{\nu C_v dT+dA}{dT}\right)_x$$

由$p=p_0e^{\alpha v}$得$dp=\alpha p_0e^{\alpha v}dv=\alpha p dv$，

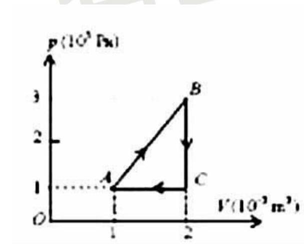
再由　$pv=\nu RT$　得

$$pdv+vdp=pdv+v\alpha pdv=(\alpha v+1)pdv=\nu RdT$$

$$pdv=\frac{\nu RdT}{\alpha v+1},\qquad dA=pdv=\frac{\nu RdT}{\alpha v+1}$$

$$C_x=\frac{1}{\nu}\left(\frac{\nu C_v dT+\frac{\nu RdT}{\alpha v+1}}{dT}\right)_x=C_v+\frac{R}{\alpha v+1}.$$

4.（2011 年山东科技大学，2011 广东工业大学）一定量的单原子分子理想气体，从初态 A 出发，沿图示直线过程变到另一状态 B，又经过等容、等压两过程回到状态 A.

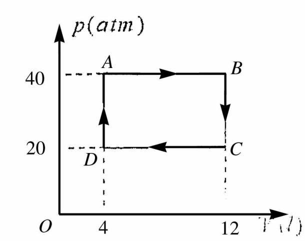


(1) 求 A→B，B→C，C→A 各过程中系统对外所作的功 W，内能的增量ΔE以及所吸收的热量 Q.

(2) 整个循环过程中系统对外所作的总功及从外界吸收的总热量（过程吸热的代数和）.

答案详见考试点视频

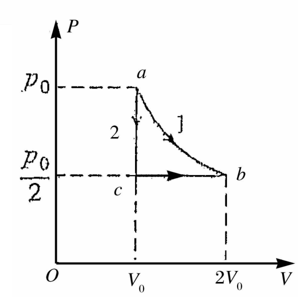
5.（广东工业大学 2012 年）气体从 A 态出发经历如图所示的一个循环过程，在个循环中，气体从外界的净热量是________.



解：

$Q=A=(40-20)\times1.013\times10^5\times(12-4)\times10^{-3}=1.62\times10^4\,J.$

6.（广东工业大学 2012 年）如图所示，1mol 氧气（视为理想气体），初态体积$V_0=22.4\times10^{-3}m^3$，压强$p_0=2\times10^5Pa$；末态体积$V_2=2V_0$压强 $p=p_0/2$，分别经历下列两个过程：



(1) 等温过程；

(2) 先等容冷却到压强$p=p_0/2$，再等压膨胀到体积 $V_2=2V_0$，求此两过程中系统吸收的热量和对外做的功.

答案详见考试点视频

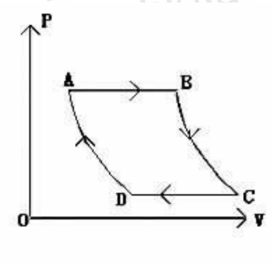
7.（江苏大学 2011）有一卡诺热机，用 290g 的空气为工作物质，工作在$27^\circ C$的高温热源与-73°低温热源之间，此热机的效率$\eta=$__________. 若在等温膨胀的过程中气缸体积增大到 2.718 倍，则此热机每一循环所做的功为____________，（空气的摩尔质量为$29\times10^{-3}kg/mol$，普适气体常量$R=8.31J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}$）

解：$\eta=1-\frac{T_2}{T_1}=1-\frac{273-73}{273+27}=33.3\%$

$Q_1=\nu RT_1\ln2.718=\frac{290\times10^{-3}}{29\times10^{-3}}\times8.31\times300=24.93\times10^3$ J.

$A = \eta Q_1 = 0.333 \times 24.93 \times 10^3 = 8.3 \times 10^3\ J$

8.(江苏大学 2011)一定量的理想气体经历如图所示的循环过程,ab 和 cd 是等压过程,bc 和 da 是绝热过程。已知 $T_C = 300K$,$T_B = 400K$。

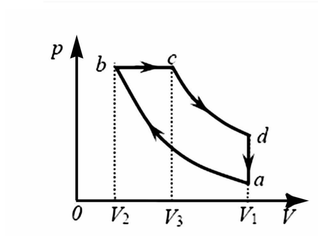


(1) 这循环是不是卡诺循环? 为什么?

(2) 试此循环的效率.

答案详见考试点视频

9.(南京航空航天大学 2011)用 1mol 的某种气体(可视为理想气体)作为工作物质,进行的正循环过程 abcda 如图所示,其中 ab,cd 为绝热线,已知 V_1、V_2、V_3和气体的定压摩尔热容与定体摩尔热容之比 γ,求此循环的效率 η。



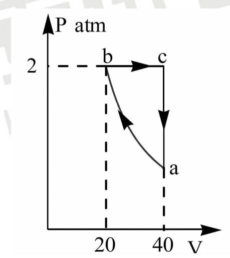
答案详见考试点视频

10.(南京理工大学 2011)某理想气体经历的某过程的方程的微分形式为 $\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = 0$,则此过程应为__________________过程.

解:积分$\dfrac{dp}{p} + \dfrac{dv}{v} = 0$得$\ln p + \ln v = \ln(pv) = c'$

$pV = e^{c'} = C \Rightarrow$过程为等温过程.

11.(南京理工大学 2011)一摩尔的双原子理想气体,从某体积为40l的初态先绝热压缩到 2 atm,体积减半,再等压膨胀至原体积,最后等容冷却回到初态.



(1) 作出该循环的 p – V 图;

(2) 求初态的压强;

(3) 求该循环的效率.

答案详见考试点视频

12.(河北工大 2011 年)一定量的某种理想气体,开始时处于压强、体积、温度分别为 $p_0 = 1.2 \times 10^6 Pa$, $V_0 = 8.31 \times 10^{-3} m^3$, $T_0 = 300K$ 的初态,后经一等体过程,温度升高到 $T_1 = 450K$,再经过一等温过程,压强降到$p = p_0$的末态. 已知该理想气体的等压摩尔热容与等体摩尔热容之比 $C_p/C_v = 5/3$. 求:

(1)该理想气体的等压摩尔热容 C_p和等体摩尔热容 C_v.

(2) 气体从始态变到末态的全过程中从外界吸收的热量.(普适气体常量 $R = 8.31\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$)

答案详见考试点视频

13.(杭州师大 2011 年;2010 年中国计量科学院)1mol 氢,在压强为 $1.0 \times 10^5 Pa$,温度为 20^0C 时,其体积为 V_0,今使它经以下两种过程达同一状态:

(1)先保持体积不变,加热使其温度升高到 80^0C,然后令它作等温膨胀,体积变为原体积的 2 倍;

(2)先使它作等温膨胀至原体积的2倍,然后保持体积不变,加热到80^0C。

试分别计算以上两种过程中吸收的热量,气体对外作的功和内能的增量.

解：(1) $\Delta E = \nu C_V \Delta T = \frac{5}{2}R(80-20) = \frac{5}{2}\times 8.31\times 60 = 1246.5J$

$A = \nu RT\ln\frac{V_2}{V_1} = 8.31\times(80+273.16)\ln 2 = 2033.3$ J.

$Q = \Delta E + A = 1246.5 + 2033.3 = 3279.8$ J.

(2) $\Delta E = \nu C_V \Delta T = \frac{5}{2}R(80-20) = \frac{5}{2}\times 8.31\times 60 = 1246.5J$

$A = \nu RT\ln\frac{V_2}{V_1} = 8.31\times(20+273.16)\ln 2 = 1687.7$ J.

$Q = \Delta E + A = 1246.5 + 1687.7 = 2934.2$ J.

14.(2010年电子科技大学)关于熵,下面叙述中哪一个是正确的?(　　)

(A) 熵是为描述自发过程进行的方向而引入的,熵是过程量。

(B) 熵增加原理表明,任何系统中一切过程总是沿着熵增加的方向进行。

(C) 熵是热力学系统无序性的量度。

(D) 任何过程,熵变都可以用下式来计算$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$。

解:选(C)。

熵是状态量,(A)错;只有对孤立系统,一切过程总是沿着熵增加的方向进行,(B)错;只有对可逆过程,熵变才可用$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$来计算,(D)错。

解题方法总结:

任何过程的$\Delta E = \nu C_v \Delta T = \nu\frac{i}{2}R\Delta T$,功A的绝对值等于过程曲线底下与v轴之间的面积. $\Delta V > 0$时,$A>0$(系统对外做功,正功),反之,$A<0$(外界对系统做功,负功). 对等压过程,既可用$Q_p = \nu C_p \Delta T$求Q,也可用$Q = \Delta E + p\Delta V$. 计算$\Delta E, A, Q$时,应该选一个态作基准,把其它态的态参量用基准态的参量表示. 对循环$\Delta E = 0$. 求效率η和制冷系数ω可用A, Q_1, Q_2中的任两个,因而只要计算这三个中易求的任两个即可. 一次循环的功的绝对值等于循环曲线所包围的面积. 求Q,首先要确定过程是吸热还是放热. 对卡诺循环,η和ω仅与高低温热源的温度T_1和T_2有关. 求得η和ω,只要知道A, Q_1, Q_2中的任一个,即可求得另两个。

理解热力学第二定律时,要注意关键字"自动","惟一"和"全部".,根据热力学第二定律和不可逆性的相互沟通性,判定一个过程是否可逆。

熵是系统内分子热运动无序性的一种量度,熵是系统的态函数。只有孤立系统内的一切过程熵才沿着增加的方向进行。只有对可逆过程,熵变才可用$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$来计算。

第 10 讲　振动

基本公式：

$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$，$(\omega=\sqrt{\frac{k}{m}})$，$x=A\cos(\omega t+\phi)$

(LC 电路的振荡(自由振荡)

$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega^2q=0,\quad \omega^2=\frac{1}{LC}$

$q=Q_0\cos(\omega t+\phi_0),\quad Q_0,\phi_0$由初始条件决定。)

$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$，$\phi=\arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0})$.

$E_K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\phi)$

$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t+\phi)$

$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$

$\overline{E}_k=\overline{E}_p=\frac{1}{2}E=\frac{1}{4}kA^2$.

$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{d^x}{dt}+\omega_0^2x=0$

$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}h\cos\omega_d t$

稳态解：$x=A\cos(\omega_d t+\phi)$

位移共振：A 达到极大值：$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$

速度(能量)共振：$\omega_r=\omega_0$。

(RLC 电路，受迫振荡，电共振

$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\mathscr{E}_0\cos\omega_d t$,

其稳态解为$q=Q_0\cos(\omega_d t+\phi)$,

$$\begin{aligned}i&=\frac{dq}{dt}=-\omega_dQ_0\sin(\omega_dt+\phi)\\&=\omega_dQ_0\cos(\omega_dt+\phi+\frac{\pi}{2})=I_0\cos(\omega_dt+\phi')\end{aligned}$$

$I_0=\frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2+(\omega_dL-\frac{1}{\omega_dC})^2}}$，　$\tan\phi'=\frac{\frac{1}{\omega_dC}-\omega_dL}{R}$，$\omega_dL-\frac{1}{\omega_dC}=0\implies\omega_d=\sqrt{\frac{1}{LC}}$，此时$I_0$取得最大值(电共振)

$x_1 = A_1\cos(\omega t+\phi_1),\qquad x_2 = A_2\cos(\omega t+\phi_2)$

$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\phi)$

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2-\phi_1)}$

$\tan\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$

$x = A_x\cos(\omega t+\phi_x),\quad y = A_y\cos(\omega t+\phi_y).$

$\phi_y - \phi_x = 0,\quad \dfrac{y}{x} = \dfrac{A_y}{A_x} > 0$,合运动轨迹:通过原点斜率为正的直线段;

$\phi_y - \phi_x = \pi,\quad \dfrac{y}{x} = -\dfrac{A_y}{A_x} < 0$,合运动轨迹:通过原点斜率为负的直线段;

$\phi_y - \phi_x = \pi/2(3\pi/2)$,合运动轨迹是右(左)旋的长短半轴分别为$A_y$和$A_x$的椭圆;$\phi_y - \phi_x$为其它值时,合运动轨迹是不同的斜置的椭圆.

名校真题解析

1.(浙江师大 2012)弹簧振子作简谐振动时,如果振幅增为原来的两倍而频率减小为原来的一半,振动总能量变为原来的 4 倍(　　)(填错或对)

解:根据$E = \dfrac{1}{2}kA^2 = \dfrac{1}{2}m\omega^2A^2 = \dfrac{1}{2}m(2\pi\nu)^2A^2 \propto \nu^2A^2$　得 $\dfrac{E'}{E} = \dfrac{(\nu/2)^2(2A)^2}{\nu^2A^2} = 1$. 填错.

2.(2011 年电子科技大学)当质点以频率ν作简谐振动时,它的动能的变化频率为(　　)

(A) ν.　　(B) 2ν.　　(C) 4ν.　　(D) $\dfrac{\nu}{2}$.

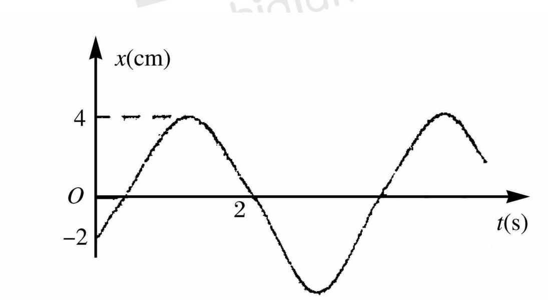
解:根据$E_K = \dfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\phi) = \dfrac{1}{4}m\omega^2A^2(1-\cos[2(\omega t+\phi)]$

选(B)

3.(2011 年电子科技大学)一物体作余弦振动,振幅为$15\times10^{-2}m$,圆频率为$6\pi s^{-1}$,初相为0.5π,则振动方程为$x =$ ____________(SI)

解:$x = 0.15\cos(6\pi t + 0.5\pi)(SI)$

4.(2012 年广东工业大学)一简谐振动用余弦函数表示,其振动曲线如图所示,则此简谐振动的振动方程为$x =$ _________.

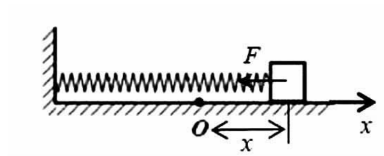


解:从图知,$A = 4cm$, t = 0 时,质点在负方向最远位置一半处且向正向运动,因此,$\phi = -\dfrac{2\pi}{3}$;t = 2

时，质点经过平衡位置且向负向运动，因此，$2\omega+\phi=\frac{\pi}{2},\implies\omega=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{7\pi}{12}$,

$$x=0.04\cos(\frac{7\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3})(SI)$$

5.（2011 年南京航空航天大学）如图所示，一物体在弹簧的作用下振动，弹力 F = －kx，而位移 x = Acosωt，其中 k、A、ω 都是常量，则在 t = 0 到 t = π/(2ω)的时间内弹力给于物体的冲量为________；弹力对物体所作的功为________。



解：解法(1)冲量

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}Fdt=\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}-kA\cos\omega tdt=-\frac{kA}{\omega}\sin(\omega\cdot\frac{\pi}{2\omega})=-\frac{kA}{\omega}$$

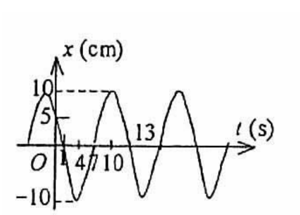
功 $$W=\int F\cdot dx=\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}-kA\cos\omega t\cdot(-A\omega\sin\omega t)dt=A^2k\omega\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\cos\omega t\cdot\sin\omega tdt=\frac{1}{2}kA^2$$

解法(2)：t = 0 时，物体在正方向最远位置处，$t=\frac{\pi}{2\omega}$时，物体经过平衡位置向负方向运动。

$$I=\Delta p=mv(\frac{\pi}{2\omega})=-mA\omega\sin(\omega\cdot\frac{\pi}{2\omega})=-mA\omega=-\frac{k}{\omega^2}A\omega=-\frac{kA}{\omega}$$

$$W=E_{k,max}=\frac{1}{2}kA^2$$

6.（2011 年广东工业大学）一简谐振动用余弦函数表示，其振动曲线如图所示，则此简谐振动的三个特征量为 A =________；ω =____________；φ =______________。



答案详见考试点视频

7.（2011 年广东工业大学）两个质点各自作简谐振动，它们的振幅相同、周期相同。第一个质点的振动方程为 x_1 = Acos(ωt + α)。当第一个质点从相对于其平衡位置的正位移处回到平衡位置时，第二个质点正在最大正位移处。则第二个质点的振动方程为(　　)

(A) $x_2=A\cos(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})$　　(B) $x_2=A\cos(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2})$

(C) $x_2=A\cos(\omega t+\alpha-\frac{3\pi}{2})$　　(D) $x_2=A\cos(\omega t+\alpha+\pi)$

解：从"当第一个质点从相对于其平衡位置的正位移处回到平衡位置时，第二个质点正在最大正位移处"知，第二个质点的振动落后于第一个质点的振动$\frac{\pi}{2}$，选(B).

8.（2011 年昆明理工大学）质量为 m 的质点在下述条件的区域内运动：势能$v(x)=v_0\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)$,

(v_0, a均大于 0). 当 x >0 时，如果有稳定点存在，求绕稳定点作微小振动的频率，求该振动成为非简谐振动的条件.

答案详见考试点视频

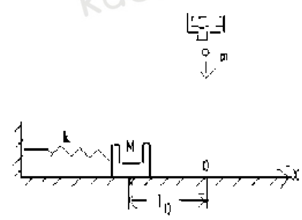
9.（2011 年杭州师范大学）一个圆锥摆的摆线长为ℓ，摆线与竖直方向的夹角恒为θ，则摆锤转动的周期为(　　)

(A) $\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.　　(B) $\sqrt{\frac{\ell\cos\theta}{g}}$.　　(C) $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.　　(D) $2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\theta}{g}}$.

解：$T\cos\theta = mg, \quad m\omega^2\ell\sin\theta = T\sin\theta$

解得$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\theta}{g}}$. 选（D）.

10.（2012 年深圳大学）如图，弹簧的一端固定在墙上，另一端连接一质量为 M 的容器，容器可在光滑水平面上运动。当弹簧未变形时容器位于 O 处，今使容器自 O 点左端 l_0 处从静止开始运动，每经过 O 点一次时，从上方滴管中滴入一质量为 m 的油滴。求：

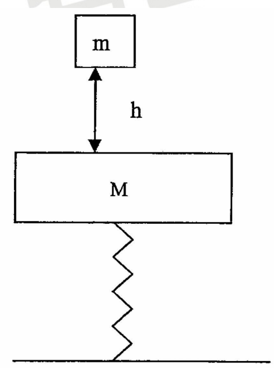


(1)滴到容器中 n 滴以后，容器运动到距 O 点的最远距离；

(2)第(n +1)滴与第 n 滴的时间间隔。

答案详见考试点视频

11.（2010 年中山大学）倔强系数为 k 的弹簧上联结一质量为 M 的木板，有一质量为 m 的小物体，在离 M 为 h 的高度处由静止状态落到 M 上后与 M 一起振动。求：



(1)系统的振动方程；

(2)系统的总振动能。

解：(1)设 m 与 M 碰撞时的速度为 v，则$v = \sqrt{2gh}$.

m 和 M 碰撞时忽略 m 的重力 mg，则 m 和 M 系统动量守恒. 设碰撞后 m 和 M 的共同速度为v_0，则

$$mv = (m+M)v_0 \implies v_0 = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}.$$

取 m 和 M 与弹簧的平衡位置为坐标原点，竖直向下为 x 轴，则 t =0 时，$x_0 = -\frac{mg}{k}$.

$$-k(x + \frac{m+M}{k}g) + (m+M)g = (M+m)\frac{d^2x}{dt^2}，\text{即}$$

$$-kx = (M+m)\frac{d^2x}{dt^2} \implies \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}.$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi),$$

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{(-\frac{mg}{k})^2+\frac{(\frac{m}{m+M}\sqrt{2gh})^2}{\frac{k}{m+M}}}$$

$$=\sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}+\frac{2m^2gh}{k(m+M)}}=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{g(m+M)}}$$

$$\phi=\arctan(-\frac{v_0}{x_0\omega})=\arctan(-\frac{\frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}}{-\frac{mg}{k}\sqrt{\frac{k}{m+M}}})=\arctan\left(\sqrt{\frac{2hk}{(m+M)g}}\right)$$

(2)系统的总振动能：

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{g(m+M)}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{m^2g^2}{k}(1+\frac{2kh}{g(m+M)})\right)$$

直接可证$E=\frac{1}{2}(m+M)v_0^2+\frac{1}{2}kx_0^2$

12.（2010 年南京理工大学）一质量为 10g 的物体作简谐振动，其振幅为 24cm，周期为 4.0s，当 t =0 时，位移为 +24cm。求：

（1）t =0.5s 时，物体所在位置；

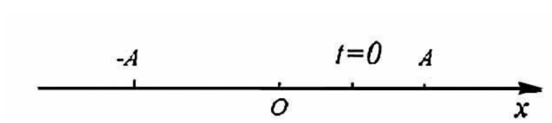
（2）t =0.5s 时，物体所受力的大小与方向；

（3）由起始位置运动到 x = l2cm 处所需的最少时间；

（4）在 x =12cm 处，物体的速度、动能以及系统的势能和总能量。

答案详见考试点视频

13.（2010 年南京理工大学）如图，一质量 m =2.0kg 的物体沿 x 轴作简谐振动，振幅为 0.12m，周期为 2s，初始时 x_0 =0.06m 并向 x 轴正向运动. 求：



（1）物体的运动方程；

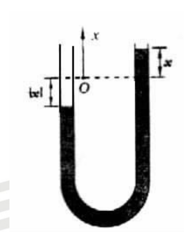
（2）物体从初始时刻运动到平衡位置所需要最短时间；

（3）物体在平衡位置时所具有的机械能.

答案详见考试点视频

典型题精讲精练

14. 如图所示截面积为 s 的 U 形管，内装有密度为ρ，长为l液体柱，受到扰动后管内液体发生振荡。写出液体柱的运动微分方程。不计各种阻力。



答案详见考试点视频

15. 设一质点的位移可用两个简谐振动的叠加来表示：

$x=A\sin\omega t+B\sin 2\omega t$

(1)写出这质点的速度和加速度表达式；

(2)这质点的运动是不是简谐振动？

(3)画出其 x ～ t 图线。

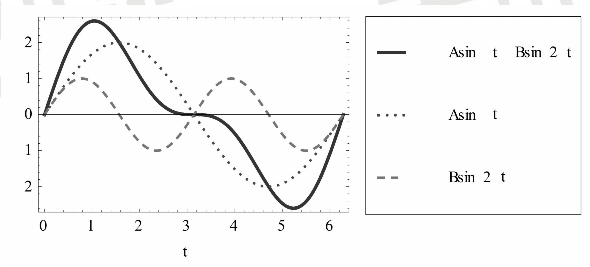
解：(1)$v = \omega(A\cos\omega t + 2B\cos 2\omega t)$

$a = -\omega^2(A\sin\omega t + 4B\sin 2\omega t)$

(2)∵加速度a 不与位移 x 成正比

∴这质点的运动不是简谐振动.

(3)x－t 曲线如下图：



解题方法总结:对简谐振动运动学问题,根据题目由文字给的或由图形上的数据给的已知条件确定谐振动的振幅 A，角频率 ω(频率ν,周期 T)，初相 ϕ. 要特别注意充分利用振动曲线上的数值. 用旋转矢量图定初相 ϕ. 不知道运动表达式或动力学方程时,只要加速度 a 与位移 x 成正比而反向,或其受线性恢复力即可判定系统做简谐振动. 对简谐振动动力学问题,求简谐振动微分方程，要用牛顿第二定律和刚体转动定律和其它力学规律,必要时要做近似. 把坐标原点放在简谐振动的平衡点可简化计算. 简谐振动的动能和势能互补. 简谐振动总能量与其振幅的平方成正比,也与(圆)频率的平方成正比. 在系统的总能量易于写出的情况下,可对能量表达式求导两次得其动力学方程. 对两个同方向同频率简谐振动的合成直接用公式. 相互垂直的同频率的简谐振动的合振动,当两者的相差为 π 的整数倍时,其轨迹为过原点的直线，否则为椭圆

第 11 讲　波动和光的干涉

主要原理和基本公式

$y=A\cos[\omega(t\mp\frac{x}{u})+\phi]$, $y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}\mp\frac{x}{\lambda})+\phi]$

$w_k=w_p=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi]$

平均能量密度$\overline{w}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$.

能流　$P=wuS=\rho uS\omega^2A^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi]$

波的强度$I=\frac{\overline{P}}{S}=\overline{w}u=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2u$.

惠更斯原理;波的独立性和叠加原理

$y_1=A_1\cos(\omega t-2\pi\frac{r_1}{\lambda}+\phi_1)$,　　$y_2=A_2\cos(\omega t-2\pi\frac{r_2}{\lambda}+\phi_2)$

$y=A\cos(\omega t+\phi)$,　　$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\phi}$

$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\phi$

加强：$\Delta\phi=(\phi_2-\phi_1)-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=\pm2k\pi,\quad k=0,1,2,\cdots$

$I_{max}=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}$

减弱：$\Delta\phi=(\phi_2-\phi_1)-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=\pm(2k+1)\pi,\quad k=0,1,2,\cdots$

$I_{min}=I_1+I_2-2\sqrt{I_1I_2}$

$\phi_1=\phi_2$, $\delta=r_1-r_2$,

$$\delta=r_1-r_2=\begin{cases}\pm k\lambda, & k=0,1,2,\cdots\\ \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

驻波:$y_1=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x),\quad y_2=A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x)$.

$y=y_1+y_2=2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos(\omega t)$,波腹,波节及有关性质.

简正模式：

$L=n\frac{\lambda_n}{2},\quad \lambda_n=\frac{2L}{n},\quad \nu_n=n\frac{u}{2L},\quad n=1,2.3,\cdots$

$L=n\frac{\lambda_n}{2}+\frac{\lambda_n}{4},\quad \lambda_n=\frac{4L}{2n+1},\quad \nu_n=(2n+1)\frac{u}{4L},\quad n=0,1,2.\cdots$

多普勒效应$\nu_R = \dfrac{u+v_R}{u-v_S}\nu_S$,

杨氏实验：

	相长干涉(加强、明纹)	相消干涉(暗纹)
$\Delta\phi = 2\pi\delta/\lambda$	$\pm 2k\pi, k=0,1,2,\cdots$	$\pm(2k-1)\pi,\ \ k=1,2,\cdots$
$\delta = \frac{d}{D}x$	$\pm k\lambda,\ \ k=0,1,2,\cdots$	$\pm(2k-1)\frac{\lambda}{2},\ \ k=1,2,\cdots$
x	$\pm k\frac{D}{d}\lambda,\ \ k=0,1,2,\cdots$	$\pm(2k-1)\frac{D}{d}\frac{\lambda}{2},\ k=1,2,\cdots$

$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \dfrac{D}{d}\lambda.$

薄膜普适光程差公式：

$$\delta = 2h\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2 i} \underset{?}{\pm} \lambda/2 = \begin{cases} 2k\cdot\frac{\lambda}{2} & k=\underline{0},1,2,\cdots \\ (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} & k=\underline{0},1,2,\cdots \end{cases}$$

等厚干涉(分振幅)：$i=0$, $\delta = 2nh \underset{?}{\pm} \lambda/2 = \begin{cases} 2k\cdot\frac{\lambda}{2} & k=\underline{0},1,2,\cdots \\ (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} & k=\underline{0},1,2,\cdots \end{cases}$

劈尖： $\Delta h = h_{k+1} - h_k = \dfrac{\lambda}{2n}.L = \dfrac{\Delta h}{\sin\theta} = \dfrac{\lambda}{2n\sin\theta} \approx \dfrac{\lambda}{2n\theta}.$

牛顿环:明环半径： $r_k = \sqrt{\dfrac{(2k-1)R\lambda}{2n}},\ \ k=1,2,3,\cdots$

暗环半径： $r_k = \sqrt{\dfrac{kR\lambda}{n}},\ \ k=0,1,2,\cdots$

等倾干涉:入射角i变，厚度 h 不变，

$$\delta = 2h\sqrt{n^2 - n_1^2\sin^2 i} + \lambda/2 = \begin{cases} 2k\cdot\frac{\lambda}{2} & k=1,2,\cdots \\ (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} & k=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

麦克尔孙干涉仪：$\Delta k = N$, $\Delta\delta = \Delta k\lambda = N\lambda$. 移动反射镜或在一条光路中加入介质可改变$\delta$.

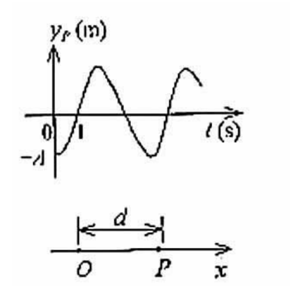
名校真题解析

1.(河北工业大学 2012 年)一平面简谐波沿 x 轴的负方向传播,波长为 λ,P 处质点的振动规律如图所示。

(1)求 P 处质点的振动方程；

(2)求此波的波动表达式；

(3)若图中$d=\frac{1}{2}\lambda$,求坐标原点 O 处质点的振动方程.



解：(1) 设$y_p = A\cos(\omega t + \phi_p)$,

从$t=0$ 时, $y_p = -A$ 得 $\phi_p = \pi$.

又从$t=1$ 时，$y_p=0,\ \ v>0$

得$\omega+\phi_p=\dfrac{3\pi}{2},\quad \omega=\dfrac{\pi}{2}.\qquad y_p=A\cos(\dfrac{\pi}{2}t+\pi)$

(2)设此波的波动表达式为

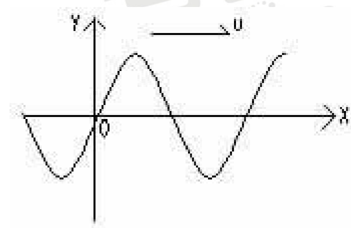
$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})+\phi]$

代入$x=d$ 并与 y_p 比较得 $T=4,\quad \phi=\pi-2\pi\dfrac{d}{\lambda}$

此波的波动表达式$y=A\cos[\frac{\pi}{2}t+\frac{2\pi}{\lambda}(x-d)+\pi]$

(3)代入$d=\frac{\lambda}{2}$得 O 点的振动方程 $y=A\cos(\frac{\pi}{2}t)$

2.(2011 年山东科技大学)一平面简谐波沿 x 轴正向传播,其振幅和角频率分别为 A 和ω,波速为 u,设 t = 0 时的波形曲线如图所示.



(1)写出此波的表达式.

(2)求距 O 点为$\lambda/8$处质点的振动方程.

(3)求距 O 点为$\lambda/8$处质点在 t = 0 时的振动速度.

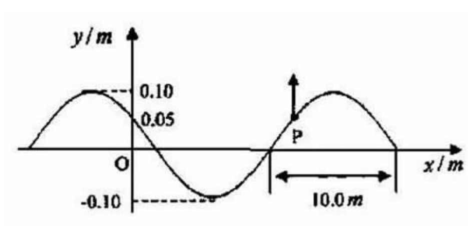
解: (1)$y=A\cos[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\dfrac{\pi}{2}]$

(2)$y_{x=\lambda/8}=A\cos[\omega(t-\dfrac{\lambda/8}{u})+\dfrac{\pi}{2}]=A\cos[\omega t-\dfrac{2\pi\nu T}{8}+\dfrac{\pi}{2}]=A\cos[\omega t+\dfrac{\pi}{4}]$

(3)$v_{x=\lambda/8}=-A\omega\sin(\omega t+\dfrac{\pi}{4})$

$v_{x=\lambda/8,t=0}=-A\omega\sin(\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}A\omega$

3.(2012 年深圳大学)下图为 t=0 时的波形图,设此简谐振动的频率为 250Hz,且此时图中质点 p 的运动方向向上,求:

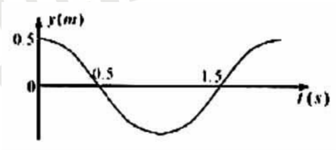


(1)该波的波动方程;

(2)在距离原点 o 为 7.5m 处质点的运动方程与 t=0 时质点的振动速度.

答案详见考试点视频

4.(2011 年南京理工大学).某平面波以$u=4m\cdot s^{-1}$的速度向 x 正方向传播,x=0 点的振动曲线如图示,求



(1)该波的波动方程(波函数)

(2)给出 t=1.5s 时的波形表达式并作波形图.

答案详见考试点视频

5.(2011 年南京航空航天大学)一弦线按下述方程振动：

$y=0.5\cos(\frac{\pi x}{3})\cos(40\pi t)$。式中各量均采用国际单位制。求：

(1)振幅与波速各为多少的两个分波的叠加才能产生上述振动?

(2)相邻两波节之间的距离为多大?

(3)在 x=3.0m 处,当$t=\frac{9}{8}s$时,弦上质点的速度为多大?

解:(1) 与 $y_1=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x),\qquad y_2=A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x),$

$y=y_1+y_2=2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$

比较得：

$2A=0.5,\quad \frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\pi}{3},\qquad \omega=40\pi$即

$A=0.25,\quad \lambda=6,\quad \nu=\frac{\omega}{2\pi}=20.\quad u=\lambda\nu=120.$

所以，题给的驻波由两个振幅$A=0.25m$,波速$u=120m/s$，波长$\lambda=6m$沿相反方向传播的两个分波叠加而成.

(2) 令$\cos(\frac{\pi x}{3})=0$，得波节位置

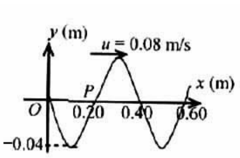
$x_k=\frac{3}{2}(2k+1),\quad k=0,1,2,\cdots$

相邻两波节之间的距离$\Delta x=x_{k+1}-x_k=3\ (m)$

(3)在 x=3.0m 处,$y=-0.5\cos(40\pi t),\implies v=\frac{dy}{dt}=20\sin(40\pi t)$

当$t=\frac{9}{8}s$时,$v=20\sin(40\pi\frac{9}{8})=20\sin(45\pi)=0$

6.(2011 年浙江工业大学)图示一平面简谐波在 t = 0 时刻的波形图,求：



(1)该波的波动表达式;

(2)P 处质点的振动方程。

解:(1) O 处质点,t = 0 时,$y_0 = A\cos\phi = 0, \quad v_0 = -A\omega\sin\phi > 0$

所以:$\phi = -\frac{\pi}{2}$。

又$T = \frac{\lambda}{u} = \frac{0.40}{0.08} = 5(s)$

故波动表达式为:

$$y = 0.04\cos[2\pi(\frac{t}{5} - \frac{x}{0.40}) - \frac{\pi}{2}]\ (m)$$

(2)P 处质点的振动方程为:

$$y_p = 0.04\cos[2\pi(\frac{t}{5} - \frac{0.20}{0.40}) - \frac{\pi}{2}] = 0.04\cos[2\pi(\frac{t}{5} - \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{2}] = 0.04\cos[0.4\pi t + \frac{\pi}{2}]\ (m)$$

7.(太原科技大学 2011 年)一平面简谐波在弹性媒质中传播,在某一瞬时,介质中某质元正处于平衡位置,此时它的能量是(　　)

(A)动能最大,势能最大;　　(B)动能为零,势能最大;

(C)动能为零,势能为零;　　(D)动能最大,势能为零.

解:波动的能量,动能 E_K,势能 E_P,

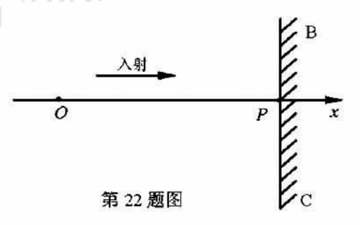
$$\because E_k = E_p = \frac{1}{2}A^2\omega^2\rho(\Delta V)\sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$$

$\therefore$ 在平衡位置,

$$x = A\cos\omega(t - \frac{x}{u}) = 0, \implies \cos\omega(t - \frac{x}{u}) = 0, \quad \sin\omega(t - \frac{x}{u}) = \pm 1$$

即$E_k = E_P$均为最大,故应选(A).

8.(2010 年南京航空航天大学)一平面简谐波沿 x 方向传播,BC 为波密媒质的反射面,波传播到 P 点被反射,已知$OP = \frac{3\lambda}{4}$,t = 0 时 O 处质点由平衡点向正方向运动. 设波振幅 A,频率ν为已知,选 O 为坐标原点,(1)写出入射波的波动方程;(2)反射波的波动方程;(3)合成波的波动方程.

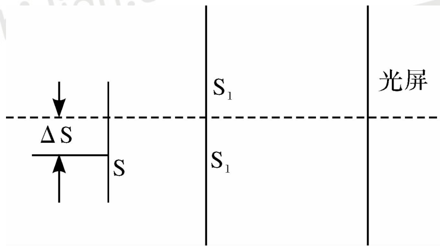


第 22 题图

答案详见考试点视频

9.(2012 年河北大学)在杨氏双缝实验中,双缝间距为 0.4mm,屏与狭缝间距为 1.2m,若光源用白光,求:

（1）第二级条纹中红光($\lambda_1 = 760nm$)到紫光($\lambda_2 = 400nm$)明纹中心的距离.



（2）若改变实验装置结构，让光源 S 沿 S_1 和 S_2 连线平行方向向下移动微小的位移Δs，试定性分析零级明纹在屏幕上是向上还是向下移动.

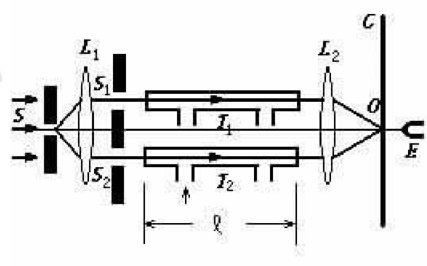
解：（1）
$$\begin{aligned}\Delta x &= x_{2,\lambda_1} - x_{2,\lambda_2} = 2\frac{D}{d}(\lambda_1 - \lambda_2) \\ &= 2 \times \frac{1.2}{0.4 \times 10^{-3}}(760 - 400) \times 10^{-9} = 2.16 \times 10^{-3}m = 2.16mm\end{aligned}$$

(2)零级明纹的条件是光程差为零，故零级明纹在屏幕上向上移动.

10.（中科院 2012）厚度均匀的薄膜形成的随倾斜角变化的圆形干涉条纹，称为等倾干涉条纹。它的特点是什么？

答：以相同倾角入射的光干涉情况一样，干涉条纹是同心圆环，内疏外密，条纹级次从外向内算.干涉图样定域在无穷远处，要用透镜观察。

11.（2011 年华南理工大学）在如图所示的瑞利干涉仪中，T_1、T_2是两个长度都是ℓ的气室，波长为λ的单色光的缝光源 S 放在透镜 L_1 的前焦面上，在双缝 S_1 和 S_2 处形成两个同相位的相干光源，用目镜 E 观察透镜 L_2焦平面 C 上的干涉条纹. 当两气室均为真空时，观察到一组干涉条纹. 在向气室 T_2 中充入一定量的某种气体的过程中，观察到干涉条纹移动了 M 条. 试求出该气体的折射率 n（用已知量 M,λ和ℓ表示出来）.



解：当 T_1 和 T_2都是真空时，从 S_1 和 S_2来的两束相干光在 O 点的光程差为零。当 T_2 中充入一定量的某种气体后，从 S_1 和 S_2来的两束相干光在 O 点的光程差为$(n-1)\ell$。在 T_2充入一定量气体的过程中，观察到 M 条干涉条纹移过 O 点，即两光束在 O 点的光程差改变了$M\lambda$。故有

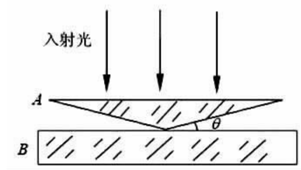
$$\Delta\delta = (n-1)\ell = M\lambda \implies n = \frac{M\lambda}{\ell} + 1.$$

12.（2011 年中山大学）用波长为λ_1的单色光照射空气劈形膜，从反射光干涉条纹中观察到劈形膜装置的 A 点处是暗条纹，若连续改变入射光的波长，当波长变为$\lambda_2(\lambda_2 > \lambda_1)$时 A 点再次变为暗条纹，求 A 点的空气薄膜厚度.

解：设 A 点的空气薄膜厚度为 h，
$$\begin{aligned}2h + \frac{\lambda_1}{2} &= (2k_1 + 1)\frac{\lambda_1}{2} \\ 2h + \frac{\lambda_2}{2} &= [2(k_1 - 1) + 1)\frac{\lambda_2}{2}\end{aligned}$$
即
$$\begin{aligned}h &= k_1\frac{\lambda_1}{2} \\ h &= (k_1 - 1)\frac{\lambda_2}{2}\end{aligned}$$

解得： $h = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}$

13.（2011 年南京航空航天大学）如图所示，在一块光平的玻璃片 B 上，端正地放置上一锥顶角很大的圆锥形平凸透镜 A，在其间形成一劈尖角 θ 很小的空气薄层，当波长为 λ 的单色平行光垂直射向平凸透镜时，从上方可以观察到干涉条纹。(1)说明干涉条纹的形状如何？求明、暗条纹到平凸透镜顶点的水平距离？(2)若平凸透镜缓慢向上平移，干涉条纹有何变化？(3)若平凸透镜稍向左侧倾斜，干涉条纹有何变化？



答案详见考试点视频

14.（2011 年浙江师范大学）波长为$\lambda = 600nm$的单色光垂直入射到置于空气中的平行薄膜上，已知膜的折射率 n = 1.54，求：

(1)反射光最强时膜的最小厚度；

(2)透射光最强时膜的最小厚度.

解：(1) 反射光最强时：

$$2nh + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \implies h = (2k-1)\frac{\lambda}{4n} \implies h_{min} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{600}{4 \times 1.54} = 97nm$$

(2) 透射光最强时：

$$2nh = k\lambda \implies h = \frac{k\lambda}{2n} \implies h_{min} = \frac{\lambda}{2n} = \frac{600}{2 \times 1.54} = 195nm$$

解题方法总结：

用对比法求波的振幅 A，圆频率ω(或频率ν，周期 T，波长λ)，波速 u 和初相ϕ. 要充分利用波形图中所给的数据. 将原点处波源的振动表达式中的 t 换成 $t-\frac{x}{u}$ 得沿 x 轴正向传播的波的波函数，将 t 换成 $t+\frac{x}{u}$ 得沿 x 轴负向传播的波的波函数. 若波源不在原点，先取波源为原点，写出波函数，再用坐标变换变回原坐标系. 把 t 时刻的波形图沿波的传播方向平移 $u\Delta t$，得 $t+\Delta t$ 时刻的波形图，由此可看出 t 时刻波线上各点的运动情况. 注意利用波的空间周期性(λ)和时间周期性(T)解题. 机械波的动能密度和势能密度相等. 写反射波表达式时，先写出入射波引起的反射点的振动表达式，再根据有无半波损失写出反射波引起的反射点的振动表达式，最后把反射波在反射点的振动当做波源，写出反射波表达式. 求入射波和反射波产生的驻波表达式时注意用三角函数公式. 令驻波振幅为最大值和零可得波腹和波节的位置. 用多普勒效应公式时，注意v_R和v_s正负的取法.

波(光)的干涉完全决定于参与叠加的波(光)在相遇点的相位差. 干涉加强或减弱，明暗条纹完全由两束波(光)在相遇点的位相差决定. 由波(光)程差可得位相差，进而得出明暗条纹的位置，间距等. 由光程差求位相差，要用真空中光的波长除光程差，再乘2π. 薄膜干涉的关键是要判定是否有半波损失. 分析半波损失时，若总的半波损失有偶数次，则不计半波损失，若总的半波损失有奇数次，仅计一次半波损失. 薄膜干涉反透互补，即反射加强时，透射必减弱；反之，反射减弱时，透射必加强，这是因为，若反射光有半波损失，则透射光无半波损失，透射光有半波损失，则反射光无半波损失. 这样，反射加强也可按透射减弱解，反之亦然.

第 12 讲　光的衍射和偏振

主要原理和基本公式：

惠更斯—菲涅耳原理：任一波振面上的各点都可以看做是发射子波的波源，其后任一时刻这些子波的包迹就是新的波振面. 衍射时波场中各点的强度由各子波在该点的相干叠加决定.

单缝暗纹：$a\sin\theta = \pm k\lambda$;

明纹：$a\sin\theta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2},\quad k = 1,2,3,\cdots$.（近似）

$\theta \approx \sin\theta = \dfrac{\lambda}{a}, \Delta x = 2f\tan\theta \approx 2f\sin\theta = 2f\frac{\lambda}{a}$，艾里斑半角宽度（角半径）$\theta \approx \sin\theta = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$

瑞利判据：一个点光源的衍射图样的主极大刚好和另一点光源的衍射图样的第一个极小相重合，这时衍射图样的合成光强的谷峰比约为 0.8.

最小分辨角$\delta\theta$：两物点在透镜处的张角. $\delta\theta = \theta \approx \sin\theta = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$

分辨本领：$R \equiv \dfrac{1}{\delta\theta} = \dfrac{D}{1.22\lambda}$

普适光栅方程：$d(\sin\phi + \sin\theta) = \pm k\lambda,\ \ k = 0,1,2,\cdots$

缺级：$k = \pm\dfrac{d}{a}k',\ \ k' = 1,2,3,\cdots$

X 射线衍射的布拉格公式：　$2d\sin\phi = k\lambda,\ \ k = 1,2,3,\cdots$

马吕斯定律：$I = I_0\cos^2\alpha$.

布儒斯特定律

$\tan i_b = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$,

o 光和 e 光，光轴，主平面

正晶体（如石英）：$v_o > v_e,\ \ n_o < n_e$;

负晶体（如方解石）：$v_o < v_e,\ \ n_o > n_e$;

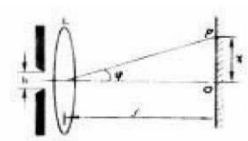
	位相差 $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$	光程差 $\delta = (n_o - n_e)d$	晶片厚度 d
四分之一 波片	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\lambda}{4}$	$\dfrac{\lambda}{4(n_o - n_e)}$
二分之一 波片	π	$\dfrac{\lambda}{2}$	$\dfrac{\lambda}{2(n_o - n_e)}$

偏振光的干涉：自然光依次通过偏振片 P_1，晶片 C，偏振片 P_2，即得两束相干的偏振光. 当 P_1 和 P_2 正交时，

$$(n_o-n_e)d=\begin{cases}(2k-1)\frac{\lambda}{2}, & k=1,2,\cdots,\ \text{increase;}\\ k\lambda, & k=1,2,\cdots,\ \text{decrease.}\end{cases}$$

名校真题解析

1.(2012 年河北大学)如图所示,狭缝的宽度$b=0.6mm$,透镜焦距$f=0.4m$,有一与狭缝平行的屏放置在透镜焦平面处.若以单色平行光照射狭缝,则在屏上离 o 点为 x = 1.4mm 处的 P 点,看到的是衍射明条纹,试求:(1)该入射光的波长;(2)点 P 处条纹的级数;(3)从点 P 看来对该光波而言,狭缝处的波振面可分作半波带的数目是多少?



解:$b\sin\phi=\pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2},\quad k=1,2,3,\cdots.$

$$x_k=f\tan\phi\approx f\sin\phi=f\frac{(2k+1)\lambda}{2b}$$

$$\lambda=\frac{2bx_k}{f(2k+1)}$$

在可见光范围内,$k=3,\ \lambda=600nm;\quad k=4,\ \lambda=467\ nm$

所以,$\lambda=600nm$, P 点是第 3 级明纹,狭缝处的波振面可分作 7 个半波带;$\lambda=467nm$, P 点是第 4 级明纹,狭缝处的波振面可分作 9 个半波带;

2.(2011 年山东科技大学)一双缝,缝距 d = 0.40 mm,两缝宽度都是 a = 0.08 mm,用波长为λ = 480 nm (1 nm = 10^{-9}m) 的平行光垂直照射双缝,在双缝后放一焦距 f = 2.0 m 的透镜,求:

(1)在透镜焦平面处的屏上,双缝干涉条纹的间距;

(2)在单缝衍射中央亮纹范围内的双缝干涉亮纹数目 N 和相应的级数。

解:(1) 双缝干涉条纹的间距

$$\Delta x=\frac{D}{d}\lambda=\frac{f}{d}\lambda=\frac{2.0}{0.40\times10^{-3}}\times480\times10^{-9}=2.4\times10^{-3}\ (m)$$

(2) 单缝衍射中央亮纹宽度:

$$\Delta x'=\frac{2f}{a}\lambda=\frac{2\times2.0}{0.08\times10^{-3}}\times480\times10^{-9}=2.4\times10^{-2}\ (m)$$

单缝衍射中央亮纹范围内的双缝干涉亮纹数目

$$N=\frac{\Delta x'}{\Delta x}-1=\frac{2d}{a}-1=\frac{2\times0.4}{0.08}-1=9$$

相应的级数是: $0,\pm1,\pm2,\pm3,,\pm4.$

3.(2012 年深圳大学)波长$\lambda=6.0\times10^{-7}m$的单色光垂直入射到一光栅上,测得第二级明纹对应衍射角的正弦值是$\sin\phi=0.20$,且第三级是缺级。求:

(1)光栅常数 d;d = a + b

(2)狭缝的最小宽度 a；

(3)实际能呈现的最多明条纹数目.

答案详见考试点视频

4.(2012 年深圳大学)单缝衍射装置中,已知缝宽$b = 1.0 \times 10^{-4}m$,透镜焦距$f = 5.0 \times 10^{-1}m$,用波长$\lambda = 5.0 \times 10^{-7}m$的光垂直照射单缝.求位于透镜焦平面处的屏幕上,

(1) 中央明纹的线宽度；

(2) 第一级明纹的位置及对应单缝处波面划分的半波带数；

(3)第一级明纹的宽度.

答案详见考试点视频

5.(2011 年南京航空航天大学)每毫米有 200 条狭缝的光栅,其透光部分与不透光部分宽度相等。(1)求光栅常数和透光部分的宽度;(2)若用波长 λ=600nm 的平行光垂直照射该光栅,求最多能观察到多少条明条纹?(3)若以白光(400 nm－760 nm)照射在该光栅上,问可观察到多少无重叠的、完整的光谱级次?

解:(1)光栅常数 d 和透光部分宽度 a 分别为:

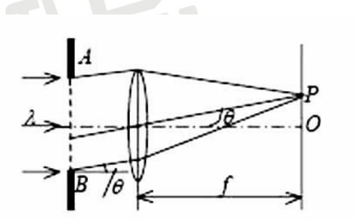
$$d = \frac{1 \times 10^{-3}}{200} = 5.0 \times 10^{-6}m = 5.0\mu m, \quad a = \frac{d}{2} = 2.5\mu m$$

(2)$k_{max} \le \dfrac{d}{\lambda} = \dfrac{5.0 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-9}} = 8.33 \implies k_{max} = 8$

$\because \ \dfrac{d}{a} = 2, \quad \therefore$偶数级缺级,可观察到的明条纹级次是:$0, \ \pm 1, \ \pm 3, \ \pm 5, \ \pm 7$,共 9 条明纹.

(3)最早重合的应是红光(760nm)的第(k+1)级条纹与紫光(400nm)的第 k 级条纹,因此,令$(k+1)400 = k760 \implies k = 1$,所以,最多可观察到 1 级无重叠的、完整的光谱.

6.(2010 年华南理工大学)波长为 λ=480.0 nm 的平行光垂直照射到宽度为 a=0.40 mm 的单缝上,单缝后透镜的焦距为 f=60 cm,当单缝两边缘点 A、B 射向 P 点的两条光线在 P 点的相位差为 π 时,P 点离透镜焦点 O 的距离等于________________.



解:$\Delta\phi = \dfrac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi = \pi \implies \sin\theta = \dfrac{\lambda}{2a}$

$$\begin{aligned} x_p = \overline{OP} &= f\tan\theta \approx f\sin\theta \approx f\frac{\lambda}{2a} \\ &= \frac{0.6 \times 480 \times 10^{-9}}{2 \times 0.4 \times 10^{-3}} = 0.00036m = 0.36mm \end{aligned}$$

7.(2010 年南京理工大学)光栅每厘米有 2500 条狭缝,且刻痕宽度 b 是缝宽的 3 倍,若以 $\lambda_1 = 600nm$的单色光垂直入射到光栅上,求:

(1)光栅常数;

(2) 在单缝衍射的中央明纹区域内,最多可见到多少条主极大明纹?

(3)若用另一波长为λ_2的单色光垂直入射,发现其第 3 级与λ_1的第 2 级主极大明纹重合,则λ_2的量值为多少?

答案详见考试点视频

8.(2012 年深圳大学)

(1)当自然光通过两个偏振化方向成 30^0角的偏振片时,已知透射光的强度为 I. 该自然光的光强为多少?

(2) 若在这两个偏振片之间插入另一偏振片,其偏振化与前两个偏振片均成 15^0角,仍用上述自然光照射,则透射光强又为多少?

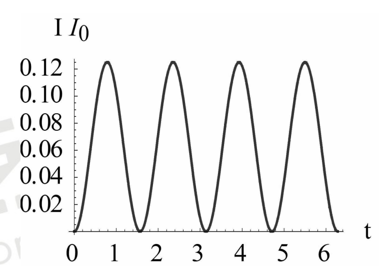
答案详见考试点视频

9.(2010 年中国计量科学院)自然光和线偏振光的混合光束通过一偏振片。随着偏振片以光的传播方向为轴转动,透射光的强度也跟着改变,最强和最弱的光强之比为 5:1,那么入射光中自然光和线偏振光光强之比为多大?

答案详见考试点视频

10.(2010 年南京理工大学)在正交偏振片 P_1,P_2之间插入第三块偏振片,构成一偏振片组, 第三块偏振片以角速度ω绕中心轴旋转,开始时其偏振化方向与第一偏振片的偏振化方向一致. 现让光强为 I_0的一束自然光通过该偏振片组,求出射光强并画出光强随时间变化曲线.

解:$I = \dfrac{I_0}{2}\cos^2(\omega t)\cos^2(\dfrac{\pi}{2} - \omega t) = \dfrac{I_0}{8}\sin^2(2\omega t)$



11.(2010 年中国计量科学院)一束自然光自空气入射到水(折射率为 1.33)表面上,若反射光是线偏振光,判断入射光的入射角及折射角?

解:因反射光是线偏振光,所以入射角i等于布儒斯特角i_b,根据布儒斯特定律$\tan i_b = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$,

则 $i = i_b = \arctan n_2 = \arctan 1.33 = 53.06° = 53°3'40''$ 折射角$\gamma = 90° - i_b = 36.94° = 36°56'20''$

12.(2010 年暨南大学)如何利用偏振片和波晶片(1/4 波片、半波片等)将一束自然光转化为圆偏振光? 又如何利用波晶片将一线偏振光的偏振方向旋转 90 度?

答:线偏振光透过四分之一波片后成为椭圆偏振光,如果入射偏振光的振动方向与四分之一波片

的光轴方向的夹较为α，当$\alpha = \pi/4$时，成为圆偏振光；线偏振光透过二分之一波片后仍为线偏振光，但其振动面转了2α角.

所以，使一束自然光先过一偏振片，再通过一个 1/4 波片，并使偏振片的偏振化方向与 1/4 波片的光轴方向成$\pi/4$角，则出射光成为圆偏振光. 同样地使一束自然光先过一偏振片，再通过一个 1/2 波片，并使偏振片的偏振化方向与 1/2 波片的光轴方向成$\pi/4$角，则出射偏振光的偏振方向旋转了 90 度.

13.（2011 年太原科技大学）一个平面光栅，当用光垂直照射时，能在 30^0 角的衍射方向上得到 600nm 的第二级主极大，并能分辨 $\Delta\lambda = 0.05$nm 的两条光谱线，但不能得到 400nm 的第三级主极大。计算此光栅的透光部分的宽度 a 和不透光部分的宽度 b 以及总缝数。

解：$(a+b)\sin 30^\circ = 2\lambda \implies a+b = \dfrac{2\lambda}{\sin 30^\circ} = \dfrac{2\times 600}{0.5} = 2400(nm)$

因为第三级为缺级，所以

$$\frac{a+b}{a} = 3 \implies a = 800nm,\quad b = 1600nm$$

$$R = kN = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \implies N = \frac{\lambda}{k\Delta\lambda} = \frac{600}{2\times 0.05} = 6000(\text{条})$$

14.（2011 年浙江工业大学）线偏振光垂直入射于石英晶片上，（光轴平行于入射表面），石英主折射率 $n_o = 1.544$，$n_e = 1.553$.

（1）若光振动方向与晶片的光轴成60°角，不计反射与吸收损失，估算透过的 o 光与 e 光强度之比；

（2）若晶片厚度为 0.5mm，透过的 o 光与 e 光的光程差多大？

解（1）设入射线偏振光的振幅为 A，透过晶片后 o 光与 e 光的振幅分别为 A_0 和 A_e，则$A_o = A\sin 60^\circ, \quad A_e = A\cos 60^\circ$

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{A_o^2}{A_e^2} = \frac{(A\sin 60^\circ)^2}{(A\cos 60^\circ)^2} = (\tan 60^\circ)^2 = 3$$

（2）光程差$\Delta\delta = |n_0 - n_e|d = |1.544 - 1.553| \times 0.5\times 10^{-3} = 4.5\times 10^{-6}m$

解题方法总结：

对一定的衍射角，$a\sin\phi$是$\lambda/2$的多少倍，缝宽 a 就可分成多少个半波带. 若缝宽 a 被分成偶数个半波带，即出现暗纹；分成奇数个半波带，即出现明纹；分的半波带数越多，明纹光强越小. 对光栅衍射注意缺级和斜入射. 垂直入射光栅方程和布拉格公式中的角度意义不同. 自然光通过偏振片光强减半. 对光线先后通过多个偏振片问题，建议画图，标出相邻的两个偏振片的偏振化方向之间的夹角，示意地标出光通过每个偏振片后的光强 I_i，然后逐级求解. 当入射角等于布儒斯特角时，反射线和折射线垂直. o 光和 e 光的特性不同. 线偏振光通过四分之一波片和二分之一波片后，o 光和 e 光产生相位差（或光程差）. 要产生有固定相位差的 o 光和 e 光，可使线偏振光通过波片. 波片不能把自然光变成偏振光. 通过波片的偏振光并不能干涉，要产生干涉，必须再使其通过一个偏振片.

第 13 讲　量子物理(一)

波粒二象性 薛定谔方程

基本公式:

普朗克黑体辐射公式:

$$M_{\lambda 0}=2\pi hc^2\lambda^{-5}\frac{1}{e^{hc/(k\lambda T)}-1}$$

$$M_\nu=\frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/(kT)}-1}$$

维恩公式:$M_{\lambda 0}=C_1\lambda^{-5}e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}$,　　$M_\nu=\alpha\nu^3e^{-\beta\nu/T}$.（$\nu$ 很大）

瑞利 - 金斯公式:$M_{\lambda 0}=C_3\lambda^{-4}T$,　$M_\nu=\dfrac{2\pi\nu^2}{c^2}kT$,（$\nu$ 小）

斯特藩 - 玻耳兹曼定律:

$$M=\int_0^\infty M_\nu \mathrm{d}\nu=\sigma T^4,\qquad \sigma=5.670\ 51\times10^{-8}W/(m^2\cdot K^4)$$

维恩位移律:$T\lambda_m=b$, $b=2.897\times10^{-3}m\cdot K$

$\nu_m=C_\nu T$.（解 $\frac{dM_\nu}{d\nu}=0$得）　$C_\nu=5.880\times10^{10}\mathrm{Hz/K}$.

光子理论:$m_0=0,E=mc^2=h\nu$, $m=\dfrac{h\nu}{c^2},p=\dfrac{E}{c}=\dfrac{h\nu}{c}=\dfrac{h}{\lambda}$.

光电效应: $\dfrac{1}{2}mv_m^2=eU_a=h\nu-A=h(\nu-\nu_0)$,

康普顿散射公式:

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\phi)=\lambda_c(1-\cos\phi)=\frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\phi}{2}=2\lambda_c\sin^2\frac{\phi}{2}.$$

$$\lambda_c=\frac{h}{m_0c}=0.024\times10^{-10}(m)=0.0024(nm)$$

德布罗意假设: $E=mc^2=h\nu$,　$p=mv=\dfrac{h}{\lambda}$.

玻恩:物质波描述粒子在各处被发现的概率,因此德布罗意波是概率波.

波函数$\Psi(x,y,z,t)$:描述微观粒子的状态,Ψ叫概率幅,$|\Psi|^2$为概率密度.$\int_V|\Psi|^2dv=\int_V\Psi\Psi^*dv$给出在 V 中发现粒子的概率.

不确定关系: $\Delta x\Delta p_x\geq\dfrac{\hbar}{2}$,　$\Delta y\Delta p_y\geq\dfrac{\hbar}{2}$,　$\Delta z\Delta p_z\geq\dfrac{\hbar}{2}$.,　$\Delta E\Delta t\geq\dfrac{\hbar}{2}$.

定态薛定谔方程:　$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+U\psi=E\psi$

波函数:单值,有限,连续. $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=1.$

一维无限深势阱： $U=\begin{cases}0, & 0\le x\le a\\ \infty, & x<0,x>a\end{cases}$

$\psi_n=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x,\ \ n=1,2,3,\cdots$， $E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2,\ \ n=1,2,3,\cdots$

谐振子:$U=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$

$E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega=(n+\frac{1}{2})h\nu,\ \ n=0,1,2,\cdots E_0=\frac{1}{2}h\nu$

名校真题解析

1.（2012 年中国科学院研究生院）动能相同的电子与质子的德布罗意波长哪个较长？（　　）

（A）电子；　（B）质子；　（C）一样长；　（D）不能确定

答:$E_k=\frac{p^2}{2m}\implies p=\sqrt{2mE_k},\quad \lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2mE_k}}$

$\frac{\lambda_p}{\lambda_e}=\sqrt{\frac{m_e}{m_p}}\quad \because m_p>m_e\quad \therefore\ \ \lambda_p<\lambda_e.$

2.（2012 年广东工业大学）某金属产生光电效应的红线为ν_0,当用频率为$\nu\ (\nu>\nu_0)$的单色光照射该金属时,从金属中逸出的光电子（质量为 m）的德布罗意波长为____________________.

解:$\frac{1}{2}mv_m^2=\frac{p^2}{2m}=h(\nu-\nu_0)\implies p=\sqrt{2mh(\nu-\nu_0)}$　　$\lambda=\frac{h}{p}=\sqrt{\frac{h}{2m(\nu-\nu_0)}}$

3.（2011 年南京理工大学）某金属的电子逸出功为 6.2 电子伏特,要从金属表面释放出电子,照射光的波长满足________

答案详见考试点视频

4.（2011 年广东工业大学）已知从铝金属逸出一个电子至少需要 A＝4.2eV 的能量,若用可见光投射到铝的表面,能否产生光电效应？为什么？

答案详见考试点视频

5.（2010 年南京航空航天大学）习惯上称$\lambda_0=\frac{h}{m_0c}$为电子的康普顿波长,式中 m_0 为电子的静止质量, h 为普朗克常量, c 为真空中光速。则当电子的动能等于其静止能量时,此电子的德布罗意波长为电子康普顿波长λ_0的倍.

解： $E_k=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}-m_0c^2=m_0c^2\implies p=\sqrt{3}m_0c$

$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{3}m_0c}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{3}},\quad$ 所以填$\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6.（2010 年南京航空航天大学）一光子的波长为400nm，如果测定其波长的精确度为$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=10^{-6}$，试求同时测定此光子位置的不确定量（即光波列长度）.（不确定关系：$\Delta x\Delta p\geq h,\ h$为普朗克常数）

解：$p=\frac{h}{\lambda}\implies\Delta p=-\frac{h\Delta\lambda}{\lambda^2}\quad\Delta x\geq\frac{h}{\Delta p}=\frac{h}{\frac{h\Delta\lambda}{\lambda^2}}=\frac{\lambda}{\frac{\Delta\lambda}{\lambda}}=\frac{400}{10^{-6}}nm=0.4m$,

7.（2010 年南京航空航天大学）设一维粒子处在$\psi(x)=\begin{cases}Axe^{-\lambda x} & (x\geq0)\\0 & (x\leq0)\end{cases}$的状态，其中$\lambda$为大于零的常数. 求：

（1）归一化因子 A；

（2）粒子的概率密度函数；

（3）在何处找到粒子的概率密度最大？

答案详见考试点视频

8.（2010 年南京理工大学）宽度为 a 的一维无限深势阱中，粒子的波函数为$\Psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$，若 n = 2 时，粒子在 x = ________处出现的概率最小，粒子在 x = ____处出现的概率最大.

解：n = 2 时，粒子的概率密度

$w_2(x)=|\Psi_2(x)|^2=\frac{2}{a}\sin^2(\frac{2\pi}{a}x)$

解$\frac{dw(x)}{dx}=\frac{8\pi}{a^2}\sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi x}{a}=0$得$x=\frac{ka}{4},\quad k=0,1,2,3,4.$

显然：$x=0,\frac{a}{2},a$时，$w_2(x)=0$，粒子出现的概率最小；

$x=\frac{a}{4},\frac{3}{4}a$时，$w_2(x)=\frac{2}{a}$，粒子出现的概率最大.

9.（2010 年南京理工大学）已知一维无限深势阱中粒子的波函数为$\Psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$，则 n = 1 时，粒子在$x=\frac{a}{3}$处出现的概率密度为________.

解：n = 1 时，粒子的概率密度　$w_1(x)=|\Psi_1(x)|^2=\frac{2}{a}\sin^2(\frac{\pi}{a}x)$

粒子在$x=\frac{a}{3}$处出现的概率密度　$w_1(\frac{a}{3})=\frac{2}{a}\sin^2(\frac{\pi}{a}\frac{a}{3})=\frac{2}{a}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3}{2a}$

10.（2010 年暨南大学）光电效应的红限取决于（　　）

（A）金属的逸出功；　　（B）入射光的强度；

（C）入射光的颜色；　　（D）入射光的频率；

解：$A=h\nu_0$，　选（A）.

11.（2010年暨南大学）一电子被限定在原子直径范围内运动（原子直径约为 $d=10^{-8}$ m，电子的质量为 0.91×10^{-30} kg，普朗克常数 $h=6.63\times10^{-34}$ J·S），则电子的速度不确定量约为（　　）

(A) 10^2 m/s；　　(B) 10^4 m/s；

(C) 10^8 m/s；　　(D) 10^{11} m/s

答案详见考试点视频

12.（2010年暨南大学）证实德布罗意物质波存在的实验是（　　）

(A) 光电效应实验；　　(B) 电子衍射实验；

(C) 弗兰克—赫兹实验；　　(D) 康普顿效应实验。

解：选（B）.

13.（2010年暨南大学）. 关于黑体辐射，以下错误的说法是（　　）

(A) 能吸收一切外来的电磁辐射的物体称之为黑体；

(B) 当黑体的温度越高时，其单色辐出度的峰值波长也越短；

(C) 黑体吸收电磁辐射的能力最强，发射电磁辐射的能力也最强；

(D) 只有黑体辐射的辐射能是量子化的，其他物体的辐射能不是量子化的。

解：选（D）

14.（2010年暨南大学）根据光的波粒二象性，以下正确的是（　　）

(A) 光子能量和光的波长成正比；

(B) 光子能量和光的频率成反比；

(C) 光子的动量和光的频率成反比；

(D) 光子的动量和光的波长成反比。

解：$E=h\nu=\dfrac{hc}{\lambda}$，　(A)和(B)错；　$p=\dfrac{h\nu}{c}=\dfrac{h}{\lambda}$，　(C)错(D)对，选（D）

15.（2010年暨南大学）产生康普顿效应的原因是（　　）

(A) 光子和原子中束缚较强的内层电子碰撞的结果；

(B) 光子和原子中束缚较弱的外层电子碰撞的结果；

(C) 光子和原子核碰撞的结果；

(D) 光子和原子中辐射出的光子碰撞的结果

解：选（B）.

16.（2010年电子科技大学）已知某单色光照射到一金属表面产生了光电效应，若此金属的逸出电势是 U_0（使电子从金属逸出需作功 eU_0）则此某单色光的波长满足（　　）

$(A)\ \lambda\le\dfrac{hc}{eU_0}$　　$(B)\ \lambda\ge\dfrac{hc}{eU_0}$　　$(C)\ \lambda\le\dfrac{eU_0}{hc}$　　$jx(D)\ \lambda\ge\dfrac{eU_0}{hc}$

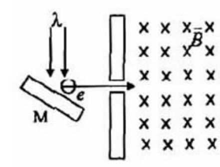
答案详见考试点视频

17.(2010 年电子科技大学)光子能量为 0.5Mev 的 X 射线,入射到某物质上发生康普顿散射.若反冲电子因散射而获得的能量为 0.1Mev,则散射光波长的变量$\Delta\lambda$与入射光波长λ_0之比值为(　　)

$(A)\ 0.2$　　$(B)\ 0.25$　　$(C)\ 0.3$　　$(D) 0.35$

答案详见考试点视频

18.(2010 年电子科技大学)波长为λ的单色光照射某金属 M 表面发生光电效应,发射的光电子(电量为 e,质量为 m)垂直进入磁感应强度为$\vec{B}$的匀强磁场,今测出电子在该磁场中做圆运动的最大半径为 R,求(1)该金属材料的逸出功;(2)遏止电势差.



答案详见考试点视频

19.(2010 年南京理工大学)动能 $E_k=1.53$MeV 的电子运动的德布罗意波长为__________.

解:(1)按相对论算:

$$E_k=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}-m_0c^2$$

$$\text{解得}\,p=\frac{\sqrt{E_k(E_k+2m_0c^2)}}{c}$$

$$\begin{aligned}\lambda&=\frac{h}{p}=\frac{hc}{\sqrt{E_k(E_k+2m_0c^2)}}\\&=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{\sqrt{1.53\times(1.53+2\times0.511)\times10^6\times1.6\times10^{-19}}}\\&=6.29\times10^{-13}m=6.29\times10^{-4}nm\end{aligned}$$

(已用$m_0=0.511MeV/c^2$)

(2)按非相对论算:

$$E_k=\frac{p^2}{2m_0}\implies p=\sqrt{2m_0E_k}$$

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2m_0E_k}}=\frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times\frac{0.511}{3\times10^8}\times1.53\times10^6\times1.6\times10^{-19}}}=9.94\times10^{-13}$$

结论:应考虑相对论效应.

解题方法总结:牢记微观粒子波粒二象性关系公式. 根据问题性质,把握是否应用相对论理论.正确应用相对论的质速关系,质能关系和能量动量关系公式.解光子、电子与原子、电子的碰撞问题时,注意应用动量守恒和能量守恒.解不确定关系问题时, 注意题目是否已给出了相应的公式,否则应用精确的公式.所有计算要注意单位换算.记住一维定态薛定谔方程.要能熟练地计算给定波函数的归一化常数和一维无限深势阱中粒子的能级,确定粒子出现的概率密度最大和最小的位置.对任意的一维波函数,要能定出相应的能量本征值和归一化常数.

第 14 讲　量子物理(二)

原子中的电子

基本公式：

氢原子:$E_n == -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$

$E_1 = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -13.6eV$

$r_n = n^2 r_1 = n^2 a_0$

$a_0 = 0.529 \times 10^{-10}\ \mathrm{m} = 0.0529\ \mathrm{nm}$

电离能:$|E_n|$,

玻尔频率条件:$h\nu = E_h - E_\ell$.

氢原子的谱线系： 莱曼系,巴耳末系,帕邢系,…

$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar, \quad \ell = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

$L_z = m_\ell \hbar, \quad m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \ell.$

$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar, \quad s = \frac{1}{2}$

$S_z = m_s \hbar, \quad m_s = \pm\frac{1}{2}$

基态原子的电子填充壳层遵循的两条规律：

能量最低原理； 泡利不相容原理.

核外电子的壳层结构和电子组态：

一个次(分)壳层最多可容纳的电子数 = $2(2\ell+1)$;

一个主壳层最多可容纳的电子数 = $\sum_{\ell=0}^{n-1} 2(2\ell+1) = 2n^2$.

电子组态表示方法：数字表示壳层的 n 值，其后的小写字母($s, p, d, \cdots$)表示壳层中次壳层的符号,右上角的指数表示该次壳层中的电子数.

名校真题解析

1. (2010 年暨南大学)已知氢原子基态能量为 -13.6eV,根据玻尔理论,要把氢原子从基态激发到第一激发态所需能量为(　　)

(A)13.6eV ;　　(B)10.2eV ;　　(C)6.8eV ;　　(D)3.4eV

解:第一激发态 n=2，　$E_2 = \frac{E_1}{2^2}$.

把氢原子从基态激发到第一激发态所需能量为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{E_1}{2^2} - E_1 = \frac{-3E_1}{4} = -\frac{3\times(-13.6)}{4} = 10.2eV$$

选(B).

2.(2010 年电子科技大学)在气体放电管中,用能量为 12.2eV 的电子去轰击处于基态的氢原子,此时氢原子所能发射的光子的能量只能是(　　)

(A)　12.09eV　　　　　　　　　　(B)　10.20 eV 和　1.51 ev

(C)　10.20eV,　12.09eV 和 1.89 eV　　　(D)　10.20eV, 12.09eV 和 1.51eV

解:$E = 12.2 - 13.6 = -1.4ev > -15.1ev = E_3$

所以,可能发生的跃迁是:

$E_3 \to E_1,\ h\nu_{31} = 12.09ev$
$E_3 \to E_2,\ h\nu_{32} = 1.89ev$
$E_2 \to E_1,\ h\nu_{21} = 10.20ev$　选(C)

3.(2010 年电子科技大学)根据量子力学理论,当主量子数 n =3 时,电子动量矩的可能值为(　　)

$(A)\ 0,\ \sqrt{2}\hbar,\ \sqrt{6}\hbar \quad (B)\ \hbar,\ 2\hbar,\ 3\hbar \quad (C)\ 0,\ \sqrt{2}\hbar,\ \sqrt{4}\hbar \quad (D)\ 3\hbar$

解:$n = 3,\quad \ell = 0, 1, 2.$根据$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$

得电子动量矩的可能值为:$\hbar,\ \sqrt{2}\hbar,\ \sqrt{6}\hbar.$

4.(2010 年南京理工大学)处于第一激发态的氢原子的势能为_________,其核外电子绕核运动的动能为_________ .

解:解法一:

$E_{n,p} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$, 第一激发态 n =2.,

$$\begin{aligned}E_{2,p} &= -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = -\frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 r_1}\\ &= -\frac{(1.6\times10^{-19})^2}{16\pi\times8.85\times10^{-12}\times5.29\times10^{-11}}\\ &= -1.09\times10^{-18}J = -\frac{1.09\times10^{-18}}{1.6\times10^{-19}} = -6.8eV\end{aligned}$$

$$E_{2,k} = E_2 - E_{2,p} = \frac{E_1}{2^2} - E_{2,p} = \frac{-13.6}{4} - (-6.8) = 3.4eV$$

解法二:

$E_k = -E_n,\quad E_p = 2E_n,\quad E_1 = -13.6eV$第一激发态 n =2.,

$$E_{2,k} = -E_2 = -\frac{E_1}{2^2} = -\frac{-13.6}{4} = 3.4eV$$

$$E_{2,p} = 2E_2 = 2\frac{E_1}{2^2} = \frac{-13.6}{2} = -6.8eV$$

5.(2011 年南京航空航天大学)处于基态的氢原子吸收了一个能量为 16eV 的光子后其电子成为

自由电子,求该电子的速度(电子的质量 m = 9.11×10^{-31}kg)

解：电子的动能：

$$E_k = 16 - 13.6 = 2.4eV = 2.4\times1.6\times10^{-19} = 3.84\times10^{-19}J$$

解$\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 = E_k$得

$$\begin{aligned} v &= \frac{c\sqrt{E_k(E_k+2mc^2)}}{E_k+mc^2} \\ &= \frac{\sqrt{2.4\times(2.4+2\times0.511\times10^6)}}{2.4+0.511\times10^6}c = 0.003c = 9.19\times10^5 m/s \end{aligned}$$

事实上，

$\because E_k = 2.4eV << 0.511MeV = mc^2$ $\quad\therefore$此题可用非相对论理论.

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2\times2.4\times(3\times10^8)^2}{0.511\times10^6}} = 9.19\times10^5 m/s$$

6.(2011 年河北工业大学)根据波尔理论

(1) 计算氢原子中电子在量子数为 n 的轨道上作圆周运动的频率；

(2) 计算当该电子跃迁到(n - 1)的轨道上时所发出的光子的频率.

(3)证明当 n 很大时,上述(1)和(2)结果近似相等.

解：(1)$L_n = mr_nv_n = n\hbar \implies \nu = \dfrac{v_n}{2\pi r_n} = \dfrac{n\hbar}{2\pi mr_n^2} = \dfrac{n\hbar}{2\pi mn^4r_1^2} = \dfrac{\hbar}{2\pi mn^3r_1^2}$

代入$r_1 = \dfrac{\varepsilon_0h^2}{\pi me^2}$得： $\nu = \dfrac{\hbar}{2\pi mn^3(\frac{\varepsilon_0h^2}{\pi me^2})^2} = \dfrac{me^4}{4n^3\varepsilon_0^2h^3}$

(2)$\nu_{n,n-1} = \dfrac{E_n - E_{n-1}}{h} = E_1\dfrac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n-1)^2}}{h} = \dfrac{E_1[(n-1)^2-n^2]}{hn^2(n-1)^2}$

当 n 很大时，

$$\nu_{n,n-1} = \frac{E_1[(n-1)^2-n^2]}{hn^4} \approx \frac{-2nE_1}{hn^4} = \frac{-2E_1}{hn^3}$$

代入$E_1 = -\dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}$得： $\nu_{n,n-1} = \dfrac{-2(-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2})}{hn^3} = \dfrac{me^4}{4n^3\varepsilon_0^2h^3} = \nu$

7.(2011 年河北工业大学)假定氢原子原是静止的,则氢原子从 n = 3 的激发状态直接通过辐射跃迁到基态时的反冲速度大约是.(氢原子的质量为 m = 1.67x10^{-27}kg).

解： 因$\Delta E = E_3 - E_1 = \dfrac{E_1}{3^2} - E_1 = \dfrac{8}{9}|E_1| = \dfrac{8}{9}\times13.6 = 12.01eV << 938.3MeV$(938.3Mev 为氢原子的静能)

所以用非相对论理论.

解$\Delta E = h\nu + \frac{1}{2}mv^2,\ \frac{h\nu}{c} = mv$得

$$\begin{aligned} v &= \left(\sqrt{1+\frac{2\Delta E}{mc^2}}-1\right)c \\ &= \left(\sqrt{1+\frac{2\times 12.01\times 1.6\times 10^{-19}}{1.67\times 10^{-27}\times 3.0\times 10^{82}}}-1\right)\times(3.0\times 10^8) = 3.87m/s \end{aligned}$$

8.（2010 年浙江工业大学）质量为 m_0的一个受激原子,静止在惯性参考系 K 中,因发射一个光子而反冲,原子的内能减少了ΔE,而已知光子的能量为$h\nu$,试证：

$$h\nu = \Delta E\left(1-\frac{\Delta E}{2m_0c^2}\right)$$

证:发射一个光子后，原子的静能变为$m_0c^2-\Delta E$，动量为 p，

根据能量守恒和动量守恒：

$$m_0c^2 = h\nu + \sqrt{p^2c^2+(m_0c^2-\Delta E)^2}, \qquad \frac{h\nu}{c} = p$$

解得:$h\nu = \Delta E\left(1-\frac{\Delta E}{2m_0c^2}\right)$

9.（2012 年中国科学院研究生院）斯特恩－盖拉赫（Stern－Gerlach）实验与下面哪个发现密切相关。（　　）

（A）原子的核式结构；　　（B）电子的波动性；

（C）电子的自旋；　　（D）光的粒子性。

解:选（C）.

解题方法总结：

记氢原子基态能量 E_1，玻尔半径 r_1等常数值,对解题很有用。记氢原子光谱的前 3 个线系的 n_h和 n_l值。明确四个量子数的符号、取值和作用。每个主、分壳层最多能填充的电子数。电子填充壳层所服从的两条规律,电子组态表示方法。

第15讲 激光固体核物理

基本概念与公式：

激光：

受激辐射：处于高能态的原子，如果在自发辐射前，受到能量为$h\nu = E_2 - E_1$的外来光子的诱发作用，就有可能从高能态E_2跃迁到E_1，同时发射一个与外来光子的频率、相位、偏振态和传播方向都相同的光子，这称为受激辐射。

粒子数布居反转 即$N_h > N_\ell$. 要实现粒子数布居反转，必须有具有亚稳态的激活介质和激励能源。

激光器：激光是完全相干光，光强与原子数平方成正比，光强大；

激光器两端反射镜之间的距离控制其间驻波的波长，使激光的单色性极高；

激光器两端反射镜严格与管轴垂直，使激光有高度的指向性

固体：

满带：被电子填满的能带叫满带.

空带：所有能级都没有电子填入的能带叫空带.

价带：能带中最上面的有电子存在的能带，即由价电子能级分裂而形成的能带叫价带.

导带：价带上面相邻的那个空着的能带和未被电子填满的价带都叫导带.

禁带：在能带之间没有可能量子态的区域叫禁带.

导体：价带中有电子但未被填满的晶体为导体，

电阻率 <$10^{-8}\Omega\cdot m$.

绝缘体：价带被电子填满而且价带和导带间的禁带宽度甚大（ΔE_g约为3－6eV）的晶体为绝缘体.

半导体：0K时价带被填满，导带空着，但价带和导带间的禁带宽度较小（ΔE_g约为0.1－1.5eV）. 常温下有电子从价带跃入导带，电导率随温度升高而明显增大，可以导电. 半导体导电分为电子导电和空穴导电. 四价元素纯硅纯锗电子和空穴数目相等，为本征半导体.

杂质半导体：

N型半导体：四价元素（如硅）半导体中掺入五价杂质（如砷），杂质能级在禁带中但靠近导带，其与导带的能量差E_D远小于禁带宽度ΔE_g. 受到热激法时，杂质价电子易向导带跃迁，供给导带电子. 这种半导体称为电子型半导体或N型半导体，电子是多子，空穴是少子. 这种杂质称为施主，其能级称为施主能级.

P型半导体：四价元素（如硅，锗）半导体中掺入三价杂质（如硼铝，铟），杂质能级在禁带中但靠进价带，其与价带顶的能量差E_A远小于禁带宽度ΔE_g. 受到热激法时，价带中的电子很容易跃入杂质

能级而在价带中产生大量空穴. 这种半导体称为空穴型半导体或 P 型半导体，电子是少子,空穴是多子. 这种杂质称为受主,其能级称为受主能级.

PN 结：在本征半导体的两部分分别参入 3 价和 5 价杂质,在 N 型和 P 型半导体的接界处形成一薄层,在这一薄层内由于电子和空穴向对方扩散形成一 PN 结，薄层内存在由 N 侧指向 P 侧的电场. PN 结有单向导电作用.

名校真题解析

1.（ 2010 年暨南大学））对于激光器中两平面镜构成的谐振腔所起的作用,不正确的是(　　)

(A)产生和维持光振荡；　　(B)使粒子数反转分布；

(C)具有限制光束的作用,使激光束的方向性好；　　(D)具有选频作用,使激光的单色性好。

解：选（B）

2.（2010 年电子科技大学）N 型半导体中杂质原子所形成的局部能级(也称施主能级),在能带结构中应处于(　　)

(A)满带中　　(B)导带中

(C)禁带中,但接近满带顶　　(D)禁带中,但接近导带底.

解：选（D).

3.（2010 年浙江工业大学）金刚石的禁带宽度按 5.5ev 计算. 试求：

(1)禁带顶和底的能级上的电子数的比值,设温度为 300K.

(2）使电子越过禁带到导带所需要的光子的最低波长.

解（1）$N_{up}=N_0e^{-\frac{E_{up}}{kT}}, \quad N_{bo}=N_0e^{-\frac{E_{bo}}{kT}}$

$$\frac{N_{up}}{N_{bo}}=e^{-\frac{\Delta E}{kT}}=Exp[-\frac{5.5\times1.6\times10^{-19}}{1.38\times10^{-23}\times300}]=4.9\times10^{-93}$$

(2)$\lambda_{max}=\dfrac{hc}{\Delta E}=\dfrac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{5.5\times1.6\times10^{-19}}=2.26\times10^{-7}m=226nm$

4.（2011 年浙江工业大学）一激光器的谐振腔长为 L，腔内介质的折射率为 n,求该谐振腔内形成振荡和放大的光的频率.

解:$nL=k\dfrac{\lambda}{2},\ k=1,2,\cdots \implies \lambda=\dfrac{2nL}{k}, \implies \nu=\dfrac{c}{\lambda}=\dfrac{c}{\frac{2nL}{k}}=\dfrac{kc}{2nL}$

典型题精讲精练

5. 已知 T = 0k 时纯硅能吸收的辐射的最长波长是$1.09\mu m$,求硅的禁带宽度,以 eV 为单位.

解:$E_g=h\nu=\dfrac{hc}{\lambda}=\dfrac{6.63\times10^{-34}\times3.0\times10^{8}}{1.09\times10^{-6}\times1.6\times10^{-19}}=1.1eV$

6. 与绝缘体相比较,半导体能带结构的特点是(　　)

(A)导带也是空带　　　　(B)满带与导带重合

(C)满带中总是有空穴,导带中总是有电子　　　　(D)禁带宽度较窄

解： 选(D)

7. 计算 1u 的质量所相当的能量为多少?

解:$1u = 1.66 \times 10^{-27}kg = 931.5MeV/c^2$

相应的能量是:

$931.5MeV = 931.5 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} = 1.492 \times 10^{-10}J.$

解题方法总结:

记住激光的的三大特点和谐振腔的作用,固体的满带, 空带,价带,导带和禁带. 导体,绝缘体和半导体能带的区别. N 型半导体和 P 型半导体的性质,PN 结的性质和作用. 解题时要认真审题,选择适当的公式,注意单位换算和数值计算.

各讲真题数目:

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五	合计
23	10	14	13	13	10	15	21	14	13	14	14	19	11	4	208

真题特点:

1. 90% 真题来自现有教材的例题和习题,题库题,各种题解书的题.

2. 相当一部分题目过去考研题考过. 各校题目也有一定的重复率.

3. 部分题目是对考过或已有的题目的文字或数据稍做改动而成.

4. 很少部分题目是出题人根据自己的教学或科研经验自拟的,有一定的难度和水平,考考生的分析问题和处理问题的应变能力.

5. 各校的题目有一定的学校和专业特点. 如科大几乎每年都有有关原子光谱项的题目,中山大学常有一道处理实验数据的题目.

对策:

1. 至少做 300 ~ 500 道现有教材,题库和一些好的题解书的题. 保证基本得分.

2. 做一定数量的过去考过的题,本讲座讲的真题估计在 500 道左右. 一定要认真看,并自己再做一遍. 争取得高分.

3. 做一些你所报考院校往年的考题和该校教师编的书的题. 争取接近满分.