

张三慧 主编

大学物理学

(第三册)

电 磁 学

张三慧 臧庚媛 华基美 编著

清华大学出版社

349205

清华大学教材 张三慧 主编

大学物理学

第三册

电 磁 学

张三慧 臧庚媛 华基美 编著



清华大学出版社

内 容 简 介

本书是清华大学教材《大学物理学》的第三册，讲述了物理学基础理论的电磁学部分，包括静止和运动电荷的电场，电荷和电流的磁场，介质中的电场和磁场，电磁感应，电磁波等。除了基本内容外，还专题介绍了大气电学、超导、等离子体等今日物理趣闻与技术和著名科学家传略，作为选讲或选读内容，以扩大学生的现代知识领域。基本内容简明扼要，选读部分通俗易懂。

本书是作为各类工科院校的物理学教材而编写的，但也可以作为其他高等院校师生及中学物理教师教学或自学参考书。

1272/20

清华大学教材 张三慧 主编
大学物理学
第三册
电 磁 学

张三慧 戚庆棠 李其美 编著

清华大学出版社出版

北京·清华园

人民教育出版社印刷厂排版

北京市昌平印刷厂印装

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本：850×1168 1/32 印张：11.5 字数：290千字

1991年3月第1版 1991年3月第1次印刷

印数：0001~8000

ISBN 7-302-00713-6/O·108

定价：3.35元

数 值 表

真空中的光速	$c = 3.00 \times 10^8 \text{m/s}$
基本电荷	$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{C}$
电子的荷质比	$e/m_e = 1.76 \times 10^{11} \text{C/kg}$
普朗克常数	$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$
库仑定律恒量	$k = 1/4\pi\epsilon_0 = 8.99 \times 10^9 \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$
真空介电常数	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$
真空磁导率	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$
玻尔半径	$a_0 = 5.29 \times 10^{-11} \text{m}$
玻尔磁子	$\mu_B = 9.27 \times 10^{-24} \text{A}\cdot\text{m}^2$
电子磁矩	$\mu_e = 9.28 \times 10^{-24} \text{A}\cdot\text{m}^2$
质子磁矩	$\mu_p = 1.41 \times 10^{-26} \text{A}\cdot\text{m}^2$
核磁子	$\mu_N = 5.05 \times 10^{-27} \text{A}\cdot\text{m}^2$
太阳辐射总功率	$P_0 = 4.2 \times 10^{26} \text{W}$
太阳辐射功率	$M = 6.9 \times 10^7 \text{W/m}^2$

目 录

第一章 静止电荷的电场	1
§ 1.1 电荷.....	1
§ 1.2 库仑定律.....	6
§ 1.3 电场和电场强度.....	11
§ 1.4 静止的点电荷的电场及其叠加.....	13
§ 1.5 电力线和电通量.....	20
§ 1.6 高斯定律.....	24
§ 1.7 利用高斯定律求静电场的分布.....	27
思考题.....	35
习题.....	35
*第二章 运动电荷的电场	39
§ 2.1 高斯定律与运动电荷.....	39
§ 2.2 电场的变换.....	42
§ 2.3 做匀速直线运动的点电荷的电场.....	47
§ 2.4 静电场对运动电荷的作用.....	51
习题.....	54
第三章 电势	56
§ 3.1 静电场的保守性.....	56
§ 3.2 电势差和电势.....	59
§ 3.3 电势叠加原理.....	63
§ 3.4 电势梯度.....	68
§ 3.5 电荷在外电场中的静电势能.....	71
*§ 3.6 电荷系的静电能.....	73

思考题	77
习题	79
今日物理趣闻 A. 大气电学	83
第四章 静电场中的导体	96
§ 4.1 导体的静电平衡条件	96
§ 4.2 静电平衡的导体上的电荷分布	98
§ 4.3 有导体存在时静电场的分析与计算	101
§ 4.4 静电屏蔽	104
思考题	106
习题	107
物理学与现代技术 I 范德格拉夫静电加速器	109
第五章 静电场中的电介质	112
§ 5.1 电介质对电场的影响	112
§ 5.2 电介质的极化	114
§ 5.3 D 的高斯定律	119
§ 5.4 电容器和它的电容	124
§ 5.5 电容器的能量和电场的能量	129
思考题	133
习题	134
物理学与现代技术 II 压电效应	138
第六章 稳恒电流	142
§ 6.1 电流和电流密度	142
§ 6.2 稳恒电流	145
§ 6.3 欧姆定律和电阻	147
§ 6.4 电动势	151
§ 6.5 有电动势的电路	154
§ 6.6 电容器的充电与放电	158

§ 6.7 电流的一种经典微观图象	161
思考题	166
习题	167
物理学与现代技术 III 常用电源	170
第七章 磁力	178
§7.1 磁力	178
§7.2 磁场与磁感应强度	181
§7.3 带电粒子在磁场中的运动	184
§7.4 载流导线在磁场中受的力	187
§7.5 霍尔效应	192
*§7.6 磁场是哪里来的?	194
思考题	202
习题	202
物理学与现代技术 IV. 磁流体发电	206
今日物理趣闻 B. 等离子体	209
第八章 磁场	224
*§ 8.1 匀速运动点电荷的磁场	224
§ 8.2 毕奥—萨伐定律	227
§ 8.3 安培环路定理	233
§ 8.4 利用安培环路定理求磁场的分布	237
§ 8.5 与变化电场相联系的磁场	240
§ 8.6 平行电流间的相互作用力	245
思考题	248
习题	249
科学家介绍 麦克斯韦	253
第九章 磁场中的磁介质	257
§ 9.1 磁介质对磁场的影响	257

§ 9.2 磁介质的磁化	259
§ 9.3 H 的环路定理	265
§ 9.4 铁磁质	269
§ 9.5 简单磁路	272
思考题	275
习题	276
物理学与现代技术 V 磁记录	280
第十章 电磁感应	283
§ 10.1 法拉第电磁感应定律	283
§ 10.2 动生电动势	286
§ 10.3 感生电动势和感应电场	291
§ 10.4 互感	294
§ 10.5 自感	296
§ 10.6 磁场的能量	299
思考题	303
习题	304
科学家介绍 法拉第	307
今日物理趣闻 C. 超导电性	312
第十一章 麦克斯韦方程组和电磁辐射	328
§ 11.1 麦克斯韦方程组	328
*§ 11.2 加速电荷的电场	330
*§ 11.3 加速电荷的磁场	334
*§ 11.4 电磁波的能量	337
*§ 11.5 电磁波的动量	341
习题	345
附录 磁单极	347
习题答案	350

第一章 静止电荷的电场

本章要求

1. 理解电荷守恒和电荷的相对论不变性的意义。
2. 理解库仑定律和电力叠加原理的意义。
3. 理解电场的概念、电场强度的定义和电场叠加原理的意义。
4. 能用点电荷电场的叠加法计算简单电荷分布的电场。
5. 理解电通量的概念和高斯定律的意义以及它与库仑定律的关系。
6. 掌握用高斯定律求解有特定对称性的电荷分布的电场的方法,特别是带电的球、线、板的电场。
7. 能计算静电场对静止的电荷的作用力。

§ 1.1 电 荷

电磁学是研究电磁现象的规律的学科。关于电磁现象的观察记录,可以追溯到公元前六世纪希腊学者泰勒斯 (Thales)。他观察到用布摩擦过的琥珀能吸引轻微物体。在我国,最早是在公元前四到三世纪战国时期《韩非子》中有关“司南”(一种用天然磁石做成的指向工具)和《吕氏春秋》中有关“慈石召铁”的记载。公元一世纪王充所著《论衡》一书中记有“顿牟缀芥,磁石引针”字句(顿牟即琥珀,缀芥即吸拾轻小物体)。但对电磁现象的系统的研究,只

能说在十六世纪才开始。在这一世纪末年，吉尔伯特 (William Gilbert, 1540—1603) 对“顿牟缀芥”现象以及磁石的相互作用做了较仔细的观察和记录。electricity(电)这个字就是他根据希腊字 $\eta\lambdaεκτρον$ (原意琥珀)创造的。在我国，“电”字最早见于周朝(公元前八世纪)遗物青铜器“番生簋”上的铭文中，是雷电这种自然现象的观察记录。对“电”字赋以科学的含义当在近代西学东渐之后。

物体能产生电磁现象，现在都归因于物体带上了电荷以及这些电荷的运动。通过对电荷(包括静止的和运动的电荷)的各种相互作用和效应的研究，人们现在认识到电荷的基本性质有以下几方面：

1. 电荷的种类

电荷有两种，同种电荷相斥，异种电荷相吸。美国物理学家富兰克林(Benjamin Franklin 1706—1790)首先以正电荷、负电荷的名称来区分两种电荷，这种命名法一直延续到现在。宏观带电体所带电荷种类的不同根源于组成它们的微观粒子所带电荷种类的不同：电子带负电荷；质子带正电荷；中子不带电荷。现代物理实验证实，电子的电荷集中在半径小于 10^{-18}m 的小体积内。因此，电子被当成是一个无内部结构而有有限质量和电荷的“点”。通过高能电子束散射实验测出的质子和中子内部的电荷分布如图 1.1 和图 1.2 所示。质子中只有正电荷，都集中在半径约为 10^{-15}m

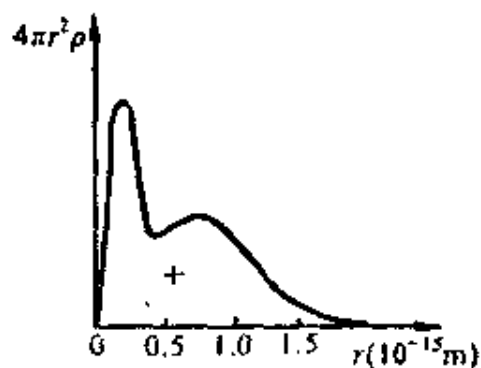


图 1.1 质子内电荷分布图

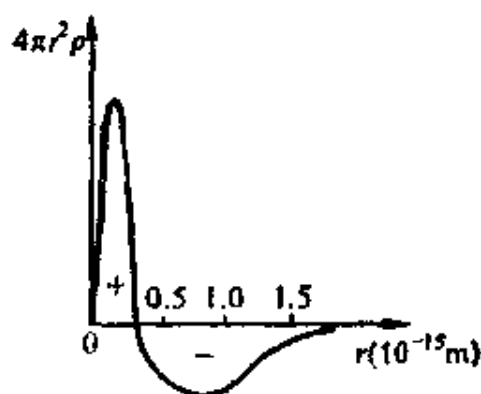


图 1.2 中子内电荷分布图

的体积内。中子内部也有电荷，靠近中心为正电荷，靠外为负电荷；正负电荷电量相等，所以对外不显带电。

带电体所带电荷的多少叫电量。谈到电量，就涉及如何测量它的问题。一个电荷的量值大小只能通过该电荷所产生的效应来测量，这一点以后会讲到，现在我们先假定电量的计量方法已有了。电量常用 Q 或 q 表示，在国际单位制(SI)中，它的单位为库仑，简记作 C。正电荷电量取正值，负电荷电量取负值。一个带电体所带总电量为其所带正负电量的代数和。

2. 电荷的量子性

实验证明，在自然界中，电荷总是以一个基本单元的整数倍出现。电荷的这个特性叫做电荷的量子性。电荷的基本单元就是一个电子所带电量的绝对值，常以 e 表示。经测定

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$$

电荷具有基本单元的概念最初是根据电解现象中通过溶液的电量 and 析出物质的质量之间的关系提出的。法拉第 (Michael Faraday 1791—1867)、阿累尼乌斯 (Arrhenius 1859—1927) 等都为此做过重要贡献。他们的结论是：一个离子的电量只能是一个基元电荷的电量的整数倍。直到1890年斯通尼 (John Stone Stoney 1826—1911) 才引入“电子” (Electron) 这一名称来表示带有负的基元电荷的粒子。其后，1913年密立根 (Robert Anolvews Millikan 1868—1953) 设计了有名的油滴试验，直接测定了此基元电荷的量值。现在已经知道许多基本粒子都带有正的或负的基元电荷。例如，一个正电子，一个质子都各带有一个正的基元电荷。一个反质子，一个负介子则带有一个负的基元电荷。微观粒子所带的基元电荷数常叫做它们各自的电荷数，都是正整数或负整数。近代物理从理论上预言基本粒子由若干种夸克或反夸克组

成,每一个夸克或反夸克可能带有 $\pm\frac{1}{3}e$ 或 $\pm\frac{2}{3}e$ 的电量。然而至今单独存在的夸克尚未在实验中发现。

本章大部分章节讨论电磁现象的宏观规律,所涉及的电荷常常是基元电荷的许许多多倍。在这种情况下,我们将只从平均效果上考虑,认为电荷连续地分布在带电体上,而忽略电荷的量子性所引起的微观起伏。尽管如此,在阐明某些宏观现象的微观本质时,还是要从电荷的量子性出发。

在以后的讨论中经常用到点电荷这一概念。当一个带电体本身的线度比所研究的问题中所涉及的距离小很多时,该带电体的形状与电荷在其上的分布状况均无关紧要,该带电体就可看作一个带电的点,叫点电荷。由此可见,点电荷是个相对的概念。至于带电体的线度比问题所涉及的距离小多少时,它才能被当作点电荷,这要依问题所要求的精度而定。当在宏观意义上谈论电子,质子等带电粒子时,完全可以把它们视为点电荷。

3. 电荷守恒

实验指出,对于一个系统,如果没有净电荷出入其边界,那该系统的正、负电荷的电量的代数和将保持不变,这就是**电荷守恒定律**。宏观物体的带电、电中和以及物体内的电流等现象实质上是由于微观带电粒子在物体内部运动的结果。因此,电荷守恒实际上也就是在各种变化中,系统内粒子的总电荷数守恒。

现代物理研究已表明,在粒子的相互作用过程中,电荷是可以产生和消失的。然而电荷守恒并未因此而遭到破坏。例如,一个高能光子与一个重原子核作用时,该光子可以转化为一个正电子和一个负电子(这叫**电子对的“产生”**);而一个正电子和一个负电子在一定条件下相遇,又会同时消失而产生两个或三个光子(这叫**电子对的“湮灭”**)。在已观察到的各种过程中,正、负电荷总是成

对出现或成对消失。由于光子不带电,正、负电子又各带有等量异号电荷,所以这种电荷的产生和消失并不改变系统中的电荷数的代数,因而电荷守恒定律仍然保持有效。^[注]

4. 电荷的相对论不变性

实验证明,一个电荷的电量与它的运动状态无关。较为直接的实验例子是比较氢分子和氦原子的电中性。氢分子和氦原子都有两个电子作为核外电子,这些电子的运动状态相差不大。氢分子还有两个质子,它们是作为两个原子核在保持相对距离约为 0.7\AA ($1\text{\AA}=10^{-10}\text{m}$) 的情况下转动的(图 1.3)。氦原子中也有两个质子,但它们组成一个原子核,两个质子紧密地束缚在一起运动(图 1.4)。氦原子中两个质子的能量比氢分子中两个质子的能量大得

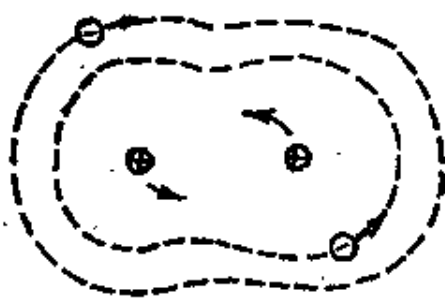


图 1.3 氢分子结构示意图

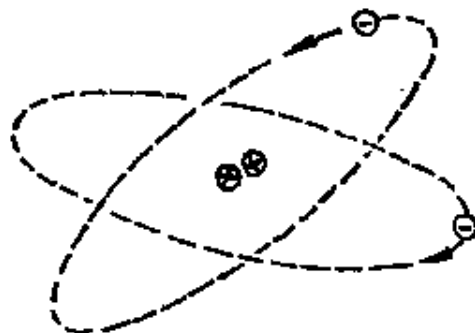


图 1.4 氦原子结构示意图

多(一百万倍的数量级),因而两者的运动状态有显著的差别。如果电荷的电量与运动状态有关,氢分子中质子的电量就应该和氦原子中质子的电量不同,但两者的电子的电量是相同的,因此,两者就不可能都是电中性的。但是实验证实,氢分子和氦原子都精确地是电中性的,它们内部正、负电荷在数量上相差小于 10^{20} 分之

[注]近年来不断有电荷不守恒的实验报导。电子衰变时只能产生中微子,所以电子的衰变就意味着电荷不守恒。有人做实验测知电子的平均寿命要大于 10^{28} 年,这已大大超过宇宙年龄(10^{10} 年),所以实际上电子还是不衰变。在 $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr} + \text{中性粒子的过程中有中子衰变的过程。有人分析此实验结果时得出中子的电荷不守恒,但衰变几率与电荷守恒的衰变几率之比为 } 7.9 \times 10^{-21}。这说明在这一过程中即使电荷守恒破坏了,也只是很微小的破坏。$

一。这就说明,质子的电量是与其运动状态无关的。

还有其它实验,也证明电荷的电量与其运动状态无关。另外,根据这一结论导出的大量结果都与实验结果相符合,这也反过来证明了这一结论的正确性。

由于在不同的参照系中观察,同一个电荷的运动状态不同,所以电荷的电量与其运动状态无关,也可以说成是,在不同的参照系内观察,同一带电粒子的电量不变。电荷的这一性质叫**电荷的相对论不变性**。

§ 1.2 库仑定律

在发现电现象后的两千多年的长时期内,人们对电的认识一直停留在定性阶段。从 18 世纪中叶开始,不少人着手研究电荷之间作用力的定量规律,最先是研究静止电荷之间的作用力。研究静止电荷之间的相互作用的理论叫**静电学**。它是以 1785 年法国科学家库仑(Charles Augustin de Coulomb 1736—1806)通过实验总结出的规律——库仑定律为基础的。这一定律的表述如下:真空中两个静止的点电荷之间的作用力(斥力或吸力)与这两个电荷所带电量的乘积成正比,与它们之间距离的平方成反比,作用力的方向沿着这两个点电荷的连线。这一规律用矢量公式表示为

$$F_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} \quad (1.1)$$

式中 q_1 和 q_2 分别表示两个点电荷的电量(带有正、负号), r_{21} 表示两个点电荷之间的距离, \hat{r}_{21} 则表示从电荷 q_1 指向电荷 q_2 的单位矢量(图 1.5); k 为比例系数,依公式中各量所选取的单位而定。 F_{21} 表示电荷 q_2 受电荷 q_1 的作用力。当两个点电荷 q_1 与 q_2 同号时,

F_{21} 与 \hat{r}_{21} 同方向,表明电荷 q_2 受 q_1 的斥力;当 q_1 与 q_2 反号时, F_{21} 与 \hat{r}_{21} 的方向相反,表示 q_2 受 q_1 的引力。由此式还可以看出,两个静止的点电荷之间作用力符合牛顿第三定律,即

$$F_{21} = -F_{12} \quad (1.2)$$

在国际单位制(SI)中,电量的单位为库仑(C)(它由电流强度的单位——安培(A)导出,而安培又是用载电流的导线之间的作用力来定义的。这个定义将在第七章中介绍)。在这种单位制中,距离 r 用米(m),力 F 用牛顿(N)作单位,实验测定比例常数 k 的数值和单位为

$$k = 8.9880 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \approx 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$$

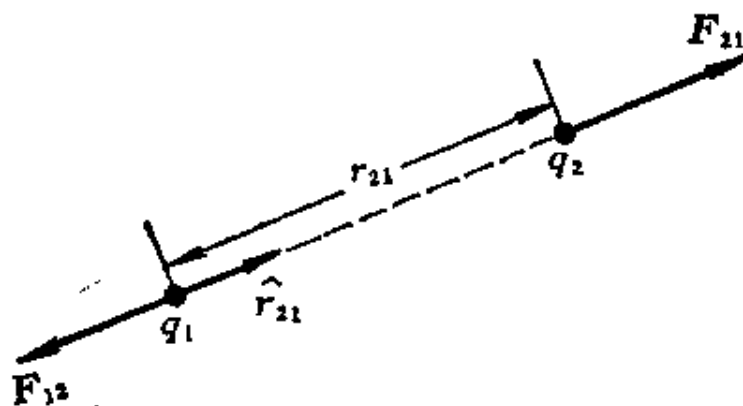


图 1.5 库仑定律

通常还引入另一常数 ϵ_0 来代替 k 使

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

于是,真空中库仑定律的形式就可写成

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} \quad (1.3)$$

这里引入的 ϵ_0 叫真空的介电常数,在国际单位制中它的数值和单位是

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

在库仑定律表示式中引入“ 4π ”因子的作法，称为单位制的有理化。这样作的结果虽然使库仑定律的形式变得复杂些，但却使以后经常用到的电磁学规律的表示式因不出现“ 4π ”因子而变得简单些。这种作法的优越性，在今后的学习中读者是会逐步体会到的。

实验证实，点电荷放在空气中时，其相互作用的电力和在真空中相差极小，故(1.3)式的库仑定律对空气中的点电荷亦成立。

库仑定律是关于一种基本力的定律。它的正确性不断经历着实验的考验。设定律分母中 r 的指数为 $2+\alpha$ ，人们曾设计了各种实验来确定（一般是间接地） α 的上限。1772年卡文迪许的静电实验给出 $|\alpha| \leq 0.02$ 。约百年后麦克斯韦的类似实验给出 $|\alpha| \leq 5 \times 10^{-5}$ 。1971年威廉斯等人改进该实验得出 $|\alpha| \leq |2.7 \pm 3.1| \times 10^{-16}$ 。这些都是在实验室范围 ($10^{-3} - 10^{-1} \text{m}$) 内得出的结果。对于很小的范围，卢瑟福的 α 粒子散射实验（1910年）证实小到 10^{-15}m 的范围，现代高能电子散射实验更证实小到 10^{-17}m 的范围，库仑定律仍然精确地成立。大范围的结果是通过人造地球卫星研究地球磁场时得到的。它给出库仑定律精确地适用于大到 10^7m 的范围，因此一般就认为在更大的范围内库仑定律仍然有效。

令人感兴趣的是现代量子电动力学理论指出，库仑定律中分母 r 的指数与光子的静止质量有关：如果光子的静止质量为零，则该指数严格地为 2。现在的实验给出光子的静止质量上限为 10^{-46}kg ，这差不多相当于 $|\alpha| \leq 10^{-16}$ 。

[例 1] 氢原子中电子和质子的距离为 $5.3 \times 10^{-11} \text{m}$ 。求此二粒子间的电力和万有引力各为多大？

解：由于电子的电荷是 $-e$ ，质子的电荷为 $+e$ ，而电子的质量 $m_e = 9.1 \times$

10^{-31} kg, 质子的质量 $m_p = 1.7 \times 10^{-27}$ kg, 所以由库仑定律, 求得两粒子间的静电力大小为

$$F_e = \frac{1^7 \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{9.0 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 8.1 \times 10^{-8} \text{ N}$$

由万有引力定律, 求得两粒子间的万有引力

$$\begin{aligned} F_g &= G \frac{m_e m_p}{r^2} = \frac{6.7 \times 10^{-11} \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.7 \times 10^{-27}}{(5.3 \times 10^{-11})^2} \\ &= 3.7 \times 10^{-47} \text{ N} \end{aligned}$$

由计算结果可以看出, 氢原子中电子与质子的相互作用的静电力远较万有引力为大, 前者约为后者的 10^{39} 倍。

[例 2] 卢瑟福(E. Rutherford 1871—1937) 在他的 α 粒子散射实验中发现, α 粒子具有足够高的能量, 使它能达到与金原子核的距离为 2×10^{-14} m 的地方。试计算在这一距离时, α 粒子所受金原子核的斥力的大小。

解: α 粒子所带电量为 $2e$, 金原子核所带电量为 $79e$, 由库仑定律可得此斥力为

$$\begin{aligned} F &= \frac{2e \times 79e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{9.0 \times 10^9 \times 2 \times 79 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{(2 \times 10^{-14})^2} = 91 \text{ N} \end{aligned}$$

此力约相当于 10 kg 物体所受的重力。此例说明, 在原子尺度内电力是非常强的。

库仑定律只讨论两个静止的点电荷间的作用力, 当考虑两个以上的静止的点电荷之间的作用时, 就必须补充另一个实验事实: 两个点电荷之间的作用力并不因第三个点电荷的存在而有所改变。因此, 两个以上的点电荷对一个点电荷的作用力等于各个点电荷单独存在时对该点电荷的作用力的矢量和。这个结论叫电力的叠加原理。

图 1.6 画出了两个点电荷对第三个点电荷 q_0 的作用力的叠加情况。电荷 q_1 和 q_2 作用在电荷 q_0 上的力分别为 F_{01} 和 F_{02} , 因而 q_0 受到的合力为

$$F = F_{10} + F_{02}$$

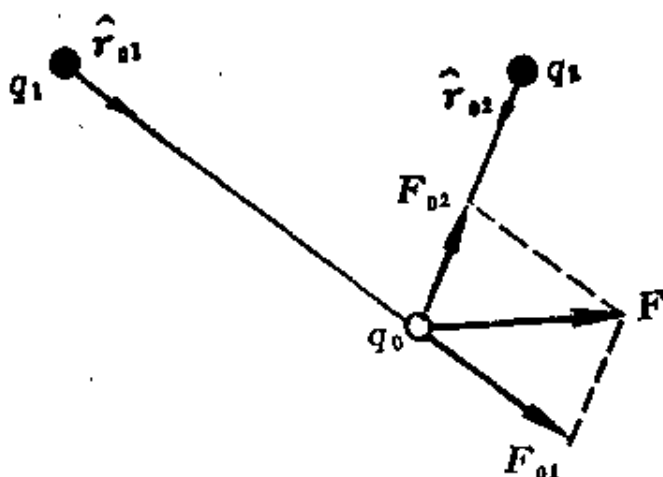


图 1.6 静电力叠加原理

$$= \frac{q_0 q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{01}^2} \hat{r}_{01} + \frac{q_0 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{02}^2} \hat{r}_{02}$$

式中 \hat{r}_{01} 和 \hat{r}_{02} 分别表示从点电荷 q_1 和 q_2 指向点电荷 q_0 的单位矢量。

对于由 n 个静止的点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 组成的电荷系, 若以 F_1, F_2, \dots, F_n 分别表示它们单独存在时施于另一静止的点电荷 q_0 上的电力(这些力都可以用库仑定律计算), 则由电力的叠加原理可知, q_0 受到的总电力应为

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i \quad (1.4)$$

由库仑定律(1.3)式, 可得

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{q_0 q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_i \quad (1.5)$$

式中 r_{0i} 为 q_0 与 q_i 之间的距离, \hat{r}_i 为从点电荷 q_i 指向 q_0 的单位矢量。

库仑定律与电力的叠加原理是关于静止电荷相互作用的两个基本实验定律, 应用它们原则上可以解决静电学中的全部问题。

§ 1.3 电场和电场强度

设空间有一固定不动的点电荷系 q_1, q_2, \dots, q_n 。将另一点电荷 q_0 移至该电荷系周围的 $P(x, y, z)$ 点(称场点)处并保持其静止。现在求 q_0 受该电荷系的作用力。这力应该由(1.5)式给出。由于电荷系作用于电荷 q_0 上的合力与电荷 q_0 的电量成正比,所以比值 F/q_0 只取决于点电荷系的结构(包括每个点电荷的电量以及各点电荷之间的相对位置)和电荷 q_0 所在的位置 (x, y, z) , 而与电荷 q_0 的量值无关。因此,可以认为比值 F/q_0 反映了电荷系周围空间各点的一种特殊性质,它能给出该电荷系对静止于各点的其它电荷 q_0 的作用力。这时就说该点电荷系周围空间存在着由它所产生的电场。电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 叫场源电荷。而比值 F/q_0 就表示电场中各点的强度,叫电场强度(简称场强)。通常用 E 表示电场强度,于是就有定义

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (1.6)$$

此式表明,电场中任意点的电场强度等于静止于该点的单位正电荷所受的电力。在电场中各点的 E 可以各不相同。因此一般地说, E 是空间坐标的矢量函数。在考察电场时,公式(1.6)中的 q_0 起到检验电场的作用,叫检验电荷。

在国际单位制中,电场强度的单位为牛/库(N/C),以后将证明,这个单位和伏/米(V/m)是等价的。

将(1.4)式代入(1.6)式,可得

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{q_0}$$

式中 F_i/q_0 是电荷 q_i 单独存在时在 P 点产生的电场强度 E_i 。因此，上式可写成

$$E = \sum_{i=1}^n E_i \quad (1.7)$$

此式表示：在 n 个点电荷产生的电场中某点的电场强度等于每个点电荷单独存在时在该点所产生的电场强度的矢量和。这个结论叫场强叠加原理。

由静止的场源电荷产生的电场叫静电场。(1.6) 式给出了静电场的电场强度的定义。静电场对电荷的作用力叫静电力。在已知静电场中各点电场强度 E 的条件下，可由(1.6) 式直接求得置于其中的任意点处的静止的点电荷 q_0 受的力为

$$F = q_0 E \quad (1.8)$$

这里，可以提出这样的问题：当用(1.8)式求电荷 q_0 受的力时，必须先求出 E 来，而 E 是由(1.6)式和(1.5) 式求出的。再将这样求出的 E 代入(1.8)式求 F ，我们又回到了(1.5)式。既然如此，为什么要引入电场这一概念呢？

这涉及到人们如何理解电荷间的相互作用。在法拉第之前，人们认为两个电荷之间的相互作用力和两个质点之间的万有引力一样，都是一种超距作用。即一个电荷对另一个电荷的作用力是隔着一定空间直接给予的，不需要中间什么媒质传递，也不需要时间，这种作用方式可表示为

$$\text{电荷} \rightleftharpoons \text{电荷}$$

在上一世纪 30 年代，法拉第提出另一种观点，认为一个电荷周围存在着由它所产生的电场，另外的电荷受这一电荷的作用力就是通过这电场给予的。这种作用方式可以表示为

$$\text{电荷} \rightleftharpoons \text{电场} \rightleftharpoons \text{电荷}$$

这样引入的电场对电荷周围空间各点赋予一种局域性，即：如

果知道了某一小区域的 E , 无需更多的要求, 我们就可以知道任意电荷在此区域内的受力情况, 从而可以进一步知道它的运动。这时, 也不需要知道是些什么电荷产生了这个电场。如果知道在空间各点的电场, 我们就有了对这整个系统的完整的描述, 并可由它揭示出所有电荷的位置和大小。这种局域性场的引入是物理概念上的重要发展。

近代物理学的理论和实验完全证实了场的观点的正确性。电场以及磁场已被证明是一种客观实在, 它们运动(或传播)的速度是有限的, 这个速度就是光速。电磁场与实物一样具有能量、质量和动量。场与实物是物质存在的两种不同形式。

尽管如此, 在研究静止电荷的相互作用时, 电场的引入可以认为只是描述电荷相互作用的一种方便方法。而在研究有关运动电荷, 特别是其运动迅速改变的电荷的现象时, 电磁场的实在性就突出地显示出来了。

§ 1.4 静止的点电荷的电场及其叠加

现在讨论在给定的固定不动的电荷分布情况下, 求解电场强度的分布问题。先讨论一个点电荷的电场强度分布。现计算距静止电荷 q 的距离为 r 的 P 点处的场强。设想把一个检验电荷 q_0 放在 P 点, 根据库仑定律, q_0 受到的电场力为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r^2} \hat{r}$$

式中 \hat{r} 是从场源电荷 q 指向点 P 的单位矢量。由场强定义式 (1.6), P 点场强为

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (1.9)$$

或写成

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \quad (1.9a)$$

这就是点电荷场强分布公式。式中若 $q > 0$, 则 \mathbf{E} 与 \mathbf{r} 同向, 即在正电荷周围的电场中, 任意点的场强沿该点矢径方向; 若 $q < 0$, 则 \mathbf{E} 与 \mathbf{r} 反向, 即在负电荷周围的电场中, 任意点的场强沿该点矢径的反方向 (见图 1.7)。此式还说明静止的点电荷的电场具有球对称性。

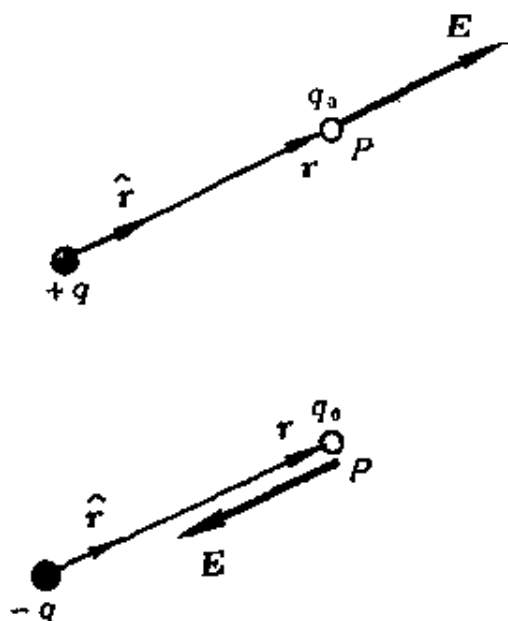


图 1.7 静止的点电荷的电场

将点电荷场强公式 (1.9) 式代入 (1.7) 式 (或将 (1.5) 式代入 (1.6) 式) 可得点电荷系 q_1, q_2, \dots, q_n 的电场中任一点的场强为

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \quad (1.10)$$

式中 r_i 为从 q_i 到场点的距离, $\hat{\mathbf{r}}_i$ 为从 q_i 指向场点的单位矢量。

若带电体的电荷是连续分布的, 可认为该带电体的电荷是由许多无限小的电荷元 dq 组成的, 而每个电荷元都可以当作点电荷处理。设其中任一个电荷元 dq 在 P 点产生的场强为 $d\mathbf{E}$, 按 (1.9) 式有

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

式中 r 是从电荷元 dq 到场点 P 的距离, 而 $\hat{\mathbf{r}}$ 是这一方向上的单位矢量。整个带电体在 P 点所产生的总场强可用积分计算为

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.11)$$

由上述可知,对于由许多电荷组成的电荷系来说,如果电荷分布为已知,那么根据场强叠加原理,并利用点电荷场强公式,就可求出电场中任意点的场强,也就是求出电场的空间分布。下面举几个例子。

[例 1] 求电偶极子中垂线上任一点的电场强度。

解: 相隔一定距离的等量异号点电荷, 当点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的距离 l 比从它们到所讨论的场点的距离小得多时, 此电荷系统称电偶极子。如图 1.8 所示, 用 l 表示从负电荷到正电荷的矢量线段。电量 q 与 l 的乘积叫电偶极矩或电矩, 用 p 表示, 即 $p = ql$ 。

设 $+q$ 和 $-q$ 到偶极子中垂线上任一点 P 处的矢量分别为 r_+ 和 r_- , 由 (1.9a) 式, $+q$ 、 $-q$ 在 P 点处的场强 E_+ 、 E_- 分别为

$$E_+ = \frac{qr_+}{4\pi\epsilon_0 r_+^3}$$

$$E_- = \frac{qr_-}{4\pi\epsilon_0 r_-^3}$$

在高偶极子甚远时, 即当 $r \gg l$ 时, $r_+ = r_- \approx r$, 此处 r 为从电偶极子中心到 P 点的距离。该处的总场强为

$$E = E_+ + E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (r_+ - r_-)$$

由于 $r_+ - r_- = -l$, 所以上式化为

$$E = \frac{-ql}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

利用上述电矩的定义, 这一结果又可写成

$$E = \frac{-p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.12)$$

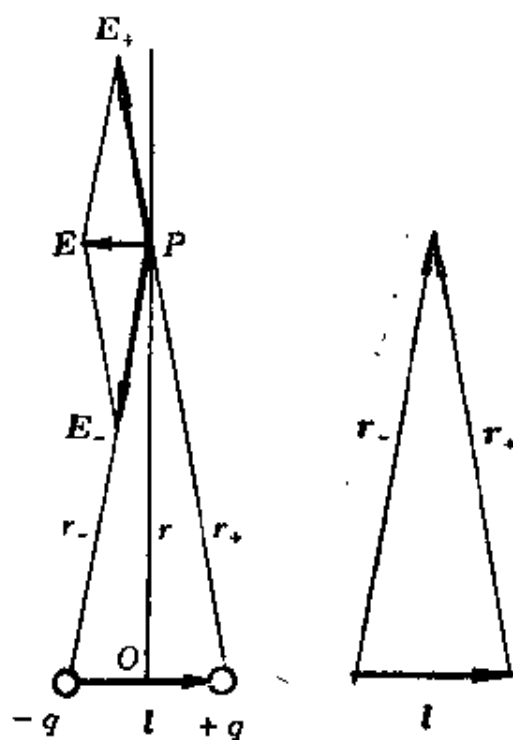


图 1.8 电偶极子的电场

此结果表明, 电偶极子中垂线上距离电偶极子中心较远处各点的电场强度与电偶极子的电矩成正比, 与该点离电偶极子中心的距离的三次方成反比, 方向与电矩的方向相反。

[例 2] 一根带电直棒, 如果我们限于考虑离棒的距离比棒的截面尺寸大得多的地方的电场, 则该带电直棒就可以看作一条带电直线。今设一均匀

带电直线, 长为 L , 线电荷密度(即单位长度上的电荷)为 λ (设 $\lambda > 0$), 求直线中垂线上一点的场强(图 1.9)。

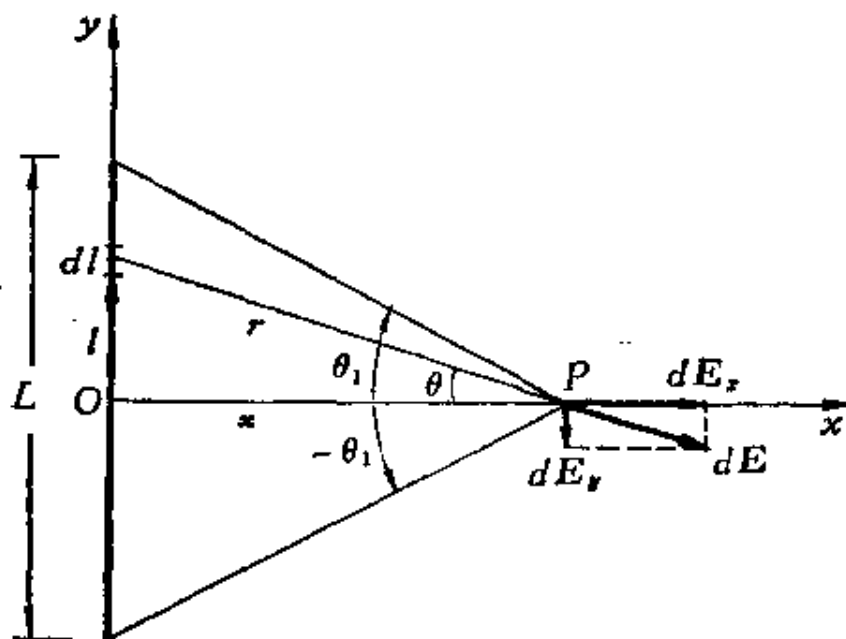


图 1.9 带电直线的电场

解: 在带电直线上任取一长为 dl 的电荷元, 其电量 $dq = \lambda dl$ 。以带电直线中点 O 为原点, 取坐标轴 Ox, Oy 如图 1.9 所示。电荷元 dq 在 P 点的场强为 dE , dE 沿两个轴方向的分量分别为 dE_x 和 dE_y 。由于电荷分布对于 OP 直线的对称性, 所以全部电荷在 P 点的场强沿 y 轴方向的分量之和为零, 因而 P 点的总场强 E 应沿 x 轴方向, 并且

$$E = \int dE_x$$

现在

$$dE_x = dE \cos\theta = \frac{\lambda dl x}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

由于 $l = x \tan\theta$, 从而 $dl = \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta$ 。由图(1.9)知 $r = \frac{x}{\cos\theta}$, 所以

$$dE_x = \frac{\lambda dl x}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta}{x} d\theta$$

由于对整个带电直线来说, θ 的变化范围是从 $-\theta_1$ 到 $+\theta_1$, 所以

$$E = \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta}{x} d\theta = \frac{\lambda \sin\theta_1}{2\pi\epsilon_0 x}$$

将 $\sin\theta_1 = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + x^2}}$ 代入, 可得

$$E = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 x^2 (1 + L^2/4x^2)^{3/2}}$$

此电场的方向垂直于带电直线而指向远离直线的一方。

上式中当 $x \ll L$ 时, 即在带电直线中部近旁区域内,

$$E \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \quad (1.13)$$

此时相对于距离 x , 可将该带电直线看作“无限长”。因此, 可以说, 在一无限长带电直线周围任意点的场强与该点到带电直线的距离的一次方成反比。

当 $x \gg L$ 时, 即在远离带电直线的区域内

$$E \approx \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

其中 $q = \lambda L$ 为带电直线所带的总电量。此结果显示, 离带电直线很远处该带电直线的电场相当于一个点电荷 q 的电场。

[例 3] 一均匀带电细圆环, 半径为 R , 所带总电量为 q (设 $q > 0$), 求圆环轴线上任一点的场强。

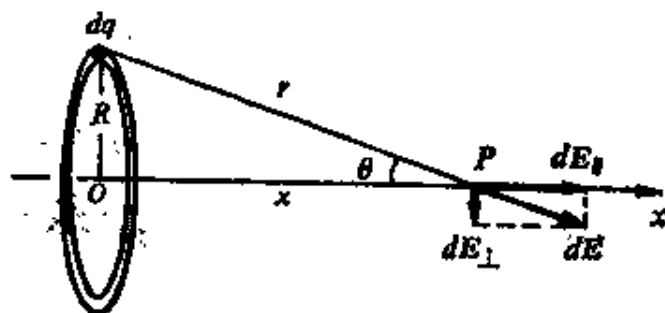


图 1.10 均匀带电细圆环轴上的电场

解: 如图 1.10 所示, 把圆环分割成许多小段, 任取一小段 dl , 其上带电量为 dq 。设此电荷元 dq 在 P 点的场强为 dE , 并设 P 点与 dq 的距离为 r , 而 $\overline{OP} = x$ 。 dE 沿平行和垂直于轴线的两个方向的分量分别为 dE_{\parallel} 和 dE_{\perp} 。由于圆环电荷分布对于轴线对称, 所以圆环上全部电荷的 dE_{\perp} 分量的矢量和为零, 因而 P 点的场强沿轴线方向, 且

$$E = \int dE_{\parallel}$$

式中积分为对环上全部电荷 q 积分。

由于

$$dE_{\parallel} = dE \cos\theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta$$

其中 θ 为 dE 与 x 轴的夹角, 所以

$$E = \int_L dE_x = \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta$$

$$= \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_q dq$$

此式中的积分值即为整个环上的电荷 q , 所以

$$E = \frac{q \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

考虑到 $\cos\theta = x/r$, 而 $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, 可将上式改写成

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

E 的方向为沿着轴线指向远方。

当 $x \gg R$ 时, $(x^2 + R^2)^{3/2} \approx x^3$, 则 E 的大小为

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{x^2}$$

此结果说明, 远离环心处的电场也相当于一个点电荷 q 所产生的电场。

[例 4] 一带电平板, 如果我们限于考虑离板的距离比板的厚度大得多的地方的电场, 则该带电板就可以看作一个带电平面。今设一均匀带电圆面, 半径为 R , 面电荷密度(即单位面积上的电荷)为 σ (设 $\sigma > 0$), 求圆面轴线上任一点的场强(图 1.11)。

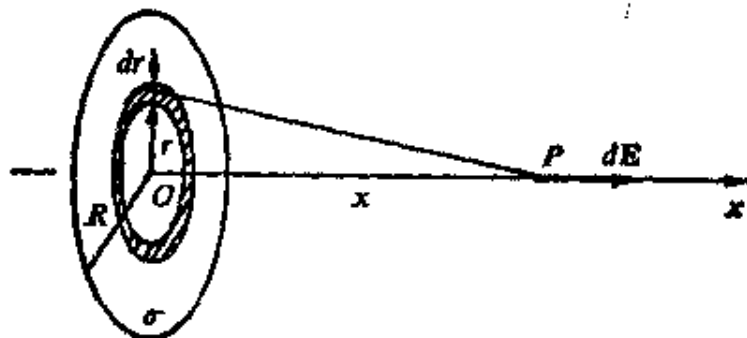


图 1.11 均匀带电圆面轴线上的电场

解: 带电圆面可看成由许多同心的带电细圆环组成。取一半径为 r , 宽度为 dr 的细圆环, 由于此环带有电荷 $\sigma \cdot 2\pi r dr$, 所以由上例可知, 此圆环电荷在 P 点的场强大小为

$$dE = \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr \cdot x}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}}$$

方向沿着轴线指向远方。由于组成圆面的各圆环的电场 dE 的方向都相同,

所以 P 点的场强为

$$E = \int dE = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right]$$

其方向也垂直于圆面指向远方。

当 $x \ll R$ 时,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.14)$$

此时相对于 x , 可将该带电圆面看作“无限大”带电平面。因此,可以说,在一无限大均匀带电平面附近,电场是一个均匀场,其大小由(1.14)式给出。

当 $x \gg R$ 时,

$$E \approx \frac{\pi R^2 \sigma}{4\pi \epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 x^2}$$

式中 $q = \sigma \pi R^2$ 为圆面所带的总电量。这一结果也说明,在远离带电圆面处的电场也相当于一个点电荷的电场。

[例5] 计算电偶极子在外电场中所受的力矩。

解: 一个电偶极子在外电场中要受到力矩的作用。以 E 表示均匀电场的场强, l 表示从 $-q$ 到 $+q$ 的矢量线段, 偶极子中点 O 到 $+q$ 与 $-q$ 的矢径分别为 r_+ 和 r_- , 如图 1.12 所示。正、负电荷所受力分别为 $F_+ = qE_+$, $F_- = -qE$, 它们对于偶极子中点 O 的力矩之和为

$$\begin{aligned} M &= r_+ \times F_+ + r_- \times F_- = qr_+ \times E + (-q)r_- \times E \\ &= q(r_+ - r_-) \times E = ql \times E \end{aligned}$$

即

$$M = p \times E$$

力矩 M 的作用总是使电偶极子转向电场 E 的方向。

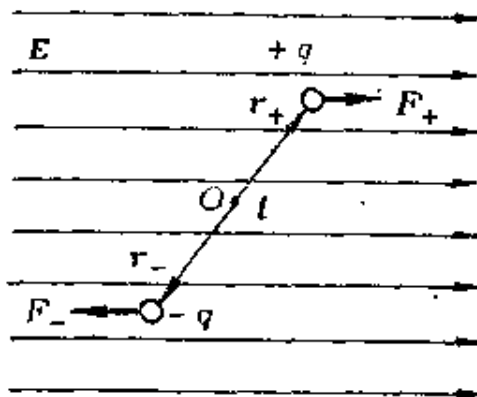


图 1.12 电偶极子在外电场中受力情况

§ 1.5 电力线和电通量

为了形象化地描绘电场在空间的分布，可画电力线图。电力线是按下述规定在电场中画出的一系列假想的曲线：曲线上每一点的切线方向表示该点场强的方向；曲线的疏密表示场强的大小。定量地说，为了表示电场中某点场强的大小，设想通过该点画一个垂直于电场方向的面元 dS_{\perp} ，如图 1.13 所示，通过此面元画 $d\Phi_e$ 条电力线，使得

$$E = \frac{d\Phi_e}{dS_{\perp}} \quad (1.15)$$

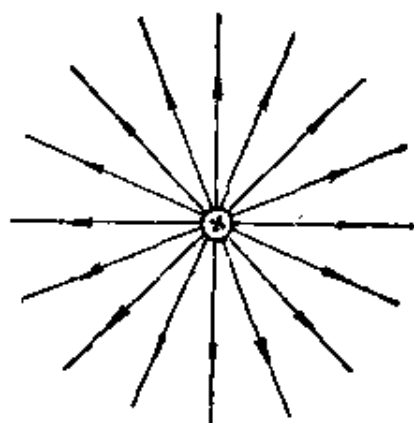
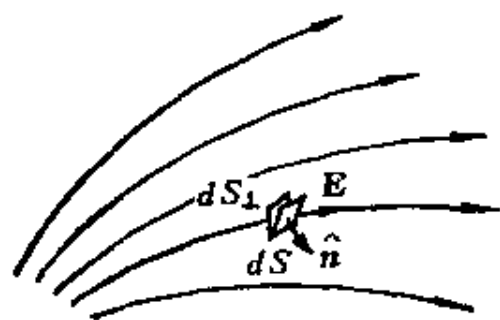


图 1.13 电力线数密度与场强大小的关系

图 1.14 静止的点电荷的电力线

这就是说，电场中某点电场强度的大小等于该点处的电力线数密度，即该点附近垂直于电场方向的单位面积所通过的电力线条数。

图 1.14—图 1.16 画出了几种不同分布的电荷所产生的电场的电力线。

电力线图形也可以通过实验显示出来。将一些针状晶体碎屑撒到绝缘油中使之悬浮起来。加以外电场后，这些小晶体会因感应而成为小的电偶极子。它们在电场力的作用下就会转到电场方向排列起来，于是就显示出了电力线的图形（图 1.17 和图 1.18）

§ 1.4 中(1.10)式或(1.11)式给出了场源电荷和它们的电场

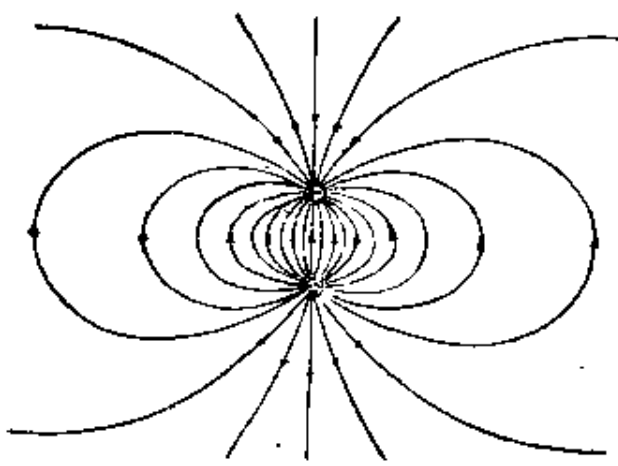


图 1.15 电偶极子的电力线

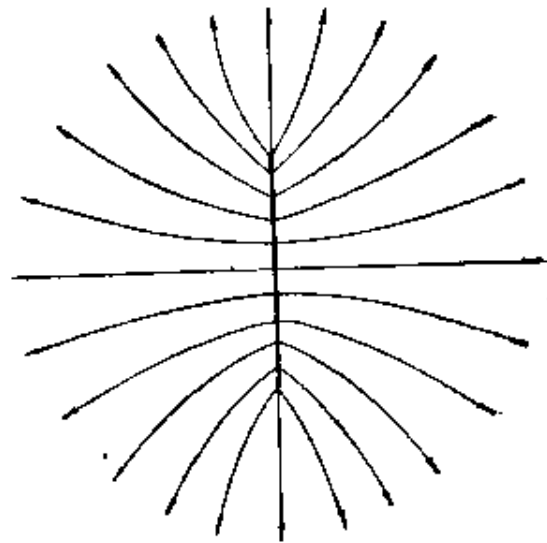


图 1.16 均匀带正电直线的电力线

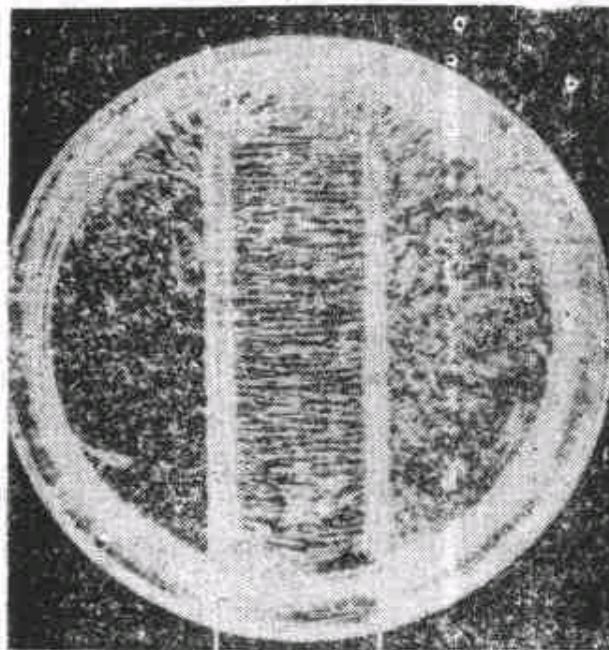


图 1.17 带异号电荷的两平行导体板的电力线显示

分布的关系。利用电力线概念，可以用另一种形式——高斯定律把这一关系表示出来。这后一种形式还有更普遍的理论意义。为了导出这一形式，我们引入电通量的概念。

如图 1.19 所示，以 dS 表示电场中某一个设想的面元。通过此面元的电力线条数就定义为通过这一面元的电通量。为了求出这一电通量，我们考虑此面元在垂直于场强方向的投影 dS_{\perp} 。很

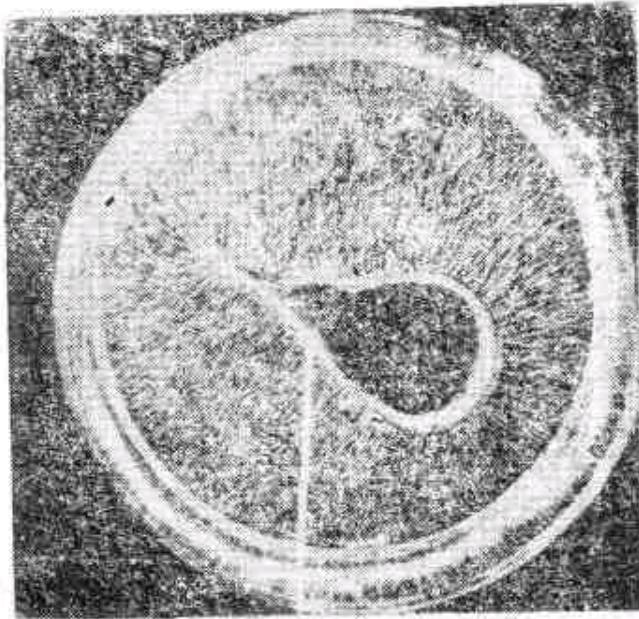


图 1.18 带异号电荷的圆柱面与尖形导体的电力线显示

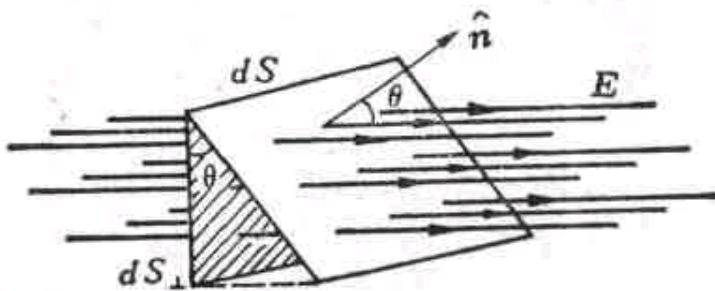


图 1.19 通过 dS 的电通量

明显, 通过 dS 和 dS_{\perp} 的电力线条数是一样的。由图可知, $dS_{\perp} = dS \cos \theta$ 。将此关系代入(1.15)式, 可得通过 dS 的电力线的条数或电通量应为

$$d\Phi_e = E dS_{\perp} = E dS \cos \theta \quad (1.16)$$

为了同时表示出面元的方位, 我们利用面元的法向单位矢量 \hat{n} , 这时面元就用矢量面元 $d\mathbf{S} = dS \hat{n}$ 表示。由图 1.19 可以看出, dS 和 dS_{\perp} 两面积之间的夹角也等于电场 E 和 \hat{n} 之间的夹角。由矢量点积的定义, 可得

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot \hat{n} dS = E dS \cos \theta$$

将此式与(1.16)式对比, 可得用矢量点积表示的通过面元 $d\mathbf{S}$ 的

电通量的公式

$$d\Phi_e = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.17)$$

注意, 由此式决定的电通量 $d\Phi_e$ 有正、负之别。当 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 时, $d\Phi_e$ 为正; 当 $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ 时, $d\Phi_e$ 为负。

为了求出通过任意曲面 S 的电通量(图 1.20), 可将曲面 S 分割成许多小面元 dS 。先计算通过每一小面元的电通量, 然后对整个 S 面上所有面元的电通量相加。用数学式表示就有

$$\Phi_e = \int d\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.18)$$

这样的积分在数学上叫面积分, 积分号下脚标 S 表示此积分遍及整个曲面。

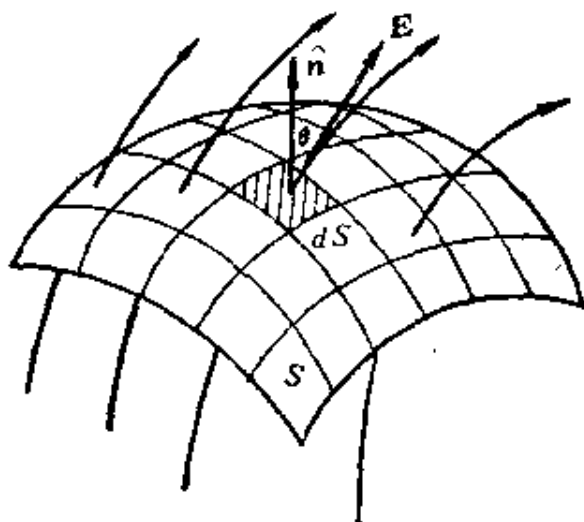


图 1.20 通过任意曲面的电通量

通过一个封闭曲面 S 的电通量(图 1.21)可表示为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.19)$$

积分符号“ \oint ”表示对整个封闭曲面进行面积分。

对于不闭合的曲面, 面上各处法向单位矢量的正向可以任意取这一侧或那一侧。对于闭合曲面, 由于它使整个空间划分成内、外两部分, 所以一般规定自内向外的方向为各处面元法向的正方

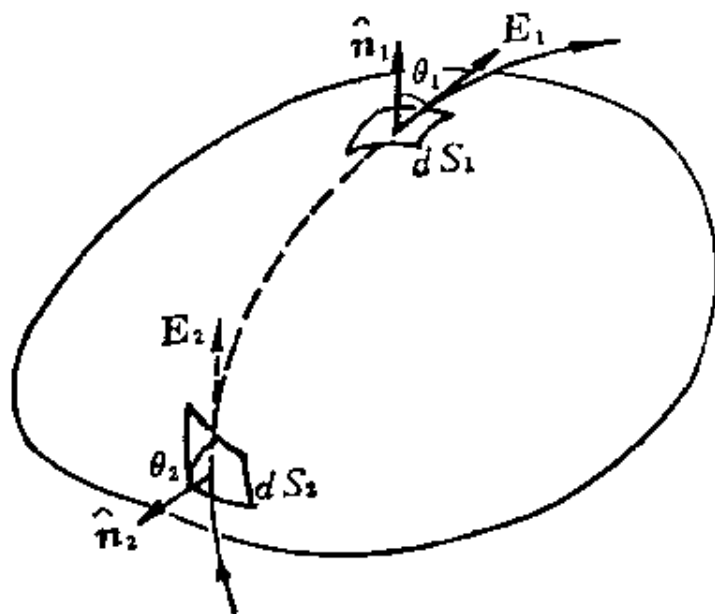


图 1.21 通过封闭曲面的电通量

向。因此，当电力线从内部穿出时(如在图 1.21 中面元 dS_1 处)， $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ ， $d\Phi_e$ 为正。当电力线由外面穿入时(如图 1.21 中面元 dS_2 处)， $\pi/2 \leq \theta_2 \leq \pi$ ， $d\Phi_e$ 为负。(1.19)式中表示的通过整个封闭曲面的电通量 Φ_e 就等于穿出与穿入封闭曲面的电力线的条数之差，也就是净穿出封闭面的电力线的总条数。

§ 1.6 高斯定律

高斯(K. F. Gauss, 1777—1855) 是德国物理学家和数学家，他在实验物理和理论物理以及数学方面都作了很多贡献。他导出的高斯定律是电磁学的一条重要规律。

高斯定律是用电通量表示的电场和场源电荷关系的定律，它给出了通过任一封闭面的电通量与封闭面内部所包围的电荷的关系。下面我们利用电通量的概念根据库仑定律和场强叠加原理来导出这个关系。

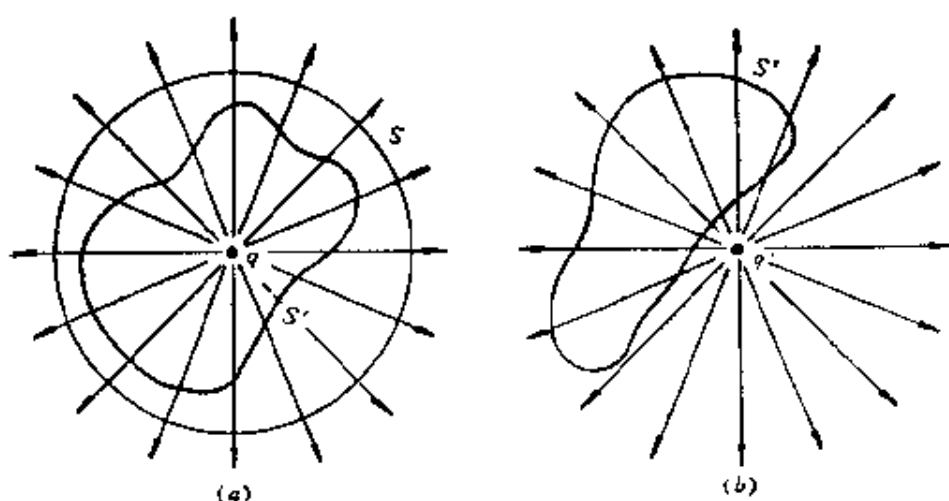


图 1.22 说明高斯定律用图

我们先讨论点电荷 q 的电场。以 q 所在点为中心，取任意长度 r 为半径作一球面 S 包围这个点电荷 q (图 1.22a)。我们知道，球面上任一点的电场强度 E 的大小都是 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ，方向都沿着矢径 r 的方向，而处处与球面垂直。根据(1.19)式，可得通过这球面的电通量为

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

此结果与球面半径 r 无关，只与它所包围的电荷的电量有关。这意味着，对以点电荷 q 为中心的任意球面来说，通过它们的电通量都一样，都等于 q/ϵ_0 。用电力线的图象来说，这表示通过各球面的电力线总条数相等，或者说，从点电荷 q 发出的电力线连续地延伸到无限远处。

现在设想另一个任意的闭合面 S' ， S' 与球面 S 包围同一个点电荷 q (图 1.22a)，由于电力线的连续性，可以得出通过闭合面 S 和 S' 的电力线数目是一样的。因此通过任意形状的包围点电荷 q

的闭合面的电通量都等于 q/ϵ_0 。

如果闭合面 S' 不包围点电荷 q (图 1.22b), 则由电力线的连续性可得出, 由这一侧进入 S' 的电力线条数一定等于从另一侧穿出 S' 的电力线条数, 所以净穿出闭合面 S' 的电力线的总条数为零, 亦即通过 S' 面的电通量为零。用公式表示, 就是

$$\Phi_e = \oint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

以上是关于单个点电荷的电场的结论。对于一个由点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 等组成的电荷系来说, 在它们的电场中任意一点, 由场强叠加原理可得

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n$$

其中 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ 为单个点电荷产生的电场, \mathbf{E} 为总电场。这时通过任意封闭曲面 S 的电通量为

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} + \dots \\ &+ \oint_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S} = \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \dots + \Phi_{en} \end{aligned}$$

其中 $\Phi_{e1}, \Phi_{e2}, \dots, \Phi_{en}$ 为单个点电荷的电场通过封闭曲面的电通量。由上述关于单个点电荷的结论可知, 当 q_i 在封闭曲面内时, $\Phi_{ei} = q_i/\epsilon_0$; 当 q_i 在封闭曲面外时, $\Phi_{ei} = 0$, 所以上式可以写成

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{in} \quad (1.20)$$

式中 $\sum q_{in}$ 表示在封闭曲面内的电量的代数和。式(1.20)就是高斯定律的数学表达式, 它表明: 在真空中的静电场内, 通过任意封闭曲面的电通量等于该封闭面所包围的电荷的电量的代数和的 $1/\epsilon_0$ 倍。

对高斯定律的理解应注意以下几点: (1) 高斯定律表达式左

方的场强 E 是曲面上各点的场强，它是由**全部电荷**（既包括封闭曲面内又包括封闭曲面外的电荷）共同产生的合场强，并非只由封闭曲面内的电荷 Σq_{in} 所产生。（2）通过封闭曲面的总电通量只决定于它所包围的电荷，即只有**封闭曲面内部的电荷**才对这一总电通量有贡献，封闭曲面外部电荷对这总电通量无贡献。

高斯定律是电场力的平方反比规律和叠加原理的直接结果。在电场强度定义之后，也可以把高斯定律作为基本定律而导出库仑定律来。这说明库仑定律和高斯定律并不是互相独立的定律，而是用不同形式表示的电场与场源电荷关系的同一客观规律。库仑定律使我们在电荷分布已知的情况下，能求出场强的分布。而高斯定律使我们在电场强度分布已知时，能求出任意区域内的电荷。尽管如此，当电荷分布具有某种对称性时，也可用高斯定律求出该种电荷系统的电场分布，而且，这种方法在数学上比用库仑定律简便得多。

可以附带指出的是，如上所述，对于静止电荷的电场，可以说库仑定律与高斯定律两者等价。但在研究**运动电荷**的电场时（如后面要讲到的），人们发现库仑定律不再成立，而高斯定律却仍然有效。

§ 1.7 利用高斯定律求静电场的分布

当电荷分布具有某种对称性时，可以应用高斯定律求场强分布。这种方法一般包含两步：首先，根据电荷分布的对称性分析电场分布的对称性；然后，再应用高斯定律计算场强数值。这一方法的决定性的技巧是选取合适的封闭积分曲面（常叫**高斯面**）以便使积分 $\oint E \cdot dS$ 中的 E 能以标量形式从积分号内提出来。下面举几个例子。

[例 1] 设不知道库仑定律, 试用高斯定律求点电荷 q 的电场分布。

解: 我们认为空间是均匀而且各向同性的, 因此, 点电荷的电场应具有以该电荷为中心的球对称性, 即各点的场强方向应沿从点电荷引向各点的矢径方向, 并且在距点电荷等远的所有各点上, 场强的数值应该相等。据此, 可以选择一个以点电荷所在点为球心, 半径为 r 的球面为高斯面 S 。通过 S 面的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS$$

最后的积分就是球面的总面积 $4\pi r^2$, 所以

$$\Phi_e = E \cdot 4\pi r^2$$

S 面包围的电荷为 q 。高斯定律给出

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

由此得出

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

由于 E 的方向沿径向, 所以此结果又可以用下一矢量式表示

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

这就是点电荷的场强公式。

若将另一电荷 q_0 放在距电荷 q 为 r 的一点上, 则由场强定义可求出 q_0 受的力为

$$\mathbf{F} = E q_0 = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

此式正是库仑定律。这样, 我们就由高斯定律导出了库仑定律

[例 2] 求均匀带电球面的电场分布, 已知球面半径为 R , 所带总电量为 q (设 $q > 0$)。

解: 先求球面外任一点 P 处的场强, 设 P 距球心为 r 。连接 OP 直线 (图 1.23), 并作以 O 为球心, r 为半径的球面 S 。由于电荷分布对 OP 直线对称, 而任何一对对称的电荷元 dq' 和 dq'' 在 P 点的合场强方向沿 OP 方向, 所以带电球面上所有电荷在 P 点的合场强 E 的方向也必然都沿着 OP 方向。又由于电荷分布是球形对称的, 所以与 P 点在同一球面上的各点的场强的大小一定都相等, 而且方向都沿各自的矢径方向。就以此球面 S 为高斯面,

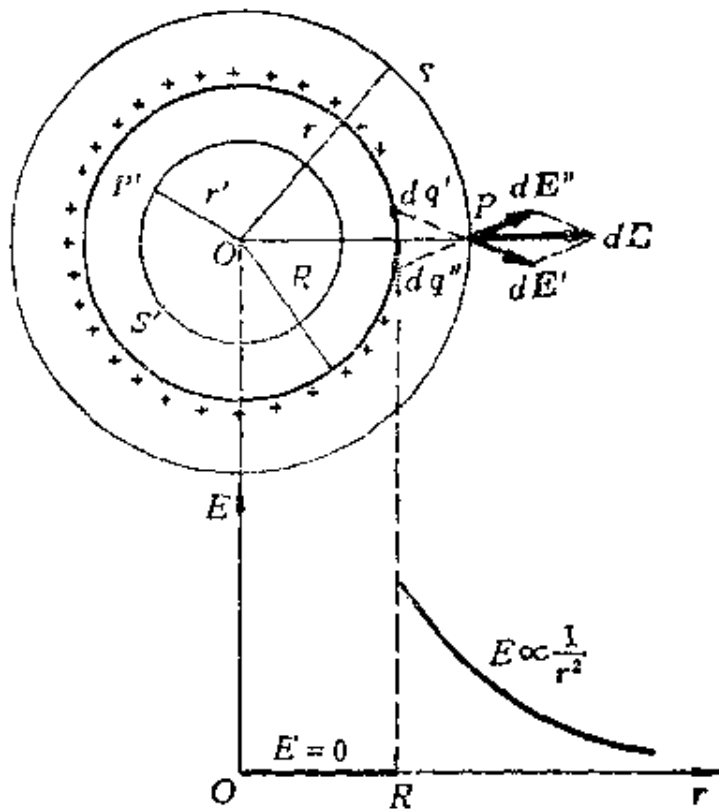


图 1.23 均匀带电球面的电场分析

则通过它的电通量为

$$\Phi_s = \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_s E dS = E \oint_s dS = E \cdot 4\pi r^2$$

此球面包围的电荷为 $\sum q_{in} = q$ 。高斯定律给出

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

由此得出

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad (r > R)$$

考虑 E 的方向, 可得电场强度的矢量式为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (r > R) \quad (1.21a)$$

此结果说明, 均匀带电球面外的场强分布正象球面上的电荷都集中在球心时

所形成的一个点电荷在该区的场强分布一样。

对球面内部任一点 P' , 上述关于场强的大小和方向的分析仍然适用。过 P' 点作半径为 r' 的同心球面为高斯面 S' 。通过它的电通量仍可表示为 $E \cdot 4\pi r'^2$, 但由于此 S' 面内没有电荷, 根据高斯定律, 应该有

$$E \cdot 4\pi r'^2 = 0$$

即

$$E = 0 \quad (r < R) \quad (1.21b)$$

这表明: 均匀带电球面内部的场强处处为零。

根据上述结果, 可画出场强随距离的变化曲线—— $E-r$ 曲线 (图 1.23)。从 $E-r$ 曲线中可看出, 场强值在球面 ($r=R$) 上是不连续的。

[例 3] 求均匀带电球体的电场分布。已知球半径为 R , 所带总电量为 q 。

解: 设想均匀带电球体是由一层层同心均匀带电球面组成。这样上例中关于场强方向和大的分析在本例中也适用。因此, 可以直接得出: 在球体外部的场强分布和所有电荷都集中到球心时产生的电场一样, 即

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (r \geq R) \quad (1.22a)$$

为了求出球体内任一点的场强, 可以通过球内 P 点作一个半径为 r ($r < R$) 的同心球面 S 为高斯面 (图 1.24), 通过此面的电通量仍为 $E \cdot 4\pi r^2$ 。此球面包围的电荷为

$$\Sigma q_{\text{内}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{R^3}$$

由此利用高斯定律可得

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} r \quad (r \leq R)$$

这表明, 在均匀带电球体内部各点场强的大小与矢径大小成正比。考虑到 E 的方向, 球内电场强度也可以用矢量式表示为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} \mathbf{r} \quad (r \leq R) \quad (1.22b)$$

均匀带电球体的 $E-r$ 曲线绘于图 1.24 中。由图 1.24 可看出, 在球体表面上场强的大小是连续的。

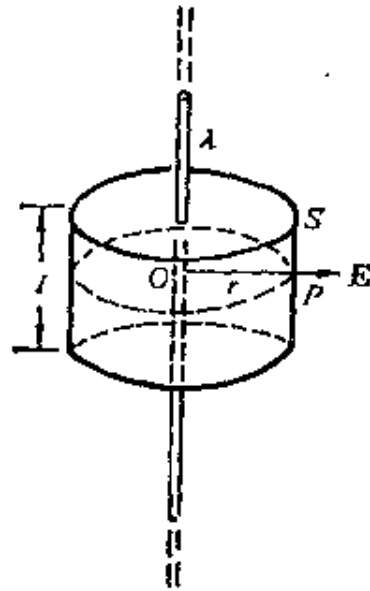
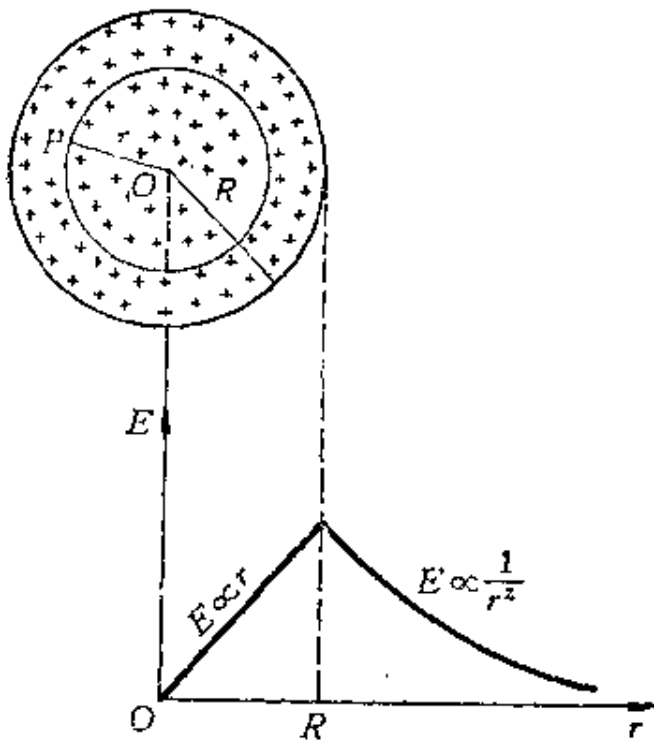


图 1.24 均匀带电球体的电场分析 图 1.25 无限长带电直线的电场分析

[例 4] 求无限长均匀带电直线的电场分布。已知线上电荷密度为 λ 。

解：带电直线的电场分布应具有轴对称性。考虑离直线距离为 r 的一点 P 处的场强 E 。因为带电直线为无限长，且均匀带电，所以电荷分布对于 OP 直线上、下对称（图 1.25），因而 P 点的电场方向一定垂直于带电直线而沿径向，并且和 P 点在同一圆柱面（以带电直线为轴）上的各点场强大小也都相等，而且方向都沿径向。

作一个通过 P 点，以带电直线为轴，高为 l 的圆筒形封闭面为高斯面 S ，通过 S 面的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{侧面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{上底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{下底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

在 S 面的上、下底面上，场强方向与底面平行，因此，上式等号右侧后面两项等于零。而在侧面上各点 E 的方向与各该点的法线方向相同，所以有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{侧面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{侧面}} E dS = E \int_{\text{侧面}} dS = E \cdot 2\pi r l$$

此封闭面内包围的电荷 $\Sigma q_{\text{内}} = \lambda l$ 。由高斯定律得

$$E \cdot 2\pi r l = \lambda l / \epsilon_0$$

由此得

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (1.23)$$

这一结果与 § 1.4 中例 2 的结果(1.13) 式相同。由此可见, 当条件允许时, 利用高斯定律计算场强分布要简便得多。

例 5 求无限大均匀带电平面的电场分布。已知带电平面上面电荷密度为 σ 。

解: 考虑距离带电平面为 r 的 P 点的场强 E , 由于电荷分布对于垂线 OP 是对称的(图 1.26), 所以 P 点的场强必然垂直于该带电平面。又由于电荷均匀分布在一个无限大平面上, 所以电场分布必然对该平面对称, 而且离平面等远处(两侧一样)的场强大小都相等, 方向都垂直指离平面(当 $\sigma > 0$ 时)。

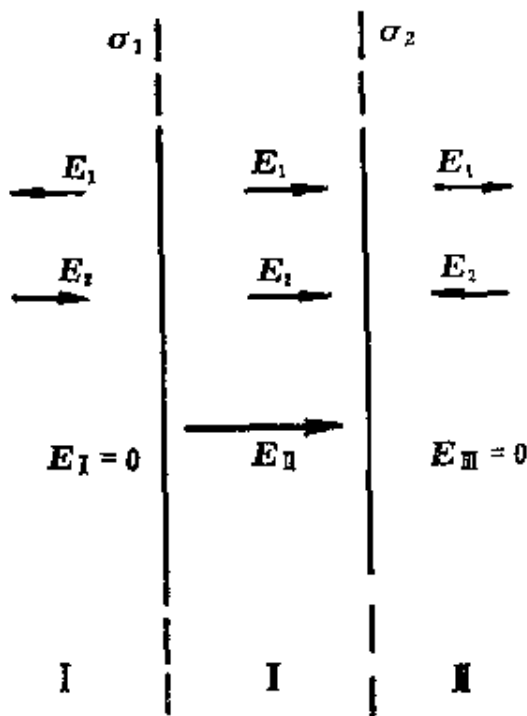
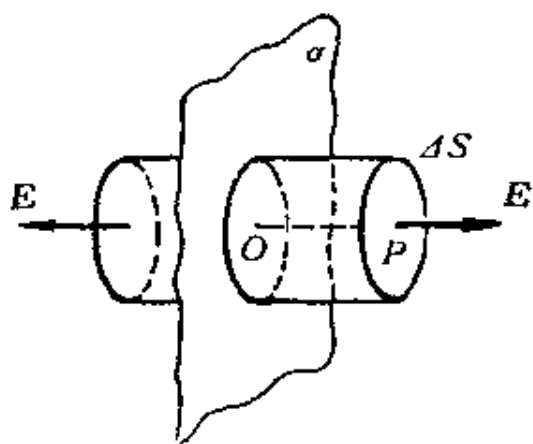


图 1.26 无限大均匀带电平面的电场分析 图 1.27 带电平行平面的电场分析

我们选一个共轴垂直于带电平面的圆筒式的封闭面作为高斯面 S , 带电平面平分此圆筒, 而 P 点位于它的一个底上。

由于圆筒的侧面上各点的 E 与侧面平行, 所以通过侧面的电通量为零。因而只需要计算通过两底面的电通量。以 ΔS 表示一个底的面积, 则

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{两底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2E\Delta S$$

由于

$$\Sigma q_N = \sigma \cdot \Delta S$$

高斯定律给出

$$2E \cdot \Delta S = \sigma \cdot \Delta S / \epsilon_0$$

从而

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.24)$$

此结果说明, 无限大均匀带电平面两侧的电场是均匀场。这一结果和 § 1.4 中例 4 的结果(1.14)式相同。

上述各例中的带电体的电荷分布都具有某种对称性, 利用高斯定律计算这类带电体的场强分布是很方便的。不具有特定对称性的电荷分布, 其电场不能直接用高斯定律求出。当然, 这决不是说, 高斯定律对这些电荷分布不成立。

对带电体系来说, 如果其中每个带电体上的电荷分布都具有对称性, 那么可以用高斯定律求出每个带电体的电场, 然后再应用场强叠加原理求出带电体系的总电场分布。下面举个例子。

[例 6] 两个平行的无限大均匀带电平面, 其电荷面密度分别为 $\sigma_1 = +\sigma$ 和 $\sigma_2 = -\sigma$, 而 $\sigma = 4 \times 10^{-11} \text{ C/m}^2$ 。求这一带电系统的电场分布 (图 1.27)

解: 这两个带电平面的总电场不再具有前述的简单对称性, 因而不能直接用高斯定律求解。但据上例, 两个面在各自的两侧产生的场强的方向如图(1.27)所示, 其大小分别为

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{4 \times 10^{-11}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 2.26 \text{ V/m}$$
$$E_2 = \frac{|\sigma_2|}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{4 \times 10^{-11}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 2.26 \text{ V/m}$$

根据场强叠加原理可得

$$\text{在 I 区: } E_I = E_1 - E_2 = 0$$

$$\text{在 II 区: } E_{II} = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 4.52 \text{ V/m, 方向向右;}$$

$$\text{在 III 区: } E_{III} = E_1 - E_2 = 0$$

本章提要

1. **电荷的基本性质:** 两种电荷, 量子性, 电荷守恒, 相对论不变性。

2. **库仑定律:** 两个静止的点电荷之间的作用力

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}.$$

其中的真空中介电常数 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$

3. **电力叠加原理:** $F = \sum F_i$

4. **电场强度:** $E = \frac{F}{q_0}$, q_0 为静止电荷。

5. **场强叠加原理:** $E = \sum E_i$

用叠加法求电荷系的电场: $E = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$

或 $E = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

6. **电通量:** $\Phi_e = \int_S E \cdot dS$

7. **高斯定律:** $\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{in}$

8. **典型静电场:**

均匀带电球面: $E = 0$ (球面内),

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r} \text{ (球面外);}$$

均匀带电无限长直线: $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, 方向垂直于带电直线;

均匀带电无限大平面: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, 方向垂直于带电平面。

思 考 题

1.1 根据点电荷的电场公式

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \hat{r}$$

从形式上看,当所考察的点与点电荷的距离 $r \rightarrow 0$ 时,则场强 $E \rightarrow \infty$,这是没有物理意义的,对这个问题你如何解释?

1.2 $E = \frac{F}{q_0}$ 与 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r}$ 两公式有什么区别和联系?

1.3 在真空中有两个相对的平行板,相距为 d ,板面积均为 S ,分别带电量 $+q$ 和 $-q$ 。有人说,根据库仑定律,两板之间的作用力 $f = q^2/4\pi\epsilon_0 d^2$ 。又有人说,因 $f = qE$,而板间 $E = \sigma/\epsilon_0$, $\sigma = q/S$,所以 $f = q^2/\epsilon_0 S$ 。还有人说,由于一个板上的电荷在另一板处的电场为 $E = \sigma/2\epsilon_0$,所以 $f = qE = q^2/2\epsilon_0 S$ 。试问这三种说法哪种对?为什么?

1.4 电力线,电通量和电场强度的关系是怎样的?电通量的正、负表示什么意义?

1.5 三个相等的电荷放在等边三角形的三个顶点上,问是否可以以三角形中心为球心作一个球面,利用高斯定律求出它们所产生的场强?对此球面高斯定律是否成立?

1.6 如果通过闭合面 S 的电通量 Φ_e 为零,是否能肯定面 S 上每一点的场强都等于零?

1.7 如果在封闭面 S 上, E 处处为零,能否肯定此封闭面一定没有包围净电荷?

1.8 电力线能否在无电荷处中断?为什么?

1.9 高斯定律和库仑定律的关系如何?

习 题

1.1 在边长为 a 的正方形的四角,依次放置点电荷 $q, 2q, -4q$ 和 $2q$,它的正中放着一个单位正电荷,求这个电荷受力的大小和方向。

1.2 三个电量为 $-q$ 的点电荷各放在边长为 r 的等边三角形的三个顶点上。电荷 $Q (Q > 0)$ 放在三角形的重心上,为使每个负电荷受力为零, Q 之值应为多大?

1.3 一个正 π 介子由一个 u 夸克和一个反 d 夸克组成。 u 夸克带电量为 $\frac{2}{3}e$, 反 d 夸克带电量为 $\frac{1}{3}e$ 。将夸克作为经典粒子处理, 试计算正 π 介子中夸克间的电力(设它们之间的距离为 $1.0 \times 10^{-15} \text{ m}$)。

1.4 一个电偶极子的电矩为 $p = ql$, 求此电偶极子轴线上距其中心为 r ($r \gg l$) 处的一点的场强。

*1.5 精密的实验已表明, 一个电子与一个质子的电量在实验误差为 $\pm 10^{-21}e$ 的范围内是相等的, 而中子的电量在 $\pm 10^{-21}e$ 的范围内为零。考虑这些误差综合的最坏情况, 问一个氧原子(具有 8 个电子, 8 个质子和 8 个中子)所带的最大可能净电荷是多少? 若将原子看成质点, 试比较两个氧原子间电力和万有引力的大小, 其净力是相吸还是相斥?

1.6 两根无限长的均匀带电直线相互平行, 相距为 $2a$, 线电荷密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$, 求每单位长度的带电直线受的作用力。

1.7 一均匀带电直线, 长为 L , 线电荷密度为 λ 。求直线的延长线上距 L 中点为 r ($r > L/2$) 处的场强。

1.8 一根不导电的细塑料杆, 被弯成近乎完整的圆, 圆的半径为 0.5 m , 杆的两端有 2 cm 的缝隙, $3.12 \times 10^{-8} \text{ C}$ 的正电荷均匀地分布在杆上, 求圆心处电场的大小和方向。

1.9 (a) 点电荷 q 位于边长为 a 的正立方体的中心, 通过此立方体的每一面的电通量各是多少?

(b) 若电荷移至正立方体的一个顶点上, 则通过每个面的电通量又各是多少?

1.10 实验证明, 地球表面上方电场不为 0, 晴天大气电场的平均场强约为 120 V/m , 方向向下, 这意味着地球表面上有多少过剩电荷? 试以每平方厘米的额外电子数来表示。

1.11 通常情况下中性氢原子的行为从某些方面看来, 好象是一个这样的电荷分布: 一个大小为 $+e$ 的电荷被密度为 $\rho(r) = -Ce^{-2r/a_0}$ 的负电荷所包围, a_0 是“玻尔半径”, $a_0 = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$, C 是为了使电荷总量等于 $-e$ 所需要的常量, 试问在半径为 a_0 的球内净电荷是多少? 距核 a_0 远处的电场强度多大?

1.12 两个平行无限大均匀带电平面, 面电荷密度分别为 $\sigma_1 = 4 \times 10^{-11} \text{ C/m}^2$ 和 $\sigma_2 = -2 \times 10^{-11} \text{ C/m}^2$ 。求此系统的电场分布。

1.13 求一无限大均匀带电厚壁的电场分布, 壁厚为 D , 体电荷密度为 ρ , 画出 $E \sim d$ 曲线, d 为垂直于壁面的坐标, 原点在厚壁的中点。

1.14 求一无限长的均匀带电薄壁圆筒的电场分布。圆筒截面半径为 a , 而电荷面密度为 σ , 画出 $E \sim r$ 曲线, r 为垂直于筒轴方向从中心轴向外的矢径的大小。

1.15 两个无限长同轴圆筒半径分别为 R_1 和 R_2 , 单位长度带电量分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$ 。求内筒内, 两筒间及外筒外的电场分布。

1.16 一大平面中部有一半径为 R 的小孔, 设平面均匀带电, 而电荷密度为 σ_0 , 求通过小孔中心并与平面垂直的直线上的场强分布。

*1.17 一均匀带电球体, 半径为 R , 体电荷密度为 ρ , 今在球内挖去一半径为 $r (< R)$ 的球体, 求证由此形成的空腔内的电场是均匀的, 并求其值。

1.18 按照粗糙的模型, 中子是由带正电荷的内核与带负电荷的外壳所组成。假设正电荷电量为 $2e/3$, 且均匀分布在半径为 $0.50 \times 10^{-15} \text{ m}$ 的球内; 而负电荷电量为 $-2e/3$, 分布在内、外半径分别为 $0.50 \times 10^{-15} \text{ m}$ 和 $1.0 \times 10^{-15} \text{ m}$ 的同心球壳内 (图 1.28)。求在与中心距离分别为 $1.0 \times 10^{-15} \text{ m}$, $0.75 \times 10^{-15} \text{ m}$, $0.50 \times 10^{-15} \text{ m}$ 和 $0.25 \times 10^{-15} \text{ m}$ 处电场的大小和方向。

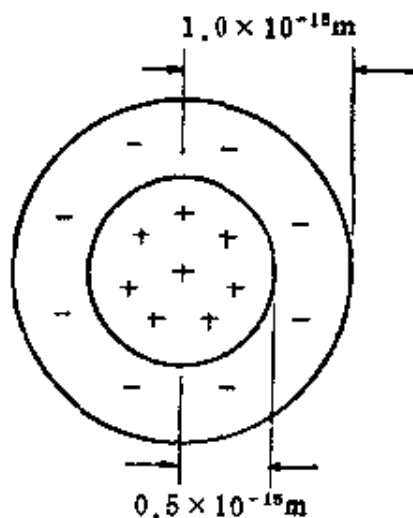


图 1.28

1.19 τ 子是与电子一样带有负电而质量却很大的粒子。它的质量为 $3.18 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 大约是电子质量的 3490 倍。 τ 子可穿透核物质, 因此, τ 子在核电荷的电场作用下在核内可作轨道运动。设 τ 子在铀核内的圆轨道半径为 $2.9 \times 10^{-15} \text{ m}$ 。把铀核看作是半径为 $7.4 \times 10^{-15} \text{ m}$ 的球, 并且带有 $92e$ 且

均匀分布于其体积内的电荷。计算 π 子的轨道运动的速率、动能、角动量和频率。

1.20 设在氢原子中,负电荷均匀分布在半径为 $r_0=0.53\times 10^{-10}$ m 的球体内,总电量为 $-e$ 。质子位于此电子云的中心。求当外加电场 $E=3\times 10^6$ V/m(实验室内很强的电场)时,负电荷的球心和质子相距多远?(设电子云不因外加电场而变形)。此时氢原子的“感应电偶极矩”多大?

1.21 图 1.29 中电场强度分量为 $E_x=bx^{1/2}$, $E_y=E_z=0$, 其中 $b=800$ N/C。试求:

- (1) 通过正立方体的电通量;
- (2) 正立方体的总电荷是多少? 设 $a=10$ cm。

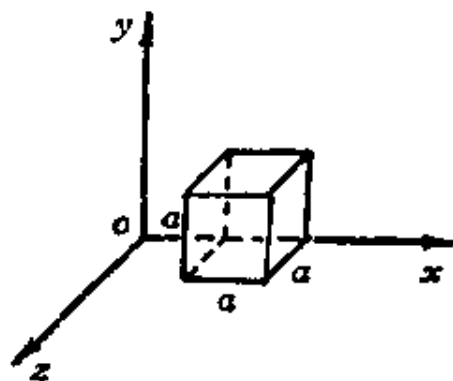


图 1.29

*第二章 运动电荷的电场^(注)

本章要求

1. 理解高斯定律对运动的场源电荷也成立。
2. 理解电场变换公式的意义,并了解用狭义相对论推导它的过程。
3. 理解做匀速直线运动的点电荷的电场分布规律。
4. 能计算静电场对运动的电荷的作用力和运动电荷的电场对静止电荷的作用力。

§ 2.1 高斯定律与运动电荷

前面讲了电荷间的相互作用,为此我们引入了电场的概念,并用(1.6)式

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

定义了静电场的电场强度,其中 q_0 是静止的电荷。静电场的分布与场源电荷的关系可以用库仑定律场强公式(1.9)式

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

或高斯定律(1.20)式

[注] 本书中带*号的章节(及有关习题)可以不讲,这并不影响电磁学的“传统”讲述系统和基本要求。

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_k$$

表示。求出了静止电荷的电场分布,就可以用(1.6)式求出这些静止电荷对另外的静止电荷 q_0 的作用力。

下面我们来研究运动电荷对静止电荷的作用力。为此我们应用电场的概念,并先研究运动电荷的电场。

对运动电荷的电场的强度,我们仍用(1.6)式定义,即它等于静止的单位正电荷在运动电荷附近某点受的力。至于这电场强度的分布与运动的场源电荷的关系,我们推想库仑定律场强公式(1.9)式将不再成立。因为(1.9)式所表示的电场分布具有以点电荷为心的球对称性(参看图1.14),这是和静止的点电荷周围的空间对此点电荷来说没有哪一个方向是特殊的这一特点相联系的。对于运动的点电荷来说,在它周围的空间内有一特殊的方向,即运动的点电荷的速度方向(图2.1)。因此我们不再能肯定它的电场具有对称性。很可能在它运动的前方和后方,左方和右方,即使在离

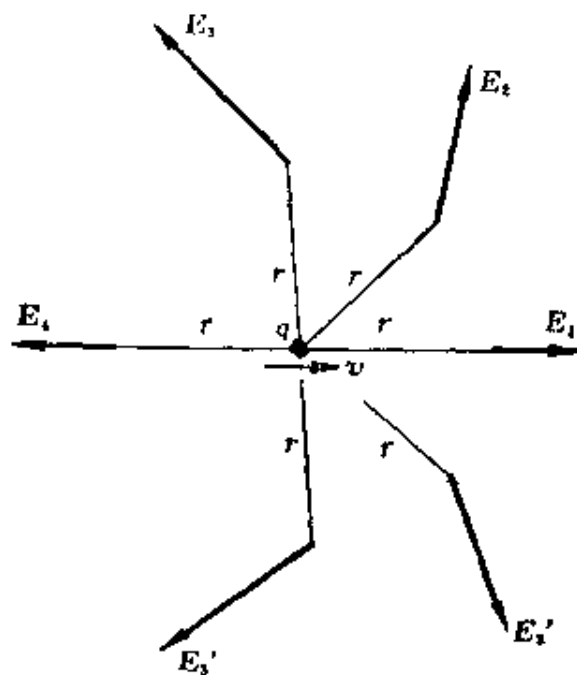


图 2.1 运动的点电荷周围的电场可能不是球对称分布

点电荷等远处, 电场强度也具有不同的大小。这就是说, 库仑定律场强公式(1.9)式很可能不再成立。

对于电场分布与场源电荷关系的另一表现形式——高斯定律(1.20)式来说, 由于它并不给出某一特定场点的电场, 而是给出了场源电荷和它周围的电场的总体上的关系, 所以在场源电荷运动的情况下, 它有可能还保持正确。因此我们就把高斯定律的应用范围推广, 认为它对运动的场源电荷也一样成立。这一推广是否真正正确, 最后还是要看由它导出的结论是否与实验结果相符。很幸运, 由它导出的各个结果都与实验结果相符。所以我们就把高斯定律也做为研究运动电荷的电场的基本规律, 即认为**高斯定律是关于场源电荷与它的电场的关系的普遍规律。**

具体地说, 设在某一参照系中, 有一运动的电荷系(图2.2), 在此参照系内任一时刻 t 作一固定在此参照系中的封闭曲面 S , 则在这一时刻通过此封闭曲面的电通量由下式给出

$$\Phi_e = \oint_{S,t} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_n$$

这一电通量应与封闭面的形状和位置无关, 只要它包围同样的电

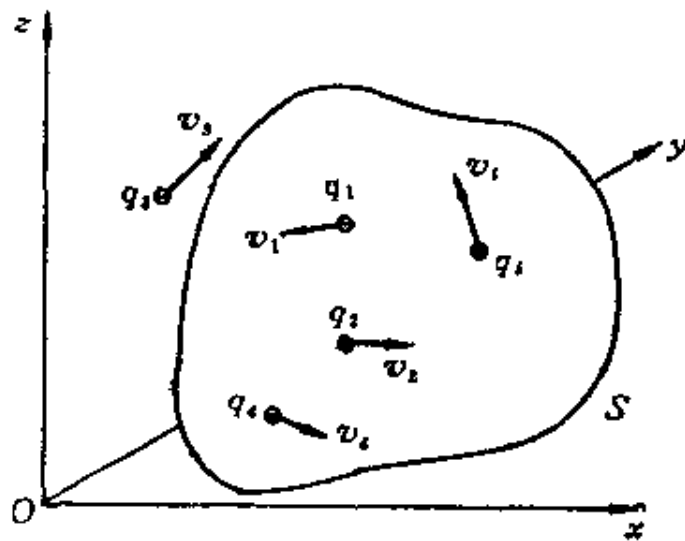


图 2.2 高斯定律对运动电荷也适用

荷。还可以指出的是,根据相对性原理和电荷的相对论不变性,在不同的参照系内作不同的封闭曲面,只要它们包围同样的电荷,通过这些封闭面的电通量也是一样的,即

$$\oint_{S,t} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S',t'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S}'$$

其中我们用带撇和不带撇来区别两个参照系。

§ 2.2 电场的变换

现在,我们开始研究运动电荷的电场。为了求出一个运动电荷的电场,根据运动的相对性,我们总可以找到该电荷在其中静止的一个参照系,在这个参照系中,由于电场是静止的,所以很容易求得电场的分布。然后,在此基础上,采用狭义相对论原理就可以求出运动电荷的电场。这就涉及到电场的变换。

电场强度的变换是要回答这样的问题:如果在某一参照系 S' 中,测得某时刻在一给定点处的场强为 E' ,那么,在另一参照系 S 中的相应时刻,相应位置处测得的场强 E 将是怎样的?下面我们通过特例来讨论这个问题。

如图 2.3(a)所示,在参照系 S' 中有两个静止的平行带电矩形大平板,板面垂直于 z' 轴。板沿 x' 方向的长度为 l_0 ,板沿 y' 方向的宽度为 w 。板上分别均匀带有面密度为 $+\sigma'$ 和 $-\sigma'$ 的电荷。可以很容易求出这一带电系统的电场分布是

$$\text{在板外,} \quad \mathbf{E}' = 0$$

$$\text{在板间,} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}'_z = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}' \quad (2.1)$$

现在我们在另一参照系 S 中观察此一电场。在 S 系中,平行板面垂直于 z 轴,并以恒定速度 v 沿 x 轴正方向运动。在此参照

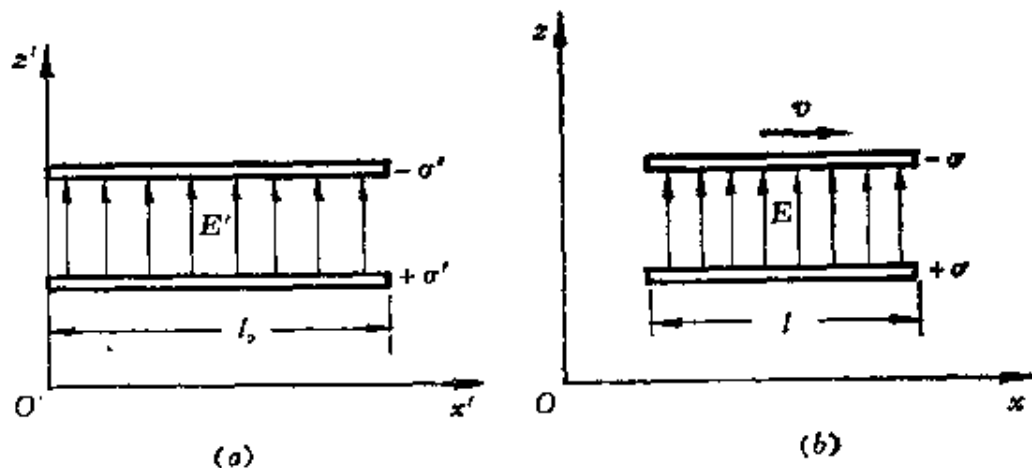


图 2.3 横向电场的变换

系中测出的电场强度 E 和 E' 有什么关系呢?

在 S 系中测量, 由于平板在运动, 根据狭义相对论长度缩短的规律, 板的长度 l 应为

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

由于板的宽度垂直于运动方向而保持不变, 因而, 平板面积将按同一因子 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 减小。根据电荷的相对论不变性, 板上总电量将保持不变, 因而电荷面密度增大为

$$\sigma = \sigma' / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma \sigma' \quad (2.2)$$

式中

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

为了求出在 S 系中观察到的电场, 先要分析电场的分布情况。由于在 S 系中观察时, 每个板都在运动, 它们的电场可能和板静止时不同。但由于板面很大, 且电荷分布均匀, 所以板两侧仍应为均匀电场, 而且此电场对板对称。但因为板在运动, 所以场强方向可能不再垂直于板面。假设电场方向倾斜如图 2.4(a) 所示, 这是带正电的板的电场。带负电的板的电场应该和它一样, 只是电场方向相反。两块板的电场叠加的结果, 如图 2.4(b) 所示, 在板外,

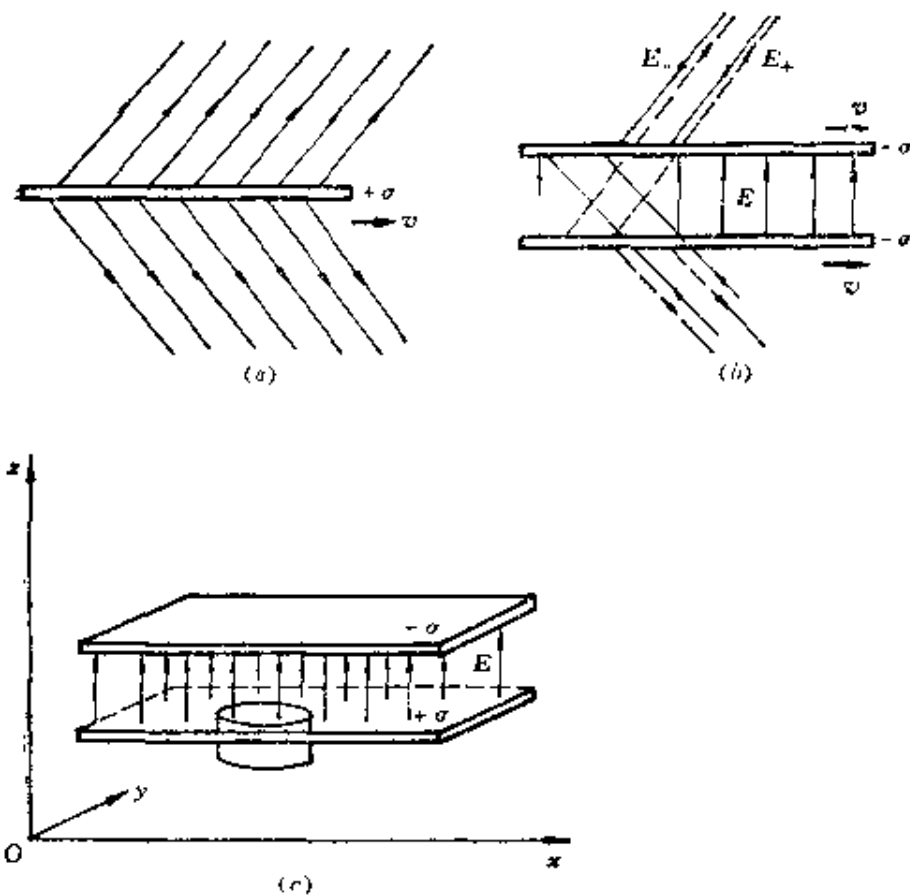


图 2.4 两运动平行带电板的电场

$+\sigma$ 和 $-\sigma$ 的电场相互抵消, 合电场为零。在板间, 两电场叠加结果使合成电场为均匀电场, 且电场垂直于板, 方向由带正电板指向带负电板。合电场分布如图 2.4(c) 所示。这时取一封闭圆筒作为高斯面, 上底面在板间, 下底面在板外。则用高斯定律就可求得板间电场为

$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

将(2.2)式的 σ 值代入上式, 可得

$$E_z = \gamma \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

将此式和(2.1)式对比, 即可得

$$E_z = \gamma E'_z \quad (2.3)$$

此场强的方向沿 z 轴正方向。此式说明，与在带电平板在其中静止的参照系 S' 中观察结果相比，在 S 系中垂直于电荷板运动方向的电场强度增大到 γ 倍。

为了求出平行于带电平板运动方向的场强的变换关系，可以设想在 S' 系中平行平板垂直于 x' 轴静止(图 2.5a)。在 S 系中，两板以速度 $v = v\hat{x}$ 沿 x 轴正方向运动(图 2.5b)。在 S' 系中两板静止，板间场强为

$$E'_x = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \quad (2.4)$$

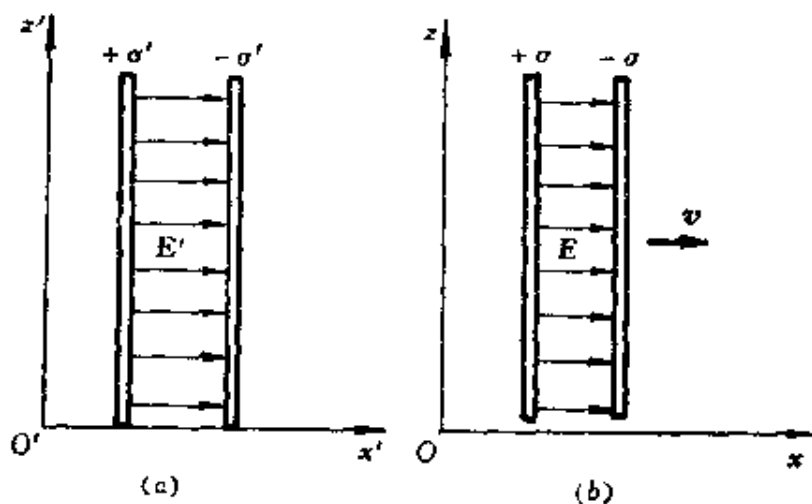


图 2.5 纵向电场的变换

在 S 系中观测，两板间的距离缩小了，但板的面积并无变化，从而板上电荷密度也就不变，即 $\sigma = \sigma'$ 。在 S 系中，如上分析可知，板外场强也应为零。板间场强也应垂直于板面，且为均匀场。同样用高斯定律可以求出

$$E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

考虑到 $\sigma = \sigma'$ ，并和(2.4)式对比，可得

$$E_x = E'_x \quad (2.5)$$

这式表明，在 S 系中，沿电荷运动方向的场强与 S' 系中的相同。

上面我们以两平行带电平板间的电场为例推导出了电场强度的变换公式,它们是不是普遍有效呢?换句话说,对于其他任意的场源电荷分布,上述电场变换规律是否都适用呢?这需要用场这一局域性概念本身的含义来说明。如果在某一时刻,某一位置处的场强 E 具有唯一的独立的含意,则根据在一参照系中测得某一时刻,在某一位置处的场强,就应能够预言在另一参照系中同一时刻,同一位置处的场强,而与场源电荷的性质无关。否则场的概念就失去意义了。这样的论断是正确的,最终是因为关于场的理论和实验结果是一致的。

于是,我们就得到了关于电场变换的一般规律。(2.3)式是关于垂直于运动方向的 z 方向的场强变换规律,显然它也应适用于 y 方向的场强变换。一般情况下,空间某点场强 E 的方向可以是任意的,这时可利用叠加原理,将 E 看成是沿 x, y, z 轴的三个分量 E_x, E_y, E_z 的矢量和。对每一个分量,相应的变换仍是成立的。因此,对于场强的变换可总结如下:设场源电荷在 S' 系中静止,在此参照系中某点的场强为 E' ,在相对于 S' 系以速度 $-v$ (或 v)沿 x' 轴反方向(或正方向)运动的参照系 S 中相应的场强为 E ,则 E 和 E' 的变换关系为

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma E'_y, \quad E_z = \gamma E'_z \quad (2.6)$$

其中 $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ 。利用(2.6)式,只要知道了场源电荷在其中静止的参照系中的电场分布 E' ,就可直接求得相对上述参照系做匀速直线运动的另外的参照系中的电场分布。在这另外的参照系中,该场源电荷是运动的,所以也就求出了运动电荷的电场 E 的分布了。这样,再根据(1.6)式就可求出运动电荷对静止电荷 q_0 的作用力了。

§ 2.3 做匀速直线运动的点电荷的电场

这一节我们讨论作匀速直线运动的点电荷的电场分布。设电荷 Q 在参照系 S 中以恒定速度 $\mathbf{v} = v\hat{x}$ 沿 x 轴正方向运动。为了求得在 S 系中电荷 Q 的电场分布，我们先求出 Q 在它静止的参照系 S' 中的场强分布。

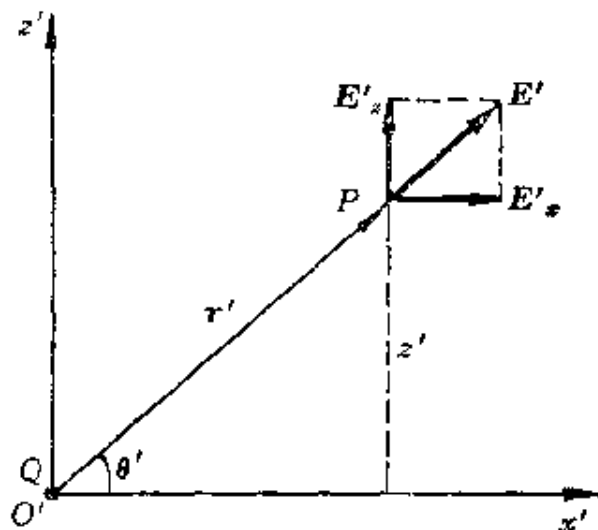


图 2.6 点电荷 Q 在 S' 系中静止

设在 S' 系中，电荷 Q 静止于原点 O' (图 2.6)。 Q 在 S' 系中的电场为静电场，它在 P 点的场强可以用库仑定律场强公式求出为

$$\mathbf{E}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \mathbf{r}' \quad (2.7)$$

式中 r' 为 P 点对于 O' 点的矢径。由于在 S 系中电场分布显然具有对 x 轴的轴对称性，我们可以只研究 xz 平面以及相对应的 $x'z'$ 平面上的电场分布。在 $x'z'$ 平面上， \mathbf{E}' 的两个分量分别为

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \cos\theta' = \frac{Qx'}{4\pi\epsilon_0 (x'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ E_z &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \sin\theta' = \frac{Qz'}{4\pi\epsilon_0 (x'^2 + z'^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

为了将此场强变回 S 系中, 除了要用场强变换式(2.6)式外, 还要用到洛仑兹坐标变换式:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct), \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - \beta x/c), \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

式中 $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

设在 S 系中, t 时刻电荷 Q 位于 x 轴上 $x_A = vt = \beta ct$ 的 A 点。将上面坐标变换式代入(2.8)式, 再利用场强变换式(2.6)式, 并注意到电荷 Q 的相对论不变性, 可得 $P(x, y, z)$ 点的场强沿 x, z 轴的分量为

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E'_x = \frac{\gamma Q(x - \beta ct)}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2(x - \beta ct)^2 + z^2]^{3/2}} \\ E_z &= \gamma E'_z = \frac{\gamma Qz}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2(x - \beta ct)^2 + z^2]^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

由于在 S 系中运动电荷 Q 的电场的轴对称性, (2.10)式就给出了在 S 系中观察到的以速度 $\mathbf{v} = v\hat{x}$ 运动的点电荷在 t 时刻通过 $(vt, 0, 0)$ 点时的场强分布的一般表达式。

下面让我们根据(2.10)式讨论在 S 系中运动的点电荷所产生的电场强度 E 的方向和大小。由(2.10)式可清楚看出 $E_z/E_x = z/(x - vt)$, 这说明 E 的方向与由 A 点引向 P 点的矢径 r 的方向相同(图2.7), 即在任何时刻, 运动电荷周围某点 P 的场强的方向总是沿着从运动电荷在该时刻的瞬时位置引向 P 点的连线的方向。

场强 E 的大小可求出如下(请参考图 2.7)

$$\begin{aligned} E^2 &= E_x^2 + E_z^2 = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{\gamma^2 Q^2 [(x - \beta ct)^2 + z^2]}{[\gamma^2(x - \beta ct)^2 + z^2]^3} \\ &= \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{Q^2(1 - \beta^2)^2}{[(x - \beta ct)^2 + z^2]^2 \left[1 - \frac{\beta^2 z^2}{(x - \beta ct)^2 + z^2} \right]^3} \end{aligned}$$

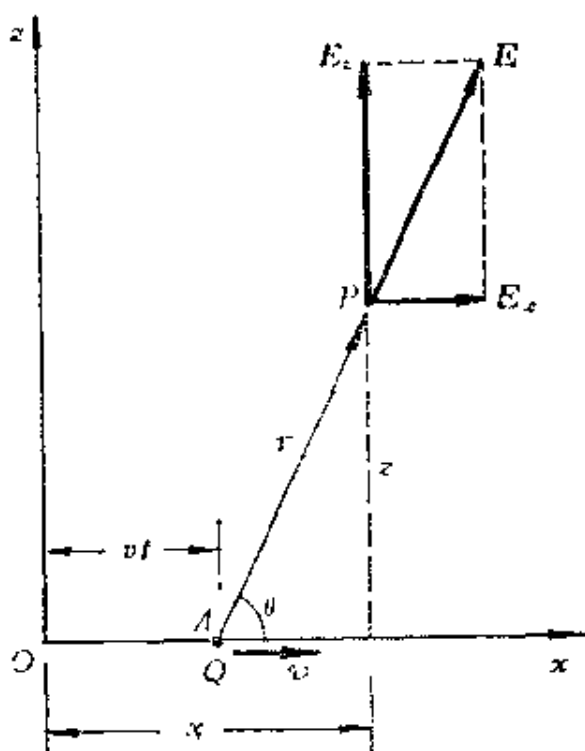


图 2.7 S 系中的运动电荷

$$= \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Q^2(1-\beta^2)^2}{r^4(1-\beta^2\sin^2\theta)^3},$$

式中 θ 是矢径 r 与电荷 Q 的速度 v 的方向之间的夹角。

于是

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \quad (2.11)$$

根据上面确定的电场方向, 此式可写成矢量形式

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.12)$$

从上式的结果可以看出, 运动的点电荷的电场不再具有球对称性。它的电场用电力线描绘如图(2.8)所示。电力线从电荷运动的前方和后方向垂直于运动方向的平面附近集聚, 总电力线条数和点电荷静止时一样, 仍为 Q/ϵ_0 。

在运动电荷的前方或后方的电场为

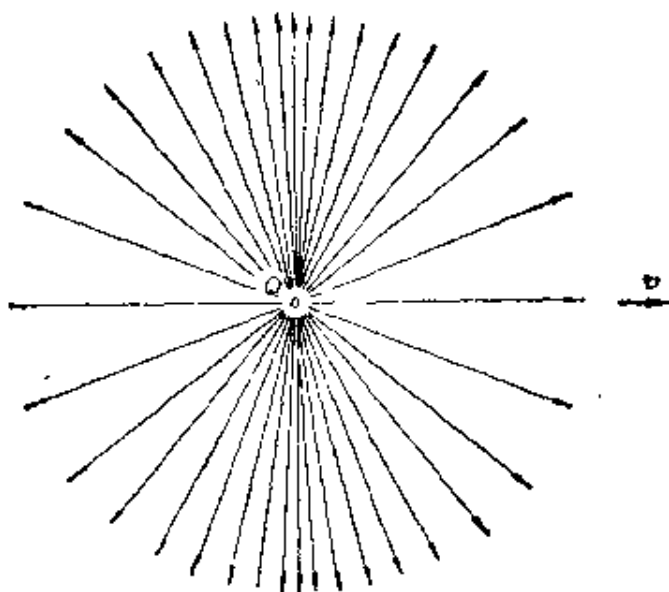


图 2.8 运动的点电荷的电力线

$$E_{0R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 - \beta^2) \quad (2.13)$$

这比 Q 静止时要小。

在运动电荷所在的垂直于其速度的平面内的电场为

$$E_{\perp/2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad (2.14)$$

这比 Q 静止时要大。

当 $v \ll c$ 时

$$\mathbf{E} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.15)$$

这正是静止的点电荷的场强分布公式，也应该是它！

[例] 在 S 系中，一个点电荷 q_1 以匀速 $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ 运动， $t=0$ 时通过原点 O 。另一点电荷 q_2 静止于 z 轴上的点 $(0, 0, z)$ (图 2.9)。求 $t=0$ 时， q_2 受 q_1 的作用力。

解：利用匀速直线运动的点电荷的电场强度公式(2.12)式可求得 $t=0$ 时刻 q_2 处的场强 E 。由于 $\theta = \pi/2$ ，所以

$$\mathbf{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \hat{\mathbf{z}}$$

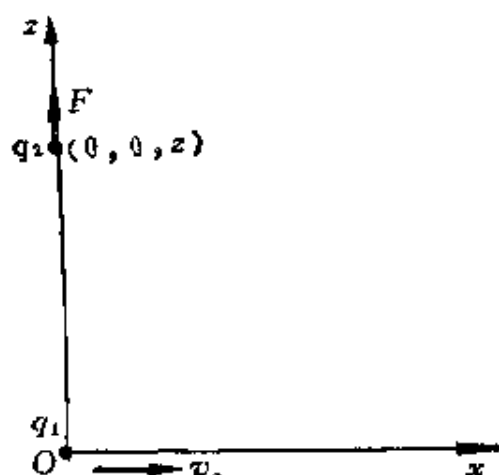


图 2.9

由于 q_2 是静止的, 所以根据(1.8)式 $F = qE$, 得 q_2 受 q_1 的作用力为

$$F = q_2 E = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \hat{z}$$

方向沿 z 轴方向。

§ 2.4 静电场对运动电荷的作用

以上借助于电场概念讨论了静止电荷或运动电荷对静止电荷的作用力。这一节我们讨论静止电荷对运动电荷的作用力。至于运动电荷对运动电荷的作用力则留到第七章讨论。

设在 S 参照系中, 电荷 q 以速度 v 运动, 现在来求静电场 E 对它的作用力。我们采取以下步骤。首先, 利用电荷 q 在其中静止的参照系 S' 。根据电场变换式(2.6)式, 由 E 求出在 S' 系中的电场 E' 。由于 q 在 S' 系中静止, 所以根据(1.8)式, 它在 S' 系中受的力就是 $F' = qE'$ 。然后, 再根据狭义相对论力的变换公式把 F' 换算回 S 系中, 即得出运动电荷 q 受电场 E 的作用力。

为了方便起见, 我们把相对论力的变换公式列在下面。设一个粒子在 S' 系中以速度 v' 运动, 在此参照系中粒子受的力为 F' 。再设 S' 系以恒速 $u = u\hat{x}$ 相对于 S 系运动, 则在 S 系中, 该粒子受

的力应为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \frac{F'_x + \frac{\beta}{c} F' \cdot v'}{1 - \frac{\beta}{c} v'_x}, & F_y &= \frac{F'_y / \gamma}{1 + \frac{\beta}{c} v'_x} \\ F_z &= \frac{F'_z / \gamma}{1 + \frac{\beta}{c} v'_x} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

式中 $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = u/c$ 。

下面我们来求静电场对运动电荷的作用力。如图(2.10)所示, 设在 S 系中有两个静止的带电平板垂直于 x 轴的方向平行放置, 其间静电场的电场强度为 $E = E_x$ 。今有一电荷 q 在两板间沿 x 轴正方向运动, 速度为 $v = v\hat{x}$ 。

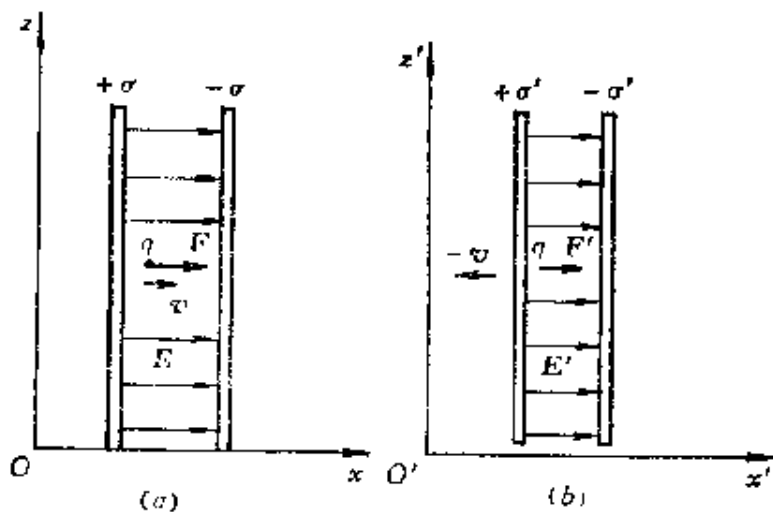


图 2.10 纵向电场对运动电荷的作用力

在 S' 系中, q 的速度为 $v' = 0$, 因而它受的力为 $F' = F'_x = qE'_x$ 。由于 $E'_x = E_x$, 所以 $F'_x = qE_x$ 。

在力的变换公式(2.16)式中, 由于 $v' = 0$, 且因而 $v'_x = 0$, 所以得 $F_x = F'_x$, 从而得在 S 系中运动电荷 q 受静电场的作用力为

$$F_x = qE_x,$$

又如图 2.11 所示, 设在 S 参照系中, 两个静止的带电平板垂

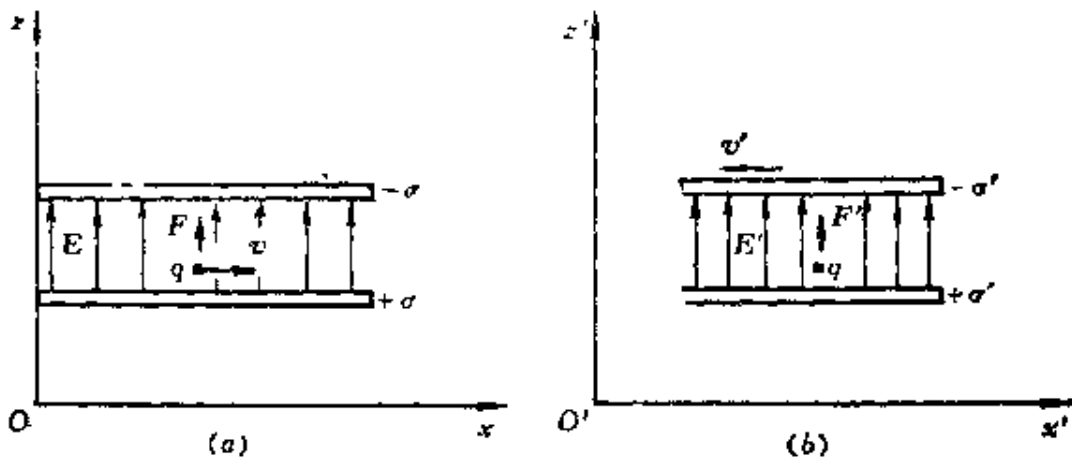


图 2.11 横向电场对运动电荷的作用力

直于 z 轴方向平行放置, 其间静电场的电场强度为 $E = E_z$ 。一个电荷 q 在板间以速度 $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ 运动。

在 S' 系中, 由于 $E'_z = \gamma E_z$, 所以电荷 q 受的力为 $F' = F'_z = qE'_z = \gamma qE_z$ 。将此 F'_z 值代入力的变换公式(2.16)式的第三式中, 即可求得在 S 系中运动电荷受的力为

$$F_z = qE_z。$$

此关系式对 y 方向的力和电场显然也成立。

在一般情况下, S 系中的任意点的电场 E 可以沿任意方向。这时可以先把电场分解为三个分量, 然后按上面的公式求出力的三个分量, 再进行叠加求出合力。其结果可表示为

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \quad (2.17)$$

这一结果说明, 静电场 E 对运动电荷 q 的作用力和对静止电荷的作用力一样, 都由同一公式确定。或者说, 静电场对电荷 q 的作用力与电荷的运动速度无关。

证明上述结论的最熟知的实验是电子束在两平行带电平板之间的偏转。在示波管中两个静止的平行带电平板间形成静电场。对通过板间的电子束的偏转所作的实验测量表明, 作用在电子上的力的确与电子速度无关, 都可以用 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ 来计算, 其中 E 是两平

板间的静电场场强。实际上大家处理这类问题时,正是这样做的。

本章提要

1. 高斯定律: $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{in}$, 对运动的场源电荷也成立;

2. 电场的变换: 在 S' 系中场源电荷保持静止, 其场强为 \mathbf{E}' , 在 S 系中场强为 \mathbf{E} 则

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma E'_y, \quad E_z = \gamma E'_z$$

3. 做匀速直线运动的点电荷 Q 的电场

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{\mathbf{r}}$$

4. 运动电荷的电场 \mathbf{E} 对静止电荷 q 的作用力: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$.

5. 静电场 \mathbf{E} 对电荷 q 的作用力: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, q 是静止或运动的电荷。

习 题

2.1 有两块相对的水平平行矩形带电板, 板间距离为 2 cm, 板的东西长 20 cm, 南北长 10 cm, 它们静止于实验室参照系中。将它们分别带上 $+2.5 \times 10^{-9}$ C 和 -2.5×10^{-9} C 的电量后, 负板上有多少多余电子? 板间场强有多大?

在向东以 0.8 c 的速度运动的参照系中测量, 两板的尺寸如何? 负板上有多少多余的电子? 板间场强多大? 在向上以 0.6 c 的速度运动的参照系中测量, 上述各问的答案又如何?

2.2 在一无限大带正电的平面在其中静止的参照系中, 测得该平面的面电荷密度为 σ' 。在另一参照系中观察, 此带电平面平行于 xy 平面, 且以速度 $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ 沿 x 轴匀速运动。在这一参照系中测得的平面两侧的电场的方向和大小如何?

2.3 一质子以 0.99 c 的速度沿直线匀速飞行。求在其正前方, 正后方,

正左方距离都是 10^{-10} m 处的电场强度各多大?

2.4 用运动电荷的电场公式求积分证明: 一长直带电直线沿线的方向以速度 v 运动时与直线距离为 a 的一点的场强方向与直线垂直, 大小为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a},$$

式中 λ 为运动的导线的线电荷密度。

第三章 电 势

本章要求

1. 理解并能证明静电场的保守性。
2. 理解电势概念引入的条件和它的意义,掌握利用场强线积分和电势叠加求已知电荷分布的电势的方法。
3. 理解等势面的意义及它和电力线的关系。
4. 理解电势梯度的意义,并能利用它由电势求电场强度。
5. 理解电势能、电势差、电场力的功之间的关系。
- *6. 理解电荷系的静电能概念。

§ 3.1 静电场的保守性

本章从功能的角度研究静电场的性质。我们先从库仑定律出发证明静电场是保守场。

图3.1中,以 q 表示固定于某处的一个点电荷,当另一电荷 q_0 在它的电场中由 P_1 点沿任一路径移到 P_2 点时, q_0 受的静电场力所做的功为

$$A_{12} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.1)$$

上式两侧除以 q_0 ,得到

$$\frac{A_{12}}{q_0} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.2)$$

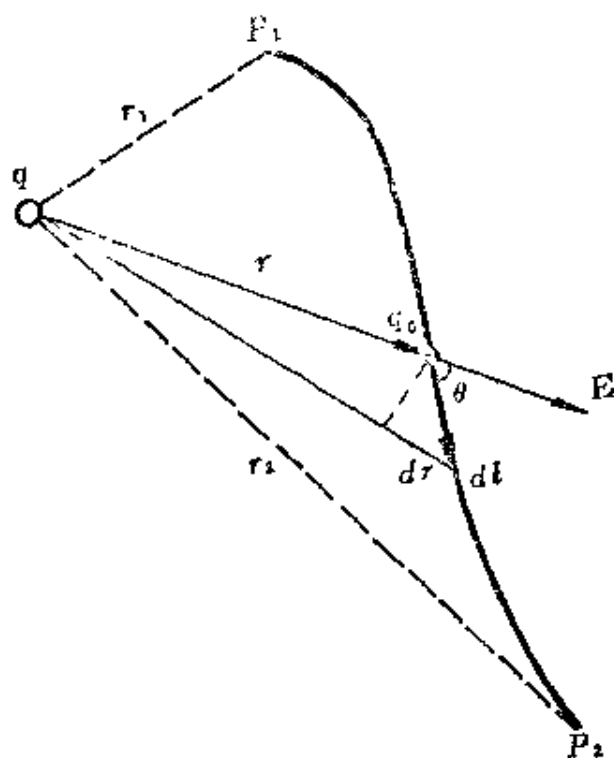


图 3.1 电荷运动时电场力做功的计算

(3.2) 式等号右侧的积分 $\int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 叫电场强度 \mathbf{E} 沿任意路径 L 的线积分, 它表示在电场中从 P_1 点到 P_2 点移动单位正电荷时电场力所做的功。由于这一积分只由 q 的电场强度 \mathbf{E} 的分布决定, 而与被移动的电荷的电量无关, 所以可以用它来说明电场的性质。

对于静止的点电荷 q 的电场来说, 它的电场强度公式为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$$

将此式代入到(3.2)式中, 得场强 \mathbf{E} 的线积分为

$$\int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}$$

从图 3.1 看出, $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = r \cos\theta dl = r dr$, 这里 θ 是从电荷 q 引到 q_0 的矢径与 q_0 的位移元 $d\mathbf{l}$ 之间的夹角。将此关系代入上式, 得

$$\int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.3)$$

由于 r_1 和 r_2 分别表示从点电荷 q 到起点和终点的距离, 所以此结果说明, 在静止的点电荷 q 的电场中, 电场强度的线积分只与积分路径的起点和终点位置有关, 而与积分路径无关。也可以说在静止的点电荷的电场中, 移动单位正电荷时, 电场力所做的功只取决于被移动的电荷的起点和终点的位置, 而与移动的路径无关。

对于由许多静止的点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 组成的电荷系, 由场强叠加原理可得到其电场强度 E 的线积分为

$$\begin{aligned} \int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{(P_1)}^{(P_2)} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \dots + \int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

因为上述等式右侧每一项线积分都与路径无关, 而取决于被移动电荷的始末位置, 所以总电场强度 E 的线积分也具有这一特点。

对于静止的连续的带电体, 可将其看作无数电荷元的集合, 因而它的电场的场强的线积分同样具有这样的特点。

因此我们可以得出结论: 对任何静电场, 电场强度的线积分 $\int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 都只取决于起点 P_1 和终点 P_2 的位置而与连结 P_1 和 P_2 点间的路径无关, 静电场的这一特性叫静电场的保守性。

静电场的保守性还可以表述成另一种形式。如图 3.2 所示, 在静电场中作一任意闭合路径 L , 考虑场强 E 沿此闭合路径的线积分。在 L 上取任意两点 P_1 和 P_2 , 它们把 L 分成 L_1 和 L_2 两段, 因此, 沿 L 环路的场强的线积分为

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{L_1}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{L_2}^{(P_1)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{L_1}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{L_2}^{(P_1)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

由于场强的线积分与路径无关, 所以上式最后的两个积分值相等。

因此

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.4)$$

此式表明,在静电场中,场强沿任意闭合路径的线积分等于零。这就是静电场的保守性的另一种说法,称作静电场环流定理。

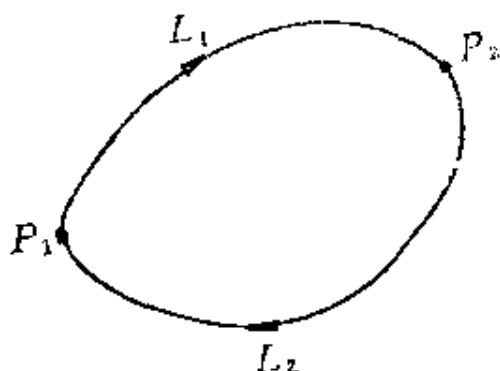


图 3.2 静电场的环流定理

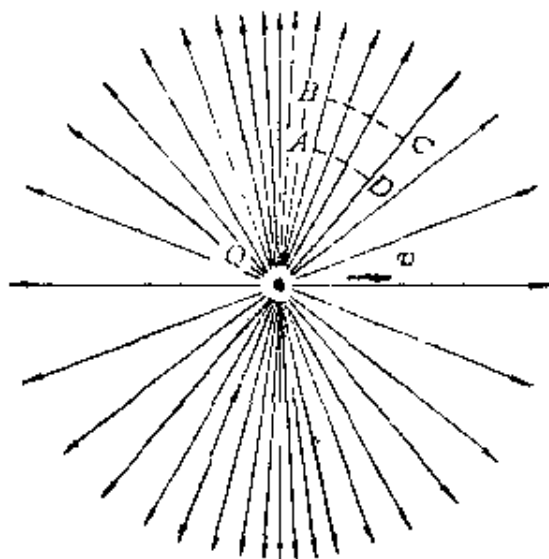


图 3.3 运动电荷的电场是非保守场

运动电荷的电场是不是保守场? 这可论述如下:图 3.3 画出了一个匀速运动的点电荷 Q 的电场分布。作一闭合路径 $ABCD A$, 使 \widehat{AD} 、 \widehat{BC} 为垂直于电力线的两段圆弧; \overline{AB} 、 \overline{DC} 为沿径向的两个线段。计算 E 沿此闭合路径的线积分时, 两圆弧对积分无贡献。由于 \overline{AB} 线段上的电场要比 \overline{DC} 线段上的电场强, 而此两线段长度相等, 所以沿这二线段场强的线积分的大小不相等。因此, 场强沿此闭合路径的线积分将不等于零, 即

$$\oint_{ABCD A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$$

这一结果表明, 运动电荷的电场不是保守场。

§ 3.2 电势差和电势

静电场的保守性意味着, 对静电场来说, 存在着一个由电场中

各点的位置所决定的标量函数，此函数在 P_1 和 P_2 两点的数值之差等于从 P_1 点到 P_2 点电场强度沿任意路径的线积分，也就等于从 P_1 点到 P_2 点移动单位正电荷时静电场力所做的功。这个函数叫电场的电势(或势函数)，以 U_1 和 U_2 分别表示 P_1 和 P_2 点的电势，就可以有下述定义公式

$$U_1 - U_2 = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.5)$$

$(U_1 - U_2)$ 叫做 P_1 和 P_2 两点间的电势差(也可记作 U_{12})。由于静电场的保守性，在一定的静电场中，对于给定的两点 P_1 和 P_2 ，其电势差具有完全确定的值。

(3.5)式只能给出静电场中任意两点的电势差，而不能确定任一点的电势值。为了给出静电场中各点的电势值，需要预先选定一个参考位置，并指定它的电势为零。这一参考位置叫电势零点。以 P_0 表示电势零点，由(3.5)式可得静电场中任意一点 P 的电势为

$$U = \int_{(P)}^{(P_0)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.6)$$

P 点的电势也就等于将单位正电荷自 P 点沿任意路径移到电势零点时，电场力所做的功。电势零点选定后，电场中所有各点的电势值就由(3.6)式唯一地确定了。由此确定的电势是空间坐标的标量函数，即 $U = U(x, y, z)$ 。

对于电势零点的选择，只是视方便而定。当电荷只分布在有限区域时，电势零点通常选在无限远处。这时(3.6)式可以写成

$$U = \int_{(P)}^{(\infty)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.7)$$

在实际问题中，也常常选地球的电势为零电势。

由(3.6)式明显看出，电场中各点电势的大小与电势零点的选择有关，相对于不同的电势零点，电场中同一点的电势会有不同的

值。因此,在具体说明各点电势数值时,必须事先明确电势零点在何处。

电势和电势差具有相同的单位,在国际单位制中,电势的单位为焦耳/库仑(记作J/C),这单位也叫伏特(Volt, V),即

$$1\text{V} = 1\text{J/C}$$

当电场中电势分布已知时,利用电势差定义式(3.5)式,可以很方便地计算出点电荷在静电场中移动时电场力做的功。由(3.1)式和(3.5)式可知,电荷 q_0 从 P_1 点移到 P_2 点时,静电场力做的功可用下式计算

$$A_{12} = q_0 \int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0(U_1 - U_2) \quad (3.8)$$

下面举例说明当电荷分布已知时,如何求出电势的分布。利用(3.6)式进行计算时,一是要明确电势零点,再是要先求出电场的分布,然后沿一条路径进行积分。

[例1] 求点电荷 q 的电场中的电势分布。

解:取无限远作为电势零点。由于点电荷场强为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

于是由定义式(3.6),与点电荷相距为 r 的 P 点电势为

$$U = \int_{(P)}^{(\infty)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(P)}^{(\infty)} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

演算此积分,可得

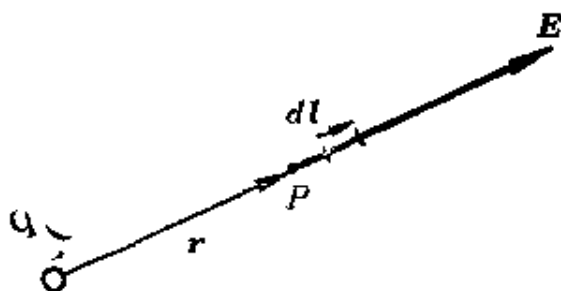


图 3.4 计算点电荷电场的电势

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.9)$$

此式中视 q 的正、负, 电势 U 可正、可负。在正电荷的电场中, 各点电势均为正值, 离电荷越远的点, 电势越低。在负电荷的电场中, 各点电势均为负值, 离电荷越远的点, 电势越高。

[例 2] 求均匀带电球面的电场中的电势分布。球面半径为 R , 总带电量为 q 。

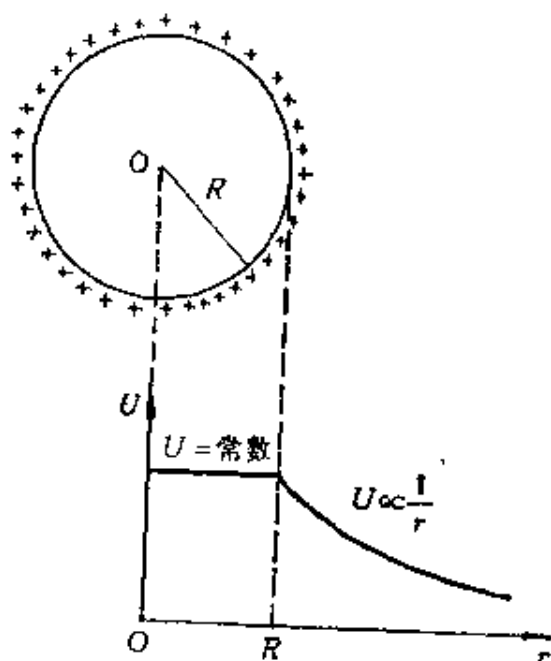


图 3.5 均匀带电球面的电势分布

解: 以无限远为电势零点。由于在球面外直到无限远处场强的分布都和电荷集中到球心处的一个点电荷的场强分布一样, 因此, 球面外任一点的电势应与上例结果相同, 即:

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R)$$

若 P 点在球面内 ($r < R$), 由于球面内、外场强的分布不同, 所以由定义式 (3.6), 积分要分两段, 即

$$U = \int_{(r)}^{(\infty)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(r)}^{(R)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{(R)}^{(\infty)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

因为在球面内各点场强为零, 而球面外场强为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r},$$

所以上式结果为

$$U = \int_{(R)}^{(\infty)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (r \leq R)$$

这说明均匀带电球面内各点电势相等,都等于球面上各点的电势。电势随 r 的变化曲线($U \sim r$ 曲线)如图 3.5 所示。和场强分布 $E \sim r$ 曲线(图 1.23)相比,可看出,在球面处($r=R$),场强不连续,而电势是连续的。

[例 3] 求无限长均匀带电直线的电场中的电势分布。

解: 由于无限长均匀带电直线周围的场强的大小为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

方向垂直于带电直线。如果仍选无限远处作为电势零点,则由 $\int_{(P)}^{(\infty)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 积分的结果可知各点电势都将为无限大值而失去意义。这时我们可选某一距带电直线为 r_0 的 P_0 点(图 3.6)为电势零点,则距带电直线为 r 的 P 点的电势为

$$U = \int_{(P)}^{(P_0)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(P)}^{(P')} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{(P')}^{(P_0)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

式中积分路径 $\overline{PP'}$ 段与带电直线平行,而 $\overline{P'P_0}$ 段与带电直线垂直。由于 $\overline{PP'}$ 段与电场方向垂直,所以上式等号右侧第一项积分为零,

$$\begin{aligned} U &= \int_{(P')}^{(P_0)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln r_0 \end{aligned}$$

这一结果可以一般地表示为

$$U = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

式中 C 为与电势零点的位置有关的常数。

由此例看出,当电荷的分布扩展到无限远时,电势零点不能再选在无限远处。

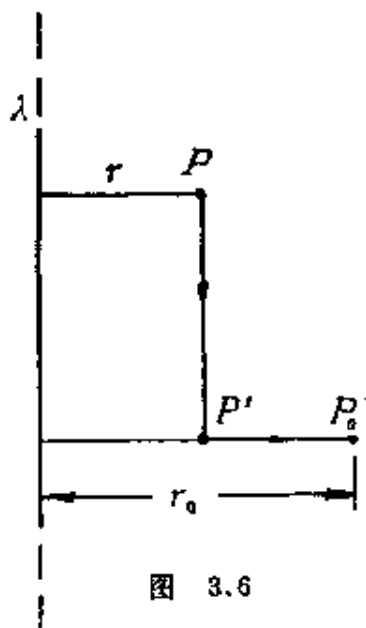


图 3.6

§ 3.3 电势叠加原理

已知电荷分布求其电场中的电势分布时,除了直接利用定义公式(3.6)式以外,还可以在点电荷电势公式(3.9)式的基础上应

用叠加原理来求出结果。这后一方法的原理如下。

设场源电荷系由若干个带电体组成，它们各自分别产生的电场为 E_1, E_2, \dots 。由叠加原理知道总场强 $E = E_1 + E_2 + \dots$ 。根据定义公式(3.6)式，它们的电场中 P 点的电势应为

$$\begin{aligned} U &= \int_{(P)}^{(P_0)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(P)}^{(P_0)} (E_1 + E_2 + \dots) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{(P)}^{(P_0)} E_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{(P)}^{(P_0)} E_2 \cdot d\mathbf{l} + \dots \end{aligned}$$

再由定义式(3.6)式可知，上式最后面的一行每一积分分别是各带电体单独存在时产生的电场在 P 点的电势 U_1, U_2, \dots 。因此，就有

$$U = \sum U_i \quad (3.10)$$

此式称作电势叠加原理。它表示一个电荷系的电场中任一点的电势等于每一个带电体单独存在时在该点所产生的电势的代数和。

实际上应用电势叠加原理时，可以从点电荷的电势出发，先考虑场源电荷系由许多点电荷组成的情况。这时将点电荷电势公式(3.9)式代入(3.10)式，可得点电荷系的电场中 P 点的电势为

$$U = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (3.11)$$

式中 r_i 为从点电荷 q_i 到 P 点的距离。

对一个电荷连续分布的带电体，可以设想它由许多电荷元 dq 所组成。将每个电荷元都当成点电荷，就可以由(3.11)式得出用叠加原理求电势的积分公式

$$U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.12)$$

应该指出的是：由于公式(3.11)或(3.12)都是以点电荷的电势公式(3.9)式为基础的，所以应用(3.10)和(3.11)式时，电势零点都已选定在无限远处了。

下面举例说明电势叠加原理的应用。

〔例1〕 求电偶极子的电场中的电势分布。已知电偶极子中两点电荷 $-q$ 、 $+q$ 间的距离为 l 。

解：设场点 P 离 $+q$ 和 $-q$ 的距离分别为 r_+ 和 r_- ， P 离偶极子中点 O 的距离为 r (图 3.7)。

根据电势叠加原理， P 点的电势为

$$U = U_+ + U_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\epsilon_0 r_+ r_-}$$

对于离电偶极子比较远的点，即 $r \gg l$ 时，应有

$$r_+ r_- \approx r^2, \quad r_- - r_+ \approx l \cos\theta,$$

θ 为 OP 连线与 l 之间夹角，将这些关系代入上式，即可得

$$U = \frac{ql \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

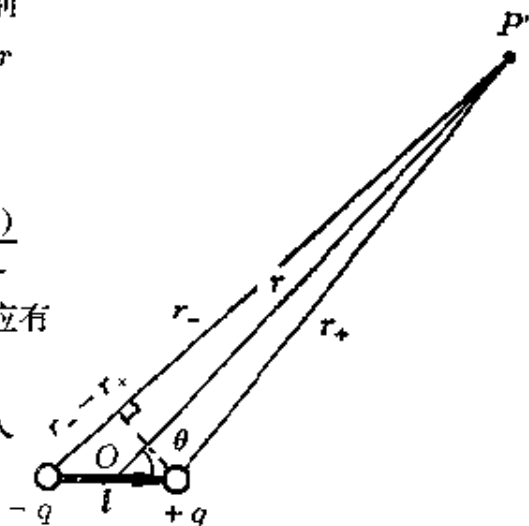


图 3.7 计算电偶极子的电势

〔例2〕 一半径为 R 的均匀带电细圆环，所带总电量为 q ，求在圆环轴线上任意点 P 的电势。

解：图 3.8 中以 x 表示从环心到 P 点的距离，以 dq 表示在圆环上任一电荷元。由(3.11)式可得 P 点的电势为

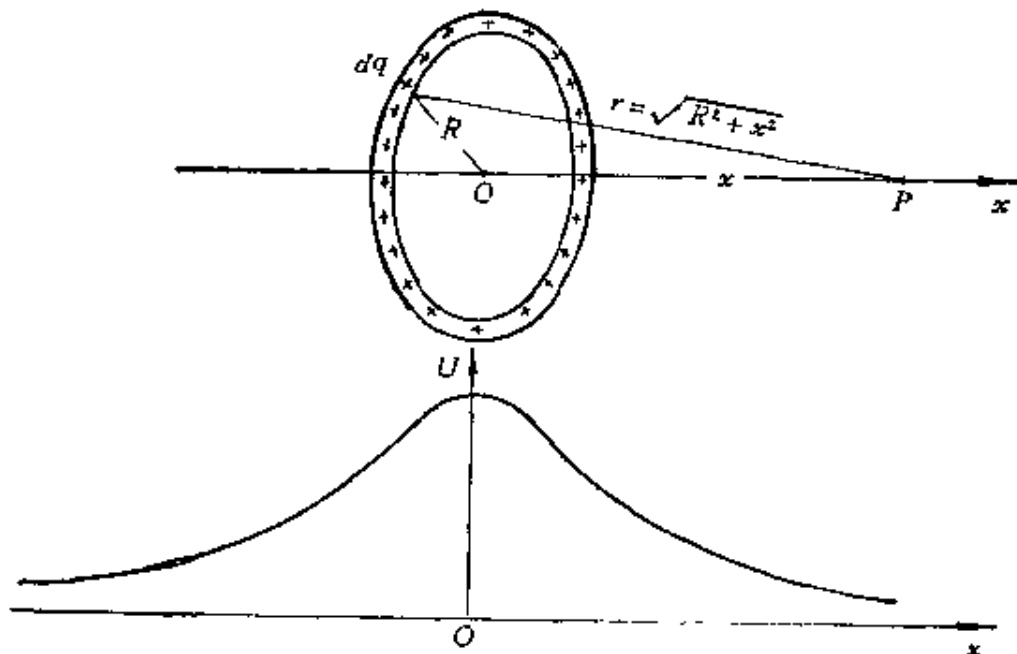


图 3.8 均匀带电圆环轴线上的电势分布

$$U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int dq = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}$$

当 P 点位于环心 O 处时, $x=0$, 则

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

[例 3] 两个同心的均匀带电球面, 半径分别为 $R_A=5\text{ cm}$, $R_B=10\text{ cm}$, 分别带有电量 $q_A=+2\times 10^{-9}\text{ C}$, $q_B=-2\times 10^{-9}\text{ C}$ 。求距球心距离为 $r_1=15\text{ cm}$, $r_2=6\text{ cm}$, $r_3=2\text{ cm}$ 处的电势。

(图 3.9)

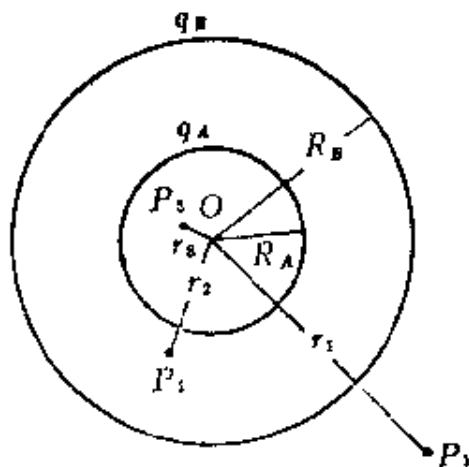


图 3.9

解: 这一带电系统的电场的电势分布可以由两个带电球面的电势相加求得。每一个带电球面的电势分布已在上一节例 2 中求出。由之可得: 在外球外侧 $r=r_1$ 处

$$U_1 = U_{A1} + U_{B1} = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 r_1} = 0$$

在两球面中间 $r=r_2$ 处

$$\begin{aligned} U_2 &= U_{A2} + U_{B2} = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 R_B} \\ &= \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-9}}{0.06} + \frac{9 \times 10^9 \times (-2 \times 10^{-9})}{0.10} \\ &= 120 \text{ V} \end{aligned}$$

在内球内侧 $r=r_3$ 处

$$\begin{aligned} U_3 &= U_{A3} + U_{B3} = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 R_A} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 R_B} \\ &= \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-9}}{0.05} + \frac{9 \times 10^9 \times (-2 \times 10^{-9})}{0.10} \\ &= 180 \text{ V} \end{aligned}$$

我们常用等势面来表示电场中电势的分布。在电场中电势相等的点所组成的曲面叫等势面。不同的电荷分布的电场具有不同形状的等势面。对于一个点电荷 q 的电场, 根据(3.9)式, 它的等势面应是一系列以点电荷所在点为球心的同心球面(图 3.10)。

为了直观地比较电场中各点的电势, 画等势面时, 使相邻等势

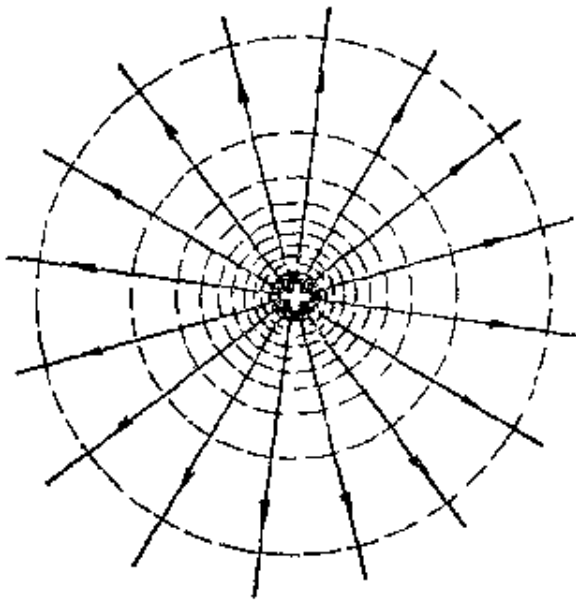


图 3.10 正点电荷的电力线与等势面

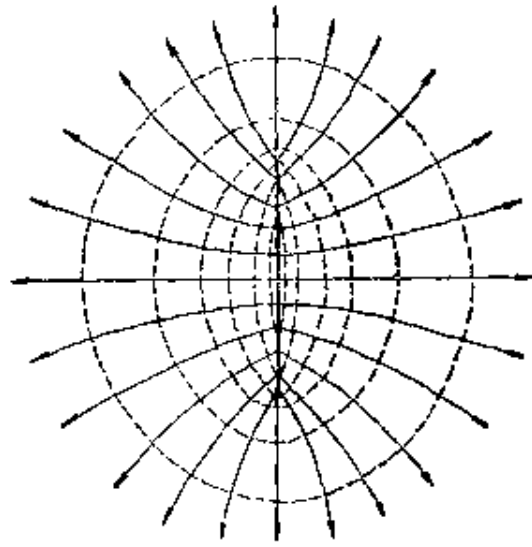


图 3.11 均匀带正电圆盘的电力线与等势面

面的电势差为常数。图 3.11 中画出了均匀带正电圆盘的电场的等势面，图 3.12 中画出了等量异号电荷的电场的等势面，其中实线表示电力线，虚线代表等势面与纸面的交线。

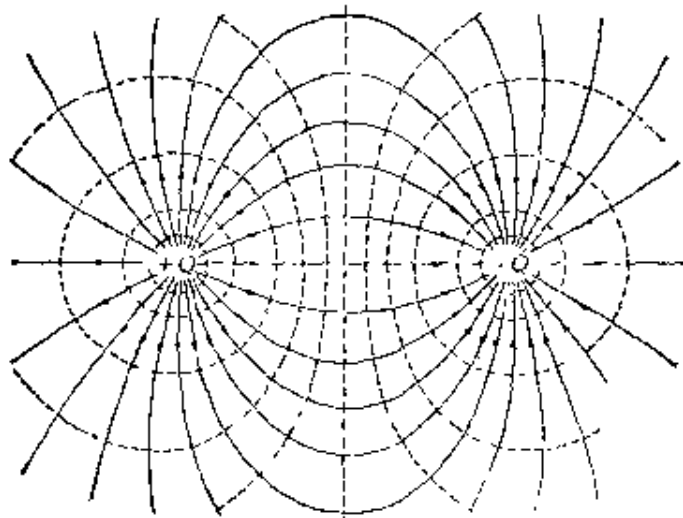


图 3.12 等量异号电荷的电力线与等势面

根据等势面的意义可知它和电场分布有如下关系：

(1) 等势面与电力线处处正交；

(2) 两等势面相距较近处的场强数值大, 相距较远处场强数值小。

等势面的概念在实际问题中也很实用, 主要是因为实际遇到的很多带电问题中等势面(或等势线)的分布容易通过实验条件描绘出来, 并由此可以分析电场的分布。

§ 3.4 电势梯度

电场强度和电势都是描述电场中各点性质的物理量, (3.6)式以积分形式表示了场强与电势之间的关系: 电势等于电场强度的线积分。反过来, 场强与电势的关系也应该可以用微分形式表示出来, 即场强等于电势的导数。但由于场强是一个矢量, 这后一导数关系显得复杂一些。下面我们来导出场强与电势的关系的微分形式。

在电场中考虑任意的相距很近的两点 P_1 和 P_2 (图 3.13), 从 P_1 到 P_2 的微小位移矢量为 $d\mathbf{l}$ 。根据定义式(3.6)式, 这两点间的电势差为

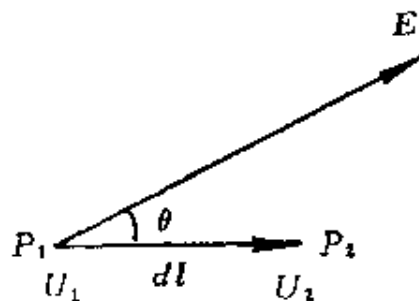


图 3.13 电势的空间变化率

$$U_1 - U_2 = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

由于 $U_2 = U_1 + dU$, 其中 dU 为 U 沿 $d\mathbf{l}$ 方向的增量, 所以

$$U_1 - U_2 = -dU = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E dl \cos\theta$$

式中 θ 为 \mathbf{E} 与 $d\mathbf{l}$ 之间的夹角。由此式可得

$$E \cos\theta = E_t = -\frac{dU}{dl} \quad (3.13)$$

上式中 $\frac{dU}{dl}$ 为电势函数沿 $d\mathbf{l}$ 方向经过单位长度时的变化, 即电势

对空间的变化率。(3.13)式说明,在电场中某点场强沿某方向的分量等于电势沿此方向的空间变化率的负值。

由(3.13)式可看出,当 $\theta=0$ 时,即 dl 沿着 E 的方向时,变化率 dU/dl 有最大值,这时

$$E = -\frac{dU}{dl} \quad (3.14)$$

过电场中任意一点,沿不同方向其电势随距离的变化率一般是不等的。沿某一方向其电势随距离的变化率最大,此最大值称为该点的电势梯度,电势梯度是一个矢量,它的方向是该点附近电势升高最快的方向。

(3.14)式说明,电场中任意点的场强等于该点电势梯度的负值,负号表示该点场强方向和电势梯度方向相反,即场强指向电势降低的方向。

当电势函数用直角坐标表示时,即 $U=U(x, y, z)$,由(3.13)式可求得电场强度沿三个坐标轴方向的分量,它们是

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (3.15)$$

将上式合在一起用矢量表示为

$$E = -\left(\hat{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (3.16)$$

这就是(3.14)式用直角坐标表示的形式。梯度常用 grad 或 ∇ 算符表示,这样(3.14)式又常写作

$$E = -\text{grad}U = -\nabla U \quad (3.17)$$

上式就是电场强度与电势的微分关系,由它可方便地根据电势分布求出场强分布。

需要指出的是,场强与电势的关系的微分形式说明,电场中某点的场强决定于电势在该点的空间变化率,而与该点电势值本身无直接关系。

电势梯度的单位是伏/米(V/m)。根据(3.14)式,场强的单位也可用 V/m 表示,它与场强的另一单位 N/C 是一样的。

[例 1] 根据 § 3.3 [例 2] 中得出的在均匀带电细圆环轴线上任一点的电势公式

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}}$$

求轴线上任一点的场强。

解: 由于均匀带电细圆环的电荷分布对于轴线是对称的,所以轴线上各点的场强在垂直于轴线方向的分量为零,因而轴线上任一点的场强方向沿 x 轴。由(3.16)式

$$\begin{aligned} E = E_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

这一结果与 § 1.4 中 [例 3] 的结果相同。

[例 2] 根据在 § 3.3 [例 1] 中已得出的电偶极子的电势公式

$$U = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

求电偶极子的场强分布。

解: 建立坐标如图 3.14。令偶极子中心位于坐标原点 O , 并使电矩指向 x 轴正方向。电偶极子的场强显然具有对于其轴线(x 轴)的对称性,因此我们可以只求在 xy 平面内的电场分布。

由于 $r^2 = x^2 + y^2$

及 $\cos\theta = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}$

所以

$$U = \frac{px}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}}$$

对任一点 $P(x, y)$, 由(3.16)式得出

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{p(2x^2-y^2)}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}} \\ E_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{3pxy}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

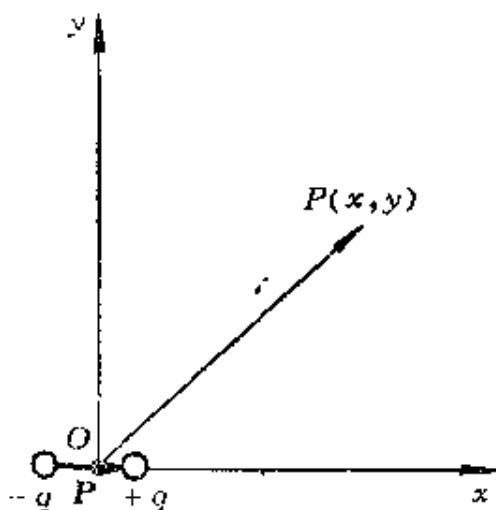


图 3.14 电偶极子的电场

若 P 点在 x 轴上, 则 $y=0$, 得

$$E_x = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 x^3}, \quad E_y = 0$$

若 P 点在 y 轴上, 则 $x=0$, 得

$$E_x = \frac{-p}{4\pi\epsilon_0 y^3}, \quad E_y = 0$$

这一结果与 § 1.4 中 [例 1] 的结果相同。

由于电势是标量, 因此根据电荷分布用叠加法求电势分布是标量积分, 再根据 (3.17) 式由电势的空间变化率求场强分布是微分运算。这虽然经过两步运算, 但是比起根据电荷分布直接利用场强叠加来求场强分布有时还是简单些, 因为后一运算是矢量积分。

§ 3.5 电荷在外电场中的静电势能

由于静电场是保守场, 也即在静电场中移动电荷时, 静电力做功与路径无关, 所以任一电荷在静电场中都具有势能, 这一势能叫**静电势能**(简称**电势能**)。电荷 q_0 在静电场中移动时, 它的电势能的减少就等于电场力所做的功。以 W_1 和 W_2 分别表示电荷 q_0 在静电场中 P_1 点和 P_2 点时具有的电势能, 就应该有

$$A_{12} = W_1 - W_2$$

将此式和 (3.8) 式

$$A_{12} = q_0(U_1 - U_2) = q_0U_1 - q_0U_2$$

对比, 可取 $W_1 = q_0U_1$, $W_2 = q_0U_2$, 或者, 一般地取

$$W = q_0U \quad (3.18)$$

这就是说, 一个电荷在电场中某点的电势能等于它的电量与电场中该点电势的乘积。在电势零点处, 电荷的电势能为零。

应该指出，一个电荷在外电场中的电势能是属于该电荷与产生电场的电荷系所共有的。

电势能的国际制单位用焦耳(J)表示，还有一种常用的能量单位叫做“电子伏”(记作 eV)，1 电子伏表示 1 个电子通过 1 伏电势差时所获得的动能。“电子伏”与“焦耳”的关系为

$$1\text{eV} = 1.60 \times 10^{-19}\text{J}.$$

[例 1] 求电矩 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ 的电偶极子在均匀外电场 \mathbf{E} 中的电势能 (图 3.15)。

解：由(3.18)式，在均匀外电场中电偶极子中正、负电荷的电势能分别为

$$W_+ = qU(+), \quad W_- = -qU(-)$$

电偶极子在外电场中的电势能为

$$\begin{aligned} W &= W_+ + W_- = q[U(+)-U(-)] \\ &= -qlE \cos\theta = -pE \cos\theta. \end{aligned}$$

式中 θ 是 \mathbf{p} 与 \mathbf{E} 的夹角。上式写成矢量形式则有

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (3.19)$$

上式表明，当电偶极子取向与外电场一致时，电势能最低；取向相反时，电势能最高。

[例 2] 电子与原子核距离为 r ，电子带电量为 $-e$ ，原子核带电量为 Ze 。求电子在原子核电场中的电势能。

解：以无限远为电势零点，在原子核的电场中，电子所在处的电势为

$$U = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r}$$

由式(3.18)知，电子在原子核电场中的电势能为

$$W = -eU = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

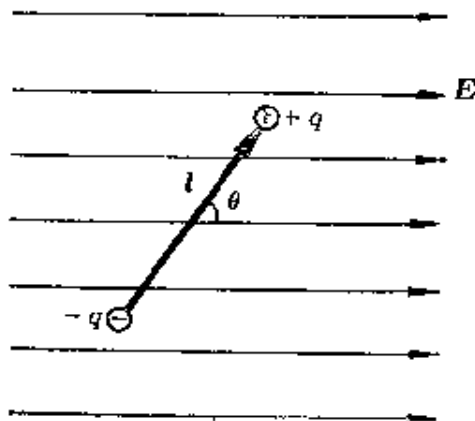


图 3.15 电偶极子在外电场中的电势能计算

*§ 3.6 电荷系的静电能

设 n 个电荷组成一个电荷系。将各电荷从现有位置彼此分散到无限远时，它们之间的静电力所做的功^(注)定义为电荷系在原来状态的静电能，也称相互作用能(简称互能)。

下面推导点电荷系的互能公式。

我们先求相距为 r 的两个点电荷 q_1 和 q_2 的互能。令 q_1 不动，而 q_2 从它所在的位置移到无限远时， q_2 所受的电场力 F_2 做的功为

$$A_{r \rightarrow \infty} = \int_{(r)}^{(\infty)} F_2 \cdot dl,$$

将库仑力公式代入，可得

$$\begin{aligned} A_{r \rightarrow \infty} &= \int_{(r)}^{(\infty)} F_2 \cdot dl = \int_{(r)}^{(\infty)} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dl \\ &= \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

这也就是 q_1 和 q_2 相距 r 时，它们的相互作用能 W_{12} ，即

$$W_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.20)$$

由于 $U_2 = q_1/4\pi\epsilon_0 r$ 表示 q_2 所在点由 q_1 所产生的电势，所以上式可写为

$$W_{12} = q_2 U_2$$

又由于 $U_1 = q_2/4\pi\epsilon_0 r$ 表示 q_1 所在点由 q_2 所产生的电势，所以 W_{12} 又可写作

$$W_{12} = q_1 U_1$$

(注) 或是把各带电体从无限分离的状态聚集到现在位置时，外力克服电场力所做的功，定义为电荷系现在状态的静电能。

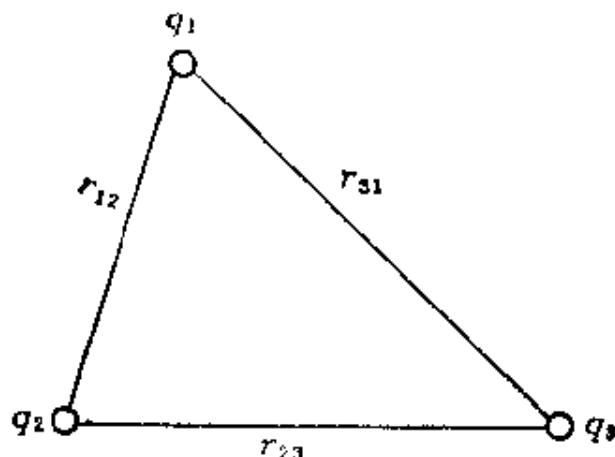


图 3.16 三个点电荷组成的电荷系

合并上两式, 可将 W_{12} 写成对称的形式:

$$W_{12} = \frac{1}{2}(q_1 U_1 + q_2 U_2). \quad (3.21)$$

再求由三个点电荷 q_1 , q_2 和 q_3 组成的电荷系 (图 3.16) 的互能, 以 r_{12} , r_{23} , r_{31} 分别表示它们两两之间的距离。设想按下述步骤移动电荷: 先令 q_1, q_2 不动, 而将 q_3 移到无限远, 在这一过程中, q_3 受 q_1 和 q_2 的力 F_{31} 和 F_{32} 所做的功为

$$A_3 = \int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}) \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{F}_{31} \cdot d\mathbf{l} + \int \mathbf{F}_{32} \cdot d\mathbf{l}$$

将库仑力公式代入, 可得

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_{(r_{31})}^{(\infty)} \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}^2} \hat{\mathbf{r}}_{31} \cdot d\mathbf{l} + \int_{(r_{32})}^{(\infty)} \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{32}^2} \hat{\mathbf{r}}_{32} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{32}} \end{aligned}$$

然后再令 q_1 不动, 将 q_2 移到无限远, 这一过程中电场力做功为

$$A_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}}$$

将三个电荷由最初状态分离到无限远, 电场力做的总功也就是电荷系在初状态时的相互作用能, 即

$$\begin{aligned}
W &= A_2 + A_3 = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{21}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{32}} + \frac{q_3 q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{31}} \\
&= \frac{1}{2} \left[q_1 \left(\frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{21}} + \frac{q_3}{4\pi \epsilon_0 r_{31}} \right) + q_2 \left(\frac{q_3}{4\pi \epsilon_0 r_{32}} + \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{12}} \right) \right. \\
&\quad \left. + q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{23}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} (q_1 U_1 + q_2 U_2 + q_3 U_3),
\end{aligned}$$

式中 U_1, U_2, U_3 分别为 q_1, q_2, q_3 所在处由其他电荷所产生的电势。

上一结果很容易推广到由 n 个点电荷组成的电荷系，该电荷系的相互作用能为

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i U_i \quad (3.22)$$

式中 U_i 为 q_i 所在处由 q_i 以外的其他电荷所产生的电势。

如果只考虑一个带电体时，它的静电能如下定义：设想把该带电体分割成无限多的电荷元，把所有电荷元从现有的集合状态彼此分散到无限远时，电场力所做的功叫原来该带电体的静电能，一个带电体的静电能有时也称自能。因此，一个带电体的静电自能就是组成它的各电荷元间的静电互能。根据(3.22)式，一个带电体的静电自能可以用下式求出

$$W = \frac{1}{2} \int_q U dq \quad (3.23)$$

由于电荷元 dq 为无限小，所以上式积分号内的 U 为带电体上所有电荷在电荷元 dq 所在处的电势。积分号下脚标“ q ”表示积分范围遍及该带电体上所有的电荷。

在很多实际场合，往往需要单独考虑电荷系中某一电荷的行为而将该电荷从电荷系中分离出来，电荷系中的其他电荷所产生的电场对该电荷来说就是外电场了。因此§ 3.5 所述的一个电荷

在外电场中的电势能实际上就是该电荷与产生外电场的电荷系间的相互作用能。例如，上节[例2]中求出的电子在核电场中的电势能实际上是电子和核电荷的相互作用能。

[例1] 一均匀带电球面，半径为 R ，总电量为 Q ，求这一带电系统的静电能。

解：由于带电球面是一等势面，其电势（以无限远为电势零点）为

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

所以，由(3.23)式，此电荷系静电能为

$$W = \frac{1}{2} \int U dq = \frac{1}{2} \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} dq = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \int dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

这一能量表现为均匀带电球面系统的自能。

[例2] 一均匀带电球体，半径为 R ，所带电荷体密度为 ρ 。试求此带电球体的静电能。

解：已知此带电球体的电场强度分布为

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} \quad (r \leq R)$$

$$E_2 = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (r \geq R)$$

球内距球心为 r ，厚度为 dr 的球壳处的电势为

$$U = \int_{(r)}^{(R)} E_1 \cdot dl + \int_{(R)}^{(\infty)} E_2 \cdot dl$$

将 E_1 与 E_2 代入上式，得

$$\begin{aligned} U &= \int_{(r)}^{(R)} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} \cdot dl + \int_{(R)}^{(\infty)} \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dl \\ &= \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2). \end{aligned}$$

于是

$$W = \frac{1}{2} \int U dq = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \rho \cdot 4\pi r^2 \cdot dr = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 R^5$$

本章提要

1. 静电场是保守场: $\oint_L E \cdot dl = 0$

2. 电势差: $U_1 - U_2 = \int_{(P_1)}^{(P_2)} E \cdot dl$

电势: $U_P = \int_{(P)}^{(P_0)} E \cdot dl$ (P_0 是电势零点)

电势叠加原理: $U = \sum U_i$

3. 点电荷的电势: $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

电荷连续分布的带电体的电势:

$$U = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

4. 电场强度 E 与电势 U 的关系:

积分形式: $U_P = \int_{(P)}^{(P_0)} E \cdot dl$

微分形式: $E_t = -\frac{\partial U}{\partial l}$, $E = -\nabla U$

电力线处处与等势面垂直, 并指向电势降低的方向; 电力线密处等势面间距小。

5. 电荷在外电场中的电势能: $W = qU$

移动电荷时电场力做的功:

$$A_{12} = q(U_1 - U_2) = W_1 - W_2$$

*6. 电荷系的静电能: $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i U_i$

思考题

3.1 下列说法是否正确? 请举一例加以论述。

(1) 场强相等的区域,电势也处处相等;

(2) 场强为零处,电势一定为零;

(3) 电势为零处,场强一定为零;

(4) 场强大处,电势一定高。

3.2 用电势的定义直接说明:为什么在正(或负)点电荷电场中,各点电势为正(或负)值,且离电荷越远,电势越低(或高)。

3.3 选一条方便路径直接从电势定义说明偶极子中垂面上各点的电势为零。

3.4 试用环路定理证明:静电场电力线永不闭合。

3.5 如果在一空间区域中电势是常数,对于这区域内的电场你可得出什么结论?如果在一表面上的电势为常数,对于这表面上的电场强度你能得出什么结论?

3.6 同一条电力线上任意两点的电势能是否相等?为什么?

3.7 电荷在电势高的地点的静电势能是否一定比在电势低的地点的静电势能大?

3.8 已知在地球表面以上电场强度方向指向地面,则在地面以上电势随高度增加还是减小?

3.9 如果已知给定点处的 E ,能否算出该点的 U ?如果不能,那么还需要知道些什么才能计算?

3.10 一只鸟停在一根 30000 V 的高压输电线上,它是否会受到危害?

3.11 一段同轴传输线,内导体圆柱的外半径为 a ,外导体圆筒的内半径为 b ,末端有一短路圆盘,如图 3.17 所示。在传输线开路端的内外导体间加上一恒定电势差 V 。测得其内、外导体间的等势面与纸面的交线如图 3.17 所示。试大致画出两导体间的电力线分布图形。

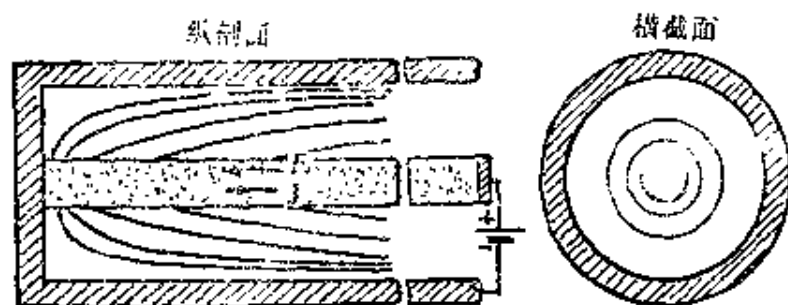


图 3.17 同轴传输线的等势面

习 题

3.1 两均匀带电球壳同心放置,半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$),已知内外球之间的电势差为 V ,求两球壳间的电场分布。

3.2 两个同心球面,半径分别为 10 cm 和 30 cm,小球均匀带有正电荷 1×10^{-8} C,大球均匀带有正电荷 1.5×10^{-8} C。求离球心分别为①20cm,②50cm 的各点的电势。

3.3 两个同心的均匀带电球面,半径分别为 $R_1 = 5.0$ cm, $R_2 = 20.0$ cm,已知内球面的电势为 $U_1 = 60$ V,外球面的电势 $U_2 = -30$ V。求

- (1) 内、外球面上所带电量;
- (2) 在两个球面之间何处的电势为零?

3.4 两个同心的球面,半径分别为 R_1, R_2 ($R_1 < R_2$),分别带有总电量 q_1, q_2 。设电荷均匀分布在球面上,求两球面的电势及二者之间的电势差。不管 q_2 大小如何,只要是正电荷,则内球电势总高于外球,只要是负电荷,内球电势总低于外球。试说明其原因。

3.5 求出 1.15 题中两同轴圆筒之间的电势差。

3.6 一计数管中有一直径为 2.0 cm 的金属长圆筒,在圆筒的轴线处装有一根直径为 1.27×10^{-5} m 的细金属丝。设金属丝与圆筒的电势差为 1×10^3 V,求:

- (1) 金属丝表面的场强大小;
- (2) 圆筒内表面的场强大小。

3.7 一细直杆沿 z 轴由 $z = -a$ 延伸到 $z = a$,杆上均匀带电,其线电荷密度为 λ ,试计算 x 轴上 $x > 0$ 各点的电势。

3.8 一均匀带电细杆,长为 $l = 15.0$ cm,线电荷密度 $\lambda = 2.0 \times 10^{-7}$ C/m 求:

- (1) 细杆延长线上与杆的一端相距 $a = 5.0$ cm 处的电势;
- (2) 细杆中垂线上与细杆相距 $b = 5.0$ cm 处的电势。

3.9 一无限长均匀带电圆柱,体电荷密度为 ρ ,截面半径为 a 。

- (1) 用高斯定律求出柱内外电场强度分布;
- (2) 求出柱内外的电势分布,以轴线为势能零点;
- (3) 画出 $E \sim r$ 和 $U \sim r$ 的函数曲线。

3.10 用电势梯度法求上面 3.7 题中 x 轴上, $x > 0$ 各点的电场强度。

3.11 设电势沿 x 轴的变化曲线如图 3.18 所示。试对所示各区间 (忽略区间端点的情况), 确定电场强度的 x 分量, 并作 E_x 对 x 的关系曲线。

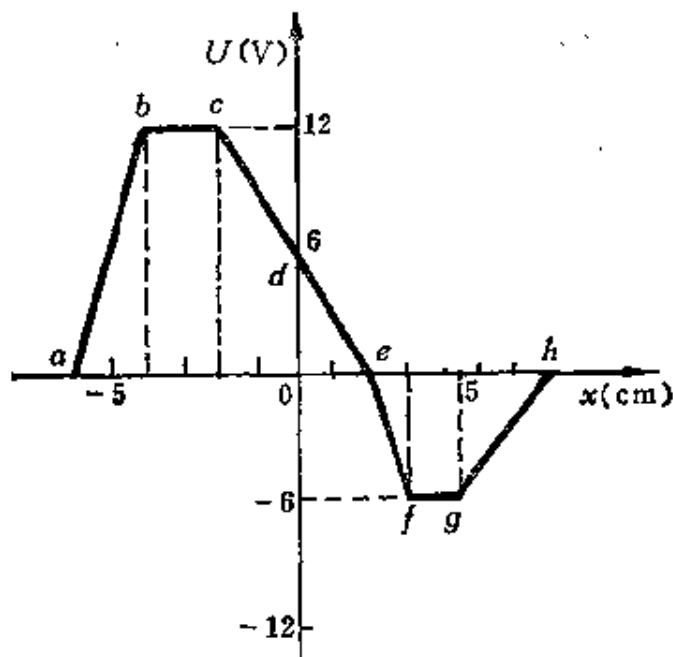


图 3.18

3.12 一个动能为 $1.7 \times 10^{-12} \text{ J}$ 的 α 粒子射向铂原子核, 问其最接近的距离多大? α 粒子的电荷为 $2e$, 铂原子核的电荷为 $78e$ 。将铂原子核视作球形电荷分布, 并且不考虑铂原子核运动。

3.13 如图 3.19 所示, 两个平行放置的均匀带电圆环, 它们的半径为 R , 电量分别为 q 及 $-q$, 其间距离为 l , 并有 $l \ll R$ 的关系。

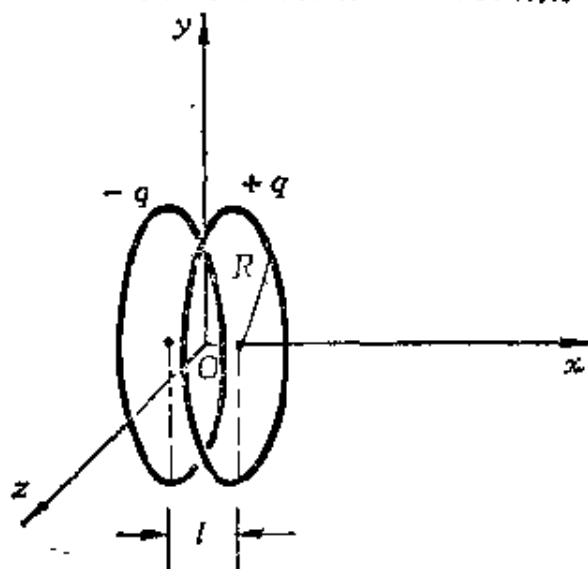


图 3.19

(1) 试求以两环的对称中心 O 为坐标原点时, 垂直于环面的 x 轴上的电势分布;

(2) 证明: 当 $x \gg R$ 时,
$$U = \frac{q l}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

3.14 一边长为 a 的正三角形, 其三个顶点上各放以 q , $-q$ 和 $-2q$ 的点电荷, 求此三角形重心上的电势。将一电量为 $+Q$ 的点电荷由无限远处移到重心上, 外力要做多少功?

3.15 如图 3.20 所示, 三块互相平行的均匀带电大平面, 面电荷密度为 $\sigma_1 = 1.2 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$, $\sigma_2 = 2.0 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$, $\sigma_3 = 1.1 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$ 。A 点与平面 II 相距为 5.0 cm, B 点与平面 II 相距 7.0 cm。

(1) 计算 A、B 两点的电势差;

(2) 设把电量 $q_0 = -1.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ 的点电荷从 A 点移到 B 点, 外力克服电场力做多少功?

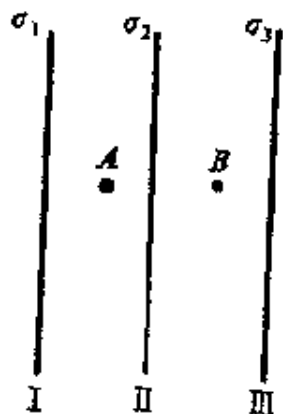


图 3.20

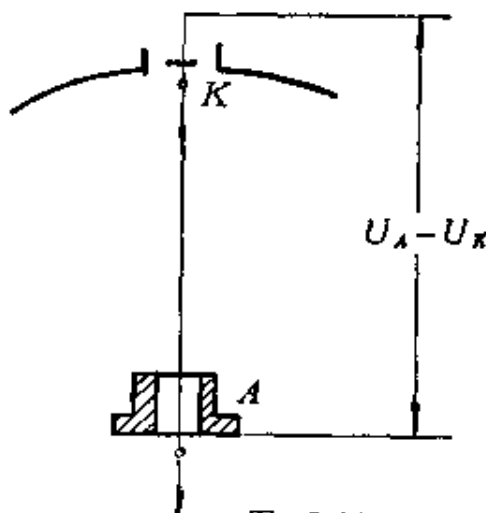


图 3.21

3.16 电子束焊接机中的电子枪, 如图 3.21 所示。K 为阴极, A 为阳极, 其上有一小孔。阴极发射的电子在阴极和阳极电场作用下聚焦成一细束, 以极高的速率穿过阳极上的小孔, 射到被焊接的金属上, 使两块金属熔化而焊接在一起。已知 $U_A - U_K = 2.5 \times 10^4 \text{ V}$, 并设电子从阴极发射时的初速率为零。求:

(1) 电子到达被焊接的金属时具有的动能(用电子伏表示);

(2) 电子射到金属上时的速率。

*3.17 假设某一瞬时, 氢原子的两个电子和氢原子核所占据的位置如图 3.22 所示; 在该时刻, 这两个电子与原子核的距离都为 $0.20 \times 10^{-10} \text{ m}$ 。这种配置状态的静电势能是多少? 把电子与原子核看作点电荷。

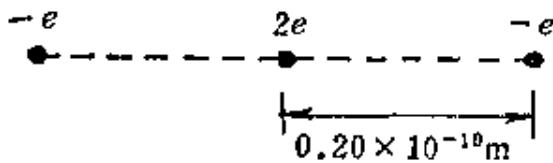


图 3.22

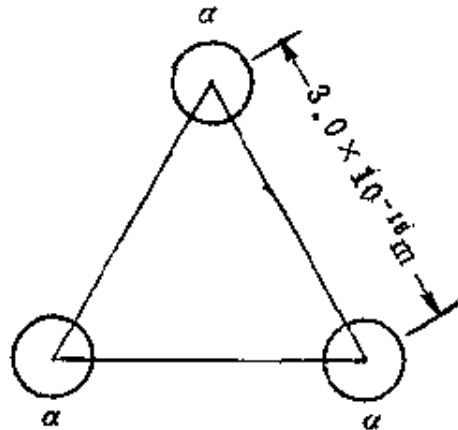


图 3.23

*3.18 根据原子核的 α 粒子模型, 某些原子核是由 α 粒子的有规则的几何排列所组成。例如, ^{12}C 的原子核是由排列成等边三角形的三个 α 粒子组成的(图 3.23)。设每对粒子之间的距离为 $3.0 \times 10^{-16} \text{ m}$, 问, α 粒子的这种配置的静电势能是多少(用 eV 表示)? 将 α 粒子看作点电荷。

*3.19 假设电子是一个半径为 R , 电荷为 e 且均匀分布在它的表面上的导体球。如果静电能等于电子的静止能量 $m_e c^2$, 那么以电子的 e 和 m_e 表示的电子半径 R 的表达式是什么? R 在数值上等于多少?

*3.20 铀核带电量为 $92e$, 可以近似地认为它均匀分布在一个半径为 $7.4 \times 10^{-15} \text{ m}$ 的球体内。求铀核的静电势能。

当铀核对称裂变后, 产生两个相同的钡核, 各带电 $46e$, 总体积和原来一样。设这两个钡核也可以看成球体, 当它们分离很远时, 它们的总静电势能又是多少? 这一裂变释放出的静电能是多少?

按每个铀核都这样对称裂变计算, 1 Kg 铀裂变后释放出的静电能是多少?

*3.21 按照玻尔原子理论, 氢原子中的电子围绕原子核作圆运动, 维持电子运动的力为库仑力。轨道的大小取决于角动量——最小的轨道角动量为 $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, 依次为 $2\hbar, 3\hbar$ 等等。

(1) 证明: 如果圆轨道有角动量 $n\hbar$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 则其半径为

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} n^2 \cdot \hbar^2, \quad (m_e \text{ 为电子质量, } e \text{ 为电子电荷});$$

(2) 证明: 在这样的轨道中, 电子的轨道能量(动能+势能)为

$$W = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2};$$

(3) 计算 $n=1$ 时的轨道能量(用 eV 表示)。

A. 大气电学

地球周围的大气是一部大电机。雷暴是大气中电活动最为壮观的显示。即使在晴朗的天气，大气中也到处有电场和电流。雷暴好似一部静电起电机，能产生负电荷并将其送到地面，同时把正电荷送到大气的上层。大气的上层是电离层，它是良导体，流入它的电流很快向四周流开，遍及整个电离层。在晴天区域，这电流逐渐向地面泄漏，这样就形成了一个完整的大气电路(图A.1)。

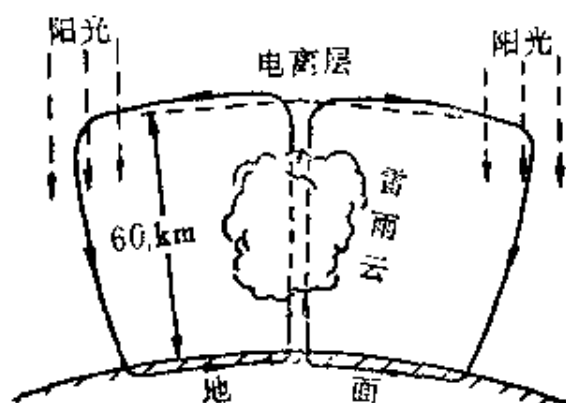


图 A.1 大气电流示意图

在任何时刻，整个地球上大约有 2000 个雷暴在活动。一次雷暴所产生的电流的时间平均值约为 1A (当然，瞬时值可以非常大——在一次闪电中可高达 200000A)。这样，在大气电路中，所有雷暴产生的总电流就大约为 2000A。

电离层和地球表面都是良导体，它们是两个等势面；它们之间的电势差平均约为 300000V。电离层和地表之间的整个晴天大气

电阻大约为 200Ω 。这电阻大部分集中在稠密的大气底层从地表到几千米的高度以内；相应地， $300000V$ 的电势降落大部分也发生在大气底层。平均讲来，由于雷暴活动而在大气电路中释放能量的总功率约为 $2000 \times 300000 = 6 \times 10^8 W$ ，即差不多是一百万千瓦。

A.1 晴天大气电场

在晴天区域的大气电流是由离子的运动形成的。大气中经常存在有带电粒子。引起空气分子电离的主要原因是：贯穿整个大气的宇宙射线，高层大气中的太阳紫外辐射以及低层大气中由地壳内的天然放射性物质发出的射线以及人工放射性等。在空气分子由于这些原因不断电离的同时，已生成的正、负离子相遇时也会复合成中性分子。电离作用和复合作用的平衡使大气中总保持有相当数量的带电粒子。正离子向下运动，负离子向上运动，就构成了晴天区域的大气电流。

正象在导线中形成电流是由于导线中有电场一样，大气电流的形成也是由于大气中存在有电场。晴天区域的大气电场都指向下方。在地表附近的平坦地面上，晴天大气电场强度在 100 到 $200 V/m$ 之间。各地电场的实际数值决定于当地的条件，如大气中的灰尘、污染情况、地貌以及季节和时间等，全球平均值约为 $130 V/m$ 。

这样，比地面高两米的一点到地面之间的电势差就有几百伏。我们能否利用这一电势差在竖立的导体棒中得到持续电流呢？不能！因为如果你把一根 $2m$ 长的金属棒立在地上，大气电场只能在其中产生一个非常小的瞬时电流，紧接着金属棒的电势就和地球电势相等而不再产生电流了。其结果只是改变了地表附近电势和电场的分布(图A.2)而不能有持续电流产生。树木、房屋或者人

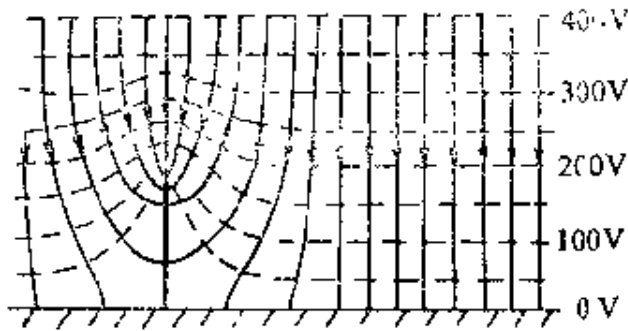


图 A.2 导体改变了地表附近的电场分布

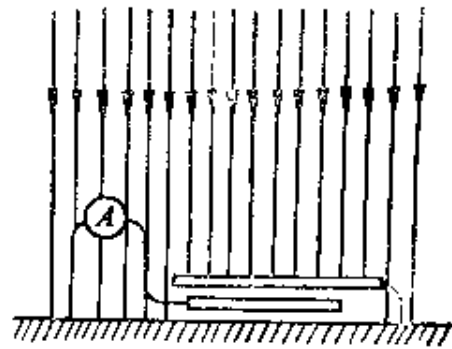


图 A.3 两块接地的水平金属板

体都是相当好的导体，它们对地球的电场都会发生类似的影响，而它们本身不会遭受电击。

由于大气电场指向地球表面，所以地球表面必然带有负电荷。若大气电场按 $E=100\text{V/m}$ 计算，地球表面单位面积上所带的电荷应为

$$\sigma = \epsilon_0 E = -8.85 \times 10^{-12} \times 100 \doteq -1 \times 10^{-9} \text{C/m}^2$$

由此可推算整个地球表面带的负电荷约为五十万库仑，即

$$Q = 4\pi R_{\text{地}}^2 \cdot \sigma \doteq 4 \times 3.14 \times (6400 \times 10^3)^2 \times 1 \times 10^{-9} \doteq 5 \times 10^5 \text{C}$$

地表附近的大气电场可以用一个**电场强度仪**测量。一种简单的电场强度仪用到一个平行于地面因而垂直于电场的金属板，该金属板通过一个灵敏电流计用导线接地(图A.3)。大气电场的电力线终止于该金属板的上表面，因此，该金属板的上表面必定带有电荷。当将另一块接地的金属板突然移到这块金属板的上方时，电力线就要终止于这第二块板上，也就是说第二块金属板要屏蔽掉作用于第一块板的电场。此时，第一块板上的电荷将挣脱电场的吸引迅速通过导线流入地面，而灵敏电流计也就显示出一瞬时电流。由这一电流可以算出通过的电量，从而可以进一步求出电场强度的数值。

在实际使用的电场强度仪中，上述两块金属板常做成十字轮形状(图A.4是一种电场强度仪，或叫电场磨的外形照片)。上板由

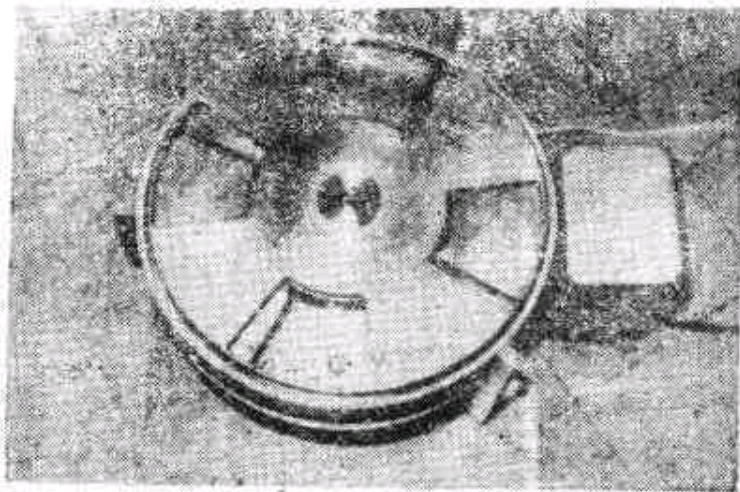


图 A.4 电场磨外形照片

电机带动在水平面内转动,其四臂交替地遮盖和敬露下板的四臂,每次遮盖和敬露都将在下板接地的导线中产生一次脉冲电流。由这脉冲电流的强度就可求出大气电场的电场强度。

大气电场强度随高度的增加而减小,在10km高处的电场强度约为地面值的3%。大气电场的减弱和大气电阻的减小有关。低空大气电阻比高空的大,因而产生同样的大气电流在低空就需要比高空更强的电场。大气电场的这一变化是由于大气中正电荷的密度分布所致。在低空(几千米高处)有相当多的正电荷分布。大气电场的电力线多由此发出。只有很少一部分电力线是由电离层的正电荷发出的(图A.5)。晴天大气中的正电荷总量和地面上的负电荷总量相等。大气中的电场分布使得电势分布具有下述特点:

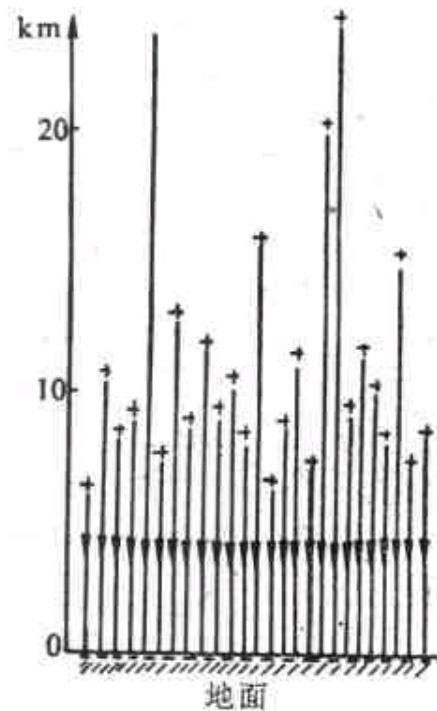


图 A.5 大气电场的电力线

电势随高度的增加而升高,在低层大气中升高得最快,到20km以

上的大气中,电势几乎保持不变,平均约为 300000V。

晴天大气电场还随时间变化。除了由于空间电荷密度和空气电导率的局部变化造成的短时不规则脉动以外,晴天电场还有按日按季的周期性变化。按日的周期性变化的幅度可达20%。除了大气污染对局部的电场有影响以外,经测定,晴天电场的变化与地方时无关,即全球大气电场的变化是同步地发生的。一天之内,大约在格林威治时间18:00左右出现一极大值,在4:00左右出现一极小值。大气电场的这种按日的周期性变化是和大气中的雷暴活动的按日的周期性变化相联系的,因为大气中的电荷分布基本上是雷暴活动产生的。在全世界范围内,雷暴活动约在格林威治时间14:00到20:00达到高潮。这一高潮主要是由于亚马孙河盆地的中午雷暴集中形成的。于是由它产生的大气电荷就使得在18:00左右出现了大气电场的极大值。

A.2 雷暴的电荷和电场

如上所述,地球表面带有约 $5 \times 10^5 C$ 的负电荷,而大气中的泄漏电流约为 2000A。这样,如果电荷没有补充的话,地球表面的负电荷将在几分钟内被中和完。地球表面电荷明显维持恒定的事实说明大气中存在着一个电荷分布再生的机制。人们普遍认为:大气中的电荷分布是由雷暴产生的。一个雷暴往往包含几个活跃中心,每个中心由一片雷雨云构成,叫**雷暴云泡**。每个云泡都有其完整的生命史,可分成生长阶段、成熟阶段和消散阶段。一个**云泡**的总寿命约为1小时,而在成熟阶段有降水和闪电产生时,其维持时间约15到20分钟。一次巨大持久的雷暴常常是由几个云泡交替出现而形成的。

雷暴的激烈活动所需要的能量都来自潮湿空气中水份的凝结

热。例如在 17°C 、1大气压下,1立方千米相对湿度为100%的空气中含有 $1.6 \times 10^7 \text{kg}$ 的水汽。在 17°C 时水的汽化热为 $2.45 \times 10^6 \text{J}$,所以1立方千米空气中的水汽全部凝结成水时,将放出 $3.9 \times 10^{13} \text{J}$ 的热量。这相当于9200吨TNT爆炸时所释放出的能量。一次典型的雷暴涉及很多立方千米的潮湿空气。因此可以释放出非常巨大的能量。

一个雷暴云泡的横、宽约1.5km到8km,底部距地面约1.5km,顶部可达7.5km高度并可发展到12km到18km的高空。云泡在形成阶段首先是由于一些水汽的凝结放热而使周围空气变暖、变轻因而形成上升的气流。这种气流夹杂着水汽,其上升的速度可达10 m/s。在高空,气流中的水份凝结成水滴,有些水滴进一步凝固成冰屑或雹粒,也形成雪花。雨、雪、冰雹大到不能为上升气流所支持时,就开始下落。它们的下落又携带着周围空气下降。这些下降的混有水滴的湿空气会由于水滴蒸发吸热而变冷、变重而继续下

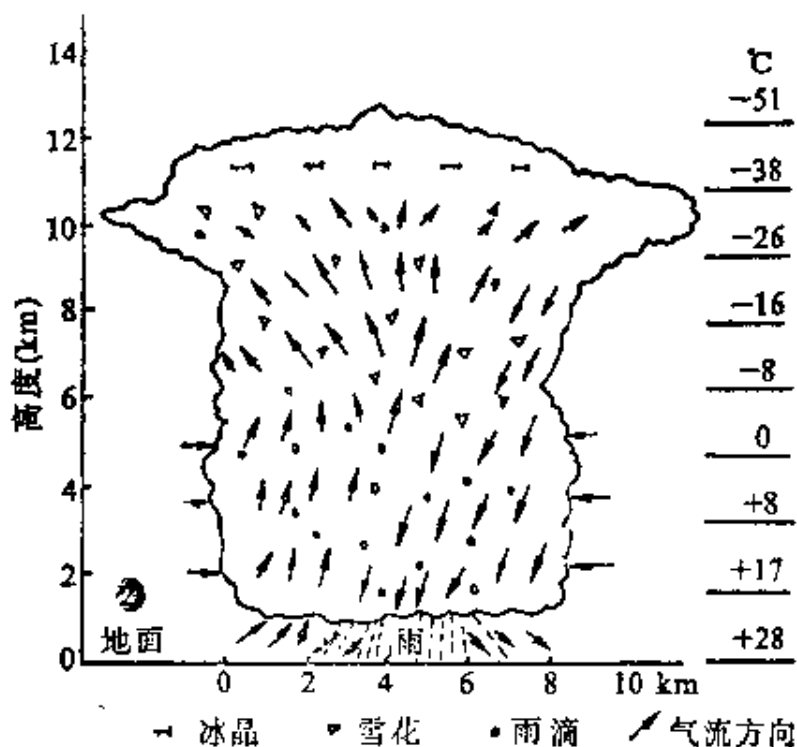


图 A.6 成熟的雷暴云泡

降。这样在云泡中就又形成了下降的气流。强的上升气流和强的下降气流的并存是云泡成熟的标志(图A.6)。这时云泡顶部扩张为砧状,其上部可插入对流层。这一期间,云泡内各处获得了不同的电荷,闪电开始发生。在云泡底部,雨或雹开始下降到地面,同时伴随着大风。此后不久,云泡内上升气流停止,整个云泡内只剩下下降气流。接着雷暴逐渐消散。

成熟阶段的雷暴云泡中典型的电荷分布如图A.7所示。上部是正电荷,下部是负电荷,在最底部还有一些局部的少量正电荷。这些电荷的载体可能是雨滴、冰晶、雹粒或空气粒子。至于怎么产生这些电荷的,至今没有详细准确的理论说明。许多理论推测,这

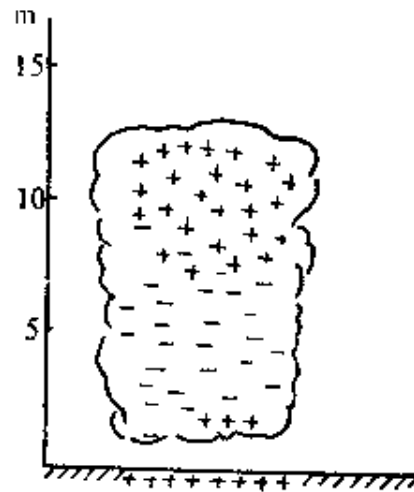


图 A.7 雷暴云中的电荷分布

种电荷的产生大概是雨滴、冰晶或雹粒在上升和下降气流中不断受到摩擦、碰撞,或熔解、凝固,或热电作用的结果。至于正、负电荷的分开,多数理论都归因于正、负电荷载体的大小不同。正电荷载体较小、较轻,因而被上升气流带至上部,负电荷载体较大、较重,因而不动或下降到底部。

雷暴云泡中的电荷在大气中产生电场,可粗略地按下面的模型进行估算。忽略云泡底层的少量正电荷的存在。云泡上部的正电荷可以用一个在10km高度的正点电荷 Q_2 代替,而云泡下部的负电荷用一个在5km高度的负点电荷 Q_1 代替,它们带的电量,譬如说,分别是+40C和-40C(图A.8)。

在这些电荷正下方的地面上,由它们所产生的向上的电场数值为

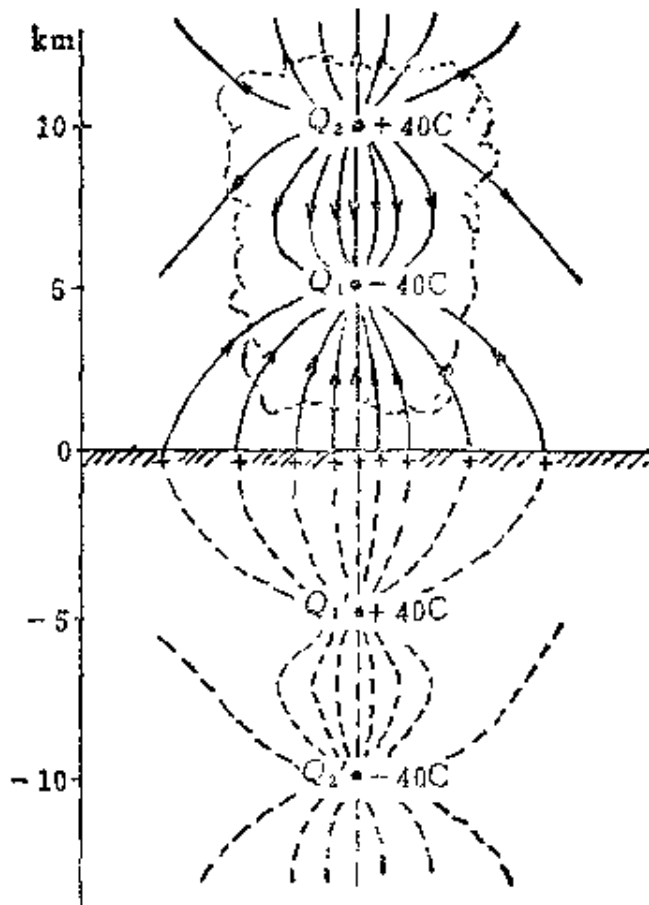


图 A. 8 雷暴云泡电场的粗略计算

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{r_2^2} \right) = 9.0 \times 10^9 \left(\frac{40}{(5 \times 10^3)^2} - \frac{40}{(10 \times 10^3)^2} \right) \\ = 11 \times 10^3 \text{ V/m}$$

但这还不是总电场。因为地球是导体，所以云泡内电荷将在地面上产生感应电荷，这感应电荷将产生附加的电场。在雷暴云泡的下方，分布在地面上的感应电荷将覆盖在大约 100km^2 的大面积上；在此面积内电荷密度将以云泡电荷的正下方为最大。

我们采用下述三个步骤来计算感应电荷的效果：第一，用一薄导体板代替地面，这不会改变地面上空的电场，因为导体板的厚度并不影响其表面上感应电荷的分布。第二，在导体板下方空间放置两个 $+40\text{C}$ 和 -40C 的电荷 Q_1' 和 Q_2' (图 A. 8)，它们分别位于导

体板下方深度为5km和10km处，它们叫云内原有电荷的镜像电荷。由于导体板的屏蔽隔离作用，所以镜像电荷的存在也不会改变板上方的电场。第三，沿水平方向把导体板移走，这也不会影响导体板上方的电场。因为对图A.8所示的电荷配置来说，中间平面是一个等势面，而与等势面重合地加上或去掉一个金属面是不会影响电场分布的。

经过这三个步骤之后，我们认为云泡内电荷与地面感应电荷的总电场正好与云泡内的电荷与它们的镜像电荷的总电场（在地面以上部分）相同。这样我们就可由图A.8所示的四个电荷的电场的矢量相加来计算地面上空任何给定点的电场了。在地表面任何给定的点，镜像电荷与云泡内电荷产生的电场是相等的，因此，在云泡中电荷的正下方的地面上，这电场应该是云内电荷所产生的电场的两倍，即 $2 \times 11 \times 10^3 = 22 \times 10^3 \text{V/m}$ 。

我们可以用这种方法计算地面与雷暴云底部任何高度处的电势差。设地面电势为零，对应于图A.8中的四个点电荷，雷雨云下方距地面高度为2km处的电势为

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{40}{8 \times 10^3} - \frac{40}{3 \times 10^3} + \frac{40}{7 \times 10^3} - \frac{40}{12 \times 10^3} \right) = -5.4 \times 10^7 \text{V}$$

由此可见，雷暴产生的电场和电势差是相当大的！

在上述计算中，我们已假设了地球表面是完全平坦的。事实上，地表上处处有山岳起伏，在这些隆起地区附近，电场便要增强。遇有尖形导体时，在其尖端附近，电场更是急剧增强。图A.9表示上方有雷雨云时避雷针附近的电力线分布（它和图A.2相似，但电力线方向相反）。在地面上任何

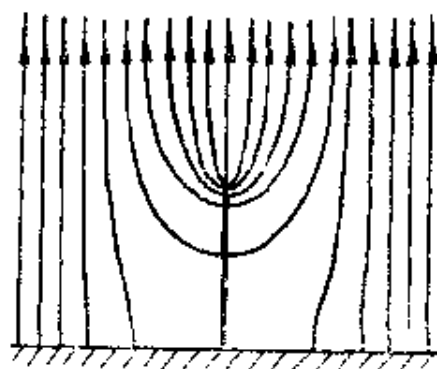


图 A.9 接地避雷针周围的电场

尖形物体附近,当雷暴云到来时,由于强电场的作用,都要出现尖端放电现象。尖端放电电流方向向上。对树木所作的测量表明,雷暴云下方的树将从地面引出约1A的电流通过树顶而流入大气。

除了尖端放电外,地球和雷雨云之间的放电还可以通过以下几种形式,如电晕放电、火花放电、闪电放电,和降水放电等。虽然闪电看起来最为壮观,但在许多雷暴中,尖端放电起着主要作用。它对大气电路的电流的贡献要比闪电电流大若干倍。这几种放电的总效果是与晴天区域大气中的由上到下的泄漏电流相平衡。

A.3 闪 电

闪电是大气中的激烈的放电现象。它是大气被强电场击穿的结果。干燥空气的击穿场强是 $3 \times 10^6 \text{V/m}$ 。但是,在雷雨云中,由于有水滴存在,而且气压比大气压为小,所以空气的击穿不需要这样强的电场。要产生一次闪电,只需在云的近旁的某一小区域内有很强的电场就够了。这强电场会引起电子雪崩,即由于高速带电粒子对空气分子的碰撞作用使空气分子大量急速电离而产生大量电子的现象。一旦某处电子雪崩开始,它会向电场较弱的区域传播。闪电可能发生在雷雨云内的正—负电荷之间,也可能发生在雷雨云与纯净空气之间或雷雨云与地之间。云地之间的闪电常是发生在雷雨云的负电区与地之间,很少发生在云中正电区与地之间。研究还指出,大部分闪电发生在大陆区,这说明陆地在产生雷暴中有重要作用。

闪电的发展过程很快,人眼不能细察。但是利用高速摄影技术可以进行详细研究。典型的云地之间的闪电从接近雷雨云的负电荷处的强电场中的电子雪崩开始。电子雪崩向下移时,在它后方留下一条离子通道。云中的电子流入此通道使之带负电。在通道

的前端聚集的电子产生的强电场使通道继续向前延伸。实际观察到的这种延伸不是持续的,而是一步一步的。电子雪崩以可达 $1/6$ 光速的速度下窜,但每一步只窜进约 50 m ,接着停止约 $50\mu\text{s}$,然后再向下窜。下窜的方向不固定,因而所形成的离子通道一般是弯弯曲曲的,并且还有分支(图A.10),这是空气中各处自由电子密度不同的结果。这样的通道叫**梯级先导**。它的半径约几米(可能是 5 m),但只有它的中心区域才暗暗地发光。

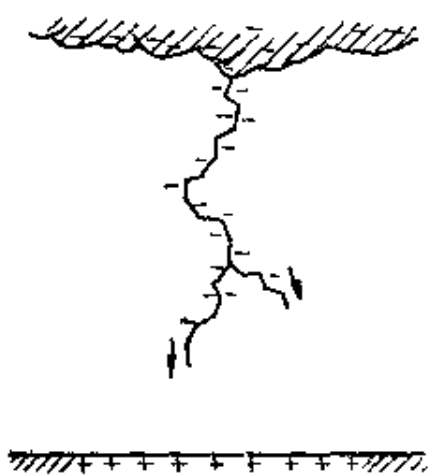


图 A.10 梯级先导

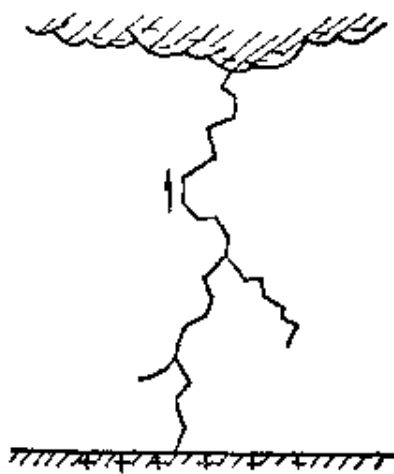


图 A.11 回击电流

当梯级先导的前端靠近地面或地面上某尖形物时,它的强电场便从地面引起一次火花放电,这火花从地面向上移动,在 20 m 到 100 m 高处与先导前端相遇。在这一时刻,云地之间的电路接通,负电荷就沿着这条电阻很小的通路从雷雨云向大地泄漏。这一泄流过程是从先导的接地的一段开始的。这一段电子入地后,留下的正电荷吸引上面一段中的电子使它们下泄。这些电子下泄后,它上面的电子又接替着下泄。这样便形成了一个下泄的“前锋”不断沿着先导形成的离子通道向上延伸直达云底(图A.11),其延伸的速度极快,可达光速的 $1/2$ 。这前锋的上升实际上是一股向上的强大的电流。这股电流叫**回击或回闪**,它急剧地加热这通道中的空气使之发出我们看到的强烈闪光。这一股电流的半径很小,大约 1 cm 。

米上下或几厘米。

回击电流的峰值约10000A到20000A,它大约延续100 μ s,因此它传下的电量约几库仑,一次回击完毕之后,一个约几百安培的较小电流继续流几个毫秒。接着又沿着原来形成而且暂时保留的离子通道形成又一个先导,不过这个先导不是梯级式的,而是连续向下的,叫做**下窜先导**。这先导中也充满了负电荷,于是又引起一次强烈的回击,之后,还可以再形成一次下窜先导并再次引起回击。一次闪电实际上是由若干次回击组成的,两次回击之间相隔约40ms。

一次闪电的各次回击导入地的总电荷约-20C。由于云地之间的电势差约为 5×10^7 V,所以一次闪电释放的能量约为 10^9 J。这能量的大部分变为热(焦耳热),只有少量变为光能或无线电波的能量。强大的回击电流刚刚流过的瞬间,闪电通道中的等离子体的温度可升至非常高(约30000K,太阳表面是6000K),相应地具有很大的压强。这高温高压使闪电通道的任何物体都遭到严重的破坏。高压等离子体爆炸性地向外膨胀因而形成激波。在几米之外,这激波逐渐减弱为声波脉冲。这声波脉冲传到我们的耳朵里,我们就听到雷声。

陆上龙卷风中的电闪特别壮观,人眼可以看到在有些陆龙卷的漏斗内连续不断地发出闪光。根据对从陆龙卷内部发出的无线电波的测量估计大概每秒钟有20次闪电。由于每次闪电释放能量约 10^9 J,陆龙卷所释放的电功率就是 $10^9 \times 20 = 2 \times 10^{10}$ W = 2×10^7 kW,即大约相当于10个大型水电站的功率。陆龙卷的破坏力之大,于此可见一斑。

除了枝叉形闪电之外,人们也观察到有球形闪电,其时只见有一个大球在空中漂移,大球的尺寸大约从10cm到100cm,有些飞行员说曾见到过15m到30m直径的闪电火球。火球有时在一次闪电

回击之后发生,有时也自发地产生,它们大约只延续几秒钟。有的火球由天空直落地面,有的则在地面上空水平游行。有的甚至通过门窗或烟囱进入室内。作者就曾在一次农场的大雷暴中亲眼看到一火球沿着电线杆窜下。许多火球无声无息地逝去,也有些火球爆炸而带来巨响。这些火球看来是大气电造成的。但至今还不了解它们形成的机制。已提出了一些理论来解释:例如,一种理论说火球是被磁场聚集到一起的一团等离子体;另一种理论说是由尘粒形成的小型雷雨云。但是,由于缺乏精细的数据与仔细的计算,所以这种现象至今仍是个谜。

雷暴与人类生活有直接关系。例如它可以引起森林火灾,击毁建筑物。当前它还是航空航天安全的重要因素。飞机遭雷击的事故时有发生;如1987年1月美国国防部长温伯格的座机在华盛顿附近的安德鲁斯空军基地南面被闪电击中,45千克的天线罩被击落,机身有的地方被烧焦,幸亏机长镇静沉着才使飞机安全落地。同年6月在位于弗吉尼亚州瓦罗普斯岛发射场上的小型火箭在即将升空前被雷电击中,有三枚自行点火升空,旋即坠毁。

目前,有些国家已建立了雷击预测系统,它将有助于民航的安全和火箭发射精度的提高。它对预防森林火灾,保护危险物资、高压线和气体管道等也有重要意义。

第四章 静电场中的导体

本章要求

1. 理解导体静电平衡的意义和条件。
2. 理解静电平衡的导体上电荷分布的特点。
3. 能够利用导体静电平衡的规律求解导体存在时的电场和电荷分布的问题。
4. 了解静电屏蔽现象。

§ 4.1 导体的静电平衡条件

导体放到电场中都要受到电场的影响。同时，它们也反过来影响电场。这一章我们将讨论这种相互影响的规律。实际上这些规律是静电场的一般规律在导体存在时的特殊应用。作为基础知识，本章的讨论只限于各向同性的均匀的金属导体与电场的相互影响。

金属导体的电结构特征是在它内部有可以自由移动的电荷——自由电子，将金属导体放在静电场中，它内部的自由电子将受静电场的作用而产生定向运动。这一运动将改变导体上的电荷分布。这电荷分布的改变又将反过来改变导体内部和周围的电场分布。这种电荷和电场的分布将一直改变到导体达到静电平衡状态为止。

所谓导体的静电平衡状态是指导体内部和表面都没有电荷定

向移动的状态。这种状态只有在导体内部电场强度处处为零时才有可能达到和维持。否则，自由电子在电场的作用下将发生定向移动。同时，**导体表面紧邻处的电场强度必定和导体表面垂直。**否则电场强度沿表面的分量将使自由电子沿表面作定向运动。因此，导体处于静电平衡的条件是

$$E_{\text{内}}=0, \quad E_{\text{表面}} \perp \text{表面} \quad (4.1)$$

应该指出，这一静电平衡条件是由导体的电结构特征和静电平衡的要求所决定的，与导体的形状无关。

图 4.1 画出了两个导体处于静电平衡时电荷和电场分布的情况(图中实线为电力线，虚线为等势面和纸面的交线)。球形导体 *A* 上原来带有正电荷而且均匀分布，原来不带电的导体 *B* 引入后，其中自由电子在 *A* 上电荷的电场作用下向靠近 *A* 的那一端移动，使 *B* 上出现等量异号的感应电荷。与此同时，*A* 上的电荷分布也发生了改变。这些电荷分布的改变将一直进行到它们在导体内部的合场强等于零为止。这时导体外的电场分布和原来相比也发

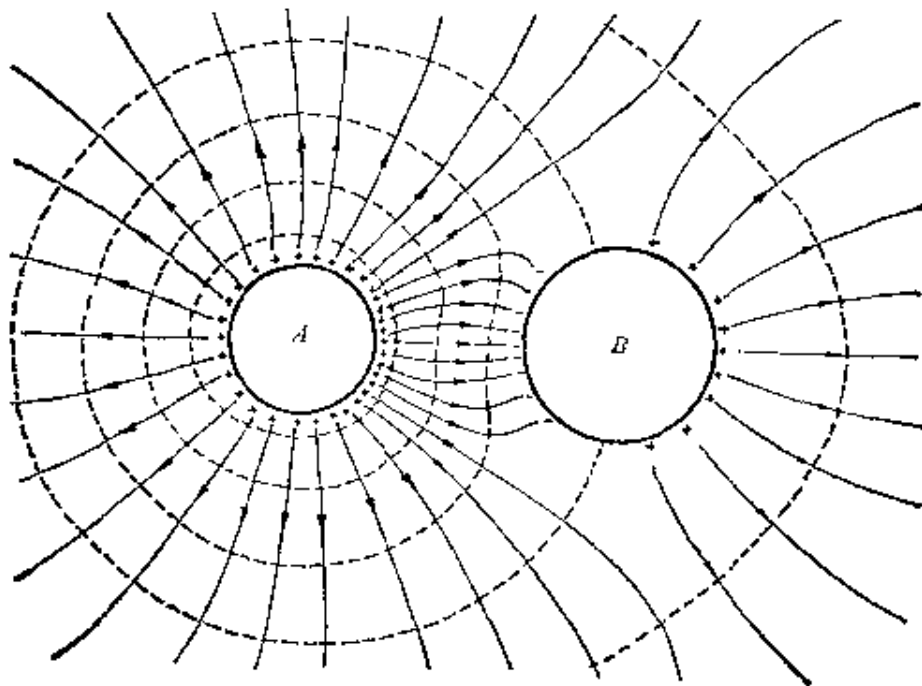


图 4.1 处于静电平衡的导体的电荷和电场的分布

生了改变。

导体处于静电平衡时,既然其内部电场强度处处为零,而且表面紧邻处的电场强度都垂直于表面,所以导体中以及表面上任意两点间的电势差必然为零。这就是说,处于静电平衡的导体是等势体,其表面是等势面。这是导体静电平衡条件的另一种说法。

§ 4.2 静电平衡的导体上的电荷分布

处于静电平衡的导体上的电荷分布有以下的规律:

(1) 处于静电平衡的导体,其内部各处净电荷为零,电荷只能分布在表面。

这一规律可以用高斯定律证明,为此可在导体内部围绕任意 P 点作一个小封闭曲面 S , 如图 4.2 所示。由于静电平衡时导体内部场强处处为零,因此通过此封闭曲面的电通量必然为零。由高斯定律可知,此封闭面内电荷的代数和为零。由于这个封闭面很小,而且 P 点是导体内任意一点,所以可得在整个导体内无净电荷,电荷只能分布在导体表面上的结论。

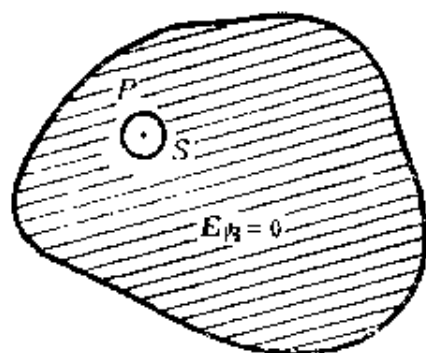


图 4.2 导体内无净电荷

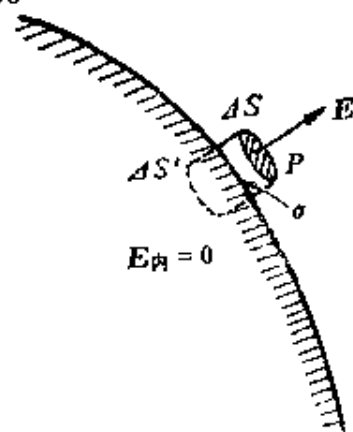


图 4.3 导体表面电荷与场强的关系

(2) 处于静电平衡的导体,其表面上各处的面电荷密度与当地表面紧邻处的电场强度的大小成正比。

这个规律也可以用高斯定律证明,为此,在导体表面紧邻处取一点 P ,以 E 表示该处的电场强度,如图 4.3 所示。过 P 点作一个平行于导体表面的小面积元 ΔS ,以 ΔS 为底,以过 P 点的导体表面法线为轴作一个封闭的扁筒,扁筒的另一底面 $\Delta S'$ 在导体的内部。由于导体内部场强为零,而表面紧邻处的场强又与表面垂直,所以通过此封闭扁筒的电通量就是通过 ΔS 面的电通量,即等于 $E\Delta S$,以 σ 表示导体表面上 P 点附近的面电荷密度,则扁筒包围的电荷就是 $\sigma\Delta S$ 。根据高斯定律可得

$$E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}$$

由此得

$$\sigma = \epsilon_0 E \quad (4.2)$$

此式就说明处于静电平衡的导体表面上各处的面电荷密度与当地表面紧邻处的场强大小成正比。

利用(4.2)式也可以由导体表面某处的面电荷密度 σ 求出当地表面紧邻处的场强 E 来。这样做时,这一公式容易被误解为导体表面紧邻某处的电场仅仅是由当地导体表面上的电荷产生的,其实不然。此处电场实际上是所有电荷(包括该导体上的全部电荷以及导体外现有的其他电荷)产生的,而 E 是这些电荷的合场强。只要回顾一下在(4.2)式的推导过程中利用了高斯定律就可以明白这一点。当导体外的电荷位置发生变化时,导体上的电荷分布也会发生变化,而导体外面的合电场分布也要发生变化。这种变化将一直继续到它们满足(4.2)式的关系使导体又处于静电平衡为止。

(3) 孤立的导体处于静电平衡时,它的表面各处的面电荷密度与各处表面的曲率有关,曲率越大的地方,面电荷密度也越大。图 4.4 画出一个有尖端的导体表面的电荷和场强分布的情况,尖

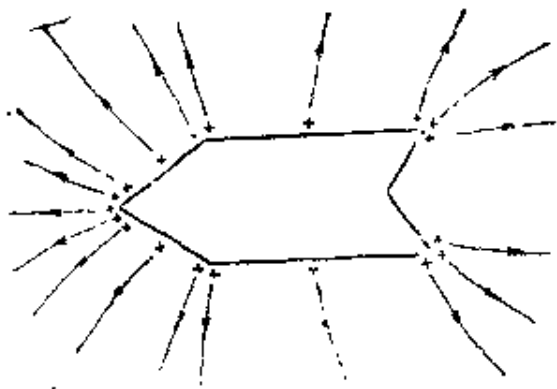


图 4.4 导体尖端处电荷多

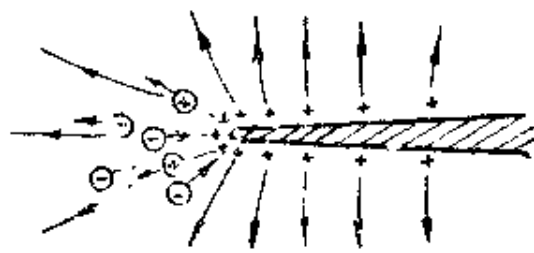


图 4.5 尖端放电示意图

端附近的面电荷密度最大。

尖端上电荷过多时,会引起**尖端放电**现象。这种现象可以这样来解释。由于尖端上面电荷密度很大,所以它周围的电场很强。那里空气中散存的带电粒子(如电子或离子)在这强电场的作用下作加速运动时就可能获得足够大的能量以致它们和空气分子碰撞时,能使后者离解成电子和离子。这些新的电子和离子与其它空气分子相碰,又能产生新的带电粒子。这样,就会产生大量的带电粒子。与尖端上电荷异号的带电粒子受尖端电荷的吸引,飞向尖端,使尖端上的电荷被中和掉;与尖端上电荷同号的带电粒子受到排斥而从尖端附近飞开。图 4.5 从外表上看,就好象尖端上的电荷被“喷射”出来放掉一样,所以叫做尖端放电。

在高电压设备中,为了防止因尖端放电而引起的危险和漏电造成的损失,输电线的表面应是光滑的。具有高电压的零部件的表面也必须做得十分光滑并尽可能做成球面。与此相反,在很多情况下,人们还利用尖端放电。例如,火花放电设备的电极往往做成尖端形状,避雷针也是利用尖端的缓慢放电而避免“雷击”的(雷击实际上是天空中大量异号电荷急剧中和所产生的恶果)。

§ 4.3 有导体存在时静电场的分析与计算

导体放入静电场中时, 电场会影响导体上电荷的分布, 同时, 导体上的电荷分布也会影响电场的分布。这种相互影响将一直继续到达到静电平衡时为止, 这时导体上的电荷分布以及周围的电场分布就不再改变了。这时的电荷和电场的分布可以根据关于静电场的基本规律、电荷守恒以及导体静电平衡条件加以分析和计算。下面举几个例子。

[例 1] 有一块大金属平板, 面积为 S , 带有总电量 Q , 今在其近旁平行地放置第二块大金属平板, 此板原来不带电。求静电平衡时, 金属板上的电荷分布及周围空间的电场分布。如果把第二块金属板接地, 情况又如何? (忽略金属板的边缘效应)。

解: 由于静电平衡时导体内部无净电荷, 所以电荷只能分布在两金属板的表面上。不考虑边缘效应, 这些电荷都可当作是均匀分布的。设四个表面上的面电荷密度分别为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 和 σ_4 , 如图 4.6 所示。由电荷守恒定律可知,

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{S}$$

$$\sigma_3 + \sigma_4 = 0$$

由于板间电场与板面垂直, 且板内的电场为零, 所以选一个两底分别在两个金属板内而侧面垂直于板面的封闭面作为高斯面, 则通过此高斯面的电通量为零。根据高斯定律就可以得出,

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

在金属板内一点 P 的场强应该是四个带电面的电场的叠加, 因而有

$$E_P = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0}$$

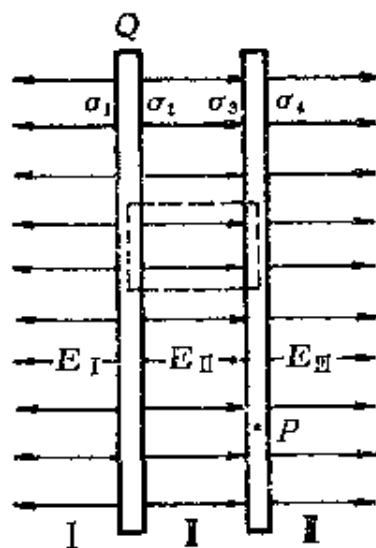


图 4.6

由于静电平衡时,导体内各处场强为零,所以 $E_p = 0$, 因而有

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

将此式和上面三个关于 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 和 σ_4 的方程联立求解, 可得电荷分布的情况为

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2S}, \quad \sigma_2 = \frac{Q}{2S}, \quad \sigma_3 = -\frac{Q}{2S}, \quad \sigma_4 = \frac{Q}{2S}$$

由此可根据(4.2)式求得电场的分布如下:

在 I 区,
$$E_{\text{I}} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}, \text{ 方向向左}$$

在 II 区,
$$E_{\text{II}} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}, \text{ 方向向右}$$

在 III 区,
$$E_{\text{III}} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}, \text{ 方向向右}$$

如果把第二块金属板接地(图 4.7), 它就与地这个大导体连成一体。金属板右表面上的电荷就会分散到更远的地球表面上而使得这金属表面上的电荷实际上消失。因而

$$\sigma_4 = 0$$

第一块金属板上的电荷守恒仍给出,

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{S}$$

由高斯定律仍可得:

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

为了使得金属板内 P 点的电场为零, 又必须有

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

以上四个方程式给出

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \frac{Q}{S}, \quad \sigma_3 = -\frac{Q}{S}, \quad \sigma_4 = 0$$

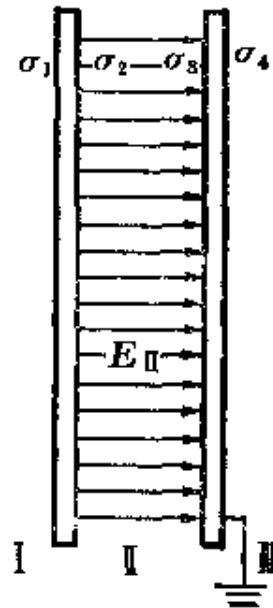


图 4.7

和未接地前相比, 电荷分布改变了。这一变化是负电荷通过接地线从地里跑到第二块金属板上的结果。这负电荷的电量一方面中和了金属板右表面上的正电荷(这是正电荷跑入地球的另一说法), 另一方面又补充了左表面上的负电荷使其面密度增加一倍。同时第一块板上的电荷全部移到了右表面上。只有这样, 才能使两导体内部的场强为零而达到静电平衡状态。

这时的电场分布可根据上面求得的电荷分布求出为

$$E_{\text{I}}=0, \quad E_{\text{II}}=\frac{Q}{\epsilon_0 S}, \text{ 向右}; \quad E_{\text{III}}=0$$

[例 2] 一个半径为 R_1 的金属球 A , 带有总电量 q_1 , 在它外面有一个同心的金属球壳 B , 其内外半径分别为 R_2 和 R_3 , 带有总电量 q 。试求此系统的电荷及电场分布以及球与壳之间的电势差。如果用导线将球和壳连接一下, 结果又将如何?

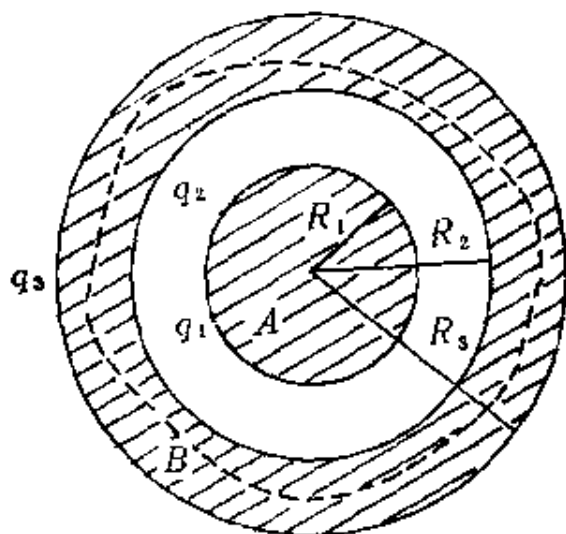


图 4.8

解: 导体球和壳内的电场应为零, 而电荷均匀分布在它们的表面上。以 q_2 和 q_3 分别表示在球壳内外表面上的总电荷 (图 4.8), 则在壳内作一个包围内腔的高斯面, 就可以求得

$$q_1 + q_2 = 0$$

因此

$$q_2 = -q_1$$

由于导体球壳上的总电荷守恒, 所以 $q_2 + q_3 = q$, 因而可得

$$q_3 = q - q_2 = q + q_1$$

知道了三个球面上的电荷分布, 就可以用作同心球面作为高斯面的方法求出空间的场强分布如下:

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$E = \frac{q_1 + q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (r > R_3)$$

球与壳之间的电势差为

$$U_A - U_B = \int_{(A)}^{(B)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

如果用导线将球和球壳连接一下,则壳的内表面和球表面的电荷会完全中和而使两个表面都不再带电,二者之间的电场变为零,而二者之间的电势差也变为零。在球壳的外表面上电荷仍保持为 $q_1 + q$,而且均匀分布,它外面的电场分布也不会改变而仍为 $(q_1 + q)/4\pi\epsilon_0 r^2$ 。

§ 4.4 静电屏蔽

静电平衡时导体内部的场强为零这一规律在技术上用来作静电屏蔽。用一个金属空壳就能使其内部不受外面的静止电荷的电场的影响。下面我们来说明其中的道理。

如图 4.9 所示,一金属空壳 A 外面放有带电体 B,当空壳处于静电平衡时,金属壳体内的场强为零。这时如果在壳体内作一个封闭曲面 S 包围住空腔,可以由高斯定律推知空腔内表面上的净电荷为零。但是会不会在内表面上某处有正电荷,另一处有等量的负电荷呢?不会的。因为如果是这样,则空腔内将有电场。这一电

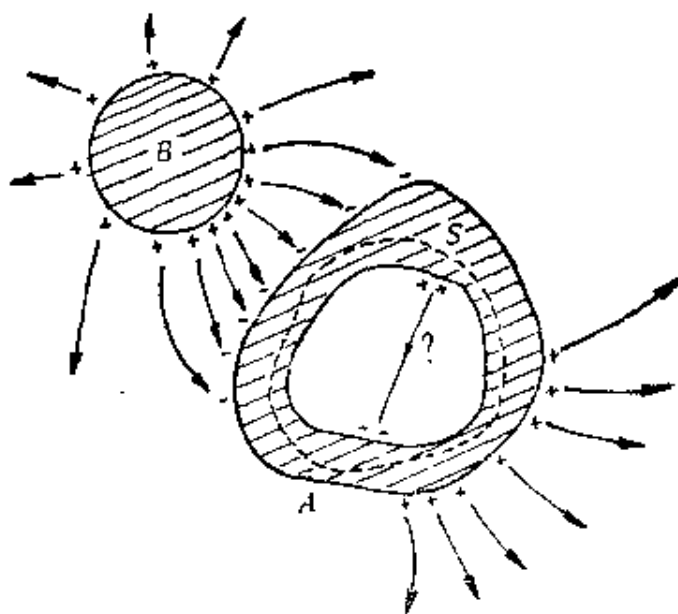


图 4.9 金属空壳的静电屏蔽作用

场将使得内表面上带正电荷和带负电荷的地方有电势差，这与静电平衡时导体是等势体的性质就相矛盾了。所以空壳的内表面上必然处处无净电荷而空腔内的电场强度也就必然为零。这个结论是和壳外的电荷和电场的分布无关的，因此金属壳就起到了屏蔽外面电荷的电场的作用。

应该指出，这里不要误认为由于导体壳的存在，壳外电荷就不在空腔内产生电场了。实际上，壳外电荷在空腔内同样产生电场。空腔内的场强所以为零，是因为壳的外表面上的电荷分布发生了变化(或说产生了感应电荷)的缘故。这些重新分布的表面电荷在空腔内也产生电场，这电场正好抵消了壳外电荷在空腔内产生的电场。如果导体壳外的带电体的位置改变了，那么导体壳外表面上的电荷分布也会跟着改变，其结果将是始终保持壳内的总场强为零。

在电子仪器中，为了使电路不受外界带电体的干扰，就把电路封闭在金属壳内。实用上常常用金属网罩代替全封闭的金属壳。传送微弱电信号的导线，它的外表就是用金属丝编成的网包起来的。这样的导线叫屏蔽线。

导体空壳内电场为零的结论还有重要的理论意义。对于库仑定律中的反比指数“2”，库仑曾用扭秤实验直接地确定过。但是扭秤实验不可能做得非常精确。处于静电平衡的导体空壳内无电场的结论是由高斯定律和静电场的电势概念导出的，而这些又都是库仑定律的直接结果。因此在实验上检验导体空壳内是否有电场存在可以间接地验证库仑定律的正确性。卡文迪许和麦克斯韦以及1971年威廉斯等人都是利用这一原理做实验来验证库仑定律的。

本章提要

1. 导体的静电平衡条件:

$$E_{\text{内}}=0, \quad E_{\text{表面}} \perp \text{表面}$$

或导体是个等势体。

2. 静电平衡的导体上电荷的分布:

$$q_{\text{内}}=0, \quad \sigma_{\text{表}}=E/\epsilon_0$$

3. 计算有导体存在时的静电场分布问题的基本依据:

高斯定律, 电势概念, 电荷守恒, 导体静电平衡条件。

4. 静电屏蔽: 金属空壳的外表面上及壳外的电荷在壳内的合场强总为零, 因而对壳内无影响。

思考题

4.1 各种形状的带电导体中, 是否只有球形导体其内部场强才为零? 为什么?

4.2 一带电为 Q 的导体球壳中心放一点电荷 q , 若此球壳电势为 U_0 , 有人说: “根据电势叠加, 任一 P 点 (距中心为 r) 的电势 $U_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + U_0$ ”, 这说法对吗?

4.3 使一孤立导体球带正电荷, 这孤立导体球的质量是增加, 减少还是不变?

4.4 在一孤立导体球壳的中心放一点电荷, 球壳内、外表面上的电荷分布是否均匀? 如果点电荷偏离球心, 情况如何?

4.5 把一个带电物体移近一个导体壳, 带电体单独在导体壳的腔内产生的电场是否为零? 静电屏蔽效应是如何发生的?

4.6 设一带电导体表面上某点附近面电荷密度为 σ , 则紧靠该处表面外侧的场强为 $E = \sigma/\epsilon_0$, 若将另一带电体移近, 该处场强是否改变? 这场强与该处导体表面的面电荷密度的关系是否仍具有 $E = \sigma/\epsilon_0$ 的形式?

4.7 空间有两个带电导体,试说明其中至少有一个,它的表面上各点所带电荷都是同号的。

4.8 无限大均匀带电平面(面电荷密度为 σ)两侧场强为 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$,而在静电平衡状态下,导体表面(该处表面面电荷密度为 σ)附近场强 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$,为什么前者比后者小一半?

4.9 两块平行放置的导体大平板带电后,其相对的两表面上的面电荷密度是否一定是大小相等、符号相反?为什么?

习 题

4.1 求导体外表面紧邻处场强的另一方法。设导体面上某处面电荷密度为 σ ,在此处取一小面积 ΔS ,将 ΔS 面两侧的电场看成是 ΔS 面上的电荷的电场(用无限大平面算)和导体上其他地方以及导体外的电荷的电场(这电场在 ΔS 附近可以认为是均匀的)的叠加,并利用导体内合电场应为零求出导体表面处紧邻处的场强为 σ/ϵ_0 。

4.2 一导体球半径为 R_1 ,其外同心地罩以内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的厚导体壳,此系统带电后内球电势为 U ,外球所带总电量为 Q 。求此系统各处的电势和电场分布。

4.3 在一半径为 $R_1 = 6.0\text{cm}$ 的金属球 A 外面套有一个同心的金属球壳 B 。已知球壳 B 的内、外半径分别为 $R_2 = 8.0\text{cm}$, $R_3 = 10.0\text{cm}$ 。设 A 球带有总电量 $Q_A = 3 \times 10^{-8}\text{C}$,球壳 B 带有总电量 $Q_B = 2 \times 10^{-8}\text{C}$ 。

求:(1) 球壳 B 内、外表面上各带有的电量以及球 A 和球壳 B 的电势;

(2) 将球壳 B 接地然后断开,再把金属球 A 接地。求金属球 A 和球壳 B 内、外表面上各带有的电量以及球 A 和球壳 B 的电势。

4.4 如图 4.10 所示,有三块互相平行的导体板,外面的两块用导线连

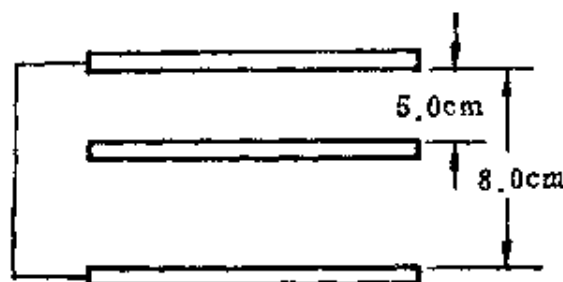


图 4.10

接,原来不带电。中间一块上所带总面电荷密度为 $1.3 \times 10^{-5} \text{C/m}^2$ 。求每块板的两个表面的面电荷密度各是多少? (忽略边缘效应)。

4.5 一球形导体 A 含有两个球形空腔, 这导体本身的总电荷为零, 但在两空腔中心分别有一点电荷 q_b 和 q_c , 导体球外距导体球很远的 r 处有另一点电荷 q_d (图 4.11)。问: q_b 、 q_c 和 q_d 各受到多大的力? 哪个答案是近似的?

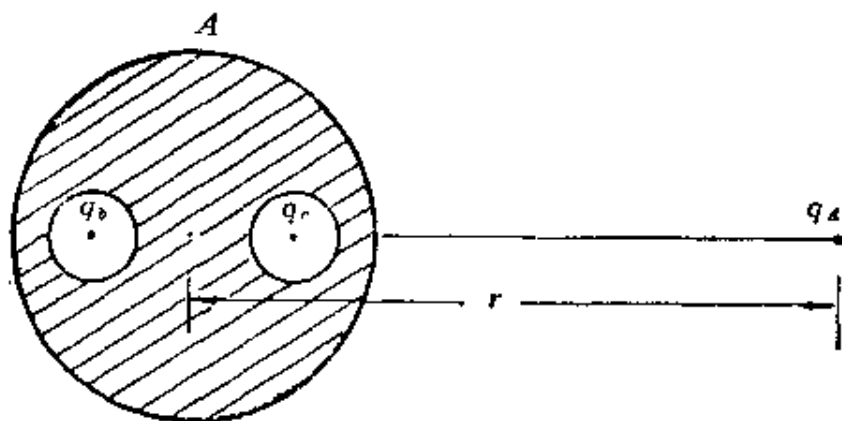


图 4.11

I 范德格拉夫静电加速器

范德格拉夫静电加速器是利用静电原理产生高电压来加速带电粒子的装置。图 I 是这种加速器的原理示意图。A 是一个近乎封闭的中空金属罩，作为高压电极，它被支在绝缘柱上。两个转轴 C、D 之间装上一条由绝缘材料制成的传送带。传送带由电动机带动。

在传送带下端附近装有一排针尖 E，这些针尖与直流电源（电压约几万伏）的正极相连，电源负极和转轴 D 都接地。这样在针尖 E 和转轴 D 之间就有几万伏的电势差。由于尖端放电，正电荷被喷射到传送带上并被传送带着向上运动。在金属罩 A 的内侧也装有一排与 A 相连的金属针尖（或电刷）F，当传送带上的正电荷与其靠近时，针尖上就被感应出等量异号电荷。其中负电荷

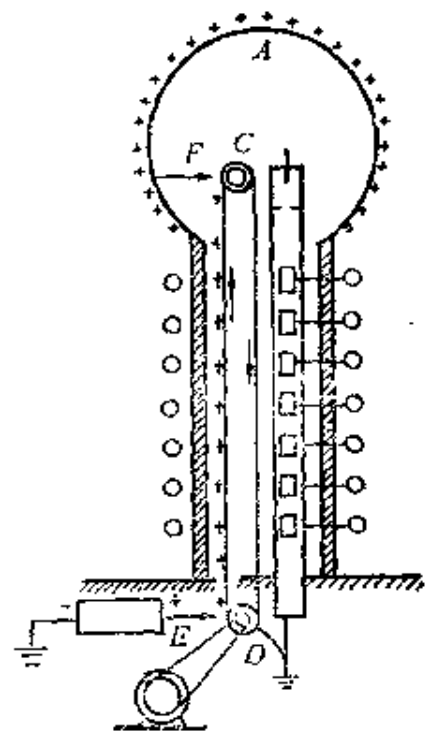


图 I 静电加速器原理示意图

也由于尖端放电，和传送带上的正电荷中和使传送带失去电荷而针尖带上了正电荷。由于导体带电时电荷只能存在于外表面，所以针尖上的正电荷又会立即传到金属罩的外表面。这样，由于传送带的运送，正电荷就不断从下面的直流电源传到金属罩的外表面上使之带电越来越多，从而能在金属罩和地之间产生高电压。

电极A的电压也不能无限制地提高。因为当电压高到一定数值时电极就会通过周围空气发生电晕放电（在电极周围的强电场中空气电离引起的一种缓慢放电现象），局部尖端放电以及沿绝缘支架漏电等现象，使一部分电荷不断漏掉进入地中。如果在相同时间内由于这些原因漏掉的电荷和传送带送上来的电荷相等时，电极上的电荷就不能再增加，因而它的电压也就不能再升高了。

提高电极电压的一个方法是制造更大的球形电极。用直径1米的球形电极可以得到0.6百万伏的高压，直径增大到2米可得到1.3百万伏的高压。再增大直径并不能有效地提高电压，例如有人建造直径为10米的电极，只得到4百万伏的电压。所以通过增大球形电极的直径来提高电压是很有限的。

后来人们发现在高气压条件下，气体的击穿强度（即使气体变成良导电体的电压）要比正常气压下高得多。于是就试着把静电加速器放在高压气体中来解决电击穿问题。试验结果是成功的。原来在正常气压下只能得到0.6百万伏的静电加速器，放到充有几个大气压的氮气钢筒中后，电压就可以提高到4.5百万伏。现在大部分运行的静电加速器就是这种高气压静电加速器。

静电加速器中带电粒子（如电子、质子、核、 α 粒子或其它离子）的加速是在加速管中进行的。加速管安装在绝缘支柱里面，管内抽成高真空。管内上端是离子源，下端是靶子，管内沿轴线排列着一串用金属圆筒做成的加速电极。加速电极一个一个分别连到围在绝缘柱外用金属环做成的一串均压环上，各均压环分别接到从高压电极到地之间的分压电阻的相应的节点上。这样就可以使沿着加速管由上到下电势均匀降低，以避免电压不均匀时发生局部电击穿而破坏加速器的运行。

为了提高带电粒子在加速管中得到的能量，在不提高高压电极的电压的条件下，使用了一种串列加速的方法。它主要是将加

速管的长度加长，使高压电极位于其中部。在离子源一端产生的负离子受高压电极正电的吸引，在管内加速飞向高压电极，在通过高压电极时，打到碳膜上，被碳膜剥掉电子变成正离子。这些正离子又受到高压电极的正电的排斥而向靶端飞去，这样又得到了一次加速。于是粒子获得的能量就等于只加速一次时的两倍。这种二级串列静电加速器能够使粒子得到30百万电子伏的能量。它是低能粒子物理实验中很理想的工具。

第五章 静电场中的电介质

本章要求

1. 理解两种电介质极化的微观机制及宏观束缚电荷的产生。了解电极化强度和介质击穿场强的意义。
2. 理解电位移 D 的定义及 D 的高斯定律的意义, 并能利用它们求解有电介质存在时具有一定对称性的电场的问题。
3. 理解电容的意义, 并会计算简单电容器和电容器组的电容。
4. 能推导电容器的电能公式并能利用它计算电容器的能量。
5. 理解电场能量密度的概念, 并能利用它来计算电荷系统的能量。

§ 5.1 电介质对电场的影响

电介质是绝缘体。理想的电介质内部没有可以自由移动的电荷, 因而不能导电。但把一块电介质放到电场中, 它也要受电场的影响, 同时也影响电场。本章讨论这种相互影响的规律, 所涉及的电介质只限于各向同性的。

电介质对电场的影响可以通过下述实验观察出来。图 5.1(a) 画出了两个平行放置的金属板, 分别带有等量异号电荷 $+Q$ 和 $-Q$, 板间是空气, 可以非常近似地当成真空处理。两板分别连到静电计的直杆和外壳上, 这样就可以由直杆上指针偏转的大小测

出两带电板之间的电压来。设此时的电压为 V_0 。如果保持两板距离和板上的电荷都不改变，而在板间充满电介质（或把两板插入绝缘液体如油中）（图 5.1b），则可由静电计的偏转减小发现两板间的电压变小了。以 V 表示插入电介质后两板间的电压，则它与 V_0 的关系可以写成

$$V = V_0 / \epsilon_r \quad (5.1)$$

式中 ϵ_r 为一个大于 1 的数，它的大小随电介质的种类和状态（如温度）的不同而不同，是电介质的一种特性常数叫做电介质的相对介电常数。几种电介质的相对介电常数列在表 5.1 中。

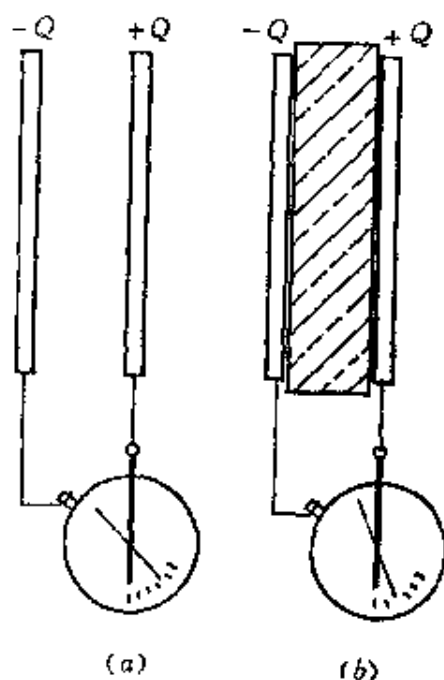


图 5.1 电介质对电场的影响

表 5.1 几种电介质的相对介电常数

电 介 质	相对介电常数 ϵ_r
真空	1
空气 (0°C, 1atm)	1.00059
水 (0°C, 1atm)	80
变压器油 (20°C)	2.24
云母	4—7
瓷	6—8
玻璃	5—10
钛酸钡	10^3 — 10^4

在上述实验中，电介质插入后两板间的电压减小，说明由于电介质的插入使板间的电场减弱了。由于 $V = Ed$, $V_0 = E_0d$ ，所以

$$E = E_0 / \epsilon_r \quad (5.2)$$

即电场减小到板间为真空时的 $1/\epsilon_r$ 。为什么会有这个结果呢？这

可以用电介质受电场的影响而发生的变化来说明，而这又涉及电介质的微观结构。下面我们就来说明这一点。

§ 5.2 电介质的极化

电介质中每个分子都是一个复杂的带电系统，有正电荷，有负电荷。它们分布在一个线度为 10^{-10} m (1 Å) 的数量级的体积内，而不是集中在一点。但是，在考虑这些电荷离分子较远处所产生的电场时，或是考虑一个分子受外电场的作用时，都可以认为其中的正电荷集中于一点，这一点叫正电荷的“重心”。而负电荷也集中于另一点，这一点叫负电荷的“重心”。对于中性分子，由于其正电荷和负电荷的电量相等，所以一个分子就可以看成是一个由正、负点电荷相隔一定距离所组成的电偶极子。在讨论电场中的电介质的行为时，可以认为电介质是由大量的这种微小的电偶极子所组成的。

以 q 表示一个分子中的正电荷或负电荷的电量的数值，以 l 表示从负电荷“重心”指到正电荷“重心”的矢量距离，则这个分子的电偶极矩应是

$$p = ql$$

按照电介质的分子内部的电结构的不同，可以把电介质分子分为两大类：极性分子和非极性分子。

有一类分子，如 HCl, H₂O, CO 等，在正常情况下，它们内

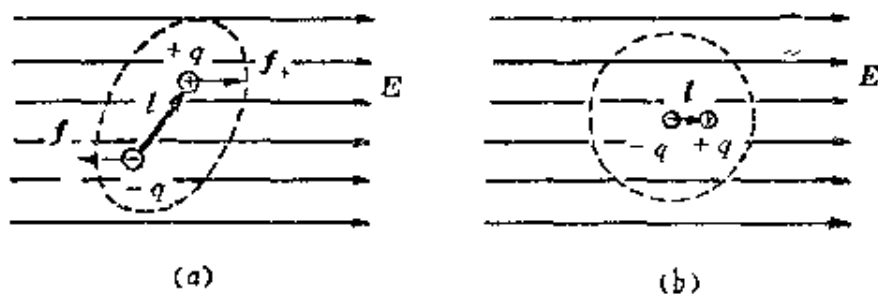


图 5.2 在外电场中的电介质分子

部的电荷分布就是不对称的,因而其正、负电荷的重心不重合。这种分子具有固有的电偶极矩(图 5.2a),它们统称为**极性分子**。几种极性分子的固有电偶极矩列于表 5.2 中。

表 5.2 几种极性分子的固有电偶极矩

电 介 质	电偶极矩(C·m)
HCl	3.4×10^{-30}
NH ₃	4.8×10^{-30}
CO	0.9×10^{-30}
H ₂ O	6.1×10^{-30}

另一类分子,如He, H₂, N₂, O₂, CO₂等,在正常情况下,它们内部的电荷分布具有对称性,因而正、负电荷的重心重合,这样的分子就没有固有电偶极矩,这种分子叫**非极性分子**。但如果把这种分子置于外电场中,则由于外电场的作用,两种电荷的重心会分开一段微小距离,因而使分子具有了电偶极矩(图 5.2b)。这种电偶极矩叫**感应电偶极矩**。在实际可以得到的电场中,感应电偶极矩比极性分子的固有电偶极矩小得多,约为后者的 10^{-5} (参考习题 1.20)。很明显,感应电偶极矩的方向总与外加电场的方向相同。

当把一块均匀的电介质放到静电场中时,它的分子将受到电场的作用而发生变化,但最后也会达到一个平衡状态。如果电介质是由**非极性分子**组成,这些分子都将沿电场方向产生感应电偶极矩,如图 5.3(a)所示。外电场越强,感应电偶极矩越大。如果电介质是由**极性分子**组成,这些分子的固有电偶极矩将受到外电场的力矩作用而沿着外电场方向取向,如图 5.3(b)所示。由于分子的无规则热运动总是存在的,这种取向不可能完全整齐。外电场越强,固有电偶极矩排列越整齐。

虽然两种电介质受外电场的影响所发生的变化了的微观机制不

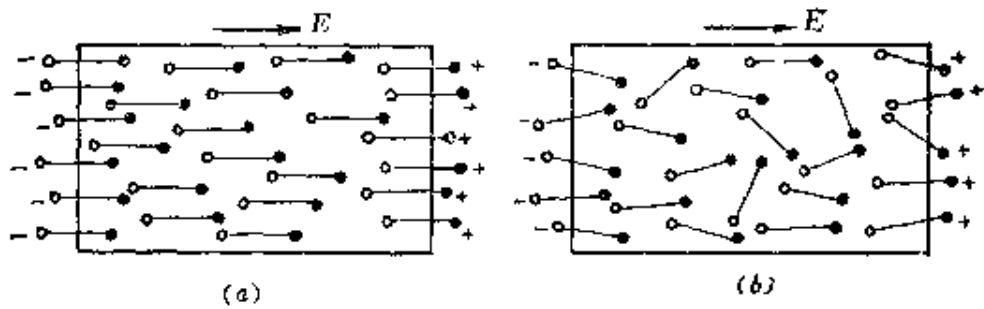


图 5.3 在外电场中的电介质

同，但其宏观总效果是一样的。在电介质内部的宏观微小的区域内，正负电荷的电量仍相等，因而仍表现为中性。但是，在电介质的表面上却出现了只有正电荷或只有负电荷的电荷层，如图 5.3 所示。这种出现在电介质表面的电荷叫**束缚电荷**（或**极化电荷**），因为它不象导体中的自由电荷那样能用传导的方法引走。在外电场的作用下，电介质表面出现束缚电荷的现象，叫做**电介质的极化**^[注]。显然，外电场越强，电介质表面出现的束缚电荷越多。

电介质的电极化状态，可用电介质的电极化强度来表示。电极化强度的定义是单位体积内的分子的电偶极矩的矢量和。以 \mathbf{p}_i 表示在电介质中某一小体积 ΔV 内的某个分子的电偶极矩（固有的或感应的），则该处的电极化强度 \mathbf{P} 为

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V} \quad (5.3)$$

对非极性分子构成的电介质，由于每个分子的感应电偶极矩都相同，所以，若以 n 表示电介质单位体积内的分子数，则有

$$\mathbf{P} = n \mathbf{p}$$

电极化强度的国际单位是库仑/米²（记作 C/m²），它的量纲与面电荷密度的量纲相同。

[注] 非均匀电介质放到外电场中时，电介质内部的宏观微小区域内还会出现多余的正的或负的束缚电荷。这也是电极化的表现。

由于一个分子的感应电偶极矩随外电场的增强而增大，而分子的固有电偶极矩随外电场的增强而排列得更加整齐，所以，不论哪种电介质，它的电极化强度都随外电场的增强而增大。实验证明：当电介质中的电场 E 不太强时，各种各向同性的电介质（我们以后仅限于讨论此种电介质）的电极化强度与 E 成正比，方向相同，其关系可表示为

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E} \quad (5.4)$$

式中的 ε_r 即电介质的相对介电常数。

由于电介质的束缚电荷是电介质极化的结果，所以束缚电荷与电极化强度之间一定存在某种定量的关系，这一定量关系可如下求得。以非极性分子电介质为例，考虑电介质内部某一小面元 dS 处的电极化。设电场 E 的方向（因而 P 的方向）和 dS 的正法线 \hat{n} 的方向成 θ 角，如图 5.4。由于电场 E 的作用，分子的正、负电荷的重心将沿电场方向分离。为简单起见，假定负电荷不动，而正电荷沿 E 的方向发生位移 l 。在面元 dS 后侧取一斜高为 l ，底面积为 dS 的体积元 dV 。由于电场 E 的作用，此体积内所有分子的正电荷重心将越过 dS 到前侧去。以 q 表示每个分子的正电荷量，以 n 表示电介质单位体积内的分子数，则由于电极化而越过 dS 面的总电荷为

$$dq' = qndV = qnl dS \cos\theta$$

由于 $ql = p$ ，而 $np = P$ ，所以

$$dq' = P \cos\theta dS$$

因此， dS 面上因电极化而越过单位面积的电荷应为

$$\sigma' = \frac{dq'}{dS} = P \cos\theta = \mathbf{P} \cdot \hat{n} \quad (5.5)$$

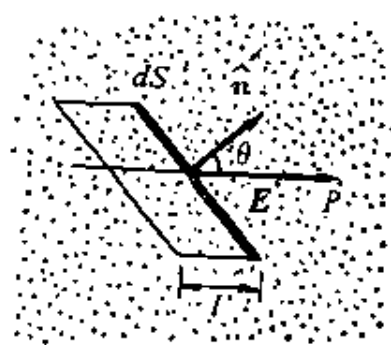


图 5.4

这一关系式虽然是利用非极性分子电介质推出的，但对极性分子电介质同样适用。

在上述论证中，如果 dS 面碰巧是电介质的表面，而 \hat{n} 是其外法线方向，则(5.5)式中的 σ' 就是因电极化而在电介质表面上显露出的束缚面电荷密度，而(5.5)式也就是束缚面电荷密度与电极化强度的定量关系。

电介质内部束缚电荷的产生可以根据(5.5)式进一步求出。为此可设想电介质内部任一封闭曲面 S (图 5.5)。如上已求得由于电极化而越过 dS 面向外移出封闭面的电荷为 $dq'_{in} = P \cos \theta dS =$

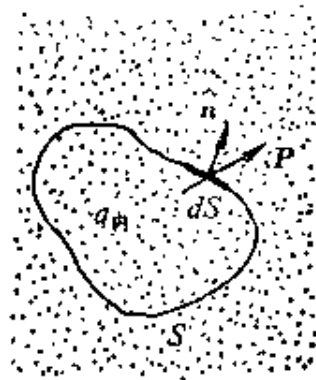


图 5.5

$P \cdot dS$ 。通过整个封闭面向外移出的电荷应为

$$q'_{in} = \oint_S dq'_{in} = \oint_S P \cdot dS$$

因为电介质是中性的，根据电荷守恒，由于电极化而在封闭面内留下的多余的电荷，即束缚电荷，应为

$$q'_{in} = -q'_{out} = - \oint_S P \cdot dS \quad (5.6)$$

这就是电介质内由于电极化而产生的束缚电荷与电极化强度的关系：封闭面内的束缚电荷等于通过该封闭面的电极化强度通量的负值。

当外加电场不太强时，它只是引起电介质的极化，不会破坏电介质的绝缘性能。（实际的各种电介质中总有数目不等的少量自由电荷，所以总有微弱的导电能力）。如果外加电场很强，则电介质的分子中的正负电荷有可能被拉开而变成可以自由移动的电荷。由于大量的这种自由电荷的产生，电介质的绝缘性能就会遭

到明显的破坏而变成了导体。这种现象叫电介质的击穿。一种电介质材料所能承受的不被击穿的最大电场强度，叫做这种电介质的介电强度或击穿场强。表 5.3 给出了几种电介质的介电强度的数值(由于实验条件及材料成份的不确定,这些数值只是大致的)。

表 5.3 几种电介质的介电强度

电 介 质	介电强度(kV/mm)
空气(1atm)	3
玻璃	10—25
瓷	6—20
矿物油	15
纸(油浸过的)	15
胶木	20
石蜡	30
聚乙烯	50
云母	80—200
钛酸钡	3

§ 5.3 D 的高斯定律

电介质放在电场中时,受电场的作用而极化,产生了束缚电荷。这束缚电荷又会反过来影响电场的分布。有电介质存在时的电场应该由电介质上的束缚电荷和其他电荷共同决定。这其他电荷包括金属导体上带的电荷,统称自由电荷。设自由电荷为 q_0 ,它产生的电场用 E_0 表示,电介质上的束缚电荷为 q' ,它产生的电场用 E' 表示,则有电介质存在时的总场强为

$$E = E_0 + E' \quad (5.7)$$

一般问题中,只给出自由电荷的分布和电介质的分布,束缚电荷的分布是未知的。由于束缚电荷由电场的分布 E 决定,而 E

又通过上式由束缚电荷的分布决定, 这样, 问题就相当复杂。但这种复杂关系可以通过引入适当的物理量来简明地表示。下面就用高斯定律来导出这种表示式。

如图 5.6 所示, 带电的导体和电极化了的电介质组成的系统可视为由一定的束缚电荷 $q'(\sigma')$ 和自由电荷 $q_0(\sigma_0)$ 分布组成的电荷系统。所有这些电荷产生一电场分布 E 。由高斯定律, 可知, 对封闭面 S 来说,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sum q_{0in} + q'_{in})$$

将(5.6)式的 q'_{in} 代入此式, 移项后可得

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{0in}$$

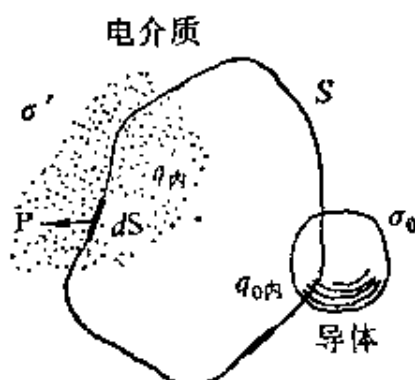


图 5.6

在此, 引入一个辅助物理量表示积分号内的合矢量, 叫做电位移, 并以 D 表示, 即定义

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (5.8)$$

则上式就可简洁地表示为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{0in} \quad (5.9)$$

此式说明通过任意封闭曲面的电位移通量等于该封闭面包围的自由电荷的代数和。这一关系式叫 D 的高斯定律, 是电磁学的一条基本定律。在无电介质的情况下, $\mathbf{P} = 0$, (5.9) 式还原为(1.20)式。

将(5.4)式的 \mathbf{P} 代入(5.8)式, 可得

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (5.10)$$

通常还用 ϵ 代表乘积 $\epsilon_0 \epsilon_r$, 即

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (5.11)$$

并叫做电介质的介电常数, 它的单位与 ϵ_0 的单位相同。这样,

(5.10)式可以写成

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (5.12)$$

这一关系式是点点对应的关系,即电介质中某点的 \mathbf{D} 等于该点的 \mathbf{E} 与电介质在该点的介电常数的乘积,二者的方向相同。^[注]

在国际单位制中电位移的单位为库/米²(C/m²)。

利用 \mathbf{D} 的高斯定律,可以先由自由电荷的分布求出 \mathbf{D} 的分布,然后再用(5.10)式或(5.12)式求出 \mathbf{E} 的分布。当然,具体来说,还是只有对那些自由电荷和电介质的分布都具有一定对称性的系统,才可能用 \mathbf{D} 的高斯定律简便地求解。下面举两个例子。

[例 1] 如图 5.7 所示,一个带正电的金属球,半径为 R ,电量为 q ,浸在一个大油箱中,油的相对介电常数为 ε_r ,求球外的电场分布以及贴近金属球表面的油面上的束缚电荷总量 q' 。

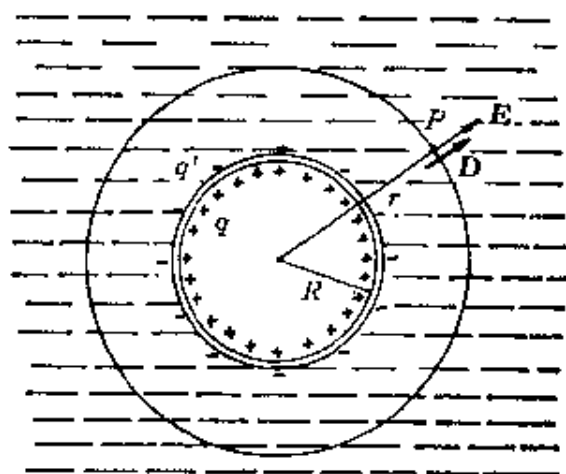


图 5.7

解:由自由电荷 q 和电介质分布的球对称性可知, \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 的分布也具有球对称性。为了求出在油内距球心距离为 r 处的电场强度 \mathbf{E} ,可以作一个半径为 r 的球面并计算通过此球面的 \mathbf{D} 通量。这一通量是

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 4\pi r^2$$

[注] 在各向异性的电介质中,同一地点的 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 的方向不同,它们的关系不能用(5.12)式简单地表示。

由 D 的高斯定律可知

$$D \cdot 4\pi r^2 = q$$

由此得

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

考虑到 D 的方向沿径向向外, 此式可用矢量式表示为

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

根据(5.10)式可得油中的电场分布公式为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{r} \quad (5.13)$$

由于在真空情况下, 电荷 q 周围的电场为 $\mathbf{E}_0 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$, 可见, 当电荷周围充满电介质时, 场强减弱到真空时的 ϵ_r 分之一。这减弱的原因是在贴近金属球表面的油面上出现了束缚电荷。

现在来求束缚电荷总量 q' 。由于 q' 在贴近球面的介质表面上均匀分布, 它在 r 处产生的电场应为

$$\mathbf{E}' = \frac{q'}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

自由电荷 q 在 r 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_0 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

将此二式和(5.13)式代入(5.7)式, 可得

$$q' = \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) q$$

由于 $\epsilon_r > 1$, 所以 q' 总与 q 反号, 而其数值则小于 q 。

[例 2] 如图 5.8 所示, 两块靠近的平行金属板间原为真空。使它们分别带上等量异号电荷直至两板上电荷密度分别为 $+\sigma_0$ 和 $-\sigma_0$, 而板间电压 $V_0 = 300\text{V}$, 这时保持两板上的电量不变, 将板间一半空间充以相对介电常数为 $\epsilon_r = 5$ 的电介质, 求板间电压变为多少? 电介质上、下表面的束缚面电荷密度多大? (计算时忽略边缘效应)。

解: 设金属板的面积为 S , 板间距离为 d , 在未充电介质前板的电荷面密度是 σ_0 , 这时板间电场为 $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$, 而两板间电压为: $V_0 = E_0 d$ 。

板间一半充以电介质后, 不考虑边缘效应, 则板间各处的电场 E 与电位

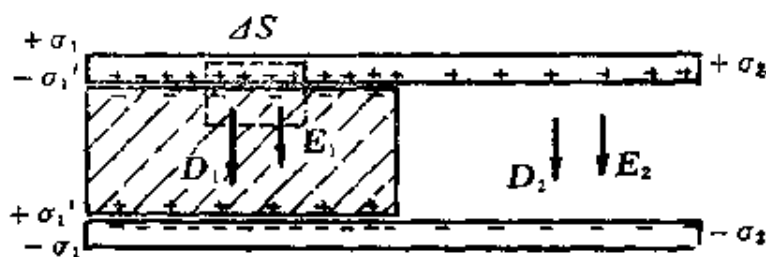


图 5.8

移 D 的方向都垂直于板面且在两半内部分布均匀。以 σ_1 和 σ_2 分别表示金属板上左半及右半部的面电荷密度, 以 E_1, E_2 和 D_1, D_2 分别表示板间左半和右半部的电场强度和电位移。为了求出此时板间的电压, 需要先求出电场分布, 而这又需要先求出 D 的分布。为此, 先在板间左半部作一底面积为 ΔS 的封闭柱面作为高斯面, 其轴线与板面垂直, 两底面与金属板平行, 而且上底面在金属板内。通过这一封闭面的 D 的通量为

$$\oint_S D_1 \cdot dS = \int_{\text{上底}} D_1 \cdot dS + \int_{\text{下底}} D_1 \cdot dS + \int_{\text{侧面}} D_1 \cdot dS$$

由于在上底面处场强为零, D 也为零; 在侧面上 D 与 dS 垂直, 所以上式等号右侧第一、三项为零, 中间一项等于 $D_1 \Delta S$ 。因此

$$\oint_S D_1 \cdot dS = D_1 \Delta S$$

包围在此封闭面内的自由电荷为 $\sigma_1 \Delta S$, 由 D 的高斯定律可得

$$D_1 = \sigma_1$$

而

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

同理, 对于右半部, $D_2 = \sigma_2$

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$$

由于静电平衡时两导体都是等势体, 所以左右两部分两板间的电势差是相等的, 即

$$E_1 d = E_2 d$$

所以

$$E_1 = E_2$$

将上面的 E_1 和 E_2 的值代入可得

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_r}$$

此外, 因为金属板上总电量保持不变, 所以有

$$\sigma_1 \frac{S}{2} + \sigma_2 \frac{S}{2} = \sigma_0 S$$

由此得

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_0$$

将上面关于 σ_1 和 σ_2 的两个方程联立求解, 可得

$$\sigma_1 = \frac{2\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \sigma_0 > \sigma_0$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{1+\epsilon_r} \sigma_0 < \sigma_0$$

这时板间的电场强度为

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} = \frac{2\sigma_0}{\epsilon_0(1+\epsilon_r)} = \frac{2}{1+\epsilon_r} E_0$$

由于 $1 > \frac{2}{1+\epsilon_r} > \frac{1}{\epsilon_r}$, 所以这一结果说明两板间电场比板间全部为真空时的场强减弱了, 但并不象(5.2)式表示的那样减弱到 ϵ_r 分之一, 这是因为电介质并未充满两板间的空间的缘故。

求出了场强, 就可以求出板间充有电介质时两板间的电压为

$$V = Ed = \frac{2}{1+\epsilon_r} E_0 d = \frac{2}{1+\epsilon_r} V_0 = \frac{2}{1+5} \times 300 = 100 \text{ V}$$

可以如下求出电介质上、下表面的束缚面电荷密度 σ'_1 。电介质的电极化强度为

$$P_1 = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E_1 = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\frac{\sigma_1}{\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{2(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 1}\sigma_0$$

由于 P_1 的方向与 E_1 相同, 即垂直于电介质表面, 所以

$$\sigma'_1 = P_n = P = \frac{2(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 1}\sigma_0$$

§ 5.4 电容器和它的电容

电容器是一种常用的电学和电子学元件, 它由两个用电介质隔开的金属导体组成。电容器的最基本的形式是平行板电容器,

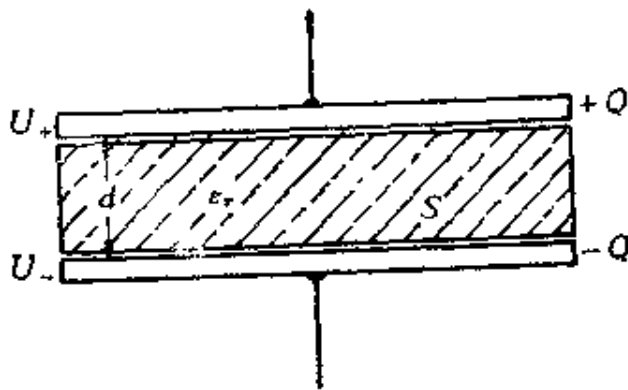


图 5.9 平行板电容器

它是用两块平行的金属板或金属箔，中间夹以电介质薄层如云母片、浸了油或蜡的纸等构成的(图 5.9)。电容器工作时它的两个金属板的相对的两个表面上总是分别带上等量异号的电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 。这时两板间有一定的电势差 $U_+ - U_-$ ，这电势差又叫电容器的电压，用 V 表示。一个电容器所带的电量 Q 总与其电压 V 成正比，比值 Q/V 叫电容器的电容。以 C 表示电容器的电容，就有

$$C = \frac{Q}{V} \quad (5.14)$$

电容器的电容决定于电容器本身的结构，即两导体的形状、尺寸以及两导体间电介质的种类等，而与它所带的电量无关。

在国际单位制中，电容的单位是库/伏(C/V)，叫做法拉(F)。实际上 1F 是非常大的，常用的单位是微法拉(μF)或皮法拉(pF)等较小的单位。

$$1\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$$

$$1\text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$$

从(5.14)式可以看出，在电压相同的条件下，电容 C 越大的电容器，所储存的电量越多。这说明电容是反映电容器储存电荷本领大小的物理量。实际上除了储存电量外，电容器在电工和电子线路中起着很多种作用。交流电路中电流和电压的控制，发射

机中振荡电流的产生, 接收机中的调谐, 整流电路中的滤波, 电子线路中的时间延迟等等都要用到电容器。

简单电容器的电容可以容易地计算出来。下面举几个例子。

先求平行板电容器的电容。以 S 表示两平行金属板相对着的表面积, 以 d 表示两板之间的距离, 并设两板间充满了相对介电常数为 ϵ_r 的电介质。为了求它的电容, 我们假设它带上电量 Q (即两板上相对的两个表面分别带上 $+Q$ 和 $-Q$ 的电荷)。忽略边缘效应, 它的两板间的电场就是

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

两板间的电压就是

$$V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

将此电压代入电容的定义式(5.14)中就可得出平行板电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \quad (5.15)$$

此结果表明电容的确只决定于电容器的结构, 而且板间充满电介质的电容比板间为真空($\epsilon_r = 1$)时的电容大到 ϵ_r 倍。

圆柱形电容器由两个同轴的金属圆筒组成。如图 5.10 所示, 设筒的长度为 L , 两筒的半径分别为 R_1 和 R_2 , 两筒之间充满相对介电常数为 ϵ_r 的电介质。为了求出这种电容器的电容, 我们也假设它带有电量 Q (即外筒的内表面和内筒的外表面分别带有电量 $-Q$ 和 $+Q$)。忽略两端的边缘效应, 根据自由电荷和电介质分布的轴对称性可以利用 D 的高斯定律求出电场分布来。距离轴线为 r 的电介质中一点的电场强度为

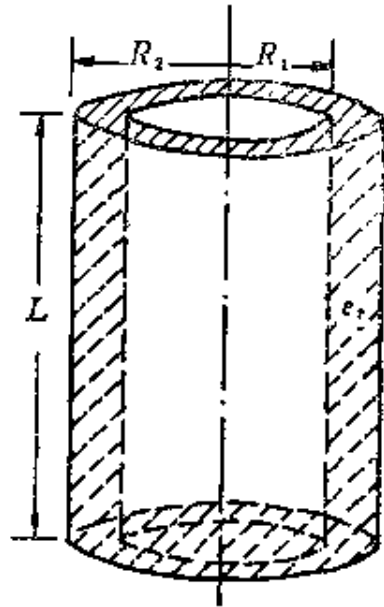


图 5.10 圆柱形电容器

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r rL}$$

场强的方向垂直于轴线而沿径向，由此可以求出两圆筒间的电压为

$$V = \int E \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r rL} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

将此电压代入电容的定义(5.14)式，就可得圆柱形电容器的电容为

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln(R_2/R_1)} \quad (5.16)$$

球形电容器是由两个同心的导体球壳组成。如果两球壳间充满相对介电常数为 ϵ_r 的电介质(图 5.11)，则可用与上面类似的方法求出球形电容器的电容为

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (5.17)$$

式中 R_1 和 R_2 分别表示内球壳外表面和外球壳内表面的半径。

实际的电工和电子装置中任何两个彼此隔离的导体之间都有电容，例如两条输电线之间，电子线路中两段靠近的导线之间都有

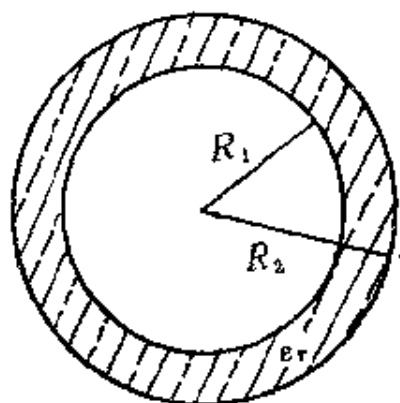


图 5.11 球形电容器

电容。这种电容实际上反映了两部分导体之间通过电场的相互影响，有时叫做“杂散电容”。在有些情况下(如对高频率的变化电流)，这种杂散电容对电路的性质产生明显的影响。

对一个孤立导体，可以认为它和无限远处的另一导体组成一个电容器。这样一个电容器的电容就叫做这个孤立导体的电容。例如对一个在空气中的半径为 R 的孤立的导体球，就可以认为它和一个半径为无限大的同心导体球组成一个电容器。这样，利用

(5.17)式,使 $R_2 \rightarrow \infty$, 将 R_1 改写为 R , 又因为空气的 ϵ_r 可取作 1, 所以这个导体球的电容就是

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (5.18)$$

衡量一个实际的电容器的性能有两个主要的指标, 一个是它的电容的大小, 另一个是它的耐(电)压能力。使用电容器时, 所加的电压不能超过规定的耐压值, 否则在电介质中就会产生过大的场强, 而使它有被击穿的危险。在实际电路中当遇到单独一个电容器的电容或耐压能力不能满足要求时, 就把几个电容器联接起来使用。电容器联接的基本方式有并联和串联两种。

并联电容器组如图 5.12 所示。这时各电容器的电压相等, 即总电压 V , 而总电量 Q 为各电容器所带的电量之和。以 $C = Q/V$ 表示电容器组的总电容或等效电容, 则可证明, 对并联电容器组,

$$C = \Sigma C_i \quad (5.19)$$

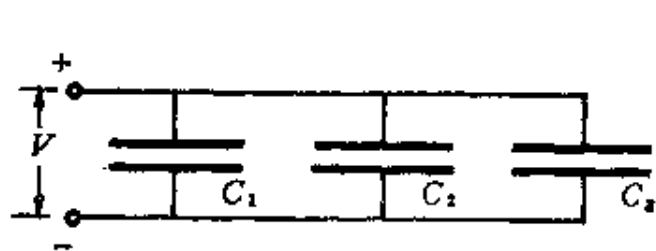


图 5.12 三个电容器并联

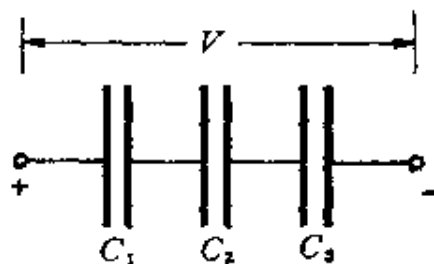


图 5.13 三个电容器串联

串联电容器组如图 5.13 所示。这时各电容器所带电量相等, 也就是电容器组的总电量为 Q , 总电压 V 等于各个电容器的电压之和。仍以 $C = Q/V$ 表示总电容, 则可以证明, 对于串联电容器组,

$$\frac{1}{C} = \Sigma \frac{1}{C_i} \quad (5.20)$$

并联和串联比较起来, 并联时, 总电容增大了, 但因每个电容器都直接连到电压源上, 所以电容器组的耐压能力受到耐压能力最低的那个电容器的限制。串联时, 总电容比每个电容器都减小

了，但是，由于总电压分配到各个电容器上，所以电容器组的耐压能力比每个电容器都提高了。

§ 5.5 电容器的能量和电场的能量

电容器带电时具有能量可以从下述实验看出。将一个电容器 C 、一个直流电源 \mathcal{E} 和一个灯泡 B 连成如图 5.14 的电路，先将开关 K 倒向 a 边，当再将开关倒向 b 边时，灯泡会发出一次强的闪光。有的照相机上附装的闪光灯就是利用了这样的装置。

可以这样来分析这个实验现象。开关倒向 a 边时，电容器两板和电源相连，使电容器两板带上电荷。这个过程叫电容器的充电。当开关倒向 b 边时，电容器两板上的正负电荷又会通过有灯泡的电路中和。这一过程叫电容器的放电。灯泡发光是电流通过它的显示。灯泡发光所消耗的能量是从那里来的呢？是从电容器释放出来的，而电容器的能量则是它充电时由电源供给的。

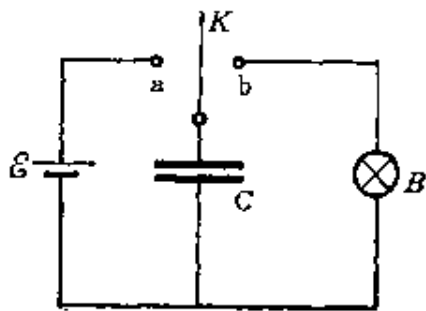


图 5.14 电容器储能实验

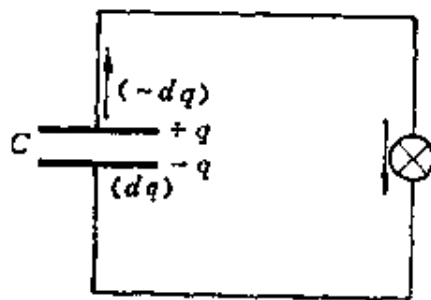


图 5.15 电容器放电过程

现在我们来计算电容器带有电量 Q ，相应的电压为 V 时所具有的能量。这个能量可以根据电容器在放电过程中电场力对电荷做的功来计算。设在放电过程中某时刻电容器两极板所带的电量为 q 。以 C 表示电容，则这时两板间的电压为 $v = q/C$ 。以 $(-dq)$ 表示在此电压下电容器由于放电而减小的微小电量（由于放电过程

中 q 是减小的,所以 q 的增量 dq 本身是负值),也就是说,有 $(-dq)$ 的正电荷在电场力作用下沿导线从正极板经过灯泡与负极板等量的负电荷 (dq) 中和,如图5.15所示。在这一微小过程中电场力做的功为

$$dA = (-dq)v = -\frac{q}{C}dq$$

从原有电量 Q 到完全中和的整个放电过程中,电场力做的总功为

$$A = \int dA = -\int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

这也就是电容器原来带有电量 Q 时所具有的能量。用 W 表示电容器的能量,并利用 $Q=CV$ 的关系,可以得到电容器的能量公式为

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \quad (5.21)$$

电容器的能量可以认为是储存在电容器内的电场之中。这是关于电场概念的一个重要结论。下面我们看如何把这个能量和电场强度 E 联系起来。

仍以平行板电容器为例,设板的面积为 S ,板间距离为 d ,板间充满相对介电常数为 ϵ_r 的电介质。此电容器的电容由(5.15)式给出为

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

将此式代入(5.21)式可得

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \left(\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \right)^2 Sd$$

由于电容器的两板间的电场为

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

所以可得

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} E^2 Sd$$

这样就把平行板电容器的能量用电场强度表示出来了。由于 Sd 是板间电场的体积, 考虑到能量是储存在电场中的, 还可以引入电场能量密度的概念。以 w_e 表示电场能量密度(简称电能密度)则有

$$w_e = \frac{W}{Sd} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

或
$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} DE. \quad (5.22)$$

其中 ϵ 是电介质的介电常数。

(5.22)式虽然是利用平行板电容器推导出来的, 但是可以证明, 它对于任何电场都是成立的。利用这一公式, 如果知道了一个电场分布就可以用下面的积分公式求出这一电场的总电能来。

$$W = \int w_e dV = \int \frac{\epsilon E^2}{2} dV \quad (5.23)$$

此积分应遍及电场分布的空间。

例 11 在真空中一个均匀带电球体(图 5.16), 半径为 R , 体电荷密度为 ρ , 试利用电场能量公式求此带电系统的静电能。

解: 利用高斯定律可以求出此带电球体的电场分布如下

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} \quad (r < R)$$

$$E_2 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (r > R)$$



将此电场分布代入(5.23)式可得(注意要分区计算) 图 5.16

$$\begin{aligned} W &= \int w_e dV = \int_{r < R} w_{e1} dV + \int_{r > R} w_{e2} dV \\ &= \int_0^R \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} 4\pi r^2 dr \\ &= \int_0^R \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 R^5$$

这就是这个均匀带电球体的静电能。这一结果和 § 3.6 [例 2] 的结果相同。

[例 2] 一球形电容器, 内外球的半径分别为 R_1 和 R_2 (图 5.17), 两球间充满相对介电常数为 ϵ_r 的电介质, 求此电容器带有电量 Q 时所储存的电能。

解: 由于此电容器的内外球分别带有 $+Q$ 和 $-Q$ 的电量, 根据高斯定律可求出内球内部和外球外部的电场强度都是零。两球间的电场分布为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$

将此电场分布代入 (5.23) 式可得此球形电容器储存的电能为

$$\begin{aligned} W &= \int w_e dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

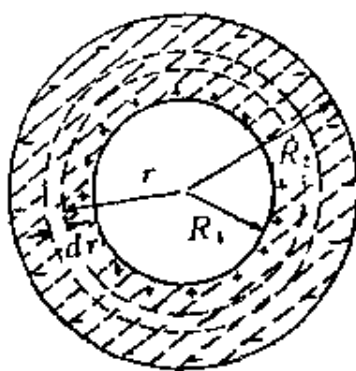


图 5.17

此电能应该和用 (5.21) 式计算的结果相同。和 $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ 比较, 可得球形电容器的电容为

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

此式和 (5.17) 式相同。这里利用了能量公式, 这是计算电容器电容的另一种方法。

本章提要

1. **电介质分子的电偶极矩:** 极性分子有固有电偶极矩, 非极性分子在外电场中产生感应电偶极矩。

2. **电介质的极化:** 在外电场中固有电偶极矩的取向或感应电偶极矩的产生使电介质的表面(或内部)出现束缚电荷。

电极化强度: $P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E$

面束缚电荷密度: $\sigma' = P \cdot \hat{n}$

3. 电位移: $D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E$

D 的高斯定律: $\oint_S D \cdot dS = q_{0\text{外}}$

4. 电容器的电容:

$$\text{定义: } C = \frac{Q}{V}$$

平行板电容器: $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$

并联电容器组: $C = \sum C_i$

串联电容器组: $\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$

5. 电容器的能量:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$$

6. 电场的能量密度: $w_e = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E^2}{2} = \frac{DE}{2}$

思考题

5.1 计算核对地球的电容约为 $700\mu\text{F}$, 为什么实验室内有的电容器的电容(如 $1000\mu\text{F}$)比地球的还大?

5.2 平行板电容器的电容公式表示, 当两板间距 $d \rightarrow 0$ 时, 电容 $C \rightarrow \infty$. 在实际中我们为什么不能用尽量减小 d 的办法来制造大电容? (提示: 当电势差 ΔV 保持不变而 $d \rightarrow 0$ 时, 场强 E 会发生什么变化?)

5.3 如果你在平行板电容器的一板上放上比另一板更多的电荷, 这额外的电荷将会怎样?

5.4 根据静电场环路积分为零证明: 平行板电容器边缘的电场不可能突然由均匀电场变到零, 象图 5.18 所画的那样, 而是一定存在着逐渐减弱的电场, 即边缘电场。

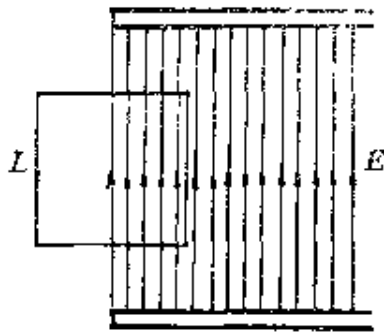


图 5.18



图 5.19

5.5 如果考虑平行板电容器的边缘场，那么其电容比不考虑边缘场时的电容大还是小？

5.6 图 5.19 所示为一电介质正在插入平行板电容器的两板之间。作用在电介质板上的电力是把它拉进电容器两板间的区域还是推出？（这时必须考虑边缘电场的作用了。）

5.7 图 5.20 画出了一个具有保护环的电容器，两个保护环分别紧靠地包围着电容器的两个极板，但并没有和它们连接在一起。给电容器带电时同时使两保护环分别与电容器两极板的电势相等。试说明为什么这样就可以有效地消除电容器的边缘效应。

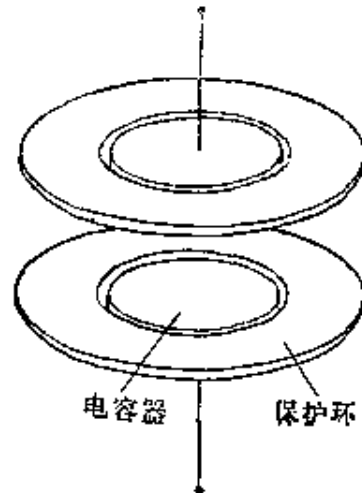


图 5.20

5.8 在电场中有一块均匀电介质。试根据静电场环路积分为零证明：在紧靠电介质表面内、外平行于表面的电场强度的分量必相等。

5.9 在有固定分布的自由电荷的电场中放有一块电介质。当移动此电介质的位置后，电场中 D 的分布是否改变？ E 的分布是否改变？通过某一特定封闭曲面的 D 的通量是否改变？ E 的通量是否改变？

5.10 由极性分子组成的液态电介质，其相对介电常数在温度升高时是增大？还是减小？

5.11 为什么带电的胶木棒能把中性的纸屑吸引起来？

习 题

5.1 一个 100pF 的电容器充电到 100V ，把充电电池断开后，再把这电

容器并联到另一电容器上,最后电压是 30V, 第二个电容器的电容多大? 并联后损失了多少电能? 这电能哪里去了?

5.2 两个同心导体球壳,内、外球壳半径分别为 R_1 和 R_2 。求两者组成的电容器的电容。把 $\Delta R = (R_2 - R_1) \leq R_1$ 的极限情形与平行板电容器的电容做比较以核对你所得到的结果。

5.3 空气的击穿场强为 $3 \times 10^3 \text{ kV/m}$ 。当一个平行板电容器两极板间是空气而电势差为 5 kV 时,每平方米面积的电容最大是多少?

5.4 图 5.21 所示为用于调谐收音机的一种可变空气电容器。这里奇数极板和偶数极板分别连在一起,共中一组的位置是固定的,另一组是可以转动的。假设极板的总数为 n , 每块极板的面积为 S ,相邻两极板之间的距离为 d 。证明这个电容器的最大电容为

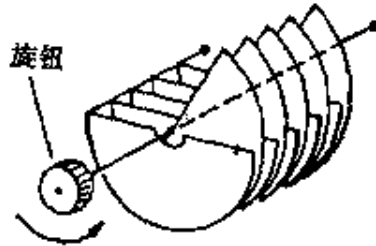


图 5.21

$$C = \frac{(n-1)\epsilon_0 S}{d}$$

5.5 盖革计数管由一根细金属丝和包围它的同轴导电圆筒组成。丝直径为 $2.5 \times 10^{-2} \text{ mm}$,圆筒直径为 25mm, 管长 100mm。计算盖革计数管的电容(设导体间为真空。你可用无限长导体圆筒的场强公式计算电场)。

5.6 范德格拉夫静电加速器的球形电极半径为 18cm。

(1) 这球的电容多大?

(2) 为了使它的电势升到 $2.0 \times 10^6 \text{ V}$, 需给它带多少电量?

5.7 用两面夹有铝箔的厚为 $5 \times 10^{-2} \text{ mm}$, 相对介电常数为 2.3 的聚乙烯膜做一电容器。如果电容为 $3.0 \mu\text{F}$, 则膜的面积要多大?

5.8 为了测量电介质材料的相对介电常数,将一块厚为 1.5cm 的平板材料慢慢地插进一电容器的距离为 2.0cm 的两平行板中间。在插入过程中,电容器的电荷保持不变。插入之后,两板间的电势差减小为原来的 60%, 问电介质的相对介电常数多大?

5.9 一平行板电容器面积为 S , 板间距离为 d 、板间以两层厚度相同而相对介电常数分别为 ϵ_{r1} 和 ϵ_{r2} 的电介质充满(图 5.22)。求此电容器的电容。

5.10 一平行板电容器面积为 S , 板间距离为 d 、板间两半分别以相对介电常数为 ϵ_{r1} 和 ϵ_{r2} 的电介质充满(图 5.23)。求此电容器的电容。

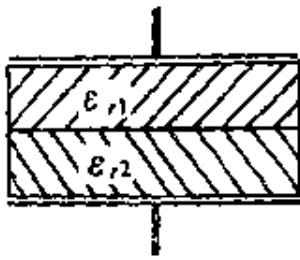


图 5.22

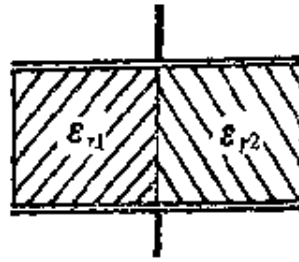


图 5.23

5.11 三个电容器, 电容分别为 $C_1 = 2\mu\text{F}$, $C_2 = 5\mu\text{F}$, $C_3 = 10\mu\text{F}$ 。各自先用 36V 的直流电源充电后, 按图 5.24 那样联接起来, 求联接后各电容器的电量与电压。



图 5.24

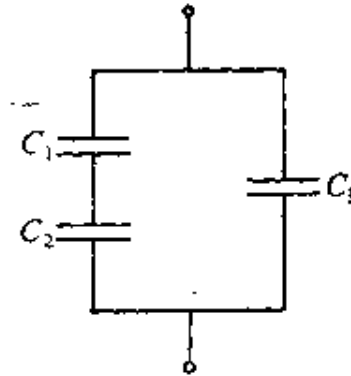


图 5.25

5.12 电容分别为 C_1 、 C_2 和 C_3 的三个电容器按图 5.25 那样联接后, 总电容多大?

5.13 两个同心的薄金属球壳, 内、外球壳半径分别为 $R_1 = 0.02\text{m}$ 和 $R_2 = 0.06\text{m}$ 。球壳间充满两层均匀电介质, 它们的相对介电常数分别为 $\epsilon_{r1} = 6$ 和 $\epsilon_{r2} = 3$ 。两层电介质的分界面半径 $R = 0.04\text{m}$ 。设内球壳带电量 $Q = -6 \times 10^{-8}\text{C}$, 求:

- (1) D 和 E 的分布, 并画 $D \sim r$, $E \sim r$ 曲线;
- (2) 两球壳之间的电势差;
- (3) 贴近内金属壳的电介质表面上的束缚面电荷密度。

5.14 两共轴的导体圆筒组成的电容器, 内、外筒半径分别为 R_1 和 R_2 , $R_2 < 2R_1$ 。其间有两层均匀电介质, 分界面半径为 r_0 。内层介质相对介电常数为 ϵ_{r1} , 外层介质相对介电常数为 ϵ_{r2} , $\epsilon_{r2} = \epsilon_{r1}/2$ 。两层介质的击穿场强都

是 E_y 。当电压升高时,哪层介质先击穿?两筒间能加的最大电势差多大?

5.15 空气的介电强度为 3kV/mm ,问:空气中半径分别为 1.0cm 、 1.0mm 、 0.1mm 的长直导线上,单位长度最多各能带多少电荷?

5.16 有一平行板空气电容器,每块极板面积均为 S ,两板间距为 d 。今以厚度为 d' ($d' < d$) 的铜板平行地插入电容器,

(1) 计算此时电容器的电容。铜板离极板的距离对这一结果有无影响?

(2) 现使电容器充电到两极板的电势差为 V_0 后与电源断开,再把铜板从电容器中抽出,需做多少功?

(3) 如果插入的是一块同样厚度 d' 的,相对介电常数为 ϵ_r 的均匀电介质板,(1)、(2) 两问的结果又如何?

*5.17 一个黄铜球浮在相对介电常数为 $\epsilon_r = 3.0$ 的油湖中,球一半浸在油中(图 5.26),球上的净电荷为 $2.0 \times 10^{-8}\text{C}$ 。问:球的上半部有多少电荷?下半部有多少电荷?

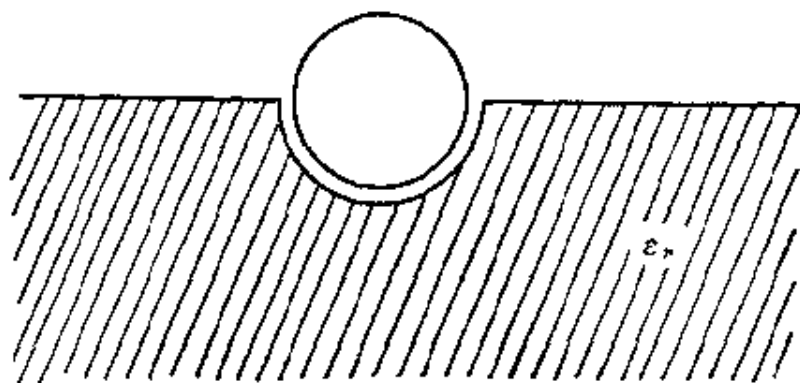


图 5.26

*5.18 在具有杂质离子的半导体中,电子围绕这些离子作轨道运动。若该轨道的尺寸大于半导体的原子间的距离,则可认为电子是在介电常数近似均匀的电介质的空间中运动。

(1) 按照在*3.21 题中所描述的玻尔理论,计算一个电子的轨道能;

(2) 半导体锗的相对介电常数为 $\epsilon_r = 15.8$,估算一个电子围绕嵌在锗中的离子运动的轨道能,假定电子处在最小的玻尔轨道。所得的结果与真空中电子围绕离子运动的最小轨道能相比如何?

II 压电效应

有些电介质晶体在外力作用下发生形变时，其电极化强度会发生改变，因而在它的某些相对应的表面上产生异号电荷。这种没有电场作用只是由于形变而使晶体的电极化状态发生改变的现象称为**压电效应**。它是J.居里和P.居里兄弟在1880年发现的。

能产生压电效应的晶体叫**压电晶体**。一类压电晶体是单晶，如石英(SiO_2)，酒石酸钾钠(又称洛瑟盐， $\text{NaKC}_4\text{H}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$)，锆酸铋($\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$)等。另一类压电晶体称为**压电陶瓷**，如钛酸钡(BaTiO_3)，锆钛酸铅 $[\text{Pb}(\text{Zr}_x\text{Ti}_{1-x})\text{O}_3]$ ，代号PZT)，日本制成的铌镁锆钛酸铅 $[\text{Pb}(\text{Mg}_{\frac{1}{3}}\text{Nb}_{\frac{2}{3}})\text{O}_3]$ 加入PZT，代号PCM)，中国制成的铋锰锆钛酸铅 $[\text{Pb}(\text{Mn}_{\frac{1}{2}}\text{Sb}_{\frac{2}{3}})\text{O}_3]$ 加入PZT，代号PMS)等。1969年还发现某些有机薄膜，如聚偏氟乙烯(PVF_2)等具有优良的压电性。

压电效应的逆效应叫**电致伸缩效应**，即在压电晶体上加外电场时，晶体中会发生应力因而使晶体发生形变。交变电场的作用会使晶体产生机械振动。

不少压电晶体会由于温度的变化而引起电极化强度改变因而在某些相对应的表面上也会产生异号电荷。这种现象叫**热释电效应**。它的逆效应，即由于外加电场的作用，晶体的温度会发生变化，叫**电生热效应**。

有些压电晶体在某一温度范围内具有自发电极化的性质，而

且自发电极化的方向能因外电场的作用而重新取向。这种性质和铁磁体具有自发磁化的性质相似，叫**铁电性**。具有铁电性的压电晶体叫**铁电晶体**。石英不具有铁电性，钛酸钡等压电陶瓷都是铁电晶体。

对于压电效应的研究目前已形成了一门专门的学科——压电学。压电晶体的应用广泛，主要的有以下几种：

一、压电电声换能器

利用电致伸缩效应可以把电能转换成声能，因而可以利用压电晶体制成扬声器、耳机、蜂鸣器等。利用压电晶体制成的超声波发生器(图 II.1)已被广泛地应用于海洋探测(如测海深，测鱼群或潜艇的位置等，其装置叫**声纳**)、固体探伤、清洗、焊接、粉碎以及医疗检查(**B超**)和疾病治疗(如粉碎体内结石)等各方面。

令人感兴趣的是 1986 年获得诺贝尔物理奖的扫描隧穿显微镜也巧妙地利用了压电晶体的电致伸缩效应。这种显微镜是一种极精确地显示样品表面原子排列情况的装置。它的探头要在样品表面上一步一步地作极小的移动。这种微小的步子就是靠压电晶体的一次次电致伸缩来完成的。这种移动的每一步可以只有 100\AA 到 1000\AA 。压电晶体还被做成三足式的，以便能够改变移动的方向。

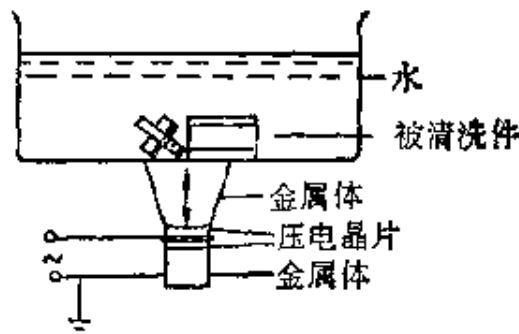


图 II.1 一种用于清洗的超声换能器

二、压电晶体振荡器

将压电晶体按适当方向切成晶片，由于它具有弹性因而具有

由其尺寸决定的固有振动频率。如果在晶片相对的两面装上电极，则利用晶体的固有振动频率和压电效应可以获得稳定的电振荡。这种压电元件叫**晶体谐振器**。石英晶体谐振器是目前应用最多的一种压电晶体谐振器，广泛应用于军事通讯和精密电子设备、小型电子计算机以及石英钟表内作为时间或频率的标准。有恒温控制的石英晶体振荡器的频率稳定度可达 10^{-13} 量级，可作为原子频率标准而用于原子钟内。

利用压电晶体谐振器并配以电感、电容等元件可制成频段在1kHz到200MHz的**压电滤波器**而应用在多路通讯、调幅接收、各种无线电通讯和测量仪器中。

三、压电变压器

利用压电效应的电能和机械能互换，还可以做成**压电变压器**。如图 II. 2 所示，晶片由两部分组成，其电极化方向互相垂直。输入端加电压后晶片作纵振动。这时输出端就会有高压输出。目前已能生产升压比大于300、输出功率50W以上而输出电压高达几千伏的压电变压器。它具有体积小、重量轻、升压比高等特点而广泛应用于电视显象管、雷达显示管、静电复印、静电除尘、小功率激光管等所需的高压设备中。对压电晶体加一次静压力或一次撞击由于压电效应产生的电压足以在空气中打出火花。这种点火器已广泛地应用在打火机、煤气灶、炮弹引爆以及汽车的火花塞中。

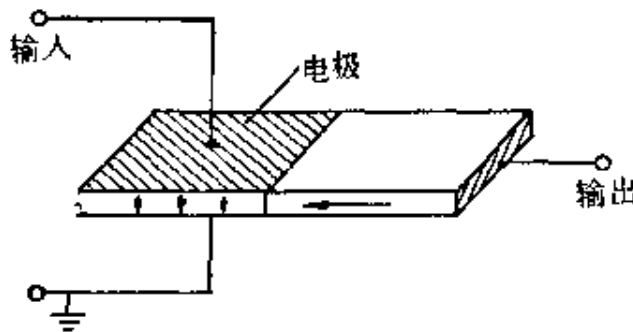


图 II. 2 一种压电变压器，箭头表示电极化方向

四、压电传感器

利用压电晶体的特殊性能可以将各种非电信号转换成电信号,从而可以进行放大、运算、传递、记录和显示。作这种用途的压电元件叫**压电传感器**。如利用压电效应可以做力敏传感器而用在应变仪、血压计中。利用热释电效应做的热敏传感器可用作温度计或红外探测器(图 II.3)等。

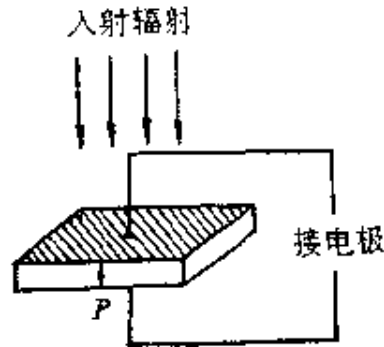


图 II.3 一种热释电探测器

1940年以后逐渐发现了生物组织,如木材、骨骼、腱、血管和血浆延伸成的薄膜等都具有压电性,已发现利用骨骼的压电性可控制其生长并已在治疗骨折上得到临床应用。生物体本身是复杂的压电系统,研究生物压电性有可能对控制生物生长、弄清生理功能有重大科学意义

第六章 稳恒电流

本章要求

1. 理解电流密度概念及其与电流强度的关系。
2. 理解稳恒电流及稳恒电场的意义和它们的基本性质。
3. 理解欧姆定律,能计算一些简单特定形状电阻。
4. 从力做功、能量转化和电势变化等方面理解电动势的概念。
5. 会计算含有电动势的简单电路。
6. 理解电容器充电、放电过程中电量和电流的变化规律,理解似稳电场的意义。
7. 理解金属中电流形成的经典图象和焦耳热产生的物理过程。

§ 6.1 电流和电流密度

电流是电荷的运动。从微观上看,电流实际上是带电粒子的定向运动。形成电流的带电粒子统称载流子。它们可以是电子、质子、正的或负的离子,在半导体中还可能是带正电的“空穴”。

常见的电流是沿着一根导线流动的电流。电流的强弱用电流强度来描述,单位时间里通过导线某一横截面的电量叫做通过该截面的电流强度。如果在一段时间 Δt 内通过某一截面的电量是 Δq , 则通过该截面的电流强度 I 是

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (6.1)$$

电流强度的国际制单位是安培(A)

$$1\text{A} = 1\text{C/s}$$

实际上还常常遇到在大块导体中产生的电流。例如在有些地质勘探中利用的大地中的电流,电解槽内电解液中的电流,气体放电时通过气体的电流等。在这种情况下为了描述导体中各处电荷定向运动的情况,引入电流密度概念。

先考虑一种最简单的情况,即只有一种载流子,它们带的电量都是 q , 都以同一种速度 v 沿同一方向运动。设想在导体内有一小面积 dS , 它的正法线方向与 v 成 θ 角(图 6.1)。在 dt 时间内通过 dS 面的载流子应是在底面积为 dS , 斜长为 vdt 的斜柱体内的所有载流子。此斜柱体的体积为 $vdt \cos\theta dS$ 。以 n 表示单位体积内这种载流子的数目, 则单位时间内通过 dS 的电量, 也就是通过 dS 的电流强度为

$$I = \frac{q \cdot n \cdot vdt \cos\theta dS}{dt} = qnv \cos\theta dS$$

用矢量符号, 此式可以写成

$$dI = qnv \cdot dS$$

引入矢量 J , 并定义

$$J = qnv \quad (6.2)$$

则上式可以写成

$$dI = J \cdot dS \quad (6.3)$$

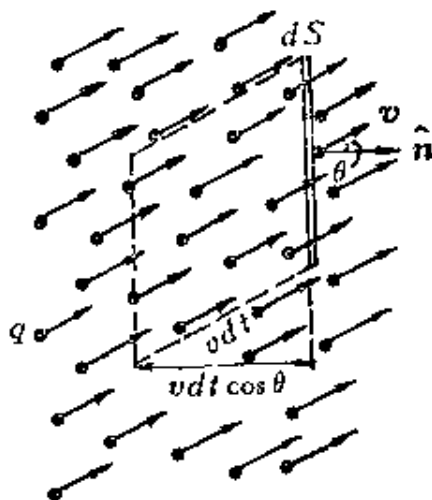


图 6.1 电流密度

这样定义的 J 就叫小面积 dS 处的电流密度。由此定义式可知, 对于正载流子, 电流密度的方向与载流子运动的方向相同; 对负载流子, 电流密度的方向与载流子的运动方向相反。

在(6.3)式中, 如果 J 与 dS 垂直, 则 $dI = JdS$, 或 $J = dI/dS$ 。这就是说, 电流密度的大小等于通过垂直于载流子运动方向的单

位面积的电流强度。

电流密度的国际制单位为安/米²(A/m²)

实际的导体中可能有几种载流子。以 n_i, q_i 和 v_i 分别表示第 i 种载流子的数密度、电量和速度，以 J_i 表示这种载流子形成的电流密度，则通过 dS 面的电流强度应为

$$dI = \sum q_i n_i v_i \cdot dS = \sum J_i \cdot dS$$

以 J 表示总电流密度，它是各种载流子的电流密度的矢量和，即 $J = \sum J_i$ ，则上式可写成

$$dI = J \cdot dS$$

这一公式和只有一种载流子时(6.3)式形式上一样。

金属中只有一种载流子，即自由电子，但各自由电子的速度不同。设电子的电量为 e ，单位体积内以速度 v_i 运动的电子的数目为 n_i ，则

$$J = \sum J_i = \sum n_i e v_i = e \sum n_i v_i$$

以 $\langle v \rangle$ 表示平均速度，则由平均值的定义可得

$$\langle v \rangle = \sum n_i v_i / \sum n_i = \sum n_i v_i / n$$

式中 n 为单位体积内的总电子数。利用平均速度，则金属中的电流密度可表示为

$$J = ne \langle v \rangle \quad (6.4)$$

在无外加电场的情况下，金属中的电子作无规则热运动， $\langle v \rangle = 0$ ，所以不产生电流。在外加电场中，金属中的电子将有一个平均定向速度 $\langle v \rangle$ ，由此形成了电流。这一平均定向速度叫做漂移速度。

(6.2)式给出了通过一个小面积 dS 的电流强度，对于电流区域内一个有限的面积 S (图6.2)，通过它的电流强度应为通过它的各面元的电流强度的代数和，即

$$I = \int_S dI = \int_S J \cdot dS \quad (6.5)$$

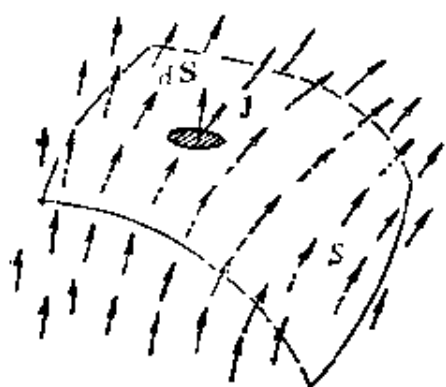


图 6.2 通过任一曲面的电流

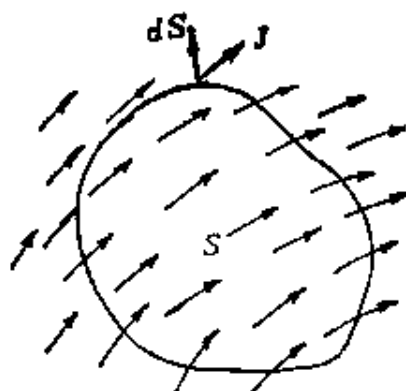


图 6.3 通过封闭曲面的电流

由此可见，电流强度是通过某一面积的电流密度的通量。它是一代数量，不是矢量。

通过一个封闭曲面 S 的电流强度(图 6.3)可以表示为

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.6)$$

根据 \mathbf{J} 的意义可知，这一公式实际上表示净流出封闭面的电流强度，也就是单位时间内从封闭面内向外流出的正电荷的电量。

§ 6.2 稳恒电流

在大块导体中，电流密度可以各处不同，也还可能随时间变化。在本章我们只讨论稳恒电流。**稳恒电流**是指导体内各处的电流密度都不随时间变化的电流。稳恒电流也叫**直流电**。

稳恒电流有一个很重要的性质，就是通过任一封闭曲面的稳恒电流为零，即

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{稳恒电流}) \quad (6.7)$$

因为如果不这样，设流出某一封闭曲面的净电流大于零，即有正电荷从封闭面内流出，又由于电流不随时间改变，这一流出将永不休

止。这意味着封闭面内有无穷多的正电荷或能不断产生正电荷。根据电荷守恒定律,这都是不可能的。因此,对稳恒电流来说,(6.7)式必定成立。

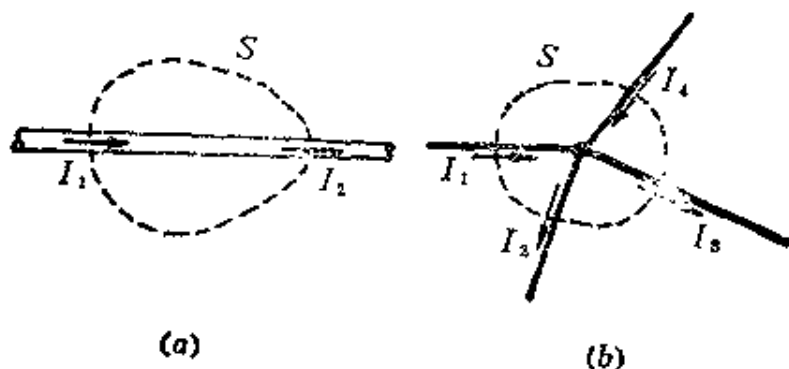


图 6.4 通过封闭曲面的稳恒电流为零

对于在一根导线中通过的稳恒电流,利用(6.7)式可以得出:通过导线各个截面的电流强度都相等。这是因为对于包围任一段导线的封闭曲面(图 6.4a)只有流进的电流 I_1 和流出的电流 I_2 相等,才能使通过此封闭曲面的电流为零。对于稳恒电流电路中几根导线汇合的节点(图 6.4b)来说,取一包围该节点的封闭曲面,由(6.7)式给出

$$\sum I_i = 0 \quad (6.8)$$

即流出节点的电流的代数和为零。以流出节点的电流为正,流入为负,则对于图 6.4b 中的节点,应该有

$$-I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

表示稳恒电流电路中的电流强度规律的(6.8)式叫节点电流方程,也叫基尔霍夫第一方程。

当通过任意封闭曲面的电流强度等于零,即在任意一段时间内通过此封闭面流出和流入的电量相等时,根据电荷守恒定律,这一封闭曲面内的总电量应不随时间改变。在导体内各处都作一封闭曲面,如此分析,可以得到:在稳恒电流的情况下,导体内电荷的

分布不随时间改变。不随时间改变的电荷分布产生不随时间改变的电场，这种电场叫**稳恒电场**。导体内稳定的不随时间改变的电荷分布就象固定的静止电荷分布一样，因此稳恒电场与静电场有许多相似之处。例如，它们都服从高斯定律和场强环路积分为零的规律。就后一点来说，以 E 表示稳恒电场的电场强度，则也应该有

$$\oint_L E \cdot dl = 0 \quad (6.9)$$

根据稳恒电场的这一保守性，也可引进**电势**的概念。由于 $E \cdot dl$ 是通过线元 dl 发生的电势降落，所以上式也常说成是：在稳恒电流电路中，沿任何闭合回路一周的电势降落的代数和总等于零。在分析解决直流电路的问题时，常根据这一规律列出一些方程，这些方程叫**回路电压方程**，也叫基尔霍夫第二方程。

尽管如此，稳恒电场和静电场还是有重要区别的，其根本原因是产生稳恒电场的电荷分布虽然不随时间改变，但这种分布总伴随着电荷的运动，而产生静电场的电荷则是始终固定不动的。因此即使在导体内部，稳恒电场也不等于零。又因为电荷运动时稳恒电场力是要做功的，因此稳恒电场的存在总要伴随着能量的转换。但是静电场是由固定电荷产生的，所以维持静电场不需要能量的转换。

§ 6.3 欧姆定律和电阻

对很多导体来说，例如对一般的金属或电解液，在稳恒电流的情况下，一段导体两端的电势差(或电压) V 与通过这段导体的电流强度 I 之间服从欧姆定律，

$$V = IR \quad (6.10)$$

式中 R 是导体的电阻。由于在导体中，电流总是沿着电势降低的方向，所以(6.10)式表示：经过一个电阻沿电流的方向电势降低的数值等于电流与电阻的乘积。在国际单位制中，电阻的单位是欧姆(Ω)。

导体的电阻与导体的长度 l 成正比，与导体的横截面积(即垂直于电流方向的截面积) S 成反比，而且还和材料的性质有关。它们之间的关系可用式子表示为

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (6.11)$$

式中 ρ 是导体材料的电阻率。有时也用 ρ 的倒数 $\sigma = 1/\rho$ 代替 ρ 写入上式，得

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (6.11a)$$

σ 叫做导体材料的电导率。在国际单位制中电阻率的单位是欧·米($\Omega \cdot m$)，电导率的单位是 $1/\text{欧} \cdot \text{米}$ ($1/\Omega \cdot m$)。

电阻率(或电导率)不但与材料的种类有关，而且还和温度有关，在温度不太低时， ρ 与温度 $t(^{\circ}\text{C})$ 有线性关系为

$$\rho_t = \rho_0(1 + \alpha t) \quad (6.12)$$

其中 ρ_t 和 ρ_0 分别是 $t^{\circ}\text{C}$ 和 0°C 时的电阻率， α 叫做电阻温度系数，随材料的不同而不同。例如铜的 α 值为 $4.3 \times 10^{-3} 1/\text{度}$ ，而锰铜合金(12% 锰、84% 铜、4% 镍)的 α 值为 $1 \times 10^{-5} 1/\text{度}$ 。这说明锰铜合金的电阻率随温度的变化特别小，用它制作的电阻受温度的影响就很小，因此，常用这种材料作标准电阻。

有些金属和化合物的温度在降到接近绝对零度时，它们的电阻率突然减小到零。这种现象叫超导。超导现象的研究在理论上有很重要的意义，在技术上超导也获得了很重要的应用。(参看：今日物理趣闻 C. 超导电性)

一段截面积均匀的导体的电阻可以直接用(6.11)式进行计

算。对于截面积不均匀的材料的电阻，需要根据实际情况进行积分运算。下面举个例子。

[例] 两个同轴金属圆筒长为 a ，内外筒半径分别为 R_1 和 R_2 ，两筒间充满电阻率 ρ 相当大的均匀材料。当内外两筒之间加上电压后，电流沿径向由内筒流向外筒(图 6.5)。试计算内外筒之间的均匀材料的总电阻(这就是圆柱形电容器、同轴电缆的漏电阻)。

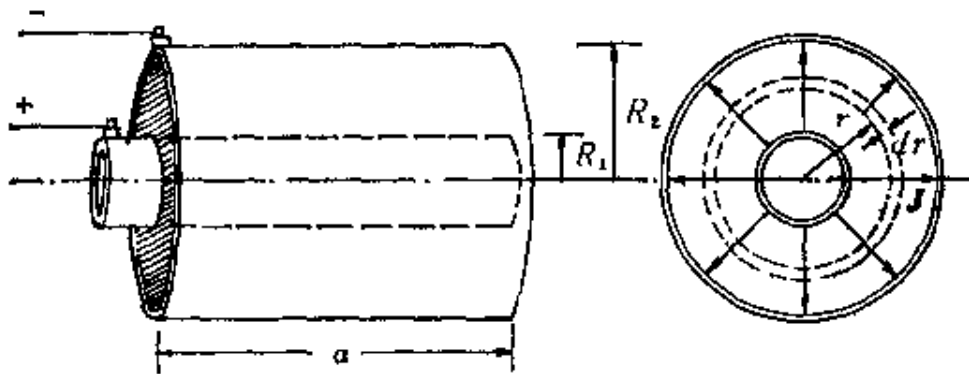


图 6.5 圆筒形材料总电阻的计算

解: 由电流的方向可知, 通过电流的“横截面”是与圆筒同轴的圆柱面, 而“长度”是内外筒的间隔。由于截面积随长度而改变, 所以不能直接应用(6.11)式。为了计算两筒间材料的总电阻, 可以设想两筒间材料由许许多多薄圆柱层所组成, 以 r 代表其中任一薄层的半径, 其面积就是 $2\pi r a$, 以 dr 表示此薄层的厚度, 则这一薄层的电阻就是

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi r a}$$

由于各个薄层都是串联的, 所以总电阻应是各薄层电阻之和, 亦即上式的积分。由此得总电阻为

$$R = \int dR = \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{dr}{2\pi r a} = \frac{\rho}{2\pi a} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

欧姆定律(6.10)式给出了电压和电流的关系, 这是电场在一段导体内引起的总效果的表示。由于电场强度和电压有一定的关系, 所以还可以根据(6.10)式导出电场和电流的关系, 如图 6.6 所示。以 Δl 和 ΔS 分别表示一段导体的长度和截面积, 它的电阻率

为 ρ ，其中有电流 I 沿它的长度方向流动。由于电压 $V = U_1 - U_2 = E\Delta l$ ，电流 $I = J \cdot \Delta S$ ，而电阻 $R = \rho\Delta l / \Delta S$ ，将这些量代入欧姆定律(6.10)式就可以得到

$$J = E / \rho = \sigma E$$

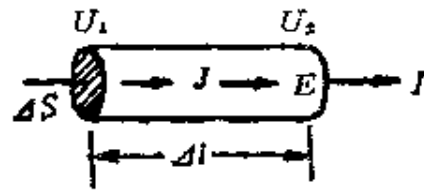


图 6.6 推导欧姆定律

实际上，在金属或电解液内，电流密度 J 的方向与电场强度 E 的方向相同。因此又可写成

$$J = \sigma E \quad (6.13)$$

这一和欧姆定律等效的关系式表示了导体中各处电流密度与当地电场的关系，可以叫做欧姆定律的微分形式。

还应该再强调的是，只是对于一般的金属或电解液，欧姆定律在相当大的电压范围内是成立的，即电流和电压成正比。对于许多导体(如电离了的气体)或半导体，欧姆定律并不成立。气体中的电流一般与电压不成正比。它的电流电压曲线(叫伏安特性曲线)如图 6.7 所示。半导体(如二极管)中的电流不但与电压不成正比，而且电流方向改变时，它和电压的关系也不同，它的伏安特性曲线如图 6.8 所示。

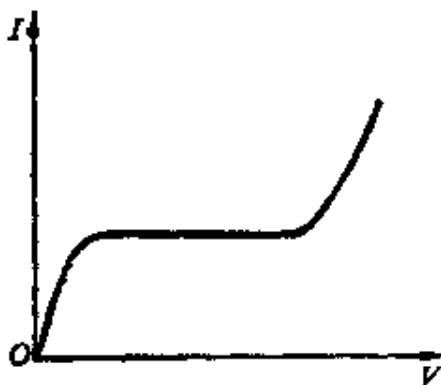


图 6.7 气体中的电流的伏安特性曲线

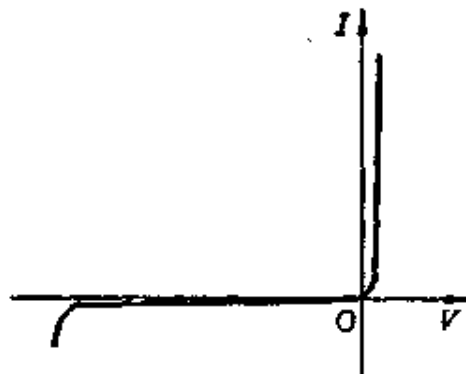


图 6.8 半导体二极管的伏安特性曲线

很多材料的这种非欧姆定律导电特性是有很大的实际意义的。例如，如果没有半导体材料的非欧姆特性，作为现代技术标志

之一的电子技术,包括电子计算机技术,就是不可能的了。

§ 6.4 电 动 势

一般讲来,当把两个电势不等的导体用导线连接起来时,在导线中就会有电流产生。电容器的放电过程就是这样(图 6.9)。但是在这一过程中,随着电流的继续,两极板上的电荷逐渐减少。这种随时间减少的电荷分布不能产生稳恒电场,因而也就不能形成稳恒电流。实际上电容器的放电电流是一个很快地减小的电流。要产生稳恒电流就必须设法使流到负极板上的电荷重新回到正极板上去,这样就可以保持稳恒的电荷分布,从而产生一个稳恒电场。但是由于在两极板间的静电场方向是由电势高的正极板指向电势低的负极板的,所以要使正电荷从负极板回到正极板,靠静电力是办不到的,只能靠其它类型的力,这力使正电荷逆着静电场的方向运动(图 6.10)。这种其它类型的力统称为非静电力。由于它

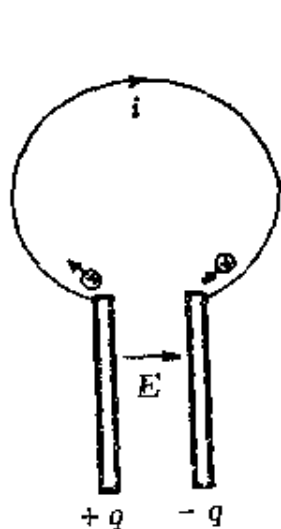


图 6.9 电容器放电时产生的电流

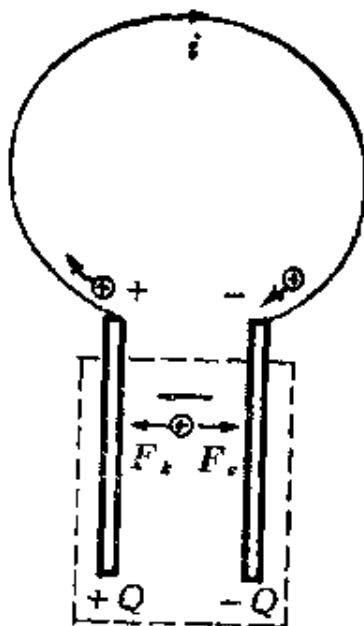


图 6.10 非静电力 F_e 反抗静电力 F_s 移动电荷

的作用,在电流继续的情况下,仍能在正负极板上产生稳定的电荷分布,从而产生稳恒的电场。这样就得到了稳恒电流。

提供非静电力的装置叫**电源**,如图 6.10 所示。电源有正负两个极,正极的电势高于负极的电势,用导线将正负两个极相连时,就形成了闭合回路。在这一回路中,电源外的部分(叫外电路),在稳恒电场作用下,电流由正极流向负极。在电源内部(叫内电路),非静电力的作用使电流逆着稳恒电场的方向由负极流向正极。

电源的类型很多,不同类型的电源中,非静电力的本质不同。例如,化学电池中的非静电力是一种化学作用。发电机中的非静电力是一种电磁作用。本教材将在其它部分讨论这些力的作用,本节只一般地说明非静电力起的作用。

从能量的观点看来,非静电力反抗稳恒电场移动电荷时,是要做功的。在这一过程中电荷的电势能增大了,这是其它种形式的能量转化来的。例如在化学电池中,是化学能转化成电能,在发电机中是机械能转化为电能等。

在不同的电源内,由于非静电力的不同,使相同的电荷由负极移到正极时,非静电力做的功是不同的。这说明不同的电源转化能量的本领是不同的。为了定量地描述电源转化能量本领的大小,我们引入**电动势**的概念。在电源内,单位正电荷从负极移向正极的过程中,非静电力做的功,叫做**电源的电动势**。如果用 $A_{非}$ 表示在电源内电量为 q 的正电荷从负极移到正极时非静电力做的功,则电源的电动势 \mathcal{E} 为

$$\mathcal{E} = \frac{A_{非}}{q} \quad (6.14)$$

从量纲分析可知,电动势的量纲和电势差的量纲相同。它的国际制单位也叫伏特(V)。应当特别注意,虽然电动势和电势的量纲相同而且又都是标量,但是它们是两个完全不同的物理量。电

电动势总是和非静电力的功联系在一起的，而电势是和静电力的功联系在一起的。电动势完全取决于电源本身的性质(如化学电池只取决于其中化学物质的种类)而与外电路无关，但电路中的电势的分布则和外电路的情况有关。

从能量的观点来看，(6.14)式定义的电动势也等于单位正电荷从负极移到正极时由于非静电力作用所增加的电势能，或者说，就等于从负极到正极非静电力所引起的电势升高。我们通常把电源内从负极到正极的方向，也就是电势升高的方向，叫做**电动势的方向**，虽然电动势并不是矢量。

用场的概念，我们也可以把非静电力的作用看作是一种非静电场的作用，这种场统称为**外来场**。以 E_k 表示外来场的强度，则它对电荷 q 的非静电力就是 $F_k = qE_k$ 。在电源内，电荷 q 由负极移到正极时非静电力做的功为

$$A_{非} = \int_{(-)}^{(+)} qE_k \cdot dl$$

(电源内)

将此式代入(6.14)式可得

$$\mathcal{E} = \int_{(-)}^{(+)} E_k \cdot dl \quad (6.15)$$

(电源内)

此式表示非静电力集中在一段电路内(如电池内)作用时，用场的观点表示的电动势。在有些情况下非静电力存在于整个电流回路中，这时整个回路中的总电动势应为

$$\mathcal{E} = \oint_L E_k \cdot dl \quad (6.16)$$

式中线积分遍及整个回路 L 。

§ 6.5 有电动势的电路

回路中有电动势时，电流强度如何决定呢？下面来说明这一问题。

在导体内有非静电力和静电力同时存在的情况下，电流密度 \mathbf{J} 应由外来场 \mathbf{E}_k 和电场 \mathbf{E} 共同决定。这时欧姆定律的微分形式应写成

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\rho}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_k) = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_k) \quad (6.17)$$

现在我们考虑一个由负载电阻 R 接到电源两极上而构成的简单闭合回路 L (图 6.11)。由稳恒电场的保守性，对此回路沿电流方向取电场强度 \mathbf{E} 的线积分就有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

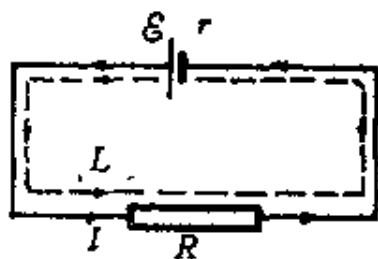


图 6.11 简单电路

由(6.17)式求出 \mathbf{E} ，代入上式得

$$-\oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} + \oint_L \frac{\mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}}{\sigma} = 0 \quad (6.18)$$

上式中 $d\mathbf{l}$ 为电路上一段有向长度元，由于 $d\mathbf{l}$ 的方向与导线中 \mathbf{J} 的方向相同，因此

$$\oint_L \frac{\mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}}{\sigma} = \oint_L \frac{J dl}{\sigma} = \oint_L \frac{JS dl}{\sigma S}$$

其中 $JS = I$ 为回路中的电流。由于各处电流相等，所以有

$$\oint_L \frac{I}{\sigma S} dl = I \oint_L \frac{dl}{\sigma S}$$

由于 $\frac{dl}{\sigma S}$ 为回路中长度元 dl 的电阻，所以此等式右侧的积分为整

个回路的总电阻 R_{Σ} , 包括电源内的电阻(内阻) r 和电源外的电阻 R 。因此

$$I \oint_L \frac{dl}{\sigma S} = IR_{\Sigma} = I(r+R) \quad (6.19)$$

由于(6.18)式中的第一项为整个闭合电路的电动势的负值, 即“ $-\mathcal{E}$ ”, 所以(6.18)式可写作

$$-\mathcal{E} + I(r+R) = 0 \quad (6.20)$$

或

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \quad (6.21)$$

这就是大家熟悉的全电路欧姆定律公式, 它适用于电路只有一个回路的情况。

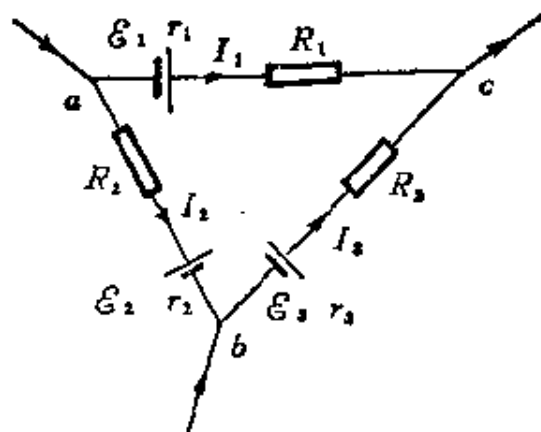


图 6.12 复杂电路中的一个回路

对于有多个回路的复杂电路, 我们可以一个一个回路分析。如图 6.12 所示, 一个回路中可以有几个电源, 而且各部分电流可以不相同。对于这一回路 L 如果仍象上面那样利用(6.17)式和稳恒电场的保守性, 就可以得出(6.20)式的更为普遍的形式:

$$\Sigma(\pm \mathcal{E}_i) + \Sigma(\pm I_i R_i) = 0 \quad (6.22)$$

此式中每一项前面的正负号按照下述规则选取: 电动势的方向和回路 L 的方向相同的 \mathcal{E} 取负号, 相反的取正号; 电流方向与回路 L 方向相同的 I 取正号, 相反的取负号。(6.22)式就是应用于任意

回路的基尔霍夫第二方程式的普遍形式。

下面我们举一个稍微复杂的电路的例子。

[例 1] 如图 6.13 所示的电路, $\varepsilon_1 = 12\text{V}$, $r_1 = 1\Omega$, $\varepsilon_2 = 8\text{V}$, $r_2 = 0.5\Omega$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 1.5\Omega$, $R_3 = 4\Omega$ 。试求通过每个电阻的电流。

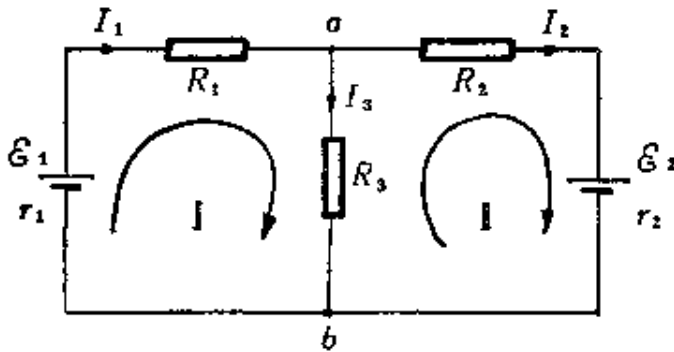


图 6.13

解: 设通过各个电阻的电流 I_1, I_2, I_3 如图。对节点 a 列出(6.8)式那样的基尔霍夫第一方程

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

如果对节点 b 也列电流方程, 将得到与此式相同的结果, 并不能得到另一个独立的方程。

对回路 I 列(6.22)式那样的基尔霍夫第二方程, 则可得

$$-\varepsilon_1 - I_1 r_1 + I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0$$

对回路 II, 可以得

$$\varepsilon_2 + I_2 r_2 + I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0$$

如果对整个外面的大回路列基尔霍夫第二方程, 就会发现那将是上面两个方程的叠加。也不是一个独立的方程, 所以不能用。

将已知数据代入这两个回路方程并与上面的电流方程联立求解就可得

$$I_1 = 1.25\text{A}, \quad I_2 = -0.5\text{A}, \quad I_3 = 1.75\text{A}$$

此结果中 I_1, I_3 为正值, 说明实际电流方向与图中所设相同。 I_2 为负值, 说明它的实际方向与图中所设方向相反。

[例 2] 电势差计电路。电势差计(又叫电位差计或电位计)是用来测量电动势的仪器, 它的电路图如图 6.14 所示。 ε_0 是一个电动势比较稳定的电源, AB 是一根均匀的电阻丝, ε_s 是标准电池, 它的电动势是已知标准值。

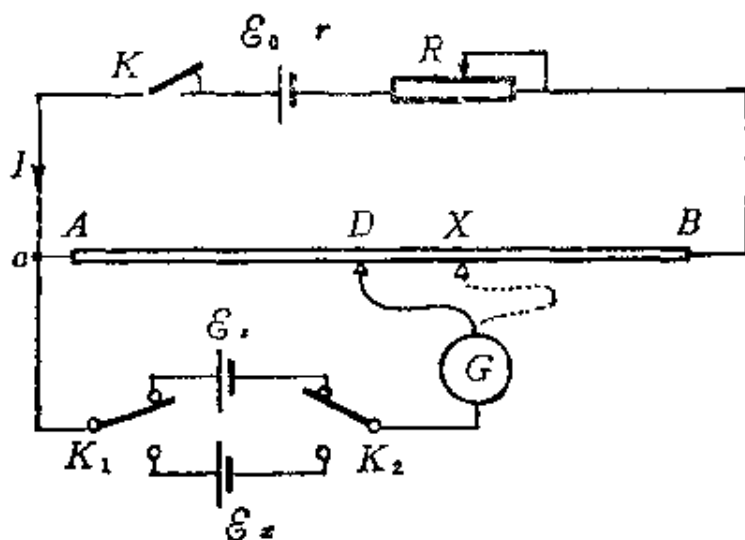


图 6.14 电势差计电路

\mathcal{E}_x 是待测电动势。工作时在合上电键 K 后将电键 K_1 和 K_2 合到 \mathcal{E}_0 一侧，然后在保持滑动接头在确定位置 D 的情况下，调整电阻 R 使电流计 G 中无电流。这时对节点 a ，由基尔霍夫第一方程可知电流 I 全部流过 AB 电阻丝。对回路 $\mathcal{E}_0 a A D B \mathcal{E}_0$ ，基尔霍夫第二方程为

$$-\mathcal{E}_0 + IR_{AB} - IR + Ir = 0$$

由此得

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R_{AB} + R + r}$$

对回路 $\mathcal{E}_x G D a \mathcal{E}_x$ ，基尔霍夫第二方程为

$$\mathcal{E}_x - IR_{AD} = 0$$

$$\mathcal{E}_x = IR_{AD} = \frac{\mathcal{E}_0 R_{AD}}{R_{AB} + R + r}$$

此后再保持 R 不变，将电键 K_1 和 K_2 合向待测电动势 \mathcal{E}_x 一侧，这时移动滑动接头的位置直到电流计中也没有电流为止。以 X 表示这时滑动接头的位置。仿照上面的分析可得

$$\mathcal{E}_x = \frac{\mathcal{E}_0 R_{AX}}{R_{AB} + R + r}$$

将此式与 \mathcal{E}_x 相比，可得

$$\mathcal{E}_x = \frac{R_{AX}}{R_{AD}} \mathcal{E}_0$$

由于 AB 是均匀电阻丝，它的一段电阻应和该段长度 l 成正比，所以又可得

$$\varepsilon_x = \frac{l_{AX}}{l_{AD}} \varepsilon,$$

实际的仪器中电阻丝 AB 都已按 l_{AD} 与 ε , 相应进行了正比刻度。所以由 X 的位置就可直接读出 ε_x 的数值。

§ 6.6 电容器的充电与放电

将电容 C , 电阻 R 和电动势为 ε 的电源以及刀键 K 连成如图 6.15 所示的电路。当 K 与 a 端接触时电容器充电, 其电量从零开始增大。充电完毕后, 将 K 倒向和 b 接触, 电容器又通过电阻 R 放电, 其电量又逐渐减小。这种过程中电量以及电流的变化也可以应用基尔霍夫方程加以分析。

先分析充电的情形。设在充电的某一时刻电流强度为 i , 电容器上的电量为 q , 两板之间的电压为 v 。则在此时刻, 整个回路以电流方向为正方向的基尔霍夫第二方程为

$$-\varepsilon + iR + v = 0$$

在充电过程中电容器上电量的增加是电流输入电荷的结果, 而且在单位时间内电量的增量就等于电流强度, 即

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

电容器上电压 v 与电量 q 的关系为

$$v = \frac{q}{C}$$

将这两关系式代入基尔霍夫第二方程, 可得

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

这是一个微分方程。结合起始条件 $t=0$ 时, $q=0$ 。可解得

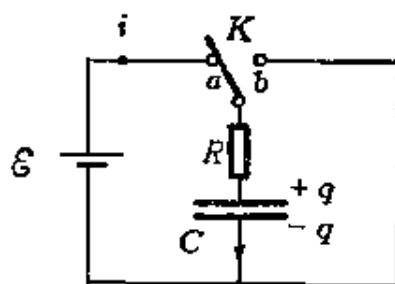


图 6.15 电容器的充电

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (6.23)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6.24)$$

电量和电流随时间变化的曲线如图 6.16 所示。

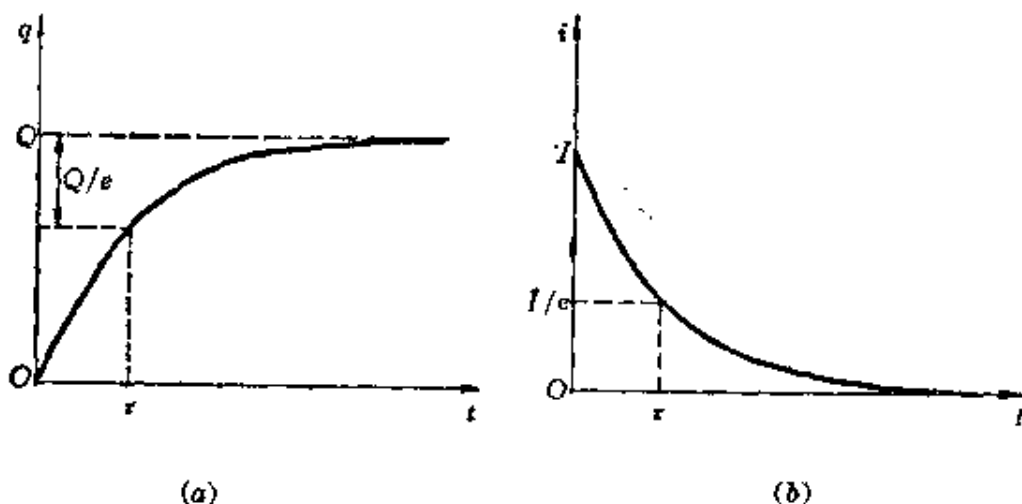


图 6.16 电容器充电曲线

由(6.23)和(6.24)式可知,电量和电流均按指数规律变化,电量由零增大到最大值 $Q = C\mathcal{E}$,而电流由最大值

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

减小到零。变化的快慢由乘积 RC 决定。这一乘积叫电路的时间常数。以 τ 表示时间常数,就有 $\tau = RC$ 。 τ 的意义表示当经过时间 τ 时,电量将增大到与最大值的差值为最大值的 $1/e$ 倍(约 37%),而电流减小到它的最大值的 $1/e$ 倍。 τ 越大,电量增大的越慢,电流也减小得越慢。对于实际的电路例如 $R = 10^3 \Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$,则 $\tau = 10^{-3} \text{s}$ 。

从(6.23)和(6.24)式来看,只有当 $t \rightarrow \infty$ 时,电量才能达到最大值而电流才减小到零。但是实际上,当 $t = 10\tau$ 时,由于 $e^{-10} \approx 1/(2 \times 10^4)$,电量已增大到离最大值不到二万分之一,而电流已降到了二万分之一以下。实际上就可以认为是充电完毕了。这段时

间对于上述 $\tau = 10^{-9}$ s 的电路来说,也不过是百分之一秒。

图 6.15 中电容充电至带电量为 Q 后,如果将 K 倒向 b 边,则电容器开始放电。如图 6.17 所示,仍以电流方向为回路的正方向,在电容的电量为 q 而电流为 i 时的基尔霍夫第二方程为

$$iR - v = 0$$

此时的电流 i 应等于电容器的电量的减少率,即

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

而

$$v = \frac{q}{C}$$

代入基尔霍夫第二方程则有

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

结合起始条件 $t = 0$ 时, $q = Q$, 可解得

$$q = Qe^{-\frac{t}{RC}} \quad (6.25)$$

$$i = \frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6.26)$$

这个结果说明在电容器放电时,电量和电流都按指数规律随时间减小。时间常数也是 $\tau = RC$ 。

应该指出,在电容器的充电和放电过程中,电容器的电量和电流都是随时间改变的,并不是稳恒电流,电场也不是稳恒电场。因此应用基尔霍夫第二方程似乎不合理。是这样的!但是根据相对论理论,当电量变化得比较慢,以致回路的线度比距离 $c\tau$ (c 为光在真空中的速率)小得很多时,电场虽然变化,但在任一时刻,在回路范围内的电场都十分近似地由该时刻的电荷分布所决定,因而这电场也就可以按稳恒电场处理,该时刻电路中电势的分布也就服从稳恒电场的规律。这种变化缓慢的电场叫似稳电场(或准稳

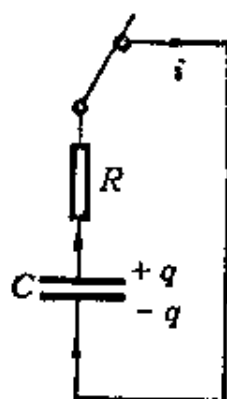


图 6.17 电容器的放电

电场)。对于似稳电场实际上也可以应用基尔霍夫方程。

§ 6.7 电流的一种经典微观图象

在 § 6.3 中曾对于金属或电解液等导体得出，电流密度 J 和电场强度 E 有(6.13)式所表示的关系

$$J = \sigma E$$

我们知道，电流密度决定于载流子运动的速度，但电场 E 对载流子的作用力决定载流子的加速度。二者为什么会有正比的关系呢？这一点可以用微观理论加以说明。最符合实际的微观理论是量子统计理论。限于本课程的水平，下面用经典理论给出一个近似的而且是形象化的解释。

以金属中自由电子的导电为例，在金属中的自由电子在正离子组成的晶格中间作无规则运动(图 6.18)。在运动中还不断地和正离子作无规则的碰撞，在没有外电场作用时，电子这种无规则运动使得它的平均速度为零，所以没有电流。在外电场 E 加上后，每个电子都要受到同一方向的力 eE 的作用，因而在无规则运动的基础上将叠加一个定向运动。由于电子还要不断地和正离子碰撞，所以电子的定向运动并不是持续不断地加速运动。以 v_{0i} 表示第 i 个电子刚经过一次碰撞后的初速度，在此次碰撞后自由飞行一段时间 t_i 时的速度应为

$$v_i = v_{0i} + \frac{eE}{m} t_i$$

式中 m 是电子的质量。在经过下一次碰撞时，电子的速度又复归于混乱。为了简单起见我们作一个关于碰撞的统计性假定，即每经过一次碰撞，电子的运动又复归于完全无规则，或者形象化地说，经过一次碰撞，电子完全“忘记”了它在碰撞前的运动情况。这

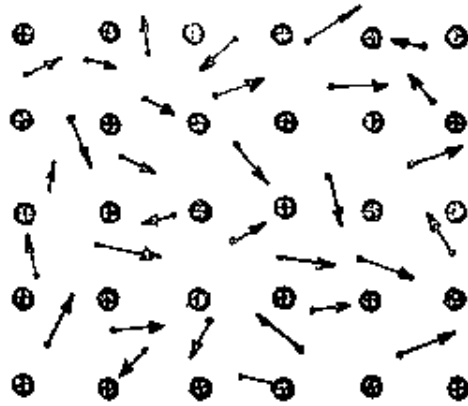


图 6.18 金属中自由电子无规则运动示意图

就是说, \mathbf{v}_{0i} 是完全无规则的, 就好象前次没有被电场加速过一样。从每次碰撞完毕开始, 电子都在电场作用下重新开始加速。因此, 电子的定向运动是一段一段的加速运动的接替, 而各段加速运动都是从速度为零开始。

为了求出某一时刻 t 的电流密度, 我们利用电流密度公式。以 n_k 表示单位体积内此时刻以速度 \mathbf{v}_k 运动的自由电子数, 以 n 表示单位体积内的自由电子总数, 以 e 代表电子的电量, 则

$$\mathbf{J} = \sum e n_k \mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^n e \mathbf{v}_i$$

式中 \mathbf{v}_i 为 t 时刻单位体积内第 i 个电子的速度。将 \mathbf{v}_i 代入, 得

$$\mathbf{J} = e \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{0i} + \frac{e^2 \mathbf{E}}{m} \sum_{i=1}^n t_i \quad (6.27)$$

由于电子在碰撞后的初速度完全无规则性, 上式中等号右侧第一项为零, 第二项的 $\sum_{i=1}^n t_i$ 为所有电子从它们各自的上一次碰撞到时刻 t 所经历的自由飞行时间的总和。这一时间可以用一个平均值表示出来, 此平均值写作

$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} \quad (6.28)$$

这个平均值是自由电子从上一次碰撞到时刻 t 的自由飞行时间的平均值，它也等于从时刻 t 到各电子遇到下一次碰撞的自由飞行时间的平均值。又因为自由飞行时间是完全无规则的，即下一次自由飞行时间的长短和上一次飞行时间完全无关，所以这一平均值也是电子在任意相邻的两次碰撞之间的自由飞行时间的平均值。我们可以叫它做电子的平均自由飞行时间。在电场比较弱，电子获得的定向速度和热运动速度相比为甚小的情况下（实际情况正是这样），这一平均自由飞行时间由热运动决定而与电场强度 E 无关。

将(6.28)式代入(6.27)式可得

$$\mathbf{J} = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} \quad (6.29)$$

由于 E 的系数和 E 无关，所以得到电流密度 \mathbf{J} 与 E 成正比。这就是(6.13)式表示的关系。和(6.13)式对比，还可以得出金属的电导率为

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (6.30)$$

这一结果在一定的范围和实验近似地符合。

利用上述的自由电子导电图象还可以说明电流通过金属导体时发热的物理过程和规律——**焦耳定律**。当电流在金属内形成时，自由电子与正离子不断相碰，由于这种碰撞，自由电子在自由飞行时间内受电场力作用而增加的动能都传给了正离子，使正离子的无规则振动能量增大，这在宏观上就表现为导体的温度升高，即发热。这个过程实际上是电场能量转换为导体内能的过程，所转换的能量叫**焦耳热**。下面推导这种能量转换的功率。

以 E 表示金属中的电场。在这电场力作用下一个电子从某一次碰撞到下一次碰撞经过自由飞行时间 t 获得的定向速率为

$$v = at = \frac{eE}{m}t$$

相应的动能为

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2E^2}{2m}t^2$$

由于经过一次碰撞后这一定向运动完全结束，所以相应的能量也就变成了离子的无规则振动能量。对大量电子来说，上述能量的平均值为

$$\overline{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{e^2E^2}{2m}\overline{t^2}$$

根据统计理论，平均值 $\overline{t^2}$ 与电子的平均自由飞行时间 τ 的关系为

$$\overline{t^2} = 2\tau^2$$

于是有

$$\overline{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{e^2E^2}{m}\tau^2$$

由于平均讲来，一秒钟内一个自由电子经历 $1/\tau$ 次碰撞，而且金属导体单位体积内有 n 个自由电子，所以单位时间内在导体单位体积内电能转换成的内能，即产生的焦耳热为

$$p = n \frac{1}{\tau} \left(\overline{\frac{1}{2}mv^2} \right) = \frac{ne^2\tau}{m}E^2$$

利用上面(6.30)式可得

$$p = \sigma E^2 \quad (6.31)$$

此式中的 p 叫电流的热功率密度，而这一公式叫焦耳定律的微分形式。

对于一根长 l ，横截面为 S 的导体来说，当电流 I 流过它时，整个导体发热的功率为

$$P = p l S = \sigma E^2 l S = \frac{(\sigma E)^2 l S}{\sigma} = \frac{(JS)^2 l}{\sigma S}$$

由于 $JS = I$ 为通过导体的电流, $l/\sigma S$ 为导体的电阻, 所以上式又可写成

$$P = I^2 R \quad (6.32)$$

这就是导体的焦耳热功率的公式, 是焦耳定律的积分形式。它表示焦耳热与导体的电阻有直接的联系。由于此式中的电流以平方的形式出现, 所以焦耳热与电流的方向无关。

本 章 提 要

1. 电流密度: $\mathbf{J} = nq\mathbf{v}$

$$\text{电流强度: } I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

2. 稳恒电流: $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$

节点电流方程: $\sum I_i = 0$

稳恒电场: 稳定电荷分布产生的电场

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

回路电压方程: $\sum(\pm \mathcal{E}_i) + \sum(\pm I_i R_i) = 0$

3. 欧姆定律: $V = IR$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\text{电阻: } R = \rho \frac{l}{S}$$

4. 电动势: 非静电力反抗静电力移动电荷做功, 把其它种形式的能量转换为电势能, 产生电势升高。

$$\mathcal{E} = \frac{W_{非}}{q}$$

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$$

5. 电容器的充放电:

$$\text{充电: } q = C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\text{放电: } q = Qe^{-\frac{t}{RC}} \quad i = \frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\text{时间常数: } \tau = RC$$

$$\text{似稳电场: } l \ll c\tau$$

6. 金属中电流的经典微观图象: 自由电子的定向运动是一段一段加速运动的接替, 各段加速运动都是从定向速度为零开始。

$$\sigma = \frac{ne^2}{m}\tau \quad (\tau: \text{电子自由飞行时间})$$

$$7. \text{焦耳定律: } p = \sigma E^2, P = I^2 R$$

思考题

6.1 当导体中没有电场时, 其中能否有电流? 当导体中无电流时, 其中能否存在电场?

6.2 证明: 用给定物质作成的一定长度的导线, 它的电阻和它的质量成反比。

6.3 半导体和绝缘体的电阻随温度增加而减小, 你能给出大概的解释吗?

6.4 基尔霍夫第二方程与电路中的能量守恒等价。试解释之。

6.5 电动势与电势差之间有什么区别?

6.6 试想出一个用 RC 电路测量高电阻的方法。

6.7 你能很快估计出图 6.19 所示的电路中 A, B 之间的电阻值吗?

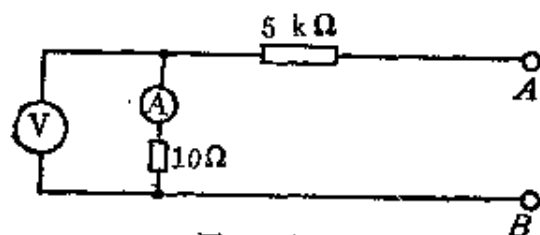


图 6.19

6.8 大约 0.02A 的电流从手到脚流过时就会引起胸肌收缩从而使入窒息而死。人体从手到脚的电阻约为 $10\text{k}\Omega$ 。问人应避免手触多大电压的线路? (注意:有时甚至十几伏的电压也会导致神经系统严重损伤而丧命!)

习 题

6.1 北京正负电子对撞机的储存环是周长为 240 m 的近似圆形轨道。求当环中电子流强度为 8mA 时,在整个环中有多少电子在运行。已知电子的速率接近光速。

6.2 在范德格拉夫静电加速器中,一宽为 30cm 的橡皮带以 20cm/s 的速度运行,在下边的滚轴处给橡皮带带上表面电荷,橡皮带的电荷面密度足以在带子的每一侧产生 $1.2 \times 10^6\text{V/m}$ 的电场,求电流是多少毫安?

6.3 设想在银这样的金属中,导电电子数等于原子数。当 1mm 直径的银线中通过 30A 的电流时,电子的漂移速度是多大?给出近似答案,计算中你需要的那些你一时还找不到的常数,你自己估计出来数量级并代入之。若银线温度是 20°C ,按经典电子气模型,其中自由电子的平均速率是多大?

6.4 一铁制水管,内、外直径分别为 2.0cm 和 2.5cm ,这水管常用来使电气设备接地。如果从电气设备流入到水管中的电流是 20A ,那么电流在管壁中和水中各占多少?假设水的电阻率是 $0.01\Omega\text{m}$,铁的电阻率为 $8.7 \times 10^{-8}\Omega\text{m}$ 。

6.5 地下电话电缆由一对导线组成,这对导线沿其长度的某处发生短路(图 6.20)。电话电缆长 5m 。为了找出何处短路,技术人员首先测量 AB 间的电阻;然后测量 CD 间的电阻。前者测得电阻为 30Ω ;后者测得为 70Ω 。求短路出现在何处。

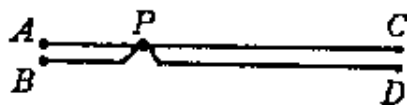


图 6.20

6.6 大气中由于存在少量的自由电子和正离子而具有微弱的导电性。

(1) 地表附近,晴天大气平均电场强度约为 120V/m ,大气平均电流密度约为 $4 \times 10^{-12}\text{A/m}^2$ 。问:大气电阻率是多大?

(2) 电离层和地表之间的电势差为 $4 \times 10^5\text{V}$,大气的总电阻是多大?

6.7 如图 6.21 所示, $\mathcal{E}_1 = 3.0\text{V}$, $r_1 = 0.5\Omega$, $\mathcal{E}_2 = 6.0\text{V}$, $r_2 = 1.0\Omega$, $R_1 = 2.0\Omega$, $R_2 = 4.0\Omega$,求通过 R_1 和 R_2 的电流。

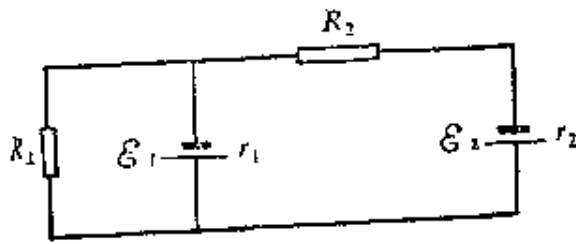


图 6.21

6.8 如图 6.22 所示, 其中 $\mathcal{E}_1=3.0\text{V}$, $\mathcal{E}_2=1.0\text{V}$, $r_1=0.5\Omega$, $r_2=1.0\Omega$, $R_1=4.5\Omega$, $R_2=19.0\Omega$, $R_3=10.0\Omega$, $R_4=5.0\Omega$ 。求电路中的电流分布。

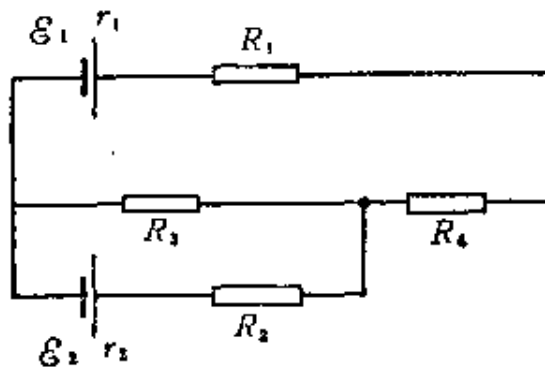


图 6.22

6.9 如图 6.23 的电桥, 以 I_1, I_2, I_g 为未知数列出三个回路电压方程, 从中解出 I_g , 并证明当 $R_1/R_2=R_3/R_4$ 时 $I_g=0$, 从而说明四个电阻的这一关系是电桥平衡的充分条件。

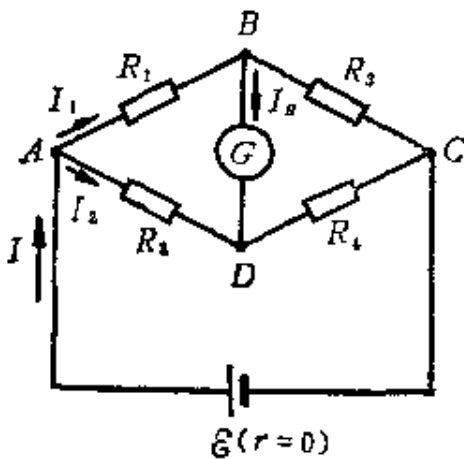


图 6.23

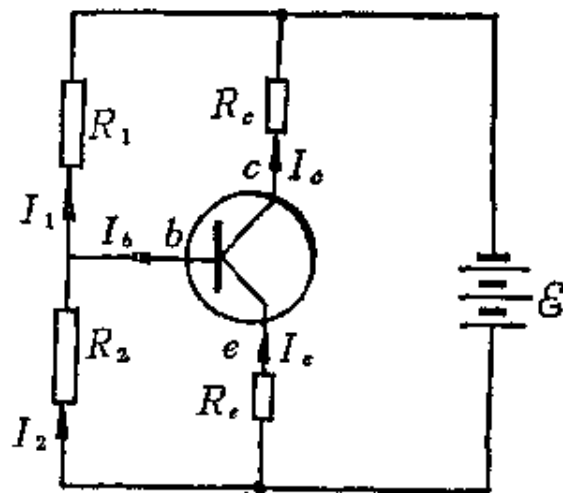


图 6.24

6.10 如图 6.24 所示的晶体管电路中 $\mathcal{E}=6\text{V}$, 内阻为 0, $V_{ce}=1.96\text{V}$, $V_{be}=0.2\text{V}$, $I_c=2\text{mA}$, $I_b=20\mu\text{A}$, $I_2=0.4\text{mA}$, $R_c=1\text{k}\Omega$ 。求 R_1, R_2, R_e 之值。

6.11 证明: 电容器 C 通过电阻放电时, R 上耗散的能量等于原来储存在电容器内的能量。对于放电过程, 有人认为当 $t \rightarrow \infty$ 时, 才能有 $Q = 0$, 所以电容器是永远不会真正放完电的。你如何反击这一意见? 你可以在某种合理的关于 R 、 C 值, 以及电容器的初电压为 V_0 值的假定下, 计算一下电荷减小到剩下一个电子所需要的时间。

6.12 一铜棒的横截面积为 $20 \times 80 \text{ mm}^2$, 长为 2 m , 两端的电势差为 50 mV 。已知铜的电导率为 $\sigma = 5.7 \times 10^{21} \text{ 1}/\Omega \cdot \text{m}$, 铜内自由电子的电荷密度为 $1.36 \times 10^{23} \text{ C}/\text{m}^3$ 。求: ① 它的电阻; ② 电流; ③ 电流密度; ④ 棒内的电场强度; ⑤ 所消耗的功率; ⑥ 棒内电子的漂移速度。

6.13 电缆的芯线是半径为 $r_1 = 0.5 \text{ cm}$ 的铜线, 在铜线外面包一层同轴的绝缘层, 绝缘层的外半径为 $r_2 = 2 \text{ cm}$, 电阻率 $\rho = 1 \times 10^{12} \Omega \cdot \text{m}$ 。在绝缘层外面又用铅层保护起来 (图 6.25)。

① 求长 $L = 1000 \text{ m}$ 的这种电缆沿径向的电阻;

② 当芯线与铅层的电势差为 100 V 时, 在这电缆中沿径向的电流多大?

6.14 红宝石激光器中的脉冲氙灯常用 $2000 \mu\text{F}$ 的电容器充电到 4000 V 后放电时的瞬时大电流来使之发光, 如电源给电容器充电时的最大输出电流为 1 A , 求此充电电路的最小时间常数? 脉冲氙灯放电时, 其灯管内电阻近似为 0.5Ω , 求最大放电电流及放电电路的时间常数。

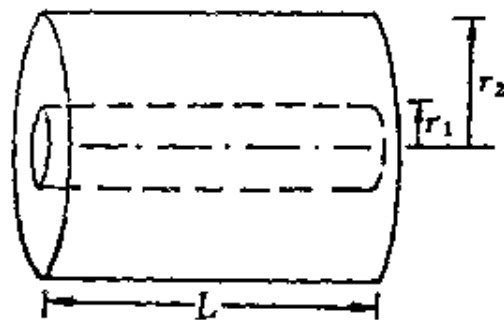


图 6.25

6.15 一太阳能电池板的尺寸是 $58 \text{ cm} \times 53 \text{ cm}$ 。当正对太阳时, 此电池板能产生 14 V 的电压并提供 2.7 A 的电流。太阳光对垂直于光线的面积的辐射能流是 $1.0 \times 10^3 \text{ W}/\text{m}^2$, 求此电池板利用太阳能的效率。

6.16 一台大电磁铁在 400 V 电压下以 200 A 的电流工作。它的线圈用水冷。水的进口温度为 20°C , 如果水的出口温度不超过 80°C , 则水的最小流量 (升/分) 应是多少?

III 常用电源

工业上最重要的电动势源是发电机。它把机械能变成电能，它利用了电磁感应现象，其基本原理我们将在第十章介绍。

容易制造、便于携带和安装因而用途广泛的电动势源是各类电池。它们有蓄电池、干电池(包括纽扣电池)、燃料电池、太阳能电池等，下面我们简述它们的构造和原理。

III.1 蓄 电 池

蓄电池是一种化学电源。各种化学电源的基本组成部分都是电解质溶液和插入其中的正、负电极。正、负电极是由不同的金属(或碳棒)做成。在负极进行氧化反应，释放出的电子经过外电路流入正极。正极接受电子后进行还原反应。这氧化还原反应所释放的化学能就转变成了电路中消耗的电能。各种化学电源的不同就在于正、负极的材料和电解质不同。化学电源的组成通常用下列图式表达：

负极 | 电解质 | 正极

常用的蓄电池是铅蓄电池。它的负极是铅板，正极是涂了一层过氧化铅(PbO_2)的铅板(图 III.1)。二者都浸到硫酸溶液中，因此，铅蓄电池的化学组成式是

$\text{Pb} | \text{H}_2\text{SO}_4 | \text{PbO}_2$

当外电路接通后，两极进行的化学反应如下：

在负极： $\text{Pb} + \text{SO}_4^{2-} \longrightarrow \text{PbSO}_4 + 2e^-$

在正极： $\text{PbO}_2 + \text{SO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2e^- \longrightarrow \text{PbSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$

这种蓄电池的电动势为 2V。

蓄电池在使用时，叫做蓄电池**放电**。随着放电的继续，电解质内的硫酸浓度不断减小。当浓度小于一定值时，电动势将明显地低于 2V。这时不能再继续使用。要想再继续使用，必须对蓄电池进行**充电**。充电时用另外的电源使电流沿相反的方向通过蓄电池。这时在正、负极会进行上述化学反应的逆反应，从而使两极板以及溶液中硫酸的浓度都恢复到原来的情况，此后蓄电池就能作为电源继续使用。既能放电，

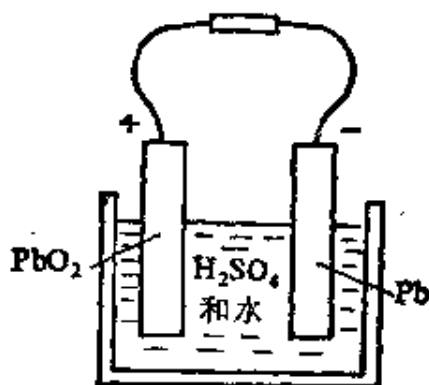


图 III.1 蓄电池

又能充电，也就是说能够进行可

逆的反应，这是蓄电池的特点和优点。注意，此处说的放电和充电并不是增加或减小了电池内的正的或负的电荷，而是增加或减小了蓄电池所储存的化学能。

除在实验室中外，使用蓄电池最多的地方是汽车。汽车上的蓄电池六个装在一起，可以产生 12V 的电动势。这一个蓄电池组储存的能量约 $1.8 \times 10^6 \text{J}$ (0.5 千瓦时)。作为潜水艇动力用的蓄电池组可以重几百吨，储存的能量可达 $1.8 \times 10^{10} \text{J}$ (5×10^9 千瓦时)。

III.2 干电池和钮扣电池

干电池也是一种化学电源。常用的干电池的中心是一根碳棒，是正极，其周围包以黑色的 MnO_2 粉。它的外面是用 NH_4Cl 溶

液和的浆糊。最外面用锌皮裹住作为负极。然后用火漆封口即成(图 III. 2)。因此这种电池的化学组成式为

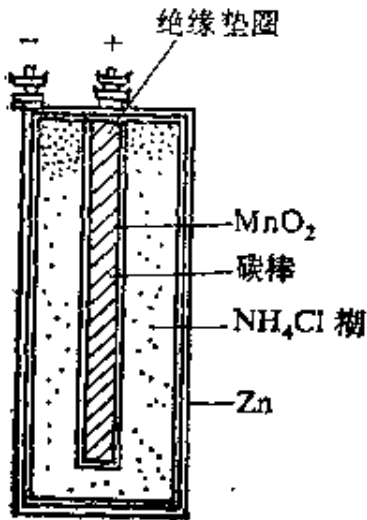


图 III. 2 干电池

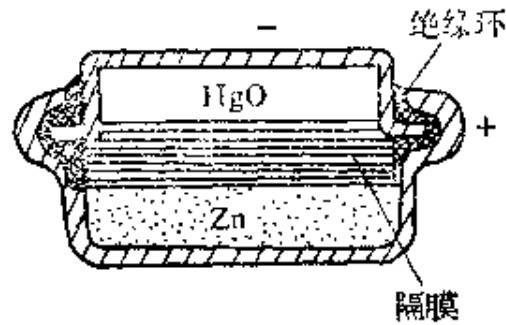
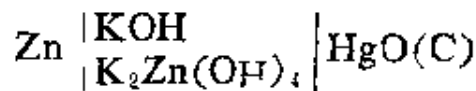


图 III. 3 钮扣电池

这种电池的电动势为 1.5 伏。化学电池的电动势只决定于所用的材料,与电池的尺寸无关,所以大、小号电池的电动势是一样的,但大号的储存能量要多一些。普通 1 号电池储存的能量约为 $7.2 \times 10^3 \text{J}$ (2×10^{-3} 千瓦小时)。干电池不能进行逆反应,因而是一种消耗物资。

近来在电子手表、小型计算器、心脏起搏器以至导弹和人造卫星中常用的钮扣式电池(或微型电池)也是一种“干”电池。有一种一氧化汞电池,其化学组成式为



电池的正、负极各与钢制的外壳相接。正极是由红色的氧化汞和少量的石墨组成。负极是含有 10% 汞的汞齐化锌粉。这些物质都可以压制成块状放入半个电池壳内或直接压入半个电池壳。在两个电极之间充有吸水性物质,叫做隔膜,它们浸透了电解质溶液。有的电池中人们也使用浆糊状的电解质,它是在电解质溶液中加入

少许甲基红色素而制成的。图 III.3 为一种纽扣电池结构示意图。这种电池的电动势为 1.35V。

III.3 燃料电池

燃料电池也是一种化学电源,它用天然燃料(如气态和液态的碳氢化合物)或容易从天然燃料得到的氢,一氧化碳、水煤气等作为负极,而用氧气作为正极。只要连续地供给它这些化学原料(这些原料都贮存于电池外部)就能发生化学反应而将化学能转化为电能。

燃料电池是一个进行受控燃烧反应的特殊燃烧室。与一般的燃烧不同,在燃料电池内,燃料的氧化和氧气的还原是在不同的电极上进行的,因而能使反应的能量直接转化成电能。

图 III.4 是一种以氢-氧作为燃料的燃料电池示意图。它的电极是多孔碳做成的中空圆柱体,氧输入到正电极(氧电极),氢输入到负电极(氢电极),这两个电极都浸在氢氧化钾水溶液中。这种燃料电池的化学组成式为



在氢电极和氧电极处分别进行下列反应

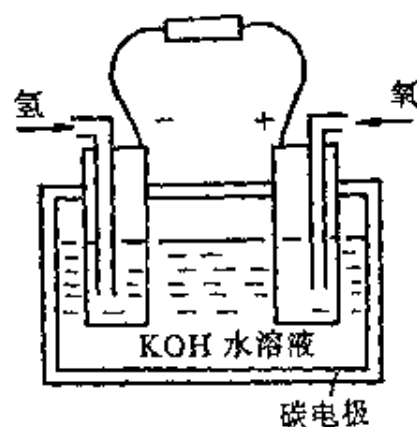
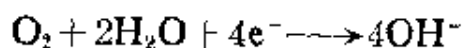
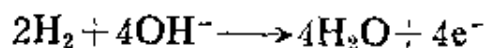


图 III.4 氢-氧燃料电池

这种化学反应使电子积聚在负极上,而正电极上却缺少电子。接通外电路后,电子就通过外电路从负极移向正极而形成电流。反应的最终结果是氢和氧化合成水,生成的水以水蒸汽的形式从电池中排出。

这种氢-氧燃料电池的电动势为 1.23V。只要不断供给燃料，它就可以不断地输出电能。

实验证明，燃料(特别是化学结构简单的物质)在燃料电池中进行“燃烧”而获得电能，要比由一般的燃烧先产生热能，然后再将生成的热能转化为电能效率要高得多。这就是人们对燃料电池感兴趣的主要原因。尽管如此，燃料电池也有一定量的热损耗，最好的燃料电池也大约只有 45% 的化学能转变成电能，其余都损耗掉了。

燃料电池结构紧凑，轻巧并且干净，制造也不复杂。虽然现在还处在试验完善阶段，但已有多处应用，优点很多。阿波罗宇宙飞船和天空实验室中用的就是改进了的氢-氧燃料电池，它排出的水用作饮料或淋浴用。

III. 4 太阳能电池

太阳能电池不是化学电源，它是直接把光能转变成电能的一种装置。它是由两种不同导电类型即电子型(n 型)和空穴型硅(p 型)的半导体构成的。图 III. 5 是太阳能电池的结构示意图。在 n 型硅芯周围是一层 p 型硅。这层 p 型硅非常薄，约为 10^{-4} cm。当太阳光穿过 p 型硅薄层并照射到 n 型与 p 型硅的交界区(叫 $p-n$ 结)上时，它使电子从 p 型硅向 n 型硅运动。

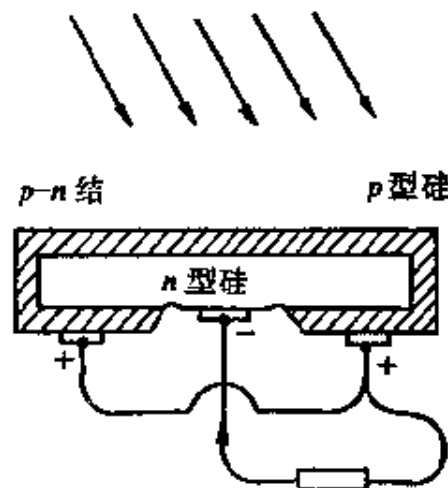


图 III. 5 太阳能电池

为了解释为什么太阳光能使电子通过 $p-n$ 结流动，我们必须

先描述一下电子和空穴的行为。在 n 型硅中，载流子是电子，而在 p 型硅中，载流子是空穴（正电荷）。图 III.6 表示了每种类型硅中的电荷情况。当这两种类型的硅片接触并联结在一起时，一些电子将穿过界面扩散到 p 型材料中，而一些空穴将扩散到 n 型材料中，形成 $p-n$ 结。 $p-n$ 结是一个很薄的空间电荷区，靠 p 区的一边带负电，靠 n 区的一边带正电，从而产生了一个空间电场，这个电场的方向是由 n 区指向 p 区的，如图 III.7 所示。电场的存在就成为扩散运动的一个阻力，它阻止 p 区的空穴继续向 n 区扩散，也阻止 n 区的电子继续向 p 区扩散。最后达到一种平衡。

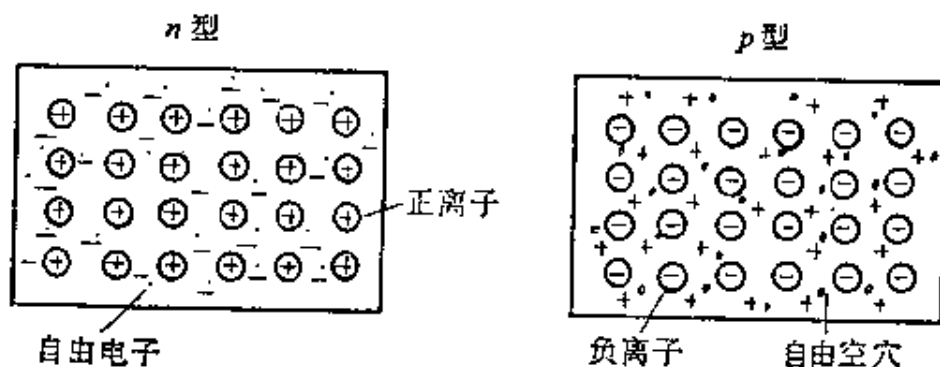


图 III.6 半导体

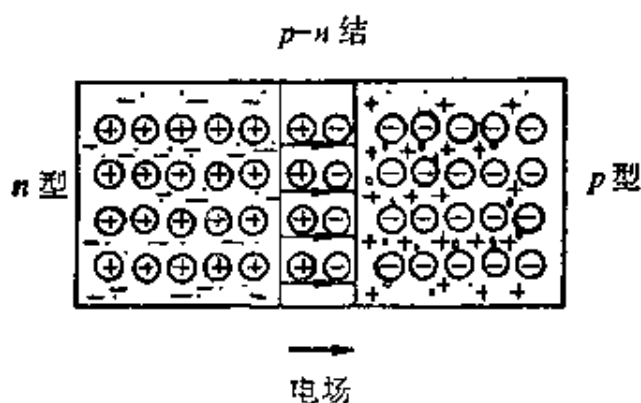


图 III.7 $p-n$ 结电场

太阳能电池的电流是由太阳光对 $p-n$ 结的电场区内原子的作用产生的。当太阳光照到这些原子中的某一个原子时，使它电离，

即从原子中拉出一个电子。这样就产生了一个自由电子和一个自由空穴,在 $p-n$ 结电场的作用下,电子加速到结的 n 区一边,空穴加速到结的 p 区一边,其结果就形成了正电荷从 n 区流向 p 区的电流。在外电路中,电流将从 p 端流回 n 端,也就是 p 端作为太阳能电池的正极, n 端作为太阳能电池的负极。

硅太阳能电池的电动势约为 0.6 伏,从它所能取得的电流是比较小的。即使强太阳光照射到面积为 5cm^2 的单个太阳能电池上,也只能获得 0.1A 的电流。太阳能电池效率较低,大约只有 11% 的光能变成电能。为了产生可用的电力,常常将大量太阳能电池组合起来形成太阳能电池板。

如果在太阳能电池表面涂上一层放射性物质,则它放射出的射线可以起太阳光的作用而引起电流。这样就做成了原子能电池。

最后,还需要提一下热电偶。这也是一种产生电动势的装置。它把热能直接转换为电能,而不需要先把热能变成气体的动能再来推动发电机。热电偶的结构很简单,它就是利用两种不同的导体或半导体材料构成的一个回路(所以叫热电偶)(图 III.8)。这一回路中两种材料有两个接点。当两个接点处于不同的温度时,在回路中就有电动势产生。这种电动势叫**热电动势**。热电动势一般比较小。温度差在几百度的范围内,两种金属做成的热电偶,其热电动势常只以毫伏计。因此这种电动势不能作为功率源使用。但

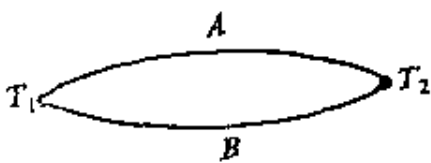


图 III.8 热电偶

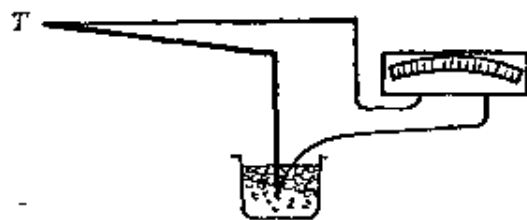


图 III.9 用热电偶测温度

由于它和温度有关,所以可以用来测量温度。测量温度时,总是将回路的一个接点保持恒温,例如泡在冰水中。另一个接点放到待测温度处(图 III. 9)。然后测量回路中的电动势,再根据校准曲线即可求出待测温度。这种测温方法的优点是:可以选点测量,反应快,精确度。

第七章 磁 力

本 章 要 求

1. 理解磁力是运动电荷之间相互作用的表现。
2. 理解洛仑兹力公式的意义,了解如何用它来定义磁感应强度 B 。
3. 会计算带电粒子在均匀磁场中的螺旋运动。
4. 能从洛仑兹力导出电流元受磁场力的公式,并能利用后者计算简单情况下载流导线受磁场的作用力。
5. 理解载流线圈的磁矩的定义并能计算它受磁场作用的力矩。
- *6. 理解公式 $B = v \times E / c^2$ 的意义并了解磁场是电场的相对论效应以及电磁场是统一的实体的概念。

§ 7.1 磁 力

关于电荷之间的相互作用,我们已讨论过下述三种情况:

1. 静止电荷对静止电荷的作用力。第一章就讨论了这种相互作用力。
2. 运动电荷对静止电荷的作用力。第二章讨论的运动电荷的电场就是指的这种情况,因为电场是根据静止电荷受的力来定义的。
3. 静止电荷对运动电荷的作用力。第二章 § 2.4 讨论了这

种情况,曾指出静止电荷对运动电荷的作用力与后者的运动无关。

在以上所有情况里,我们都引用了场的概念,并用**电场**来说明电荷之间的相互作用。

本章和下一章将讨论电荷之间相互作用的第四种情况,即运动电荷对运动电荷的相互作用力。与受力电荷的运动速度有关的力叫**磁力**。

一般情况下磁力是指电流和磁体之间的相互作用力。我国古籍《吕氏春秋》(成书于纪元前三世纪战国时期)所载的“慈石召铁”,即天然磁石对铁块的吸引力,就是磁力。这种磁力现在很容易用两条磁铁棒表演出来。如图 7.1 所示,两根磁铁棒的同极相斥,异极相吸。

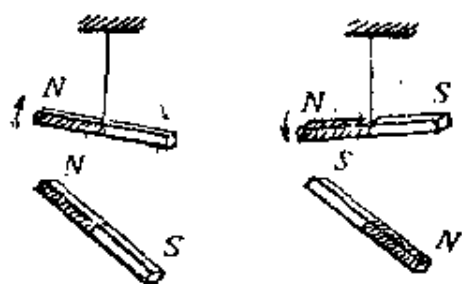


图 7.1 永磁体同极相斥,异极相吸

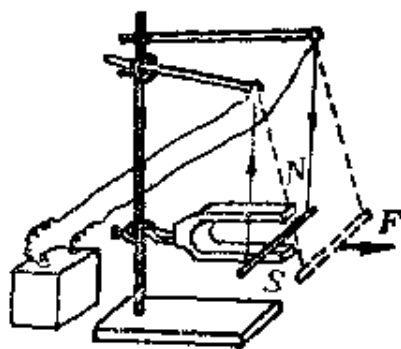


图 7.2 磁体对电流的作用

演示磁力的实验还有:

如图 7.2 所示,把导线悬挂在蹄形磁铁的两极之间,当导线中通入电流时,导线会被排开或吸入,显示了通有电流的导线受到了磁铁的作用力。

如图 7.3 所示,一个阴极射线管的两个电极之间加上电压后,会有电子束从阴极 K 射向阳极 A 。当把一个蹄形磁铁放到管的近旁时,会看到电子束发生偏转。这显示运动的电子受到了磁铁的作用力。

如图 7.4 所示,一个磁针沿南北方向静止在那里,如果在它上

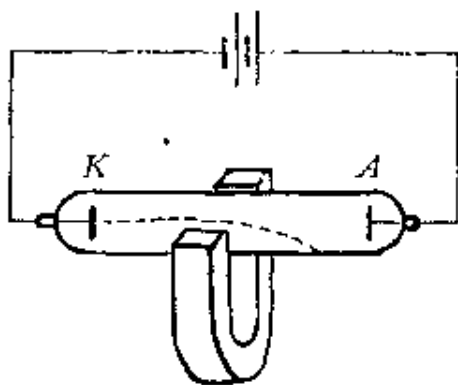


图 7.3 磁体对运动电子的作用



图 7.4 奥斯特实验

面平行地放置一根导线,当导线中通入电流时,磁针就要转动。这显示了磁针受到了电流的作用力。

这个试验是1820年奥斯特做出的,它在历史上第一次揭示了电现象和磁现象的联系,对电磁学的发展起了重要的作用。

如图7.5所示,有两段平行放置并两端固定的导线,当它们通以方向相同的电流时,互相吸引(图7.5a)。当它们通以相反方向的电流时,互相排斥(图7.5b);这说明电流与电流之间有相互作用力。

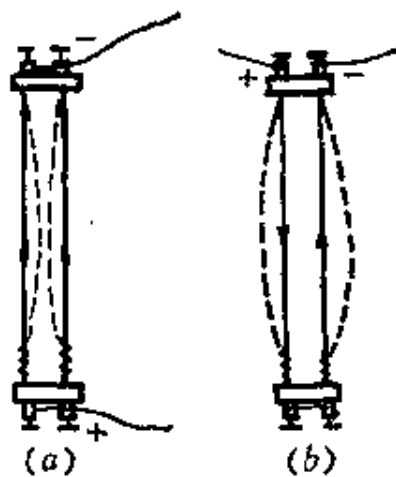


图 7.5 平行电流间的相互作用

在这些实验中,图7.5所示的电流之间的相互作用可以说是运动电荷之间的相互作用,因为电流是电荷的定向运动形成的。其它几类现象都用到永磁体,为什么也说它们是运动电荷相互作用的表现呢?这是因为,永磁体也是由分子和原子组成的,在分子内部,电子和质子等带电粒子的运动也形成微小的电流,叫分子电流。当成为磁体时,其内部的分子电流的方向都按一定的方式排列起来了。一个永磁体与其它永磁体或电流的相互作用,实际上

就是这些已排列整齐了的分子电流之间或它们与导线中定向运动的电荷之间的相互作用。因此它们之间的相互作用也是运动电荷之间的相互作用的表现。

总之，在所有情况下，磁力都是运动电荷之间相互作用的表现。

§ 7.2 磁场与磁感应强度

为了说明磁力的作用，我们也引入场的概念。产生磁力的场叫磁场。一个运动电荷在它的周围除产生电场外，还产生磁场。另一个在它附近运动的电荷受到的磁力就是该磁场对它的作用。因此，磁力作用的方式可表示为

运动电荷 \longleftrightarrow 磁场 \longleftrightarrow 运动电荷

定量地描述磁场，需要根据定量的实验。实验表明，在某一惯性参照系 S (例如实验室参照系) 中观察一个运动电荷 q 在另外的运动电荷(或电流或永磁体)周围运动时，它受到的作用力 F 一般总可以表示为两部分的矢量和(如图 7.6 所示)，即

$$F = F_e + F_m \quad (7.1)$$

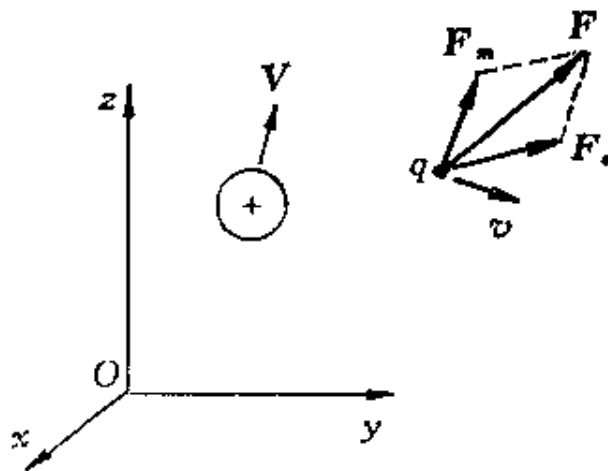


图 7.6 运动电荷受运动电荷的力

其中第一部分力 F_e 与电荷 q 的运动速度无关。即使 q 静止时, 它也受到这种力的作用。我们已把静止电荷受的力归之于电场, 所以这一部分力就是电场力。以 E 表示相应的电场强度, 则有:

$$F_e = qE \quad (7.2)$$

(7.1) 式中第二部分力 F_m 与电荷 q 相对于参照系 S 的速度 v 有直接关系。 v 的方向和大小不同, 这一部分力的大小和方向也不相同。它不是电场力。我们就把它归之于磁场的作用, 称为**磁场力**或**磁力**。实验表明, 在参照系 S 中观察, 一个以速度 v 运动的电荷 q 所受的磁场力总可以用下式表示

$$F_m = qv \times B \quad (7.3)$$

式中矢量 B 是由此式定义的描述磁场本身性质的矢量, 叫**磁感应强度**。在磁场中, 不同地点的磁感应强度的大小和方向都可以不同。

将(7.2)和(7.3)式代入(7.1)式可得

$$F = qE + qv \times B \quad (7.4)$$

这个表示一个运动电荷在另外的运动电荷周围所受的力的一般表示式叫**洛仑兹力公式**。通常也把(7.3)式表示的磁场力叫**洛仑兹力**。

根据洛仑兹力公式(7.4)式, 原则上可以设计以下的实验步骤

来确定空间任一点 P 处的 B 的大小和方向(图 7.7):

1. 将一检验电荷 q 置于运动电荷(或电流, 永磁体)周围某点 P , 并保持其静止, 测出这时它受的力 F_e ; 然后测出 q 以某一速度 v 通过 P 点时受的力 F 。由 $(F - F_e)$ 求出 F_m 。

2. 令 q 沿不同的方向通过 P 点, 重复上述方法测量 F_m 。这

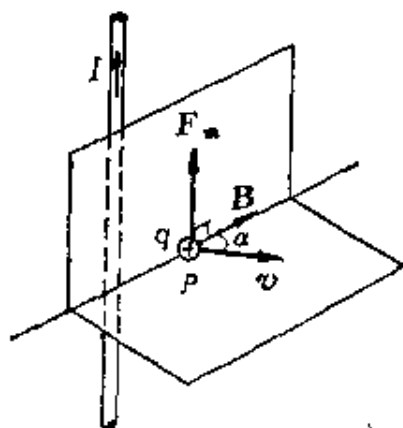


图 7.7 B 的定义

时可发现当 q 沿某一特定方向(或其反方向)运动时,不受磁力。这一方向(或其反方向),就定义为 B 的方向。

3. q 沿其它方向运动时,它所受的磁力 F_m 的方向总与上述 B 的方向垂直,也与 q 的速度 v 的方向垂直。我们可以根据任一次 v 和相应的 F_m 的方向进一步规定 B 的指向使它满足(7.3)式表示的矢量叉积关系。

4. 以 α 表示 q 的速度 v 的方向和 B 的方向之间的夹角,则可以发现,磁力的大小 F 和 $qv \sin \alpha$ 这一乘积成正比,我们就用这比值表示 B 的大小,即

$$B = \frac{F_m}{qv \sin \alpha} \quad (7.5)$$

这一公式正是(7.3)式表示的数量关系。这样,经过上述步骤后,我们就可以完全确定磁场中各处的磁感应强度 B 了。

磁感应强度 B 的国际制单位是牛·秒/库·米 $N \cdot s/C \cdot m$ 。这一单位叫特斯拉(Tesla, 记作 T)。地面上地磁场的磁感应强度约 $10^{-5} T$, 实验室得到的强磁场一般是十分之几到几 T。目前已获得的最强磁场是 31 T。

磁感应强度的过去常用单位是高斯(Gauss, 记作 G), 在数值上

$$1T = 10^4 G \quad (7.6)$$

在电磁学中,表示同一规律的数学形式常随所用单位制的不同而不同。(7.2)、(7.3)式的形式用于国际单位制。

为了形象地描绘磁场中磁感应强度的分布,类比电场中引入电力线的方法引入磁力线(或叫 B 线)。磁力线的画法规定与电力线画法一样。实验上可用铁粉来显示磁力线图形,如图 7.8 所示。

在说明磁场的规律时,类比电通量也引入磁通量的概念,通过

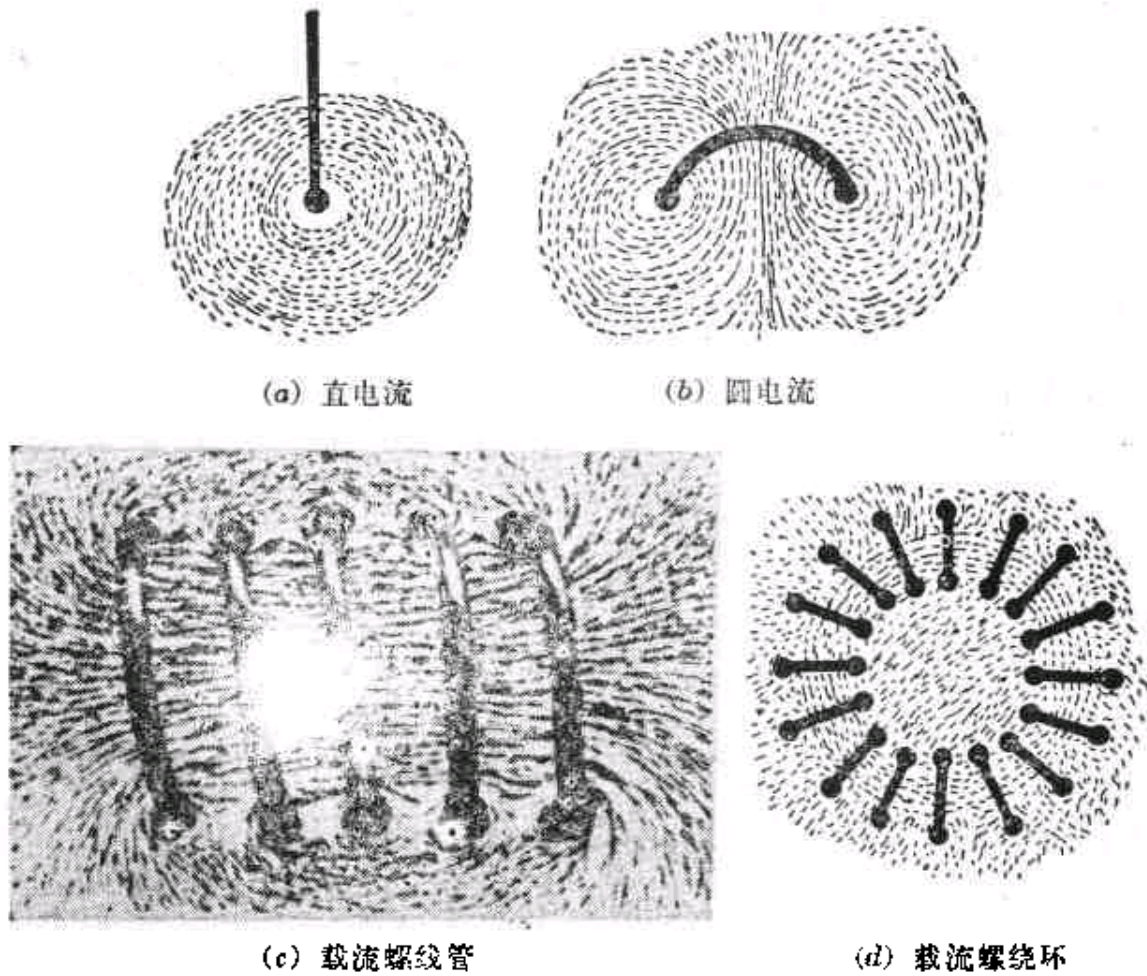


图 7.8 铁粉显示的磁力线图

某一面积 S 的磁通量 Φ 的定义是

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.7)$$

它就等于通过该面积的磁力线的总条数。

§ 7.3 带电粒子在磁场中的运动

一个带电粒子以一定速度 \mathbf{v} 进入磁场后，它会受到由 (7.3) 式所表示的洛仑兹力，因而改变其运动状态。下面先讨论均匀磁场的情形。

设一个质量为 m 带有电量为 q 的正离子，以速度 \mathbf{v} 沿垂直于

磁场方向进入一均匀磁场中 (图 7.9)。由于它受的力 $F_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 总与速度垂直, 因而它的速度的大小不改变, 而只是方向改变。又因为这个 F_m 也与磁场方向垂直, 所以正离子将在垂直于磁场平面内作圆周运动。用牛顿第二定律可以容易地求出这一圆运动的半径 R 为

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (7.8)$$

而圆运动的周期, 即回旋周期 T 为

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (7.9)$$

由上述两式可知, 回旋半径与粒子速度成正比, 但回旋周期与粒子速度无关, 这一点被用在回旋加速器中来加速带电粒子。

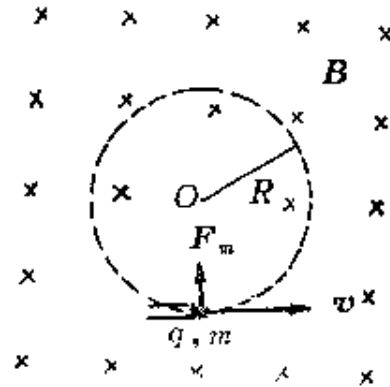


图 7.9 带电粒子在均匀磁场中作圆周运动

如果一个带电粒子进入磁场时的速度 \mathbf{v} 的方向不与磁场垂直, 则可将此入射速度分解为沿磁场方向的分速度 v_{\parallel} 和垂直于磁场方向的分速度 v_{\perp} (图 7.10)。后者使粒子产生垂直于磁场方向的圆运动, 使其不能飞开, 其圆周半径由 (7.8) 式给出为

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} \quad (7.10)$$

而回旋周期仍由 (7.9) 式给出。粒子平行于磁场方向的分速度 v_{\parallel} 不受磁场的影响, 因而粒子将具有沿磁场方向的匀速分运动。上

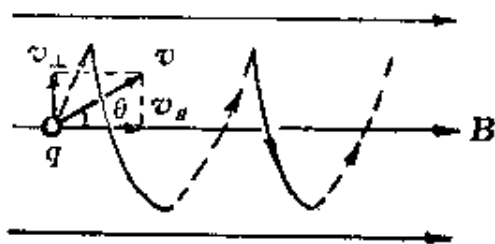


图 7.10 螺旋运动

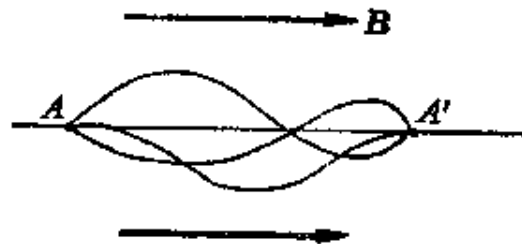


图 7.11 磁聚焦

述两种分运动的合成是一个轴线沿磁场方向的螺旋运动。这一螺旋轨迹的螺距为

$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m}{qB} v_{\parallel}$$

如果在均匀磁场中某点 A 处(图 7.11) 引入一发散角不太大的带电粒子束, 其中粒子的速度又大致相同。则这些粒子沿磁场方向的分速度大小就几乎一样, 因而其轨迹有几乎相同的螺距, 这样, 经过一个回旋周期后, 这些粒子将重新会聚穿过另一点 A' 。这种发散粒子束汇聚到一点的现象叫做**磁聚焦**。它广泛地应用于电真空器件中, 特别是电子显微镜中。

在非均匀磁场中, 速度方向和磁场不同的带电粒子, 也要作螺旋运动, 但半径和螺距都将不断发生变化。特别是当粒子具有一分速度向磁场较强处螺旋前进时, 它受到的磁场力有一个和前进方向相反的分量(图 7.12)。这一分量有可能最终使粒子的前进速度减小到零, 并继而沿反方向前进。强度逐渐增加的磁场能使粒子发生“反射”, 因而把这种磁场分布叫做**磁镜**。

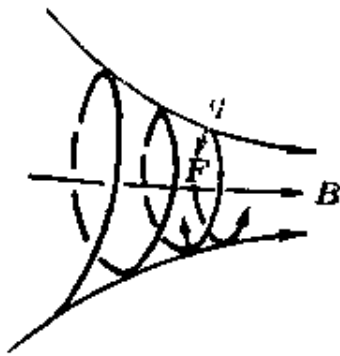


图 7.12 不均匀磁场对运动的带电粒子的力



图 7.13 磁瓶

可以用两个电流方向相同的线圈产生一个中间弱两端强的磁场(图 7.13)。这一磁场区域的两端就形成两个磁镜, 平行于磁场方向的速度分量不太大的带电粒子将被约束在两个磁镜间的磁场内来回运动而不能逃脱。这种能约束带电粒子的磁场分布叫**磁瓶**。在现代研究受控热核反应的实验中, 需要把很高温度的等离

子体限制在一定空间区域内。在这样的高温下，所有固体材料都将化为气体。上述磁约束就成了达到这种目的的常用方法之一。

磁约束现象也存在于宇宙空间中，地球的磁场是一个不均匀磁场：从赤道到地磁的两极磁场逐渐增强。因此地磁场是一个天然的磁捕集器。它能俘获宇宙射线中的电子和质子形成一个带电粒子区域。这一区域叫范阿仑辐射带(图 7.14)。它有两层，内层在地面上空 800km 到 4000km 处，外层在 60000km 处。在范阿仑辐射带中的带电粒子就围绕地磁场的磁力线作螺旋运动而在靠近两极处被反射回来。这样，带电粒子就在范阿仑带中来回振荡直到由于粒子间的碰撞而被逐出为止。有时，由于太阳表面状况的变化(如黑子大小的变动)，地磁场的分布会受到严重的影响，而使大量的带电粒子在两极附近漏掉。光彩绚丽的极光就是这些漏出的带电粒子进入大气层时形成的。

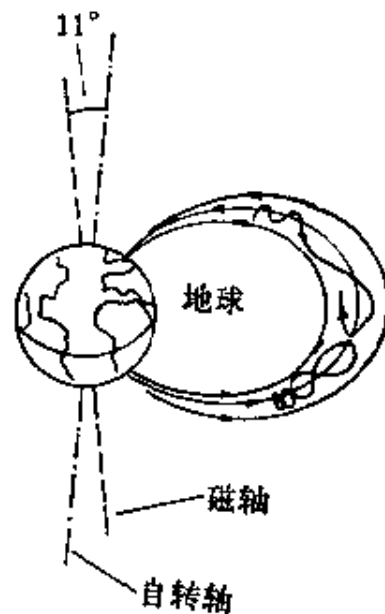


图 7.14 地磁场的捕集作用

§ 7.4 载流导线在磁场中受的力

导线中的电流是由其中的载流子定向移动形成的，当把载流导线置于磁场中时，这些运动的载流子就要受到洛仑兹力的作用，其结果将表现为载流导线受到磁力的作用。为了计算一段载流导线受的磁力，先考虑它的一段长度元受的作用力。

如图 7.15 所示，设导线截面积为 S ，其中有电流 I 通过。考虑长度为 dl 的一段导线。把它规定为矢量，它的方向与电流的方

向,即 $q\mathbf{v}$ 的方向相同。载有电流的一段矢量线元通常叫**电流元**。

设导线的单位体积内有 n 个载流子,每一个载流子的电荷都是 q 。为简单起见,我们认为各载流子都以漂移速度 \mathbf{v} 运动。由于每一个载流子受的磁场力都是 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$,而在 $d\mathbf{l}$ 段中共有 $n d\mathbf{l} S$ 个载流子,所以这些载流子受的力的总和就是

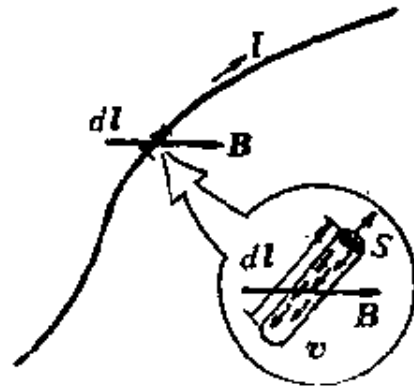


图 7.15 电流元受的磁场力

$$d\mathbf{F} = n s d\mathbf{l} q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

由于 $q\mathbf{v}$ 的方向和 $d\mathbf{l}$ 的方向相同,所以 $q d\mathbf{l} \mathbf{v} = |q| v d\mathbf{l}$ 。利用这一关系,上式就可写成

$$d\mathbf{F} = n s v |q| d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

又由于 $n s v |q| = I$,即通过 $d\mathbf{l}$ 的电流强度的大小,所以最后可得

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (7.11)$$

$d\mathbf{l}$ 中的载流子由于受到这些力所增加的动量最终总要传给导线本体的正离子结构,所以这一公式也就给出了这一段电流元受的磁力。载流导线受磁场的作用力通常叫做**安培力**。

知道了一段电流元受的磁力就可以用积分的方法求出一段有限长载流导线 L 受的磁力,如

$$\mathbf{F} = \int_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (7.12)$$

式中 \mathbf{B} 为各电流元所在处的“当地 \mathbf{B} ”。

下面举几个例子。

例 1] 在均匀磁场 \mathbf{B} 中有一段弯曲导线 ab ,通有电流 I ,求此段导线受的磁场力(图 7.16)。

解: 根据(7.12)式,所求力为

$$\mathbf{F} = \int_a^b I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \left(\int_a^b d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B}$$

此式中积分是各段矢量长度元 $d\mathbf{l}$ 的矢量和，它等于从 a 到 b 的矢量直线段 \mathbf{l} 。因此得

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

这说明整个弯曲导线受的磁场力的总和等于从起点到终点连的直导线通过相同的电流时受的磁场力。在图示的情况下， \mathbf{l} 和 \mathbf{B} 的方向均与纸面平行，因而

$$F = IlB \sin \theta$$

此力的方向垂直纸面向外。

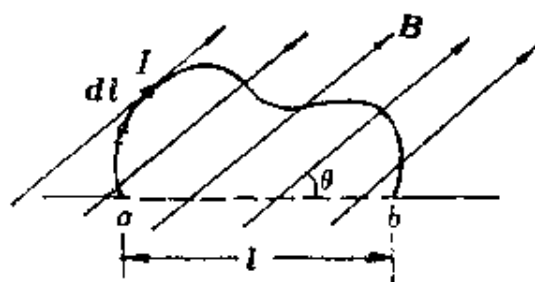


图 7.16

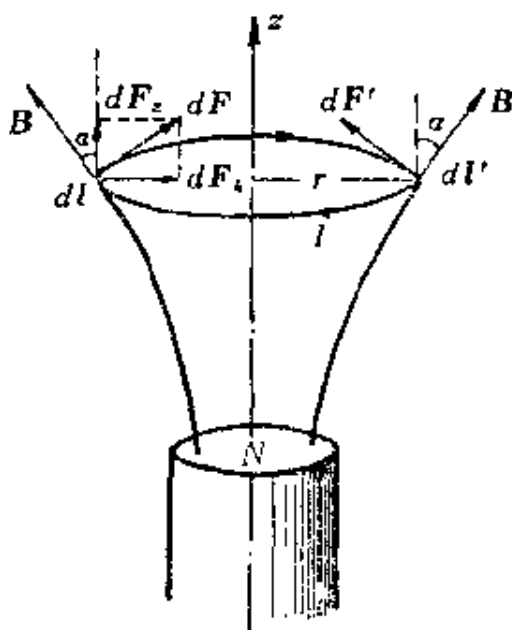


图 7.17

[例2] 在一个圆柱形磁铁 N 极的正上方水平放置一半径为 R 的导线环，其中通有顺时针方向（俯视）的电流 I 。在导线所在处磁场 \mathbf{B} 的方向都与竖直方向成 α 角。求导线环受的磁力。

解：如图 7.17 所示，在导线环上选电流元 $I dl$ 垂直纸面向里，此电流元受的磁力为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

此力的方向就在纸面内垂直于磁场 \mathbf{B} 的方向。

将 $d\mathbf{F}$ 分解为水平与竖直两个分量 dF_h 和 dF_z 。由于磁场和电流的分布对竖直 z 轴的轴对称性，所以环上各电流元所受的磁力 $d\mathbf{F}$ 的水平分量 dF_h 的矢量和为零。又由于各电流元的 dF_z 的方向都相同，所以圆环受的总磁力的大小为

$$F = F_z = \int dF_z = \int dF \sin \alpha = \int_0^{2\pi R} IB \sin \alpha dl$$

$$= 2IB\pi R \sin \alpha$$

此力的方向竖直向上。

下面我们讨论一个载流线圈在磁场中所受的力矩，如图 7.18 所示。一个载流圆线圈半径为 R ，电流为 I ，放在一均匀磁场中。它的平面法线方向 \hat{n} (\hat{n} 的方向与电流的流向符合右手螺旋关系) 与磁场 B 的方向夹角为 θ 。下面来求此线圈所受磁场的力和力矩。

为了求线圈受磁场的作用，可以将磁场 B 分解为与 \hat{n} 平行的 B_{\parallel} 和与 \hat{n} 垂直的 B_{\perp} 两个分量，分别考虑它们对线圈的作用力。

B_{\parallel} 分量对线圈的作用力如图 7.18(b) 所示，各段 dl 相同的电流元所受的力大小都相等，方向都在线圈平面内沿径向向外。由于这种对称性，线圈受这一磁场分量的合力为零，合力矩也为零。

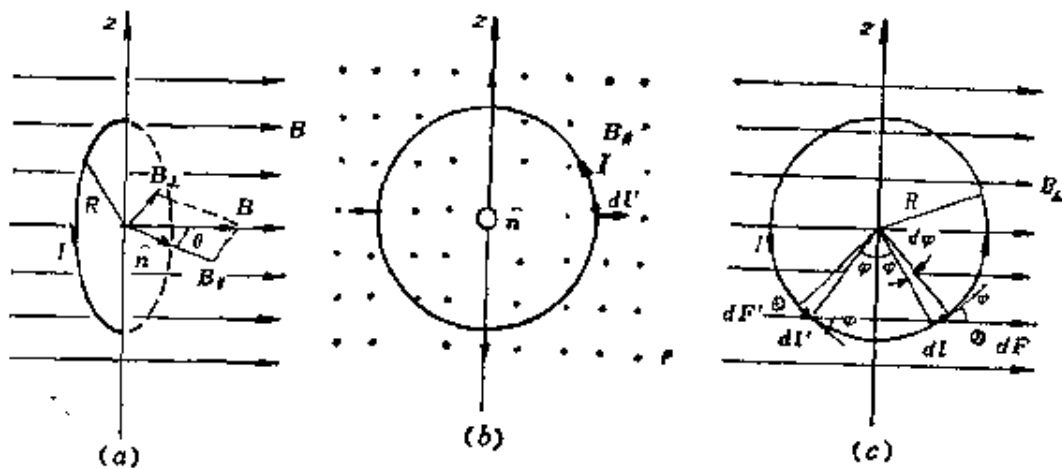


图 7.18 载流线圈受的力和力矩

B_{\perp} 分量对线圈的作用如图 7.18(c) 所示。右半圈上一电流元 $I dl$ 受的磁场力的大小为

$$dF = I dl B_{\perp} \sin \varphi$$

此力的方向垂直纸面向里，和它对称的左半圈上的电流元 $I dl'$ 受的磁场力的大小和 $I dl$ 受的一样，但力的方向相反，向外。对于右

半和左半线圈的各对对称的电流元作同样分析,可知此线圈受 B_{\perp} 分量的合力为零。但由于 Idl 和 Idl' 受的磁力不在一条直线上,所以对线圈产生一个力矩。 Idl 受的力对线圈 z 轴产生的力矩的大小为

$$dM = dF \cdot r = Idl B_{\perp} \sin \varphi \cdot r$$

由于 $dl = R d\varphi$, $r = R \sin \varphi$, 所以

$$dM = IR^2 B_{\perp} \sin^2 \varphi d\varphi$$

对 φ 由 0 到 π 进行积分,即可得线圈右半部所受磁力的力矩为

$$M_{右} = \int dM = IR^2 B_{\perp} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} IR^2 B_{\perp}$$

线圈左半部各电流元所受磁力虽然与右半部的方向相反,但对于 z 轴来说,产生相同方向的力矩。此力矩的大小与 $M_{右}$ 相同。因此 B_{\perp} 分量对线圈的合力矩就是

$$M = 2M_{右} = \pi R^2 IB_{\perp}$$

由于 $B_{\perp} = B \sin \theta$, 所以又可得

$$M = \pi R^2 IB \sin \theta$$

在此力矩的作用下,线圈要绕 z 轴按反时针方向(俯视)转动。用矢量表示力矩,则 M 的方向沿 z 轴正向。

综合上面得出的 B_{\parallel} 和 B_{\perp} 对载流线圈的作用,可得它们的总效果是:均匀磁场对载流线圈的合力为 0,而力矩为

$$M = \pi R^2 IB \sin \theta = SI B \sin \theta \quad (7.13)$$

其中 $S = \pi R^2$ 为线圈围绕的面积。根据 \hat{n} 和 B 的方向以及 M 的方向,此式可用矢量叉积表示为

$$M = SI \hat{n} \times B \quad (7.14)$$

如果给出定义

$$p_m = SI \hat{n} \quad (7.15)$$

称作载流线圈的磁矩,它是一个矢量,则(7.14)式又可写成

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B} \quad (7.16)$$

此力矩力图使 \hat{n} 的方向,也就是磁矩 \mathbf{p}_m 的方向,转向与外加磁场方向一致。当 \mathbf{p}_m 与 \mathbf{B} 方向一致时, $\mathbf{M}=0$ 。线圈不再受磁场的力矩作用。

(7.16)式在此处虽然是根据一个圆线圈的特例导出的,但可以证明它是关于闭合电流所受磁场力矩的普遍公式,而该闭合电流的磁矩就用(7.15)式定义,其大小等于电流所围绕的面积与电流的乘积。

在非均匀磁场中,载流线圈除受到磁力矩作用外,还受到磁力的作用。因其情况复杂,我们就不作进一步讨论了。

§ 7.5 霍耳效应

如图 7.19 所示,在一个金属窄条(宽度为 h , 厚度为 b)中,通以电流。这电流是外加电场 E 作用于电子使之向右作定向运动(漂移速度为 v)形成的。当加以外磁场 B 时,由于洛伦兹力的作用,电子的运动将向下偏转(图 7.19a),当它们跑到窄条底部时,由于表面所限,它们不能脱离金属因而就聚集在窄条的底部,同时在窄条的顶部显示出有多余的正电荷。这些多余的正、负电荷将在金属内部产生一横向电场 E_i 。随着底部和顶部多余电荷的增多,这一电场也迅速地增大到它对电子的作用力 $(-e)E_i$ 与磁场对电子的作用力 $(-e)v \times B$ 相平衡。这时电子将恢复原来水平方向的漂移运动而电流又重新恢复为稳恒电流。由平衡条件 $-eE_i + (-e)v \times B = 0$ 可知所产生横向电场的大小为

$$E_i = vB \quad (7.17)$$

由于横向电场 E_i 的出现,在导体的横向两侧会出现电势差

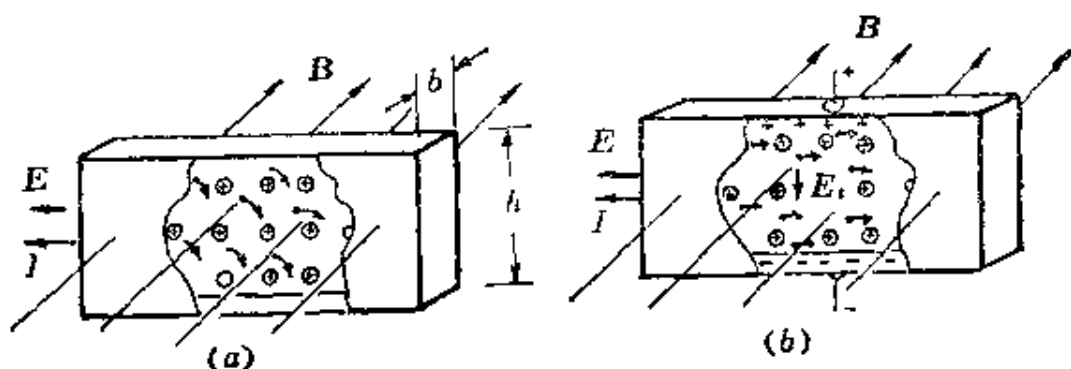


图 7.19 霍尔效应

(图 7.19b), 这一电势差的数值为

$$V_t = E_t h = v B h$$

已经知道电子的漂移速度 v 与电流 I 有下述关系

$$I = n b h q v$$

其中 n 为载流子浓度, 即导体内单位体积内的载流子数目。由此式求出 v 代入上式可得

$$V_t = \frac{I B}{n q b} \quad (7.18)$$

对于金属中的电子导电来说, 如图 7.19(b) 所示, 导体顶部电势高于底部电势。如果载流子带正电, 在电流和磁场方向相同的情况下, 将会得到正电荷聚集在底部而底部电势高于顶部电势的结果。因此通过电压的测定可以确定导体中载流子所带的电荷的正负。这是方向相同的电流由于载流子种类的不同而引起不同效应的一个实际例子。

在磁场中的载流导体上出现横向电势差的现象是霍尔在 1879 年发现的, 现在就叫霍尔效应。当时还不知道金属的导电机构, 甚至还未发现电子。现在霍尔效应有多种应用, 特别是用于半导体的测试。由测出的霍尔电压即横向电压的正负可以判断半导体的载流子种类, 是电子或是空穴; 还可以用 (7.18) 式计算出载流子浓度。用一块制好的半导体薄片通以给定的电流, 在校准好的条件

下，还可以通过霍耳电压来测磁场 B 。这是现在测磁场的一个常用的比较精确的方法。

应该指出，对于金属来说，由于是电子导电，在如图 7.19 所示的情况下测出的霍耳电压应该显示顶部电势高于底部电势。但是实际上有些金属却给出了相反的结果，好象在这些金属中的载流子带正电似的。这种“反常”的霍耳效应，以及正常的霍耳效应都只能用金属中电子的量子理论才能圆满地解释。

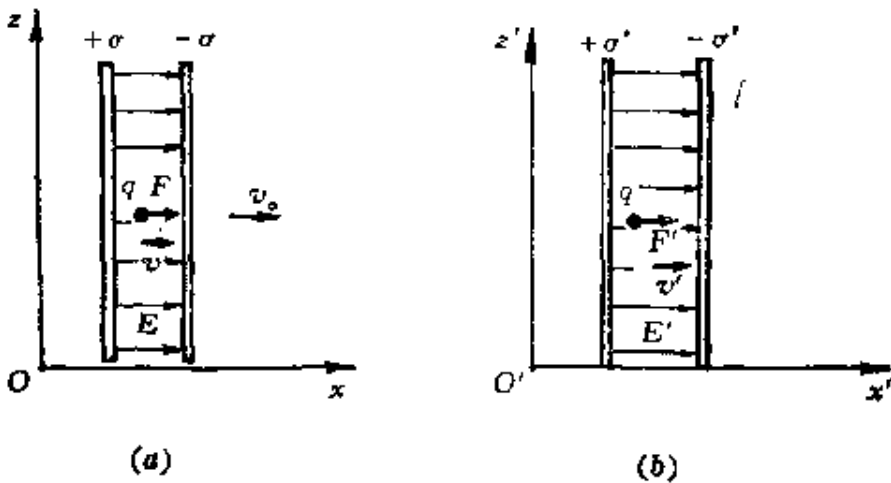
*§ 7.6 磁场是哪里来的？

在前面几节，我们研究了运动电荷和电流受磁场作用的规律。磁场的概念是为了研究运动电荷的相互作用引入的，并且用洛仑兹力公式给出了磁感应强度 B 的定义。至此，我们对磁场只是作了唯象的说明，尚未触及磁场的根源。一个运动的检验电荷受另一个运动电荷的作用力中与该检验电荷的速度相关的这项力是怎样出现的？而且不管该检验电荷的运动速度如何，怎么又都可以找到一个矢量 B 使电荷受的力能用洛仑兹力公式说明呢？特别值得注意的是，运动是相对的，一个电荷相对于某一参照系静止时，在此参照系内观察，另一运动电荷只受到这电荷的静电场的作用，并不受磁力。但在另一参照系内观察，这电荷可能是运动的，另一运动电荷除受到这电荷的电场力外，同时还受到磁场力的作用。那末，这磁场是哪里来的？

在解决这个问题时，你大概又会想到狭义相对论。是的，这个问题的解答和相对论有直接的关系。这里让我们引用 1952 年爱因斯坦回忆往事时说过的一段话：“我曾确信，在磁场中作用在一个运动物体上的电动力不过是一种电场力罢了，正是这种确信或多或少直接地促使我去研究狭义相对论。”下面我们就沿着这条思路

告诉你磁场是怎么出现的。

在用相对论研究运动电荷对运动电荷的作用时，我们处理问题的方法也是分两步：首先是求出场源电荷在其中静止的参照系 S' 中检验电荷所受的静电力；然后将此力变换回 S 系中，求出运动电荷对运动电荷的作用力。



(a) 在 S 系中 (b) 在 S' 系中

图 7.20 情形 1

下面从特殊到一般分几种情况讨论，仍利用带电的平行板作为场源。

情形 1: 设在 S 参照系中，两平行带电平板沿垂直于板面的方向，以恒定速度 $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{x}$ 运动，板间场强为 $\mathbf{E} = E \hat{x}$ ，另一电荷 q 在两板间以速度 $\mathbf{v} = v \hat{x}$ 运动，如图 7.20(a) 所示。让我们来求 q 受的力。

选择 S' 系，使平行带电平板在其中静止。 S' 系相对 S 系以速度 $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0$ 运动，而电荷 q 以速度 $\mathbf{v}' = v' \hat{x}'$ 运动如图 7.20(b) 所示。设 S' 系中两板间场强为 \mathbf{E}' ，由于 \mathbf{E} 与平板运动方向平行，故由场强变换式得

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}$$

在 S' 系中，电荷 q 受的力为静电力，由(2.17)式得

$$F'_x = qE' = qE, \quad F'_y = 0, \quad F'_z = 0$$

为了计算电荷 q 在 S 系中受的力，我们要用相对论力的变换公式(2.16)式。

因为在 S' 系中， q 的速度沿 x' 轴正方向，即 $\boldsymbol{v}' = v'_x \hat{x}'$ 根据力的变换式(2.16)，在 S 系中电荷 q 受的力为

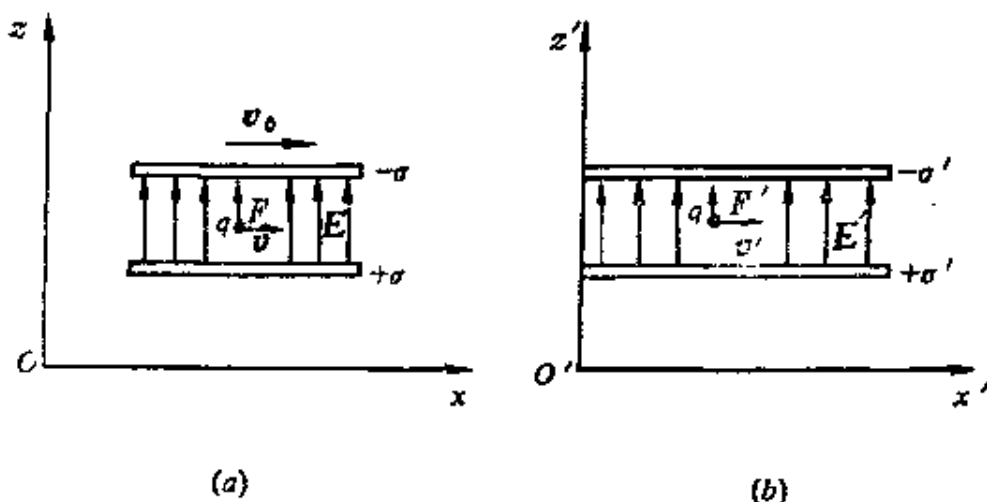
$$F_x = \frac{F'_x + \frac{\beta}{c} F'_x v'_x}{1 + \frac{\beta}{c} v'_x} = F'_x = qE, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0$$

或

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \quad (7.19)$$

如果在图 7.20 中，电荷 q 的速度沿 z 轴方向，即 $\boldsymbol{v} = v\hat{z}$ ，如上推导，也可得到上式的结果。这样看来，似乎电荷 q 受的力与场源电荷运动无关。但实际上并不总是这样。请看下面几种情况。

情形 2: 如图 7.21 所示，在 S 系中带电平行平板的速度为 $\boldsymbol{v}_0 = v_0 \hat{x}$ ，两板间电荷 q 的速度为 $\boldsymbol{v} = v \hat{x}$ 。在 S' 系中，平板静止， q 在两板间速度为 $\boldsymbol{v}' = v' \hat{x}'$ 。仍以 \boldsymbol{E} 和 \boldsymbol{E}' 分别表示在 S 和 S' 系中板间的场强。



(a) 在 S 系中

(b) 在 S' 系中

图 7.21 情形 2

在 S' 系中, 由场强变换式得

$$\mathbf{E}' = E' \hat{z}' = \frac{E}{\gamma_0} \hat{z} = \frac{E}{\gamma_0}$$

式中 $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$, 而 $\beta_0 = v_0/c$ 。在该系中 q 受力为

$$F'_x = 0, F'_y = 0, F'_z = E'q = Eq/\gamma_0$$

由相对论速度变换, q 在 S' 系中的速度为

$$v' = v'_x = \frac{v - v_0}{1 - \frac{vv_0}{c^2}}$$

再利用力的变换式(2.16), 将 F' 变换回 S 系中, 得

$$F_x = 0, F_y = 0$$

$$\left. \begin{aligned} F_z &= \frac{F'_z/\gamma_0}{1 + \frac{\beta}{c}v'_x} = \frac{F'_z}{\gamma_0 \left[1 + \frac{v_0}{c^2} \left(\frac{v - v_0}{1 - \frac{vv_0}{c^2}} \right) \right]} \\ &= \gamma_0 F'_z \left(1 - \frac{vv_0}{c^2} \right) = qE \left(1 - \frac{vv_0}{c^2} \right) = qE - \frac{qv v_0}{c^2} E \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

这一结果显示, 运动电荷受的力包含两项, 第一项 qE 只与电场强度有关而与电荷运动速度无关; 第二项 $\left(-\frac{qv_0 v}{c^2} E \right)$ 不仅与电场强度有关, 而且还与源电荷及受力电荷的速度有关。在上述情况下, 第一项力沿 z 轴正方向, 第二项沿 z 轴反方向。

情形 3: 如图 7.22 所示, 带电平行平板在 S 系中运动情况与

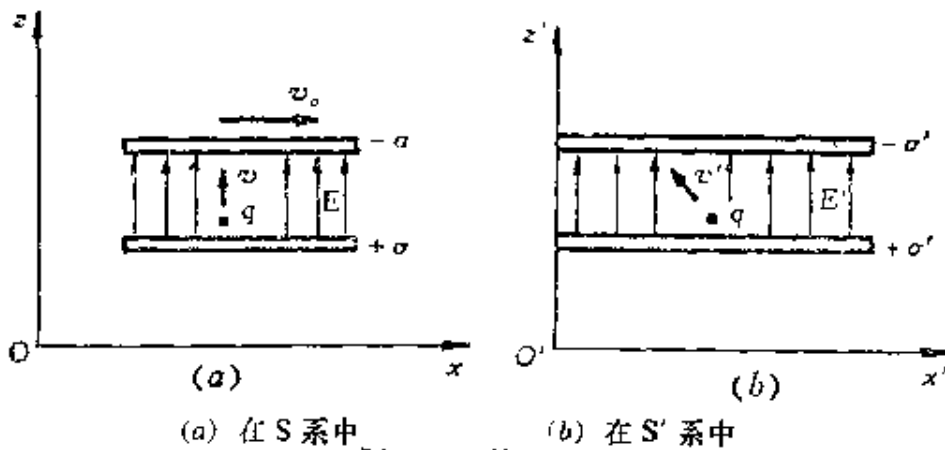


图 7.22 情形 3

情形 2 相同, 但电荷 q 的速度沿 z 轴方向为 $\boldsymbol{v} = v\hat{z}$ 。

在 S' 系中, q 受的力与情形 2 相同, 但速度关系为

$$v'_x = -v_0, \quad v'_z = v/\gamma_0$$

再由力的变换式(2.16)式求出在 S 系中 q 受的力为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \frac{\beta_0 F'_z v'_z}{1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2}} = \frac{\beta_0 Eqv}{\gamma_0^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)} = \frac{qv_0 v}{c^2} E \\ F_y &= 0 \\ F_z &= \frac{F'_z}{\gamma_0 \left(1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2}\right)} = \frac{qE}{\gamma_0^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)} = qE \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

这个结果也显示出, 运动电荷 q 受的力除了包含与速度无关的分量 qE 之外, 还包含了与速度有关的部分。后一部分 $\left(\frac{qv_0 v}{c^2} E\right)$ 与上述情形 2 的第二项力的大小相同, 但方向与 q 的运动方向垂直。

情形 4: 普遍的情况, 如图(7.23)所示, 带电平行平板在 S 系中以 $\boldsymbol{v}_0 = v_0 \hat{x}$ 运动, 但 \boldsymbol{v}_0 并不与板面平行, 板间有一电荷 q 以任一速度 $\boldsymbol{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$ 运动。 S' 系相对 S 系的速度为 \boldsymbol{v}_0 , 而电荷 q 在板间速度为 $\boldsymbol{v}' = v'_x \hat{x}' + v'_y \hat{y}' + v'_z \hat{z}'$ 。

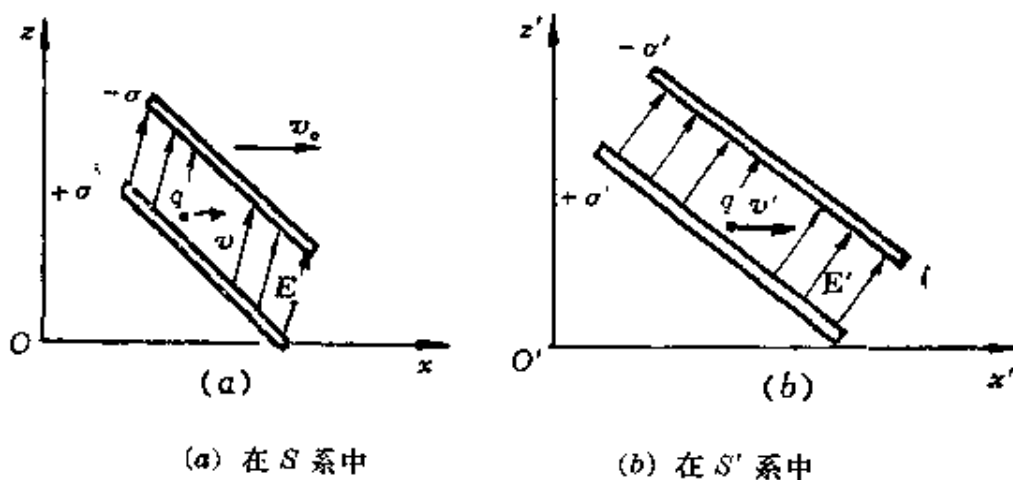


图 7.23 情形 4

在 S' 系中观察, 场强变换公式(2.6)给出

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = E_y/\gamma_0, \quad E'_z = E_z/\gamma_0$$

而 q 受的力为

$$F'_x = qE'_x = qE_x$$

$$F'_y = qE'_y = qE_y/\gamma_0$$

$$F'_z = qE'_z = qE_z/\gamma_0$$

电荷 q 在 S' 系中的速度为

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$$

将这些结果代入力的变换公式(2.16)式中, 即可得在 S 系中测得的 q 受的力应为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= qE_x + q(E_y v_y + E_z v_z) \frac{v_0}{c^2} \\ F_y &= qE_y - q \frac{v_0 v_x E_y}{c^2} \\ F_z &= qE_z - q \frac{v_0 v_x E_z}{c^2} \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

这就是一个运动电荷 q 受另外运动电荷的作用力的分量表达式, 这另外的运动电荷是上式中电场 E 的场源。这一公式清楚地说明, 运动电荷 q 受运动的源电荷的作用力 F 分为两部分: 第一部分, 即(7.22)式等号右侧第一项, 与电荷 q 的运动速度无关, 只由源电荷的电场决定。这一部分力可写作 qE , 它就是电力 F_e 。第二部分即(7.22)式等号右侧第二项, 它和源电荷的速度及其电场以及受力电荷的速度都有关系。

本来，对运动电荷之间的作用力都可按上述步骤借助于相对论变换求得，但这样作显然太繁了。如果我们对上述作用力中与速度有关的那部分力分析一下的话，就发现可以通过引入一种新的场来完整而简要地说明它。这种场正是我们通常叫做磁场的那种场。

读者可以验证，在这种情况下，如果认为表征磁场的强度的矢量 \mathbf{B} 用下式表示

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{E} \quad (7.23)$$

那么(7.22)式中与速度有关的那部分力就可表示为

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

(7.23)式中 \mathbf{v}_0 是场源电荷在某一参照系中的速度， \mathbf{E} 是这个电荷在该参照系中某点的电场强度，而 \mathbf{B} 就是该点的磁感应强度。

这样一来，作用于运动电荷上的总的力就可由下式给出

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

这正是洛仑兹力公式，而其中 \mathbf{F}_m 正是磁力。

(7.23)式揭示了磁场和电场之间的联系，磁场力实际上是一个运动电荷受另外的运动电荷的电场力的一部分。爱因斯坦的“磁力不过是电场的一种作用”的确信就这样被证明是正确的。

应该指出的是，我们得到上述的结论只是利用了高斯定律、电荷不变性和狭义相对论的结果。沿着这条思路继续走下去我们还可以证明：对于任一个电荷系统，在 S 系中观测，它在某一地点的电场和磁场以 $\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$ 和 $\mathbf{B}(B_x, B_y, B_z)$ 表示。在另一个相对于 S 系以速度 $\mathbf{v} = v\hat{x}$ 运动的参照系 S' 中，在相应地点的电场和磁场以 $\mathbf{E}'(E'_x, E'_y, E'_z)$ 和 $\mathbf{B}'(B'_x, B'_y, B'_z)$ 表示，则二者之间有下述关系：

$$\left. \begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - \beta c B_z), \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta c B_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z\right), \\ B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y\right) \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

这些公式更明显而全面地显示了电场和磁场的相互关系。就象洛仑兹变换公式显示了时间和空间的紧密联系而构成统一的时空一样，由(7.24)式也可以认为电场和磁场构成一个统一的实体。这一实体叫**电磁场**。电磁场有六个分量， $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ ，相对于不同的参照系，这六个分量可以有不同的数值，正象同一个矢量在不同参照系中可以有不同的分量一样。不过，用六个分量统一地表示电磁场时，它就不再能按矢量处理。这样的量称为**张量**。我们将不用张量的形式来继续讨论电磁场。在以后各章里，我们还是用老的办法，认为电磁场是由电场和磁场两种矢量场组成，研究它们各自的规律以及它们之间的联系。

本 章 提 要

1. **磁力**是运动电荷之间的相互作用。

2. **洛仑兹力公式**： $F = qE + qv \times B$

3. **安培力**：电流元受磁场的作用力

$$F = Idl \times B$$

载流线圈的磁矩： $p_m = IS$

载流线圈受磁场的力矩： $M = p_m \times B$

4. **霍尔效应**：在磁场中载流导体上出现横向电势差的现象。

*5. **磁场是电场的相对论效应**：作匀速运动(速度为 v_0)的电荷的磁场和电场的相互联系

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{E}$$

思 考 题

7.1 宇宙射线是高速带电粒子流(基本上是质子),它们交叉来往于星际空间并从各个方向撞击着地球。为什么宇宙射线穿入地球磁场时,接近两磁极比其他任何地方都容易?

7.2 如果我们想让一个质子在地磁场中一直沿着赤道运动,我们是向东发射它呢?还是向西?

7.3 赤道处的地磁场沿水平面并指向北。假设大气电场指向地面,因而电场和磁场相互垂直。我们必须沿什么方向发射电子,使它的运动不发生偏斜?

7.4 能否利用磁场对带电粒子的作用力来增大粒子的动能?

7.5 当带电粒子由弱磁场区向强磁场区作螺旋运动时,平行于磁场方向的速度分量如何变化?动能如何变化?垂直于磁场方向的速度分量如何变化?

7.6 一根长直导线周围有不均匀磁场,今有一带正电粒子平行于导线方向射入这磁场中,它此后的运动将是怎样的?轨迹如何?(大致定性说明)

7.7 相互垂直的电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 可做成一个带电粒子速度选择器。试述其中道理。

7.8 在磁场方向和电流方向一定的条件下,导体所受的安培力的方向与载流子的种类有无关系?霍尔电压的正负与载流子的种类有无关系?

7.9 图 7.24 显示出在一汽泡室中产生的一对正、负电子的轨迹图,磁场垂直于图面而指离读者。试分析哪一支是电子的轨迹,哪一支是正电子的轨迹?为何轨迹呈螺旋形?

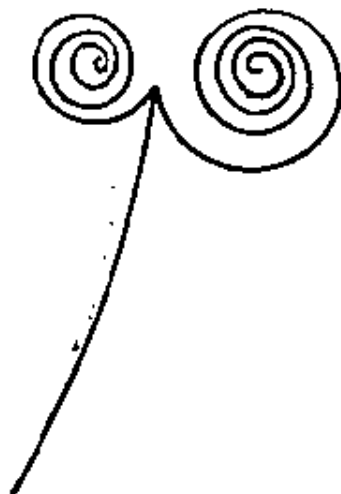


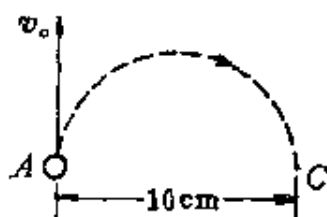
图 7.24

习 题

7.1 某一粒子的质量为 0.5g , 带有 $2.5 \times 10^{-13}\text{C}$ 的电荷。这一粒子获得

一初始水平速度 $6.0 \times 10^4 \text{ m/s}$, 若利用磁场使这粒子仍沿水平方向运动, 则应加的磁场的磁感应强度的大小和方向各如何?

7.2 如图 7.25, 一电子经过 A 点时, 具有速率 $v_0 = 1 \times 10^7 \text{ m/s}$, 试求:



(1) 欲使这电子沿半圆自 A 至 C 运动, 所需的磁场大小和方向;

(2) 电子自 A 运动到 C 所需的时间。

图 7.25

7.3 把 $2.0 \times 10^3 \text{ eV}$ 的一个正电子, 射入磁感应强度 $B = 0.1 \text{ T}$ 的匀强磁场中, 其速度矢量与 B 成 89° 角, 路径成螺旋线, 其轴在 B 的方向。试求这螺旋线运动的周期 T , 螺距 h 和半径 r 。

7.4 估算地球磁场对电视机显象管中电子束的影响。假设加速电势差为 $2.0 \times 10^4 \text{ V}$, 如电子枪到屏的距离为 0.4 m , 试计算电子束在大小为 $0.5 \times 10^{-4} \text{ T}$ 的横向地磁场作用下约偏转多少? 假定没有其他偏转磁场。这偏转是否显著?

7.5 安培秤如图 7.26 所示, 它的一臂下面挂有一个矩形线圈, 线圈共有 n 匝。它的下部悬在一均匀磁场 B 内, 下边一段长为 l , 它与 B 垂直。当线圈的导线中通有电流 I 时, 调节砝码使两臂达到平衡; 然后使电流反向, 这时需要在一臂上加质量为 m 的砝码, 才能使两臂再达到平衡。(设 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$)。

(1) 写出求磁感应强度 B 的大小的公式;

(2) 当 $l = 10.0 \text{ cm}$, $n = 5$, $I = 0.10 \text{ A}$, $m = 8.78 \text{ g}$ 时, $B = ?$

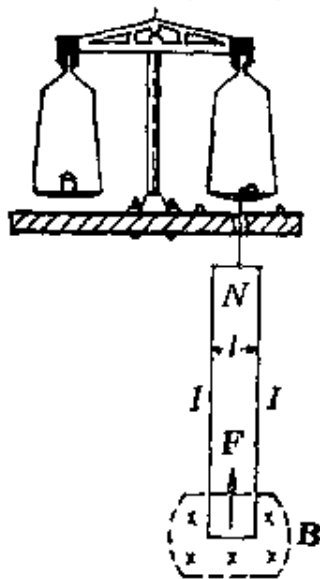


图 7.26

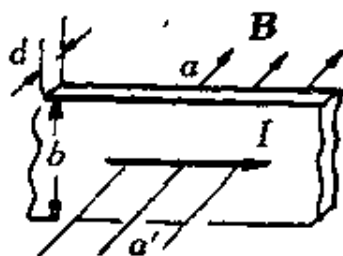


图 7.27

7.6 如图 7.27 所示, 一铜片厚为 $d=1.0\text{ mm}$, 放在 $B=1.5\text{ T}$ 的磁场中, 磁场方向与铜片表面垂直。已知铜片里每立方厘米有 8.4×10^{22} 个自由电子, 每个电子的电荷 $-e=-1.6\times 10^{-19}\text{ C}$, 当铜片中有 $I=200\text{ A}$ 的电流流通时,

- (1) 求铜片两侧的电势差 $U'_{AA'}$;
- (2) 铜片宽度 b 对 $U'_{AA'}$ 有无影响? 为什么?

7.7 一块半导体样品的体积为 $a\times b\times c$, 如图 7.28 所示, 沿 x 方向有电流 I , 在 z 轴方向加有均匀磁场 B 。这时实验得出的数据 $a=0.10\text{ cm}$, $b=0.35\text{ cm}$, $c=1.0\text{ cm}$, $I=1.0\text{ mA}$, $B=3000\text{ G}$, 片两侧的电势差 $U'_{AA'}=6.55\text{ mV}$ 。

- (1) 问这半导体是正电荷导电 (p 型) 还是负电荷导电 (n 型)?
- (2) 求载流子浓度。

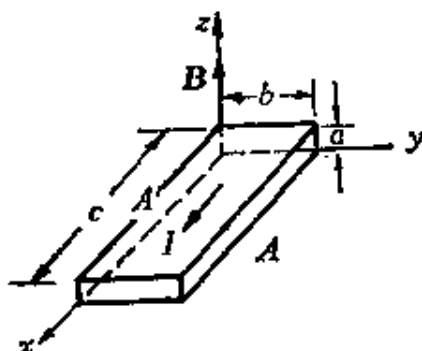


图 7.28

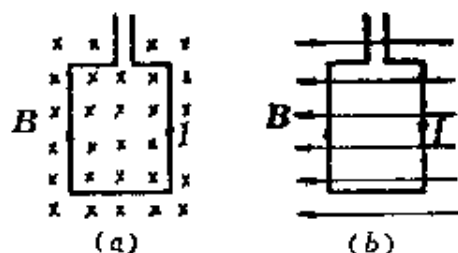


图 7.29

7.8 一正方形线圈由外皮绝缘的细导线绕成, 共绕有 200 匝, 每边长为 150 mm , 放在 $B=4.0\text{ T}$ 的外磁场中, 当导线中通有 $I=8.0\text{ A}$ 的电流时, 求:

- (1) 线圈磁矩 p_m 的大小;
- (2) 作用在线圈上的力矩的最大值。

7.9 一矩形线圈长 20 mm , 宽 10 mm , 由外皮绝缘的细导线密绕而成, 共绕有 1000 匝, 放在 $B=1000\text{ G}$ 的均匀外磁场中, 当导线中通有 100 mA 的电流时, 求图 7.29 中两种情况下线圈每边所受的力与整个线圈所受的力和力矩:

- (1) B 与线圈平面的法线重合(图 7.29a);
- (2) B 与线圈平面的法线垂直(图 7.29b)。

7.10 掺磷的硅片是 n 型半导体, 这种半导体中的电子浓度是 2×10^{21} 个/ m^3 , 电阻率是 $1.6\times 10^{-2}\Omega\cdot\text{m}$ 。用这种硅作成霍尔探头以测量磁场。硅

片的尺寸相当小,是 $0.5\text{cm} \times 0.2\text{cm} \times 0.005\text{cm}$ 。将此片长度的两端接入电压为 1V 的电路中。当探头放到磁场某处并使其最大表面与磁场某方向垂直时,测得 0.2cm 宽度两侧的霍尔电压是 1.05mV 。求磁场中该处的磁感应强度。

7.11 一个平面圆形载流线圈,半径为 R ,通电流 I 。把它放到一均匀磁场 \mathbf{B} 中,使线圈平面与磁场平行,用电流元所受力矩的积分求出此线圈受的磁力矩,并验证它也等于线圈的磁矩与磁场 \mathbf{B} 的矢量积。

*7.12 证明(7.24)式的两个特例:

(1) 如果在 S' 系中电荷系统不产生磁场,即到处 $\mathbf{B}'=0$,则在 S 系中可观察到电场。它和磁场的关系为

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}$$

(2) 如果在 S' 系中电荷系统不产生电场,即到处 $\mathbf{E}'=0$,则在 S 系中可观测到电磁。它和磁场的关系

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

*7.13 沿参照系 S 的 x 轴放置一长金属导线,通有电流。其中正电荷不动,其线密度为 λ ,负电荷以速度 $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{x}$ 运动,线密度为 $-\lambda$ 。一质子在 z 轴上 $z=a$ 处以速度 $\mathbf{v} = v \hat{x}$ 越过。证明此时刻

(1) 在 S 系中质子受电流的作用力为磁力

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 \lambda e v_0 v}{2\pi a} \hat{z};$$

(2) 在质子静止的参照系 S' 中,由于导线缩短,使得线电荷密度为

$$\lambda'_+ = \lambda / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \lambda'_- = -\lambda \left(1 - \frac{v_0 v}{c^2}\right) / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

从而总线电荷密度 $\lambda' = \lambda v_0 v / c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。

(3) 质子在 S' 系中受的力为电力

$$\mathbf{F}' = \frac{\lambda e v_0 v}{2\pi \epsilon_0 a c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(4) 利用(2.16)式由 \mathbf{F}' 求 \mathbf{F} 与(1)中结果相同。

IV 磁流体发电

磁流体发电是本世纪50年代末开始进行实验研究的一项新技术。磁流体发电机的电动势是等离子体通过磁场时,其中正、负带电粒子在磁场作用下相互分离而产生的。在普通发电机中,电动势是由线圈在磁场中转动产生。为此必须先把初级能源(化学燃料或核燃料)燃烧放出的热能经过锅炉、热机等变成机械能,然后再变成电能。在磁流体发电机中,是利用热能加热等离子体,然后使等离子体通过磁场产生电动势而直接得到电能,不经过热能到机械能的转变,从而可以提高热能利用的效率。这是磁流体发电的特点,也是人们对它感兴趣的主要原因。

磁流体发电机的主要结构如图IV.1所示。在燃烧室中利用燃料燃烧的热能加热气体使之成为等离子体,温度约为 3000 K (为了加速等离子体的形成,往往在气体中加一定量的容易电离的碱金属,如钾元素作“种子”)。然后使等离子体进入发电通道。发电

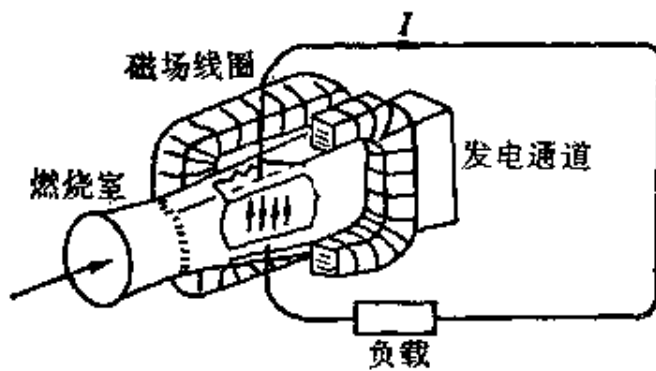
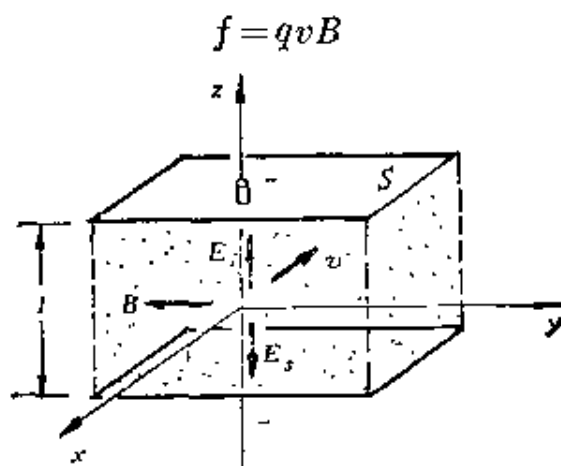


图 IV.1 磁流体发电机结构示意图

通道的两侧有磁极以产生磁场,其上、下两面安有电极。等离子体通过通道时,两电极间就有电动势产生。离开通道的气体成为废气,它的温度仍然很高,可达 2300K。这废气可以导入普通发电厂的锅炉,以便进一步加以利用。废气不再回收的磁流体发电机称为**开环系统**。在利用核能的磁流体发电机内,气体-等离子体是在闭合管道中循环流动反复使用的,这样的发电机称为**闭环系统**。

磁流体发电机产生电动势,输出电功率的原理如下。如图IV.2所示,设磁场沿 $-y$ 方向,而等离子体以速率 v 沿 $-x$ 方向流动。带电粒子在运动中要受到洛仑兹力而上、下分离,这力的大小为



图IV.2 磁流体发电机原理

这是一种非静电力,相当于一个外来场强 E_i ,而

$$E_i = \frac{f}{q} = vB$$

以 l 表示两电极之间的距离,则可得此发电机的电动势为

$$\mathcal{E} = E_i l = vBl$$

由于洛仑兹力的作用,正、负电荷将在上、下两电极积累,因而在等离子体内又形成一静电场 E_s 。在两极间的总场强为

$$E = E_i - E_s$$

以 σ 表示等离子体的电导率,则通过等离子体的电流密度(从负极

向正极)为

$$j = \sigma(E_i - E_s)$$

以 S 表示电极的面积, 则总电流为

$$I = \sigma S(E_i - E_s)$$

发电机输出的总功率为

$$\begin{aligned} P &= IE_s l = \sigma(E_i - E_s)E_s S l \\ &= \sigma(vB - E_s)E_s V \end{aligned}$$

式中 $E_s l$ 为发电机两极的端电压, $V = Sl$ 为电极间总体积。

令 $K = \frac{E_s}{vB}$, 则上式可写成

$$P = \sigma v^2 B^2 (1 - K) K V$$

此式当 $K = 1/2$ 时有最大值。因此, 磁流体发电机的输出功率的最大值由下式决定

$$P_{\max} = \frac{1}{4} \sigma v^2 B^2 V$$

1959年, 美国阿夫柯公司建造了第一台磁流体发电机, 功率为 115kW。此后各国均有研究制造, 美苏联合研制的磁流体发电机 U-25B 在 1978 年 8 月进行了第四次试验, 气体-等离子体流量为 2—4 kg/s, 温度为 2950K, 磁场为 5 T, 输出功率 1300kW, 共运行了 50 小时。目前许多国家正在研制百万千瓦的磁流体发电机。

现在磁流体发电机制造中的主要问题是: 发电通道效率低, 目前只有 10%。通道和电极的材料都要求耐高温、耐碱腐蚀、耐化学烧蚀等。目前所用材料的寿命都比较短, 因而使磁流体发电机不能长时间运行。

B. 等离子体

B.1 物质的第四态

随着温度的升高,一般物质依次表现为固体、液体和气体。它们统称物质的三态。当气体温度进一步升高时,其中许多,甚至全部分子或原子将由于激烈的相互碰撞而离解为电子和正离子。这时物质将进入一种新的状态,即主要由电子和正离子(或是带正电的核)组成的状态。这种状态的物质叫**等离子体**。它可以称为物质的第四态。

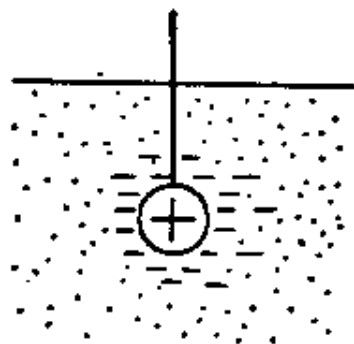
宇宙中99%的物质是等离子体。太阳和所有恒星、星云都是等离子体。只是在行星,某些星际气体或尘云中人们发现有固体、液体或气体。但是这些物体只是宇宙物质的很小的一部分。在地球上,天然的等离子体是非常稀少的。这是因为等离子体存在的条件和人类生存的条件是不相容的。在地球上的自然现象中,只有闪电、极光等等等离子体现象。地球表面以上约50千米到几万千米的高空存在一层等离子体,叫**电离层**,它对地球的环境和无线电通讯有重要的影响。近代技术越来越多地利用人造的等离子体,例如霓虹灯、电弧、日光灯内的发光物质都是等离子体。火箭体内燃料燃烧后喷出的火焰,原子弹爆炸时形成的火球也都是等离子体。

通常的气体中也可能会有电子和正离子。但它不是等离子体。把气体加热使之温度越来越高,它就可以转化为等离子体。但是,

通常气体和等离子体的转化并没有严格的界限。它不象固体溶解或液体汽化那么明显。例如,蜡烛的火焰就处于一种临界状态,其中电子和离子数多时就是等离子体,少时就是一般的高温气体。高温气体和等离子体的主要差别在于其电磁特性。等离子体因为具有大量的电子和正离子而成为良好的导体,宏观电磁场对它有明显的影响,高温气体是绝缘体,它对电磁场几乎没有什么反应。

等离子体中有大量的电子和正离子,但总体来讲它是电中性的。作为等离子体,它内部的电子和正离子数目必须足够大以致于不会发生局部的正或负电荷的集中,从而导致电中性的破坏。如果由于偶然的原因,例如,在某处形成了正电荷的集中。它附近的负电荷会被吸引而很快地移过来,从而又恢复了该处的电中性。这就是说,尽管在等离子体中有大量的正电荷和负电荷,但这些电荷之间的相互作用总是要使等离子体内保持宏观的电中性。

我们知道,在静电条件下,一个良导体内部电场是等于零的,它的表面的感应电荷使导体能屏蔽其内部,使不受电场的作用。作为导体的等离子体也有这种性质。设想在等离子体中插入一个,譬如说,带正电的导体(它的表面涂有一层绝缘介质膜使之不和等离子体直接接触)(图B.1),这时等离子体中的电子就会迅速向带电体靠近,最后在导体表面外将形成一层负电荷,从而屏蔽了等离子体内部使不受带电体电场的作用。由于电子的热运动,带电体表面外等离子体内的电荷层是有一定厚度的,而这一厚度随温度的升高而增大。只是



图B.1 等离子体的屏蔽作用

在层内,带电体所带电荷才对等离子体有影响。对于层外的等离

子体内部,带电体的电荷不发生任何作用,在这里也没有宏观电场存在。

上述带电体外有净电荷的等离子层的厚度叫做**屏蔽距离或德拜距离**,它由下面公式给出

$$D = \sqrt{\frac{e_0 k T}{n e^2}} \quad (\text{B. 1})$$

式中 n 是单位体积内的电子数, T 是这些电子的温度, k 为玻耳兹曼恒量。这一距离决定了外电场能深入到等离子体内的程度,也给出了等离子体内由于热运动而可能引起的局部偏离电中性的空间尺寸。对于线度大于德拜距离的等离子体,它将保持宏观的电中性,因为任何电荷的集中将会很快地被一相反的电层所包围,从而恢复电中性。因此,德拜距离可以作为判定等离子体的一个判据。当电离气体的线度远大于德拜距离时,它就是一个等离子体。例如在普通氖管中,电离气体的电子数密度约为 $10^9/\text{cm}^3$,这些电子的温度为 $2 \times 10^4 \text{K}$ 。由(B.1)式可算出德拜距离为

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\frac{8.85 \times 10^{-12} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 2 \times 10^4}{10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}} \\ &= 3 \times 10^{-4} \text{m} = 0.3 \text{mm} \end{aligned}$$

因此,只要氖管的尺寸大于几毫米,其中的电离气体就成了等离子体了。

在上面的计算中用了电子温度为 $2 \times 10^4 \text{K}$ 这个数据,即电子温度为两万度。这似乎不符合事实,然而事实上正是这样。这是因为在等离子体中同时有两种温度,一是电子的温度,一是正离子的温度。在氖管中,前者可达 $2 \times 10^4 \text{K}$,而后者只有 $2 \times 10^3 \text{K}$ 。所以有这种区别要归因于电子和离子之间的能量交换。由于电子比较轻快,正离子比较笨重,所以等离子体中的电流基本上是电子运动形成的。因此电子得到了几乎全部外电源供给的能量,所以达

到了较高的温度。正离子基本上只能间接地通过和电子碰撞从电子那里得到能量。但是根据力学原理，质量小的质点和质量大的质点碰撞时，质量小的质点的能量几乎没有损失，因此，正离子从与电子碰撞中得到能量是很少的，所以它们的温度就很难升高。（当然，经过相当一段时间，通过碰撞，电子和正离子会达到热平衡而具有相同的温度。但是，现代技术中所获得的等离子体存在的时间往往比电子和正离子达到热平衡所需要的时间短很多，因此，在等离子体存在的期间内，其中总有两种不同的温度）。

表 B.1 列出了几种等离子体。其中大多数是发光的，但也有些不发光，如地球的电离层、日冕、太阳风等。它们所以不发光，是因为构成它们的等离子体太稀薄，以致不能发出足够多的能量，尽管它们的温度很高。

表 B.1 几种等离子体

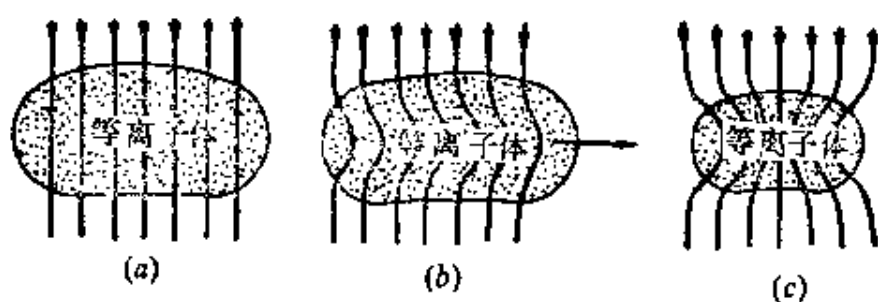
等离子体	电子温度(K)	电子数密度(cm^{-3})
太阳中心	2×10^7	10^{25}
太阳表面	5×10^3	10^8
日 冕	10^6	10^8
聚变实验(托克马克)	10^8	10^{14}
原子弹火球	10^7	10^{20}
太阳风	10^5	5
闪电	3×10^4	10^{18}
辉光放电(氖管)	2×10^4	10^9
地球电离层	2×10^3	10^9
一般火焰	2×10^3	10^8

B.2 等离子体内的磁场

在实验室里或自然界里等离子体多处于磁场之中。这磁场可

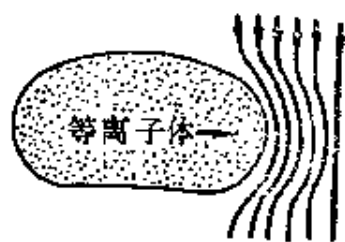
能是外加的,也可能是通过等离子体本身的电流产生的。由于等离子体是良导体,所以其内部不能有电场存在。但是可以有磁场。不但如此,而且由法拉弟电磁感应定律,变化的磁场会感应出电场,不能有电场就要求等离子体内部的磁场不能发生改变。这就是说,等离子体内部一旦具有了磁场,这磁场将不再发生变化,这种现象叫磁场在等离子体内部的冻结。也可以用楞次定律来解释这一现象。设想等离子体内磁场要发生变化,当它刚一开始变化时,就会感应出一个电流,这电流的磁场和原磁场的叠加正好使原磁场不发生改变。

由于磁场的冻结,所以当等离子体在磁场中运动时,体内的磁力线会跟着等离子体一起运动,如图B. 2(b)所示(图B. 2a是一块等离子体静止于磁场中的情形)。更有甚者,当等离子体被压缩时,其中的磁力线也被压缩(图B. 2c)



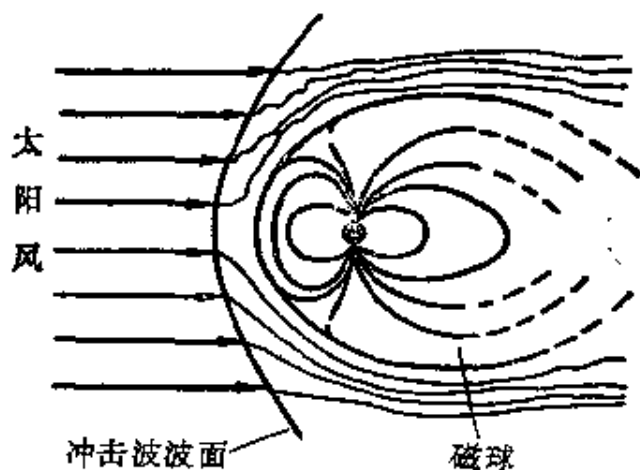
图B. 2 磁场在等离子体中的冻结

由于等离子体内的磁场不会发生变化,所以将一块内部没有磁场的等离子体移入磁场中时,它会挤压磁力线使之变形,如图B. 3所示。这也可以由楞次定律说明。磁场刚要进入等离子体中时,就感应出了电流,这电流的磁场和原磁场的叠加使等离子体内部磁场仍保持为零,而外部合磁场的磁力线变成了扭曲的形状。



图B. 3 等离子体挤压磁力线

等离子体排挤磁场的性质对地磁场的形状有重要的影响。不受外界影响时，地磁场应是一个磁偶极子的磁场，对于地磁场具有轴对称分布。实际上由于太阳风的作用，这磁场大大地变形了。太阳风是由电子和质子组成的中性等离子体。它由太阳向四外发射，速度可达 400 km/s 。吹向地球的太阳风将改变地磁场的形状：面向太阳的一面被压缩，背向太阳的一面被拉长（图B.4）。地磁场所占据的空间叫磁球。由于太阳风的作用，磁球不再呈球形，而是象一个拉长了的雨滴，尾部可以延伸至几十万千米远处。



图B.4 地球的磁球

可以附带指出的是，由于地球相对于太阳风的速度 (400 km/s) 远大于太阳风中声波传播的速度，所以这一相对运动会在太阳风中产生激波，正象超音速飞机在空气中引起的激波一样。图B.4中也画出了这一激波的波面。

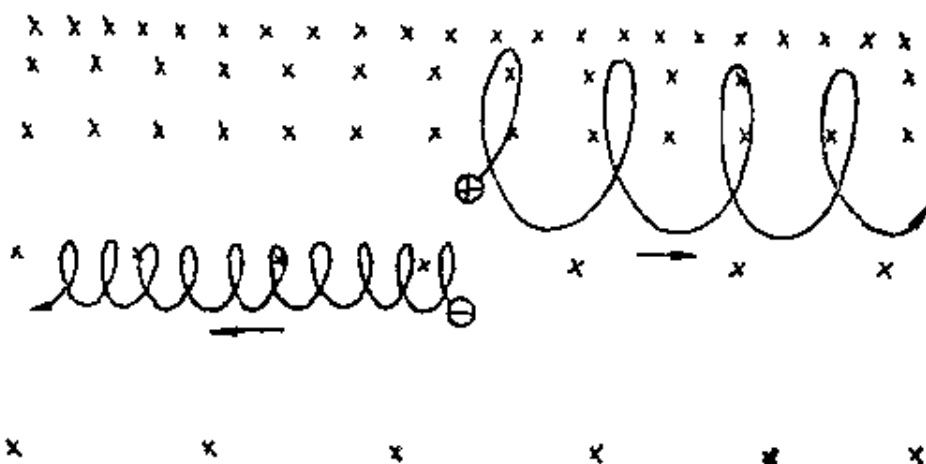
B.3 磁场对等离子体的作用

等离子体中的电子和正离子都在作高速运动，因此磁场会对这些粒子有作用，这些作用宏观上表现为对整个等离子体的作用。

运动电荷在磁场作用下的运动情况在第七章中已讨论过了。

在匀强磁场中,带电粒子要绕磁力线作**旋转运动**(参看图7.10)。在非均匀磁场中,作螺旋运动的带电粒子会受到与磁场方向相反的力的作用,因而要被推向磁场较弱的区域,这就是**磁镜**的原理(参看图7.13)。这是非均匀磁场对沿磁力线方向运动的带电粒子的影响。

由于非均匀磁场的作用,运动的带电粒子还会发生一种垂直于磁场方向的**漂移**。如图B.5所示,非均匀磁场的方向垂直纸面指离读者,上强下弱。设正离子或电子初速度的方向和磁场方向垂直。由于洛仑兹力的作用,它们还是要作回旋运动,但与均匀磁场的情形不同,在磁场强的地方,回旋半径小,在磁场弱的地方,回旋半径大,即粒子在磁场强的地方拐弯较快,在磁场弱的地方拐弯较慢。其结果,粒子的运动轨迹不再是一个封闭的圆周,而成了一个有回折的振荡曲线。每一次“振荡”中,粒子在弱磁场区域经历的时间和路程都比在强磁场区长。这也表示磁场要把带电粒子推向磁场较弱的区域。更为突出的是这种不均匀磁场的作用使运动粒子发生了垂直于磁场方向的移动,这一移动叫做**漂移**。值得注意的是正离子和电子的横向漂移的方向是**相反**的。这将导致等离子体中正负电荷的**分离**,从而影响等离子体的稳定性。



图B.5 正离子和电子在非均匀磁场中的横向漂移

以上讨论的磁场都是“外加”的。当等离子体中有电流流过

时,这电流也产生磁场,而等离子体也会受到本身的电流的磁场的
作用。图 B.6画出了一个通有纵向电流的等离子体圆柱。不但圆
柱体外有磁场,而且圆柱体内也有磁场。在圆柱体内的磁场是沿
径向向外逐渐增强的。根据上面讲的在不均匀磁场中,运动的带
电粒子总要被推向磁场较弱的区
域的规律,等离子体柱有向中心
收缩的趋势。或者说等离子体受
到了自身电流的磁场的收缩。这
种现象叫 **箍缩效应**。

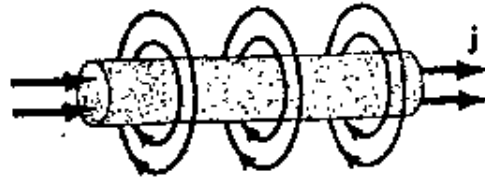


图 B.6 箍缩效应

在等离子体中有电流流过时,在严格的条件下,箍缩效应所产
生的压缩等离子体的压强和等离子体中粒子热运动产生的扩张的
压强相平衡。这时等离子体柱处于平衡的状态。但这一平衡是非
常不稳定的。如果等离子体柱由于某种偶然的原因产生一微小的
变形,那它就会迅速继续扩大以致平衡最终被破坏。例如,当一
等离子体圆柱由于某种原因产生一个小小的弯曲时,那么在弯曲部
位,凹侧的磁场就会比凸侧的磁场强。由于等离子体要被磁场推向
磁场较弱的区域,这等离子体柱将更加弯曲。越来越严重的弯曲
最终将使等离子体消散。这种情况叫做“**扭曲不稳定性**”(图B.7)。
又例如,若等离子体柱由于某种原因造成粗细略有不均匀,那么在
细的部位的磁场要比粗的部位的强。磁场的作用将促使细的部位



图 B.7 扭曲不稳定性

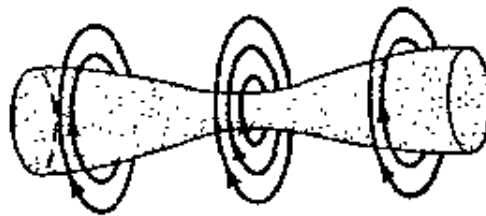


图 B.8 腊肠不稳定性

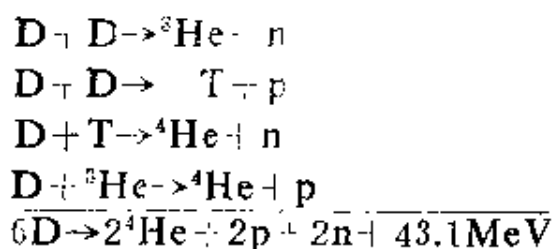
进一步变细,以至最后发展到这个部位等离子体柱被截断。这种
情况叫做“**截断不稳定性**”或“**腊肠不稳定性**”。(图B.8)

还有其它很多的不稳定性。由于这些不稳定性，人造的等离子体常常是在极短时间内(百万分之一秒)就分崩离析了。如何使等离子体保持较长时间的稳定，目前仍是等离子体物理学中一个重要的研究课题。

B.4 热核反应

热核反应，或原子核的聚变反应，是当前很有前途的新能源。在这种反应中几个较轻的核，譬如氘核(D，包含一个质子和一个中子)或氚核(T，包含一个质子和两个中子)结合成一个较重的核，如氦核，同时放出巨大的能量。这种能源之所以诱人，首先是因为自然界中有大量这种燃料存在。天然的氘存在于重水的分子(HDO)中，而海水中大约有0.03%是重水。氚具有放射性，在自然界中没有天然的氚，但它可以在反应堆中用中子轰击锂原子而产生。海水中氘的储量估计能满足人类十亿年的所有能量的需求，而地壳中锂的含量也足够人类使用一百万年。聚变能源的另一特点是它放出的能量多，例如1千克的氘聚变时放出的能量约等于1千克的铀裂变时放出的能量的4倍。另外，聚变比较“干净”，它的生成物是无害的核(放出的中子可以用适当材料吸收掉)，不象铀核裂变那样生成许多种放射性核。

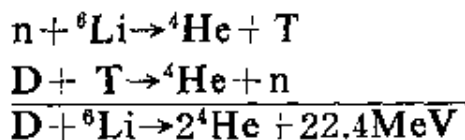
最易实现的聚变反应是氘-氘反应和氘-氚反应。氘-氘反应实际上是由四步组成的，它们是



总结果是六个氘核反应生成两个氦核、两个质子、两个中子和43.1

MeV的能量。

氘—氘反应需要有锂核参加,它分两步进行



总结结果是氘核和锂核反应生成氦核和 22.4MeV 的能量,氘核只是在中间过程中出现。氘—氘反应比氘—氘反应在技术上要复杂得多,但由于前者的点火温度比较低,所以被认为是一种更有希望的聚变反应。

不论是氘—氘反应,还是氘—氘反应,都是带正电的原子核相结合的反应。由于核之间的库仑斥力很大所以参加反应的核必须具有很大的动能。增大核的动能的唯一可行的方法是通过热运动,因此,参加反应的物质必须具有很高的温度。这一温度就叫做聚变的**点火温度**。对氘—氘反应,所需温度约为 $5 \times 10^8\text{K}$,对氘—氘反应,所需温度约为 $1 \times 10^8\text{K}$ 。这样的温度都比太阳中心的温度高。因此这些聚变反应又叫做**热核反应**。在这样高的温度下,氘和氘的原子都已经完全电离成原子核和电子了。所以参与聚变反应的物质是等离子体。

引发核聚变是需要供给能量使燃料达到其点火温度的。不但如此,要建成一个有实用价值的反应器,就必须使热核反应放出的能量至少要和加热燃料所用的能量相等。为达到这一目的,就必须增加核燃料的密度。同时,由于等离子体极不稳定,所以还必须设法延长等离子体存在的时间。燃料核的密度越大,它们之间碰撞的机会越多,反应就越充分。在一定燃料核密度下,稳定时间越长,反应也越充分。反应越充分,释放的能量就越多。计算表明要使热核反应器成为一个自行维持反应的系统的条件是:

$$n(\text{离子数密度}) \times \tau(\text{稳定时间}) \geq \text{常数} \quad (\text{B. 2})$$

这一条件称为**劳逊条件**。如果式中 n 表示每立方厘米的离子数，时间用秒计算，则对氘—氘反应，式中的常数为 5×10^{16} ，对于氘—氚反应，这一常数为 2×10^{14} 。因此，对于氘—氘反应，如果等离子体的密度为 10^{14}cm^{-3} ，则至少需要它稳定2秒钟。如果等离子体的密度为 10^{23}cm^{-3} ，则稳定时间可以减小到 2×10^{-8} 秒。

B. 5 等离子体的约束

如上所述要产生有效的热核反应，需要燃料等离子体处于很高的温度，同时还要维持等离子体存在一定的时间。这两方面的要求都是很难达到的。这正是受控热核反应所要解决的问题。

要使热核反应在某种装置内进行，首先碰到的问题是要把超高温等离子体盛放在一定的容器中。任何实际的固体容器都不能用来盛放这种等离子体，因为到 4000°C 以上的温度时，现有的任何耐火材料都会溶化。现在技术中用来盛放或约束等离子体的方法是借助于磁场来实现的。

最简单的约束等离子体的磁场设计是第七章 § 7.3 讲过的**磁瓶**。它两端的磁场比中间的磁场强，形成了两个能反射等离子体中的电子和正离子的磁镜，因而把等离子体限制在这样的磁瓶中。但是，由于磁场对沿磁力线方向运动的离子没有力作用，所以，实际上，离子和电子还是有可能从两端泄漏出去的。

为了避免等离子体从磁瓶的两端泄漏，人们设计了**环形磁瓶**来约束等离子体。它实际上是一个环形螺线管(图B.9)，通以电流后在其内部形成封闭的环向磁场。在这无头无尾的磁场内，人们期望等离子体中的粒子会无休止地绕磁力线旋进，从而实现稳定的约束。但事实上达到稳定的约束很难。因为在环管的截面上磁场的分布实际上是不均匀的，内侧强而外侧弱。这不均匀磁场将

把等离子体推向环管的外侧壁上,从而使其失去约束。

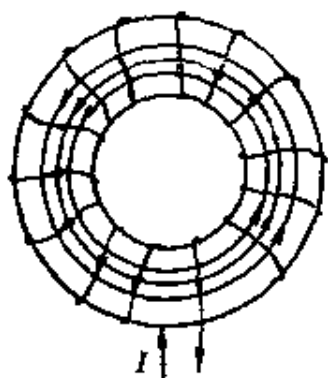


图 B.9 环状磁瓶

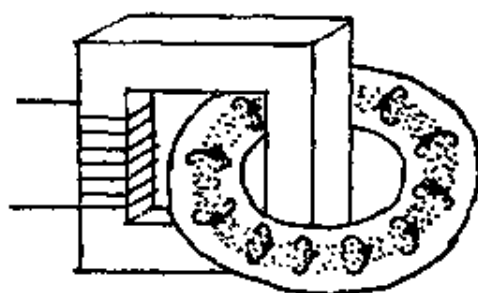


图 B.10 环形箍缩装置

前面讲过电流通过等离子体时,其磁场对等离子体本身的箍缩效应也可以用来约束等离子体。根据这一原理设计的装置如图 B.10 所示。一个变压器的原线圈通过一个开关与一组高压电容器相连。另有一个环形反应室作为变压器的副线圈。首先向反应室内充入等离子体热核燃料。然后合上开关。这时预先充了电的电容器立即通过变压器的原线圈放电,从而产生强大的脉冲电流。同时在环状反应室内的等离子体中感应出更为强大的电流(可达一百万安培)。这电流将对等离子体自身产生箍缩压力,而使等离子体约束在一个环内。在这一过程中,还由于强大的电流通过等离子体而起起了加热作用,使等离子体温度进一步升高。同时由于等离子体环受箍缩变细而提高了等离子体的密度。这都有利于实现等离子体热核燃料的点火。但是这种装置也还未实现人们的理想。原因是它在环的截面上的磁场分布也是不均匀的。另外这种磁场箍缩容易被扭曲不稳定性或腊肠不稳定性等不稳定因素破坏。

为了进一步接近产生受控热核反应的条件,就把上述环形磁瓶装置和环形箍缩装置结合起来。这也就是在环形箍缩装置中的环形反应室外面再绕上线圈,并通以电流(图 B.11)。这样,当

合上变压器的原线圈上的开关后，在反应器内就会有两种磁场：一种是轴向的 (B_1)，它由反应室外面的线圈中的电流产生；另一种是圈向的 (B_2)，它由等离子体中的感应电流产生。这两种磁场的叠加形成螺旋形的总磁场 (B)。理论和实验都证明，约束在这种磁场内的等离子体，稳定性比较好。在这种反应器内，粒子除了由于碰撞而引起的横越磁力线的损失外，几乎可以无休止地在环形室内绕磁力线旋进。由于磁力线呈螺旋形或扭曲形，在绕环管一周后并不自相闭合，所以粒子绕磁力线旋进时会一会儿跑到环管内侧，一会儿跑到环管外侧，总徘徊于磁场之中，而不会由于磁场的不均匀而引起电荷的分离。在这种装置里，还可分别调节轴向磁场 B_1 和圈向磁场 B_2 ，从而找到等离子体比较稳定的工作条件。

图 B. 11 的实验装置叫**托克马克装置**，是目前建造得比较多的受控热核反应实验装置。这种装置算是相对比较简单、比较容易制造的装置。目前，在这种装置上，已能使等离子体加热至 1000 万度以上，粒子的密度接近 10^{15} cm^{-3} ，约束时间达到 0.1 秒以上，正向 1 秒逼近。但困难还是很多。虽然如此，看来这种装置最有希望首先实现受控热核反应。

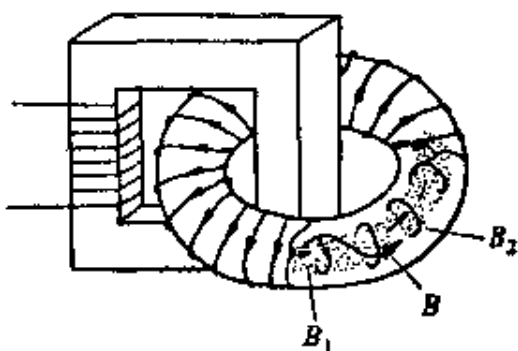


图 B. 11 托克马克装置

另一种有希望的受控热核反应实验装置叫做**串列磁镜装置**。它是在直的螺线管的两端利用特殊形状的线圈产生的磁场以及用特定方式引入的电场来约束等离子体的(图 B. 12)。目前这种装置还在设计建造阶段。

除了利用磁约束来实现受控热核反应以外，目前还在设计试验一种**惯性约束**方法。它的基本作法是把核聚变燃料做成直径约 1 毫米的小靶丸。每一次有一个小靶丸放入反应室，然后用强的激

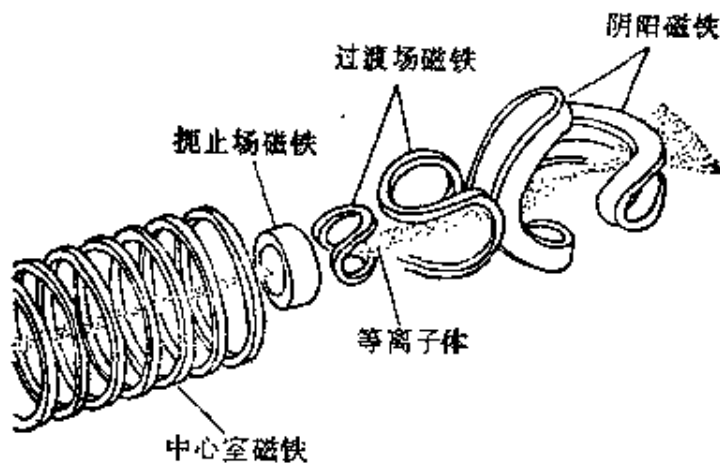


图 B.12 串列磁镜装置

光脉冲(延续 10^{-9} 秒, 具有100千焦耳的能量)照射。这样高能量的输入会使靶丸变成等离子体, 而且在这等离子体由于惯性还来不及飞散的短时间内, 把它加热到极高的温度而发生聚变反应。这实际上是强激光一个个地引爆超小型氢弹。这种反应叫**激光核聚变**。这种技术的成功一方面取决于燃料靶丸的制造, 同时也取决于大功率的激光器的发展。

在我国, 由我国自行设计、建造的“中国环流器一号”受控热核反应研究装置于1984年9月21日建成启动。它是一种托克马克装置, 其设计指标和规模相当于七十年代中期国外较先进的同类型装置水平。它标志着我国在受控热核反应的研究领域的装置建造和实验手段有了新的突破, 为我国进一步追赶世界先进水平打下了一定的基础。

这里值得提一下1989年春天一条轰动世界科技界的新闻。3月23日在美国盐湖城犹他大学的一次记者招待会上, 马丁·弗莱希曼(Martin Fleischmann)和斯坦利·庞斯(B. Stanley Pons)宣布他们实现了室温核聚变(或冷聚变)。他们用的实验仪器很普通, 是在一个烧瓶内装入一个钯(Pd)制的管状阴极, 外绕铂(Pt)线作为阳极都浸在用少量锂电离的重水(D_2O)中(图B.13)。当通入电

流经过近百小时后，他们发现有过量热释放，同时有中子产生。他们认为这不是一般的化学反应，而是在室温下实现的核聚变。现有的解释可能是：钯有强烈的吸收氢或氘的本领（一体积的钯可吸收700体积的氘）。被电解后生成的氘在钯中的强烈聚集有可能引起氘的结合——核聚变。如果这真是在室温条件下实现的核聚变，那将是一件有绝对重大意义的科学发现。不过目前（过了三个

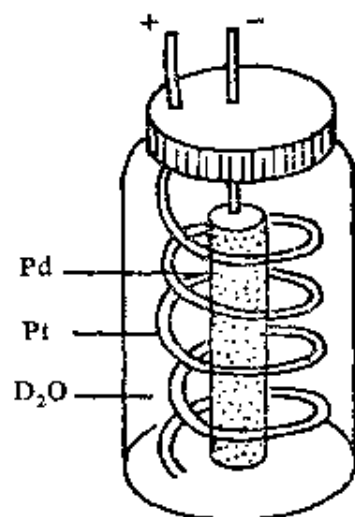


图 B.13

月之后),关于重复上述实验的报导并不都有利于这个结论。很多科学家还对这两位教授的发现持怀疑态度。所以是否真正实现了室温核聚变,目前还不能定论。即使证实了是室温核聚变,从试管实验到实际作为能源加以利用还需要走很长的路,例如要二、三十年。还可以指出的是,据报导,利用钯来实现聚变曾被两个德国科学家,Fritz Paneth 和 Kurt Peters 在1926年试过。现在弗莱希曼和庞斯的“优先发现权”也还受到美国伯翰杨大学的 Steven Jones的挑战,后者指责前者违背了事先商定的共同发表实验情况的约定。

第八章 磁 场

本 章 要 求

- *1. 能从匀速运动点电荷的电场公式导出其磁场公式, 了解这一磁场分布的特点。
- *2. 会计算两个运动电荷之间的作用力。
3. 理解毕奥—萨伐定律, 并能利用它求简单情况下电流的磁场分布, 特别是直线电流和载流直螺线管的磁场分布。
4. 理解磁通连续定理的意义。
5. 理解安培环路定理的意义, 并能利用它求具有一定对称性的电流的磁场分布。
6. 理解变化电场产生磁场的意义及根据它而作的对安培环路定理的补充。
7. 了解运动电荷间磁力和电力大小的不同。

*§ 8.1 匀速运动点电荷的磁场

在§2.3中, 我们求出了作匀速直线运动的点电荷的电场表示式。在某一参照系 S 中, 点电荷 q 以速度 \boldsymbol{v} 作匀速直线运动时, 在此参照系中观察到的电场分布由下式表示

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2\theta)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{r}} \quad (8.1)$$

在§7.6中, 我们又求出了场源电荷在 S 系中以速度 \boldsymbol{v} 运动时,

它产生的磁场和电场有下述关系

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (8.2)$$

将(8.1)式代入(8.2)式,就可得到在 S 系中观察一个以速度 \mathbf{v} 运动的点电荷所产生的磁场。它的分布由下式表示

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \cdot \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2 \sin^2\theta)^{3/2}} \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}} \quad (8.3)$$

为了简化公式的形式,定义

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \frac{4\pi \times 9 \times 10^9}{(3 \times 10^8)^2} = 4\pi \times 10^{-7} (\text{N} \cdot \text{s}^2 / \text{C}^2) \quad (8.4)$$

叫做真空的磁导率。它的单位是 $\text{N} \cdot \text{s}^2 / \text{C}^2$ 或 N / A^2 。这样,(8.3)式可表示为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \cdot \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2\theta)^{3/2}} \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}} \quad (8.5)$$

由这一公式可以看出,在运动电荷 q 周围任一点 P 处的磁场方向均垂直于由电荷 q 的瞬时位置引向 P 点的矢径与 q 的运动轨迹所组成的平面。因此,磁力线都是在与电荷运动方向垂直的平面内的同心圆,圆心就在电荷运动的轨迹上,而且磁力线绕行方向

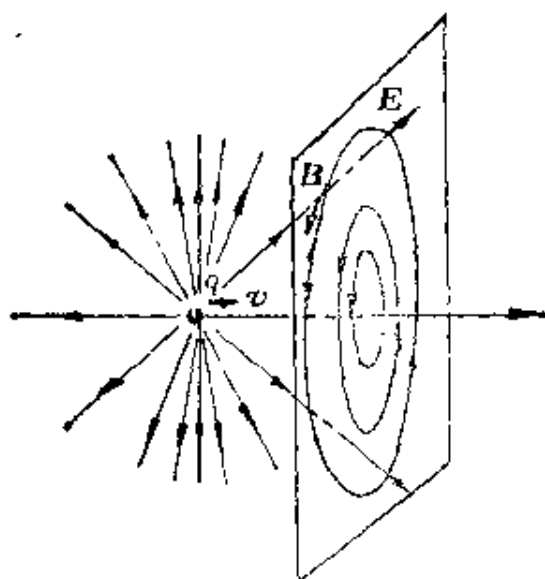


图 8.1 匀速运动电荷的磁场

与电荷的运动方向成右手螺旋关系(图8.1)。

如果电荷 q 的运动速度 v 远较光速为小, 则 $\beta = v/c \approx 0$, (8.5) 式就简化为:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}} \quad (8.6)$$

这就是非相对论的运动电荷的磁场公式。这一公式给出的磁场大小的分布不同于(8.5)式给出的, 但磁力线的图形和(8.5)式给出的相同, 也是圆心在电荷运动路径上的同心圆。

[例] 在物理实验中观察到在阴极射线管中有两个电子以相同速度 v 并排运动。两者之间的距离为 r , 求此一电子受彼一电子的作用力的大小和方向。

解: 如图8.2所示, 取电子运动的方向为 x 轴正向, 而二者连线方向为 z 轴方向。先求 e_1 受 e_2 的作用力。

由(8.1)式可得 e_2 在 e_1 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\gamma e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{z}}$$

方向沿 z 轴负向 因为 $e < 0$

由(8.3)式可得 e_2 在 e_1 处产生的磁场为

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\gamma e v}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \hat{\mathbf{y}}$$

方向沿 y 轴正向。

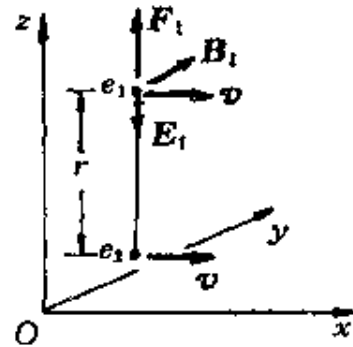


图8.2 两个运动电子的相互作用

再由洛仑兹力公式可求得 e_1 受 e_2 的作用力为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = e\mathbf{E}_1 + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1 = \frac{\gamma e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{z}} - \frac{\gamma e^2 v^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\gamma e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

由于 $v < c$, 所以此力的方向沿 z 轴正向。

用同样的方法可以求出 e_2 受 e_1 的作用力与 F_1 的大小相等而方向相反, 即沿 z 轴负向。在这个例子中, 这两个电子的相互作用是符合牛顿第三定律的。但情况并不总是这样, 两个电子不是并排运动时, 它们的相互作用力并不满足牛顿第三定律。(请试做习题*8.2)。

§ 8.2 毕奥-萨伐定律

电流在其周围产生磁场,其规律的基本形式是电流元的磁场。以 $I dl$ 表示稳恒电流的一电流元。以 r 表示从此电流元指向某一场点 P 的矢径(图8.3),则实验给出,此电流元在 P 点产生的磁场 $d\mathbf{B}$ 由下式决定

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I dl \times \hat{r}}{r^2} \quad (8.7)$$

式中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$, 是真空的磁导率。由于电流元不能孤立地存在,所以(8.7)式不是直接对实验数据的总结。它是1820年首先由毕奥和萨伐根据对电流的磁作用的实验结果分析得出的,现在就叫毕奥-萨伐定律。

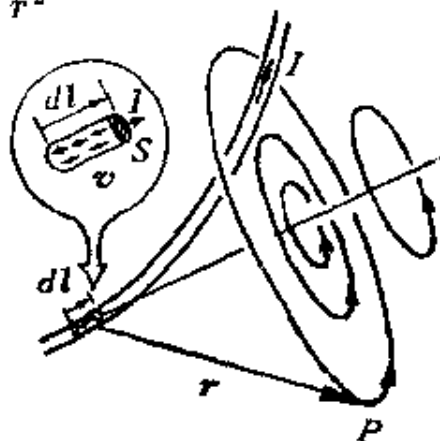


图 8.3 电流元的磁场

由于电流是电荷的定向运动形成的,所以应该能够从运动电荷的磁场求出电流的磁场。如图8.3所示,电流元 $I dl$ 的截面积为 S , 其中载流子的数密度为 n , 每个载流子的电荷都是 q , 并且都以漂移速度 v 运动, v 的方向与 dl 的方向相同。由于载流子的速度 v 远较光速为小,所以我们用(8.6)式求每个载流子的磁场。在电流元中,共有 $nSdl$ 个载流子。忽略这些载流子到 P 点的矢径 r 的差别,则这些载流子在 P 点产生的总磁场就是

$$d\mathbf{B} = nSdl \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \mathbf{v} \times \hat{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} nSqv \frac{dl \times \hat{r}}{r^2}$$

将关系式 $nSqv = I$ 代入,我们就得到了(8.7)式。

有了电流元的磁场公式(8.7)式,根据叠加原理,对这一公式进行积分,就可以求出任意电流的磁场分布。

根据(8.7)式中的叉积关系可知,电流元的磁场的磁力线也都

是圆心在电流元轴线上的同心圆(图8.3)。由于这些圆都是闭合曲线,所以通过任意封闭曲面的磁通量都等于零。又由于任何电流都是一段段电流元组成的,根据叠加原理,在它的磁场中通过一个封闭曲面的磁通量应是各个电流元的磁场通过该封闭曲面的磁通量的代数和。既然每一个电流元的磁场通过该封闭面的磁通量为零,所以在任何磁场中通过任意封闭曲面的磁通量总等于零。这个关于磁场的结论叫**磁通连续原理**,或**磁场的高斯定律**。它的数学表示式为

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (8.8)$$

和电场的高斯定律相比,可知磁通连续反映自然界中没有与电荷相对应的“磁荷”(或叫单独的磁极)存在。近代关于基本粒子的理论研究早已预言有“磁单极”存在,也曾企图在实验中找到它。但至今除了个别事件可作为例证外,还不能说完全肯定地发现了它。

下面举几个例子说明如何用毕奥-萨伐定律求电流的磁场分布。

[例1] 直线电流的磁场。如图8.4所示,导电回路中通有电流 I ,求长度为 L 的直线段的电流在它周围某点 P 处的磁感应强度, P 点到导线的距离为 r 。

解: 以 P 点在直导线上的垂足为原点 O ,选坐标如图。由毕奥-萨伐定律可知, L 段上任意一电流元 $I dl$ 在 P 点所产生的磁场为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I dl \times \hat{r}'}{r'^2}$$

其大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I dl \sin \varphi}{r'^2}$$

式中 r' 为电流元到 P 点的距离。由于直导线上各个电流元在 P 点的磁感应强度的方向相同,都垂直于纸面向里,所以合磁感应强度也在这个方向,它的大小等于上式 dB 的标量积分,即

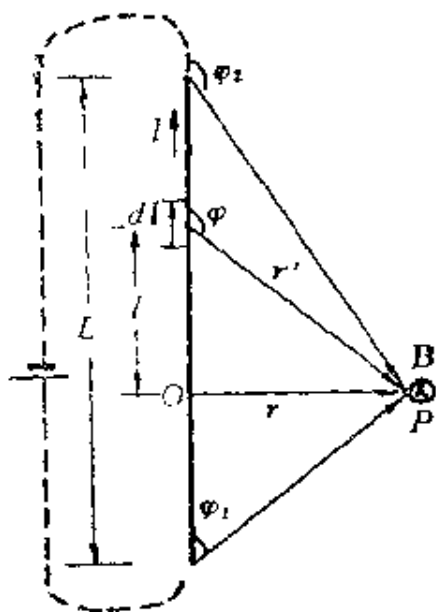


图 8.4 直线电流的磁场

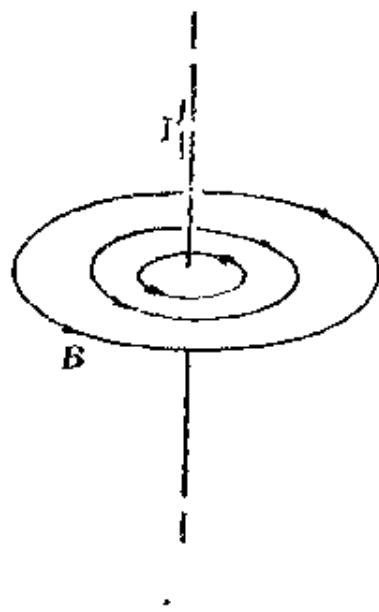


图 8.5 无限长直电流的磁感应线

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 I dl \sin \varphi}{4\pi r'^2}$$

由图 8.4 可以看出, $r' = r / \sin \varphi$, $l = -r \cot \varphi$, $dl = r d\varphi / \sin^2 \varphi$ 。把此 r' 和 dl 代入上式, 可得

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \sin \varphi d\varphi$$

由此得

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \quad (8.9)$$

上式中 φ_1 和 φ_2 分别是直导线两端的电流元和它们到 P 点的矢径之夹角。

对于无限长直电流来说, 上式中 $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, 则有

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (8.10)$$

此式表明, 无限长载流直导线周围的磁感应强度 B 与导线到场点的距离成反比, 与电流成正比。它的磁感应线是在垂直于导线的平面内以导线为圆心的一系列同心圆, 如图 8.5 所示。

[例 2] 圆电流的磁场。一圆形载流导线, 电流强度为 I , 半径为 R 。求圆形导线轴线上的磁场分布,

解: 如图 8.6 所示, 把圆电流轴线作为 x 轴, 并令原点在圆心上。在圆

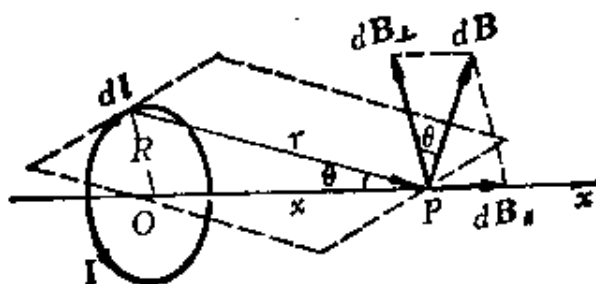


图 8.6 圆电流的磁场

线圈上任取一电流元 Idl , 它在轴上任一点 P 处的磁场 dB 的方向垂直于 dl 和 r , 亦即垂直于 dl 和 r 组成的平面。由于 dl 总与 r 垂直, 所以 dB 的大小为

$$dB = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2}.$$

将 dB 分解成平行于轴线的分量 dB_{\parallel} 和垂直于轴线的分量 dB_{\perp} 两部分, 它们的大小分别为

$$dB_{\parallel} = dB \sin\theta = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} dl$$

$$dB_{\perp} = dB \cos\theta$$

式中 θ 是 r 与 x 轴的夹角。考虑电流元 Idl 所在直径另一端的电流元在 P 点的磁场, 可知它的 dB_{\perp} 与 Idl 的大小相等方向相反因而相互抵消。由此

可知, 整个圆电流垂直于 x 轴的磁场 $dB_{\perp} = 0$, 因而 P 点的合磁场的大小为

$$B = \int dB_{\parallel} = \oint \frac{\mu_0 RI}{4\pi r^3} dl = \frac{\mu_0 RI}{4\pi r^3} \oint dl$$

因为 $\oint dl = 2\pi R$, 所以上述积分为

$$B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2r^3} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (8.11)$$

B 的方向沿 x 轴正方向, 其指向与圆电流的电流流向符合右手螺旋关系。

用磁矩的定义 $p_m = IS = I\pi R^2$, 可将 (8.11) 式写成

$$B = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi r^3} \quad (8.12)$$

如果用矢量式表示圆电流轴线上的磁场, 由于它的方向与圆电流磁矩 p_m 的方向相同, 所以

$$B = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi r^3} = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi (R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (8.13)$$

在圆电流中心处, $r=R$, (8.11) 式给出

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (8.14)$$

[例 3] 载流直螺线管轴线上的磁场。图 8.7 所示为一均匀密绕螺线管, 管的长度为 L , 半径为 R , 单位长度上绕有 n 匝线圈, 通有电流强度 I 。求螺线管轴线上的磁场分布。

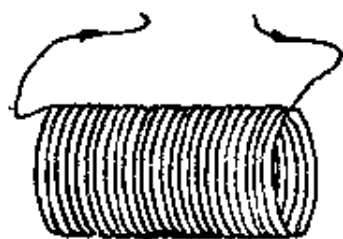


图 8.7 直螺线管

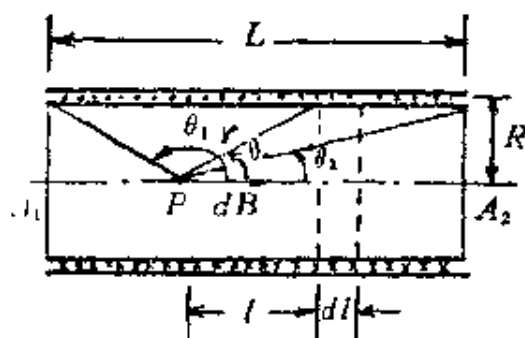


图 8.8 直螺线管轴线上磁感应强度计算

解: 螺线管各匝线圈都是螺旋形的, 但在密绕的情况下, 可以把它看成是许多匝圆形线圈紧密排列组成的。载流直螺线管在轴线上某点 P 处的磁场等于各匝线圈的圆电流在该处磁场的矢量和。

如图 8.8 所示, 在距轴上任一点 P 为 l 处, 取螺线管上长为 dl 的一元段, 将它看成是一个圆电流, 它的电流强度为

$$dI = nI dl$$

它在 P 点的磁场, 据 (8.11) 式为

$$dB = \frac{\mu_0 R^2 dI}{2r^3} = \frac{\mu_0 n I R^2 dl}{2r^3}$$

由图中可看出, $R = r \sin \theta$, $l = R \operatorname{ctg} \theta$, 而 $dl = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$, 式中 θ 为螺线管轴线与 P 点到元段 dl 周边的距离 r 之间的夹角。将这些关系代入上式, 可得

$$dB = -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \theta d\theta$$

由于各元段在 P 点产生的磁场方向相同, 所以将上式积分即得 P 点磁场的大小为

$$B = \int dB = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \theta d\theta$$

或

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \quad (8.15)$$

此式给出了螺线管轴线上任一点磁场的大小，磁场的方向如图 8.8 所示应与电流的绕向成右手螺旋关系。

由(8.15)式表示的磁场分布(在 $L=10R$ 时)如图 8.9 所示,在螺线管中心附近轴线上各点磁场基本上是均匀的。到管口附近 B 值逐渐减小,出口以后磁场很快地减弱。在距管轴中心约等于 7 个管半径处,磁场就几乎等于零了。

在一无限长直螺线管(即管长比半径大很多的螺线管)内部轴线上的任一点, $\theta_2=0, \theta_1=\pi$, 由(8.15)式可得

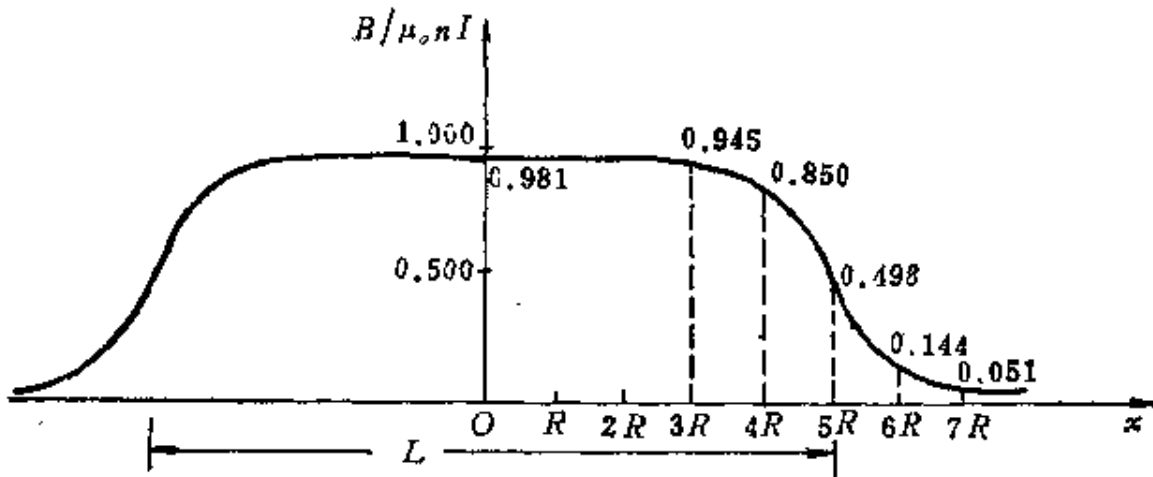


图 8.9 直螺线管轴线上的磁场分布,管长 L 为半径的 10 倍

$$B = \mu_0 n I \quad (8.16)$$

在长螺线管任一端口的中心处,例如如图 8.8 的 A_2 点, $\theta_2=\pi/2, \theta_1=\pi$, 式(8.15)给出此处的磁场为

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I \quad (8.17)$$

一个载流螺线管周围的磁力线分布如图 8.10 所示。这和用铁粉显示的磁力线图相符合。管外磁场非常弱,而管内基本上是均匀场。螺线管越长,这种特点越显著。

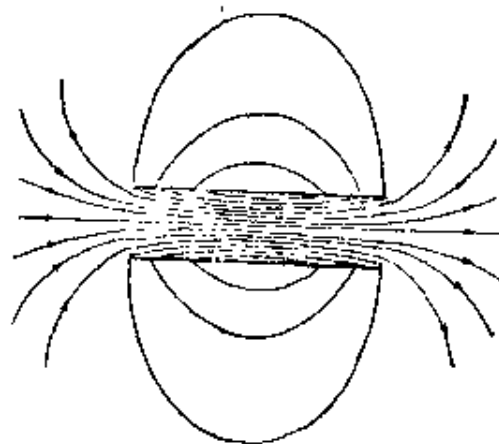


图 8.10 螺线管的 B 线分布示意图

§ 8.3 安培环路定理

由毕奥-萨伐定律表示的电流和它的磁场的关系,可以用另一种形式表示出来,这一形式叫**安培环路定理**,它表述为:在稳恒电流的磁场中,磁感应强度 B 沿任何闭合路径 L 的线积分(亦称环流)等于路径 L 所包围的电流强度的代数和的 μ_0 倍,它的数学表示式为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_{\text{内}} \quad (8.18)$$

为了说明此式的正确性,让我们先考虑载有稳恒电流 I 的无限长直导线的磁场。

根据(8.10)式,与一无限长直电流相距为 r 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

B 线为在垂直于导线的平面内围绕该导线的同心圆,其绕向与电流方向成右手螺旋关系。在上述平面内围绕导线作一任意形状的闭合路径 L (图 8.11),沿 L 计算 B 的环流 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 的值。先计算 $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 的值。如图示,在路径上任一点 P 处, $d\mathbf{l}$ 与 B 的夹角为 θ ,它对电流通过点所张的角为 $d\varphi$ 。由于 B 垂直于矢径 r ,因而 $|d\mathbf{l}| \cos\theta$ 就是 $|d\mathbf{l}|$ 在垂直于 r 方向上的投影,它等于 $d\varphi$ 所对的以 r 为半径的弧长。由于此弧长等于 $r d\varphi$,所以

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B r d\varphi$$

沿闭合路径 L 的 B 的环流为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L B r d\varphi$$

将上面的 B 值代入上式, 可得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\varphi$$

沿整个路径一周积分, $\oint_L d\varphi = 2\pi$, 所以

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (8.19)$$

此式说明, 当闭合路径 L 包围电流 I 时, 这个电流对该环路上 B 的环流的贡献为 $\mu_0 I$ 。

如果电流的方向相反, 仍按如图 8.11 所示的路径 L 的方向进行积分时, 由于 B 的方向与图示方向相反, 所以应该得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 I$$

可见积分的结果与电流的方向有关。如果对于电流的正负作如下的规定, 即电流方向与 L 的绕行方向符合右手螺旋关系时, 此电流为正, 否则为负, 则 B 的环流的值可以统一地用 (8.19) 式表示。

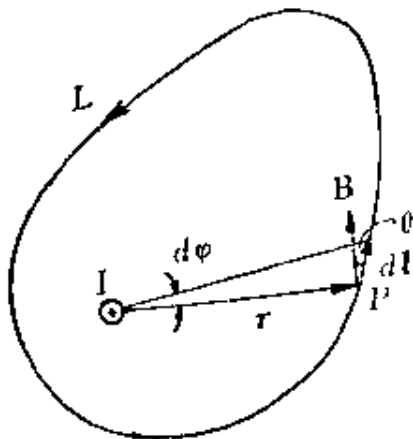


图 8.11 安培环路定理的证明

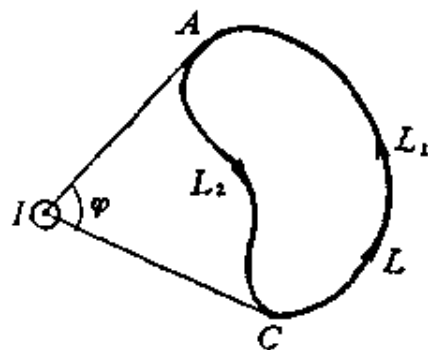


图 8.12 L 不包围电流

如果闭合路径不包围电流, 如图 8.12 所示, L 为在垂直于直导线平面内的任一不围绕导线的闭合路径。从导线与上述平面的

交点作 L 的切线, 将 L 分成 L_1 和 L_2 两部分, 沿图示方向取 B 的环流, 有

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_{L_1} d\varphi + \int_{L_2} d\varphi \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} [\varphi + (-\varphi)] = 0\end{aligned}$$

可见, 闭合路径 L 不包围电流时, 该电流对沿这一闭合路径的 B 的环流无贡献。

上面的讨论只涉及在垂直于长直电流的平面内的闭合路径。可以比较容易地论证在长直电流的情况下, 对非平面闭合路径, 上述讨论也适用。还可以进一步证明(步骤比较复杂, 我们略去), 对于任意的闭合稳恒电流, 上述 B 的环流和电流的关系仍然成立。这样, 再根据磁场叠加原理可得到, 当有若干个闭合稳恒电流存在时, 沿任一闭合路径 L 的合磁场 B 的环流应为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \Sigma I_n$$

式中 ΣI_n 是环路 L 所包围的电流的代数和。这就是我们要证明的安培环路定理。

这里特别要注意闭合路径 L 包围的电流的意义。对于闭合的稳恒电流来说, 只有与 L 相铰链的电流, 才算被 L 包围的电流。在图 8.13 中, 电流 I_1 、 I_2 被回路 L 所包围, 而且 I_1 为正, I_2 为负。 I_3 和 I_4 没有被 L 所包围, 它们对沿 L 的 B 的环流无贡献。

如果电流回路为螺旋形, 而积分环路 L 与数匝电流铰链, 则可作如下处理。如图 8.14 所示, 设电流有 2 匝, L 为积分路径。可以设想将 cf 用导线连接起来, 并想象在这一段导线中有两支方向相

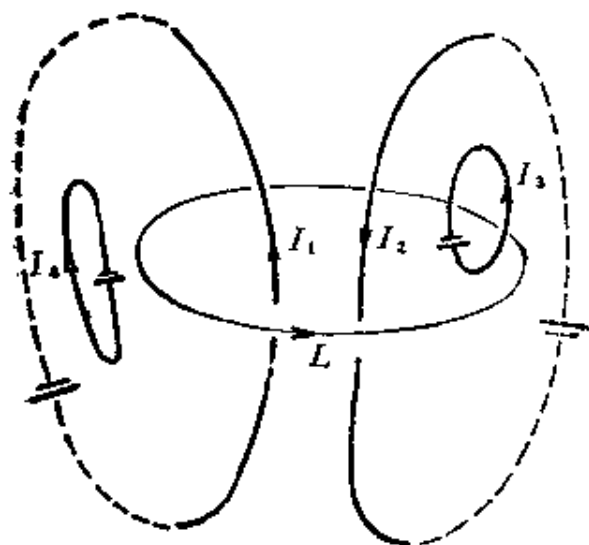


图 8.13 电流回路与环路 L 绞链

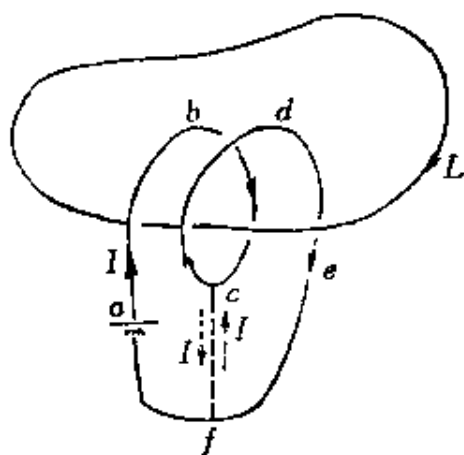


图 8.14 积分回路 L 与 2 匝电流绞链

反, 大小都等于 I 的电流流通。这样的两支电流不影响原来的电流和磁场的分布。这时 $abcfa$ 组成了一个电流回路, $cdefc$ 也组成了一个电流回路, 对 L 计算 B 的环流时, 应有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0(I + I) = \mu_0 \cdot 2I$$

此式就是上述情况下实际存在的电流所产生的磁场 B 沿 L 的环流。

如果电流在螺线管中流通, 而积分环路 L 与 N 匝线圈绞链, 则同理可得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 NI \quad (8.20)$$

应该强调指出, 安培环路定理表达式中右端的 $\sum I_n$ 中包括闭合路径 L 所包围的电流的代数和, 但在式左端的 B 却代表空间所有电流产生的磁感应强度的矢量和, 其中也包括那些不被 L 所包围的电流产生的磁场, 只不过后者的磁场对沿 L 的 B 的环流无贡献就是了。

还应明确的是, 安培环路定理中的电流都应该是闭合稳恒电

流, 对于一段稳恒电流的磁场, 安培环路定理不成立。

§ 8.4 利用安培环路定理求磁场的分布

正如利用高斯定律可以方便地计算某些具有对称性的带电体的电场分布一样, 利用安培环路定理也可以方便地计算出某些具有一定对称性的载流导线的磁场分布。

利用安培环路定理求磁场分布一般也包含两步: 首先依据电流的对称性分析磁场分布的对称性, 然后再利用安培环路定理计算磁感应强度的数值和方向。此过程中决定性的技巧是选取合适的闭合路径 L (也称安培环路), 以便使积分 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 中的 \mathbf{B} 能以标

量形式从积分号内提出来。

下面举几个例子。

[例 1] 无限长圆柱面电流的磁场分布。设圆柱面半径为 R , 面上均匀分布的总电流为 I 。

解: 如图 8.15 所示, 在通过任意场点 P , 而与圆柱轴线垂直的平面上, 以圆柱轴线通过之点 O 为圆心, 以 $\overline{OP} (=r)$ 为半径作一圆周 L 。由电流分布的轴对称性可知, L 上各点 B 值相等。 \mathbf{B} 的方向可由下面分析得出。以 \overline{OP} 为对称轴, 在圆柱面上取一对对称的长直线电流 dS' 和 dS'' , 它们在 P 点的磁场分别为 $d\mathbf{B}'$ 和 $d\mathbf{B}''$ 。方向都垂直于电流并垂直于矢径。由于二者大小相等, 合磁场 $d\mathbf{B}$ 必沿圆周在 P 点的切线方向。由叠加原理可知, 圆柱面上所有各对长直电流的总磁场 \mathbf{B} 也必沿 P 点的切线方向。因此, 沿圆周 L 的 \mathbf{B} 的环流为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r$$

由于 $\sum I_{\text{内}} = I$, 所以安培环路定理给出

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

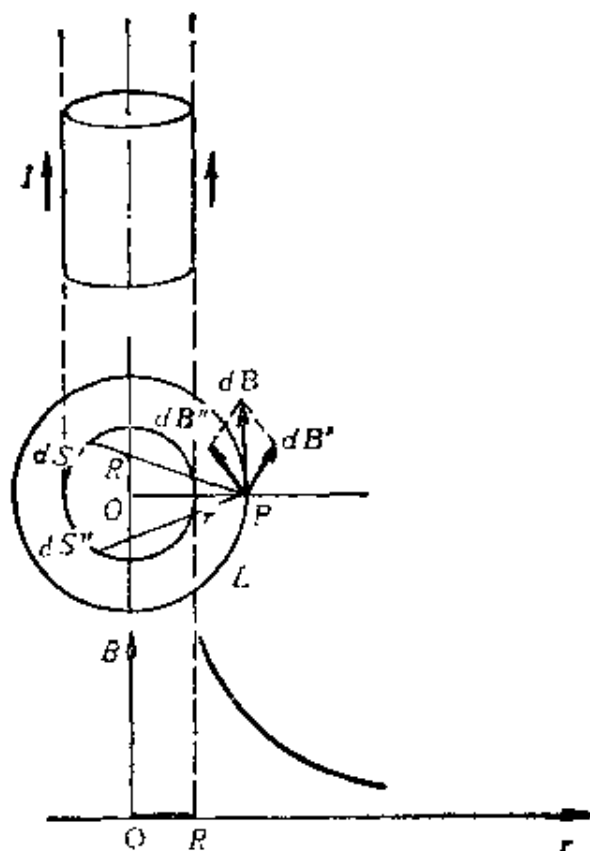


图 8.15 无限长圆柱面电流磁场分布

由此得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (r > R) \quad (8.21)$$

这一结果说明,在无限长圆柱面电流外面的磁场分布与电流都集中在轴线的直线电流产生的磁场相同。

如果选 $r < R$ 的圆周作安培环路,则由于 $\sum I_{\text{内}} = 0$, 所以有

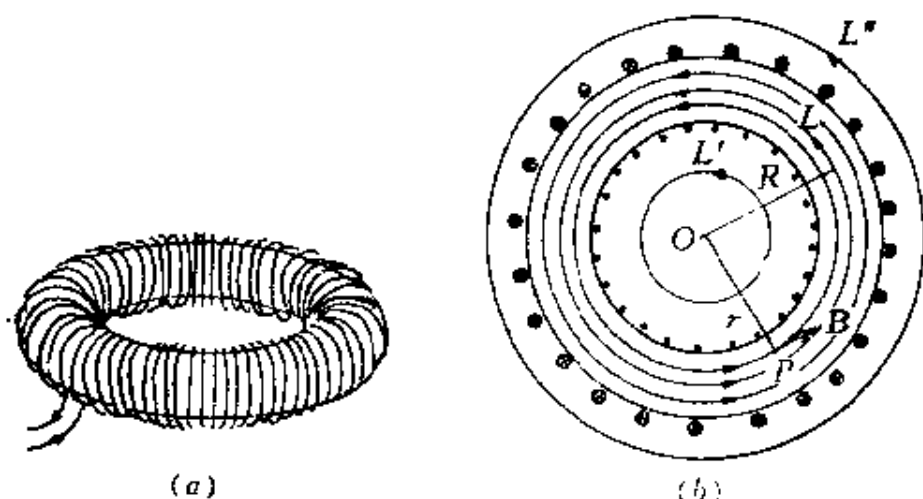
$$B = 0 \quad (r < R) \quad (8.22)$$

即在无限长圆柱面电流内的磁场为零。图 8.15 中也画出了 $B-r$ 曲线。

[例 2] 通电螺绕环的磁场分布。如图 8.16 所示的环状螺线管叫螺绕环。设环管的轴线半径为 R , 环上均匀密绕 N 匝线圈。线圈中通有电流 I 。

解: 根据电流分布的对称性,与螺绕环共轴的圆周上各点 B 的大小相等,方向沿圆周的切线方向。以在环管内顺着环管的半径为 r 的圆周为安培环路 L , 则

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r$$



(a) 螺绕环 (b) 螺绕环磁场分布

图 8.16

该环路所包围的电流为 NI , 故安培环路定理给出

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

由此得

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (\text{在环管内}) \quad (8.23)$$

在环管横截面半径比环半径 R 小得多的情况下, 可忽略从环心到管内各点的 r 的区别而取 $r = R$, 这样就有

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \mu_0 n I \quad (8.24)$$

其中 $n = N/2\pi R$ 为螺绕环单位长度上的匝数。

对于管外任一点, 过该点作一与螺绕环共轴的圆周为安培环路 L' 或 L'' , 由于这时 $\sum I_n = 0$, 所以有

$$B = 0 \quad (\text{在环管外}) \quad (8.25)$$

上述两式的结果说明, 密绕螺绕环的磁场集中在管内, 外部无磁场。这也和用铁粉显示的通电螺绕环的磁场分布图象一致。

[例 3] 无限大平面电流的磁场分布。如图 8.17 所示, 一无限大导体薄平板垂直于纸面放置, 其上有方向指向读者的电流流通, 面电流密度(即通过与电流方向垂直的单位长度的电流)到处均匀, 大小为 j 。

解: 无限大平面电流可看成是由无限多根平行排列的长直电流所组成。

先分析任一点 P 处的磁场的方向,如图 8.17 所示,以 \overline{OP} 为对称轴,取一对宽度相等的长直电流 dl' 和 dl'' ,它们在 P 点产生的磁场分别为 dB' 和 dB'' 。由于二者大小相等,其合磁场 dB 的方向一定平行于电流平面。这样,无数对对称直电流在 P 点的总磁场方向也一定平行于电流平面。但在该平面两侧 B 的方向相反。又由于电流平面无限大,故与电流平面等距离的各点的 B 的大小应相同。

根据以上所述磁场分布的特点,可以作矩形回路 $abcd$,其中 ab, cd 两边与电流平面平行,而 bc 和 da 两边被电流平面等分。该回路所包围的电流为 jl ,由安培环路定理有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2l = \mu_0 j l$$

由此得

$$B = \frac{\mu_0 j}{2} \quad (8.26)$$

这个结果说明,在无限大均匀平面电流的两侧的磁场都为均匀磁场,并且大小一样,但方向相反。

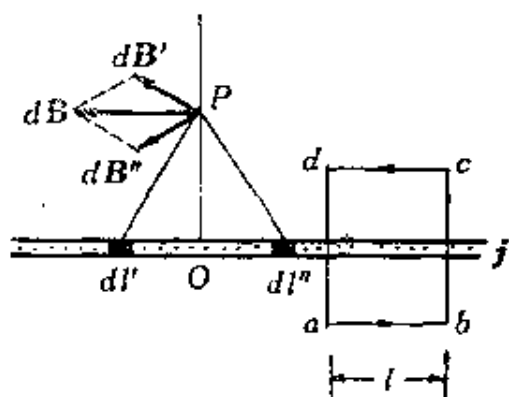


图 8.17 无限大平面电流磁场

§ 8.5 与变化电场相联系的磁场

在安培环路定理(8.18)式的说明中,曾指出闭合路径所包围的电流是指与该闭合路径所较链的闭合电流。由于电流是闭合的,所以与闭合路径“较链”也意味着该电流穿过以该闭合路径为边的任意形状的曲面。例如,在图 8.18 中,闭合路径 L 环绕着电流 I ,该电流通过以 L 为边的平面 S_1 ,它也通过以 L 为边的口袋形曲面 S_2 ,由于稳恒电流总是闭合的,所以安培环路定理的正确性与所设想的曲面 S 的形状无关,只要闭合路径是确定的就可以了。

实际上也常遇到并不闭合的电流,如电容器充电(或放电)时的电流(图 8.19)。这时电流随时间改变,也不再是稳恒的了。这时

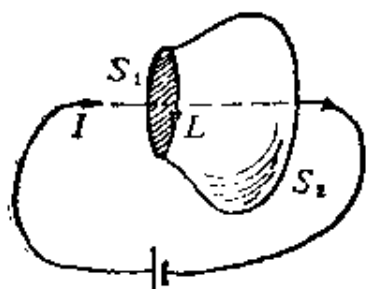


图 8.18 L 环路环绕闭合电流

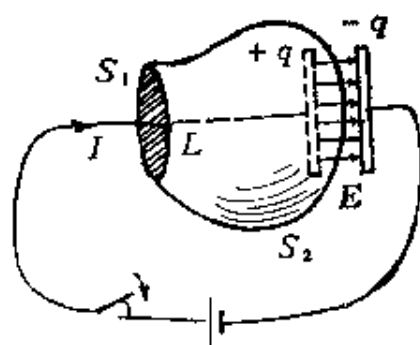


图 8.19 L 环路环绕不闭合电流

安培环路定理是否还成立呢？由于电流不闭合，所以不能再说它与闭合路径铰链了。实际上这时通过 S_1 和通过 S_2 的电流不相等了。如果按 S_1 面计算电流，沿闭合路径 L 的 B 的环流等于 $\mu_0 I$ 。但如果按 S_2 面计算电流，则由于没有电流通过 S_2 面，沿闭合路径 L 的 B 的环流按(8.18)式就要等于零。由于沿同一闭合路径 B 的环流只能有一个值，所以这里明显地出现了矛盾。它说明以(8.18)式的形式表示的安培环路定理不适用于非稳恒电流的情况。

1861年麦克斯韦研究电磁场的规律时，想把安培环路定理推广到非稳恒电流的情况。他注意到如图 8.19 所示的电容器充电的情况下，在电流断开处，即两平行板之间，随着电容器被充电，这里的电场是变化的。他大胆地假设这电场的变化和磁场相联系，并从理论的要求出发给出这种联系的定量关系为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (8.27)$$

式中 S 是以闭合路径 L 为边线的任意形状的面积。此式说明和变化电场相联系的磁场沿闭合路径 L 的环流等于以该路径为边线的任意面积的电通量(Φ_e)的变化率的 $\mu_0 \epsilon_0 (=1/c^2)$ 倍(国际单位制)。电场和磁场的这种联系常被不十分确切地称为变化的电场产生磁场，(8.27)式就成了变化电场产生磁场的规律。

如果一个面积 S 上有传导电流 I 通过而且还同时有变化的电场存在, 则沿此面积边线 L 的磁场的环流由下式决定

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \right) \quad (8.28)$$

这一公式被称做推广了的或普遍的安培环路定理。事后的实验证明, 麦克斯韦的假设和他提出的定量关系是完全正确的。

让我们再来讨论图 8.19 中的情况。对口袋形面积 S_2 来说, 就应该用(8.27)式来计算沿 L 的 \mathbf{B} 的环流。这时通过 S_2 的总电通量就等于两板间的电力线总条数。由于 $E = \sigma / \epsilon_0$, 所以 $\Phi_e = q / \epsilon_0$, 其中 q 是一个极板上已积累的电荷。因此按袋形曲面 S_2 计算

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{\epsilon_0} \right) = \mu_0 \frac{dq}{dt} \end{aligned}$$

由于单位时间内极板上电荷的增量 $\frac{dq}{dt}$ 等于通入极板的电流 I , 所以上式给出

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

这正与按 S_1 平面所计算的沿 L 的 \mathbf{B} 的环流相同。这样, 就解决了(8.18)式应用于变化电流引起的矛盾。在关系式

$$\epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = I$$

中, $\epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$ 给出的是 S_2 上的值, 而 I 是通过导线的电流。二者相等, 使我们可以有这种看法: 认为 $\frac{d\Phi_e}{dt}$ 也代表一种“电流”, 它存在于电容器的两板之间。这样, 事实上在两板之间断开的电流, 就由这种“电流”接续起来了。加上这种“电流”, 电流就又是闭合的了。麦克斯韦当初把变化的电场和“以太粒子”的运动联系起来, 认为

它体现了一种“实际的”电流。他把它叫做**位移电流**。以 I_d 表示通过 S 面的位移电流，就有

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (8.29)$$

现在，从本质上看来，真空中的位移电流不过是变化电场的代称，并不是电荷的运动^[注]，而且除了在产生磁场方面与电荷运动形成的传导电流等效外，和后者并无其它共同之处。

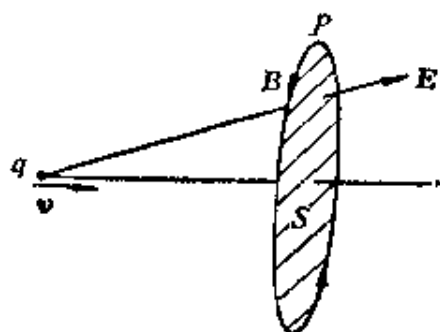


图 8.20

在 § 8.1 中曾讲过运动电荷的磁场。在那里我们说是运动电荷“产生”了电场和相应的磁场。但是，如果取一个圆心在电荷 q 运动的轨迹上而且垂直于运动方向的圆面积 S (图 8.20)，则在电荷 q 运动的过程中通过此圆面积的电通量是在不断变化的。可以证明，这一电通量的变化率的 $\mu_0 \epsilon_0$ 倍就等于

磁场 B 沿圆周的环流，即电场和磁场也满足 (8.27) 式。(参考习题*8.20)。因此，也可以说，磁场是变化电场“产生”的。在 § 7.6 中我们曾指出磁场是电场的相对论效应。这里的磁场和变化电场的联系实际上是电场和磁场的相对论联系的一种表现。在理论上，可以从电磁场相对论变换公式 (7.24) 导出 (8.27) 式来。

[例] 一板面半径为 $R=0.2\text{m}$ 的圆形平行板电容器，正以 $I=10\text{A}$ 的电流充电。求在板间距轴线 $r_1=0.1\text{m}$ 处和 $r_2=0.3\text{m}$ 处的磁场。(忽略边缘效应)。

解： 两板之间的电场为

$$E = \sigma / \epsilon_0 = \frac{q}{\pi \epsilon_0 R^2}$$

[注] 位移电流的一般定义是电位移通量的变化率，即 $I_d = \frac{d}{dt} \Phi_D = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ 。在电介质内部，位移电流中确有一部分是电荷(束缚电荷)的定向运动。

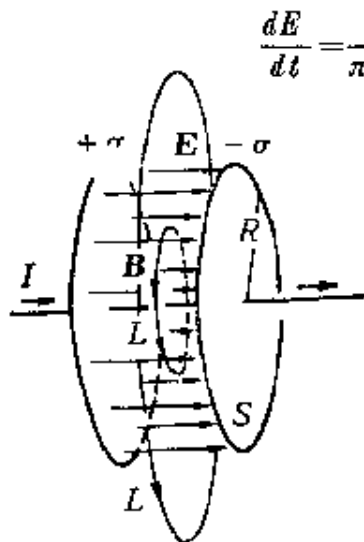


图 8.21 平行板电容器充电时，板间的磁场分布

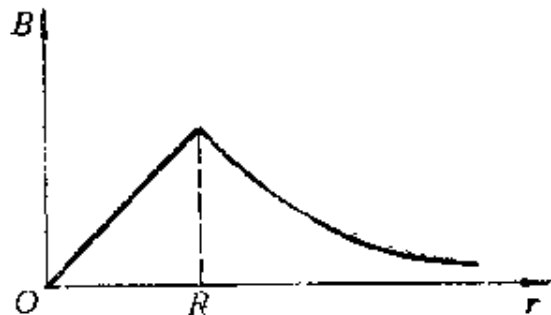


图 8.22 B 随 r 的变化曲线

如图 8.21 所示，由于两板间的电场对圆形平板具有轴对称性，所以磁场的分布也具有轴对称性。磁力线都是垂直于电场而圆心在圆板中心轴上的同心圆，其绕向与 $\frac{dE}{dt}$ 的方向成右手螺旋关系。

取半径为 r_1 的圆周为安培环路 L ， B 的环流为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r_1 B$$

而

$$\frac{d\Phi_e}{dt} = \pi r_1^2 \frac{dE}{dt} = \frac{\pi r_1^2 I}{\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{r_1^2 I}{\epsilon_0 R^2}$$

(8.27) 式给出

$$2\pi r_1 B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{r_1^2 I}{\epsilon_0 R^2} = \mu_0 \frac{r_1^2 I}{R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 r_1 I}{2\pi R^2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0.1 \times 10}{2\pi \times 0.2^2} = 5 \times 10^{-6} \text{ T}$$

对于 r_2 ，由于 $r_2 > R$ ，取半径为 r_2 的圆周为安培环路时，

$$\frac{d\Phi_e}{dt} = \pi R^2 \frac{dE}{dt} = \frac{I}{\epsilon_0}$$

$$2\pi r_2 B = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi \times 0.3} = 6.67 \times 10^{-6} \text{ T}$$

磁场的方向如图 8.21 所示。图 8.22 中画出了板间磁场的大小随离中心轴的距离变化的关系曲线。

§ 8.6 平行电流间的相互作用力

设有两根平行长直导线, 分别通有电流 I_1 和 I_2 , 它们之间的距离为 d (图 8.23), 让我们来求每根导线单位长度线段受另一电流的磁场的作用力。(导线直径 $\ll d$)。

电流 I_1 在电流 I_2 处所产生的磁场为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

载有电流 I_2 的导线单位长度线段受的安培力为

$$F_2 = B_1 I_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \quad (8.30)$$

同理, 载流导线 I_1 单位长度线段受电流 I_2 的磁场的作用力也等于这一数值, 即

$$F_1 = B_2 I_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

当电流 I_1 和 I_2 方向相同时, 两导线相吸; 相反时, 则相斥。

在国际单位制中, 电流强度的单位“安培”(A) 就是根据 (8.30) 式规定的。设在真空中两根无限长的平行直导线相距 1m, 通以大小相同的稳恒电流, 如果导线每米长度受的作用力为 $2 \times 10^{-7} \text{N}$, 则每根导线中的电流强度就规定为 1 “安培”。

根据这一定义, 由于 $d = 1\text{m}$, $I_1 = I_2 = 1\text{A}$, $F = 2 \times 10^{-7} \text{N}$, (8.30) 式给出

$$\mu_0 = \frac{2\pi F d}{I^2} = \frac{2\pi \times 2 \times 10^{-7} \times 1}{1 \times 1} = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$$

这一数值与 § 8.1 中 (8.4) 式给出的值相同。

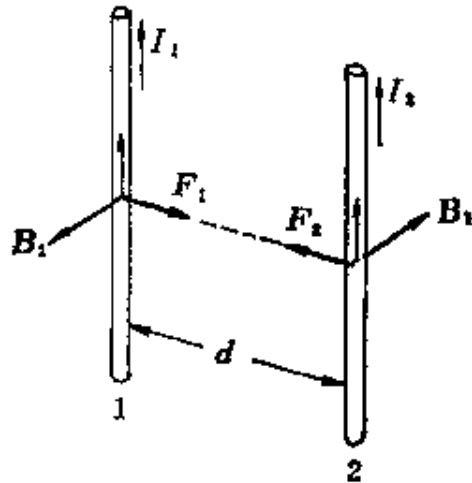


图 8.23 两平行载流长直导线之间的作用力

电流强度的单位确定之后,电量的单位也就可以确定了。在通有 1A 电流的导线中,每秒钟流过导线任一横截面上的电量就定义为 1C(库仑)。

下面我们计算一下相互平行且相距为 d 的两条长直带电线沿长度方向运动时所形成的电流之间的相互作用力,并且比较一下它们之间的磁力与电力的大小。如图 8.24 所示,两根带电直线分别以速度 v_1 和 v_2 平行匀速运动,它们的线电荷密度分别为 λ_1 和 λ_2 。每根带电线上的电流分别为 $\lambda_1 v_1$ 和 $\lambda_2 v_2$ 。由(8.30)式可得,这两根带电线单位长度线段相互作用的磁力为

$$F_m = \frac{\mu_0 \lambda_1 v_1 \lambda_2 v_2}{2\pi d}$$

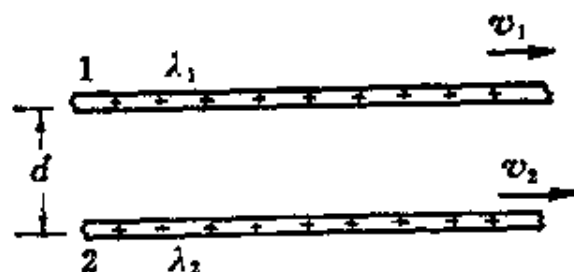


图 8.24 两平行运动的带电直导线相互作用力

至于两根带电线间的电力作用,已知 λ_1 带电线上的运动电荷在 λ_2 带电线处的电场强度为

$$E_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 d}$$

λ_2 带电线单位长度上的电荷 λ_2 受的电力为

$$F_e = E_1 \lambda_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 d} \quad (8.31)$$

因而磁力与电力的比值为

$$\frac{F_m}{F_e} = \epsilon_0 \mu_0 v_1 v_2 = \frac{v_1 v_2}{c^2} \quad (8.32)$$

式中 $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, c 为光速 $c = 3 \times 10^8$ m/s。

让我们通过一个典型的例子来估计一下(8.32)式中的比值大小。设两根平行的载电流分别为 I_1 和 I_2 的静止铜导线,导线中的正电荷几乎是不动的,而自由电子则作定向运动,它们的漂移速度约为 10^{-4} m/s,

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-25}$$

这就是说，这两根导线中的运动电子之间的磁力与它们之间的电力之比为 10^{-25} 。磁力比电力小得很多。那为什么在这种情况下实验中总是观察到磁力而发现不了电力呢？这是因为在铜导线中实际有两种电荷，每根导线中各自的正、负电荷在周围产生的电场相互抵消，所以此一导线中的运动电子就不受彼一导线中电荷的电力，而只有磁力显现出来了。在没有相反电荷抵消电力的情况下，磁力是相对很不显著的。在原子内部电荷的相互作用就是这样。在那里电力起主要作用，而磁力不过是一种小到“二级”(v^2/c^2)的效应。

本章提要

1. *匀速运动点电荷的磁场:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q (1 - \beta^2)}{4\pi r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}$$

非相对论形式: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}$

其中真空的磁导率:

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$$

2. 毕奥-萨伐定律: 电流元的磁场

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}$$

无限长直电流的磁场: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

载流长直螺线管内的磁场: $B = \mu_0 n I$

3. 安培环路定理: (适用于稳恒电流)

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_n$$

4. 与变化电场相联系的磁场:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

普遍的安培环路定理:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \right)$$

思 考 题

8.1 一个均匀密绕的长直螺线管,单位长度上匝数为 n , 电流为 I , 试应用安培环路定理推导出在该螺线管内的磁场为 $\mu_0 n I$ 。

8.2 在电子仪器中,为了减弱与电源相联的两条导线的磁场,通常总是把它们扭在一起。为什么?

8.3 在电子学中,载有大小相等方向相反的电流的那些导线,通常是扭在一起的,其目的是什么?

8.4 从回旋加速器中射出一束高速质子流,该质子流是否在周围空间产生磁场和电场?

8.5 圆形平面回路中载有电流 I , 试问回路内部各点的 \mathbf{B} 是否均匀? 定性解释之。

8.6 考虑一个闭合的面,它包围磁铁棒的一个磁极。通过该闭合面的磁通量是多少?

8.7 磁场是不是保守场?

8.8 在无电流的空间区域内,如果磁力线是平行直线,那么磁场一定是均匀场。试证明之。

8.9 沿在外面围绕一长直密绕螺线管(通有电流 I) 的闭合回路 L ,

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = ?$$

8.10 图 8.21 中的电容器充电(电流 I 方向如图示)和放电(电流 I 的方向与图示方向相反)时,板间位移电流的方向各如何? r_1 处的磁场方向又各如何?

*8.11 考虑一个以恒速运动的正电荷的电场。问:在该电荷运动的正前方垂直于电荷速度的圆面积所载的位移电流的方向是什么?在该电荷运动

的正后方呢?

习 题

*8.1 两个电子并排以相同的速率 $c/3$ (c 为光速) 运动, 二者之间的距离是 $1 \times 10^{-10} \text{m}$. 求它们之间的相互作用力。

*8.2 两个质子某一时刻相距为 a , 其中质子 1 沿着两质子连线方向离开质子 2, 以 v_1 的速度运动。质子 2 垂直于二者连线方向以 v_2 的速度运动。求此时刻每个质子受另一质子的作用力的大小和方向。这两个力是否服从牛顿第三定律?

8.3 求图 8.25 各图中 P 点的磁感应强度 B 的大小和方向:

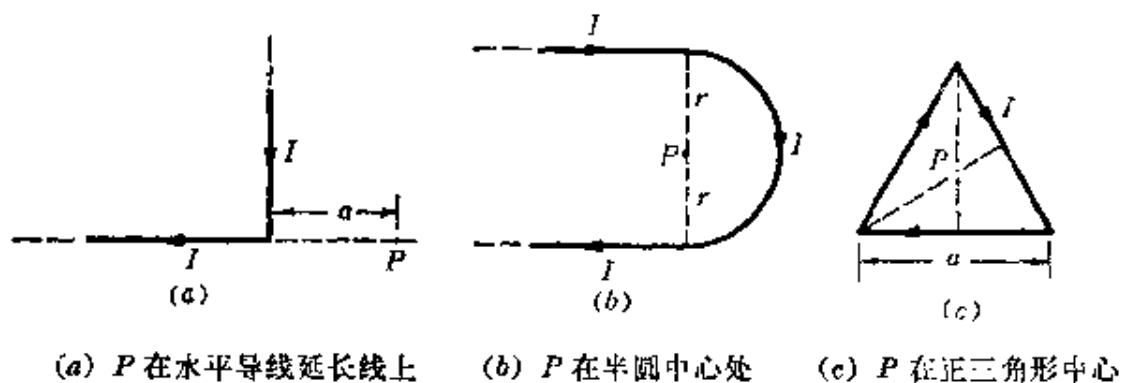


图 8.25

8.4 如图 8.26 所示, 求半圆形电流 I 在半圆的轴线上离圆心距离 x 处的 B 。

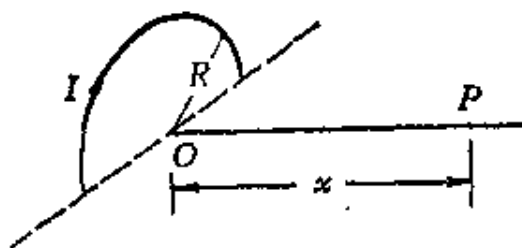


图 8.26

8.5 连到一个大电磁铁, 通有 $I = 5.0 \times 10^3 \text{A}$ 的电流的长引线构造如下: 中间是一直径为 5.0cm 的铝棒, 周围同轴地套以内直径为 7.0cm , 外直径为 9.0cm 的铝筒作为电流的回程 (筒与棒间充以油类并使之流动以散热)。在每件导体的截面上电流密度均匀。计算从轴心到圆筒外侧的磁场分布 (铝和油本身对磁场分布无影响), 并画出相应的关系曲线。

8.6 如图 8.27 所示, 线圈均匀密绕在截面为长方形的整个木环上 (木

料对磁场分布无影响), 共有 N 匝, 求通入电流后, 环内外磁场的分布。

8.7 在闪电中电流可高达 $2 \times 10^4 \text{ A}$, 问距闪电电流 1.0 m 处的磁感应强度多大? 把闪电电流视作长直电流。

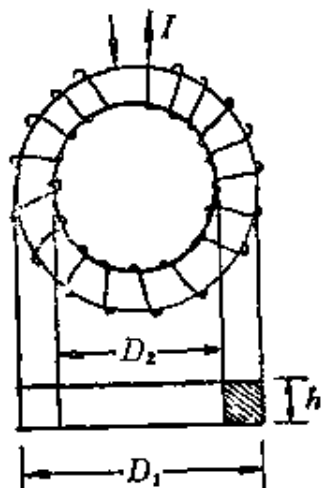


图 8.27

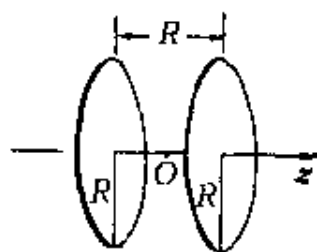


图 8.28

8.8 高压输电线在地面上空 25 m 处, 通过电流为 $1.8 \times 10^3 \text{ A}$, 求;

(1) 在地面上由这电流所产生的磁感应强度多大?

(2) 在上述地区, 地磁场为 $0.6 \times 10^{-4} \text{ T}$, 问输电线产生的磁场与地磁场相比如何?

8.9 在汽船上, 指南针装在相距载流导线 0.80 m 处, 该导线中电流为 20 A 。

(1) 该电流在指南针所在处的磁感应强度多大? (导线作为长直导线处理);

(2) 地磁场的水平分量 (向北) 为 $0.18 \times 10^{-4} \text{ T}$ 。由于导线中电流的磁场作用, 指南针的指向要偏离正北方向。如果电流的磁场是水平的而且与地磁场垂直, 指南针将偏离最大。求在最坏情况下, 上述汽船中的指南针偏离正北方向多少度。

8.10 亥姆霍兹 (Helmholtz) 线圈常用于在实验室中产生均匀磁场。这线圈由两个相互平行的共轴的细线圈组成 (图 8.28)。线圈半径为 R , 两线圈相距也为 R , 线圈中通以同方向的相等电流,

(1) 求 z 轴上任一点的磁感应强度;

(2) 证明在 $z=0$ 处 $\frac{dB}{dz}$ 和 $\frac{d^2B}{dz^2}$ 两者都为零。

8.11 一个塑料圆盘,半径为 R ,表面均匀分布电量 q 。试证明:当它绕通过盘心而垂直于盘面的轴以角速度 ω 转动时

(1) 盘心处的磁感应强度为: $B = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}$;

(2) 圆盘的磁矩为: $p_m = \frac{1}{4} q \omega R^2$ 。

8.12 无限长导体圆柱沿轴向通以电流 I ,截面上各处电流密度均匀分布,柱半径为 R 。求柱内外磁场分布。

8.13 将一均匀分布着电流的无限大载流平面放入均匀磁场中,电流方向与此磁场垂直。已知平面两侧的磁感应强度分别为 B_1 和 B_2 (图 8.29),求该载流平面单位面积所受的磁场力的大小和方向。

8.14 两条无限长平行直导线相距 5.0cm,各通以 30 A 的电流。求一条导线上每单位长度受的磁力多大?如果导线中没有正离子,只有电子在定向运动,则当电流都是 30 A 的一条导线的每单位长度受另一条导线的电力多大?电子的定向运动速度为 1.0×10^{-3} m/s。

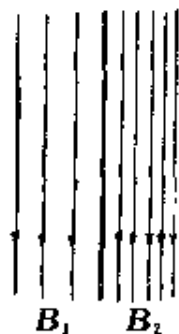


图 8.29



图 8.30

8.15 10 A 的电流均匀地流过一根长直铜导线。在导线内部作一平面 S ,一边为轴线,另一边在导线外壁上,长度为 1 m,如图 8.30 所示。试计算通过此平面的磁通量。(铜材料本身对磁场分布无影响)。

8.16 如图 8.31 所示,一半径为 R 的无限长半圆柱面导体,其上电流与其轴线上一无限长直导线的电流等值反向,电流 I 在半圆柱面上均匀分布,试求:

(1) 轴线上导线单位长度所受的力;

(2) 若将另一无限长直导线(通有大小、方向与半圆柱面相同的电流 I) 代替圆柱面,产生同样的作用力,该导线应放在何处?

8.17 两平行直导线相距 $d=40\text{cm}$, 每根导线载有电流 $I_1=I_2=20\text{A}$, 如图 8.32 所示, 求:

- (1) 两导线所在平面内与该两导线等距离的一点处的磁感应强度;
- (2) 通过图中斜线所示面积的磁通量。 ($r_1=r_3=10\text{cm}$, $l=25\text{cm}$)



图 8.31

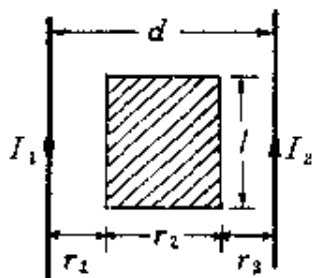


图 8.32

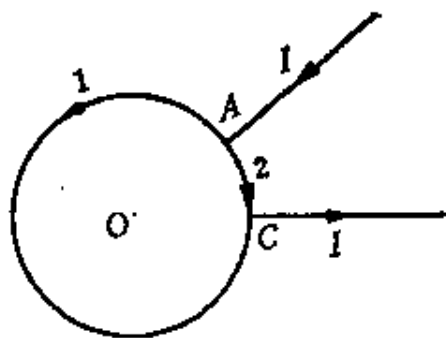


图 8.33

8.18 两根导线沿半径方向被引到铁环上 A 、 C 两点。电流方向如图 8.33 所示, 求环中心 O 处的磁感应强度是多少?

*8.19 有一长圆柱形导体, 截面半径为 R 。今在导体中挖去一个与轴平行的圆柱体, 形成一个截面半径为 r 的圆柱形空洞。求在有洞的导体柱内有电流沿柱轴方向流通时, 在洞中各处的磁场分布。设柱内电流均匀分布, 电流密度为 J 。(柱轴到空洞轴之间的距离为 d)。

*8.20 在图 8.1 中, 取一垂直于电荷运动方向而且圆心在电荷运动的轨迹直线上的一个圆面积。计算通过此一圆面积的电通量 Φ_e 。并进而利用 (8.27) 式求出此圆面积边缘上的 B 来。它应该就是 (8.6) 式 (只计算非相对论情况)。

这一计算说明, 匀速运动电荷的磁场也是和电场的变化率相联系的。

8.21 一平行板电容器的两板都是半径为 5.0cm 的圆导体片, 在充电时, 其中电场强度的变化率为 $\frac{dE}{dt} = 1.0 \times 10^{12} \text{ V/m}\cdot\text{s}$

- (1) 求两极板间的位移电流;
- (2) 求极板边缘的磁感应强度 B 。

8.22 在一对平行圆形极板组成的电容器(电容 $C=1 \times 10^{-12} \text{ F}$)上, 加上频率为 50 Hz , 峰值为 $1.74 \times 10^5 \text{ V}$ 的交变电压, 计算极板间的位移电流的最大值。

科学家介绍

麦克斯韦 (James Clerk Maxwell 1831—1879)

在法拉第发现电磁感应现象那一年，1831年，麦克斯韦在英国的爱丁堡出生了。他从小聪敏好问。父亲是个机械设计师，很赏识自己儿子的才华，常带他去听爱丁堡皇家学会的科学讲座。十岁时送他进爱丁堡中学。在中学阶段，麦克斯韦就显示了在数学和物理方面的才能，十五岁那年就写了一篇关于卵形线作图法的



麦克斯韦像

A TREATISE
—
ELECTRICITY AND MAGNETISM

BY
JAMES CLERK MAXWELL, M.A.

M.A. 1857, F.R.S., F.R.S.E., F.R.S.E., F.R.S.E., F.R.S.E.

SCOTLAND TALKER OF 1857, 1858, 1859

(SCOTLAND TALKER OF 1857, 1858, 1859, 1860, 1861, 1862, 1863, 1864, 1865, 1866, 1867, 1868, 1869, 1870, 1871, 1872, 1873, 1874, 1875, 1876, 1877, 1878, 1879, 1880, 1881, 1882, 1883, 1884, 1885, 1886, 1887, 1888, 1889, 1890, 1891, 1892, 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907, 1908, 1909, 1910, 1911, 1912, 1913, 1914, 1915, 1916, 1917, 1918, 1919, 1920, 1921, 1922, 1923, 1924, 1925, 1926, 1927, 1928, 1929, 1930, 1931, 1932, 1933, 1934, 1935, 1936, 1937, 1938, 1939, 1940, 1941, 1942, 1943, 1944, 1945, 1946, 1947, 1948, 1949, 1950, 1951, 1952, 1953, 1954, 1955, 1956, 1957, 1958, 1959, 1960, 1961, 1962, 1963, 1964, 1965, 1966, 1967, 1968, 1969, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025)

VOL. II
THIRD EDITION

OXFORD UNIVERSITY PRESS
LONDON: GEOFFREY CUMBERLEGE

155873

《电学和磁学通论》一书的扉页

论文,被刊登在《爱丁堡皇家学会学报》上。1847年,十六岁的麦克斯韦考入爱丁堡大学。1850年又转入剑桥大学。他学习勤奋,成绩优异,经著名数学家霍普金斯和斯托克斯的指点,很快就掌握了当时先进的数学理论。这为他以后的发展打下了良好的基础。1854年在剑桥大学毕业后,麦克斯韦曾先后任亚伯丁马里夏尔学院、伦敦皇家学院和剑桥大学物理学教授。他的口才不行,讲课效果较差。

麦克斯韦在电磁学方面的贡献是总结了库仑、高斯、安培、法拉第、诺埃曼、汤姆逊等人的研究成果,特别是把法拉第的力线和场的概念用数学方法加以描述、论证、推广和提升,创立了一套完整的电磁场理论。他自己在1873年谈论他的巨著《电学和磁学通论》时曾说过:“主要是怀着给[法拉第]的这些概念提供数学方法基础的愿望,我开始写作这部论著”。

1855—1856年,麦克斯韦发表了关于电磁场的第一篇论文《论法拉第的力线》。在这篇文章中,他把法拉第的力线和不可压缩流体中的流线进行类比,用数学形式——矢量场来描述电磁场,并总结了六个数学公式(有代数式,微分式和积分式)来表示电流、电场、磁场、磁通量以及矢势之间的关系。这是他把法拉第的直观图象数学化的第一次尝试。此后麦克斯韦电磁场理论就是在这个基础上发展起来的。

1860年麦克斯韦转到伦敦皇家学院任教。一到伦敦,他就带着这篇论文拜访年近古稀的法拉第。法拉第四年前看到过这篇论文,会见时对麦克斯韦大加赞赏地说:“我不认为自己的学说一定是真理,但你是真正理解它的人。”“这是一篇出色的文章,但你不应该停留在用数学来解释我的观点,而应该突破它。”麦克斯韦大受鼓舞,而且后来也确实没有辜负老人的期望。

1861年麦克斯韦对法拉第电磁感应现象进行深入分析时,认

为即使没有导体回路,变化的磁场也应在其周围产生电场。他把这种电场称做**感应电场**。有导体回路时,这电场就在回路中产生感应电动势从而激起感应电流。这一假设是对法拉第实验结论的第一个突破。它揭示了变化的磁场和电场相联系。

同年12月,在给汤姆逊的信中,麦克斯韦提出了**位移电流**的概念,认为对变化的电磁现象来说,安培定律的电流项中必须加入电场变化率一项才能与电荷守恒无矛盾,这一提法又是一个第一流的独创。它揭示了变化的电场和磁场相联系。

1862年,麦克斯韦发表了《论物理的力线》一文。这篇论文除了更仔细地阐述位移电流概念(先是电介质中的,再是真空即以太中的)外,主要是提出一种以太管模型来构造法拉第的力线并用以解释排斥、吸引、电流产生磁场、电磁感应等现象。这个模型现在看来比较勉强。麦克斯韦本人此后也再没有使用这样的模型。

1864年,麦克斯韦发表了《电磁场动力论》。在这篇论文中,他明确地把自己的理论叫做“场的动力理论”,而且定义“电磁场是包含和围绕着处于电或磁的状态之下的一些物体的那一部分空间,它可以充满着某种物质,也可以被抽成真空。”在这一篇论文中他提出一套完整的方程组(共有20个方程式),并由此方程组导出了电场和磁场相互垂直而且和传播方向相垂直的电磁波。他给出了电磁波的能量密度以及能流密度公式。更奇妙的是,从这一方程组中,他得出了电磁波的传播速度是 $1/\sqrt{\mu\epsilon}$,在真空中是 $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$,而后者等于电量的电磁单位和静电单位之比,其值是 3×10^{10} cm/s,正好等于由实验测得的光速(这一巧合,在1863年他和詹金研究电磁学单位制时也得到过)。这一结果促使麦克斯韦提出“光是一种按照电磁规律在场内传播的电磁扰动”的结论。这一点在1868年他发表的《关于光的电磁理论》中更明确地肯定下来了。20年后赫兹用实验证实了这个论断。就这样,原来被认为是互相独立

的光现象和电磁现象互相联系起来。这是在牛顿之后人类对自然的认识史上的又一次大综合。

1873年，麦克斯韦出版了他的关于电磁学研究的总结性论著《电学和磁学通论》。在这本书中他汇集了前人的发现和他自己的独创，对电磁场的规律作了全面系统而严谨的论述，写下了11个方程（以矢量形式表示）。他还证明了“唯一性定理”，从而说明了这一方程组是完整而充分地反映了电磁场运动的规律（现代教科书中用四个公式表示的完整方程组是1890年赫兹写出的）。就这样，麦克斯韦从法拉第的力线概念出发，经过坚持不懈的研究得到了一套完美的数学理论。这一理论概括了当时已发现的所有电磁现象和光现象的规律。它是在牛顿建立力学理论之后人类思想的又一光辉成就。

《电学和磁学通论》出版后，麦克斯韦即转入筹建卡文迪什实验室的工作并担任了它的第一任主任（该实验室后来出了汤姆逊、卢瑟福等第一流的物理学家）。整理卡文迪什遗作的繁重工作耗费了他很大的精力。1879年，年仅48岁的麦克斯韦由于肺结核不治而过早地离开了人间。

除了在电磁学方面的伟大贡献外，麦克斯韦还是分子运动论的奠基人之一。他第一次用几率的数学概念导出了气体分子的速率分布定律。他也用分子的刚性球模型研究了气体分子的碰撞和输运过程。他的关于内摩擦的理论结论和他自己做的实验结果的相符曾有力地支持了分子运动论。

第九章 磁场中的磁介质

本章要求

1. 理解三种磁介质磁化的微观机制和束缚电流的产生,了解磁化强度的意义。
2. 理解磁场强度 H 的定义及 H 的环路定理的意义并能利用它们求解有磁介质存在时具有一定对称性的磁场的问题。
3. 了解铁磁介质的特性,包括它的 μ_r 值、磁滞效应、磁滞回线、磁畴等的意义。
4. 会计算简单的磁路问题。

§ 9.1 磁介质对磁场的影响

上两章讨论了真空中磁场的规律,在实际应用中,常需要了解物质中磁场的规律。由于物质的分子(或原子)中都存在着运动的电荷,所以当物质放到磁场中时,其中的运动电荷将受到磁力的作用而使物质处于一种特殊的状态中,处于这种特殊状态的物质又会反过来影响磁场的分布。本章将讨论物质和磁场相互影响的规律。

在考虑物质受磁场的影响或它对磁场的影响时,它们统称为**磁介质**。磁介质对磁场的影响可以通过实验观察出来。最简单的方法是做一个长直螺线管(图 9.1)。先让管内是真空(或空气)(图 9.1a),沿导线通入电流 I ,测出此时管内的磁感应强度的大小(测

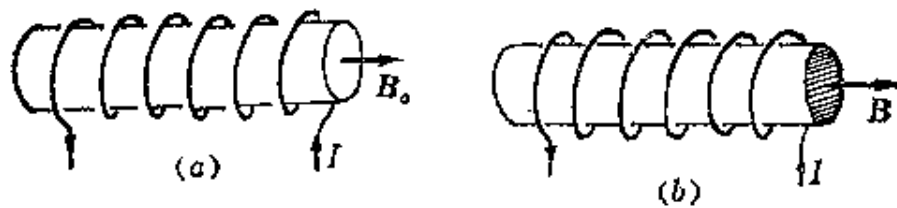


图 9.1 磁介质对磁场的影响

量的方法可以用第七章习题 7.5 的安培秤的方法,也可以用在下一章要讲的电磁感应的方法)。然后使管内充满某种磁介质材料(图 9.1 b),保持电流 I 不变,再测出此时管内磁介质内部的磁感应强度的大小。以 B_0 和 B 分别表示管内为真空和充满磁介质时的磁感应强度,则实验结果显示出二者的数值不同,它们的关系可以用下式表示

$$B = \mu_r \cdot B_0 \quad (9.1)$$

式中 μ_r 叫磁介质的相对磁导率,它随磁介质的种类或状态的不同而不同(表 9.1)。有的磁介质的 μ_r 是略小于 1 的常数,这种磁介质叫抗磁质。有的磁介质的 μ_r 是略大于 1 的常数,这种磁介质叫

表 9.1 几种磁介质的相对磁导率

磁 介 质 种 类		相对磁导率
抗 磁 质 $\mu_r < 1$	铋(293K)	$1 - 16.6 \times 10^{-6}$
	汞(293K)	$1 - 2.9 \times 10^{-5}$
	铜(293K)	$1 - 1.0 \times 10^{-5}$
	氢(气体)	$1 - 3.98 \times 10^{-5}$
顺 磁 质 $\mu_r > 1$	氧(液体, 90K)	$1 + 769.9 \times 10^{-6}$
	氧(气体, 293K)	$1 + 344.9 \times 10^{-6}$
	铝(293K)	$1 + 1.65 \times 10^{-5}$
	铂(293K)	$1 + 26 \times 10^{-5}$
铁 磁 质 $\mu_r \gg 1$	纯 铁	5×10^3 (最大值)
	硅 钢	7×10^3 (最大值)
	坡莫合金	1×10^5 (最大值)

顺磁质。这两种磁介质对磁场的影响很小，一般技术中常不考虑它们的影响。还有一种磁介质，它的 μ_r 比 1 大得多，而且还随 B_0 的大小发生变化，这种磁介质叫**铁磁质**。它们对磁场的影响很大，在电工技术中有广泛的应用。

为什么磁介质对磁场有这样的影响？这要由磁介质受磁场的影响而发生的改变来说明。这就涉及到磁介质的微观结构，下面我们来说明这一点。

§ 9.2 磁介质的磁化

在原子内，核外电子有绕核的轨道运动，同时还有自旋，核也有自旋运动。这些运动都形成微小的圆电流。我们知道，一个小圆电流所产生的磁场或它受磁场的作用都可以用它的**磁偶极矩**（简称**磁矩**）来说明。以 I 表示电流，以 S 表示圆面积，则一个圆电流的磁矩为

$$\mathbf{p}_m = IS\hat{n}$$

其中 \hat{n} 为圆面积的正法线方向，它与电流流向满足右手螺旋关系。

下面我们用一个简单的模型来估算原子内电子轨道运动的磁矩的大小。假设电子在半径为 r 的圆周上以恒定的速率 v 绕原子核运动。电子轨道运动的周期就是 $\frac{2\pi r}{v}$ 。由于每个周期内通过轨道上任一“截面”的电量为一个电子的电量 e ，因此，沿着圆形轨道的电流就是

$$I = \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r}$$

而电子轨道运动的磁矩为

$$\mathbf{p}_m = IS = \frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2} \quad (9.2)$$

以氢原子为例，在氢原子中，常态下电子与原子核的距离为 $r = 0.53 \times 10^{-10} \text{m}$ ，电子轨道运动的速率 $v = 2.2 \times 10^6 \text{m/s}$ ，因此由 (9.2) 式可求得电子的轨道磁矩为

$$p_m = \frac{evr}{2} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 2.2 \times 10^6 \times 0.53 \times 10^{-10}}{2} \\ = 0.93 \times 10^{-23} \text{A} \cdot \text{m}^2$$

实验证明，电子的自旋磁矩和这一轨道磁矩同数量级，为

$$p_s = 0.927 \times 10^{-23} \text{A} \cdot \text{m}^2$$

在一个分子中有许多电子和若干个核，一个分子的磁矩是其中所有电子的轨道磁矩和自旋磁矩以及核的自旋磁矩的矢量和。有些分子在正常情况下，其磁矩的矢量和为零。由这些分子组成的物质就是抗磁质。有些分子在正常情况下其磁矩的矢量和具有一定的值，这个值叫分子的固有磁矩。由这些分子组成的物质就是顺磁质。铁磁质是顺磁质的一种特殊情况，它们的分子或原子之间的相互作用使它们具有很强的磁性。

当顺磁质放入磁场中时，其分子固有磁矩就要受到磁场的力矩的作用。这力矩力图使分子的磁矩的方向转向与外磁场方向一致。由于分子的热运动的妨碍，各个分子的磁矩的这种取向不可能完全整齐。外磁场越强，分子磁矩排列得越整齐，正是这种排列使它原磁场发生了影响。

抗磁质的分子没有固有磁矩，但为什么也能受磁场的影响并进而影响磁场呢？这是因为抗磁质的分子在外磁场中产生感应磁矩的缘故。感应磁矩产生的过程如下。

以电子的轨道运动为例。如图 9.2 (b)、(c) 所示。电子作轨道运动时，具有一定的角动量，以 \mathbf{L} 表示此角动量，它的方向与电子运行的方向有右手螺旋关系。电子的轨道运动使它也具有磁矩 p_m 。由于电子带负电，这一磁矩的方向和它的角动量 \mathbf{L} 的方向相

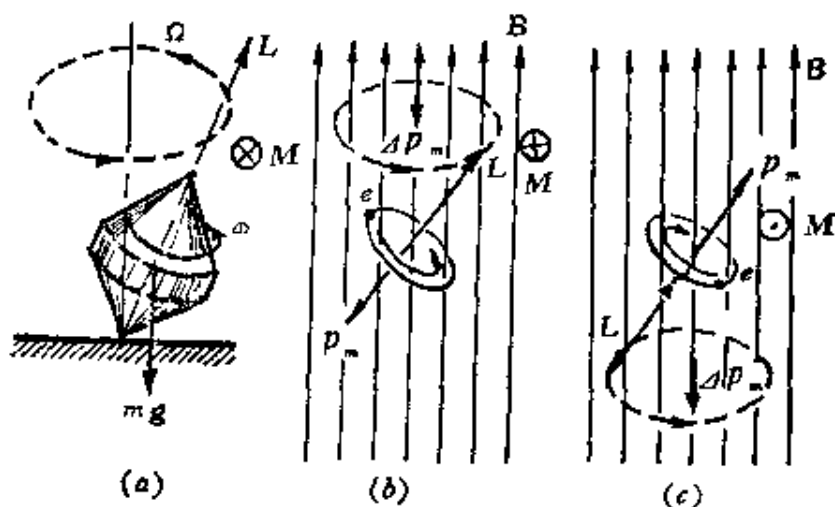


图 9.2 电子轨道运动在磁场中的进动与感应磁矩

反。

当分子处于磁场中时,其电子的轨道运动要受到力矩的作用,这一力矩为 $M = p_m \times B$ 。在图 9.2 (b) 所示的时刻,电子轨道运动所受的磁力矩方向垂直于纸面向里。具有角动量的运动物体在力矩作用下是要发生进动的,正如图 9.2(a) 中的转子在重力矩的作用下,它的动量要绕竖直轴按逆时针方向(俯视)进动一样。在图 9.2(b) 中做轨道运动的电子,由于受到力矩的作用,它的角动量 L 也要绕与磁场 B 平行的轴按逆时针方向(迎着 B 看)进动。与这一进动相应,电子除了原有的轨道磁矩 p_m 外,又具有了一个附加磁矩 Δp_m , 此附加磁矩的方向正好与外磁场 B 的方向相反。对于图 9.2(c) 所示的沿相反方向作轨道运动的电子,它的角动量 L 与轨道磁矩 p_m 的方向都与(b) 中的电子的相反。相同方向的外磁场将对电子的轨道运动产生相反方向的力矩 M 。这一力矩也使得角动量 L 沿与 B 平行的轴进动,进动的方向仍然是逆时针(迎着 B 看)的,因而所产生的附加磁矩 Δp_m 也和外磁场 B 的方向相反。因此,不管电子轨道运动方向如何,外磁场对它的力矩的作用总是要使它产生一个与外磁场方向相反的附加磁矩。对电子

的以及核的自旋,外磁场也产生相同的效果。

因此,在外磁场的力矩的作用下,一个分子内的所有电子或核都产生与外磁场方向相反的附加磁矩。这些附加磁矩的矢量和就是一个分子在磁场中所产生的感应磁矩。感应磁矩的方向总是和外磁场的方向相反的。受磁场影响的抗磁质就是通过这样的感应磁矩而影响原来的磁场的。

在实验室通常能获得的磁场中,一个分子所产生的感应磁矩要比分子的固有磁矩小到5个数量级以下,就是由于这个原因,虽然顺磁质的分子在外磁场中也要产生感应磁矩,但和它的固有磁矩相比,前者的效果是可以忽略不计的。

一块顺磁质放到外磁场中时,它的分子的固有磁矩要沿着磁场方向取向(图 9.3 a)。一块抗磁质放到外磁场中时,它的分子要产生感应磁矩(图 9.3b)。考虑和这些磁矩相对应的小圆电流,可以发现在磁介质内部各处总是有相反方向的电流流过,它们的磁作用就相互抵消了。但在磁介质表面上,这些小圆电流的外面部分未被抵消,它们都沿着相同的方向流通,这些表面上的小电流的总效果相当于在介质圆柱体表面上有一层电流流过。这种电流叫**束缚电流**,也叫**磁化电流**。在图 9.3 中,其面电流密度用 j' 表示。它是分子内的电荷运动一段段接合而成的,不同于金属中由自由电子定向运动形成的传导电流。对比之下,金属中的传导电流(以及其它由电荷的宏观移动形成的电流)可称作**自由电流**。

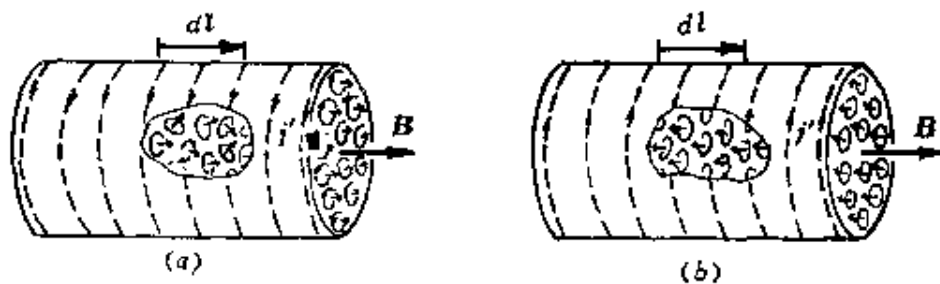


图 9.3 磁介质表面束缚电流的产生

由于顺磁质分子的固有磁矩在磁场中的定向排列或抗磁质分子在磁场中产生了感应磁矩，因而在磁介质的表面上出现束缚电流的现象叫**磁介质的磁化**^[注]。顺磁质的束缚电流的方向与磁介质中外磁场的方向有右手螺旋关系，它产生的磁场要加强磁介质中的磁场。抗磁质的束缚电流的方向与磁介质中外磁场的方向有左手螺旋关系，它产生的磁场要减弱磁介质中的磁场。这就是两种磁介质对磁场影响不同的原因。

磁介质磁化后，在一个小体积内的各个分子的磁矩的矢量和都将不再是零。顺磁质分子的固有磁矩排列得越整齐，它们的矢量和就越大。抗磁质分子所产生的感应磁矩越大，它们的矢量和也越大。因此可以用单位体积内分子磁矩的矢量和表示磁介质磁化的程度。单位体积内分子磁矩的矢量和叫**磁介质的磁化强度**。以 $\sum \mathbf{p}_{mi}$ 表示宏观体积元 ΔV 内的磁介质的所有分子的磁矩的矢量和，以 \mathbf{M} 表示磁化强度，则有

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{p}_{mi}}{\Delta V} \quad (9.3)$$

式中 \mathbf{p}_{mi} 表示在体积为 ΔV 的磁介质中的某个分子的磁矩。

在国际单位制中，磁化强度的单位是安/米(记作 A/m)，它的量纲和面电流密度的量纲相同。

顺磁质和抗磁质，它们的磁化强度都随外磁场的增强而增大。实验证明在一般的实验条件下，各向同性的顺磁质或抗磁质(以及铁磁质在一定条件下)的磁化强度都和外磁场 \mathbf{B} 成正比，其关系可表示为

$$\mathbf{M} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \mathbf{B} \quad (9.4)$$

式中 μ_r 即磁介质的相对磁导率。(比例式写成这种特殊复杂的形

[注] 非均匀磁介质放在外磁场中时，磁介质内部还可以产生体束缚电流。

式是由于历史的原因)。

由于磁介质的束缚电流是磁介质磁化的结果, 所以束缚电流和磁化强度之间一定存在着某种定量关系。下面我们来求这一关系。

考虑磁介质内部一长度元 dl 。它和外磁场 B 的方向之间的夹角为 θ 。由于磁化, 分子磁矩要沿 B 的方向排列, 因而等效分子电流的平面将转到与 B 垂直的方向。设每个分子的分子电流为 i , 它所环绕的圆周半径为 r , 则与 dl 较链的 (即套住 dl 的) 分子电流的中心都将位于以 dl 为轴线、以 πr^2 为底面积的斜柱体内 (图 9.4)。以 n 表示单位体积内的分子数, 则与 dl 较链的总分子电流为

$$dI' = n\pi r^2 dl \cos\theta \cdot i$$

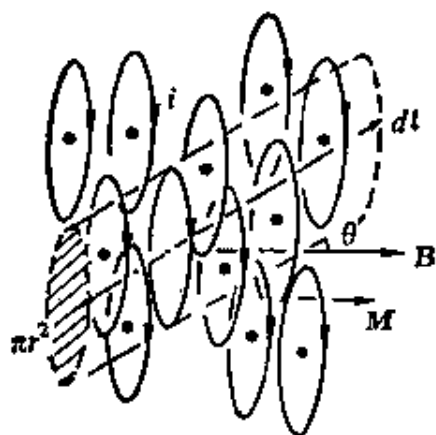


图 9.4

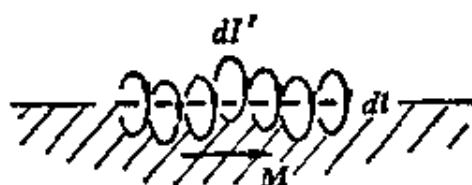


图 9.5

由于 $\pi r^2 i = p_m$, 为一个分子的磁矩, np_m 为单位体积内分子磁矩的矢量和, 即磁化强度 M , 所以有

$$dI' = M \cos\theta dl = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.5)$$

如果碰巧 dl 是磁介质表面上沿表面的一个长度元, 则 dI' 将表现为面束缚电流。 dI'/dl 称做面束缚电流密度。以 j' 表示面束缚电流密度, 则由 (9.5) 式可得

$$j' = M \cos \theta = M_t \quad (9.6)$$

即面束缚电流密度等于该表面处磁介质的磁化强度沿表面的分量。当 $\theta=0$, 即 M 与表面平行时(图 9.5, 并参看图 9.3),

$$j' = M \quad (9.7)$$

方向与 M 垂直。

现在来求在磁介质内与任意闭合路径 L 铰链的(或闭合路径 L 包围的)总束缚电流(图 9.6)。它应该等于与 L 上各长度元铰链的束缚电流的积分, 即

$$I' = \oint_L dI' = \oint_L M \cdot dl \quad (9.8)$$

这一公式说明, 闭合路径 L 所包围的总束缚电流等于磁化强度沿该闭合路径的环流。

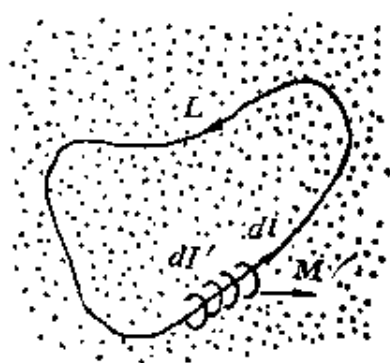


图 9.6

§ 9.3 H 的环路定理

磁介质放在磁场中时, 磁介质受磁场的作用要产生束缚电流。这束缚电流又会反过来影响磁场的分布。这时任一点的磁感应强度 B 应是自由电流的磁场 B_0 和束缚电流的磁场 B' 的矢量和, 即

$$B = B_0 + B' \quad (9.9)$$

由于束缚电流和磁介质磁化的程度有关, 而这磁化的程度又取决于磁感应强度 B , 所以磁介质和磁场的相互影响呈现一种比较复杂的关系。这种复杂关系也可以像研究电介质和电场的相互影响那样, 通过引入适当的物理量而加以简化。下面就通过安培环路定理来导出这种简化表示式。

如图 9.7 所示, 载流导体和磁化了的磁介质组成的系统可视为由一定的自由电流 I_0 和束缚电流 I' (j') 分布组成的电流系统。

所有这些电流产生一磁场分布 \mathbf{B} , 由安培环路定律(8.18)式, 可知对任一闭合路径 L ,

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (\sum I_{0\text{外}} + I'_{\text{内}})$$

将(9.8)式的 I' 代入此式中的 $I'_{\text{内}}$, 移项后可得

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum I_{0\text{外}}$$

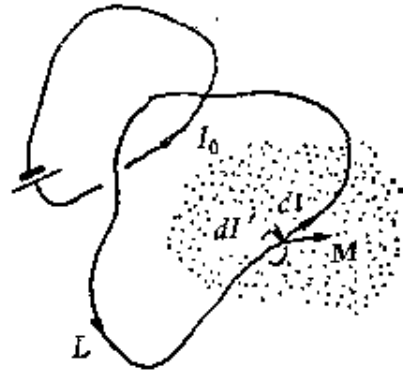


图 9.7

在此, 引入一辅助物理量表示积分号内的合矢量, 叫做**磁场强度**: 并以 \mathbf{H} 表示, 即定义

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (9.10)$$

则上式就可简洁地表示为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_{0\text{外}} \quad (9.11)$$

此式说明沿任一闭合路径磁场强度的环流等于该闭合路径所包围的自由电流的代数和。这一关系叫 \mathbf{H} 的环路定理, 也是电磁学的一条基本定律^[注]。在无磁介质的情况下, $\mathbf{M} = 0$, (9.11) 式还原为(8.18)式。

将(9.4)式的 \mathbf{M} 代入(9.10)式, 可得

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r} \quad (9.12)$$

还常用 μ 代表 $\mu_0 \mu_r$, 即

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (9.13)$$

叫磁介质的**磁导率**, 它的单位与 μ_0 相同。这样, (9.12) 式还可以

[注] 这里讨论的是稳恒电流的情况。对于变化的电流, (9.11) 式等号右侧还需要加上位移电流项, $\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ 。

写成

$$H = \frac{B}{\mu} \quad (9.14)$$

这也是一个点点对应的关系,即在各向同性的磁介质中,某点的磁场强度等于该点的磁感应强度除以该点磁介质的磁导率,二者的方向相同。

在国际单位制中,磁场强度的单位为安/米(A/m)。

(9.11)式和(9.12)式[或(9.14)式]一起是通常分析计算有磁介质存在时的磁场的常用公式。一般是根据自由电流的分布先利用(9.11)式求出 H 的分布,然后再利用(9.12)式求出 B 的分布来。

下面举两个求有磁介质存在时的稳恒电流的磁场分布的例子。

[例 1] 一无限长直螺线管,单位长度上的匝数为 n ,螺线管内充满相对磁导率为 μ_r 的均匀磁介质。今在导线圈内通以电流 I ,求管内磁感应强度和磁介质表面的面束缚电流密度。

解:如图 9.8 所示,由于螺线管无限长,所以管外磁场为零,管内磁场均匀而且 B 与 H 均与管内的轴线平行。过管内任一点 P 作一矩形回路 $abcd$,其中 ab, cd 两边与管轴平行,长为 l, cd 边在管外。磁场强度 H 沿此回路 L 的环流为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ab} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{bc} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{cd} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{da} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Hl$$

此回路所包围的自由电流为 nIl 。根据 H 的环路定理,

$$Hl = nIl$$

由此得

$$H = nI$$

再利用(9.12)式,管内的磁感应强度为

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r nI$$

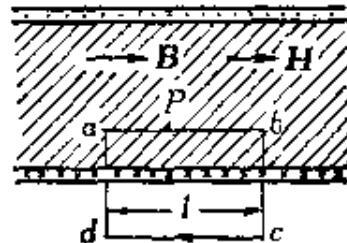


图 9.8

此式表示,螺线管内有磁介质时,其中磁感应强度是真空时的 μ_r 倍。对

于顺磁质和抗磁质, $\mu_r \approx 1$, 磁感应强度变化不大。对于铁磁质, 由于 $\mu_r \gg 1$, 所以其中磁感应强度比真空时可增大到千百倍以上。

在磁介质的表面上存在着束缚电流, 它的方向与螺线管轴线垂直。以 j' 表示这种面束缚电流密度, 则由(9.7)式和(9.4)式可得

$$j' = (\mu_r - 1)nI$$

由此结果可以看出: 对于抗磁质, 有 $\mu_r < 1$, 从而 $j' < 0$, 说明束缚电流方向和传导电流方向相反; 对于顺磁质, 有 $\mu_r > 1$, $j' > 0$, 说明束缚电流方向和传导电流方向相同, 对于铁磁质, 有 $\mu_r \gg 1$, 束缚电流方向和传导电流方向也相同, 而且面束缚电流密度比传导面电流密度(nI)大得多, 因而可以认为这时的磁场基本上是由铁磁质表面的束缚电流产生的。

[例 2] 一根长直单芯电缆的芯是一根半径为 R 的金属导体, 它和导电外壁之间充满相对磁导率为 μ_r 的均匀介质(图 9.9)。今有电流 I 均匀地流过芯的横截面并沿外壁流回。求磁介质中磁感应强度的分布和紧贴导体芯的磁介质表面上的束缚电流。

解: 圆柱体电流所产生的 B 和 H 的分布均具有轴对称性。在垂直于电缆轴的平面内作一圆心在轴上, 半径为 r 的圆周 L 。对此圆周应用 H 的环路定理, 有

$$\oint_L H \cdot dl = 2\pi r H = I$$

由此得

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

再利用(9.12)式, 可得磁介质中的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

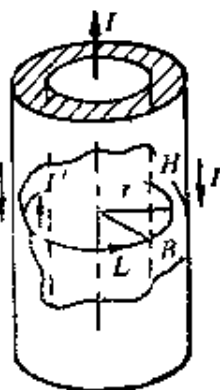


图 9.9

B 线是在与电缆轴垂直的平面内圆心在轴上的同心圆。

磁介质内表面上的磁感应强度为 $B = \mu_0 \mu_r I / 2\pi R$, 再利用(9.7)式和(9.4)式, 可得磁介质内表面上的面束缚电流密度为

$$j' = \frac{\mu_r - 1}{2\pi R} I$$

方向与轴平行。磁介质内表面上的总束缚电流为

$$I' = j' \cdot 2\pi R = (\mu_r - 1)I$$

§ 9.4 铁磁质

铁、钴、镍和它们的一些合金具有明显而特殊的磁性，首先是它们的相对磁导率 μ_r 都比较大，而且随磁场的强弱发生变化。其次是它们都有明显的磁滞效应，下面我们简单地介绍一下铁磁质的特性。

用实验研究铁磁质的性质时通常把铁磁质试样做成环状，外面绕上若干匝线圈（图 9.10）。线圈中通入电流后，铁磁质就被磁化。当这励磁电流为 I 时，环中的磁场强度 H 为

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$

式中 N 为环上线圈的总匝数， r 为环的平均半径。这时环内的 B 可以用另外的方法测出，于是可得一组对应的 H 和 B 的值，改变电流 I ，可以依次测得许多组 H 和 B 的值，这样就可以绘出一条关于试样的 $H \sim B$ 关系曲线以表示试样的磁化特点。这样的曲线叫磁化曲线。

如果从试样完全没有磁化开始，逐渐增大电流 I ，从而逐渐增大 H 时，所得的磁化曲线叫起始磁化曲线，一般如图 9.11 所示。 H 较小时， B 随 H 成正比地增大。 H 再稍大时 B 就开始急剧地但也约成正比地增大，接着增大变慢，当 H 到达某一值后再增大时， B 就几乎不再随 H 增大而增大了。这时铁磁质试样到达了一种磁饱和状态。

根据 $\mu_r = B/\mu_0 H$ ，可以求出不同 H 值时的 μ_r 值， μ_r 随 H 变化的关系曲线也对应地画在图 9.11 中。

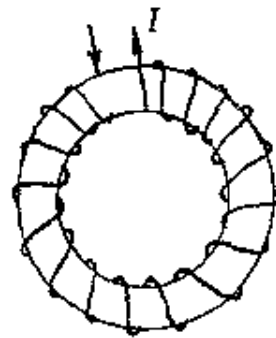


图 9.10 环状铁心被磁化

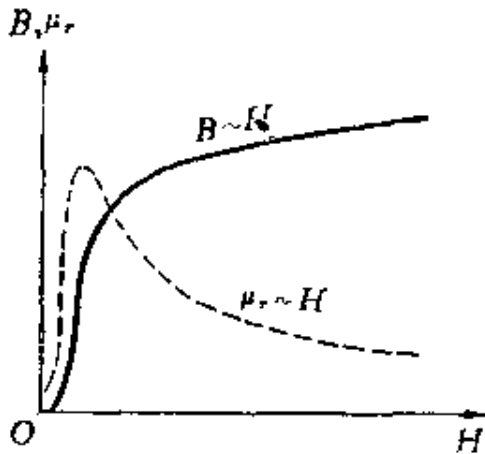


图 9.11 铁磁质中 B 和 μ_r 随 H 变化的曲线

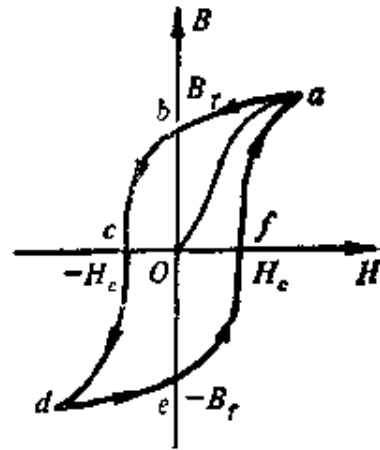


图 9.12 磁滞回线

实验证明,各种铁磁质的起始磁化曲线都是“不可逆”的,即当铁磁质到达磁饱和后,如果慢慢减小磁化电流以减小 H 的值时,铁磁质中的 B 并不沿起始磁化曲线逆向逐渐减小,而是减小得比原来增加时慢。如图 9.12 中 ab 线段所示,当 $I=0$,因而 $H=0$ 时, B 并不等于 0,而是还保持一定的值。这种现象叫磁滞效应。 H 恢复到零时铁磁质内仍保留的磁化状态叫剩磁,相应的磁感应强度常用 B_r 表示。

要想把剩磁完全消除,必须改变电流的方向,并逐渐增大这反向的电流。当 H 增大到 $-H_c$ 时, $B=0$, (图 9.12 中 bc 段)。这个使铁磁质中的 B 完全消失的 H_c 值叫铁磁质的矫顽力。

再增大反向电流以增加 H , 可以使铁磁质达到反向的磁饱和状态(cd 段)。将反向电流逐渐减小到零,铁磁质会达到 $-B_r$ 所代表的反向剩磁状态(de 段)。把电流改回原来的方向并逐渐增大,铁磁质又会经过 H_c 表示的状态而回到原来的饱和状态(efa 段)。这样,磁化曲线就形成了一个闭合曲线,这一闭合曲线叫磁滞回线。由磁滞回线可以看出,铁磁质的磁化状态并不能由励磁电流或 H 值单值地确定,它还取决于该铁磁质此前的磁化历史。

不同的铁磁质的磁滞回线的形状不同，表示它们各具有不同的剩磁和矫顽力 H_c 。纯铁、硅钢、坡莫合金(含铁、镍)等材料的 H_c 很小，因而磁滞回线比较瘦(图 9.13)，这些材料叫**软磁材料**，常用作变压器和电磁铁的铁芯。碳钢、钨钢、铝镍钴合金(含 Fe、Al、Ni、Co、Cu)等材料具有较大的矫顽力 H_c ，因而磁滞回线显得胖(图 9.14)，它们一旦磁化后对外加的较弱磁场有较大的抵抗力，或者说它们对于其磁化状态有一定的“记忆能力”，这种材料叫**硬磁材料**，常用来作永久磁体、记录磁带或电子计算机的记忆元件。

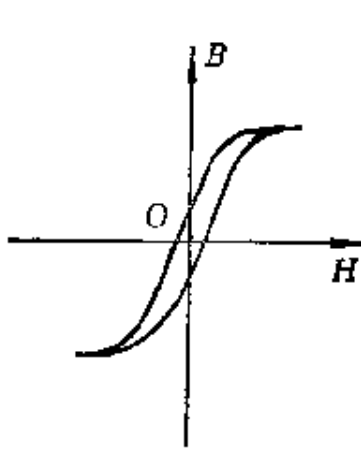


图 9.13 软磁材料的磁滞回线

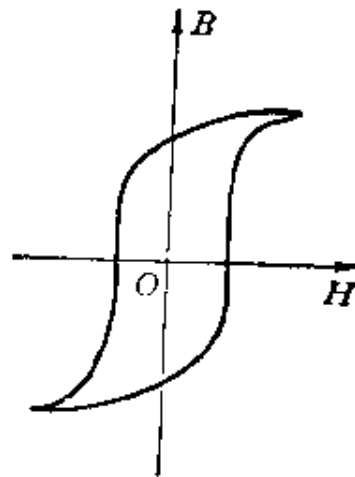
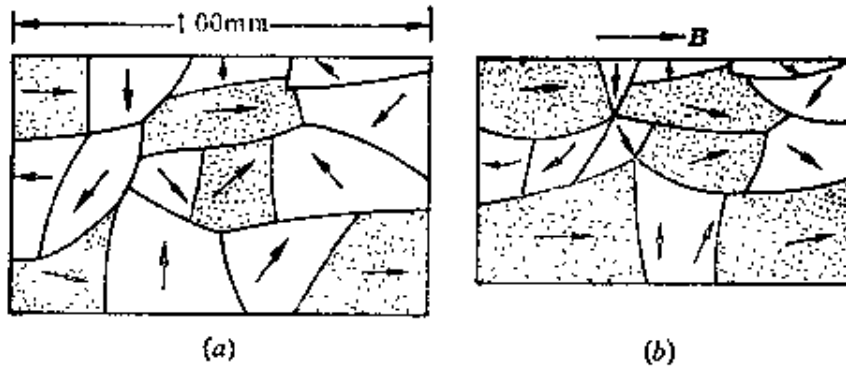


图 9.14 硬磁材料的磁滞回线

实验指出，当温度高达一定程度时，铁磁材料的上述特性将消失而成为顺磁质。这一温度叫居里点。几种铁磁质的居里点是：铁为 1040 K，钴为 1390 K，镍为 630 K。

铁磁性的起源可以用“磁畴”理论来解释。在铁磁体内存在着无数个线度约为 10^{-4}m 的小区域，这些小区域叫磁畴。在每个磁畴中，所有原子的磁矩全都向着同一个方向排列整齐了。在未磁化的铁磁质中，各磁畴的磁矩的取向是无规则的(图 9.15 a)，因而整块铁磁质在宏观上没有明显的磁性。当在铁磁质内加上外磁场并逐渐增大时，其磁矩方向和外加磁场方向相近的磁畴逐渐扩大，

而方向相反的磁畴逐渐缩小(图 9.15 b)。最后当外加磁场大到一定程度后,所有磁畴的磁矩方向也都指向同一个方向了,这时铁磁质就达到了磁饱和状态。磁滞现象可以用磁畴的畴壁很难按原来的形状恢复来说明。



(a) 未加磁场 (b) 在磁场 B 中

图 9.15 铁磁质内的磁畴示意图

实验指出,把铁磁质放到周期性变化的磁场中被反复磁化时,它要变热。变压器或其它交流电磁装置中的铁芯在工作时由于这种反复磁化发热而引起的能量损失叫“磁损”或“铁损”。单位体积的铁磁质反复磁化一次所发的热和这种材料的磁滞回线所围的面积成正比。因此在交流电磁装置中,利用软磁材料如硅钢作铁芯是相宜的。

§ 9.5 简单磁路

由于铁磁材料的磁导率很大,所以铁芯有使磁场集中到它内部的作用。如图 9.16 所示,一个没有铁芯的载流线圈所产生的磁场弥漫在它的周围。如果把相同的线圈绕在一个铁环(可以有一个缺口)上,如图 9.17 所示,并通以相同的电流,则铁环就被磁化,在它的表面产生束缚电流。由于 μ_r 很大,所以这束缚电流就比励

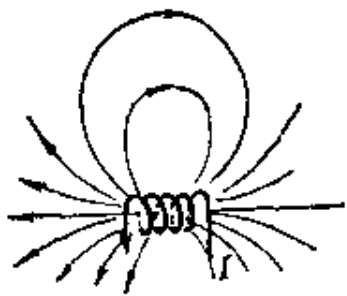


图 9.16 无铁芯螺线管的
磁场分布

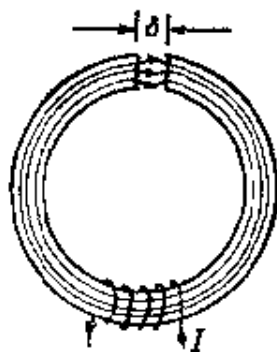


图 9.17 有铁芯螺线管的
磁场分布

磁电流 I 大得多, 这时整个铁环就相当于一个由这些束缚电流组成的螺绕环, 磁场分布基本上由这束缚电流决定。其结果是磁场大大增强, 而且基本上集中到铁芯内部了。铁芯外部相对很弱的磁场叫漏磁, 一般电工技术中常忽略不计。由于磁场集中在铁芯内, 所以磁力线基本上都沿着铁芯走。由铁芯 (或一定的间隙) 构成的这种磁力线集中的通路叫磁路。磁路中各处磁场的计算在电工设计中很重要。下面举一个简单的例子。

[例] 如图 9.17 所示的一个铁环, 设长度 $l=0.5\text{ m}$, 截面积 $S=4\times 10^{-4}\text{ m}^2$, 环上气隙的宽度 $\delta=1.0\times 10^{-3}\text{ m}$ 。环的一部分上绕有线圈 $N=200$ 匝, 设通过线圈的电流 $I=0.5\text{ A}$, 而铁芯相应的 $\mu_r=5000$, 求铁环气隙中的磁感应强度 B 的数值。

解: 忽略漏磁, 根据磁通连续定理, 通过铁芯各截面的磁通量 Φ 应该相等, 因而铁芯内各处的磁感应强度 $B=\Phi/S$ 也应相等。在气隙内, 由于 $\delta\ll l$, 磁场虽然有所散开, 但散开不大, 仍可认为磁场集中在其截面与铁芯截面相等的空间内。这样, 磁通连续定理给出气隙中的磁感应强度 $B_0=\Phi/S=B$ 。

为了计算 B 的数值, 我们应用磁场强度 H 的环路定理, 作一条沿着铁环轴线穿过气隙的封闭曲线为安培环路 L , 则有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_I \mathbf{H} d\mathbf{l} + \int_\delta \mathbf{H}_0 d\mathbf{l} = NI$$

即

$$Hl + H_0\delta = NI$$

其中 H 和 H_0 分别是铁环内和气隙中的磁场强度的值。由于 $H = \frac{B}{\mu_0\mu_r}$, $H_0 =$

$\frac{B_0}{\mu_0}$, 所以上式可写成

$$\frac{Bl}{\mu_0\mu_r} + \frac{B\delta}{\mu_0} = NI$$

于是

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\frac{l}{\mu_r} + \delta} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 200 \times 0.5}{\frac{0.5}{5000} + 10^{-3}} = 0.114 \text{ T}$$

从这个例子可以看出, 由于空气的 μ_r 比铁芯的 μ_r 小得多, 所以即使是 1 毫米的气隙也会大大影响铁芯内的磁场。在本例中, 有气隙和没有气隙相比, 磁感应强度减弱到十分之一。

上例中, 绕有 N 匝载流线圈的有气隙的铁芯就是**电磁铁**。一般的电磁铁多做成图 9.18 那样。它的气隙中的磁场也可以按上例的方法粗略地计算出来。

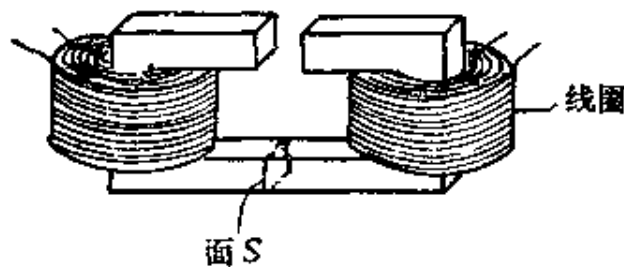


图 9.18 电磁铁

本章提要

1. 三种磁介质:

抗磁质 ($\mu_r < 1$), 顺磁质 ($\mu_r > 1$), 铁磁质 ($\mu_r \gg 1$)。

顺磁质, 铁磁质的分子(或原子)有固有磁矩, 抗磁质的分子在外磁场中产生感应磁矩。

2. **磁介质的磁化:** 在外磁场中固有磁矩沿外磁场的取向或感应磁矩的产生使磁介质表面(或内部)出现束缚电流。

磁化强度:
$$\mathbf{M} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \mathbf{B}$$

面束缚电流密度:
$$\mathbf{j}' = \mathbf{M}_t$$

3. **磁场强度矢量:**

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$$

\mathbf{H} 的环路定理:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \Sigma I_{0n} \quad (\text{用于稳恒电流})$$

4. **铁磁质:** $\mu_r \gg 1$, μ_r 随磁场改变。有磁滞现象。

5. **磁路:** 由铁芯形成的磁力线通路。

思 考 题

9.1 下面的几种说法是否正确,试说明理由:

- (1) \mathbf{H} 仅与传导电流(自由电流)有关;
- (2) 不论抗磁质与顺磁质, \mathbf{B} 总与 \mathbf{H} 同向;
- (3) 通过以闭合曲线 L 为边线的任意曲面的 \mathbf{B} 通量均相等;
- (4) 通过以闭合曲线 L 为边线的任意曲面的 \mathbf{H} 通量均相等。

9.2 将磁介质样品装入试管中,用弹簧吊起来挂到一竖直螺线管的上端开口处(图 9.19)。当螺线管通电流后,则可发现随样品的不同,它可能受到该处不均匀磁场的向上或向下的磁力。这是一种区分样品是顺磁质还是抗磁质的精细的实验。受到向上的磁力的样品是顺磁质还是抗磁质?

9.3 如图 9.20 所示, $-e$ 电子作图示方向的轨道运动, 它的轨道磁矩方向如何?今垂直于轨道平面加一磁场,若轨道半径维持不变,则电子的速率应增大还是减小?速率的这一变化相当于在什么方向产生了一个附加磁矩? 如果电子沿与图示相反的方向运动,而所加的磁场方向不变,这一附加磁矩的方向又如何?

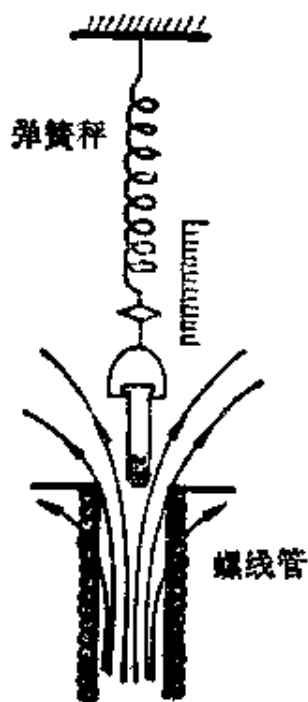


图 9.19

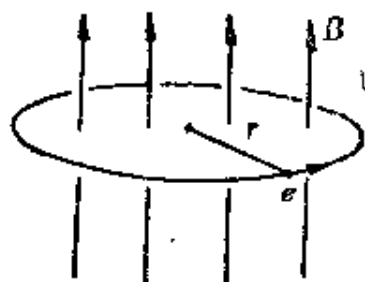


图 9.20

9.4 一块永磁铁落到地板上就可能部分退磁?为什么?把一根铁条南北放置。敲它几下,它就可能磁化,又为什么?

9.5 为什么一块磁铁能吸引一块原来并未磁化的铁块?

9.6 置于马蹄形磁铁之间的铁块(叫“脚铁”)有什么作用?为什么?

9.7 顺磁质和铁磁质的磁导率明显地依赖于温度,而抗磁质的磁导率则几乎与温度无关,为什么?

9.8 证明原子内电子的轨道运动磁矩 p_m 与轨道运动角动量 L 有下述关系: $p_m = \frac{e}{2m_e} L$ 。

习 题

9.1 螺绕环中心周长 $l=10\text{cm}$, 环上线圈匝数 $N=20$, 线圈中通有电流 $I=100\text{mA}$,

(1) 求管内的磁感应强度 B_0 和磁场强度 H_0 ;

(2) 若管内充满相对磁导率 $\mu_r=4200$ 的磁介质, 则管内的 B 和 H 是多少?

(3) 磁介质内由导线中电流产生的 B_0 和由磁化电流产生的 B' 各是

多少?

9.2 一铁制的螺绕环,其平均圆周长 30cm,截面积为 1cm^2 ,在环上均匀绕以 300 匝导线,当绕组内的电流为 0.032A 时,环内磁通量为 $2 \times 10^{-6}\text{Wb}$ (韦伯)。试计算:

- (1) 环内的磁通量密度(即磁感应强度);
- (2) 磁场强度;
- (3) 磁化面电流(即面束缚电流)密度;
- (4) 环内材料的磁导率和相对磁导率;
- (5) 磁芯内的磁化强度。

9.3 (1) 如图 9.21(a) 所示,电磁铁的气隙很窄,气隙中的 B 和铁芯中的 B 是否相同?

(2) 如图 9.21(b) 所示,电磁铁的气隙较宽,气隙中的 B 和铁芯中的 B 是否相同?

(3) 就图 9.21(a) 和图 9.21(b) 比较,两线圈中的安培匝数(即 NI) 相同,两个气隙中的 B 是否相同?为什么?

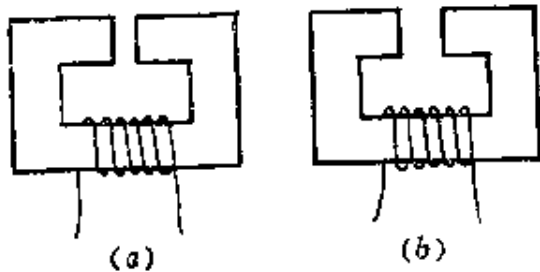


图 9.21

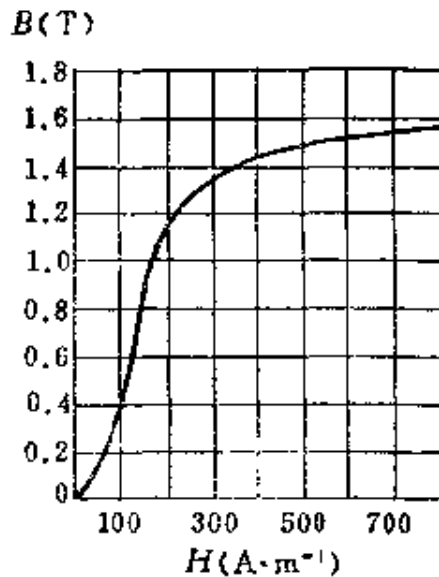


图 9.22

9.4 在铁磁质磁化特性的测量实验中,设所用的环形螺线管上共有 1000 匝线圈,平均半径为 15.0cm,当通有 2.0A 电流时,测得环内磁感应强度 $B=1.0\text{T}$,求:

- (1) 螺绕环铁芯内的磁场强度 H ;
- (2) 该铁磁质的磁导率 μ 和相对磁导率 μ_r ;
- (3) 已磁化的环形铁芯的面束缚电流密度。

9.5 图 9.22 是某种铁磁材料的起始磁化曲线,试根据这曲线求出最大磁导率 μ_m ,并绘制相应的 $\mu_r \sim H$ 曲线。

9.6 某种铁磁材料具有矩形磁滞回线(称矩形材料)如图 9.23(a)。反向磁场一超过矫顽力,磁化方向就立即反转。矩形材料的用途是制作电子计算机中存储元件的环形磁芯。图 9.23(b)所示为一种这样的磁芯,其外直径为 0.8mm、内直径为 0.5mm,高为 0.3mm。这类磁芯由矩形铁氧体材料制成。若磁芯原来已被磁化,方向如图 9.23(b)所示,要使磁芯的磁化方向全部翻转,导线中脉冲电流 i 的峰值至少应多大?设磁芯矩形材料的矫顽力 $H_c = 2\text{A/m}$ 。

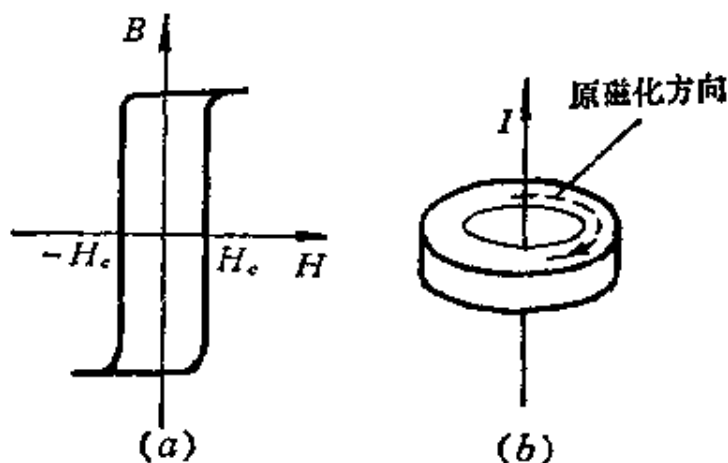


图 9.23

9.7 铁棒中一个铁原子的磁偶极矩是 $1.8 \times 10^{-23} \text{A} \cdot \text{m}^2$, 设长 5cm, 截面积为 1cm^2 的铁棒中所有铁原子的磁偶极矩都整齐排列, 则

(1) 铁棒的磁偶极矩多大?

(2) 如果要使这铁棒与磁感应强度为 1.5T 的外磁场正交, 需用多大的力矩? 设铁的密度为 7.8g/cm^3 , 铁的原子量是 55.85。

9.8 铁环的平均周长为 61cm, 空气隙长 1cm。环上线圈总数为 1000 匝。当线圈中电流为 1.5A 时, 空气隙中的磁感应强度 B 为 1800 G。求铁芯的 μ_r 值(忽略空气隙中磁感应强度线的发散)。

9.9 一个利用空气间隙获得强磁场的电磁铁如图 9.24 所示。铁芯中心线的长度 $l_1 = 500\text{mm}$, 空气隙长度 $l_2 = 20\text{mm}$, 铁芯是相对磁导率 $\mu_r = 5000$ 的硅钢。要在空气隙中得到 $B = 3000\text{G}$ 的磁场, 求绕在铁芯上的线圈的安匝数 NI 。

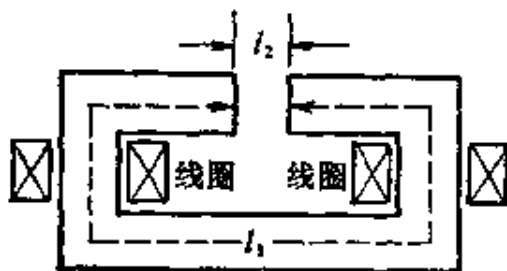


图 9.24

9.10 某电钟里有一铁芯线圈，已知铁芯的磁路长 14.4cm，空气隙宽 2.0mm，铁芯横截面积为 0.60cm²，铁芯的相对磁导率 $\mu_r=1600$ 。现在要使通过空气隙的磁通量为 $4.8 \times 10^{-6} \text{Wb}$ ，求线圈电流的安匝数 NI 。若线圈两端电压为 220V，线圈消耗的功率为 20W (瓦)，求线圈的匝数 N 。

*9.11 在图 9.2 中，电子的轨道角动量 L 与外磁场 B 之间的夹角为 θ 。

(1) 证明：电子轨道运动受到的磁力矩为 $\frac{BeL}{2m_e} \sin\theta$ ；

(2) 证明：电子进动的角速度为 $\frac{Be}{2m_e}$ ，并计算电子在 1T 的外磁场中的进动角速度。

*9.12 氢原子中，常态下电子的轨道半径为 $r=0.53 \times 10^{-10} \text{m}$ ，速度为 $v=2.2 \times 10^6 \text{m/s}$ 。

(1) 此轨道运动在圆心处产生的磁场 B 多大？

(2) 在圆心处的质子的自旋角动量为 $S = \hbar/2 = 0.53 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$ ，磁矩为 $p_m = 1.41 \times 10^{-26} \text{A}\cdot\text{m}^2$ ，磁矩方向与电子轨道运动在圆心处的磁场方向的夹角为 θ ，此质子的进动角速度多大？

V. 磁 记 录

磁记录是现在使用得非常广泛的一种信息技术。它利用了铁磁材料的特性与电磁感应的规律。用来记录信息(如声音、图像或特殊信息)的铁磁材料常制成粉状而用粘结剂涂敷在特制的带、圆柱或圆盘的表面而称为**磁带、磁鼓或磁盘**。它的录音(或录像)和放音(或放像)的原理如下。

录音(或录像)时,需要一个录音磁头,它实际上是一个具有微小气隙的电磁铁(图V)。录音时就使磁带靠近磁头的气隙走过。磁头的线圈内此时通入由声音或图像转化成的电信号,即强弱和频率都在改变着的电流。这电流将使铁芯的磁化状态以及缝隙中的磁场发生同步的变化。这变化着的磁场将使在附近经过的磁带上的磁粉的磁化状态发生同步的变化,从而使磁粉离开磁头后,它的剩磁的强弱变化相应于输入磁头的电流的变化,也就是相应于声音或图像信号的变化。这样就在磁带上记录下了声音或图像。

放音(或放像)时,就让已录了音(或像)的磁带在磁头的气隙下面通过。磁带上铁粉的剩磁强弱的变化将引起铁芯内磁通的变化。这变化将在线圈内产生同步变化的感应电流。很明显,只要此时磁带移动的速度和录音时磁带移动的速度相同,此时线圈中产生的感应电流的变化将和录音时输入的信号电流的变化相同。将此电流放大再经过电—声转换或电—像转换就可以得到原来记录的声音或图像。

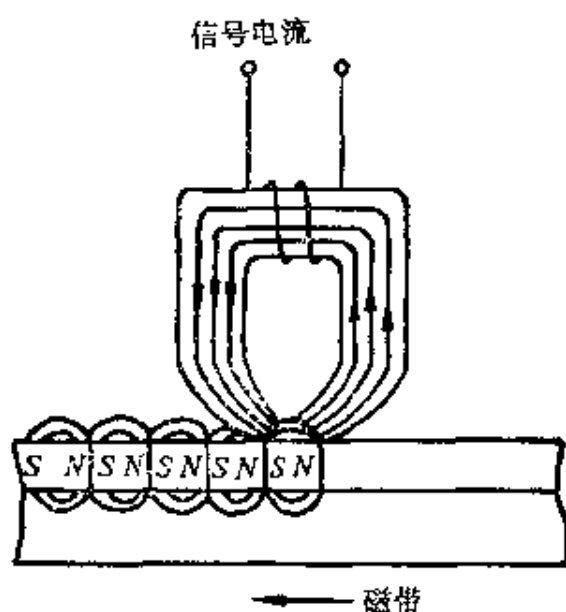


图 V. 磁录音原理

要想把已记录了的的声音或图像抹去，只要在磁带通过时在磁头的线圈内通以等幅振荡电流就可以了，这就是**消音**。

由于要起的作用不同，所以录音磁粉和磁头铁芯所用的材料就不同。磁粉要记录声音或图像，并希望加以保存，所以应该具有较大的剩磁和矫顽力。因此磁粉应选用硬磁材料，即磁滞回线比较胖的材料(图9.14)。对磁头铁芯来说，要求它能及时地准确地与信号发生同步的变化，所以要求它具有很小的剩磁，而且磁导率比较大。因此，铁芯要选用软磁材料，即磁滞回线瘦(图9.13)，而且磁化曲线比较陡(μ 大)的材料。另外，由于磁化曲线在微弱磁场范围内有弯曲(图9.11)，不是线性的，就容易使记录失真。为了避免这一缺点，就在与输入录音信号的同时输入一个等幅振荡电流(频率比信号的最高频率大5-10倍)，叫**偏磁电流**。这样就能使要记录的信号只在磁化曲线的直线部分发生变化，从而减少了失真。

实用的录音机内的磁头的气隙宽度一般在1—10 μm 之间。录放兼用的磁头气隙宽度约3—5 μm 。一般家用录音机的带速为19 cm/s (19.05 cm/s)、9.5 cm/s和4.8 cm/s。19 cm/s主要用于

音乐,9.5 cm/s 主要用于背景音乐和语言,4.8 cm/s 主要用于长时间讲话。最近高保真录音机中也经常用 38 cm/s 的带速。

磁记录除了记录声音或图像这种**模拟记录**外,还有**数字记录**。它记录的是二进制数字“1”(通)和“0”(断),因此磁粉只能处于正或负两种磁化状态之一。这种记录大量用在计算机的数据存储中。

第十章 电磁感应

本章要求

1. 理解法拉第电磁感应定律公式的意义,特别是公式中负号的意义。
2. 理解产生动生电动势的原因,能计算动生电动势并判断它的方向。
3. 理解感应电场的意义,能计算简单情况下感生电动势和感应电场并能判定其方向。
4. 理解互感的意义并能计算互感系数。
5. 理解自感的意义并能计算自感系数,理解自感磁能公式的意义。
6. 理解磁场能量的概念和磁场能量密度公式。

§ 10.1 法拉第电磁感应定律

1820年奥斯特通过实验发现了电流的磁效应。后来人们自然想到,能否利用磁效应来产生电流?从1822年起,法拉第就开始对这一问题进行有目的的实验研究。经过多次的失败,终于在1831年取得了突破性的进展,发现了电磁感应现象。他曾做了许多这方面的实验。他的实验大体上可归结为两类:一类实验是磁铁与线圈有相对运动时,线圈中产生了电流;另一类实验是当一个线圈中电流发生变化时,在它附近的其它线圈中也产生了电流。法拉

第将这些现象与静电感应类比,把它们称作“电磁感应”现象。

对所有电磁感应实验的分析表明,当穿过一个闭合导体回路所限定的面积的磁通量(磁感应强度通量)发生变化时,回路中就出现电流。这电流叫感应电流。

我们知道,在闭合导体回路中出现了电流,一定是由于回路中产生了电动势。当穿过导体回路的磁通量发生变化时,回路中产生了电流,就说明此时在回路中产生了电动势。由这一原因产生的电动势叫感应电动势。

实验表明,感应电动势的大小和通过导体回路的磁通量的变化率成正比,感应电动势的方向有赖于磁场的方向和它的变化情况。以 Φ 表示通过闭合导体回路的磁通量,以 \mathcal{E} 表示磁通量发生变化时在导体回路中产生的感应电动势,由实验总结出的规律是

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (10.1)$$

这一公式是法拉第电磁感应定律的一般表达式。

(10.1)式中的负号反映感应电动势的方向与磁通量变化的关系。在判定感应电动势的方向时,应先规定导体回路 L 的绕行正方向。如图10.1所示,当回路中磁力线的方向和所规定的回路的绕行正方向有右手螺旋关系时,磁通量 Φ 是正值。这时,如果穿过回路的磁通量增大, $\frac{d\Phi}{dt} > 0$,则 $\mathcal{E} < 0$,这表明此时感应电动势的

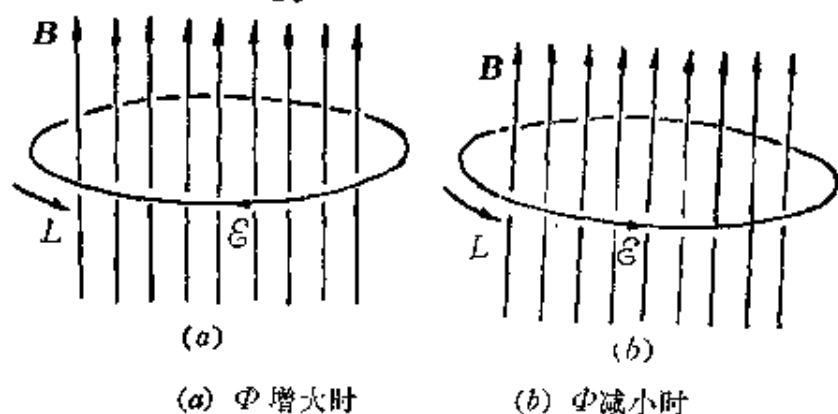


图 10.1 \mathcal{E} 的方向和 Φ 的变化的关系

方向和 L 的绕行正方向相反 (图 10.1a)。如果穿过回路的磁通量减小, 即 $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, 则 $\mathcal{E} > 0$, 这表示此时感应电动势的方向和 L 的绕行正方向相同 (图 10.1b)。

图 10.2 是一个产生感应电动势的实际例子。当中是一个线圈, 通有图示方向的电流时, 它的磁场的磁力线分布如图示, 另一导电圆环 L 的绕行正方向规定如图。当它在线圈上面面向下运动时, $\frac{d\Phi}{dt} > 0$, 从而 $\mathcal{E} < 0$, \mathcal{E} 沿 L 的反方向。当它在线圈下面面向下运动时, $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, 从而 $\mathcal{E} > 0$, \mathcal{E} 沿 L 的正方向。

导体回路中产生的感应电动势将按自己的方向产生感应电流。这感应电流将在导体回路中产生自己的磁场。在图 10.2 中, 圆环在上面时, 其中感应电流在环内产生的磁场向上, 在下面时, 环中的感应电流产生的磁场向下。和感应电流的磁场联系起来考虑, 上述借助于 (10.1) 式中的负号所表示的感应电动势方向的规律可以表述如下: 感应电动势总具有这样的方向, 即使它产生的感应电流在回路中产生的磁场去阻碍引起感应电动势的磁通量的变化, 这个规律叫做楞次定律。图 10.2 中所示感应电动势的方向是符合这一规律的。

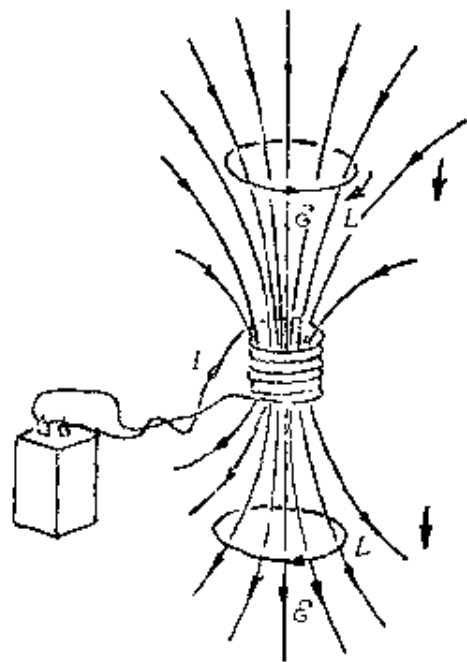


图 10.2 感应电动势的方向实例

实际上用到的线圈常常是许多匝串联而成的, 在这种情况下, 在整个线圈中产生的感应电动势应是每匝线圈中产生的感应电动

势之和。当穿过各匝线圈的磁通量分别为 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ 时, 总电动势则应为

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\left(\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt} + \dots + \frac{d\Phi_n}{dt}\right) \\ &= -\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^n \Phi_i\right) = -\frac{d\Psi}{dt}\end{aligned}\quad (10.2)$$

其中 $\Psi = \sum_i \Phi_i$ 是穿过各匝线圈的磁通量的总和, 叫穿过线圈的**全磁通**。当穿过各匝线圈的磁通量相等时, N 匝线圈的全磁通为 $\Psi = N\Phi$, 叫做**磁链**, 这时

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt}\quad (10.3)$$

(10.1)、(10.2)、(10.3)式都适用于国际单位制。在这一单位制中, Φ 或 Ψ 的单位是“韦伯”(Wb), 即“特斯拉·米²”(T·m²), t 的单位是秒(s), \mathcal{E} 的单位是伏特(V)。于是由(10.2)式可知

$$1\text{V} = 1\text{Wb/s}$$

§ 10.2 动生电动势

如(10.1)式所表示的, 穿过一个闭合导体回路的磁通量发生变化时, 回路中就产生感应电动势。但引起磁通量变化的原因可以不同。本节讨论导体在恒定磁场中运动时产生的感应电动势。这种感应电动势叫**动生电动势**。

如图 10.3 所示, 一矩形导体回路, 可动边是一根长为 l 的导体棒 ab , 它以恒定速度 v 在垂直于磁场 B 的平面内, 沿垂直于它自身的方向向右平移, 其余边不动。某时刻穿过回路所围面积的磁通量为

$$\Phi = BS = Blx$$

随着棒 ab 的运动,回路所围绕的面积扩大,因而回路中的磁通量发生变化。用(10.1)式计算回路中的感应电动势大小,可得

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(Blx) = Bl\frac{dx}{dt} = Blv \quad (10.4)$$

至于这一电动势的方向,可用楞次定律判定为逆时针方向。由于其它边都未动,所以动生电动势应归之于 ab 棒的运动,因而只在棒内产生。回路中感生电动势的逆时针方向说明在 ab 棒中的动生电动势方向应沿由 a 到 b 的方向。象这样一段导体在磁场中运动时所产生的动生电动势的方向可以简便地用右手掌定则判断:伸平右手掌并使姆指与其它四指垂直,让磁力线从掌心穿入,当姆指指着导体运动方向时,四指就指着导体中产生的动生电动势的方向。

象图 10.3 中所示的情况,感应电动势集中于回路的一段内。这一段可视为整个回路中的电源部分。由于在电源内电动势的方向是由低电势处指向高电势处,所以在棒 ab 上, b 点电势高于 a 点电势。

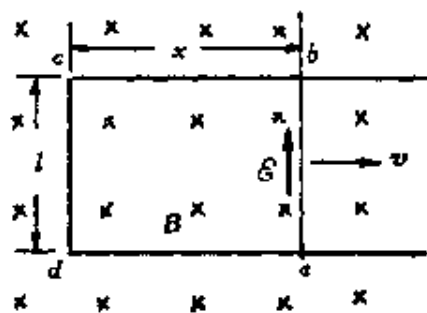


图 10.3 动生电动势

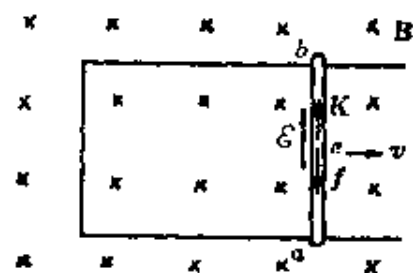


图 10.4 动生电动势与洛仑兹力

我们知道,电动势是非静电力作用的表现。引起动生电动势的非静电力是洛仑兹力。当棒 ab 向右以速度 v 运动时,棒内的自由电子被带着以同一速度 v 向右运动,因而每个电子都受到洛仑兹力 f 的作用(图 10.4),

$$f = ev \times B \quad (10.5)$$

把这个作用力看成是“外来场”的作用，则这一外来场的强度应为

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{f}}{e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (10.6)$$

根据电动势的定义，棒 ab 中由这外来场所产生的电动势应为

$$\mathcal{E}_{ab} = \int_a^b \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (10.7)$$

如图 10.4 所示，由于 \mathbf{v} , \mathbf{B} 和 $d\mathbf{l}$ 相互垂直，所以上一积分的结果应为

$$\mathcal{E}_{ab} = Blv$$

这一结果和(10.4)式相同。

这里我们只把(10.7)式应用于直导体棒在均匀磁场中运动的情况。对于非均匀磁场而且导体各段运动速度不同的情况，则可以先考虑一段以速度 \mathbf{v} 运动的导体元 $d\mathbf{l}$ ，在其中产生的动生电动势为 $\mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ ，整个导体中产生的动生电动势应该是在各段导体之中产生的动生电动势之和。其表示式就是(10.7)式。因此，(10.7)式是在磁场中运动的导体内产生的动生电动势的一般公式。特别是，如果整个导体回路 L 都在磁场中运动，则在回路中产生的总的动生电动势应为

$$\mathcal{E} = \oint_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (10.8)$$

在图 10.3 所示的闭合导体回路中，当由于导体棒的运动而产生电动势时，在回路中就会有感应电流产生。电流流动时，感应电动势是要做功的，电动势做功的能量是从哪里来的？考察导体棒运动时所受的力就可以给出答案。设电路中感应电流为 I ，则感应电动势做功的功率为

$$P = I\mathcal{E} = IBlv \quad (10.9)$$

通有电流的导体棒在磁场中是要受到磁力的作用的。 ab 棒受的

磁力为 $F_m = IlB$, 方向向左(图 10.5)。为了使导体棒匀速向右运动, 必须有外力 $F_{\text{外}}$ 与 F_m 平衡, 因而 $F_{\text{外}} = -F_m$ 。此外力的功率为

$$P_{\text{外}} = F_{\text{外}}v = IlBv$$

这正好等于上面求得的感应电动势做功的功率。由此我们知道, 电路中感应电动势提供的电能是由外力做功所消耗的机械能转换而来的。这就是发电机内的能量转换过程。

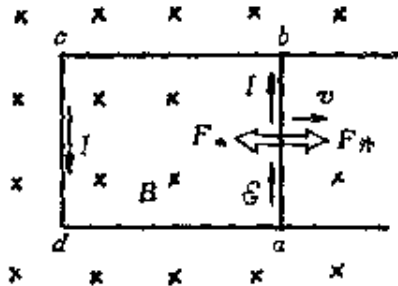


图 10.5 能量转换

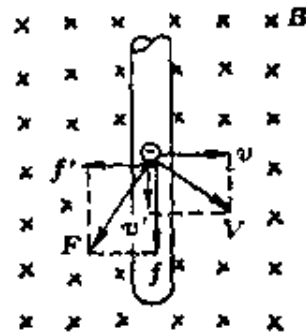


图 10.6 洛仑兹力不做功

我们知道, 当导线在磁场中运动时产生的感应电动势是洛仑兹力作用的结果。据(10.9)式, 感应电动势是要做功的。但是, 我们早已知道洛仑兹力对运动电荷不做功, 这个矛盾如何解决? 可以这样来解释, 如图 10.6 所示, 随同导线一齐运动的自由电子受到的洛仑兹力由(10.5)式给出, 由于这个力的作用, 电子将以速度 v' 沿导线运动, 而速度 v' 的存在使电子还要受到一个垂直于导线的洛仑兹力 f' 的作用, $f' = ev' \times B$, 电子受洛仑兹力的合力为 $F = f + f'$ 。电子运动的合速度为 $V = v + v'$, 所以洛仑兹力合力做功的功率为

$$\begin{aligned} F \cdot V &= (f + f') \cdot (v + v') \\ &= f \cdot v' + f' \cdot v = -evBv' + ev'Bv = 0 \end{aligned}$$

这一结果表示洛仑兹力合力做功为零, 这与我们所知的洛仑兹力

不做功的结论一致。从上述结果中看到

$$f \cdot v' + f' \cdot v = 0$$

即

$$f \cdot v' = -f' \cdot v$$

为了使自由电子按 v 的方向匀速运动，必须有外力 $f_{\text{外}}$ 作用在电子上，而且 $f_{\text{外}} = -f'$ 。因此上式又可写成

$$f \cdot v' = f_{\text{外}} \cdot v$$

此等式左侧是洛伦兹力的一个分力使电荷沿导线运动所做的功，宏观上就是感应电动势驱动电流的功。等式右侧是在同一时间内外力反抗洛伦兹力的另一个分力做的功，宏观上就是外力拉动导线做的功。洛伦兹力做功为零，实质上表示了能量的转换与守恒。洛伦兹力在这里起了一个能量转换者的作用，一方面接受外力的功，同时驱动电荷运动做功。

[例] 法拉第曾利用图 10.7 的实验来演示感应电动势的产生。铜盘在磁场中转动时能在连接电流计的回路中产生感应电流。为了计算方便，我们设想一半径为 R 的铜盘在均匀磁场 B 中转动，角速度为 ω (图 10.8)。求盘上沿半径方向产生的感应电动势。

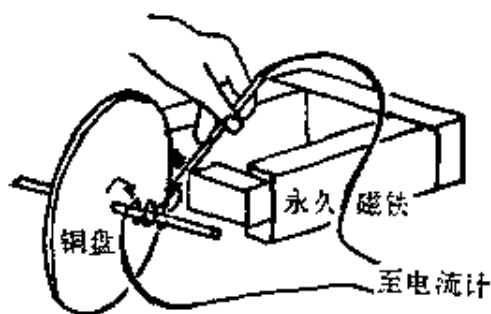


图 10.7 法拉第电机

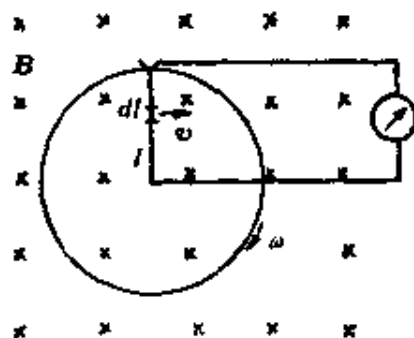


图 10.8 铜盘在均匀磁场中转动

解：盘上沿半径方向产生的感应电动势可以认为是沿任意半径的一导体杆在磁场中运动的结果。由动生电动势公式 (10.7) 式，求得在半径上长为 dl 的一段杆上产生的感应电动势为

$$d\varepsilon = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = Bvdl = B\omega l dl$$

式中 l 为 dl 段与盘心 O 的距离， v 为 dl 段的线速度。整个杆上产生的电动

势为

$$\mathcal{E} = \int_0^R B\omega l dl = \frac{1}{2}B\omega R^2$$

§ 10.3 感生电动势和感应电场

本节讨论引起回路中磁通量变化的另一种情况。一个静止的导体回路,当它包围的磁场发生变化时,穿过它的磁通量也会发生变化,这时回路中也会产生感应电动势。这样产生的感应电动势称为**感生电动势**。它和磁通量变化率的关系也由(10.1)式表示。

产生感应电动势的非静电力是什么力?由于导体回路未动,所以它不可能象在动生电动势中那样是洛仑兹力。由于这时的感应电流是原来宏观静止的电荷受非静电力作用形成的,而静止电荷受到的力只能是电场力。所以这时的非静电力也只能是一种电场力。由于这种电场是磁场的变化引起的,所以叫**感应电场**。它就是产生感应电动势的“外来场”。以 $E_{\#}$ 表示感应电场,则根据电动势的定义,由于磁场的变化,在一个导体回路 L 中产生的感应电动势应为

$$\mathcal{E} = \oint_L E_{\#} \cdot dl \quad (10.10)$$

根据法拉第电磁感应定律应该有

$$\oint_L E_{\#} \cdot dl = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (10.11)$$

法拉第当时只着眼于导体回路中感应电动势的产生,麦克斯韦则更着重于电场和磁场的关系的研究。他提出,在磁场变化时,不但会在导体回路中,而且在空间任一地点都会产生感应电场,而且感应电场沿任何闭合路径的环流都满足(10.11)式表示的关系。

用 B 来表示磁感应强度, 则(10.11) 式可以用下面的形式更明显地表示出电场和磁场的关系

$$\oint_L \mathbf{E}_* \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.12)$$

式中 S 为静止回路 L 所限定的面积。由于感应电场的环流不等于零, 所以它又叫做涡旋电场。此式表示的规律可以不十分确切地理解为变化的磁场产生电场。

在一般的情况下, 空间的电场可能既有静电场 $E_{\text{静}}$, 又有感应电场 E_* 。根据叠加原理, 总电场 E 沿某一封闭路径 L 的环流应是静电场的环流和感应电场的环流之和。由于前者为零, 所以 E 的环流就等于 E_* 的环流。因此, 利用(10.12)式可得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.13)$$

这一公式是关于磁场和电场关系的又一个普遍的基本规律。

从电场和磁场的相对论联系看来, E_* 的产生是很自然的。它不是什么“特殊的”电场。考虑在 S' 系中有一静磁场分布。在相对于 S' 系运动的 S 系中观察, 根据电磁场变换式(7.24)式, 除了磁场外还会发现有电场存在, 此电场和磁场就满足(10.12)式表示的关系。这电场就是这里的 E_* 。因此, 电磁感应现象并不是一种独立的自然现象。它实际上也是电场和磁场的相对论联系的一种表现。(10.12)式是(8.27)式的姊妹式, 它们共同反映了同一参照系中电场和磁场的联系。

[例 1] 电子感应加速器。电子感应加速器是利用感应电场来加速电子的一种设备。它的柱形电磁铁在两极间产生磁场(图 10.9)。在磁场中安置一个环形真空管道作为电子运行的轨道。当磁场发生变化时, 就会沿管道方向产生感应电场。射入其中的电子就受到这感应电场的持续作用而被不断加速。设环形真空管的轴线半径为 r 。求磁场变化时沿环形真空管轴线的感应电场。

解:由磁场分布的轴对称性可知, 感应电场的分布也具有轴对称性。沿环管轴线上各处的电场强度大小应相等, 而方向都沿轴线的切线方向。因而

沿此轴线的感应电场的环流为

$$\oint_L \mathbf{E}_{\#} \cdot d\mathbf{l} = E_{\#} \cdot 2\pi r$$

以 \bar{B} 表示环管轴线所围绕的面积上的平均磁感应强度，则通过此面积的磁通量为

$$\Phi = \bar{B}S = \bar{B} \cdot \pi r^2$$

由(10.13)式可得

$$E_{\#} \cdot 2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{d\bar{B}}{dt}$$

由此得

$$E_{\#} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{d\bar{B}}{dt}$$

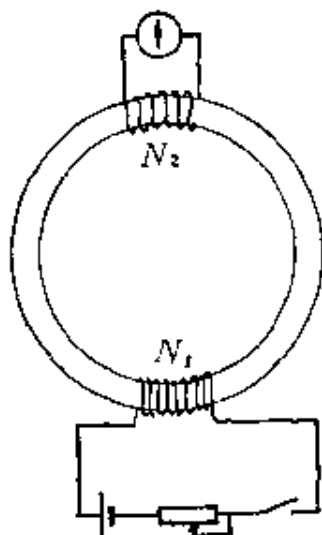
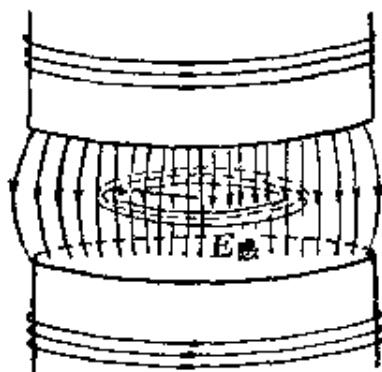


图 10.9 电子感应加速器示意图

图 10.10 测铁磁质中的磁感应强度

[例 2] 测铁磁质中的磁感应强度。如图 10.10 所示。在铁磁试样做的环上绕上两组线圈。一组线圈匝数为 N_1 ，与电池相连。另一组线圈匝数为 N_2 ，与一个“冲击电流计”相连(这种电流计的最大偏转与通过它的电量成正比)。设铁环原来没有磁化。当合上电键使 N_1 中电流从零增大到 I_1 时，冲击电流计测出通过它的电量是 q 。求与电流 I_1 相应的铁环中的磁感应强度 B_1 是多大?

解: 当合上电键使 N_1 中的电流增大时，它在铁环中产生的磁场也增强，因而 N_2 线圈中有感生电动势产生。以 S 表示环的截面积，以 B 表示环内磁感应强度，则 $\Phi = BS$ 。而 N_2 中的感生电动势的大小为

$$\varepsilon = \frac{d\Psi}{dt} = N_2 \frac{d\Phi}{dt} = N_2 S \frac{dB}{dt}$$

以 R 表示 N_2 回路(包括冲击电流计)的总电阻, 则 N_2 中的电流为

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{N_2 S}{R} \cdot \frac{dB}{dt}$$

设 N_1 中的电流增大到 I_1 需要的时间为 τ , 则在同一时间内通过 N_2 回路的电量为

$$q = \int_0^{\tau} i dt = \int_0^{\tau} \frac{N_2 S}{R} \frac{dB}{dt} dt = \frac{N_2 S}{R} \int_0^{B_1} dB = \frac{N_2 S B_1}{R}$$

由此得

$$B_1 = \frac{q R}{N_2 S}$$

这样, 根据冲击电流计测出的电量 q , 就可以算出与 I_1 相对应的铁环中的磁感应强度。这是常用的一种测量磁介质中的磁感应强度的方法。

§ 10.4 互 感

在实际电路中, 磁场的变化常常是由于电流的变化引起的, 因此, 把感应电动势直接和电流的变化联系起来是有重要实际意义的。互感和自感现象的研究就是要找出这方面的规律。

一闭合导体回路, 当其中的电流随时间变化时, 它周围的磁场也随时间变化, 在它附近的导体回路中就会产生感应电动势。这种电动势叫互感电动势。

如图 10.11 所示, 有两个固定的闭合回路 L_1 和 L_2 。闭合回路 L_2 中的互感电动势是由于回路 L_1 中的电流 i_1 随时间的变化引起的, 以 \mathcal{E}_{21} 表示此电动势。下面说明 \mathcal{E}_{21} 与 i_1 的关系。

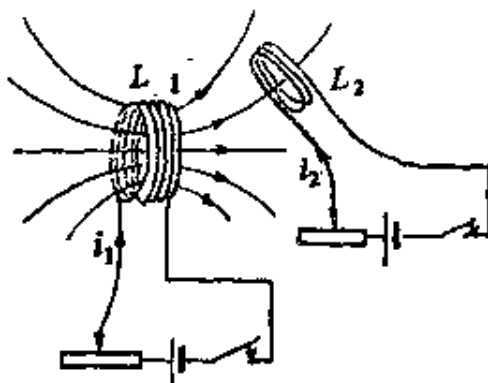


图 10.11 互感现象

由毕奥—萨伐定律可知, 电流 i_1 产生的磁场正比于 i_1 , 因而

通过 L_2 所围面积的、由 i_1 所产生的全磁通 Ψ_{21} 也应该和 i_1 成正比, 即

$$\Psi_{21} = M_{21} i_1 \quad (10.14)$$

其中比例系数 M_{21} 叫做回路 L_1 对回路 L_2 的互感系数 (简称互感), 它取决于两个回路的几何形状、相对位置、它们各自的匝数以及它们周围磁介质的分布。对两个固定的回路 L_1 和 L_2 来说互感系数是一个常数。电磁感应定律给出

$$\mathcal{E}_{21} = - \frac{d\Psi_{21}}{dt} = - M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (10.15)$$

如果图 10.11 中的回路 L_2 中的电流 i_2 随时间变化, 则在回路 L_1 中也会产生感应电动势 \mathcal{E}_{12} 。根据同样的道理, 可以得出通过 L_1 所围面积的由 i_2 所产生的全磁通 Ψ_{12} 应该与 i_2 成正比, 即

$$\Psi_{12} = M_{12} i_2 \quad (10.16)$$

而且

$$\mathcal{E}_{12} = - \frac{d\Psi_{12}}{dt} = - M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (10.17)$$

上两式中的 M_{12} 叫 L_2 对 L_1 的互感系数。

可以证明(参看 § 10.6, 例), 对给定的一对导体回路有

$$M_{12} = M_{21} = M$$

M 就叫作这两个导体回路的互感系数, 简称它们的互感。

在国际单位制中, 互感系数的单位叫亨利(H), 由(10.15)式知

$$1\text{H} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} = 1\Omega \cdot \text{s}$$

[例] 一长直螺线管, 单位长度上的匝数为 n 。另一半径为 r 的圆环放在螺线管内, 圆环平面与管轴垂直 (图 10.12)。求螺线管与圆环的互感系数。

解: 设螺线管内通有电流 i_1 , 螺线管内磁场为 B_1 , 则 $B_1 = \mu_0 n i_1$, 通过圆

环的全磁通为

$$\Psi_{21} = B_1 \pi r^2 = \pi r^2 \mu_0 n i_1$$

由定义公式(10.14)式得互感系数为

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \pi r^2 \mu_0 n$$

由于 $M_{21} = M_{12} = M$, 所以螺线管与圆环的互感系数就是 $M = \mu_0 \pi r^2 n$ 。

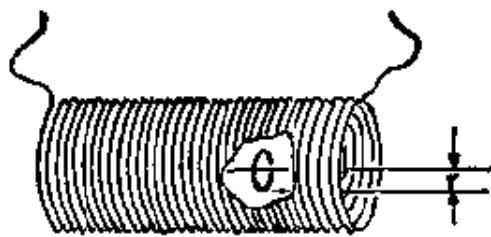


图 10.12 计算螺线管与圆环的互感系数

§ 10.5 自 感

当一个电流回路的电流 i 随时间变化时, 通过回路自身的全磁通也发生变化, 因而回路自身也产生感应电动势 (图 10.13)。这就是自感现象。这时产生的感应电动势叫自感电动势。在这里, 全磁通与回路中的电流成正比, 即

$$\Psi = Li \quad (10.18)$$

式中比例系数 L 叫回路的自感系数 (简称自感), 它取决于回路的大小、形状、线圈的匝数以及它周围的磁介质的分布。自感系数与

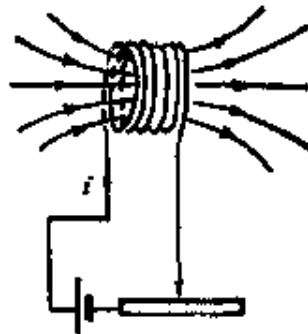


图 10.13 自感现象

互感系数的量纲相同, 在国际单位制中, 自感系数的单位也是亨利 (H)。

由电磁感应定律, 自感电动势为

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (10.19)$$

在图 10.13 中, 回路 L 的正方向一般就取电流 i 的方向。当电流增大, 即 $\frac{di}{dt} > 0$ 时, (10.19) 式给出 $\mathcal{E}_L < 0$, 说明 \mathcal{E}_L 的方向与电流的方向相反; 当 $\frac{di}{dt} < 0$ 时, (10.19) 式给出 $\mathcal{E}_L > 0$, 说明 \mathcal{E}_L 的方向

与电流的方向相同。由此可知自感电动势的方向总是要使它阻碍回路本身电流的变化。

[例 1] 计算一个螺绕环的自感, 设环的截面积为 S , 轴线半径为 R , 单位长度上的匝数为 n , 环中充满相对磁导率为 μ_r 的磁介质。

解: 设螺绕环绕组通有电流为 i , 由于螺绕环管内磁场 $B = \mu_0 \mu_r n i$, 所以管内全磁通为

$$\Psi = N\Phi = 2\pi Rn \cdot BS = 2\pi \mu_0 \mu_r Rn^2 Si$$

由自感系数定义(10.18)式, 得此螺绕环的自感为

$$L = \frac{\Psi}{i} = 2\pi \mu_0 \mu_r Rn^2 S$$

由于 $2\pi RS = V$ 为螺绕环管内的体积, 所以螺绕环自感又可写成

$$L = \mu_0 \mu_r n^2 V = \mu n^2 V \quad (10.20)$$

此结果表明环内充满磁介质时, 其自感系数比在真空时要大到 μ_r 倍。

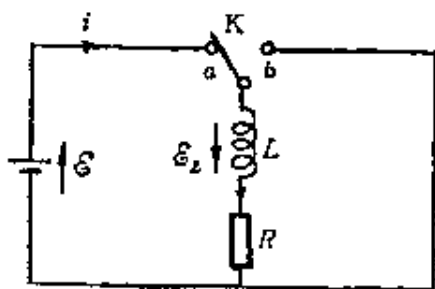


图 10.14 RL 电路与直流电源接通

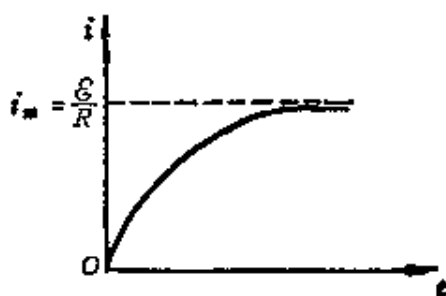


图 10.15 RL 电路接通直流电源后的电流增长曲线

[例 2] RL 电路。如图 10.14 所示, 由一自感线圈 L , 电阻 R 与电源 \mathcal{E} 组成的电路。当电键 K 与 a 端相接触时, 自感线圈和电阻串联而与电源相接, 求接通后电流的变化情况。待电流稳定后, 再迅速将电键打向 b 端, 再求此后的电流变化情况。

解: 从电键 K 接通电源开始, 电流是变化的。由于电流变化比较慢, 所以在任一时刻基尔霍夫第二方程仍然成立。对整个电路, 在图示电流与电动势正方向的情况下, 基尔霍夫第二方程为

$$-\mathcal{E} - \mathcal{E}_L + iR = 0$$

由于线圈的自感电动势 $\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$, 所以由上式可得

$$\varepsilon = L \frac{di}{dt} + iR$$

利用初始条件, $t=0$ 时, $i=0$, 上一方程式的解为

$$i = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (10.21)$$

此结果表明, 电流随时间逐渐增大, 其极大值为

$$i_{\infty} = \frac{\varepsilon}{R}$$

(10.21) 式的指数 L/R 具有时间的量纲, 称为此电路的时间常数。常以 τ 表示时间常数, 即 $\tau = L/R$ 。电键接通后经过时间 τ , 电流和最大值的差为后者的 $1/e$ 。当 t 大于 τ 的若干倍以后, 电流基本上达到最大值, 就可以认为是稳定的了。图 10.15 画出了上述电路中电流随时间增长的情况。

当电键 K 由 a 换到 b 后(图 10.16), 对整个回路的基尔霍夫第二方程为

$$-\varepsilon_L + iR = 0$$

将 $\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt}$ 代入此式可得

$$L \frac{di}{dt} + iR = 0$$

利用初始条件, $t=0$ 时, $i_0 = \frac{\varepsilon}{R}$, 这一方程的解为

$$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (10.22)$$

这一结果说明, 电流随时间按指数规律减小。当 $t = \tau$ 时, i 减小为原来的 $1/e$ 。(10.22) 式所示的电流与时间关系曲线如图 10.17 所示。

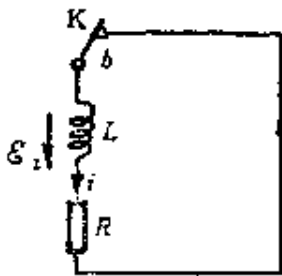


图 10.16 已通电的 RL 电路短接

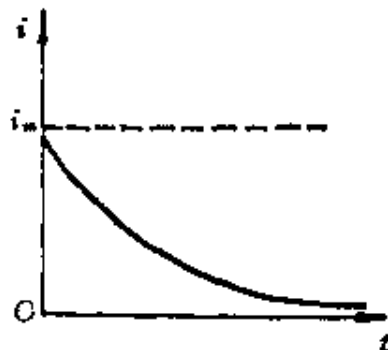


图 10.17 RL 电路短接后的电流变化曲线

(10.21) 和 (10.22) 两式所表示的电流变化情况还可以用实验

演示。在图 10.18 的实验中,当合上电键后, A 灯比 B 灯先亮, 就是因为合上电键后, A 、 B 两支路同时接通, 但 B 灯的支路中有一多匝线圈, 自感系数较大, 因而电流增长较慢的缘故。而在图 10.19 的实验中, 在打开电键时, 灯泡突然强烈地闪亮一下再熄灭, 就是因为多匝线圈支路中的较大的电流在电键打开后通过泡灯而又逐渐消失的缘故。

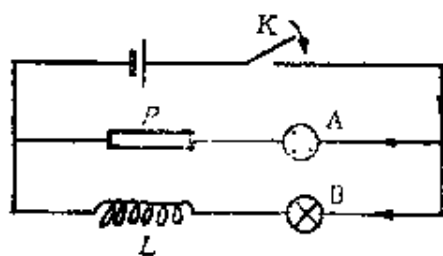


图 10.18 自感现象演示一

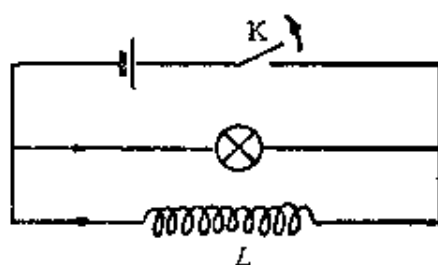


图 10.19 自感现象演示二

§ 10.6 磁场的能量

在图 10.19 所示的实验中, 当电键 K 打开后, 电源已不再向灯泡供给能量了。它突然强烈地闪亮一下所消耗的能量是哪里来的? 由于使灯泡闪亮的电流是线圈中的自感电动势产生的电流, 而这电流随着线圈中的磁场的消失而逐渐消失, 所以可以认为使灯泡闪亮的能量是原来储存在通有电流的线圈中的, 或者说是储存在线圈内的磁场中的。因此, 这种能量叫做**磁能**。自感为 L 的线圈中通有电流 I 时所储存的磁能应该等于这电流消失时自感电动势所做的功。这个功可如下计算。以 $i dt$ 表示在短路后某一时间 dt 内通过灯泡的电量, 则在这段时间内自感电动势做的功为

$$dA = \mathcal{E}_L \cdot i dt = -L \frac{di}{dt} \cdot i dt = -L i di$$

电流由起始值减小到零时, 自感电动势所做的总功就是

$$A = \int dA = \int_I^0 -Li di = \frac{1}{2}LI^2$$

因此,具有自感为 L 的线圈通有电流 I 时所具有的磁能就是

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad (10.23)$$

这就是自感磁能公式。

对于磁场的能量也可以引入能量密度的概念。下面我们用特例导出磁场能量密度公式。考虑一个螺绕环,在上节[例1]中,已求出螺绕环的自感系数为

$$L = \mu n^2 V$$

利用(10.23)式可得通有电流 I 的螺绕环的磁场能量是

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu n^2 V I^2$$

由于螺绕环管内的磁场 $B = \mu nI$,所以上式可写作

$$W_m = \frac{B^2}{2\mu} V$$

由于螺绕环的磁场集中于环管内,其体积就是 V ,并且管内磁场基本上是均匀的,所以环管内的磁场能量密度为

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} \quad (10.24)$$

利用磁场强度 $H = B/\mu$,此式还可以写成

$$w_m = \frac{1}{2}BH \quad (10.25)$$

此式虽然是从一个特例中推出的,但是可以证明它对磁场普遍有效。利用它可以求得某一磁场所储存的总能量为

$$W_m = \int w_m dV = \int \frac{HB}{2} dV$$

此式的积分应遍及整个磁场分布的空间。〔注〕

〔注〕 由于铁磁质具有磁滞现象,本节磁能公式对铁磁质不适用。

[例] 求两个相互邻近的电流回路的磁场能量, 这两个回路的电流分别是 I_1 和 I_2 。

解: 两个电路如图 10.20 所示。为了求出此系统在所示状态时的磁能, 我们设想 I_1 和 I_2 是按下述步骤建立的。

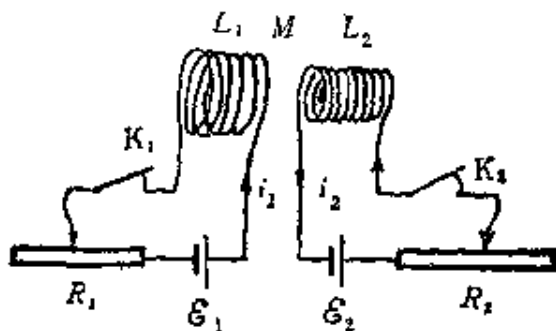


图 10.20 两个载流线圈的磁场能量

(1) 先合上电键 K_1 , 使 i_1 从零增大到 I_1 。这一过程中由于自感 L_1 的存在, 由电源 \mathcal{E}_1 做功而储存到磁场中的能量为

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

(2) 再合上电键 K_2 , 调节 R_2 使 I_1 保持不变, 这时 i_2 由零增大到 I_2 。这一过程中由于自感 L_2 的存在由电源 \mathcal{E}_2 做功而储存到磁场中的能量为

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

还要注意到当 i_2 增大时, 在回路 1 中会产生互感电动势 \mathcal{E}_{12} 。由(10.17)式,

$$\mathcal{E}_{12} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

要保持电流 I_1 不变, 电源 \mathcal{E}_1 还必须反抗此电动势做功。这样由于互感的存在, 由电源 \mathcal{E}_1 做功而储存到磁场中的能量为

$$\begin{aligned} W_{12} &= -\int \mathcal{E}_{12} I_1 dt = \int M_{12} I_1 \frac{di_2}{dt} dt \\ &= \int_0^{I_2} M_{12} I_1 di_2 = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = M_{12} I_1 I_2 \end{aligned}$$

经过上述两个步骤后, 系统达到电流分别是 I_1 和 I_2 的状态, 这时储存到磁场中的总能量为

$$\begin{aligned} W_m &= W_1 + W_2 + W_{12} \\ &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \end{aligned}$$

如果我们先合上 K_2 , 再合上 K_1 , 仍按上述推理, 则可得到储存在磁场中的总能量为

$$W'_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

由于这两种通电方式下的最后状态相同, 即两个电路中分别通有 I_1 和 I_2 的电流, 那么能量应该和达到此状态的过程无关, 也就是应有 $W_m = W'_m$ 。由此我们得

$$M_{12} = M_{21}$$

即回路 1 对回路 2 的互感系数等于回路 2 对回路 1 的互感系数, 用 M 来表示此互感系数, 则最后储存在磁场中的总能量为

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

本章提要

1. 法拉第电磁感应定律: $\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt}$

2. 动生电动势: $\mathcal{E}_{ab} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$

3. 感生电动势和感应电场:

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

\mathbf{E}_s 为感应电场强度

4. 互感:

$$\text{互感系数: } M = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}$$

$$\text{互感电动势: } \mathcal{E}_{21} = -M \frac{di_1}{dt}$$

5. 自感:

$$\text{自感系数: } L = \frac{\Psi}{i}$$

自感电动势: $\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$

自感磁能: $W_m = \frac{1}{2} LI^2$

6. 磁场的能量密度: $w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} BH$

思考题

10.1 灵敏电流计的线圈处于永磁体的磁场中, 通入电流, 线圈就发生偏转。切断电流后线圈在回复原来位置前总要来回摆动好多次。这时如果用导线把线圈的两个接头短路, 则摆动会马上停止。这是什么缘故?

10.2 熔化金属的一种方法是用“高频炉”。它的主要部件是一个铜制线圈。线圈中有一坩锅, 锅中放待熔的金属块, 当线圈中通以高频交流电时, 锅中金属就可以被熔化。这是什么缘故?

10.3 变压器的铁芯为什么总做成片状的, 而且涂上绝缘漆相互隔开? 铁片放置的方向应和线圈中磁场的方向有什么关系?

10.4 将尺寸完全相同的铜环和铝环适当放置, 使通过两环内的磁通量的变化率相等。问这两个环中的感应电流及感生电场是否相等?

10.5 电子感应加速器中, 电子加速所得到的能量是哪里来的? 试定性解释。

10.6 三个线圈中心在一条直线上, 相隔的距离很近, 如何放置可使它们两两之间的互感系数为零?

10.7 两线圈的自感分别为 L_1 和 L_2 , 它们之间的互感为 M 。

(1) 将两线圈顺串联如图 10.21(a) 所示。求 1 和 4 端之间的等效自感;

(2) 将两线圈反串联, (图 10.21b), 求 1 和 3 端之间的等效自感。

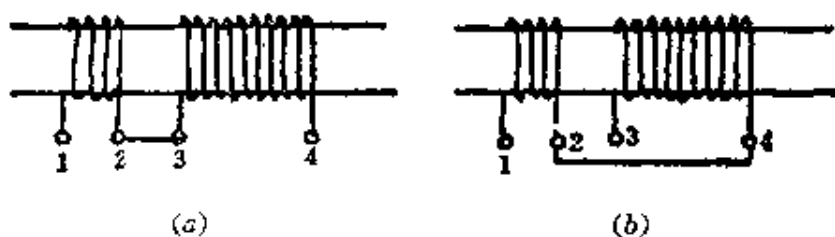


图 10.21

10.8 有两个金属环，一个的半径略小于另一个。为了得到最大互感，你把两环面对面放置还是一环套在另一环中？如何套？

10.9 如果电路中通有强电流，当你突然打开刀闸断电时，就有一大火花跳过刀闸。试解释这一现象。

习 题

10.1 在通有电流 $I=5\text{A}$ 的长直导线近旁有一导线段 ab ，长 $l=20\text{cm}$ ，离长直导线距离 $d=10\text{cm}$ （图 10.22）。当它沿平行于长直导线的方向以速度 $v=10\text{m/s}$ 平移时，导线段中的感应电动势多大？ a 、 b 哪端的电势高？

10.2 平均半径为 12cm 的 4×10^3 匝线圈，在强度为 0.5G 的地磁场中每秒钟旋转 30 周。线圈中可产生最大感生电动势为多大？如何旋转和转到何时，才有这样大的电动势？

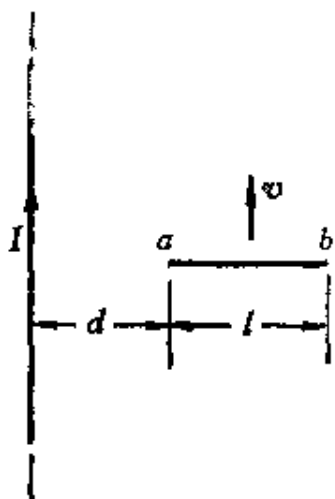


图 10.22

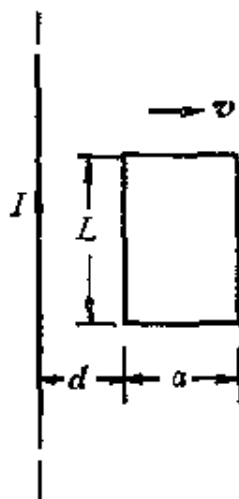


图 10.23

10.3 如图 10.23 所示，长直导线中通有电流 $I=5.0\text{A}$ ，另一矩形线圈共 1×10^3 匝，宽 $a=10\text{cm}$ ，长 $L=20\text{cm}$ ，以 $v=2\text{m/s}$ 的速度向右平动，求当 $d=10\text{cm}$ 时线圈中的感应电动势。

10.4 上题中线圈内的感生电动势在下述情况下将为多大？线圈不动，而长导线中通有交变电流 $I=5\sin 100\pi t(\text{A})$ 。

10.5 在半径为 R 的圆柱形体积内，充满磁感应强度为 B 的均匀磁场。有一长为 L 的金属棒放在磁场中，如图 10.24 所示。设磁场在增强，并且 $\frac{dB}{dt}$ 已知，求棒中的感应电动势，并指出哪端电势高。



图 10.24

10.6 某型号喷气式飞机,机翼长 47m 。如果此飞机在地磁场竖直分量为 $0.60 \times 10^{-4}\text{T}$ 处水平飞行,速度为 960km/h ,问两翼尖之间的感应电动势多大?

10.7 为了探测海洋中水的运动,海洋学家有时依靠水流通过地磁场所产生的动生电动势。假设在某处地磁场的竖直分量为 $0.70 \times 10^{-4}\text{T}$,两个电极垂直插入被测的相距 200m 的水流中,如果与两极相连的灵敏伏特计指示 $7.0 \times 10^{-3}\text{V}$ 的电势差,问水流速率多大。

10.8 发电机由矩形线环组成,线环平面绕竖直轴旋转。此竖直轴与大小为 $2.0 \times 10^{-2}\text{T}$ 的均匀水平磁场垂直。环的尺寸为 $10.0\text{cm} \times 20.0\text{cm}$,它有 120 圈。导线的两端接到外电路上,为了在两端之间产生最大值为 12.0V 的感应电动势,线环必须以多大的转速旋转?

10.9 一种用小线圈测磁场的办法如下:做一个小线圈,匝数为 N ,面积为 S ,将它的两端与一测电量的冲击电流计相连。它和电流计线路的总电阻为 R 。先把它放到待测磁场处,并使线圈平面与磁场方向垂直,然后急速地把它移到磁场外面。这时电流计给出通过的电量是 q 。试用 N, S, q, R 表示待测磁场的大小。

10.10 在电子感应加速器中,要保持电子在半径一定的轨道环内运行,轨道环内的磁场 B 应该等于它围绕的面积的平均值 \bar{B} 的一半,试证明之。

10.11 一个长 l 、截面半径为 R 的圆柱形纸筒上均匀密绕有两组线圈。一组的总匝数为 N_1 ,另一组的总匝数为 N_2 。求筒内为空气时两组线圈的互感系数。

10.12 一圆环形线圈 a 由 50 匝细线绕成,截面积为 4.0cm^2 ,放在另一个匝数等于 100 匝,半径为 20cm 的圆环形线圈 b 的中心,两线圈同轴。求:

(1) 两线圈的互感系数;

(2) 当线圈 a 中的电流以 50 A/s 的变化率减少时, 线圈 b 内磁通量的变化率;

(3) 线圈 b 的感生电动势。

10.13 半径为 2.0cm 的螺线管, 长 30cm , 上面均匀密绕 1200 匝线圈, 线圈内为空气。

(1) 问这螺线管中自感多大?

(2) 如果在螺线管中电流以 $3.0 \times 10^2 \text{ A/s}$ 改变, 在线圈中产生的自感电动势多大?

10.14 一截面积为长方形的环式均匀密绕螺线管, 其尺寸如图 10.25 所示, 共有 N 匝(图中只画出了少数几匝)。求此螺线管的自感系数。

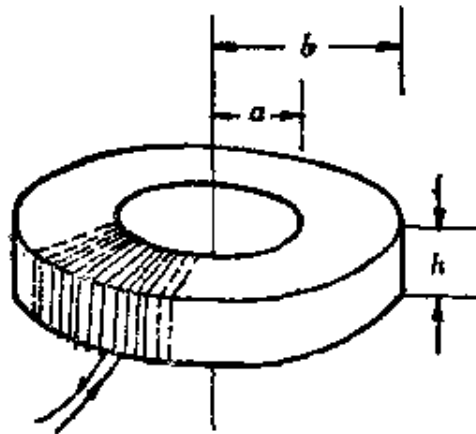


图 10.25

10.15 一同轴电缆由中心导体圆柱和外层导体圆筒组成, 二者半径分别为 R_1 和 R_2 , 筒和圆柱之间充以电介质, 电介质和金属的 μ , 均可取作 1 , 求此电缆通过电流 I (由中心圆柱流出, 由圆筒流回) 时, 单位长度内储存的磁能, 并通过和自感磁能的公式比较求出单位长度电缆的自感系数。

科学家介绍

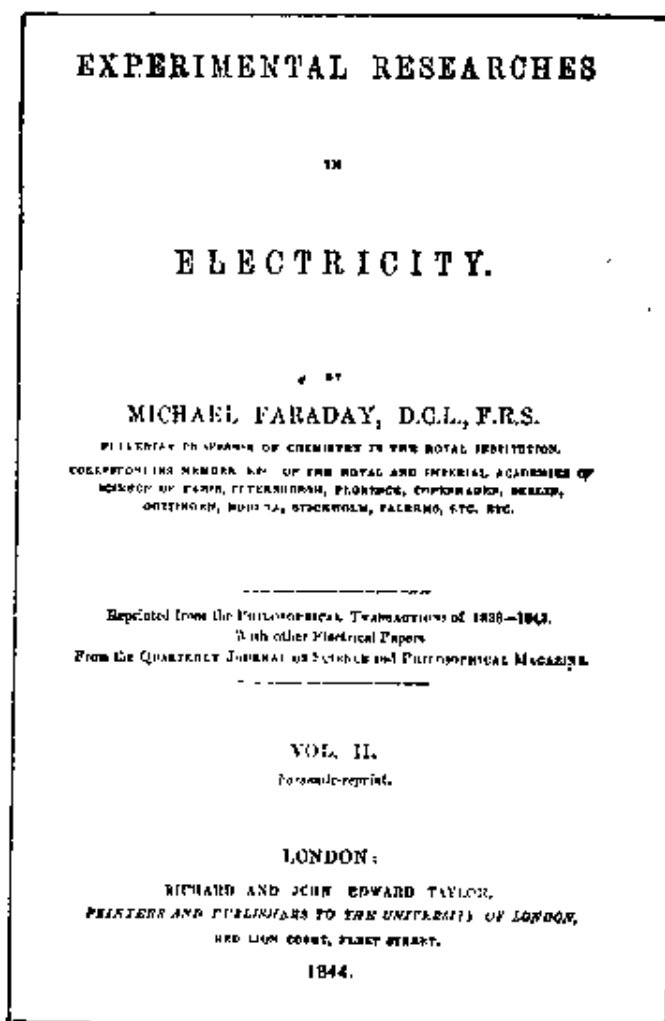
法拉第

(Michael Faraday, 1791—1867)

法拉第于 1791 年出生在英国伦敦附近的一个小村子里。父亲是铁匠。自幼家境贫寒，无钱上学读书。13 岁时到一家书店里当



法拉第像



《电的实验研究》一书的扉页

报童,次年转为装订学徒工。在学徒工期间,法拉第除工作外,利用书店的条件,在业余时间贪婪地阅读了许多科学著作,例如《化学对话》、《大英百科全书》的《电学》条目等。这些开拓了他的视野,激发了他对科学的浓厚兴趣。

1812年,学徒期满,法拉第就想专门从事科学研究。次年,经著名化学家戴维推荐,法拉第到皇家研究院实验室当助理研究员。这年底,作为助手和仆从,他随戴维到欧洲大陆考察漫游,结识了不少知名科学家,如安培、伏打等,这进一步扩大了他的眼界。1815年春回到英国后,在戴维的支持和指导下作了很多化学方面的研究工作。1821年开始担任实验室主任,一直到1865年。1824年,被推选为皇家学会会员。次年法拉第正式成为皇家学院教授。1851年,曾被一致推选为英国皇家学会会长,但被他坚决推辞掉了。

1821年,法拉第读到了奥斯特的描述他发现电流磁效应的论文《关于磁针上电碰撞的实验》。该文给了他很大的启发,使他开始研究电磁现象。经过十年的实验研究(中间曾因研究合金和光学玻璃等而中断过),在1831年,他终于发现了电磁感应现象。

法拉第发现电磁感应现象完全是一种自觉的追求。在《电的实验研究》第一集中,他写道:“不管采用安培的漂亮理论或其他什么理论,也不管思想上作些什么保留,都会感到下述论点十分特别,即虽然每一电流总伴有一个与它的方向成直角的磁力,然而电的良导体,当放在该作用范围内时,都应该没有任何感生电流通过它,也不产生在该力方面与此电流相当的某些可觉察的效应。对这些问题及其后果的考虑,再加上想从普通的磁中获得电的希望,时时激励着我从实验上去探求电流的感应效应。”

与法拉第同时,安培也作过电流感应的实验。他曾期望一个线圈中的电流会在另一个线圈中“感应”出电流来。由于他只是观察了稳恒电流的情况,所以未发现这种感应效应。

法拉第也经过同样的失败过程。只是在1831年他仔细地注意到了**变化**的情况时,才发现了电磁感应现象。第一次的发现是这样:他在一个铁环上绕了两组线圈。一组通过电键与电池组相连,另一组的导线下面平行地摆了个小磁针。当前一线圈和电池组接通或切断的瞬间,发现小磁针都发生摆动,但又都旋即回复原位。之后,他又把线圈绕在木棒上作了同样的实验,又作了磁铁插入连有电流计的线圈或从其中拔出的实验,把两根导线(一根与电池连接,另一根和电流计连接)移近或移开的实验等等,一共有几十个实验。他还当众表演了他的发电机:一个一边插入电磁铁两极间的铜盘转动时,在连接轴和盘边缘的导线中产生了电流。最后,他总结提出了电磁感应的暂态性,即只有在变化时,才能产生感应电流。他把自己已作过的实验**概括为五类**,即:变化的电流,变化的磁场,运动的稳恒电流,运动的磁铁,在磁场中运动的导体。就这样,法拉第完成了一个划时代的创举,从此人类跨入了广泛使用电能的新时代。

应该指出的是,在法拉第的同时,美国物理学家亨利(J. Henry, 1799—1878)也独立地发现了电磁感应现象。他先是在1829年发现了通电线圈断开时发生强烈的火花,他称之为“电自感”,接着在1830年发现了在电磁铁线圈的电流通或断时,在它的两极间的另一线圈中能产生瞬时的电流。

法拉第在电学的其他方面还有很多重要的贡献。1833年,他发现了**电解定律**,1837年发现了电介质对电容的影响,引入了**电容率**(即相对介电系数)概念。1845年发现了**磁光效应**,即磁场能使通过重玻璃的光的偏振面发生旋转,以后又发现物质可区分为**顺磁质**和**抗磁质**等。

法拉第不但作为实验家作出了很多成绩,而且在物理思想上

也有很重要的贡献。首先是关于自然界统一的思想。他深信电和磁的统一，即它们的相互联系和转化。他还用实验证实了当时已发现的五种电（伏打电、摩擦电、磁生电、热电、生物电）的统一。他是在证实物质都具有磁性时发现顺磁和抗磁的。在发现磁光效应后，他是这样写的：“这件事更有力地证明一切自然力都是可以互相转化的，有着共同的起源。”这种思想至今还支配着物理学的发展。

法拉第的较少抽象较多实际的头脑使他提出了另一个重要的思想——场的概念。在他之前，引力、电力、磁力都被视为是超距作用。但在法拉第看来，不经过任何媒介而发生相互作用是不可能的，他认为电荷、磁体或电流的周围弥漫着一种物质，它传递电或磁的作用。他称这种物质为电场和磁场。他还凭着惊人的想象力把这种场用力线来加以形象化的描绘，并且用铁粉演示了磁力线的“实在性”。他认为电磁感应是导体切割磁力线的结果，并得出“形成电流的力正比于切割磁力线的条数”（其后1845年，诺埃曼（F. E. Neumann 1798—1895）第一次用数学公式表示了电磁感应定律）。他甚至提出了“磁作用的传播需要时间”，“磁力从磁极出发的传播类似于激起波纹的水面的振动”等这样深刻的观点。大家知道，场的概念今天已成为物理学的基石了。

除进行科学研究外，还热心科学普及工作。他协助皇家学院举办“星期五讲座”（持续了三十几年）、“少年讲座”、“圣诞节讲座”，他自己参加讲课，内容十分广泛，从探照灯到镜子镀银工艺，从电磁感应到布朗运动等。他很讲究讲课艺术，注意表达方式，讲课效果良好。有的讲稿被译成多种文字出版，甚至被编入基础英语教材。

1867年8月25日，他坐在书房的椅子上安祥地离开了人世。

遵照他的遗言，在他的墓碑上只刻了名字和生卒年月。法拉第终生勤奋刻苦，坚韧不拔地进行科学探索。除了二十多集《电的实验研究》外，还留下了《法拉第日记》七卷，共三千多页，几千幅插图。这些书都记录着他的成功和失败，精确的实验和深刻的见解。这都是他留给后人的宝贵遗产。

C. 超导电性

超导是超导电性的简称,它是指金属或合金在极低温下(接近绝对零度)电阻变为零的性质。超导现象是荷兰物理学家翁纳斯(H. K. Onnes 1853—1926)首先发现的。

C. 1 超导现象

翁纳斯在1908年首次把最后一个“永久气体”氦气液化,并得到了低于4K的低温。1911年他在测量一个固态汞样品的电阻与温度的关系时发现,当温度下降到4.2K附近时,样品的电阻突然减小到仪器无法觉察出的一个小值(当时约为 $1 \times 10^{-5} \Omega$ 左右)。图C.1画出了由实验测出的汞的电阻率在4.2K附近的变化情况。该曲线表示在低于4.15K的温度下汞的电阻率为零(作为对比,在图C.1中还用虚线画出了正常金属铂的电阻率随温度变化的关系)。

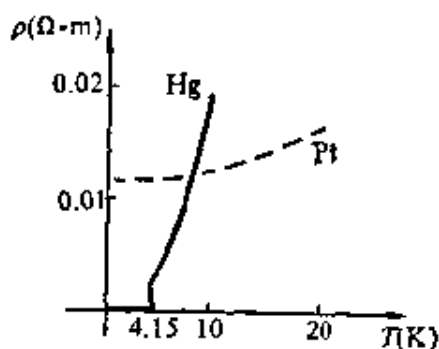


图 C.1 汞和正常金属铂的电导率随温度变化的关系

电阻率为零,即完全没有电阻的状态称为**超导态**。除了汞以外,以后又陆续发现有许多金属及合金在低温下也能转变成超导态,但它们的**转变温度**(或叫**临界温度**, T_c)不同。表C.1列出了几

表 C.1 几种超导体

材 料	T_c (K)	材 料	T_c (K)
铝	1.20	铌	9.26
铟	3.40	V_3Ga	14.4
锡	3.72	Nb_3Sn	18.0
汞	4.15	Nb_3Al	18.6
金	4.15	Nb_3Ge	23.2
钒	5.30	钡基氧化物	~90
铅	7.19		

种材料的转变温度。

利用超导体的持续电流可做一个很有趣的悬浮实验。将一个小磁棒丢入一个超导铅碗内，则可看到小磁棒悬浮在铅碗内而不下落(图C.2)。这是因为，由于电磁感应使铅碗表面感应出了持久

电流。根据楞次定律，电流的磁场将对磁棒产生斥力，磁棒越靠近铅碗，斥力就越大。最后这斥力可以大到足以抵消磁棒所受重力而使它悬浮在空中。

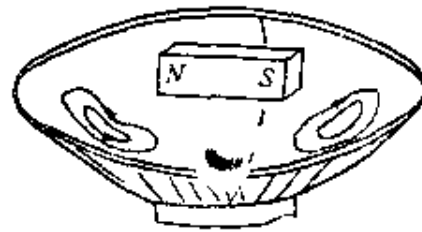


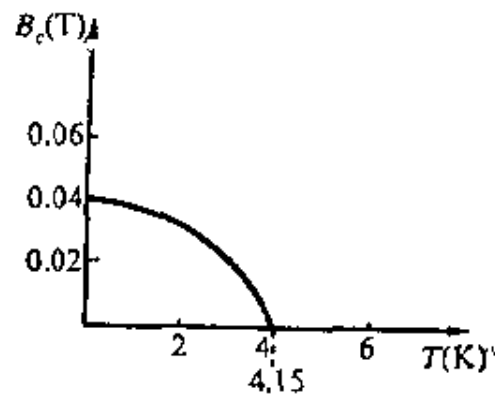
图 C.2 超导铅碗上方悬浮着小磁棒

超导体的电阻准确为零，因此一旦它内部产生电流后，只要保持超导状态不变，其电流就不会减小。这种电流称为**持久电流**。有一次，有人在超导铅环中激发了几百安培的电流，在持续两年半的时间内没有发现可观察到的电流变化。如果不是撤掉了维持低温的液氮装置，可能到今天电流也还在流着。当然，任何测量仪器的灵敏度都是有限的，测量都会有一定的误差，因而我们不可能证明超导态时的电阻严格地为零。但是，如果不是零，那也肯定是非常小的——它的电阻率不会超过最好的正常导体的电阻率的 10^{-15} 倍。

C.2 临界磁场

具有持久电流的超导环能产生磁场，而且除了最初产生持久电流时需要输入一些能量外，它和永久磁体一样，维持这电流和它所产生的磁场，并不需要任何电源。这意味着利用超导体可以在只消耗少许能量的条件下获得很强的磁场。

遗憾的是，强磁场对超导体有相反的作用，即强磁场可以破坏超导电性。例如，在绝对零度附近，0.041T的磁场就足以破坏汞的超导电性。接近临界温度时，甚至更弱的磁场也能破坏超导电性。破坏材料超导电性的最小磁场称为**临界磁场**，以 B_c 表示。 B_c



图C.3 汞的 B_c-T 曲线

随温度而改变。在图C.3中画出了汞的临界磁场 B_c （以Tesla为单位）与绝对温度 T 的关系曲线。

实验已表明，对于所有的超导体， B_c 与 T 的关系可以近似地用抛物线公式

$$B_c(T) = B_c(0) \times \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \quad (1)$$

表示，式中 $B_c(0)$ 为绝对零度时的临界磁场。

临界磁场的存在限制了超导体中能够通过电流。例如在一根超导线中有电流通过时，这电流也在超导线中产生磁场。随着电流的增大，当它的磁场足够强时，这导线的超导电性就会被破坏。例如，在绝对零度附近，直径0.2cm的汞超导线，最大只允许通过200A的电流，电流再大，它将失去超导电性。对超导电性的

这一限制,在设计超导磁体时是必须加以考虑的。

C.3 超导体中的电场和磁场

我们知道,由于导体有电阻,所以为了在导体中产生稳恒电流,就需要在其中加电场。电阻越大,需要加的电场也就越强。对于超导体来说,由于它的电阻为零,即使在其中有电流产生,维持这电流也不需要加电场。这就是说,在超导体内部电场总为零。

利用超导体内电场总是零这一点可以说明如何在超导体内激起持久电流。如图 C.4a 所示,用线吊起一个焊锡环(铅锡合金),先使其温度在临界温度以上,当把一个条形磁铁移近时,在环中激起了感生电流。但由于环有电阻,所以此电流很快就消失了。但环内留有磁通量 Φ 。然后,如图 C.4(b) 所示,将液氦容器上移,使焊锡环变成超导体。这对环内的磁通量 Φ 不变。这时如果移走磁铁,合金环内的磁通量是不能改变的。若改变了,根据电磁感应定律,在环体内将产生电场,这和超导体内电场为零是矛盾的。因此,在磁铁移走的过程中,超导环内就会产生电流,它的大小自动地和 Φ 值相应(图 C.4c)。这个电流就是超导体中的持久电流,它所维持的磁场可以由近旁的罗盘显示出来。

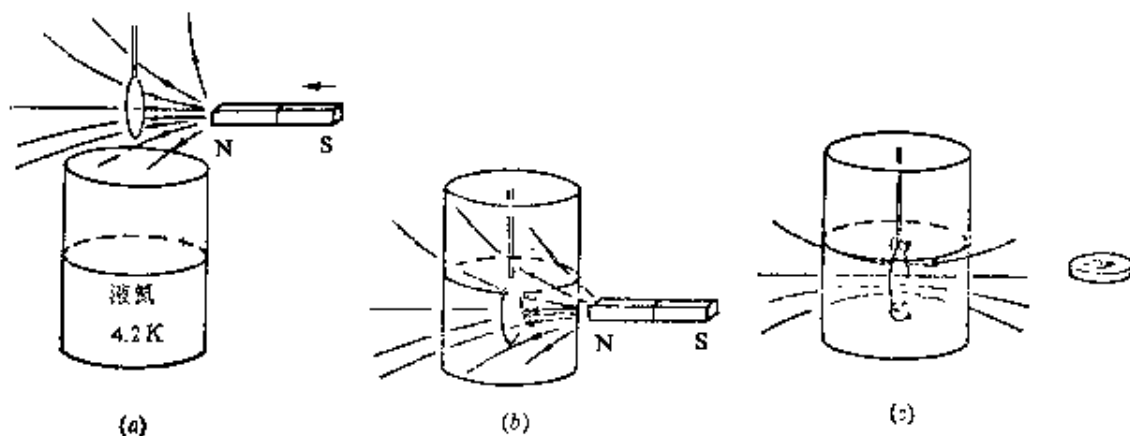


图 C.4 超导环中持续电流的产生

由于超导体内部电场强度为零,根据电磁感应定律,它体内各处的磁通量也不能变化。由此可以进一步导出超导体内部的磁场为零。例如,当把一个超导体样品放入一磁场中时,在放入的过程中,由于穿过超导体样品的磁通量发生了变化,所以将在样品的表面产生感应电流(图C.5a)。这电流将在超导体样品内部产生磁场。这磁场正好抵消外磁场,而使超导体内部磁场仍为零。在超导体的外部,超导体表面感应电流的磁场和原磁场的叠加将使合磁场的磁力线绕过超导体而发生弯曲(图C.5b)。这种结果常常说成是磁力线不能进入超导体。

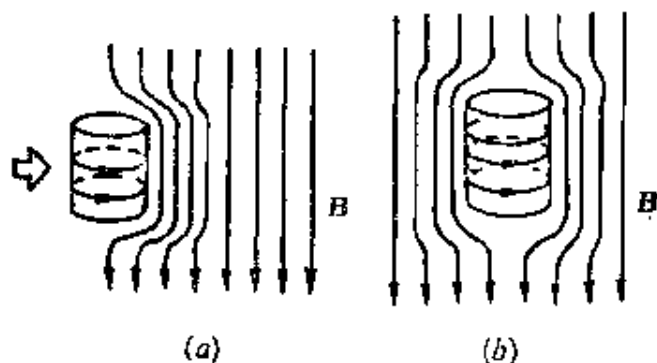


图 C.5 超导体样品放入磁场中

不但把超导体移入磁场中时,磁力线不能进入超导体,而且原来就在磁场中的超导体也会把磁场排斥到超导体之外。1933年迈斯纳和奥克森费尔特在实验中发现了下述事实。他们先把在临界温度以上的锡和铅样品放入磁场中,由于这时样品不是超导体,所以其中有磁场存在(图C.6a)。当他们维持磁场不变而降低样品的温度时,发现当样品转变为超导体后,其内部也没有磁场了(图C.6b)。这说明,在转变过程中,在超导体表面上也产生了电流。这电流在其内部的磁场完全抵消了原来的磁场。一种材料能减弱其内部磁场的性质叫**抗磁性**。迈斯纳实验表明,超导体具有完全的抗磁性。转变为超导体时能排除体内磁场的现象叫**迈斯纳效应**。

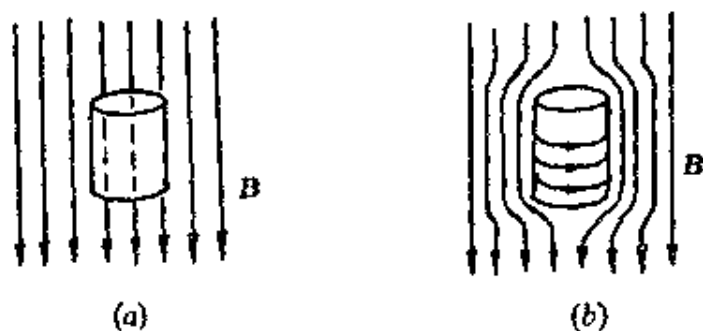


图 C.6 在磁场中样品向超导体转变

迈斯纳效应中，只在超导体表面产生电流是就宏观而言的。在微观上，这电流是在表面薄层内产生的，薄层厚度约为 10^{-5}cm 。在这表面层内，磁场并不完全为零，因而还有一些磁力线穿入表面层。

严格说来，理想的迈斯纳效应只能在沿磁场方向的非常长的圆柱体(如导线)中发生。对于其他形状的超导体，磁力线被排除的程度取决于样品的几何形状。在一般情况下，整个金属体内分成许多超导区和正常区。磁场增强时，正常区扩大，超导区缩小。当达到临界磁场时，整个金属都变成正常的了。

C.4 第二类超导体

大多数纯金属超导体排除磁力线的性质有一个明显的分界。在低于临界温度的某一温度下，当所加磁场比临界磁场弱时，超导体禁止磁力线进入。但一旦磁场比临界磁场强时，这种超导特性就消失了，磁力线可以透入金属体内。具有这种性质的超导体叫**第一类超导体**。还有一类超导体的磁性质较为复杂，它们叫做**第二类超导体**。目前发现的这类超导体有铌、钒和一些合金材料。这类超导体在低于临界温度的一定温度下有两个临界磁场 B_{c1} 和 B_{c2} 。图 C.7 示出了这类超导体的两个临界磁场对温度 T 的变化曲线。

当磁场比第一临界磁场 B_{c1} 弱时,这类超导体处于纯粹的超导态,称迈斯纳态,这时它完全禁止磁力线进入。当磁场在 B_{c1} 和 B_{c2} 之间时,材料具有超导区和正常区相混杂的结构,叫做混合态,这时可以有部分磁力线进入。当磁场比第二临界磁场 B_{c2} 还要强时,材料完全转入正常态,磁力线可以自由进入。例如,铌三锡(Nb_3Sn)在4.2K的温度下, $B_{c1}=0.019T$, $B_{c2}=22T$ 。这个 B_{c2} 值是相当高的。这样高的 B_{c2} 值有很重要的实用价值,因为在任何金属都已丧失超导特性的强磁场中,这种材料还能保持超导电性。

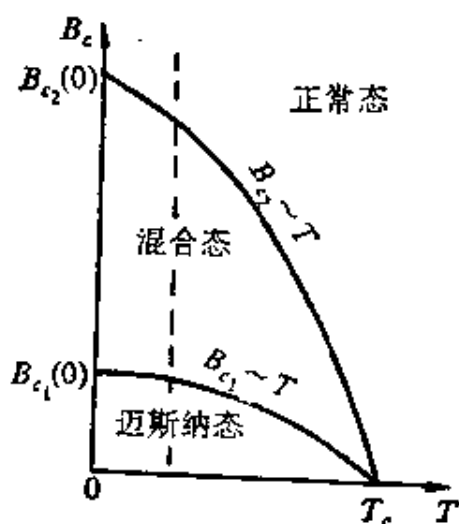


图 C.7 第二类超导体 $B_c \sim T$ 曲线

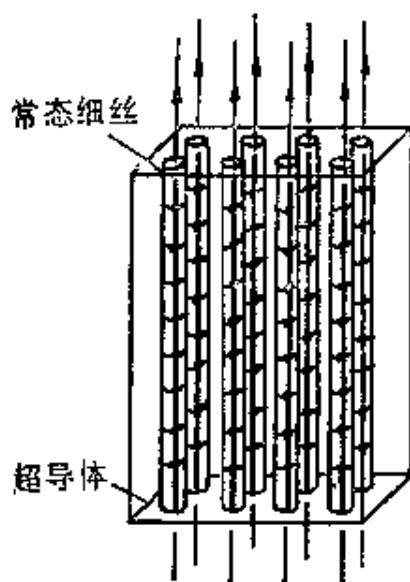


图 C.8 第二类超导体的混合态

第二类超导材料处于中等强度的磁场中时,它的混合态具有下述的结构:整个材料是超导的,但其中嵌有许多细的正常态的丝,这些丝都平行于外加磁场的方向,它们是外磁场的磁力线的通道(图 C.8)。每根细丝都被电流围绕着,这些电流屏蔽了细丝中磁场对外面的超导区的作用。这种电流具有涡旋性质,所以这种正常态细丝叫做**涡旋线**。

实验证明,在每一条涡旋线中的磁通量都有一个确定的值 Φ_0 ,它和普朗克常数 h 以及电子电量 e 有一确定的关系,

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \times 10^{-15} \text{T} \cdot \text{m}^2 \quad (2)$$

这说明磁通量是量子化的， Φ_0 就表示**磁通量子**。在第二类超导体处于混合态时，外磁场的增强只能增加涡旋线的数目，而不能增加每根涡旋线中的磁通。磁场越强，涡旋线越多、越密。磁场到达 B_{c2} 时，涡旋线将充满整个材料而使材料全部转变为正常态。这种涡旋线可以用铁粉显示出来。图 C.9 就是用铁粉显示的铅—铋超导材料断面图。图中显示涡旋线排列成整齐的图样，线与线之间的距离约为 0.005cm。

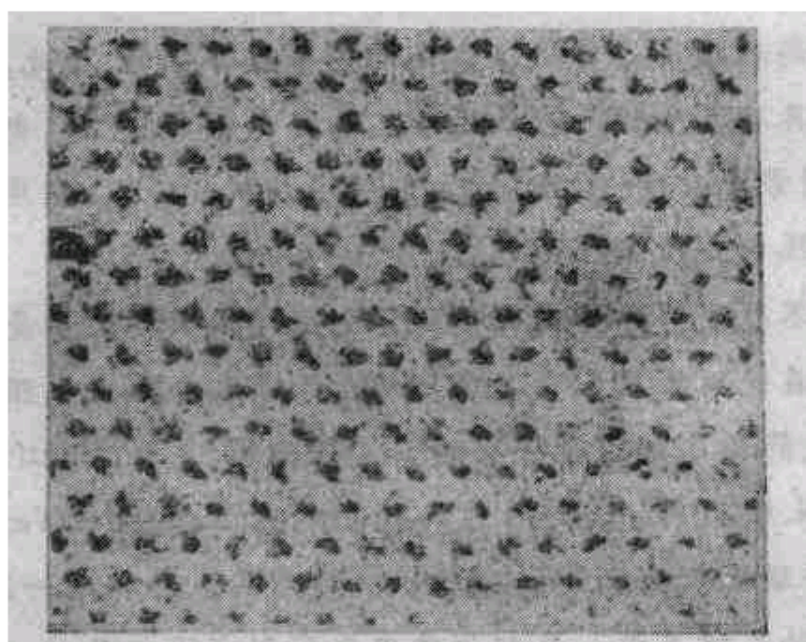


图 C.9 铁粉显示的涡旋线端头

C.5 BCS 理论

超导电性是一种宏观量子现象，只有依据量子力学才能给予正确的微观解释。

按经典电子说，金属的电阻是由于形成金属晶格的离子对定向运动的电子碰撞的结果。金属的电阻率和温度有关，是因为晶

格离子的无规则热运动随温度升高而加剧，因而使电子更容易受到碰撞。在点阵离子没有热振动（冷却到绝对零度）的完整晶体中，一个电子能在离子的行间作直线运动而不经受任何碰撞。

根据量子力学理论，电子具有波的性质，上述经典理论关于电子运动的图象不再正确。但结论是相同的，即在没有热振动的完整晶体点阵中，电子波能自由地不受任何散射（或偏折）地向各方向传播。这是因为任何一个晶格离子的影响都会被其他粒子抵消。然而，如果点阵离子排列的完整规律性有缺陷时，在晶体中的电子波就会被散射而使传播受到阻碍。这就使金属具有了电阻。晶格离子的热振动是要破坏晶格的完全规律性的，因此，热振动也就使金属具有了电阻。在低温时，晶格热振动减小，电阻率就下降；在绝对零度时，热振动消失，电阻率也消失（除去杂质和晶格位错引起的残余电阻以外）。

由此不难理解为什么在低温下电阻率要减小。但是这不能说明为什么在绝对零度以上几度的温度下有些金属的电阻会完全消失。成功地解释这种超导现象的理论是巴登（J. Bardeen 1908—）、库柏（L. N. Cooper, 1930—）和史雷夫（J. R. Schrieffer, 1931—）于 1957 年联合提出的，现在就叫 BCS 理论。根据这一理论，产生超导现象的关键在于，在超导体中电子形成了电子对，叫“库柏对”。金属中的电子不是十分自由的，它们都通过点阵离子而发生相互作用。每个电子的负电荷都要吸引晶格离子的正电荷。因此，邻近的离子要向电子微微靠拢。这些稍微聚拢了的正电荷又反过来吸引其他电子，总效果是一个自由电子对另一个自由电子产生了小的吸引力。在室温下，这种吸引力是非常小的，不会引起任何效果。但当温度低到接近绝对零度几度，因而热骚动几乎完全消失时，这吸引力就大得足以使两个电子永久结合成对。

当超导金属处于静电平衡态时（没有电流），每个“库柏对”由

两个动量完全相反的电子所组成。很明显，这样的结构用经典的观点是无法解释的。因为按经典的观点，如果两个粒子有数值相等、方向相反的动量，它们将沿相反的方向彼此分离，它们之间的相互作用将不断减小，因而不能永远结合在一起，然而，根据量子力学的观点，这种结构是有可能的。这里，每个粒子都用波来描述。如系两列波沿相反的方向传播，它们能较长时间地连续交叠在一起，因而就能连续地相互作用。

在有电流的超导金属中，每一个电子对都有一总动量，这动量的方向与电流方向相反，因而能传送电荷。电子对通过晶格运动时不受阻力。这是因为当电子对中的一个电子受到晶格散射而改变其动量时，另一个电子也同时要受到晶格的散射而发生相反的动量改变。结果这电子对的总动量不变。所以晶格既不能减慢也不能加快电子对的运动，这在宏观上就表现为超导体对电流的电阻是零。

C. 6 约瑟夫森效应

超导电性的量子特征明显地表现在约瑟夫森(B. D. Josephson 1940—)效应中。两块超导体中间夹一薄的绝缘层就形成一个约瑟夫森结。例如，先在玻璃衬板表面蒸发上一层超导膜（如铌膜），然后把它暴露在氧气中使此铌膜表面氧化，形成一个厚度约为 $10-30\text{\AA}$ 的绝缘氧化薄层。之后在这氧化层上再蒸发上一层超导膜（如铅膜），这样便做成了一个约瑟夫森结（图C. 10）。

按经典理论，两种超导材料之间的绝缘层是禁止电子通过的。这是因为绝缘层内的电势比超导体中的电势低得多，对电子的运动形成了一个高的“势垒”。超导体中的电子的能量不足以使它爬过这势垒，所以宏观上不能有电流通过。但是，量子力学原理指

出,即使对于相当高的势垒,能量较小的电子也能穿过,好象势垒下面有隧道似的(图C.10b)。这种电子对通过超导体约瑟夫森结中势垒隧道而形成超导电流的现象叫**超导隧道效应**,也叫约瑟夫森效应。

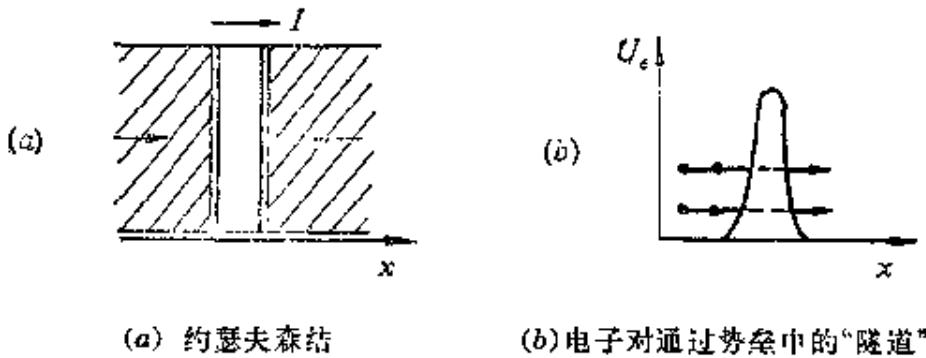


图 C.10

约瑟夫森结两旁的电子波的相互作用产生了许多独特的干涉效应,其中之一是用直流产生交流。当在结的两侧加上一个恒定直流电压 V 时,发现在结中会产生一个交变电流,而且辐射出电磁波。这交变电流和电磁波的频率由下式给出

$$\nu = \frac{2eV}{h} \quad (3)$$

例如, $V = 1\mu\text{V}$ 时, $\nu = 483.6\text{MHz}$, $V = 1\text{mV}$ 时, $\nu = 483.6\text{GHz}$ 。利用这一现象可以作为特定频率的辐射源。测定一定直流电压下所发射的电磁波的频率,利用(3)式就可非常精确地算出基本常数 e 和 h 的比值,其精确度以前是从未达到过的。

如果用频率为 ν 的电磁波照射约瑟夫森结,当改变通过结的电流时,则结上的电压 V 会出现台阶式变化(图C.11)。电压突变值 V_n 和频率 ν 有下述关系

$$V_n = n \frac{h\nu}{2e}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

例如当 $\nu = 9.2\text{GHz}$ 时,台阶间隔约为 $19\mu\text{V}$ 。

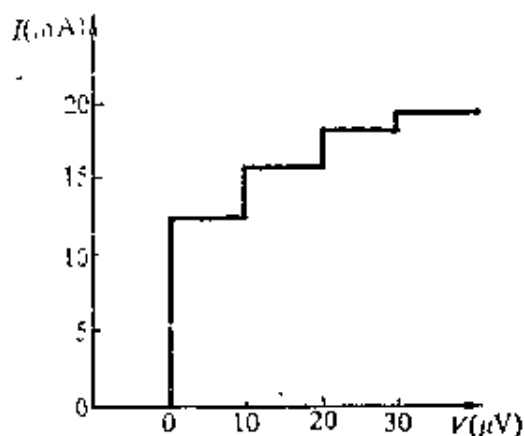


图 C.11 台阶式电压

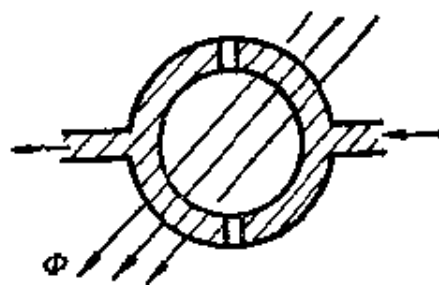


图 C.12 超导量子干涉仪
原理示意图

根据这种电压决定于频率的关系,可以监视电压基准,使电压基准的稳定度和精确度提高 1、2 个数量级。这也是以前未曾达到的。

另一独特的干涉效应是利用并联的约瑟夫森结产生的。这样一个并联装置叫超导量子干涉器(SQUID,图C.12)。通过这一器件的总电流决定于穿过这一环路孔洞的磁通量:当磁通量等于磁通量子 Φ_0 (见(2)式)的半整数倍时,电流最小,当等于 Φ_0 的整数倍时,电流最大(图C.13)。由于 Φ_0 值很小,而且明显地和电流有关,所以这种器件可被用来非常精密地测量磁场。

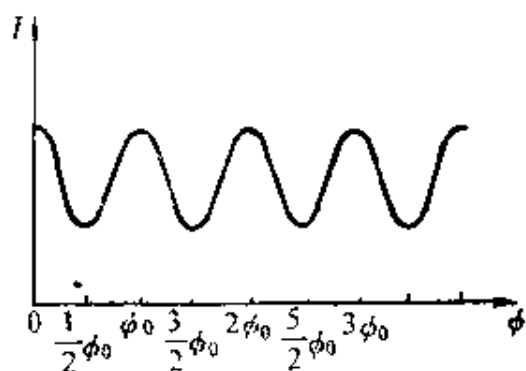


图 C.13 超导量子干涉仪中磁通量
与电流的关系

C.7 超导在技术中的应用

超导在技术中的应用最主要的是做电磁铁的超导线圈以产生

强磁场。这项技术是近20年来发展起来的新兴技术之一。在高能加速器、受控热核反应实验中已有很多的应用，在电力工业、现代医学等方面也显示出有良好的前景。

传统的电磁铁是由铜线绕组和铁心构成的。尽管在理论上可通过增加电流来获得很强的磁场，但实际上由于铜线有电阻，电流增大时，发热量要按平方的倍数增加。因此，要维持一定的电流，就需要很大的功率。而且除了开始时产生磁场所需要的能量之外，供给电磁铁的能量都以热的形式损耗了。为此，还需要用大量的循环油或水进行冷却，这也需要额外的功率来维持。因此，传统的电磁铁是技术中效率最低的设备之一，而且形体笨重。与此相反，如果用超导线做电磁铁，则维持线圈中的产生强磁场的大电流并不需要输入任何功率。同时由于超导线（如 Nb_3Sn 芯线）的容许电流密度（ $10^9 A/m^2$ ，为临界磁场所限）比铜线的容许电流密度（ $10^2 A/m^2$ ，为发热熔化所限）大得多，所以导线可以细得多，再加上不需庞大的冷却设备，所以超导电磁铁可以做得很轻便。例如，一个产生5T的中型传统电磁铁重量可达20吨，而产生相同磁场的超导电磁铁不过几公斤！

当然，超导电磁铁的运行还是需要能量的。首先是最开始时产生磁场需要能量，其次，在正常运转时需保持材料温度在绝对温度几度，因此，需要有用液氮的致冷系统，而这也需要能量。虽然如此，还是比维持一个传统电磁铁需要的能量少。例如在美国阿贡实验室中的气泡室（探测微观粒子用的一种装置，作用如同云室）用的超导电磁铁，线圈直径4.8m，产生1.8T的磁场。在电流产生之后，维持此电磁铁运行只需要190kW的功率来维持液氮致冷机运行。而同样规模的传统电磁铁的运行需要的功率则是10000kW。这两种电磁铁的造价差不多，但超导电磁铁的年运行费用要小到1/10。

美国的费米实验室的高能加速器中的超导电磁铁长7m,磁场可达4.5T。整个加速器环的周长为6.2km,它由774块超导电磁铁组成,另外有240块磁体用来聚焦高能粒子束。超导电磁铁环安放在常规磁体环的下面。粒子首先在常规磁体环中加速,然后再送到超导电磁铁环中加速,最后能量可达到 10^6MeV 。

超导电磁铁还用作核磁共振波谱仪的关键部件。医学上利用核磁共振成像技术可早期诊断癌症。由于它的成像是三维立体像,这是其他成像方法(如X光、超声波成像)所无法比拟的。它能准确检查发病部位,而且无辐射伤害,诊断面广,使用方便。

超导材料,如NbTi合金或 Nb_3Sn 都很脆,因此做电缆时通常都把它们做成很多细丝而嵌在铜线内,并且把这种导线和铜线绕在一起。这样不仅增加了电缆的强度,而且增大了超导体的表面积。这后一点也是重要的,因为在超导体中,电流都是沿表面流通的。另外,在超导情况下,相对于超导材料,铜是绝缘体。但一旦由于致冷出事故或磁场过强而使超导性破坏时,电流仍能通过铜导线流通。这样就可避免强电流(10^5A 或更大)突然被大电阻阻断时,大量磁能突然转变为大量的热而发生的危险。

在电力工业中,超导电机是目前最令人感兴趣的应用之一。传统电机的效率已经是很高的了。例如可高达99%。而利用超导线圈,效率可望进一步提高,但更重要的是,超导电机可以具有更大的极限功率,而且重量轻、体积小。超导发电机在大功率核能发电站中可望得到应用,而潜水艇对超导发电机或超导电动机都会感兴趣的。

超导材料还可能做为远距离传送电能的传输线。由于其电阻为零,当然大大减小了线路上能量的损耗(传统高压输电损耗可达10%)。更重要的是,由于重量轻、体积小,输送大功率的超导传输线可铺设在地下管道中,从而省去了许多传统输电线的架设铁塔。

另外,传统输电需要高压,因而有升压、降压设备。用超导线就不需要高压,还可不用交流电而用直流电。用直流电的超导输电线比用交流的要便宜些,因为直流输电线可以用第二类超导材料,它的容许电流密度大而且设计简单。

利用超导线中的持续电流可以借磁场的形式储存电能,以调节城市每日用电的高峰与低潮。把各种储能方式的能量密度加以比较(表C.2),可知磁场储能最集中。例如,储存10000kW·h的电能所需要的磁场(10T)的体积约为 10^4m^3 。一个截面积是5m见方而直径是100m的螺绕环就大致够了。

表 C.2 各种储能方式的能量密度

储 能 方 式	能量密度(kW·h/m ³)
磁场,10T	11.0
电场,10 ⁶ kV/m	0.01
水库,高100m	0.27
压缩空气,50atm	5
热水,100°C	18

最后可以提一下超导磁悬浮的可能应用。曾设想在列车下部装上超导线圈,当它通有电流而列车启动后,就可以悬浮在铁轨上。这样就大大减小了列车与铁轨之间的摩擦,从而提高列车的速度。有的工程师估计,在车速超过200km/h时,超导悬浮的列车比利用轮子的列车更安全。

C.8 高温超导

从超导现象发现的几十年来,科学家一直寻求在较高温度下具有超导电性的材料,然而到1985年才达到23K的温度(Nb₃Ge)。1986年4月美国IBM公司的缪勒和柏诺兹博士宣布钡铜氧化物

物在95K时出现超导现象。1987年超导材料的研究出现了划时代的进展。先是年初华裔美籍科学家朱经武、吴茂昆宣布制成了转变温度为98K的钇钡铜氧超导材料。其后在1987年2月24日中科院的新闻发布会上宣布,物理所赵忠贤、陈立泉等十三位科技人员制成了主要成份为钇钡铜氧四种元素的钡基氧化物超导材料,其零电阻的温度为78.5K。几乎同一时期,日、苏等科学家也获得了类似的成功。这样,科学家们就获得了液氮温区的超导体,从而把人们认为到2000年才能实现的目标大大提前了。这一突破性的成果可能带来许多学科领域的革命,它将对电子和仪器工业发生重大影响,并为实现电能超导输送、数字电子学革命、大功率电磁铁和新一代粒子加速器的制造以及医学上的核磁共振成像提供实际的可能。目前中、美、日、苏等国家都正在大力开展高温超导体的研究工作。

截至1989年5月,中国在高温超导材料研制方面仍处于世界领先地位。具体的成果有:钇钡铜氧材料临界电流密度可达 6000 A/cm^2 ,同样材料的薄膜临界电流密度可达 10^6 A/cm^2 。利用自制超导材料已可测到 $2\times 10^{-8}\text{ G}$ 的极弱磁场(这相当于人体内如肌肉电流的磁场),新研制的铋铅锑锆钙铜氧超导体的临界温度已达132K到164K,这些材料的超导机制已不能用BCS理论解释,中国科学家在超导理论方面也正做着有开创性的工作。

第十一章 麦克斯韦方程组 和电磁辐射

本章要求

1. 通过复习总结理解麦克斯韦方程组中各方程的物理意义。
2. 了解加速电荷的横向电场和磁场是怎么产生的。
3. 了解真空中的电磁波中的电场、磁场以及传播速度之间的关系。
4. 了解电磁波能流密度的意义并能应用坡印亭矢量公式进行分析计算。
5. 了解电磁波的动量及其与电磁波能量的关系,并会计算辐射压力。

§ 11.1 麦克斯韦方程组

本书从开始到现在,已经讨论了电场和磁场的各种规律。现在可以把电场和磁场的基本规律总结一下。这些规律最基本的形式是真空中电磁场规律,它们是

$$\text{I} \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\text{II} \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\text{III} \quad \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{IV} \quad \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_e}{dt} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c^2} \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

由于这一组方程式是麦克斯韦于 1865 年首先作为电磁理论的整体总结出来的，所以它就叫麦克斯韦方程组。从这一组方程式出发，通过数学推导，可以得出电磁场的各种性质。在已知电荷和电流分布的情况下，这组方程可以给出电场和磁场的唯一分布。特别是当初始条件给定后，这组方程还能唯一地预言电磁场此后变化的情况。正象牛顿运动方程能完全描述质点的动力学过程一样，麦克斯韦方程组能完全描述电磁场的动力学过程。

下面再简要地说明一下上述各方程的物理意义：

方程 I 是电场的高斯定律，它说明电场强度和电荷的联系。尽管电场和磁场的变化也能有联系(如感应电场)，但总的电场和电荷的联系总服从这一高斯定律。

方程 II 是磁通连续原理，它说明目前的电磁场理论认为在自然界中没有单一的“磁荷”(或磁单极)存在。

方程 III 是法拉弟电磁感应定律，它说明变化的磁场和电场的联系。虽然电场和电荷也有联系，但总的电场和磁场的联系总符合这一规律。

方程 IV 是一般形式下的安培环路定理，它说明磁场和电流(即运动的电荷)以及变化的电场的联系。

为了求出电磁场对带电粒子的作用从而预言粒子的运动，还需要洛伦兹力公式

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

这一公式实际上是电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 的定义。

最后让我们作一个历史的回顾，以说明得到麦克斯韦方程组有一个历史过程。从最早的库仑(1785 年)算起，通过了泊松、高斯等人的研究形成了静电场(以及静磁场)的(超距作用)理论。伽

伐尼 1786 年发现了电流, 后经伏特、欧姆、法拉第等人发现了关于电流的定律。1820 年奥斯特发现了电流的磁效应, 很快 (一两年内), 毕奥、萨伐、安培、拉普拉斯等作了进一步定量的研究。1831 年法拉第发现了有名的电磁感应现象, 并提出了场和力线的概念, 进一步揭示了电与磁的联系。在这样的基础上, 麦克斯韦集前人之大成, 再加上他极富创见的关于感应电场和位移电流的假说, 建立了一套完整的宏观的电磁场理论。在这一历史过程中, 有偶然的机遇, 也有有目的的探索; 有精巧的实验技术, 也有大胆的理论独创; 有天才的物理模型设想, 也有严密的数学方法应用。而最后形成的麦克斯韦电磁场方程是“完整的”。它使人类对宏观世界的认识达到了一个新的高度。麦克斯韦的这一成就可以认为是从牛顿力学理论到爱因斯坦相对论的提出的这段时期中物理学史上最重要的理论成果。

还可进一步的指出, 1905 年爱因斯坦创立了相对论。它不但使人们对牛顿力学有了更全面的认识, 也使人们对已有的电磁理论有了更深刻的理解。它使人们认识到电磁场是一个统一的实体, 而麦克斯韦方程组可以在相对论的基础上加以统一的理论论证。现代自然科学寻求着自然界的统一, 电磁学的发展也体现了这一点。

*§ 11.2 加速电荷的电场

麦克斯韦方程组的一个直接重要的推论是电磁波的存在。麦克斯韦本人首先发现了这一点, 并根据电磁波的速度与光速相等, 在历史上第一次指出了光波就是一种电磁波, 从而使人们认识到光现象和电磁现象的统一性。这一划时代的预言在他逝世约十年后的 1888 年被赫芝用实验证实了。从那时起, 在麦克斯韦方程组的基础上, 电磁学理论和光学理论不断地深入发展。与此相配合,

各种电工技术和无线电技术也不断地得到改进和完善。现代社会生活不可缺少的各种无线电通讯技术的不断发展可以说是从那时开始的。

从麦克斯韦方程组导出电磁波的存在并说明其性质，需要稍微复杂的数学，本书不再介绍这样的推导。下面用稍为简单的数学通过一种更加直观的讨论(当然要结合麦克斯韦方程组)来介绍电磁波的产生和它的各种性质。

我们已研究过静止电荷的电场(第一章)。显然，它是不会传播的。我们也研究过作匀速运动的电荷的电场(第二章)，它的电场和静电场不同，而且与之相联系的还有磁场，这电场和磁场的分布都和电荷运动的速度有关。虽然如此，由于这种电磁场都只随着运动电荷一同运动，在运动电荷的周围总保持一样的分布，所以也没有场的向外传播。事实证明，电磁场的传播，也就是电磁波的产生总是和电荷的加速运动相联系的。下面就来研究加速电荷的场，首先是加速电荷的电场。

我们将不作一般的研究，而只对一种最简单最基本的情况加以讨论。设在真空中一个点电荷 q 原来一直静止在原点 O ，从时刻 $t=0$ 开始以加速度 a 沿 x 轴正方向作加速运动，在时刻 $t=\tau$ 时，速度达到 $v=a\tau$ ，此后即以此速度继续作匀速直线运动。为了简单起见我们假设 $v \ll c$ (c 为光速)，下面研究在任意时刻 $t (\gg \tau)$ 时此电荷的电场。

如图 11.1 所示，在 $t=0$ 时，电荷从原点出发，在 $t=\tau$ 时，电荷到达 P 点。在这一段时间内由于电荷的加速运动，它周围的电场会发生扰动。这一扰动以光速 c 向外传播。在时刻 t ，这一扰动的前沿到达以 O 为心，以 $r=ct$ 为半径的球面上。根据相对论关于光速最大的结论，此时刻不可能有任何变化的信息传到此球面以外，因此球面以外的电场仍是电荷原来静止在 O 点时的

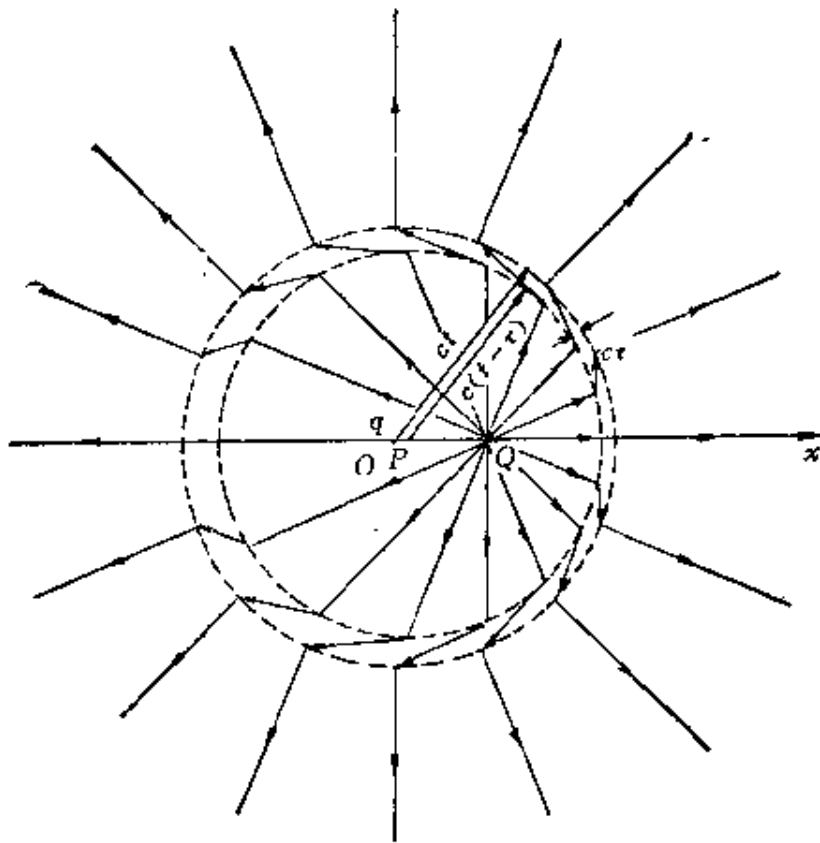


图 11.1 在时刻 t 电荷 q 的电场

静电场, 它的电力线是沿着从 O 点引出的半径方向的直线。

在 $t = \tau$ 时, 电荷停止加速。由电荷加速引起的电场扰动的后沿在 t 时刻已向四周传播了 $c(t - \tau)$ 的距离。以 P 为心, 以 $c(t - \tau)$ 为半径作一球面, 由于从 $t = \tau$ 开始, 电荷作匀速运动, 所以在这球面内的电场应该是作匀速直线运动的电荷的电场。根据我们的设定, $v \ll c$, 所以这球面内的电场在任意时刻都近似地为静电场。在时刻 t , 这一电场的电力线是从此时刻 q 所在点 (Q 点) 引出的沿半径方向的直线。

由图 11.1 可明显地看出, 在上述两静电场之间, 有一个由电荷的加速而引起的电场扰动所形成的过渡区。由于 $t \gg \tau$, $c \gg v$, 所以 $ct \gg \frac{1}{2}v\tau$ (O, P 的距离)。因此, 过渡区前、后沿的两个球面

几乎是同心球面,而过渡区的厚度为 $c\tau$ 。随着时间的推移,这一过渡区的半径(ct)不断扩大,电场的扰动也就不断地由近及远地传播。这一传播就是一种特殊形式的电磁波。

由高斯定律可知,在过渡区两侧的电力线总条数是相等的,而且即使通过过渡区,电力线也应该是连续的。因此用电力线描绘整个电场时,应该把过渡区两侧同一方向的电力线连起来。这样在过渡区电力线就要发生扭折,正象图 11.1 所画的那样。在 $v \ll c$ 的情况下,这段扭折可以当直线段看待。

现在借助电力线图来分析过渡区域内的电场。如图 11.2,选用与 x 轴成 θ 角的那条电力线,此图中由于 O, P 的距离比 $r = ct$ 小得多,我们把 O 和 P 看作一点 O (因此图中未标出 P),而 $OQ = \frac{v}{2}\tau + v(t - \tau) \approx vt$ 。过渡区内的电场 E 可以分成 E_r 和 E_θ 两个分量。由图可以看出

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{vt \sin \theta}{c\tau} = \frac{at \sin \theta}{c} = \frac{ar \sin \theta}{c^2} \quad (11.1)$$

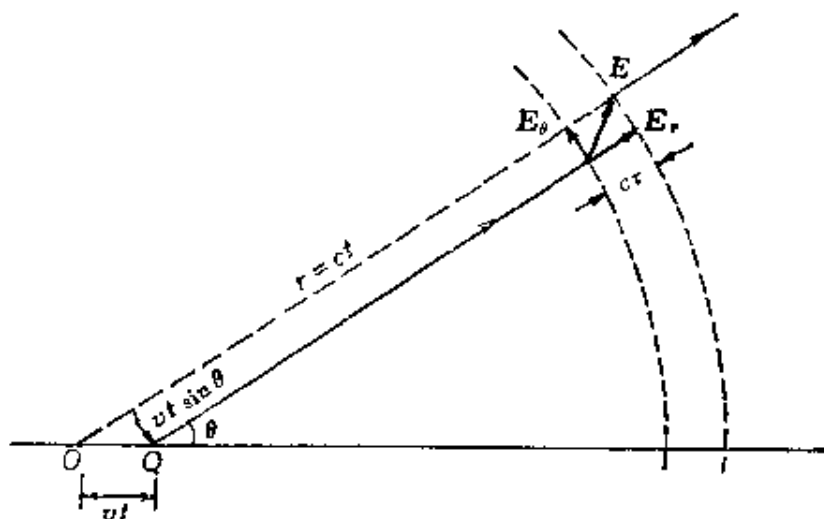


图 11.2 加速电荷的电场

根据高斯定律,由于电通量只和垂直于高斯面的电场分量有关,所以电力线在过渡区连续就意味着 E_r 分量仍是库仑定律给出的径

向电场,即

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (11.2)$$

将此式代入上式可得

$$E_\theta = \frac{qa\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (11.3)$$

这一电场垂直于电磁场传播速度的方向(这里就是 \hat{r} 的方向),并只在过渡区内存在,所以它就是电荷加速运动时所产生的电场。应该注意的是它随着 r 的一次方成反比地减小。而静电场以及匀速运动电荷的电场则随着 r 的二次方成反比地减小,它们比加速电荷的电场减小得快。因此在离开电荷足够远的地方,当静电场已减小到可以忽略的程度时,加速电荷产生的横向电场还有明显的强度。这就是电磁波能传向远处的原因。

*§ 11.3 加速电荷的磁场

上一节导出了加速电荷的电场,由于这一电场是在空间传播的,所以它必然引起空间电场的变化。根据麦克斯韦理论,与这一电场的变化相联系必然有磁场存在。下面我们根据麦克斯韦方程导出这一磁场。为此我们利用公式(IV)

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_e}{dt}$$

如图 11.3 所示,由于电场分布的轴对称性,磁场显然也应该如此。所以磁力线应该是在垂直于电荷运动方向的平面内而圆心在电荷运动轨迹上的同心圆。选择这样一个圆作安培环路,它是垂直于 x 轴方向的一个平面与时刻 t 的过渡区前沿球面的交线。这个圆和图面相交于 A 和 A' 两点,规定此圆的绕行正方向和 x 轴正向有右手螺旋关系。此圆所限定的面积我们就取垂直于 x 轴的圆

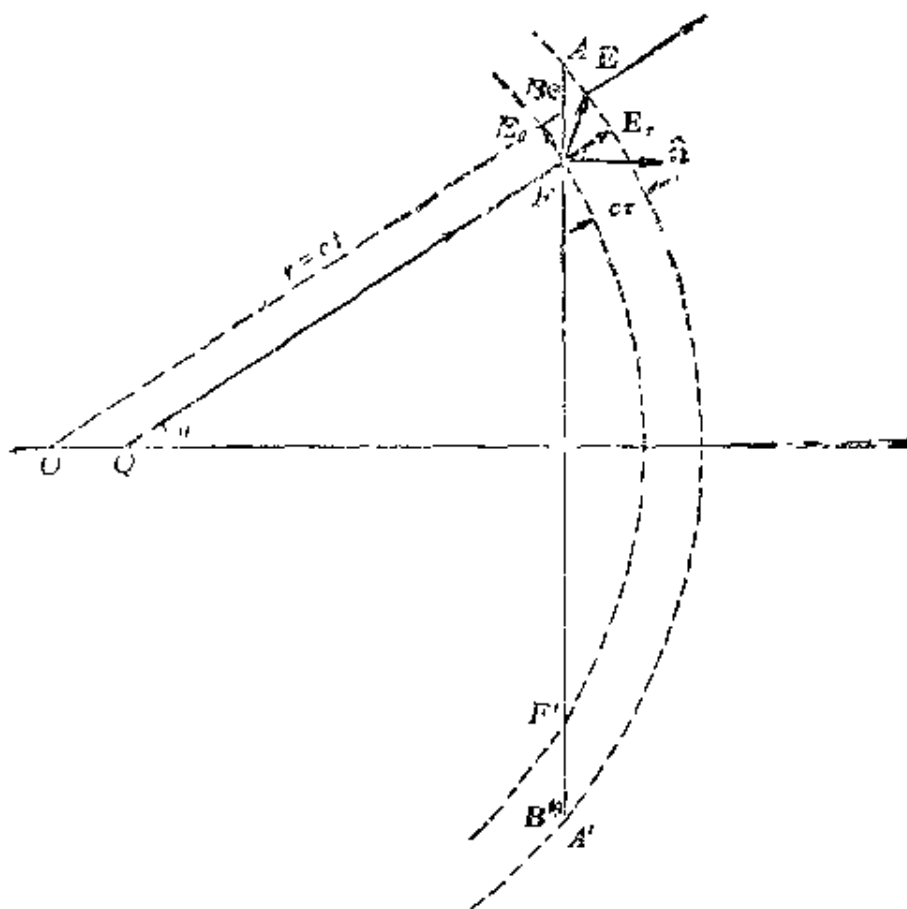


图 11.3 加速电荷的磁场

面积，它的正法线方向为 \mathbf{n} ，它和圆面的交线为 AA' 直线。由于并没有电流通过此面积，所以由公式(IV)可得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

此式中 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_e$ 。可以证明与 \mathbf{E}_r 的电通量的变化率相对应的磁场就等于第二章讨论的匀速运动电荷的磁场，它决定于电荷运动的速度(参考习题 8.20)。此处我们感兴趣的量是 \mathbf{E}_e 的电通量的变化率相对应的，亦即和电荷的加速度有关的磁场。以 \mathbf{B}_e 表示此磁场，则应该有

$$\oint_L \mathbf{B}_e \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_{e,e}}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{S} \quad (11.4)$$

由于 \mathbf{E}_e 分布的轴对称性，所以 \mathbf{B}_e 的分布也具有轴对称性。因此

$$\oint_L \mathbf{B}_\varphi \cdot d\mathbf{l} = B_\varphi 2\pi r \sin\theta \quad (11.5)$$

其中 $2\pi r \sin\theta$ 为安培环路的周长。

为了计算 E_θ 通过直径为 AA' 的圆面积的通量，我们注意到 E_θ 只存在于过渡区内，因此通过圆面上由过渡区内沿所截取的部分（它与圆面的交线为 FF' 直线段） E_θ 的通量为零。我们只需要计算通过过渡区所截取的圆形条带（它与圆面的交线是 AF 和 $A'F'$ ）的 E_θ 的通量。这一条带的宽度为 $AF = c\tau / \sin\theta$ ，周长为 $2\pi r \sin\theta$ ，因此它的总面积为 $2\pi r c\tau$ 。通过它的 E_θ 的通量为

$$\begin{aligned} \Phi_{e,\theta} &= \int_S \mathbf{E}_\theta \cdot d\mathbf{S} = \int E_\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) dS \\ &= -E_\theta \sin\theta \cdot 2\pi r c\tau \end{aligned}$$

由于过渡区的向外传播，这些电通量将在时间 τ 内完全移出 AA' 圆面积，所以

$$\frac{d\Phi_{e,\theta}}{dt} = \frac{0 - \Phi_{e,\theta}}{\tau} = 2\pi r c E_\theta \sin\theta$$

将此式和(11.5)式代入(11.4)式即可求得

$$B_\varphi = \frac{E_\theta}{c} \quad (11.6)$$

再由(11.3)式可得

$$B_\varphi = \frac{q a \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \quad (11.7)$$

这就是加速电荷的磁场公式。由于此式给出的 B_φ 是正值，所以知道这一磁场的磁力线的绕向与图 11.3 中所设定的圆形安培环路的绕向相同，在图示的 AF 区段 B_φ 的方向垂直图面向外。由此可知， B_φ 的方向垂直于 E_θ ，并且也和电磁场的传播方向垂直。因此电磁波是横波。把这一方向关系和(11.6)式表示的大小关系合并起来，并以 c 表示电磁波的传播速度，则加速电荷在远处产生

的横向电场 E_0 和横向磁场 B_0 的关系可表示如下(去掉角标)

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{E}}{c^2} \quad (11.8)$$

这一公式虽然是从上面的特殊情况导出的,但可以用麦克斯韦方程证明,对于真空中各种电磁波内的电场和磁场,这一公式都成立。

* § 11.4 电磁波的能量

在第五章中导出的电场能量密度公式和在第十章中导出的磁场能量密度公式也同样适用于电磁波内的电场 E 和磁场 B 。由此可得在真空中的电磁波的单位体积内的能量为

$$w = w_e + w_m = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{B}{c}\right)^2$$

再利用(11.8)式,可得

$$w = \epsilon_0 E^2 \quad (11.9)$$

在电磁波传播时,其中的能量也随同传播。单位时间内通过与传播方向垂直的单位面积的能量,叫电磁波的能流密度,也叫电磁波的强度。它的大小可推导如下。如图 11.4 所示,设 dA 为垂直于传播方向的一个面元,在 dt 时间内通过此面元的能量应是底面积为 dA , 厚度为 cdt 的柱形体积内的能量。以 S 表示能流密度的大小,则应有

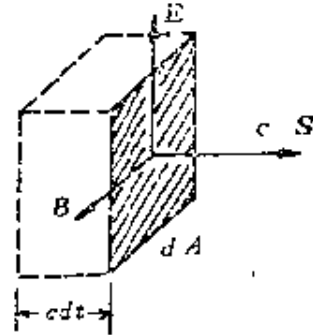


图 11.4 能流密度的推导

$$S = \frac{w \cdot dA \cdot cdt}{dA \cdot dt} = cw = c\epsilon_0 E^2 = \frac{EB}{\mu_0} \quad (11.10)$$

能流密度是矢量,它的方向就是电磁波传播的方向。考虑到(11.8)

式所表示的 E , B 的方向和传播方向之间的相互关系, (11. 10) 式可以表示为下一矢量公式

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (11. 11)$$

电磁波的能量密度矢量又叫坡印亭矢量。它是表示电磁波性质的一个重要物理量。

基本形式的电磁波是其中任一点的电场和磁场都随时间做正弦变化的电磁波。它的电场和磁场可以用下式表示:

$$E = E_0 \sin \omega t, \quad B = \frac{E}{c} = \frac{E_0}{c} \sin \omega t \quad (11. 12)$$

这种电磁波的坡印亭矢量的瞬时值就是

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \sin^2 \omega t \quad (11. 13)$$

这一变化的能量密度在一周期内的平均值就是

$$\bar{S} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} \quad (11. 14)$$

一个电荷 q 如果在原点作角频率为 ω , 振幅为 l 的简谐振动, 即它的位置随时间按下式

$$x = l \cos \omega t \quad (11. 15)$$

变化时, 它的加速度则为

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 l \cos \omega t$$

具有这种加速度的电荷在远处产生的横向电磁场就是象 (11. 12) 式所表示的那种电磁场。由 (11. 3) 式可知, 这种横向电场的最大值为

$$E_0 = \frac{qa \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} = \frac{q\omega^2 l \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \quad (11. 16)$$

在以电荷 q 所在处的原点为心, 半径为 r 的球面上的平均能流密

度就是

$$\bar{S} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} = \frac{q^2\omega^4 l^2 \sin^2\theta}{32\pi^2\epsilon_0 c^3 r^2} \quad (11.17)$$

由这一表示式还可以求出此电荷所辐射的总功率 P 。为此，如图 11.5 所示，可以先求出通过宽度为 $r d\theta$ ，周长为 $2\pi r \sin\theta$ 的圆形条带的能流，它等于

$$\bar{S} \cdot 2\pi r^2 \sin\theta d\theta = \frac{q^2\omega^4 l^2}{16\pi\epsilon_0 c^3} \sin^3\theta \cdot d\theta$$

通过整个球面的能流，也就是该电荷辐射的总功率为

$$P = \int_0^\pi \frac{q^2\omega^4 l^2}{16\pi\epsilon_0 c^3} \sin^3\theta d\theta = \frac{q^2 l^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (11.18)$$

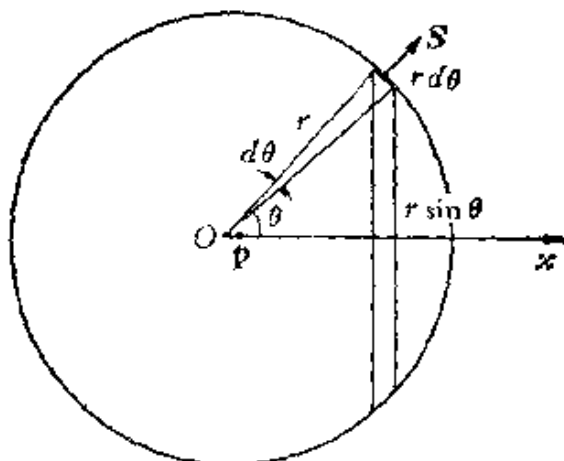


图 11.5 振荡电偶极子的总功率的计算

当电荷 q 的位置按(11.15)式变化时，这一电荷可以看作按下式变化的振荡电偶极子

$$p = ql \cos\omega t = p_0 \cos\omega t$$

其中 $p_0 = ql$ 是此振荡电偶极子的振幅。这样(11.18)式又可写成

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (11.19)$$

这就是振荡电偶极子的辐射功率表示式。此式显示，这一功率和电偶极子的振荡频率的四次方成正比。

实际的无线电发射是利用天线中的振荡电流。由于振荡电流可以看作是许多振荡电偶极子的组合，所以有可能在研究振荡电偶极子的基础上研究天线的发射。但那已超出本书的范围了。

[例 1] 有一频率为 $3 \times 10^{13} \text{Hz}$ 的脉冲强激光束，它携带总能量 $W = 100 \text{J}$ ，持续时间是 $\tau = 10 \text{ns}$ ($1 \text{ns} = 10^{-9} \text{s}$)。此激光束的圆形截面半径为 $r = 1 \text{cm}$ 。求在这一激光束中的电场振幅和磁场振幅。

解：此激光束的平均能流密度为

$$\bar{S} = \frac{W}{\pi r^2 \tau} = \frac{100}{\pi \times 0.01^2 \times 10 \times 10^{-9}} = 3.3 \times 10^{13} \text{W/m}^2$$

由(11.14)式可得

$$E_0 = \sqrt{2c\mu_0 \bar{S}} = \sqrt{2 \times 3 \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3.3 \times 10^{13}} = 1.6 \times 10^8 \text{V/m}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1.6 \times 10^8}{3 \times 10^8} = 0.53 \text{T}$$

这是相当强的电场和磁场。

[例 2] 图 11.6 表示一个正在充电的平行板电容器，电容器板为圆形，半径为 R ，板间距离为 b 。忽略边缘效应，证明：

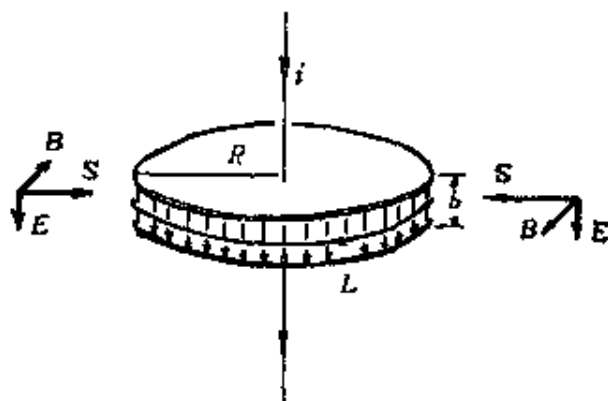


图 11.6 电容器充电时能量的传送

- (1) 两板间电场的边缘处的坡印亭矢量 \mathbf{S} 的方向指向电容器内部；
- (2) 单位时间内按坡印亭矢量计算进入电容器内部的总能量等于电容器中的静电能量的增加率。

解：(1) 按图示电流充电时，电场的方向如图所示。为了确定坡印亭矢量的方向还要找出 \mathbf{B} 的方向。为此利用麦克斯韦方程(IV)

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

选电容器板间与板的半径相同且圆心在极板中心轴上的圆为安培环路,并以此圆包围的圆面积为求电通量的面积。由于没有电流通过此面积,所以

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

沿图示的 L 的正方向求 B 的环流,可得

$$B \cdot 2\pi R = \frac{\pi R^2}{c^2} \cdot \frac{dE}{dt}$$

由此得
$$B = \frac{R}{2c^2} \cdot \frac{dE}{dt}$$

充电时, $dE/dt > 0$, 因此 $B > 0$, 所以磁力线的方向和环路 L 的正方向一致, 即顺着电流看去是顺时针方向。由此可以确定圆周 L 上各点的磁场方向。这样, 根据坡印亭矢量公式 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / \mu_0$, 可知在电容器两板间的电场边缘各处的坡印亭矢量都指向电容器内部。因此, 电磁场能量在此处是由外面送入电容器的。

(2) 由上面求出的 B 值可以求出坡印亭矢量的大小为

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{RE}{2c^2\mu_0} \cdot \frac{dE}{dt}$$

由于围绕电容器板间外缘的面积为 $2\pi Rb$, 所以单位时间内按坡印亭矢量计算进入电容器内部的总能量为

$$\begin{aligned} W_s &= S \cdot 2\pi Rb = \frac{\pi R^2 b}{c^2\mu_0} E \frac{dE}{dt} \\ &= \pi R^2 b \frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\pi R^2 b \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) \end{aligned}$$

由于 $\pi R^2 b$ 是电容器板间的体积, $\epsilon_0 E^2 / 2$ 是板间电能体密度, 所以 $\pi R^2 b \cdot \epsilon_0 E^2 / 2$ 就是板间的总的静电能量。因此, 这一结果就说明, 单位时间内按坡印亭矢量计算进入电容器板间的总能量的确正好等于电容器中的静电能量的增加率。

从电磁场的观点来说, 电容器在充电时所得到的电场能量并不是由电流带入的, 而是由电磁场从周围空间输入的。

*§ 11.5 电磁波的动量

由于电磁波具有能量, 所以它就具有动量。它的动量可以根

据动量能量关系求出。由于电磁波以光速 c 传播，所以它不可能具有静止质量。根据狭义相对论，电磁波的动量密度，即单位体积的电磁波具有的动量应为

$$p = \frac{w}{c} \quad (11.20)$$

其中 w 为单位体积电磁波所具有的能量。由于电磁波的动量的方向即传播速度 c 的方向，所以还可以写成

$$p = \frac{w}{c^2} c \quad (11.21)$$

以(11.9)式的 w 值代入(11.20)式，可得

$$p = \frac{\epsilon_0 E^2}{c} \quad (11.22)$$

由于电磁波具有动量，所以当它入射到一个物体表面上时会对表面有压力作用。这个压力叫辐射压力或光压。

考虑一束电磁波垂直射到一个“绝对”黑的表面（这种表面能全部吸收入射的电磁波）上。这个表面上面积为 ΔA 的一部分在时间 Δt 内所接收的电磁动量为

$$\Delta p = p \Delta A \cdot c \Delta t$$

由于 $\Delta p / \Delta t = f$ 为面积 ΔA 上所受的辐射压力，而 $f / \Delta A$ 为该面积所受的压强 P_r ，所以“绝对”黑的表面上受到垂直入射的电磁波的辐射压强为

$$P_r = cp = \epsilon_0 E^2 = w \quad (11.23)$$

对于一个完全反射的表面，垂直入射的电磁波给予该表面的动量将等于入射电磁波的动量的两倍，因此它对该表面的辐射压强也将增大到(11.23)式所给的两倍。

〔例〕射到地球上的太阳光的平均能流密度是 $S = 1.4 \times 10^8 \text{ W/m}^2$ ，这一能流对地球的辐射压力是多大？（设太阳光完全被地球所吸收）。将这一压力和太阳对地球的引力比较一下。

解: 地球正对太阳的横截面积为 πR_E^2 , 而辐射压强为 $P_r = w = S/c_0$, 所以太阳光对地球的辐射压力为

$$F_r = P_r \cdot \pi R_E^2 = S \frac{\pi R_E^2}{c}$$

$$= \frac{1.4 \times 10^3 \times \pi \times (6.4 \times 10^6)^2}{3 \times 10^8} = 6.0 \times 10^8 \text{ N}$$

太阳对地球的引力为

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6.7 \times 10^{-11} \times 2.0 \times 10^{30} \times 6.0 \times 10^{24}}{(1.5 \times 10^{11})^2}$$

$$= 3.6 \times 10^{22} \text{ N}$$

由上例可知, 太阳光对地球的辐射压力与太阳对地球的引力相比是微不足道的。但是对于太空中微小颗粒或尘埃粒子来说, 太阳光压可能大于太阳的引力。这是因为在距太阳一定距离处, 辐射压力正比于受辐射物体的横截面积, 即正比于其线度的二次方, 而引力却正比于辐射物体的质量或体积, 即正比于其线度的三次方的缘故。太小的颗粒会由于太阳的光压而远离太阳飞开。说明这种作用的最明显的例子是彗星尾的方向 (图 11.7)。彗星尾由大量的尘埃组成。当彗星运行到太阳附近时, 由于这些尘埃微粒所受太阳的光压比太阳的引力大, 所以它被太阳光推向远离太

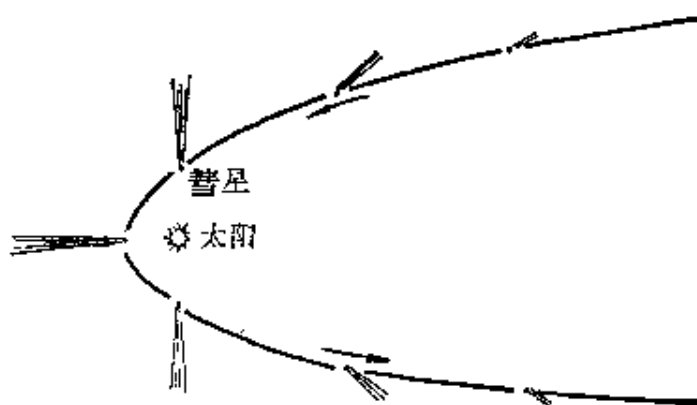


图 11.7 太阳光压形成的彗尾

阳的方向而形成很长的彗尾。彗尾被太阳光照得很亮, 有时甚至能被人用肉眼看到。在我国民间就以其形象把彗星叫做“扫帚”

星”。关于对它的观测，在世界上也以我国的记录为最早。

在地面上的自然现象和技术中，光压的作用比其它力的作用小得多，常常加以忽略。在1899年，俄国科学家列别捷夫首次在实验室内用扭秤的原理测得了光压。

本章提要

1. 麦克斯韦方程组：在真空中，

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

2. *加速电荷的电场：在远离电荷的区域

$$E_r = \frac{qa \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r}$$

3. *加速电荷的磁场：在远离电荷的区域

$$B_r = \frac{qa \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^3 r}$$

4. *电磁波：

电场、磁场、传播速度三者相互垂直：

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{E}}{c^2}$$

能量密度： $w = \epsilon_0 E^2$

能流密度, 即坡印亭矢量: $S = \frac{E \times B}{\mu_0}$

动量密度: $\mathbf{p} = \frac{w}{c^2} \mathbf{c}$

对绝对黑面的辐射压强: $P_r = w$

习 题

11.1 试证明麦克斯韦方程组在数学上含有电荷守恒的意思。即证明: 如果没有电流出入给定的体积, 那么这个体积内的电荷就保持恒定[提示: 由方程组第一式得 $q = \epsilon_0 \Phi_e$, 并根据第四式求 $\frac{d\Phi_e}{dt}$ 值, 这时应用口袋形曲面并令它的口(即积分路径 L)缩小到零]。

11.2 一个电子在与 γ -原子碰撞时经受一个 $2.0 \times 10^{24} \text{ m/s}^2$ 的减速度。与减速度方向成 45° 角, 距离 20 cm 处, 这个电子所产生的辐射电场是多大? 碰撞瞬时之后, 该辐射电场何时到达此处?

11.3 在 X-射线管中, 使一束高速电子与金属靶碰撞。电子束的突然减速引起强烈的电磁辐射 (X-射线)。设初始能量为 $2 \times 10^4 \text{ eV}$ 的电子均匀减速, 在 $5 \times 10^{-9} \text{ m}$ 的距离内停止。

求: 在垂直于加速度的方向上, 距离碰撞点为 0.3 m 处的辐射电场的大小。

11.4 在无线电天线上(一段直导线), 电子作简谐振动。设电子的速度 $v = v_0 \cos \omega t$, 其中 $v_0 = 8.0 \times 10^{-3} \text{ m/s}$, $\omega = 6.0 \times 10^6 \text{ rad/s}$ (弧度/秒), 求

(1) 其中一个电子的最大加速度是多少?

(2) 在垂直天线的方向上, 距天线为 1.0 km 处, 由一个电子所产生的横向电场强度的最大值是多少? 发生此最大加速度的瞬时与电场到达 1.0 km 处的瞬时之间的时间延迟是多少?

11.5 在范德格拉夫加速器中, γ -质子获得了 $1.1 \times 10^{14} \text{ m/s}^2$ 的加速度。

(1) 求与加速度方向成 45° 角的方向上, 距质子 0.50 m 处的横向电场和磁场的数值;

(2) 画图表示出加速度的方向和 (1) 中计算出的电场和磁场的方向的关系。

11.6 圆柱形导体,长为 l ,半径为 a ,电阻率为 ρ 。表面无电荷而通有电流 I (图 11.8),证明:

(1) 在这导体表面上,坡印亭矢量处处都与表面垂直并指向导体内部,如图所示(注意:导体表面外紧邻处电场与导体内电场的方向和大小都相同);

(2) 坡印亭矢量对整个导体表面的积分等于导体内产生的焦耳热的功率,即

$$\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = I^2 R$$

式中 dA 表示圆柱体表面的面积元, R 为圆柱体的电阻。此式表明,按照电磁场的观点,导体内以焦耳热的形式消耗的能量并不是由电流带入的,而是通过导体周围的电磁场输入的。

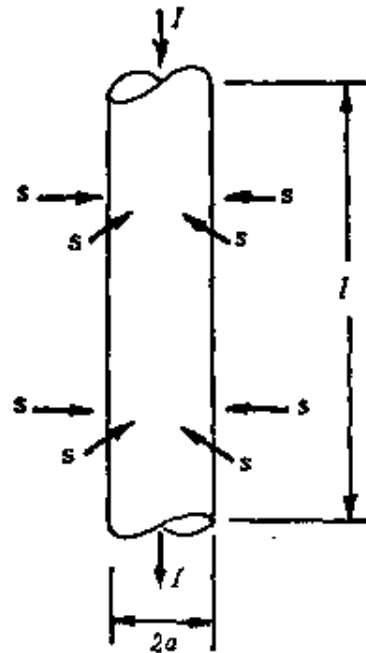


图 11.8

11.7 一平面电磁波的波长为 3.0 cm , 电场强度 E 的振幅为 30 V/m , 问:

- (1) 该电磁波的频率为多少?
- (2) 磁场的振幅为多大?

(3) 对一垂直于传播方向的,面积为 0.5 m^2 的全吸收表面的平均辐射压力是多少?

11.8 假设在绕太阳的圆轨道上有个“尘埃粒子”,设它的质量密度为 1.0 g/cm^3 。粒子的半径 r 是多大时,太阳把它推向外的辐射压力等于把它拉向内的万有引力?已知太阳表面的辐射功率为 $6.9 \times 10^7\text{ W/m}^2$ 。对于这样的尘埃粒子会发生什么现象?

附录 磁 单 极

在麦克斯韦电磁场理论中,就场源来说,电和磁是不相同的:有单独存在的正的或负的电荷,而无单独存在的“磁荷”——磁单极,即单独存在的 N 极或 S 极。根据“对称性”的想法,这似乎是“不合理的”。因此人们总有寻找磁荷的念头。1931年,英国物理学家狄拉克(P. A. M. Dirac 1902—1984)首先从理论上探讨了磁单极存在的可能性。指出磁单极的存在与电动力学和量子力学没有矛盾。他指出,如果磁单极存在,则磁荷 g 与电子电荷 e 应该有下述关系(CGS单位制):

$$eg = nch/2$$

其中 h 是普朗克常数, c 为光速, n 是正整数。此式中的磁荷 g 与电荷 e 有相同的量纲。当 $n=1$ 时, g 有最小值,更大的 g 都是这一最小值的整数倍。这一最小值叫**单位磁荷**。以 g_0 表示单位磁荷,则由上式可算出

$$g_0 = 68.5e$$

由于 g_0 比 e 大,所以库仑定律将给出两个磁单极之间的作用力要比电荷之间的作用力大得多。

在狄拉克之后,关于磁单极的理论有了进一步的发展。1974年荷兰物理学家特霍夫脱和苏联物理学家鲍尔亚科夫独立地提出的非阿贝尔规范场理论认为磁单极必然存在,并指出它比已经发现的或是曾经预言的任何粒子的质量都要大得多。现在关于弱、电磁相互作用和强相互作用的统一的“大统一理论”也认为有磁单极存在,并预言其质量为 2×10^{-8} 克,即约为质子质量的 10^{20} 倍。

磁单极在现代宇宙论中占有重要地位。有一种大爆炸理论认

为超重的磁单极粒子只能在诞生宇宙的大爆炸发生后 10^{-35} 秒钟产生, 因为只有这时才有合适的温度 (10^{30}K)。当时单独的 N 极和 S 极都已产生, 其中一小部分后来结合在一起湮没掉了, 大部分则留了下来。今天的宇宙中还有磁单极存在, 并且在相当于一个足球场的面积上, 一年约可能有一个磁单极粒子穿过。

以上都是理论的预言。与此同时也有人做实验来试图发现磁单极的存在。例如 1951 年, 美国的密尔斯曾用通电螺线管来捕集宇宙射线中的磁单极(图 11.9)。如果磁单极进入螺线管中, 则会被磁场加速而在管下部的照相乳胶片上显示出它的径迹。实验结果没有发现磁单极。

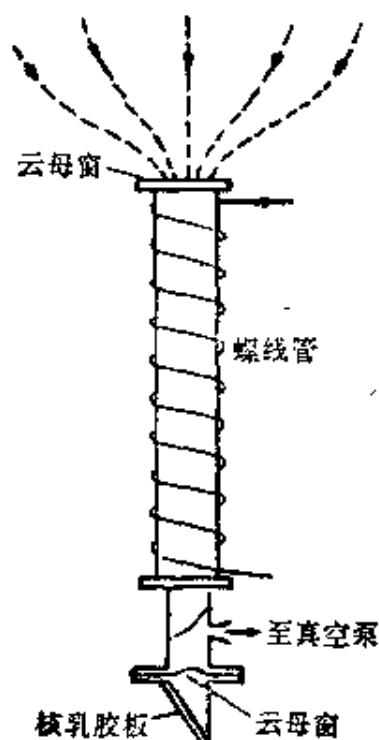


图 11.9

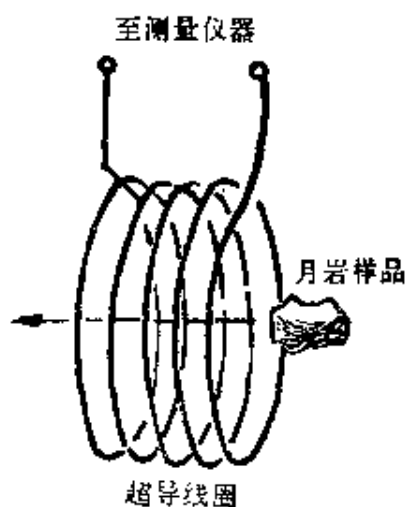


图 11.10

有人利用磁单极穿过线圈时引起的磁通量变化能产生感应电流这一规律来检测磁单极。例如在 70 年代初, 美国埃尔维瑞斯等人试图利用超导线圈中的电流变化来确认磁单极通过了线圈。他们想看看登月飞船取回的月岩样品中是否有磁单极。当月岩样品通

过超导线圈时(图 11. 10)并未发现线圈中电流有什么变化, 因而不曾发现磁单极。

1982 年美国卡勃莱拉也设计制造了一套超导线圈探测装置, 并用超导量子干涉器(SQUID)来测量线圈内磁通的微小变化。他的测量是自动记录的。1982 年 2 月 14 日, 他发现了记录仪上的电流有了突变。经过计算, 正好等于狄拉克单位磁荷穿过线圈时所应该产生的突变(图 11. 11)。这是他连续等待了 151 天所得到的唯一的一个事例。以后虽经扩大线圈面积也没有再测到第二个事例。

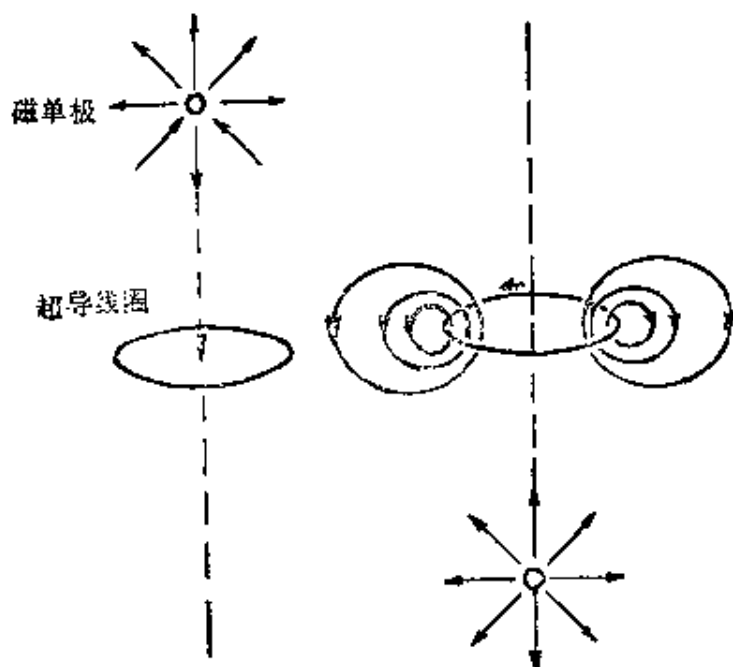


图 1. 11

还有其他的实验尝试, 但直到日前还不能说在实验上确认了磁单极的存在。

习题答案

第一章

1.1 $\frac{5q}{2\pi\epsilon_0 a^2}$, 指向 $-4q$ 。

1.2 $\frac{\sqrt{3}}{3}q$

1.3 51.2N

1.4 $\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}$

1.5 $\pm 24 \times 10^{-21}e$, 2.8×10^{-6} , 相吸。

1.6 $\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 a}$

1.7 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda L}{\left(r^2 - \frac{L^2}{4}\right)}$, 沿带电直线指向远方。

1.8 0.72 V/m, 指向缝隙。

1.9 (1) $\frac{1}{6} \cdot \frac{q}{\epsilon_0}$; (2) $\frac{1}{24} \cdot \frac{q}{\epsilon_0}$

1.10 6.64×10^5 个/cm²

1.11 1.08×10^{-19} C; 3.47×10^{11} V/m

1.12 σ_1 板外: 1.13 V/m, 指离 σ_1 板;
两板间: 3.39 V/m, 指向 σ_2 板;
 σ_2 板外: 1.13 V/m, 指离 σ_2 板。

1.13 $|d| < \frac{D}{2}$; $E = \frac{\rho}{\epsilon_0} d$;

$$|d| > \frac{D}{2}: E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} D$$

1. 14 $r < a: E = 0, r > a: E = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r}$

1. 15 $r < R_1: E = 0, R_1 < r < R_2: E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r},$

$r > R_2: E = 0$

1. 16 $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}},$ 沿直线指向远方。

1. 17 $\frac{\rho}{3\epsilon_0} a,$ a 为从带电球体中心到空腔中心的矢量线段。

1. 18 $0, 1.14 \times 10^{21} \text{ V/m}, 3.84 \times 10^{21} \text{ V/m}, 1.92 \times 10^{21} \text{ V/m}$

1. 19 $1.18 \times 10^7 \text{ m/s}, 2.20 \times 10^{-13} \text{ J}, 1.09 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s},$
 $6.48 \times 10^{20} \text{ 1/s}$

1. 20 $3.1 \times 10^{-16} \text{ m}, 4.96 \times 10^{-35} \text{ cm}$

1. 21 (1) $1.04 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C};$ (2) $9.29 \times 10^{-12} \text{ C}$

第 二 章

2. 1 $1.56 \times 10^{10}, 1.41 \times 10^4 \text{ V/m}; 12 \text{ cm}, 10 \text{ cm}, 1.56 \times 10^{10},$
 $2.35 \times 10^4 \text{ V/m}; 20 \text{ cm}, 10 \text{ cm}, 1.56 \times 10^{10}, 1.41 \times 10^4 \text{ V/m}$

2. 2 $\pm \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \cdot \frac{\sigma'}{2\epsilon_0} z_0$

2. 3 $2.87 \times 10^9 \text{ V/m}; 2.87 \times 10^9 \text{ V/m}; 1.02 \times 10^{12} \text{ V/m}.$

第 三 章

3. 1 $\frac{V}{r^2} \cdot \frac{R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}$

3. 2 (1) $900 \text{ V};$ (2) 450 V

3.3 (1) $q_1 = 6.63 \times 10^{-13} \text{ C}$, $q_2 = -1.33 \times 10^{-8} \text{ C}$;

(2) 0.1 m 处

3.4 $U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} \right)$, $U_2 = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$,

$$U_1 - U_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

3.5 $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$

3.6 (1) $2.14 \times 10^7 \text{ V/m}$; (2) $1.36 \times 10^4 \text{ V/m}$

3.7 $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + a}{\sqrt{a^2 + x^2} - a} \right)$

3.8 (1) $2.5 \times 10^3 \text{ V}$; (2) $2.3 \times 10^3 \text{ V}$

3.9 (1) $r \leq a$: $E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$, $r \geq a$: $E = \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0 r}$;

(2) $r \leq a$: $U = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2$, $r \geq a$: $U = \frac{a^2 \rho}{4\epsilon_0} \left[\left(2 \ln \frac{a}{r} \right) - 1 \right]$

3.10 $\frac{a\lambda}{2\pi\epsilon_0 x \sqrt{a^2 + x^2}}$, 沿 x 轴正方向。

3.11 ab : -6.0 V/cm , bc : 0 , ce : 3.0 V/cm ,
 ef : 6.0 V/cm , fg : 0 , gh : -2.4 V/cm

3.12 $2.1 \times 10^{-14} \text{ m}$

3.13 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left[R^2 + \left(x - \frac{l}{2} \right)^2 \right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[R^2 + \left(x + \frac{l}{2} \right)^2 \right]^{1/2}} \right]$

3.14 $-\frac{\sqrt{3}q}{2\pi\epsilon_0 a^2}$, $-\frac{\sqrt{3}qQ}{2\pi\epsilon_0 a}$

3.15 (1) $9.1 \times 10^4 \text{ V}$; (2) $9.1 \times 10^{-4} \text{ J}$

3.16 (1) $2.5 \times 10^4 \text{ eV}$; (2) $9.37 \times 10^7 \text{ m/s}$

*3.17 $-4.03 \times 10^{-17} \text{ J}$

*3.18 $5.75 \times 10^8 \text{ eV}$

$$*3.19 \quad R = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{e^2}{m_0} = 1.41 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$*3.20 \quad 1.58 \times 10^{-10} \text{ J}, 9.97 \times 10^{-11} \text{ J}, 5.83 \times 10^{-11} \text{ J}, 1.47 \times 10^{14} \text{ J}$$

$$*3.21 \quad (3) -13.6 \text{ eV}$$

第 四 章

$$4.2 \quad q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 R_3 U - R_1 R_2 Q}{R_2 R_3 - R_1 R_3 + R_1 R_2};$$

$$r < R_1: U = U, E = 0;$$

$$R_1 < r < R_2: U = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q + q_1}{4\pi\epsilon_0 R_3};$$

$$E = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2};$$

$$R_2 < r < R_3: U = \frac{Q + q_1}{4\pi\epsilon_0 R_3}, E = 0;$$

$$r > R_3: U = \frac{Q + q_1}{4\pi\epsilon_0 r}, E = -\frac{Q + q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$4.3 \quad (1) q_{B内} = -3 \times 10^{-8} \text{ C}, q_{B外} = 5 \times 10^{-8} \text{ C},$$

$$U_A = 5.63 \times 10^3 \text{ V}, U_B = 4.50 \times 10^3 \text{ V};$$

$$(2) q_A = 2.12 \times 10^{-8} \text{ C}, q_{B内} = -2.12 \times 10^{-8} \text{ C},$$

$$q_{B外} = -8.8 \times 10^{-8} \text{ C}; U_A = 0, U_B = -7.92 \times 10^2 \text{ V}$$

$$4.4 \quad \text{上板: } \sigma_{\pm} = 6.50 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2, \sigma_{\mp} = -4.88 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2;$$

$$\text{中板: } \sigma_{\pm} = 4.88 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2, \sigma_{\mp} = 8.12 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2;$$

$$\text{下板: } \sigma_{\pm} = -8.12 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2, \sigma_{\mp} = 6.50 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$4.5 \quad F_{q_b} = 0, F_{q_c} = 0, F_{q_d} = \frac{q_b + q_c}{4\pi\epsilon_0 r^2} q_d (\text{近似}).$$

$$4.6 \quad l = 3.1 \times 10^{-16} \text{ m}, p_e = 4.96 \times 10^{-35} \text{ C} \cdot \text{m}$$

第 五 章

$$5.1 \quad 233 \text{ pF}, 3.5 \times 10^{-7} \text{ J}, \text{焦耳热损失.}$$

5.3 $5.31 \times 10^{-10} \text{ F/m}^2$

5.5 $8.05 \times 10^{-13} \text{ F}$

5.6 (1) $2.0 \times 10^{-11} \text{ F}$; (2) $4.0 \times 10^{-6} \text{ C}$

5.7 7.37 m^2

5.8 2.1

5.9 $\frac{2\epsilon_0 S \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}{d(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}$

5.10 $\frac{\epsilon_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})S}{2d}$

5.11 $27 \mu\text{C}, 135 \mu\text{C}, 405 \mu\text{C}; 13.5 \text{ V}, 27.0 \text{ V}, 40.5 \text{ V}$

5.12 $\frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}{C_1 + C_2}$

5.13 (1) $r < R_1: D=0, E=0,$

$$R_1 < r < R_2: D = \frac{Q}{4\pi r^2}, E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r^2},$$

$$R < r < R_2: D = \frac{Q}{4\pi r^2}, E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r^2}$$

$$r > R_2: D = \frac{Q}{4\pi r^2}, E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2};$$

(2) $-3.75 \times 10^3 \text{ V};$

(3) $9.96 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2.$

5.14 外层介质内表面先击穿, $\frac{E_M r_0}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1 r_0}$

5.15 $1.67 \times 10^{-6} \text{ c/m}, 1.67 \times 10^{-7} \text{ c/m}, 1.67 \times 10^{-8} \text{ C/m}$

5.16 (1) $\frac{\epsilon_0 S}{d-d'}; (2) \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 S V_0^2 d'}{(d-d')^2};$

(3) $\frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d' + \epsilon_r d - \epsilon_r d'}; A = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S d' V_0^2 (\epsilon_r - 1)}{2(d' + \epsilon_r d - \epsilon_r d')^2}$

5.17 $q_{\perp} = 5 \times 10^{-7} \text{ C}, q_{\parallel} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ C}$

*5.18 (1) $-\frac{m_e e^4}{2(4\pi \epsilon_0 \hbar)^2 \epsilon_r^2} \cdot \frac{1}{n^2}; (2) 0.054 \text{ eV}, 1/\epsilon_r^2$

第六章

6.1 4×10^{10} 个

6.2 1.27×10^{-3} mA

6.3 4×10^{-3} m/s; 1.07×10^5 m/s

6.4 $I_{\text{A}} = 20$ A, $I_{\text{B}} = 0$

6.5 距A点 1.5 m 处。

6.6 (1) 3.0×10^{13} $\Omega \cdot \text{m}$; (2) 196 Ω

6.7 $4/3$ A, $2/3$ A

6.8 $I_1 = 0.16$ A = I_4 , $I_2 = 0.02$ A, $I_3 = 0.14$ A

6.9

$$I_g = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) \mathcal{E}}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3) + R_g (R_1 + R_3) (R_2 + R_4)}$$

6.10 $R_1 = 8.95$ k Ω , $R_2 = 5.60$ k Ω , $R_g = 1.01$ k Ω

6.12 (1) 2.19×10^{-5} Ω ; (2) 2.28×10^3 A;

(3) 1.43×10^6 A/m²; (4) 2.50×10^{-2} V/m;

(5) 1.14×10^2 W; (6) 1.05×10^{-4} m/s

6.13 (1) 2.21×10^8 Ω ; (2) 4.52×10^{-7} A

6.14 8.0 s, 8000 A, 1.0×10^{-3} s

6.15 12.3%

6.16 19.0 l/min

第七章

7.1 3.27 T, 垂直于速度, 水平向左。

7.2 1.14×10^{-3} T, B 方向垂直纸面向外, 1.57×10^{-8} s

7.3 3.59×10^{-10} s, 1.66×10^{-4} m, 1.51×10^{-3} m

7.4 0.01 m

- 7.5 (1) $\frac{mg}{2nIl}$; (2) 0.478T
- 7.6 (1) -2.23×10^{-5} V; (2) 无影响。
- 7.7 (1) 负电荷; (2) 2.86×10^{20} 个/ m^3 。
- 7.8 (1) $36 \text{ A} \cdot \text{m}^2$; (2) $144 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 7.9 (1) $F_{\text{上}} = F_{\text{下}} = 0.1 \text{ N}$, $F_{\text{左}} = F_{\text{右}} = 0.2 \text{ N}$
 $F_{\text{前}} = 0$, $M_{\text{前}} = 0$
 (2) $F_{\text{上}} = F_{\text{下}} = 0$, $F_{\text{左}} = F_{\text{右}} = 0.2 \text{ N}$
 $F_{\text{前}} = 0$, $M_{\text{前}} = 2 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$
- 7.10 $1.34 \times 10^{-2} \text{ T}$

第 八 章

*8.1 $2.17 \times 10^{-8} \text{ N}$, 斥力

$$*8.2 \quad F_1 = \frac{e^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[1 + \left(\frac{v_1 v_2}{c^2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \text{tg}\theta_1 = \frac{F_{m1}}{F_{e1}} = \frac{v_1 v_2}{c^2};$$

$$F_2 = \frac{e^2(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad F_2 \text{ 方向沿两质子此时刻连线, 指向远方。}$$

8.3 $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$, 垂直纸面向外,

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{4r}, \text{ 垂直纸面向里,}$$

$$\frac{9\mu_0 I}{2\pi a}, \text{ 垂直纸面向里。}$$

8.4 $B_r = \frac{\mu_0 I R^2}{4(R^2 + x^2)^{3/2}}$, 负 x 方向, $B_z = \frac{\mu_0 I R x}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}$ 负 z 方向。

8.5 $1.6r, 10^{-3} \frac{1}{r}, \frac{5}{16r} (8.1 \times 10^{-3} - r^2), 0 \text{ (SI)}$

$$8.6 \quad r < \frac{D_2}{2}; B = 0, \frac{D_2}{2} < r < \frac{D_1}{2}; B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

$$r > \frac{D_1}{2}; B = 0$$

$$8.7 \quad 4 \times 10^{-3} \text{T}$$

$$8.8 \quad (1) 1.44 \times 10^{-5} \text{T}; (2) 0.24$$

$$8.9 \quad (1) 5.0 \times 10^{-6} \text{T}; (2) 15^\circ 31'$$

$$8.10 \quad (1) \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[\left(z + \frac{R}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[\left(z - \frac{R}{2} \right)^2 + R^2 \right]^{3/2}}$$

$$8.12 \quad r \leq R, B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}; r \geq R, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$8.13 \quad \frac{B_2^2 - B_1^2}{2\mu_0}, \text{方向垂直电流平面指向 } B_1 \text{ 一侧。}$$

$$8.14 \quad 3.6 \times 10^{-3} \text{N/m}; 3.24 \times 10^{20} \text{N/m}$$

$$8.15 \quad 1 \times 10^{-6} \text{Wb}$$

$$8.16 \quad (1) \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}, \text{斥力}; (2) \frac{\pi R}{2}$$

$$8.17 \quad (1) 4 \times 10^{-5} \text{T}; (2) 2.2 \times 10^{-6} \text{Wb}$$

$$8.18 \quad 0$$

$$*8.19 \quad \frac{\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{d}}{2}$$

$$8.21 \quad (1) 6.95 \times 10^{-2} \text{A};$$

$$(2) 2.78 \times 10^{-7} \text{T}$$

$$8.22 \quad 5.47 \times 10^{-5} \text{A}$$

第 九 章

$$9.1 \quad (1) 2.51 \times 10^{-4} \text{T}, 200 \text{A/m};$$

$$(2) 1.06 \text{T}, 200 \text{A/m};$$

$$(3) 2.51 \times 10^{-4} \text{T}, 1.05 \text{T}$$

$$9.2 \quad (1) 2 \times 10^{-2} \text{T} \quad (2) 32 \text{A/m}; \quad (3) 1.59 \times 10^4 \text{A/m};$$

- (4) $6.26 \times 10^{-4} \text{ H/m}$, 497;
 (5) $1.56 \times 10^4 \text{ A/m}$
- 9.3 (1) 差不多相同; (2) 隙中的较小; (3) (b)图的较小
- 9.4 (1) $2.12 \times 10^3 \text{ A/m}$;
 (2) $4.71 \times 10^{-4} \text{ H/m}$, 375;
 (3) $7.96 \times 10^5 \text{ A/m}$
- 9.5 $6.25 \times 10^{-3} \text{ N/A}^2$
- 9.6 0.005 A
- 9.7 (1) $7.57 \text{ A} \cdot \text{m}^2$; (2) $11.3 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 9.8 1.27×10^3
- 9.9 4.79×10^3 安匝
- 9.10 133 安匝, 1463 匝
- *9.11 (2) $8.8 \times 10^{10} \text{ rad/s}$
- *9.12 (1) 12.5 T; (2) $3.3 \times 10^9 \text{ rad/s}$

第 十 章

- 10.1 $1.1 \times 10^{-5} \text{ V}$, $U_a > U_b$
- 10.2 1.71 V, 使线圈绕垂直于 B 的直径旋转, 当线圈平面法线与 B 垂直时, \mathcal{E} 最大。
- 10.3 $2 \times 10^{-3} \text{ V}$
- 10.4 $-4.35 \times 10^{-2} \cos(100\pi t)$, (V)
- 10.5 $\frac{L}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \cdot \frac{dB}{dt}$, $U_b > U_a$
- 10.6 0.75 V
- 10.7 0.5 m/s
- 10.8 39.81/s

10.9

$$B = \frac{qR}{NS}$$

10.11

$$\mu_0 N_1 N_2 \pi R^2 / l$$

10.12

$$(1) 6.28 \times 10^{-6} \text{ H};$$

$$(2) -3.14 \times 10^{-9} \text{ Wb/s};$$

$$(3) 3.14 \times 10^{-4} \text{ V}$$

10.13

$$(1) 7.58 \times 10^{-3} \text{ H};$$

$$(2) 2.27 \text{ V}$$

10.14

$$\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

10.15

$$\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right], \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$$

第 十 一 章

$$11.2 \quad 0.113 \text{ V/m}, 6.67 \times 10^{-10} \text{ s}$$

$$11.3 \quad 3.75 \times 10^{-2} \text{ V/m}$$

$$11.4 \quad (1) 4.8 \times 10^4 \text{ m/s}^2;$$

$$(2) 7.68 \times 10^{-25} \text{ V/m}, 3.3 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$11.5 \quad (1) E_0 = 2.49 \times 10^{-12} \text{ V/m},$$

$$B_0 = 8.26 \times 10^{-21} \text{ T}$$

$$11.7 \quad (1) 1 \times 10^{10} \text{ 1/s};$$

$$(2) 1 \times 10^{-7} \text{ T};$$

$$(3) 3.98 \times 10^{-9} \text{ N}$$

$$11.8 \quad 6.3 \times 10^{-4} \text{ mm}, \text{作匀速直线运动。}$$