

国际物理奥赛·中国队总教练、领队担纲

# 高中物理竞赛 培优教程

主 编 舒幼生

副主编 钟小平

浙江大學出版社

# 高中物理竞赛培优教程

主 编 舒幼生  
副主编 钟小平  
编 委 陈明华 沈中锋 沈朝晖  
杨科军 赵 登 厉守清  
陆文辉

浙 江 大 学 出 版 社

**图书在版编目(CIP)数据**

高中物理竞赛培优教程 / 舒幼生主编. — 杭州: 浙江大学出版社, 2003. 7  
ISBN 7-308-03363-5

I. 高... I. 舒... II. 物理课—高中—教学参考资料 N. G634. 73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 050718 号

出版发行 浙江大学出版社  
(杭州浙大路38号 邮政编码310027)  
(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)  
(网址: <http://www.zjupress.com>)

责任编辑 王同裕  
排 版 浙江大学出版社电脑排版中心  
印 刷 浙江万盛达实业有限公司  
开 本 787mm x 960mm 1/16  
印 张 33.5  
字 数 674 千字  
版 印 次 2003年7月第1版 2006年2月第7次印刷  
印 数 32001-36000  
书 号 ISBN 7-308-03363-5/G · 610  
定 价 39.00 元

## 前 言

中学物理教育是基础教育的重要组成部分。每年一度的全国中学生物理竞赛在激发中学生对物理学科的学习兴趣和培养科学思维能力等方面起到了重要作用,并产生了积极的影响,因此越来越受到中学师生的重视。

为了配合中学生参加全国中学生物理竞赛,向他们提供可读性强,有实用参考价值的阅读材料,我们依据2002年起新施行的竞赛大纲编写了本书。本书通过知识要点、例题分析、巩固习题、综合训练、问题与讨论等栏目,详细地阐述了当今物理竞赛的新趋势、新特点、新题型。特别是对新大纲增加的角动量及狭义相对论专门开辟章节进行了阐述。相信通过阅读该书,读者一定能收到扩大知识面,提高分析问题和解决问题的能力。提高灵活运用物理知识的能力,达到提高竞赛成绩的效果。因此本书是中学生课外阅读和竞赛训练的理想读物。

本书由北京大学教授、国际物理奥赛中国队总教练舒幼生主编,参加本书编写的是杭州学军中学钟小平,杭州高级中学陈明华、浙江萧山中学沈朝晖,浙江省诸暨中学杨科军、赵登,湖州市教研室沈中锋、湖州中学厉守清、富阳中学陆文辉,最后由舒幼生、钟小平审定,统稿。

本书编写过程得到了浙江省物理竞赛委员会副主任周彩莺,浙江省物理学会秘书长赵隆韶,浙江师范大学物理系主任宗丰德等专家、教授大力支持和帮助;清华大学陈凯亮、冯涛同学、复旦大学刘集思同学、上海交通大学范鸿敏同学为本书习题的验算及校对做了不少工作,在此谨向他们表示衷心的感谢。由于编者水平有限,错误和不足在所难免,恳请读者批评指正。

# 目 录

第一章 运动学	(1)
第一节 质点运动的基本概念	(1)
第二节 运动的合成	(6)
第三节 抛体运动	(11)
第四节 圆周运动	(16)
第五节 刚体绕定轴的转动	(21)
第六节 综合训练	(25)
问题与讨论 图线的应用(1)	(33)
第二章 静力学	(39)
第一节 常见的几种力	(39)
第二节 共点力作用下物体的平衡	(45)
第三节 一般物体的平衡	(49)
第四节 平衡种类	(55)
第五节 流体静力学	(57)
第六节 综合训练	(61)
问题与讨论 矢量三角解題	(66)
第三章 牛顿运动定律	(70)
第一节 牛顿运动定律	(70)
第二节 非惯性参照系	(77)
第三节 万有引力定律与天体运动	(81)
第四节 综合训练	(85)
问题与讨论 分情况讨论解題	(89)
第四章 能量与动量	(93)
第一节 功和功率	(93)

第二节	动能定理	(97)
第三节	势能	(100)
第四节	机械能守恒定律	(103)
第五节	冲量、动量、动量定理	(107)
第六节	动量守恒定律	(111)
第七节	碰撞和质心运动	(115)
第八节	综合训练	(121)
	问题与讨论 极值问题	(129)
<b>第五章</b>	<b>角动量</b>	(134)
第一节	力矩和角动量	(134)
第二节	质点和质点组的角动量	(140)
第三节	角动量守恒定律	(144)
第四节	综合训练	(149)
	问题与讨论 宇宙中的角动量	(155)
<b>第六章</b>	<b>振动和波</b>	(162)
第一节	简谐运动	(162)
第二节	振动能量	(168)
第三节	机械波	(171)
第四节	驻波和多普勒效应	(177)
第五节	综合训练	(179)
	问题与讨论 等效方法	(193)
<b>第七章</b>	<b>分子运动论和热力学第一定律</b>	(197)
第一节	分子运动论	(197)
第二节	理想气体的状态方程	(199)
第三节	热力学第一定律和热力学第二定律	(205)
第四节	热传递方式	(211)
第五节	综合训练	(214)
	问题与讨论 临界情况解题	(223)
<b>第八章</b>	<b>固体、液体和物态变化</b>	(227)
第一节	固体性质	(227)

第二节 液体性质 .....	(230)
第三节 物态变化 .....	(234)
第四节 综合训练 .....	(240)
问题与讨论 热学图线的应用(2) .....	(248)
<b>第九章 静电场</b> .....	(253)
第一节 库仑定律和电荷守恒定律 .....	(253)
第二节 电场和电场强度 .....	(257)
第三节 电 势 .....	(261)
第四节 电容和静电场的能量 .....	(265)
第五节 电场中的导体和电介质极化 .....	(271)
第六节 综合训练 .....	(273)
问题与讨论 微元法 .....	(276)
<b>第十章 稳恒电流</b> .....	(281)
第一节 欧姆定律 .....	(281)
第二节 含源电路的欧姆定律 .....	(287)
第三节 电动势 .....	(292)
第四节 电表改装 .....	(299)
第五节 惠斯通电桥与补偿电路 .....	(305)
第六节 物质的导电性 .....	(311)
第七节 综合训练 .....	(321)
问题与讨论 根据自相似性求其电阻 .....	(335)
<b>第十一章 磁场与电磁感应</b> .....	(341)
第一节 磁场和电流的关系 .....	(341)
第二节 电荷在磁场中的运动 .....	(346)
第三节 法拉第电磁感应定律 .....	(353)
第四节 自感和互感 .....	(362)
第五节 综合训练 .....	(366)
问题与讨论 独立作用原理 .....	(372)
<b>第十二章 交电流和电磁波</b> .....	(380)
第一节 交流电 .....	(380)

第二节	整流、滤波和稳压 .....	(387)
第三节	电磁振荡和电磁波 .....	(393)
第四节	综合训练 .....	(396)
问题与讨论	交流电的叠加 .....	(400)
<b>第十三章</b>	<b>光 学</b> .....	(405)
第一节	光的反射 .....	(405)
第二节	平面镜、球面镜成像 .....	(408)
第三节	光的折射 .....	(414)
第四节	薄透镜成像 .....	(422)
第五节	简单光学仪器 .....	(431)
第六节	光的本性 .....	(437)
第七节	综合训练 .....	(448)
问题与讨论	费马原理的应用 .....	(455)
<b>第十四章</b>	<b>原子物理</b> .....	(458)
第一节	原子结构 .....	(458)
第二节	原子核 .....	(461)
第三节	综合训练 .....	(464)
问题与讨论	夸克模型 .....	(469)
<b>第十五章</b>	<b>狭义相对论</b> .....	(471)
第一节	洛仑兹变换 .....	(471)
第二节	时间和长度的相对论效应 .....	(474)
第三节	对宇宙的初步认识 .....	(480)
第四节	综合训练 .....	(485)
问题与讨论	黑洞问题的简单分析 .....	(488)
<b>参考答案</b>	.....	(491)



# 第一章 运动学

## 第一节 质点运动的基本概念



### 【知识要点】

物体位置随时间而变化,称机械运动.力学是研究机械运动的一门学科.几乎在物质的一切运动形式中都包含机械运动这种最基本的形式,因而力学是许多学科的基础.

研究机械运动,一般采取由表及里,从现象到本质的步骤.描述机械运动现象的科学称运动学.研究机械运动的内在规律的科学称动力学.运动学是研究物体运动状态及其变化的描述,而不管这种变化的原因.物体在任一时刻的运动状态通过位置、速度等物理量来描述.运动随时间的变化可以通过运动学方程来研究.

### 一、参照系、质点

要正确确定物体的位置及其变化,必须事先选取另外一个假定为不动的物体作为参照才有意义.这个选来作为参照的物体就叫做参照物.而为了定量地描述物体的运动,还需在参照物上建立坐标系,这样的参照物称为参照系.通常选直角坐标系  $O-xyz$  作为参照系,有时也选极坐标系.

任何实际物体都有一定的形状和大小,但是在分析具体问题,有时可以忽略物体的形状和大小,而把它们看作是具有一定质量的几何点,称为质点.质点是实际物体的理想化模型.在物理学中,常用理想模型代替实际研究对象,突出其性质而忽略其次要因素.一个物体能否视为质点取决于所研究的问题.

### 二、位置、位移和路程

位置是运动质点在某一时刻的空间处所.在直角坐标系中,可用质点在坐标轴上的投影坐标  $(x, y, z)$  来表示.在定量计算时,为了使位置的确定和位移的计算一致,人们还常引入位置矢量(简称位矢)的概念.在直角坐标系中,位矢  $r$  定义为自坐标原点到质点位置  $P(x, y, z)$  所引的有向线段,其大小为  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,其方向自原点  $O$  指向质点  $P$ .

位移是指质点运动过程中,在一段时间  $\Delta t$  内位置的变化,即位矢的增量  $\Delta s = r(t + \Delta t) - r(t)$ ,它的方向自始位置指向末位置.在直角坐标系中,在计算位移时,通常先求  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴三个方向上的三个分量后,再按矢量合成法求合位移.

路程是指质点在  $\Delta t$  时间内通过的实际轨迹的长度,它是标量,只有在单方向的直线运动中,路程才与位移的大小相等.

### 三、速度与速率

速度和速率是描述质点运动快慢的物理量.

#### 1. 平均速度和平均速率

平均速度是质点在一段时间内通过的位移与所用时间之比,即  $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .

平均速度是矢量,方向与位移  $\Delta s$  的方向相同.

平均速率是质点在一段时间内通过的路程和所用的时间的比值,是标量.

#### 2. 即时速度和即时速率

即时速度是质点在某一时刻或某一位置时的速度,它定义为  $\Delta t \rightarrow 0$  时平均速度的

极限,简称速度,即  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .

即时速度是矢量,它的方向就是平均速度极限的方向,即时速度的大小称即时速率,简称速率.

### 四、加速度

加速度是描述运动变化快慢的物理量,它等于速度对时间的变化率,即  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ .

从上式求得的实际上是质点运动的平均加速度,依平均速度和瞬时速度知识可得

即时加速度为  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ .

### 【例题分析】

例1 已知某质点的运动学方程为  $x = t^2 + 4m$ ,试求第1秒末到第2秒末这段时间内的平均速度及瞬时速度、加速度.

解 平均速度为

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(t_2^2 + 4) - (t_1^2 + 4)}{t_2 - t_1} = \frac{8 - 5}{2 - 1} = 3(\text{m/s})$$

方向沿  $x$  轴的正方向.瞬时速度为

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t)^2 + 4 - (t^2 + 4)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t(\text{m/s})$$

因此,1秒末和2秒末的速度分别为  $2\text{m/s}$ 、 $4\text{m/s}$ .加速度为

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2(t + \Delta t) - 2t}{\Delta t} = 2(\text{m/s}^2)$$

**例 2** 蚂蚁离开巢沿直线爬行,它的速度与到蚁巢中心的距离成反比.当蚂蚁爬到距巢中心  $l_1 = 1\text{m}$  的  $A$  点处时,速度是  $v_1 = 2\text{cm/s}$ .试问蚂蚁继续由  $A$  点爬到距巢中心  $l_2 = 2\text{m}$  的  $B$  点需要多长的时间?

**解法一** 将蚁巢中心定为坐标原点  $O$ ,  $OA$  连线即

为  $x$  轴正向,则坐标  $x$  处蚂蚁的速度可表示为

$$v = \frac{h}{x} \quad \begin{matrix} \Delta x & \Delta x & \Delta x & \Delta x \\ A & v'_1 & v'_2 & v'_{n-1} & B \end{matrix}$$

$$v = s/x = l_1 v_1/x$$

图 1-1-1

即 
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{l_1} \cdot \frac{x}{v_1}$$

将  $A$  和  $B$  连线分成  $n$  等份,如图 1-1-1 所示,每份长  $\Delta x = (l_2 - l_1)/n$ ,对应的速度为  $v_1, v'_1, v'_2, \dots, v'_{n-1}, v_2$ . 当  $n$  很大时,每小段运动可看成匀速运动,由  $A$  到  $B$  所需

$$\text{的总时间为: } T = \frac{\Delta x}{v_1} + \frac{\Delta x}{v'_1} + \frac{\Delta x}{v'_2} + \dots + \frac{\Delta x}{v'_{n-1}}$$

注意到  $\left\{ \frac{1}{v} \right\}$  是一等差数列,故 
$$T = \frac{l_2 - l_1}{n} \cdot \frac{\left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v'_{n-1}} \right) n}{2} = \frac{l_2 - l_1}{2} \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v'_{n-1}} \right)$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $v'_{n-1} \approx v_2$ , 即  $T = \frac{l_2 - l_1}{2} \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2 l_1 v_1}$ , 代入数据得  $T = 75\text{s}$ .

**解法二** 因蚂蚁运动的速度  $v$  与蚂蚁离巢的距离成反比,故

$\frac{1}{v} \propto x$ , 作出  $\frac{1}{v}-x$  图像如图 1-1-2 所示,为一条通过原点的直线.

将  $AB$  连线分成相等的足够小  $n$  段,每一小段的时间  $\Delta t = \frac{\Delta x}{v_i}$ , 其

数值近似对应着  $\frac{1}{v}-x$  图像中的矩形面积. 当  $n \rightarrow \infty$  时, 矩形面积之和即等于梯形面积, 故蚂蚁从  $A$  到  $B$  时间

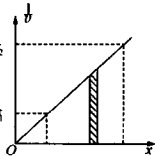


图 1-1-2

$$T = \frac{\left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) (l_2 - l_1)}{2} = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2 l_1 v_1} = 75(\text{s})$$

注:比较两种解法,显然解法二比解法一简便清晰得多,可见图像法解题在物理问题中十分有用.另外还需注意,这两种解法中都用了分割求和的处理手法.

**例 3** 有两把齿距不同的梳子,其中一把每厘米有 4 个齿,另一把每厘米有 5 个齿.今将其重叠起来,再透过其齿间的缝隙去看亮光,则可以看到亮段和暗段交替出现.如果把其中的一把梳子以  $1\text{cm/s}$  的速度移动,问亮的部位将以多大的速度移动?

**解** 如图 1-1-3,我们以黑白两色的梳子表示题述的两梳子.它们重叠在一起,其中白色梳子每厘米有 4 个齿,黑色梳子每厘米有 5 个齿.图中  $A$  处两梳子的齿刚好重叠在一起.显然,两梳子的齿重叠后,在  $A$  处附近透光的间隙较多,透过它去看亮光,这里就是一个“亮段”的中心.而图中  $B$  处两梳子的齿相互错开的距离最大,这里能透光

的间隙就是最少,故此处是一个“暗段”的中心.当两梳子间有相对运动时,这些亮段和暗段会随之移动.明显可以看到,当发生移动时,亮段和暗段的移动速度是相同的.以下我们仅讨论亮段的移动速度.

(1)当白色梳子不动,黑色梳子以速度  $v = 1\text{cm/s}$  向右移动.设原来黑、白色梳子的对应两齿刚好在  $A$  处重叠,则由于黑色梳子的移动,接着发生的便是紧邻  $A$  处右侧的那个黑色梳齿和白色梳齿重叠,这相当于上述的亮段的中心由  $A$  处移至  $A$  右侧第一个白色梳齿处.由此,这段移动的距离为白色梳子的齿距,即  $\Delta s_1 = \frac{1}{4}\text{cm}$ .

这一过程中黑色梳子移动的距离为黑白两梳子的齿距之差,即

$$\Delta s = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}(\text{cm})$$

以  $v_1$  表示此时亮段移动的速度,乃有  $\frac{\Delta s_1}{v_1} = \frac{\Delta s}{v}$ , 所以

$$v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta s} v = \frac{1/4}{1/20} \times 1 = 5(\text{cm/s})$$

由上叙述中还可以看到,此时亮段移动速度方向是向右的,即亮段移动速度方向与移动的梳子(黑梳子)的移动速度方向是相同的.

(2)当黑色梳子不动而白色梳子以速度  $v = 1\text{cm/s}$  向右运动时,同样设原来黑白梳子对应的两齿刚好在  $A$  处重叠,则由于白梳子的移动,接着发生的便是紧邻  $A$  处左侧的那个黑色梳齿和白色梳齿相重叠.这相当于上述的亮段的中心由  $A$  处移至  $A$  左侧第一个黑色梳齿处,这一过程中亮段移动的距离为黑色梳子的齿距,即  $\Delta s_2 = \frac{1}{5}\text{cm}$ .

这一过程中白色梳子移动的距离为黑、白两梳子的齿距之差,即  $\Delta s = \frac{1}{20}\text{cm}$ .

以  $v_2$  表示此时亮段移动的速度,乃有  $\frac{\Delta s_2}{v_2} = \frac{\Delta s}{v}$ . 所以

$$v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta s} v = \frac{1/5}{1/20} \times 1 = 4(\text{cm/s})$$

由上叙述还可以看到,此时亮段移动的速度方向是向左的,即亮段移动速度方向与移动梳子(白梳子)的移动速度方向是相反的.

注:(1)本题中,有人认为亮段移动的速度就应该等于梳子移动的速度,这是因为对亮段和暗段如何形成没有作具体分析而形成的想当然的想法.正确的思路应该是由亮段的形成机理出发来理解亮段的移动.这里值得注意的不仅是亮段移动速度的大小与

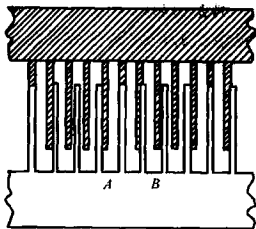


图 1-1-3

梳子移动速度的大小不等,而且这两个速度的方向也可能不同。

(2)和本题描述的情景十分相似的一个例子是使用游标卡尺时,当移动游标卡尺的游标尺(设其主尺不动)时,游标尺上的刻度线和主尺上的刻度线互相正对的位置也随之移动,这个两尺上刻度线正对的位置就相当于本题中的亮段中心或暗段中心,其移动速度与游标尺的移动速度也是不同的。

### 【巩固习题】

1. 摄制电影时,为了拍摄下落物体的特写镜头,做了一个线度为实物的 $\frac{1}{49}$ 的模型。放电影时,走片速度为每秒24张,为了使画面逼真,拍摄时走片速度应为多大?模型的运动速度应为实物运动速度的多少倍?

2. 一固定的直线轨道上A、B两点间距 $s$ ,将 $s$ 作 $n$ 等分,令质点从A出发由静止开始以加速度 $a$ (常量)向B运动,当质点到达每一等分段末端时它的加速度增加 $\frac{a}{n}$ ,试求质点到达B点时的速度 $v_B$ 。

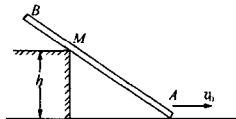


图 1-1-4

3. 如图1-1-4所示,当杆的A端以恒定速度 $v_0$ 沿水平方向运动时,接触点M则向B端移动,当 $AM=2h$ 时,接触点M向B端移动的 $v$ 为多少?

4. 磁带录音机的空带轴以恒定角速度转动,重新绕上磁带。绕好后带卷的末半径 $r_k$ 为初半径 $r_0$ 的3倍,如图1-1-5所示。绕带的时间为 $t_1$ 。要在相同的带轴上重新绕上厚度为原磁带一半的薄磁带,问需要多少时间 $t_2$ ?

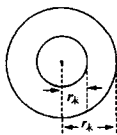


图 1-1-5

5. 在听磁带录音机的录音时发觉,经过时间 $t_1=20$ 分,带轴上带卷的半径减小一半。问此后半径又减小一半需要多少时间 $t_2$ ?

6. 小球从高 $h_0=120\text{m}$ 处自由落下,着地后跳起,又落下,每与地面相碰一次,速度减少 $\frac{1}{n}$ ( $n=2$ )。(1)作出小球的 $v-t$ 图像(向上为正);(2)求小球从下落到停止的总时间和总路程( $g$ 取 $10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ )。

7. 如图1-1-6所示装置,在绳的C端以速率 $v$ 匀速收绳,从而拉动低处的物体M水平前进,当绳BC段与水平恰成 $\alpha$ 角时,求物体M的速度?

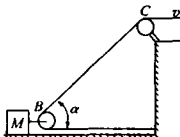


图 1-1-6

8. 在以速度 $v_0$ 行驶的小汽车正前方 $L$ 处有一辆载重卡车。由于大雾,使得公路上能见度很低,当小车司机发现这一情况时,卡车正以加速度 $a$ 由静止开始作匀加速运动,其方向与小

运动方向一致,于是小车司机立即以加速度  $2a$  作减速运动,那么小车速度  $v_0$  必须满足什么条件,小车才不致于和卡车相撞?

9. 如图 1-1-7 所示,  $A$  和  $B$  两物体位于同一竖直线上,距地面高度分别为  $h_A = 20\text{m}$ ,  $h_B = 40\text{m}$ ,当  $A$  物体以  $v_0 = 10\text{m/s}$  的初速度竖直上抛时,  $B$  物体恰好同时开始作自由落体运动,求  $A$  和  $B$  将在距地面多高的地方相遇? ( $g = 10\text{m/s}^2$ )

10. 一质点在平面上作匀变速运动,在时刻  $t = 1\text{s}$ 、 $3\text{s}$ 、 $5\text{s}$  时,质点分别位于平面上的  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点,已知  $\overline{AB} = 8\text{m}$ ,  $\overline{BC} = 6\text{m}$ ,且  $AB \perp BC$ . 试求此质点运动的加速度是多少?

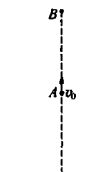


图 1-1-7

## 第二节 运动的合成



### 【知识要点】

#### 一、矢量和标量

只有大小、没有方向的量称为标量,如质量、功等,可直接加减.既有大小又有方向的量称为矢量,如力、位移、速度、加速度等.矢量合成按平行四边形法则,即两分量构成平行四边形的两邻边,合矢量为该平行四边形与两分量共点的对角线.由平行四边形法则又衍生出三角形法则,多个矢量的合成又可推导出多边形法则.

同一直线上的矢量运算可以简化为代数运算,不在一直线上的矢量运算一般通过正交分解法求得,即把各个矢量向互相正交的坐标轴上分解,求得各方向的分量和后,再求合矢量.

#### 二、运动的合成法则

运动的合成包括位移、速度和加速度的合成,遵守矢量合成法则——平行四边形法则.

我们一般把质点对地或对地面上静止物体的运动称为绝对运动,质点对运动参照系的运动称相对运动,而运动参照系对地的运动称牵连运动.以速度为例这三种速度分别称绝对速度、相对速度、牵连速度,则

$$v_{\text{绝对}} = v_{\text{相对}} + v_{\text{牵连}}$$

或

$$v_{\text{甲对乙}} = v_{\text{甲对丙}} + v_{\text{丙对乙}}$$

位移、加速度之间也存在类似关系.但必须注意以上两式是矢量式,具体运算按平行四边形法则.

我们在研究复杂运动时,常把它分解为两个或几个简单的分运动来研究,任何一个

方向上的分运动,都按其本身的规律进行,不会因为其他方向的分运动是否存在而受影响,这叫运动的独立性原理.如平抛运动就可看作互不影响的水平方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动的合成.

### 三、物系相关速度

正确分析物体(质点)的运动,除可以用运动的合成知识外,还可充分利用物系相关之间的关系简捷求解.以下三个结论在实际解题中十分有用.

1. 刚性杆、绳上各点在同一时刻具有相同的沿杆、绳的分速度.
2. 接触物系在接触面法线方向的分速度相同,切向分速度在无相对滑动时亦相同.
3. 线状交叉物系交叉点的速度是相交物系双方沿双方切向运动分速度的矢量和.

### 【例题分析】

**例 1** 设河水流速为  $v_1$ ,小船在静水中航行速度为  $v_2$ ,若小船从一岸行驶到对岸,问当船的航行方向怎样时,才能(1)小船所花的时间最短;(2)小船所经过的路程最短?

**分析** 以地球为参照物,小船渡河的速度是由水速和船速合成的: $v = v_1 + v_2$ .解此题要注意的是渡河过程中,一是水和船都在同时运动(等时性),二是从此岸到彼岸只有船速才起作用(互不相干性):

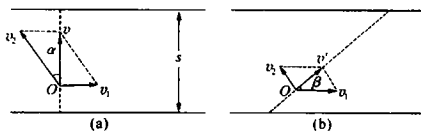


图 1-2-1

**解** (1)小船渡河到对岸所花时间只与船速有关,要使时间最短,必须让航行方向垂直水流直指对岸.

(2)当  $v_2 > v_1$  时,显然,最短的路程即河宽  $s$ ,如图 1-2-1(a)所示,航行方向为偏向上游一个角度,其角度大小为  $\alpha = \arcsin v_1/v_2$ .

当  $v_2 < v_1$  时,垂直河岸的航行方向驶向对岸是不可能的,但总可以找到一个这样的方向,使得航行的路程最短:如图 1-2-1(b),设小船实际航行速度为  $v'$ ,与河岸夹角为  $\beta$ ,实际路程为  $L$ ,则有  $L = s/\sin\beta$ ,要求  $L$  的极小值,即要求  $\sin\beta$  的最大值.在速度合成的矢量三角形  $Ov'v_1$  中,设  $\angle Ov'v_1 = \theta$ ,运用正弦定理

$$\frac{v_2}{\sin\beta} = \frac{v_1}{\sin\theta}, \quad \sin\beta = \frac{v_2}{v_1}\sin\theta, \quad \sin\beta_{\max} = \frac{v_2}{v_1}$$

由上可见,只有当  $\theta = \pi/2$ ,即合速度与船速垂直时,小船才有最短路程,此时船的航行方向是:偏向上游,与水流的夹角为  $\pi/2 + \arcsin v_2/v_1$ ,其所经过的路程为:

$$L_{\min} = \frac{s}{\sin \beta_{\max}} = \frac{s}{v_2/v_1} = \frac{sv_1}{v_2}$$

**例 2** 如图 1-2-2 所示,  $AB$  杆的  $A$  端以匀速  $v$  运动,在运动时杆恒与一半圆周相切,半圆周的半径为  $R$ . 当杆与水平线的交角为  $\theta$  时,求杆的角速度  $\omega$  及杆上与半圆相切点  $C$  的速度和杆与圆柱接触点  $C'$  的速度大小.

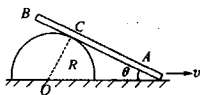


图 1-2-2

**解** 由于半圆静止,杆上  $C$  点的速度的法向分量为零,故杆上  $C$  点速度必沿杆. 以  $C$  点为基点,将杆上  $A$  点速度  $v$  分解成沿杆方向的分量  $v_1$  和垂直于杆方向的分量  $v_2$ ,如图 1-2-3 所示,则  $v_1$  是  $A$  点与杆上  $C$  点相同的沿杆方向平动的速度,  $v_2$  是  $A$  点对  $C$  点的转动速度. 故杆上  $C$  点速度为

$$v_c = v_1 = v \cos \theta, \quad v_2 = v \sin \theta = \omega \cdot \overline{AC}.$$

图 1-2-3

而  $\overline{AC} = R \cot \theta$ , 故  $\omega = \frac{v \sin^2 \theta}{R \cos \theta}$ .

杆与圆柱交点  $C'$  沿圆周运动,杆转过的角度与半径转过的角度相同,所以杆的转动角速度与  $C'$  点的角速度相同(如图 1-2-4 所示),所以  $C'$  点的速度为  $v_{c'} = \omega R = v \tan \theta \sin \theta$



**注:** 球上  $C'$  点与杆上  $C$  点虽为同一点,但两者之间有相对滑动,故球上  $C'$  点速度不是  $v \cos \theta$ . 有兴趣的同学还可通过讨论极短时间内的位置变化求得球上  $C'$  点的速度为  $v \tan \theta \sin \theta$ .

图 1-2-4

**例 3** 一个半径为  $R$  的环(环心为  $O_2$ ) 立在水平面上,另一个同样大小的环(环心为  $O_1$ ) 以速度  $v$  从前一环的旁边经过. 试求当两环环心相距为  $d$  ( $2R > d > 0$ ) 时,两环上部的交点  $A$  的运动速度. 两环均很薄,可以认为两环是在同一平面内,第二个环是紧贴着第一个环擦过去的.

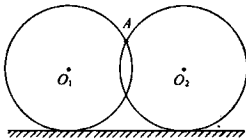


图 1-2-5

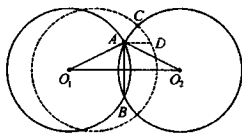


图 1-2-6

**解法一** 用微元法求解



设两环心相距为  $d$  时刻的位置如图 1-2-6 中的实线所示, 自此时起, 经历一段极短的时间  $\Delta t$  很小, 故图中的  $A, C, D$  三点是相距很近的 (为使图中相对位置清楚, 图中的位移是夸大的), 则  $\widehat{AC}, \widehat{DC}$  可以近似地看成是与弦  $AC, DC$  重合的. 故这段时间内, 动环的位移可用  $AD$  表示, 交点的位移可用弦  $AC$  表示, 其大小分别为

$$AD = v\Delta t, AC = v_A\Delta t$$

所以 
$$v_A = \frac{AC}{AD}v \quad (1)$$

上式中  $v_A$  为交点的移动速度. 又以  $\alpha$  表示等腰  $\triangle AO_1O_2$  的底角, 且视  $AC$  为一小段弦, 则由图中有  $\angle CAD = \frac{\pi}{2} - \angle DAO_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,

又在等腰  $\triangle ADC$  中, 有  $AD = 2AC \cdot \cos \angle CAD$ , 即  $AD = 2AC \cdot \sin \alpha \quad (2)$

以②式代入①式有 
$$v_A = \frac{v}{2\sin \alpha} = \frac{v}{2\sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} / R} = \frac{Rv}{\sqrt{4R^2 - d^2}}$$

**解法二 由速度的分解求解**

仍如图 1-2-6, 由于交点是在不动的环上由  $A$  点移至  $C$  点, 故交点的移动速度必沿不动圆环的切线方向; 另一方面, 可以从水平方向上来考察交点的运动. 当交点由  $A$  移至  $C$  时, 由于交点在水平方向上的坐标总是与两环心连线中点的坐标相同, 则在任何一段时间内此交点的水平位移总是环心  $O_1$  的水平位移的一半, 即此交点速度的水平分量是  $v_{A//} = \frac{1}{2}v$ .

由上一解法中已得出  $v_A$  的方向与水平方向的夹角为  $\angle CAD = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , 则有

$$v_{A//} = v_A \cos \angle CAD = v_A \sin \alpha$$

故得 
$$v_A = \frac{v_{A//}}{\sin \alpha} = \frac{v}{2\sin \alpha} = \frac{Rv}{\sqrt{4R^2 - d^2}}$$

注: 本题所用的两种解法是求解运动学问题时常用的方法. 特别是微元法, 更是物理学中分析和求解问题时常用的方法.

在物理学的问题中, 往往是针对一个对象经历某一过程或处于某些状态来进行研究, 而在此过程中或状态之间, 描述研究对象的物理量有可能是不变的, 更多的则可能是变化的. 对于那些变化的量的研究, 有一种方法是把全过程分为很多短暂的小过程或把研究对象的整体分解为很多微小的局部来考察, 然后通过对这些小过程或微小局部的研究而归纳出适用于全过程或者是整体的结论. 这些微小过程或者是微小局部常被称为“微元”, 这种方法也就被称为“微元法”.

**【巩固习题】**

1. 下雨时, 雨点竖直下落到地面, 其速度为  $10\text{m/s}$ . 若在地面上放一横截面积为  $80\text{cm}^2$ 、高为  $10\text{cm}$  的圆柱形量筒, 则经  $30\text{min}$ , 筒内接得雨水水面的高度为  $1\text{cm}$ . 现因风的影响, 雨水下落时偏斜  $30^\circ$ . 若用同样的量筒接得与无风时相同的雨水量, 则所需时间为多少?

2. 如图 1-2-7 所示, 岸高为  $h$ , 人用绳经滑轮拉船靠岸, 若当绳与水平方向夹角为  $\theta$  时, 收绳速率为  $v$ , 则该位置船的速率为多大?

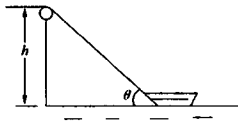


图 1-2-7

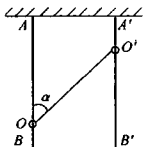


图 1-2-8

3. 两只小环  $O$  和  $O'$  分别套在静止不动的竖直杆  $AB$  和  $A'B'$  上. 一根不可伸长的绳子, 一端系在  $A'$  点上, 绳子穿过环  $O'$ , 另一端系在环  $O$  上. 如图 1-2-8 所示. 若环  $O'$  以恒定速度  $v'$  沿杆向下运动,  $\angle AOO' = \alpha$ . 求环  $O$  的运动速度为多大?

4. 当自行车向正东方向以  $5\text{km/h}$  的速度行驶时, 人感觉风从正北方向吹来; 当自行车的速度增加两倍时, 人感觉风从正东北方向吹来, 求风对地的速度和风向.

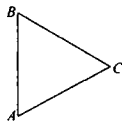


图 1-2-9

5. 模型飞机以相对空气  $v = 39\text{km/h}$  的速度绕一个边长为  $2\text{km}$  的等边三角形飞行. 设风速  $u = 21\text{km/h}$ , 方向与三角形的一边平行并和飞机起飞方向相同, 求飞机绕如图 1-2-9 所示的三角形一周需要多少时间?

6. 如图 1-2-10 所示装置, 设杆  $OA$  以角速度  $\omega$  绕  $O$  转动, 其  $A$  端则系以绕过滑轮  $B$  的绳, 绳子的末端挂一重物  $M$ . 已知  $OB = h$ , 当  $\angle OBA = \alpha$  时, 求物体  $M$  的速度.

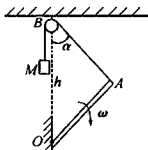


图 1-2-10

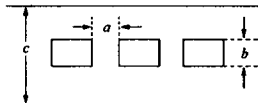


图 1-2-11

7. 如图 1-2-11 所示, 一列相同汽车以等速度  $v$  沿宽度为  $c$  的直公路行驶, 每车宽

为  $b$ , 头尾间距为  $a$ , 则人能以最小速率沿一直线穿过马路所用的时间为多少?

8. 如图 1-2-12, 一平面内有两根细杆  $l_1$  和  $l_2$ , 各自以垂直于自己的速度  $v_1$  和  $v_2$  在该平面内运动, 试求交点相对于纸平面的速率及交点相对于每根杆的速率.

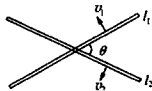


图 1-2-12

9. 图 1-2-13 表示在一水平面上有  $A, B, C$  三点,  $AB = 1$ ,  $\angle CBA = \alpha$ , 今有甲质点由  $A$  向  $B$  以速度  $v_1$  作匀速运动, 同时, 另一质点乙由  $B$  向  $C$  以速度  $v_2$  作匀速运动. 试问运动过程中两质点间的最小距离为多少?

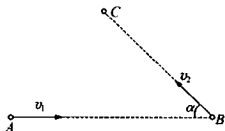


图 1-2-13

10. 合页构件由三个菱形组成, 其边长之比为 3:2:1. 如图 1-2-14 所示, 顶点  $A_3$  以速度  $v$  往水平方面移动, 求当构件的所有角都为直角时, 顶点  $A_1, A_2, B_2$  的速度.

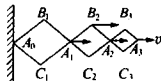


图 1-2-14

### 第三节 抛体运动



#### 【知识要点】

#### 一、平抛运动

质点只在重力作用下, 且具有水平方向的初速度的运动叫平抛运动. 它可以看成水平方向上的初速为  $v_0$  的匀速直线运动和竖直方向上的自由落体运动的合成. 平抛运动往往采用水平和竖直方向的直角坐标系求解.

1. 位移: 水平方向  $x = v_0 t$

$$\text{竖直方向 } y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$\text{合位移 } s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v_0 t)^2 + \left(\frac{1}{2} g t^2\right)^2}$$

$$\text{方向 } \alpha = \arctan \frac{gt}{2v_0}, \alpha \text{ 为位移与水平方向夹角}$$

2. 速度: 水平方向  $v_x = v_0$

$$\text{竖直方向 } v_y = gt$$

$$\text{合速度 } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

$$\text{方向 } \beta = \arctan \frac{gt}{v_0}, \beta \text{ 为速度与水平方向夹角}$$

3. 加速度: 上述直角坐标系中  $a_x = 0$ ,

自然坐标系(如图):

$$a_n = g \cos \alpha = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

$$a_\tau = g \sin \alpha = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

4. 轨迹: 由位移公式消去参数  $t$  得  $y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$

此图线为过原点的抛物线, 且  $v_0$  越大, 图线张开程度越大, 即射程越大.

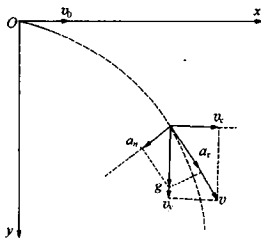


图 1-3-1

## 二、斜抛运动

质点只在重力作用下, 且初速方向与水平方向

成一定夹角的运动叫斜抛运动. 初速度有一仰角叫斜上抛运动, 有一俯角叫斜下抛运动. 下面主要讲述斜上抛运动常用的处理方法.

1. 将斜上抛运动分解为水平方向的匀速直线运动和竖直方向上的竖直上抛运动.

(1) 位移: 水平方向  $x = v_0 \cos \theta \cdot t$

$$\text{竖直方向 } y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

(2) 速度: 水平方向  $v_x = v_0 \cos \theta$

$$\text{竖直方向 } v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

(3) 加速度:  $a_x = 0, a_y = g$

(4) 轨迹: 消去位移公式中的参数  $t$  得  $y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$

$$(5) \text{斜抛运动的几个特征量: } \begin{cases} \text{飞行时间 } T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \\ \text{射高 } H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \\ \text{射程 } s = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \end{cases}$$

2. 将斜抛运动分解为沿初速方向的斜向上的匀速运动和竖直方向上的自由落体运动.

3. 将沿斜面和垂直斜面方向作  $x, y$  轴, 分别分解初速和加速度后用运动学公式求解.

**【例题分析】**

**例 1** 从高  $H$  处的一点  $O$  先后平抛两个小球 1 和 2, 球 1 直接恰好越过竖直挡板  $A$  落到水平地面上的  $B$  点; 球 2 则与地面碰撞一次后, 也恰好越过竖直挡板, 而后也落在  $B$  点, 如图 1-3-2 所示. 设球 2 与地面碰撞遵循类似光的反射定律, 且反弹速度大小与碰前相同, 求竖直挡板的高度  $h$ .

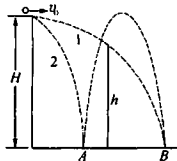


图 1-3-2

**分析** 本题要从运动的独立性着手考虑, 由斜上抛运动特点, 易得球 2 的运动时间是球 1 的 3 倍.

**解** 设球 1、2 运动的时间分别为  $t_1$  和  $t_2$ , 则两球在水平方向有  $v_2 t_2 = v_1 t_1$ .

因为  $t_2 = 3t_1$ , 所以  $v_1 = 3v_2$ . 又因两球飞过竖直挡板的水平位移相同, 故它们过挡板的飞行时间满足  $t_2' = 3t_1'$ .

设球 2 从第一次落地到飞到挡板顶端所用时间为  $t$ , 则有

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} + t = 3\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

球 2 落地时速度的竖直分量为  $v_2' = \sqrt{2gH}$  ①

到达挡板顶端时速度的竖直分量为  $v_2'' = \sqrt{2g(H-h)}$  ②

两者满足  $v_2' = v_2'' + gt$

解①、②两方程可得  $h = 3H/4$

**例 2** 有 5 条边长为  $l$  m 的正方形薄板做成一个小屋, 如图 1-3-3(a) 所示. 已知水滴沿屋顶从  $A$  点流到  $B$  点所需的时间为从  $B$  点流到  $C$  点所需的时间的 2 倍. 假定水滴从  $A$  点以初速为零开始流下, 试求水滴从  $A$  点流到  $C$  点所需的时间.

**分析** 水滴从  $A \rightarrow B$  做匀加速直线运动,  $B \rightarrow C$  做斜下抛运动, 竖直方向的分运动是竖直下抛运动.

**解** 由图 1-3-3(b) 中的阴影三角形  $BDE$  可得

$$x = BE = ED = \frac{\sqrt{2}l - l}{2} = \frac{(\sqrt{2} - 1)l}{2} \quad \text{①}$$

$$h = l - x = \frac{(3 - \sqrt{2})l}{2} \quad \text{②}$$

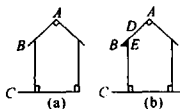


图 1-3-3

设水滴从  $B$  到  $C$  的时间为  $t$ , 水滴沿  $AB$  的加速度为  $a$ , 则水滴经过  $AB$  距离的时间为  $2t = \sqrt{\frac{2l}{a}}$ ,  $a = \frac{l}{2t^2}$ ,  $h = vt + \frac{1}{2}gt^2$  ③

上式  $v$  为  $B$  点末速度,  $v = \cos 45^\circ v_B = \sqrt{al}$ .

经整理, 可求得水滴经  $h$  所需时间  $t = \sqrt{(3-2\sqrt{2})\frac{l}{g}}$

加在一起, 水滴经  $AC$  距离所需时间为  $3t$ .

**例 3** 一仓库高 20m、宽 40m, 在仓库前某处  $A$  点抛一石块过屋顶, 试问  $A$  距仓库前多远时, 所需初速度  $v_0$  最小? 为多少? ( $g = 10\text{m/s}^2$ )

**分析** 此题是初速与射程问题, 但要求过一平顶障碍物, 如图 1-3-4 所示建立坐标系. 要使  $v_0$  最小, 则要求石块擦  $B, C$  两点而过; 而过  $BC$  段, 可用通常的有关射程问题的方法解决.

**解法一** 如图, 以  $BC$  两点之间作射程, 有  $s_{BC}$

$$= \frac{v_B^2 \sin 2\alpha}{g}, \text{ 所以 } v_B^2 = \frac{s_{BC} g}{\sin 2\alpha}.$$

可见当  $\alpha = 45^\circ$  时,  $v_B$  有最小值, 为

$$v_B = v_{B\min} = \sqrt{s_{BC} g} = \sqrt{40 \times 10} = 20(\text{m/s})$$

设此斜下抛的时间为  $t$ , 由位移公式  $h = v_B t + gt^2/2$  有  $20 = 10\sqrt{2}t + \frac{1}{2} \times 10t^2$ , 整理得  $t^2 + 2\sqrt{2}t - 4 = 0$ , 求得有效根为  $t = (\sqrt{6} - \sqrt{2})\text{s}$ .

由此得到  $l$  值为  $l = v_B t = 10\sqrt{2} \times (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 14.6(\text{m})$

再求  $v_0$ :

$$v_{0x} = v_B = 10\sqrt{2}\text{m/s}, v_{0y} = v_B + gt = 10\sqrt{6}(\text{m/s})$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 28.2\text{m/s}$$

$$\tan \theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \sqrt{3}, \theta = 60^\circ, \text{ 即 } v_0 \text{ 与水平线夹角.}$$

**解法二** 我们可以由轨迹方程求解. 由水平位移  $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$ , 得  $t = x/v_0 \cos \alpha$ . 代入竖直位移中, 并将已知条件代入, 有

$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = x \tan \alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$= x \tan 45^\circ - \frac{10}{2} \cdot \frac{x^2}{20^2 \times (\sqrt{2}/2)^2} = x - \frac{x^2}{40}$$

将抛出点的坐标  $(-l, -20)$  代入上面的轨迹方程, 得方程  $-20 = -l - l^2/40$ , 即

$$l^2 + 40l - 800 = 0$$

求得结果为  $l = 14.6\text{m}$

**注:** 灵活建立坐标系, 运用有关物理公式, 解题便简捷得多.

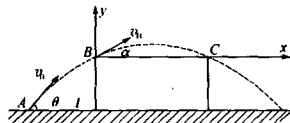


图 1-3-4

【巩固习题】

1. 从底角为  $\theta$  的斜面顶端, 以初速度  $v_0$  水平抛出一小球, 不计空气阻力. 若斜面足够长, 如图 1-3-5 所示, 则小球抛出后离开斜面的最大距离  $h$  是多少?

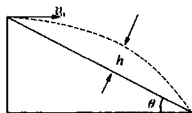


图 1-3-5

2. 半径为  $R$  的自行车轮在平地上滚动, 轮心速度为  $v_C$ , 在轮缘  $A$  处有一质点  $M$ , 在如图 1-3-6 所示的位置处 ( $A, M$  连线和水平线平行)  $M$  点脱离  $A$  点飞出, 则  $M$  点飞越的水平距离  $L$  为多少?

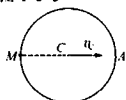


图 1-3-6

3. 在掷铅球时, 铅球出手时距地面的高度为  $h$ , 若出手时的速度为  $v_0$ , 试问以何角度掷球时, 水平射程最远? 最远射程为多少?

4. 如图 1-3-7, 一人作射靶游戏, 为使每次枪弹都击中在靶面的同一条水平线上, 则每次射击的瞄准点必须在靶面同一圆周上, 试加以证明. 已知水平线离地面高度为  $h$ , 枪与靶相距为  $d$ , 子弹发射速率为  $v_0$ .

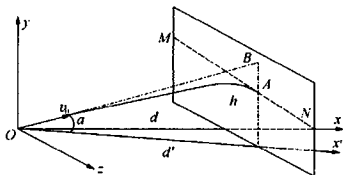


图 1-3-7

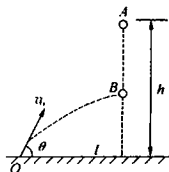


图 1-3-8

5. 如图 1-3-8, 从  $O$  点以初速度  $v_0$  射出一颗子弹, 同时从距地面为  $h$  的  $A$  点自由落下一物体, 若两者在  $B$  点相遇 ( $B$  点离  $O$  点的水平距离为  $l$ ), 求子弹的初速度  $v_0$  与水平方向的夹角  $\theta$ .

6. 一水枪需将水射到离喷口水平距离为 3.0m 的墙外, 从喷口算起, 墙高为 4.0m. 若不计空气阻力, 取  $g = 10\text{m/s}^2$ , 求所需的最小初速度及发射仰角.

7. 钢球沿着光滑的长梯弹跳, 在每一级台阶上仅弹跳一次, 如图 1-3-9 所示. 每次与台阶碰撞时, 球要损失  $a = 50\%$  的动能. 试求小球抛出时的初速度  $v$  及其与竖直线的夹角  $\varphi$ . (梯子台阶的高度  $h = 10\text{cm}$ , 宽  $l = 20\text{cm}$ )

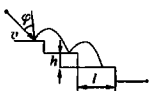


图 1-3-9

8.  $t = 0$  时刻从水平面上的  $O$  点, 在同一铅垂面上同时朝两方向发射初速率分别为  $v_A = 10\text{m/s}$ ,  $v_B = 20\text{m/s}$  的两质点  $A$  和  $B$ , 如图 1-3-10 所示. 试问 (1)  $t = 1$  秒时  $A, B$  相距多远? (2) 在铅垂面  $xOy$  上, 从原点  $O$  出发朝平面各方向射出相同速率  $v_0$  的粒子, 今以朝  $x$  正向 (水平射出) 的粒子为参考点, 确定其他粒子在未落地前

的  $t$  时刻的位置组成的曲线。

9. 如图 1-3-11 所示, 有两条位于同一竖直平面内的水平轨道, 相距为  $h$ 。轨道上有两个物体 A 和 B, 它们通过一根绕过定滑轮 O 的不可伸长的轻绳相连接。物体 A 在下面的轨道上以匀速率  $v$  运动, 在轨道间的绳子与轨道成  $30^\circ$  角的瞬间, 绳子 BO 段的中点处有一与绳相对静止的小水滴 P 与绳子分离。设绳长 BO 远大于滑轮直径, 求 (1) 小水滴 P 脱离绳子时速度的大小和方向; (2) 小水滴 P 离开绳子落到下面轨道所需要的时间。

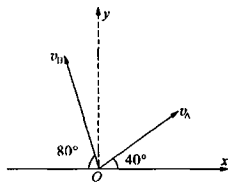


图 1-3-10

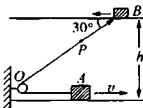


图 1-3-11

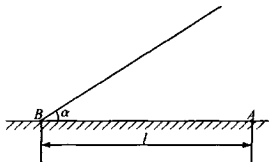


图 1-3-12

10. 炮从掩蔽所下向外射击, 掩蔽所与水平面倾斜成角  $\alpha$ , 如图 1-3-12 所示。炮位于离掩蔽所的地基 (B 点) 相距  $l$  的 A 点处。炮弹的初速度为  $v_0$ , 炮弹飞行的轨道位于平面上。求炮弹飞行的最远射程  $l_{\max}$ 。

## 第四节 圆周运动



### 【知识要点】

#### 一、匀速圆周运动

轨迹为圆的运动叫圆周运动。在任何相等时间内通过的圆弧长度都相等的圆周运动叫匀速圆周运动。

质点作匀速圆周运动时, 其线速度的大小为  $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{t} = 2\pi r f$ , 其中  $s, r, t, f$  分别表示圆周运动的质点在时间  $t$  内运动过的弧长、半径、周期、频率; 其线速度方向沿圆周某点的切线方向。

匀速圆周运动的角速度的大小为  $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{t} = 2\pi f$ , 其中  $\varphi$  为在时间  $t$  内转过的角



度,单位为弧度(rad); $\omega$ 也是一个矢量,方向由右手螺旋法则来定.匀速圆周运动的角速度是一个恒量,它与线速度的大小关系为  $v = \omega r$ .

因线速度的大小不变,故其切向加速度  $a_t = 0$ ;而线速度方向不断改变.为描述线速度方向改变快慢,引入法向加速度,其大小为  $a_n = \frac{v}{r} = \omega^2 r$ ,方向总是与线速度垂直且指向圆心.因为向心加速度的大小不变,方向改变,所以匀速圆周运动是一种变加速运动.

## 二、非匀速圆周运动

线速度的大小在不断改变的圆周运动叫非匀速圆周运动,它的角速度方向不变,大小在不断改变,它的加速为  $a = a_n + a_t$ ,其中  $a_n$  为法向加速度,大小为  $a_n = \frac{v^2}{r}$ ,方向指向圆心; $a_t$  为切向加速度,大小为  $a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ,方向指向切线方向.对于一般的曲线运动,向心加速度为  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ , $\rho$  为点所在曲线处的曲率半径.

### 【例题分析】

**例 1** 已知等距螺旋线在垂直轴方向的截面圆半径为  $R$ ,曲率半径为  $\rho$ ;一质点沿此螺旋线作匀速运动.已知质点在垂直轴方向的投影转过一周所用的时间为  $T$ ,则质点沿轴方向的分运动速度大小为多少?

**分析** 若质点在  $x$  轴方向作匀速直线运动,在和  $x$  轴垂直的方向作匀速圆周运动,这两个运动的合成即为沿等距螺旋线运动.

**解** 设质点运动速度为  $v$ ,在垂直轴方向分速度为  $v_{\perp}$ ,沿轴方向分速度为  $v_{\parallel}$ ;在沿轴方向,质点作匀速直线运动,其加速度和速度分别为  $a_{\parallel} = 0, v_{\parallel} = \frac{h}{T} = \frac{hv_{\perp}}{2\pi r}$ ,式中  $h$  为螺距.

在垂直的平面上,质点作匀速圆周运动,其加速度为  $a_{\perp} = \frac{v_{\perp}^2}{R}$ .

而  $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$ ,同时  $\rho = \frac{v^2}{a_{\perp}}$ ,由此得  $v_{\parallel} = \frac{2\pi\sqrt{R(\rho-R)}}{T}$ .

**注:**知识概要中已明确,对一般的曲线运动,向心加速度  $a_{\parallel} = \frac{v^2}{\rho}$ ,其中  $\rho$  为点在曲线处的曲率半径.这一关系式也为我们求曲率半径提供了一条有用的途径.

**例 2** 一只狐狸以不变速度  $v_1$  沿着直线  $AB$  逃跑,一猎犬以不变的速率  $v_2$  追击,其运动方向始终对准狐狸.某时刻狐狸在  $F$  处,猎犬在  $D$  处,  $FD \perp AB$ ,且  $FD = l$ ,如图 1-4-1 所示,试求此时猎犬加速度的大小.

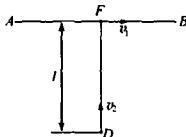


图 1-4-1

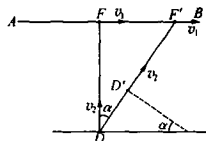


图 1-4-2

**解** 猎犬虽然以不变的速率  $v_2$  追击狐狸,但因为它的运动方向始终对准狐狸,而狐狸是以速度  $v_1$  沿直线运动着,所以猎犬速度方向时时在变,它仍有加速度.以下我们试以  $\Delta t$  时间以后猎犬的速度变化来求加速度.

设  $\Delta t$  时间后,猎犬到达  $D'$  处,狐狸到达  $F'$  处(图 1-4-2),因为  $\Delta t$  时间间隔很小,我们可近似将猎犬运动的轨迹看成为一小段圆弧.设此圆弧的半径为  $R$ ,则它的加速度应为向心加速度即  $a = v_2^2/R$  ①

它的方向与速度方向垂直.由图 1-4-2 可见,猎犬速度转过的角度应为  $\alpha$ ,而

$$\alpha = v_2 \Delta t / R \quad ②$$

在  $\Delta t$  期间,狐狸跑过的距离为  $FF' = v_1 \Delta t \approx \alpha l$  ③

所以由②、③式可得  $\frac{v_2 \Delta t}{R} = \frac{v_1 \Delta t}{l}$

即  $R = lv_2 / v_1$  ④

所以加速度  $a = v_2^2 / R = v_1 v_2 / l$ .

**例 3**  $A, B, C$  三个芭蕾舞演员同时从边长为  $l$  的三角形顶点  $A, B, C$  出发,以相同的速率  $v$  运动;运动中始终保持  $A$  朝着  $B, B$  朝着  $C, C$  朝着  $A$ . 试问经多少时间三人相聚? 每个演员跑了多少路程?

**分析** 据题意,可知三个演员都作等速率曲线运动,而且任何一时刻三个演员的位置都分别在一个正三角形的三个顶点上,但这正三角形的边长不断缩小,如图 1-4-3 所示. 现把从开始到追上目标的时间  $t$  分成  $n$  个微小时间间隔  $\Delta t$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), 在每个微小的时间间隔内,每个演员的运动近似为直线运动. 于是,第一个  $\Delta t$  内  $A, B, C$  的速度和位置,以及第一个  $\Delta t$  末三者的位置  $A_1, B_1$  和  $C_1$  如图 1-4-3 所示. 这样可依次作出以后每经  $\Delta t$ , 以三个演员为顶点组成的正三角形  $A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, \dots$ . 设正三角形的边长分别为  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ , 显然,当  $l_n \rightarrow 0$  时,三人相聚. 如果找出每隔  $\Delta t$  正三角形边长的减小与演员在此微小时间  $\Delta t$  内的路程  $v \Delta t$  的关系,就可求出直到  $l_n \rightarrow 0$  时,演员跑过的全部路程.

**解法一** 由以上分析,并根据小量近似有

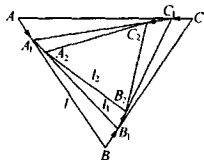


图 1-4-3

$$l_1 = l - \overline{AA_1} - \overline{BB_1} \cos 60^\circ = l - \frac{3}{2} v \Delta t$$

$$l_2 = l_1 - \frac{3}{2} v \Delta t = l - 2 \cdot \frac{3}{2} v \Delta t$$

$$l_3 = l_2 - \frac{3}{2} v \Delta t = l - 3 \cdot \frac{3}{2} v \Delta t$$

.....

$$l_n = l - n \cdot \frac{3}{2} v \Delta t$$

所以  $\frac{3}{2} v n \Delta t = l - l_n$

以上各式中,  $\Delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , 并有  $n \Delta t = t, l_n = 0$  (三人相遇), 所以, 三人一起追到目标于原正三角形  $ABC$  的中心, 所需时间为  $t = n \Delta t = \frac{2l}{3v}$ , 每个演员运动的路程长度为  $s$

$$= vt = \frac{2}{3} l$$

**解法二** 如图 1-4-4 所示, 设  $t$  时刻三角形边长为  $x$ , 经历一极短

时间  $\Delta t$  后, 边长变为  $x'$ , 则  $x'^2 = (v \Delta t)^2 + (x - v \Delta t)^2 - 2(v \Delta t)(x - v \Delta t) \cos 60^\circ = x^2 - 3xv \Delta t + 3v^2 \Delta t^2$

略去二阶小量后得  $x'^2 = x^2 - 3xv \Delta t$ , 即  $2x' = 2x - 3v \Delta t$ ,

所以  $x - x' = \frac{3}{2} v \Delta t$

即三人一起追到目标于原正三角形  $ABC$  的中心, 所需时间为

$$t = \frac{l}{3v/2} = \frac{2l}{3v}$$

注: 若四人从正方形顶点出发, 情形又怎样? (答案:  $t = l/v, l$  为正方形边长)

### 【巩固习题】

1. 图 1-4-5 所示为直径为  $d$  的纸制圆筒, 使它以角速度  $\omega$  绕轴  $O$  作匀速转动, 然后把枪口对准圆筒, 使子弹沿直径穿过圆筒. 若子弹在圆筒旋转不到半周时的圆筒上留下  $a, b$  两弹孔, 已知  $aO, bO$  夹角  $\Phi$ , 则子弹的速度为多少?

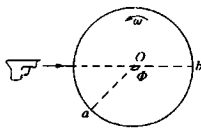


图 1-4-5

2. 质点绕半径  $R = 1\text{m}$  的圆轨道作圆周运动, 其速率与时间成正比例增加:  $v = \pi t$ . 求质点绕圆周运动一周回到出发点时的加速度的大小和方向.

3. 半径为  $R$  的车轮在地面上作无滑动的滚动, 轮心速度为常量  $v_0$ , 试求轮边一质点的运动方程.

4. 采用物理方法确定等距螺旋线上任意一点处的曲率半径. 设截面圆半径为  $R$ ,

螺距为  $h$ 。

5. 已知抛物线方程  $y = Ax^2$ , 试采用物理方法确定任意  $x$  处抛物线的曲率半径。

6. 如图 1-4-6, 一个直径为  $D$  的圆柱体侧面刻有螺距为  $h$  的螺旋形凹槽, 槽内有一小球, 如图所示。为使小球能自由落下, 必须要以多大的加速度来拉缠在圆柱体侧面的绳子?

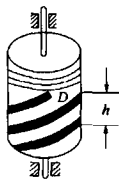


图 1-4-6

7. 缠在线轴上的线绕过滑轮  $B$  后, 以恒定速度  $v_0$  被拉出, 如图 1-4-7 所示, 这时线轴沿水平面无滑动滚动, 求线轴中心点  $O$  的速度随线与水平方向的夹角  $\alpha$  的变化关系。(线轴的内、外半径分别为  $r$  和  $R$ )

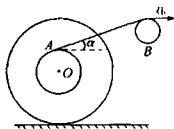


图 1-4-7

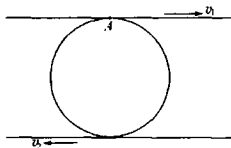


图 1-4-8

8. 如图 1-4-8 所示, 半径为  $R$  的圆柱夹在互相平行的两板之间, 两板分别以速度  $v_1, v_2$  反向运动, 圆柱与板之间无相对滑动。问圆柱上与板接触处的  $A$  点的加速度是多少?

9. 一根长为  $l$  的均匀细杆可以绕通过其一端的水平轴  $O$  在竖直平面内转动, 如图 1-4-9 所示。杆最初处在水平位置, 杆上距  $O$  为  $a$  处放有一小物体(可视为质点), 杆与其上小物体最初均处于静止状态。若此杆突然以匀角速  $\omega$  绕  $O$  轴转动, 问当  $\omega$  取什么值时小物体与杆可以相碰?

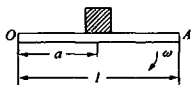


图 1-4-9

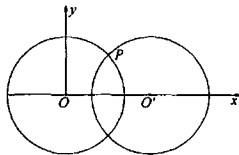


图 1-4-10

10. 如图 1-4-10 所示, 在  $xOy$  平面上有两半径均为  $R$  的圆。左圆圆心固定在坐标原点  $O$ , 右圆圆心  $O'$  沿  $x$  轴以速度  $v_0$  作匀速直线运动,  $t=0$  时两圆心重合, 试求两圆交点之一  $P$  点的速率  $v$  和向心加速度  $a_n$  各与时间  $t$  的关系。

## 第五节 刚体绕定轴的转动



### 【知识要点】

#### 一、刚体

所谓刚体指在外力的作用下,大小、形状等都保持不变的物体或组成物体的所有质点之间的距离始终保持不变.刚体的基本运动包括刚体的平动和刚体绕定轴的转动.刚体的任何复杂运动均可由这两种基本运动组合而成.

#### 二、刚体的平动

刚体的平动指刚体内所作的任一直线始终保持和自身平行,其特点为:刚体上任意两点  $A$  和  $B$  的运动轨迹相似,  $v_A = v_B$ ,  $a_A = a_B$ .因此,刚体的平动可用其内任一质点的运动来代表.

#### 三、刚体绕定轴的转动

刚体绕定轴的转动指刚体绕某一固定轴的转动.其特点是刚体上的各点都在与转轴垂直的平面内做圆周运动,各点做圆周运动的半径可不相等,但各点的半径转过的角度都相同,因而某一时刻刚体上所有各点的角位移  $\varphi$ 、角速度  $\omega$  和角加速度  $\beta$  (理解以上三概念可与直线运动中的位移、速度、加速度相类比)都相同,且有

$$\begin{cases} \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \\ \beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \end{cases}$$

当  $\beta$  为常量时,为匀加速转动,类似于匀加速直线运动.对这类运动有

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\varphi - \varphi_0)$$

式中  $\varphi_0$  为初始时刻的角位移,  $\omega_0$  为初始时刻的角速度.

对于绕定轴转动的刚体上某点的运动情况,有

$$v = \omega R$$

$$a_r = \beta R$$

$$a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

式中  $R$  为该点到轴的距离,  $a_r$  和  $a_n$  分别指切向加速度和法向加速度.

## 【例题分析】

例1 有一车轮绕轮心以角速度  $\omega$  匀速转动, 轮上有一小虫自轮心沿一根辐条向轮心以初速为  $v_0$ , 加速度为  $a$  作匀加速爬行, 求小虫运动的轨迹方程.

解 以轮心为原点, 沿小虫爬行的辐条初始位置方向为半径方向建立极坐标, 则在时间  $t$  内, 车轮转过的角度  $\theta = \omega t$ , 小虫爬过的距离  $\rho = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ . 消去参数  $t$  得

$$\rho = \frac{\theta}{\omega} v_0 + \frac{1}{2} a \frac{\theta^2}{\omega^2}$$

此即小虫运动的轨迹方程.

例2 一飞轮作定轴转动, 其转过的角度  $\theta$  与时间  $t$  的关系式

$$\theta = at + bt^2 - ct^3 \text{ (SI制)}$$

式中  $a, b, c$  都是恒量. 试求飞轮角加速度的表示式及距转轴  $r$  处质点的切向加速度和法向加速度.

$$\begin{aligned} \text{解 角速度 } \omega &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(t + \Delta t) + b(t + \Delta t)^2 - c(t + \Delta t)^3 - (at + bt^2 - ct^3)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a\Delta t + 2bt\Delta t + \Delta t^2 + \Delta t^2 - c(3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3)}{\Delta t} \\ &= a + 2bt - 3ct^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{角加速度 } \beta &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a + 2b(t + \Delta t) - 3c(t + \Delta t)^2 - (a + 2bt - 3ct^2)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2b\Delta t - 3c(2t\Delta t + \Delta t^2)}{\Delta t} = 2b - 6ct \end{aligned}$$

距转轴  $r$  处质点的切向加速度  $a_t = \beta r = 2br - 6crt$ .

法向加速度  $a_n = \omega^2 r = (a + 2bt - 3ct^2)^2 r$ .

例3 时钟从零点开始计时, 在 12 小时内, 长针和短针 (1) 在哪些时刻重合? (2) 在哪些时刻成反向直线? (3) 在哪些时刻成直角?

分析 此题若采用数学列方程来解决较为复杂, 我们利用圆周运动的基本知识较简便.

解 长针的角速度为  $\omega_1 = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/min}$ , 短针的角速度为  $\omega_2 = \frac{2\pi}{12 \times 60} \text{ rad/min}$ .

(1) 两针重合, 即两针转过的角度之差为

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = \omega_1 t - \omega_2 t = 2k\pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 11)$$

$$\text{所以 } t = \frac{2k\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{2k\pi}{2\pi/60 - 2\pi/12 \times 60} = \frac{12 \times 60}{11}k$$

当  $k=0, t=0$ , 即开始时刻;

$$\text{当 } k=1, t_1 = \frac{12 \times 60}{11} = 65 \frac{5}{11} (\text{min}), \text{ 即 } 1:52'27''3;$$

$$\text{当 } k=2, t_2 = \frac{12 \times 60}{11} \times 2 = 130 \frac{10}{11} (\text{min}), \text{ 即 } 2:10'54''5;$$

.....

$$\text{当 } k=11, t_{11} = \frac{12 \times 60}{11} \times 11 = 720 (\text{min}), \text{ 即 } 12\text{h}.$$

可见两针重合共出现 11 次(起始不计在内).

(2) 两针成反向直线即两针夹角为  $(2k-1)\pi$ , 依照上面的算法有

$$t = \frac{(2k-1)\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{12 \times 30}{11}(2k-1)$$

其中  $k=1, 2, 3, \dots$ , 可见共出现 11 次.

(3) 两针互相垂直即夹角为  $(k\pi - \frac{\pi}{2})$ , 则得结果为

$$t = \frac{12 \times 30}{11} \left( k - \frac{1}{2} \right) \quad (k=1, 2, 3, \dots, 22)$$

此现象共出现 22 次.

### 【巩固习题】

1. 如图 1-5-1 所示, 顶杆  $AB$  可在竖直槽  $K$  内滑动, 其下端由凸轮  $M$  推动, 凸轮绕  $O$  轴以匀角速度  $\omega$  转动. 在图示瞬间,  $OA=r$ , 凸轮轮缘与  $A$  接触处, 法线  $n$  与  $OA$  之间夹角为  $\alpha$ , 试问此瞬时顶杆  $AB$  速度?

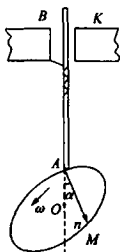


图 1-5-1

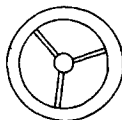


图 1-5-2

2. 当人在电影屏幕上看到汽车向前行驶时,如图 1-5-2 所示的车轮并没有转动时,则汽车运动可能的最小速度约为多少? 已知电影每秒钟放映 24 个画面,转子半径为 0.5m.

3. 椭圆规的 AB 杆,其上端点 A 以匀速  $v_0$  沿 y 轴上的槽向下滑动,端点 B 沿 x 轴上的槽向前移动,求 B 点的速度.

4. 如图 1-5-3 所示,一个圆台上底半径为  $r_1$ ,下底半径为  $r_2$ ,其母线 AB 长为  $l$ ,放置在水平地面上,推动它之后,它自身以角速度  $\omega$  旋转,整体绕 O 点作匀速圆周运动,若接触部分不打滑,求旋转半径 OA 及旋转一周所需的时间.

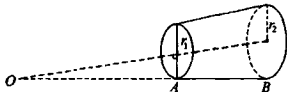


图 1-5-3

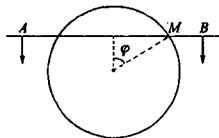


图 1-5-4

5. 如图 1-5-4 所示,直杆 AB 以匀速  $v$  搁在半径为  $r$  的固定圆环上作平动,试求图示位置时,杆与环的交点 M 的速度和加速度.

6. 如图 1-5-5 所示,长度  $l = 10\text{cm}$  的棒在光滑水平面上转动,同时以速度  $v = 10\text{cm/s}$  朝着左侧墙滑动.某时刻棒与墙平行,且两者相距  $L = 50\text{cm}$ ,要使棒与墙平行相碰撞,则棒的角速度应该多大?

7. 图 1-5-6 所示,圆轮在水平面上滚动,  $v_0$  为常数,轮半径为  $R$ ,求轮缘上一点 A 在图示位置时切向与法向加速度.

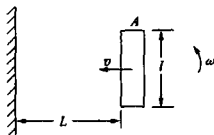


图 1-5-5

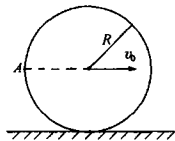


图 1-5-6

8. 在水平地面上匀速行驶的拖拉机前轮直径为 0.8m,后轮直径为 1.25m,两轮的轴的水平距离为 2m,如图 1-5-7 所示.在行驶过程中,从前轮边缘的最高点 A 处水平飞出一小块,0.2s 后后轮边缘的最高点 B 处也水平飞出一小块,这两块石块先后落在地面上同一处,  $g$  取  $10\text{m/s}^2$ ,求拖拉机行驶时的速度大小.



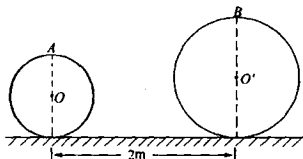


图 1-5-7

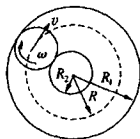


图 1-5-8

9. 如图 1-5-8 所示, 由两个圆环所组成的滚珠轴承内环半径为  $R_2$ , 外环半径为  $R_1$ ; 在两环之间分布的小球半径为  $r$ . 外环以线速度  $v_1$  顺时针方向转动, 而内环则以线速度  $v_2$  顺时针方向转动, 试求小球中心在围绕圆环的中心顺时针转动的线速度  $v$  和小球自转的角速度  $\omega$ . 设小球与圆环之间无滑动发生.

10. 一木板从空中下落, 发现在某时刻, 板上  $a$  点速度和  $b$  点速度相同,  $v_a = v_b = v$ , 且均位于板面上; 同时还发现板上  $c$  点速度比速度  $v$  大一倍,  $c$  点到  $a$  和  $b$  两点距离等于  $a$  和  $b$  两点之间距离, 则板上哪些点的速度等于  $3v$ ?

## 第六节 综合训练

### 【例题分析】

**例 1** 一人站在地面上以初速  $v_1$  向上抛出一小球, 经过时间  $t_0$  后 ( $t_0 \leq \frac{2v_1}{g}$ ), 又以另一初速  $v_2$  向上抛出另一小球. 问两球在空中能否相遇? 若能相遇则在何处相遇?

**解** 这是典型的相遇问题, 宜用坐标分析的方法来求解, 因为两个小球的相遇就意味着它们的坐标相同.

选地面为参照系,  $x$  轴向上为正, 并取第一个小球向上抛出时为计时开始, 则第一小球的运动学方程为  $x_1 = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$  ①

第二个小球的运动学方程为  $x_2 = v_2(t - t_0) - \frac{1}{2} g(t - t_0)^2$  ②

两式中的  $x_1, x_2$  代表  $t$  时刻两个小球的坐标, 它们相遇时坐标必然相等, 即  $x_1 = x_2$ . 令  $x_1 = x_2$ , 可以求出相遇的时刻  $t$ . 由  $x_1 = x_2$  得

$$v_1 t - \frac{1}{2} g t^2 = v_2(t - t_0) - \frac{1}{2} g(t - t_0)^2$$

$$\text{即 } t = \frac{v_2 t_0 + \frac{1}{2} g t_0^2}{v_2 - v_1 + g t_0} \quad (3)$$

这个解答的意思是说,在第一小球抛出  $t$  时间后,它们相遇.但  $t$  不可能是负值, $t$

$$\text{必须大于 } 0, \text{ 即 } \frac{v_2 t_0 + \frac{1}{2} g t_0^2}{v_2 - v_1 + g t_0} > 0 \quad (4)$$

这个分数的分子按题设均为正值,现在要讨论的只是分母,应有

$$v_2 - v_1 + g t_0 > 0 \quad (5)$$

第一种情况:  $v_2 > v_1$ , 即第二小球的上抛初速度大于第一小球的上抛初速度. 这种情况下, 因为  $t_0 > 0$ , 所以必定满足 (5), 即会相遇. 设相遇处的坐标为  $x$ , 将从 (3) 求出的相遇时刻  $t$  代入  $x_1$  或  $x_2$  中, 即可求出  $x$ :

$$x = v_1 \frac{v_2 t_0 + \frac{1}{2} g t_0^2}{v_2 - v_1 + g t_0} - \frac{1}{2} g \left( \frac{v_2 t_0 + \frac{1}{2} g t_0^2}{v_2 - v_1 + g t_0} \right)^2 \quad (6)$$

到此, 问题并未完全解决, 我们还要知道他们相遇是在第一小球的上升段还是下降阶段. 求出第一小球的速度  $v'_1 = v_1 - g t$ , 用上述求出的相遇时间  $t$  代入, 若算出  $v'_1 > 0$ , 则在第一小球的上升阶段相遇. 若算出  $v'_1 < 0$ , 则在下降阶段相遇. 至于第二个小球, 用相遇的时间  $t$  代入, 可算出  $v_2 > 0$ , 所以恒在第二小球的上升阶段相遇.

第二种情况:  $v_2 = v_1 = v_0$ , 即第二小球的上抛初速度等于第一小球的上抛初速度.

$$\text{这时, 相遇时刻 } t = \frac{v_0}{g} + \frac{t_0}{2} \quad (7)$$

$$\text{因为这 } t \text{ 恒大于 } 0, \text{ 所以一定会相遇, 相遇坐标 } x = \frac{1}{2} \left( \frac{v_0^2}{g} - \frac{g t_0^2}{4} \right) \quad (8)$$

由题设  $t_0 \leq \frac{2v_0}{g}$ , 所以  $x$  恒为正值.

按照常识判断, 相遇处应在第二小球上升而第一小球下降的阶段, 以下证明这一点.

因第一小球的速度  $v'_1 = v_1 - g t$ , 以相遇时的  $t$  代入, 有

$$v'_1 = v_1 - g \left( \frac{v_1}{g} + \frac{t_0}{2} \right) = -\frac{g t_0}{2} \quad (9)$$

$$\text{为负值, 所以在下降阶段. 而第二小球的速度 } v'_2 = v_2 - g(t - t_0) \quad (10)$$

$$\text{再以 } t \text{ 代入有 } v'_2 = v_2 - g \left( \frac{v_2}{g} + \frac{t_0}{2} - t_0 \right) = v_2 - v_2 + g t_0 - \frac{g t_0}{2} = \frac{g t_0}{2} \quad (11)$$

为正值, 所以在上升阶段.

第三种情况:  $v_2 < v_1$ , 即第二小球上抛的初速度小于第一小球的上抛初速度. 要求相遇时  $t > 0$ , 即  $v_2 - v_1 + g t_0 > 0$  (12)

$$t_0 > \frac{v_1 - v_2}{g}$$

在这种情况下,第二小球是无法在第一小球的上升阶段追上它的,所以相遇只能在第一小球的下降阶段.

$$\text{整理⑥式得 } x = \frac{(2v_1 - gt_0)(2v_2 + gt_0)}{4(v_2 - v_1 + gt_0)^2} \left( v_2 - v_1 + \frac{1}{2}gt_0 \right) t_0 \quad (13)$$

这样,如  $v_2 < v_1 - \frac{1}{2}gt_0$  (14)

则  $x < 0$ . 这就是说,相遇地点在地面以下.

当然,如果不允许进入地面以下,则⑬意味不相遇.

**例2** 从离地面的高度为  $h$  的固定点  $A$ , 将甲球以速度  $v_0$  抛出, 抛射角为  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . 若在  $A$  点前方适当的地方放一质量非常大的平板  $OC$ , 让甲球与平板做完全弹性碰撞, 并使碰撞点与  $A$  点等高, 如图 1-6-1, 则当平板的倾角  $\theta$  为恰当值时 ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ), 甲球恰好能回到  $A$  点. 另有一小球乙, 在甲球自  $A$  点抛出的同时, 从  $A$  点自由落下, 与地面做完全弹性碰撞. 试讨论  $v_0, \alpha, \theta$  应满足怎样的一些条件, 才能使乙球与地面碰撞一次后与甲球同时回到  $A$  点.

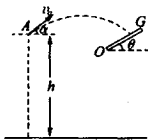


图 1-6-1

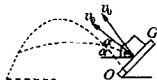


图 1-6-2

**解** 甲球从  $A$  点抛出时的抛射角为  $\alpha$ , 速度为  $v_0$ . 因为碰撞点与  $A$  点等高, 球与板的碰撞是弹性的, 板的质量又很大, 根据机械能守恒定律可知, 球与板碰撞前的速度与碰撞后的速度都等于  $v_0$ . 设碰撞后甲球从板弹回时的抛射角为  $\alpha'$ , 如图 1-6-2 所示.  $A$  点与碰撞之间的距离即为射程  $l$ , 若甲球又回到  $A$  点, 则有

$$l = v_0^2 \sin 2\alpha / g = v_0^2 \sin 2\alpha' / g \quad (1)$$

即  $\sin 2\alpha' = \sin 2\alpha$ , 由此得

$$\alpha' = \alpha \quad (2)$$

或

$$\alpha' = (\pi/2) - \alpha \quad (3)$$

$\alpha' = \alpha$ , 表示甲球射到平板时速度的方向与它从平板反弹时速度的方向分别与水平线的夹角互余, 反弹后, 甲球沿另一条路径返回  $A$  点, 因此有  $\alpha + \theta = \pi/2$ , 即

$$\theta = (\pi/2) - \alpha \quad (4)$$

$\alpha' = (\pi/2) - \alpha$ , 表示甲球射到平板时速度的方向与它从平板反弹出时速度的方向相反, 故甲球必沿板的法线方向射向平板, 反弹后, 甲球沿原来的路径返回 A 点, 由图中的几何关系可知  $\alpha' + (\alpha - \alpha')/2 + \theta = \pi/2$  (5)

由③、⑤两式, 得  $\theta = \pi/4$  (6)

下面分别讨论以上两种情况下, 甲球乙球同时回到 A 点应满足的条件.

(1)  $\alpha' = \alpha, \theta = (\pi/2) - \alpha$ , 即 A 球沿原路径回到 A 点的情形.

设甲球从 A 点抛出, 与 OG 板碰撞, 到沿原路径回到 A 点共经历的时间为  $t_1$ , 则有

$$t_1 = 2v_0 \sin \alpha / g + 2v_0 \sin \alpha' / g = 4v_0 \sin \alpha / g \quad (7)$$

设乙球从 A 点自由落下, 与地面发生一次碰撞, 再回到 A 点共经历的时间为  $t_2$ , 则有  $t_2 = 2\sqrt{2h/g}$  (8)

两球在 A 点相遇, 要求  $t_1 = t_2$ , 则  $4v_0 \sin \alpha / g = 2\sqrt{2h/g}$ , 即

$$\sin \alpha = (1/v_0) \sqrt{gh/2} \quad (9)$$

或  $\alpha = \arcsin \left[ (1/v_0) \sqrt{gh/2} \right]$  (10)

因  $\sin \alpha < 1$ , 由⑨式得

$$v_0 > \sqrt{gh/2} \quad (11)$$

当  $v_0$  满足⑪式, 甲球的抛射角  $\alpha$  满足⑩式, 平板的倾角  $\theta$  满足④式时, 甲球才能沿原路返回 A 点并与乙球相遇.

(2)  $\alpha' = (\pi/2) - \alpha, \theta = \pi/4$ , 即甲球与 OG 板碰撞后, 沿另一条路径回到 A 点的情形. 设甲球自 A 点抛出, 经与平板碰撞又回到 A 点经历的总时间为  $t'_1$ , 则有

$$t'_1 = 2v_0 \sin \alpha / g + 2v_0 \sin \alpha' / g = 2v_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) / g \quad (12)$$

设乙球自 A 点下落回到 A 点经历的时间为  $t'_2$ , 则有  $t'_2 = 2\sqrt{2h/g}$  (13)

两球在 A 点相遇, 要求  $t'_1 = t'_2$ ,  $2v_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) / g = 2\sqrt{2h/g}$

或  $\sin(\alpha + \pi/4) = (1/v_0) \sqrt{gh}$  (14)

$$\alpha = \arcsin \left[ (1/v_0) \sqrt{gh} \right] - \pi/4 \quad (15)$$

因  $1 < \alpha < \pi/2$ , 故有  $1 \geq \sin(\alpha + \pi/4) > \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$  (16)

结合⑬式, 得  $\sqrt{2gh} > v_0 \geq \sqrt{gh}$  (17)

当  $v_0$  满足⑰式, 甲球的抛射角  $\alpha$  满足⑮式, 平板的倾角  $\theta$  满足⑥式, 甲球将沿另一条路径回到 A 点, 同时与乙球相遇.

综上所述讨论, 结论为:

当  $v_0 > \sqrt{gh/2}$ , 且当  $\alpha = \arcsin \frac{1}{v_0} \sqrt{gh/2}, \theta = (\pi/2) - \alpha$ , 甲球沿原路径返回 A 点的同时, 乙球也回到 A 点;

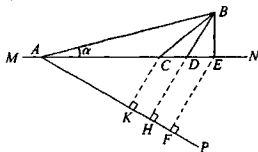
当  $\sqrt{2gh} > v_0 \geq \sqrt{gh}$ , 且  $\alpha = \arcsin \frac{1}{v_0} \sqrt{gh} - \pi/4$ ,  $\theta = \pi/4$ , 甲球还可沿另一路径回到 A 点, 这时乙球也正好回到 A 点.

**例 3** 设湖岸  $MN$  为一-直线, 有一小船自岸边的 A 点沿与湖岸成  $\alpha = 15^\circ$  角方向匀速向湖中央驶去. 有一人自 A 点同时出发, 他先沿岸走一段再入水中游泳去追船. 已知人在岸上走的速度为  $v_1 = 4\text{m/s}$ , 在水中游泳的速度为  $v_2 = 2\text{m/s}$ . 试问船速至多为多少, 此人才能追上船?

**解法一** 由等效法求解

如图 1-6-3, 设人在 B 点刚好追上船, 则人可能走很多途径, 如  $A \rightarrow C \rightarrow B$ ,  $A \rightarrow D \rightarrow B$ ,  $A \rightarrow E \rightarrow B$  等等, 在这些路径中, 费时最少者即对应着允许的最大船速. 如图, 在湖岸这边作  $\angle NAP = 30^\circ$ , 自 C、D、E 各点分别向 AP 引垂线 CK、DH (设 BDH 刚好为一-直线) 和 EF. 设想图中 MN 的下侧也变成是湖水区域, 则人由 K 点游泳至 C 点的时间与人在岸上由 A 点走到 C 点的时间是相等的 (因为  $v_1 = 2v_2$ , 而  $AC = 2KC$ ), 故人按题给情况经路径  $A \rightarrow C \rightarrow B$  所用的时间和假想人全部在水中游过路径  $K \rightarrow C \rightarrow B$  等时. 同理, 与上述的另两条实际路径等时的假想路径是  $H \rightarrow D \rightarrow B$  和  $F \rightarrow E \rightarrow B$ . 由于在这些假想路径中, 速度大小都一样, 故通过的路径最短费时最少, 显然通过直线  $HDB$  费时最少.

图 1-6-3



由以上分析知, 人沿等效路径  $HDB$  刚好在 B 点追上船时, 对应着允许船速的最大值, 设其为  $v$ , 则有  $\frac{AB}{v} = \frac{BH}{v_2}$ .

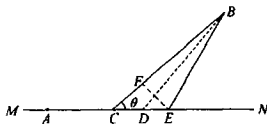
由于  $\triangle AHB$  为等腰直角三角形, 故  $AB = \sqrt{2}BH$ , 故得

$$v = \sqrt{2}v_2 = 2\sqrt{2}(\text{m/s})$$

**解法二** 由微元法求解

如图 1-6-4, 设人在 B 点刚好能追上船, 且在人到达 B 点的各种实际路径中, 以自 D 处入水游泳所用的总时间最少, 则若自 D 点左侧附近的某点 C 入水, 必在 D 点右侧有一入水点 E 与之对应, 使得在 C 点和 E 点入水两种情况下刚好追上船所用的总时间相等. 在 BC 段上取  $BF = BE$ , 则应有人走 CE 段和游 CF 段所用的时间相等, 即  $\frac{CE}{v_1} = \frac{CF}{v_2}$ .

图 1-6-4



当 C 点无限靠近 D 点时, E 点必同时向 D 点靠拢, 由图可见此时将近似有  $EF \perp$

BC, 故  $\cos\theta = \frac{CF}{CE} = \frac{1}{2}$ , 所以  $\theta = 60^\circ$ . 由于此时 C 点是无限靠近 D 点的, 故 BC 与 BD 接近重合, 即  $\angle BDN = \theta = 60^\circ$ .

由上得出: 当人自某点入水沿与岸成角  $\theta = 60^\circ$  方向游泳刚好追到船时, 此情况下对应的船速为人能追上船的最大允许速度, 设其为  $v$ , 如图 1-6-5, 过相遇点 B 作  $BK \perp BD$  交 MN 于 K, 因为  $\theta = 60^\circ$ , 所以  $DK = 2DB$ .

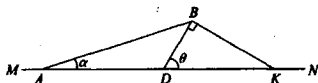


图 1-6-5

又由于  $v_1 = 2v_2$ , 则人游 DB 段与走 DK 段的距离所用的时间相等. 故人自出发到在 B 点追上船的时间等于他由 A 点走到 K 点的时间, 即  $\frac{AB}{v} = \frac{AK}{v_1}$ .

在  $\triangle ABK$  中, 由正弦定理有  $\frac{AB}{AK} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 135^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 所以

$$v = \frac{v_1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ (m/s)}$$

注: 本题我们用等效法和微元法进行求解, 实际上本题还可用图像法、演绎法、极值法、比较法(应用费马原理)等进行求解, 其中应用光学中的费马原理进行求解本题将更简捷.

高中物理竞赛培优教程

【精选习题】

- 如图 1-6-6 所示的滑轮组, 物体 1 和 2 分别具有向下的加速度  $a_1$  和  $a_2$ , 物体 3 具有向上的加速度  $a_3$ , 求  $a_1, a_2, a_3$  之间的关系.
- 图 1-6-7 中细杆 AB 长为  $l$ , 端点 A、B 分别被约束在 x 轴和 y 轴上运动, 试问 (1) 杆上与 A 相距  $al$  ( $0 < a < 1$ ) 的 P 的运动轨迹; (2) 如果图中  $\theta$  角和  $v_A$  为已知, 那么 P 点的 x 和 y 方向分运动速度  $v_{Px}$  和  $v_{Py}$  是多少?
- 散开的旋转木马离转动轴距离为  $r$ , 以角速度  $\omega$  转动, 人站在木马上. 下雨了, 雨滴以速度  $v_0$  竖直下落. 试问人应该怎样支撑着遮雨伞才能够最有效地避开雨?
- 从离地面上同一高度  $h$ 、相距  $l$  的两处同时各抛出一个石块: 一个以速度  $v_1$  竖直向上抛; 另一个石块以速度  $v_1$  水平抛出. 求这两个石块在运动过程中, 它们之间最短距离和达到最短距离所需的时间. (两个石块的初速度位于同一竖直平面内)
- 在光滑的水平面上有一个深为  $H$ 、半径为  $R$  的圆柱形的坑, 一个小球沿着光滑水平面以恒定速度  $v_0$  运动到坑的边缘的一点 A, 此

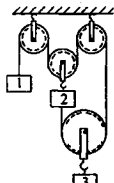


图 1-6-6

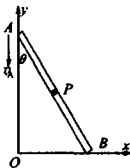


图 1-6-7

此时此刻小球的速度矢量与坑的直径成  $\alpha$  角,如图 1-6-8(a)所示.试确定  $R, H, v_0$  和  $\alpha$  之间有怎样的相互关系,小球与坑底作弹性碰撞后才能跳出此坑?说明:在球与坑底作弹性碰撞的情况下,速度的值不变,同时反射角等于入射角,如图 1-6-8(b)所示.

6. 一个半径为  $R$  的半圆柱体沿水平方向向右做加速度为  $a$  的匀加速运动,在半圆柱体上搁置一根竖直杆,此杆只能沿竖直方向运动,如图 1-6-9 所示.当半圆柱体的速度为  $v$  时,杆与半圆柱体接触点  $P$  与柱心的连线与竖直方向的夹角为  $\theta$ .求此时竖直杆运动的速度和加速度.

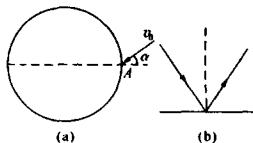


图 1-6-8

7. 一辆邮车以  $v = 10\text{m/s}$  的速度沿平直公路匀速行驶.在离此公路  $d = 50\text{m}$  处有一个邮递员,当他与邮车的连线和公路的夹角  $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1}{4})$  时开始沿直线匀速奔跑,如图 1-6-10 所示.已知他奔跑的最大速度为  $5\text{m/s}$ ,试问:(1)他应向什么方向跑,才能尽快与邮车相遇?(2)他至少以多大的速度奔跑,才能与邮车相遇?

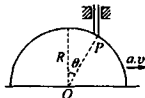


图 1-6-9

8. 一只苍蝇在高  $H$  处,以速度  $v$  平行桌面飞行.在某一时刻发觉就在它的正下方有一滴蜂蜜,苍蝇借助翅膀可以向任何方向加速,但加速度大小不超过  $a$ .试求苍蝇能够飞到蜂蜜所在处的最短时间.(设想问题发生在宇宙空间,重力不存在)

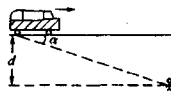


图 1-6-10

9. 公园的转椅以恒定的角速度  $\omega$  绕其竖直对称轴在水平面内做匀速运动,如图 1-6-11,转椅上的人以相对转椅  $v$  的速度平抛一小球,为使小球能击中转椅架底部中心点  $O$ ,试求  $v$  的大小和方向.已知小球抛出点比  $O$  点高  $h$ .与竖直转轴的距离为  $R$ .

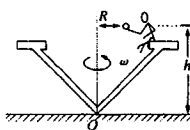


图 1-6-11

10. 图 1-6-12 中,  $AC, BD$  两杆以角速度  $\omega$  分别绕相距为  $l$  的  $A, B$  两面定轴在同一竖直面上转动,转动方向如图均为逆时针方向.小环  $M$  套在两杆上,  $t = 0$  时,如图  $\alpha = \beta = 60^\circ$ ,试求以后任一时刻  $t, M$  运动速度的大小和加速度大小(在  $M$  落地以前这段时间以内).

11. 弹性小球从高  $h$  处自由落下,落到与水平面成  $\theta$  角的长斜面上,碰撞后以同样大的速度反弹回来.求:(1)每个弹回点(第一点和第二点,第二点和第三点, ..., 第  $n$  点和第  $(n+1)$  点)间的距离:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ; (2)当斜面以匀速度  $v$  沿竖直方向向上运动时的  $x_1$  的数值.

12. 如图 1-6-13 所示,湖中有一小岛  $A, A$  与直湖岸的距离为  $d$ ,湖岸边一点  $B, B$  沿湖岸方向与  $A$  点的距离为  $l$ ,一人自  $A$  点出发,要到达  $B$  点.已知他在水中游泳的速

度为  $v_1$ ，在岸上行走的速度为  $v_2$ ，且  $v_1 < v_2$ ，要求他由  $A$  至  $B$  所用的时间最短，问此人应当如何选择其运动路线。

13. 汽艇加足油后以最大功率在静水中航行的速度为  $u$ ，可航行的距离为  $l$ ，湖水流向为东偏北  $\alpha$  角，流速为  $v$ 。要求汽艇以最大功率在湖中向东偏北  $\beta$  角的方向驶离码头，并要它沿相同的路线(相对于岸)驶回，求此汽艇可驶离码头的最远距离。

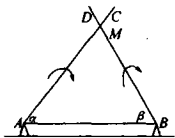


图 1-6-12

14. 如图 1-6-14 所示，一小球以速度  $v_0$  水平抛射到光滑斜面上，斜面倾角为  $\theta$ ，小球与斜面发生弹性碰撞，求小球第二次与斜面碰撞到第一次碰撞点之间的距离  $s$ 。不计空气阻力。

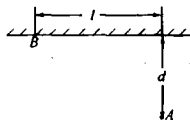


图 1-6-13

15. 在某铅垂面上有一光滑的直角三角形细管轨道，光滑小球从顶点  $A$  沿斜边轨道自静止出发自由滑到端点  $C$  需时间恰好等于小球从  $A$  由静止出发自由地经  $B$  滑到  $C$  所需时间，如图 1-6-15 所示，设  $AB$  为铅直轨道，转弯处速度大小不变，转弯时间忽略不计，在此直角三角形范围内构建一系列如图 1-6-15 中虚线所示的光滑轨道，每一轨道由若干铅直和水平的部分连接而成，各转弯处性质都和  $B$  点相同，各轨道均从  $A$  点出发到  $C$  点终止，且不超出  $\angle ABC$  的边界，试求小球在各条轨道中，从静止出发自由地由  $A$  到  $C$  所需时间的上限与下限之比。

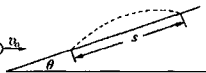


图 1-6-14

高中物理竞赛培优教程

16. 在倾角  $\alpha = \pi/6$  的雪坡上举行跳台滑雪比赛。如图 1-6-16 所示，运动员从坡上方  $A$  点开始下滑，到起点  $O$  时借助设备和技巧，保持在该点的速率而以与水平成  $\theta$  角的方向起跳，最后落在坡上  $B$  点，坡上  $OB$  两点距离  $l$  为此项运动的记录。已知  $A$  点高于  $O$  点， $h = 50\text{m}$ ，忽略各种阻力、摩擦，求最远可跳多少米？此时起跳角为多大？

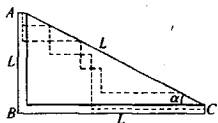


图 1-6-15

17. 速率  $30\text{km/h}$  的两辆火车，在相挨并行的轨道上相向而行。当两火车相距  $60\text{km}$  的时候，一只每小时能飞  $60\text{km}$  的鸟，离开一车直向另一车飞去，当鸟到达另一车时就立即飞回第一车，以后就继续这样来回飞。问：(1) 在两车相遇以前这鸟能够完成从一车到另一车飞行几次？(2) 鸟一共飞行多少距离？

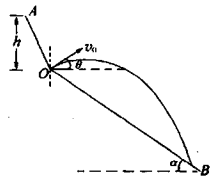
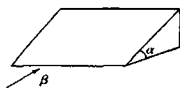


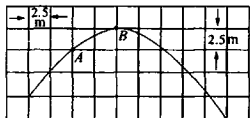
图 1-6-16

18. 如图 1-6-17(a) 所示，冰球沿与冰山底边成  $\beta = 60^\circ$  的方向滚上山，上山初速度  $v_0 = 10\text{m/s}$ ，它在冰山上痕迹已部分消失，尚存痕迹如图 1-6-17(b) 所示，求冰山与水平面的夹角  $\alpha$  为多少？(冰球运动平稳，球与冰面摩擦不计)





(a)



(b)

图 1-6-17

19. 一盏灯挂在离地板高  $l_2$ , 天花板下面  $l_1$  处. 灯泡爆破, 所有碎片以同样大小的初速度  $v$  朝各个方向飞去, 求碎片落到地板上的半径. (可以认为碎片与天花板的碰撞是弹性的, 与地板的碰撞是完全弹性的, 碎片碰不到墙)

20. 一根不可伸长的细绳, 穿上一粒质量为  $m$  的珠子 (视为质点), 绳下端固定在  $A$  点, 上端系在轻质小环上, 小环可沿固定的水平细杆滑动 (小环的质量及与细杆摩擦皆忽略不计). 细杆与  $A$  在同一竖直平面内, 开始时珠子紧靠小环, 绳被拉直, 如图 1-6-18. 已知绳长为  $l$ ,  $A$  点到杆的距离为  $h$ , 绳能承受的最大张力为  $T_0$ , 珠子下滑过程中到达最低点前绳子被拉断, 求细绳被拉断时珠子的位置和速度的大小. (珠子与绳子之间无摩擦)

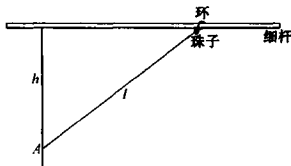


图 1-6-18

### 问题与讨论 图线的应用(1)

在运动学中, 在许多情况下仅用一般的方法解题很难收到好的效果时, 可用  $s-t$ 、 $v-t$  图线来解题, 尤其遇到比较问题, 相遇问题等时, 用图线来解题非常有效, 该过程具有物理过程直观、解题步骤简捷、计算简便等特点.

例 1 光滑斜面高度相同, 甲乙两斜面总长度相同, 乙由两部分组成, 如图 1-7-1, 若将两个相同的小球从两斜面的顶端同时释放, 不计拐弯处的能量损失, 问哪一个先到达底端?

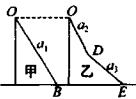


图 1-7-1

解 设  $OB$ ,  $OD$ ,  $DE$  段的加速度分别为  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , 据机械能守恒定律有  $v_B = v_E$ , 已知  $OB = OD + DE$ , 故在  $v-t$  图像中, 速度图像与时间轴所围成的面积应相等, 如图 1-7-2 所示, 有以下三种情况:

第(2)、(3)两种情况是不可能的, 第(2)种:  $s_{ODEC}$  明显大于  $s_{OBC}$ ; 第(3)种: 只须将  $s_{OAB}$  移到  $AB$  与  $CE$  重合, 如图(3'), 则显然  $s_{OA'B'}$  小于  $s_{ODEC}$ , 故这种情况也不可能. 只有第(1)种  $t_乙 < t_甲$  是可能的, 故乙先到底端. 该题中速度图线(与时间轴所围成的面积等于路程.

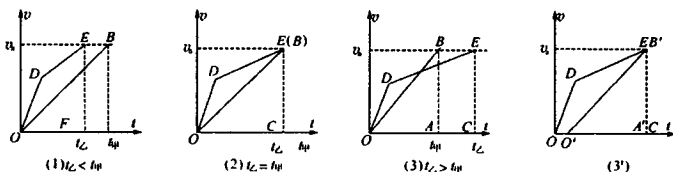


图 1-7-2

**例 2** 摩托车以速度  $v_1$  沿平直公路行驶, 突然发现正前方  $s$  处, 有一辆汽车正以  $v_2 < v_1$  的速度开始减速, 加速度大小为  $a_2$ , 为了避免发生碰撞, 摩托车也同时减速, 求其加速度至少得多少?

**解** 两车都做匀减速直线运动, 不相碰撞的临界状态为: 当汽车经时间  $t_2 = \frac{v_2}{a_2}$  停下时, 摩托车正好经同样时间靠汽车停下, 这时, 两者的  $v-t$  图线如图 1-7-3(a) 所示, 其

$$\text{相对位移为 } \Delta s = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)t_2 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)\frac{v_2}{a_2}.$$

当两车间距较小, 即  $s < \Delta s$  时, 两车不发生碰撞的条件为相对速度为零, 即有共同速度  $v$  时,  $\Delta s < s$  (图 1-7-3(b)), 即  $s > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2(a_1 - a_2)}$ . 这时, 摩托车的加速度应为  $a_1 > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2s} + a_2$ .

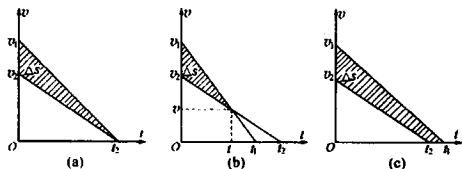


图 1-7-3

当两车间距较大, 即  $s \geq \Delta s$  时, 汽车经时间  $t_2 = \frac{v_2}{a_2}$  先停下, 摩托车经  $t_1 = \frac{v_1}{a_1}$  后停下, 两车不发生碰撞的条件 (图 1-7-3(c))—— $\Delta s \leq s$ , 即

$$s \geq \frac{1}{2}v_1 t_1 - \frac{1}{2}v_2 t_2 = \frac{v_1^2}{2a_1} - \frac{v_2^2}{2a_2}$$

这时, 摩托车的加速度应为  $a_1 \geq \frac{v_1^2 a_2}{v_2^2 + 2a_2 s}$ .

注: 在上述分析中, 由于综合地应用了图像法和相对运动法, 不仅简便, 而且防止了

漏解. 这种思维的灵活性、简捷性和严密性, 都是创造性思维的基本特征.

**例 3** 一质点沿直线运动, 其速度随时间变化的关系图像恰好是与坐标轴相切的  $\frac{1}{4}$  圆弧, 如图 1-7-4(a) 所示, 则质点在这 20s 内的位移  $s$  为多少? 质点在 10s 的加速度  $a$  为多少?

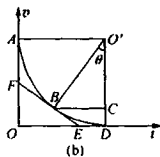
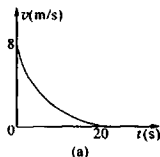


图 1-7-4

**解** 物体在 20s 内的位移是速度图线与两坐标轴围成的图形面积, 但在数值计算时, 应注意图中弧的半径  $R$  在表示速度和表示时间方面所代表的数值不一样, 若仅从图形考虑, 则  $s = R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2$ .

考虑到物理意义, 则  $s = 8 \times 20 - \frac{1}{4}\pi \times 20 \times 8 = 34.4(\text{m})$

图 1-7-4(b) 所示, 若仅从过 10s 对应的圆弧上的  $B$  点作切线  $FE$ , 设圆弧的半径为  $R$ , 图形方面考虑, 易得  $\sin\theta = BC/O'B = \left(\frac{R}{2}\right)/R = 1/2$ . 所以

$$\theta = 30^\circ$$

由图中几何关系还可知道,  $\triangle EOF \sim \triangle O'CB$ , 故

$$\tan\theta = BC/O'C = OF/OE$$

若结合图形反映的物理意义, 显然  $BC$  和  $OF$  表示的是速度,  $O'C$  和  $OE$  则表示的

是时间, 故  $a = \frac{BC}{O'C} = \frac{\left(\frac{R}{2}\right) \cdot \left(\frac{8}{R}\right)}{\left(R\cos 30^\circ\right) \cdot \left(\frac{20}{R}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{15}(\text{m/s}^2)$

**注:** 本题是一道构思独特, 设计巧妙的运动学问题, 着重考查学生对速度图像的理解, 解决此题的关键是区分清楚图形中的哪些线段是表示速度的, 哪些线段是表示时间的, 并能准确地将其转换成速度及时间的大小, 如果不能准确地把握这一点而将图线与大小混为一谈, 将很难解出此题的正确结果.

**例 4** 一湖的南北两岸各有一码头  $A$  和  $B$ , 有甲、乙两船分别于  $A$ 、 $B$  间往返穿梭匀速航行, 且船每到一码头立即返航 (不计船在码头的停靠的时间). 某刻, 甲和乙刚好同时分别自  $A$  和  $B$  出发. 此后, 两船的第一次相遇点距  $A$  300m, 第二次相遇点距  $B$

200m, 求湖宽多少? 自第一次相遇后, 甲船至少还要航行多少航程; 这两船才会在第一次相遇的位置同样地相遇?

分析 两船的两次相遇有几种可能情况, 这可以从图 1-7-5 中所示的两船的位置—时间图像上看出: 其中图线 4 表示乙船的位置—时间图线; 图线 1 表示甲船速度比乙船速度大很多时甲船的位置—时间图线, 此时两船的两次相遇都是在乙船尚未到达

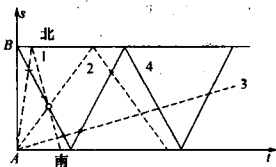


图 1-7-5

南岸时(两船的相遇点在图中以“+”表示); 图线 2 表示两船速度大小相差不多时甲船的位置—时间图线, 此时两船均在第一次到达对岸又返航后才发生第二次相遇(相遇点在图中以“o”表示); 图线 3 表示甲船速度比乙船速度小很多时甲船的位置—时间图线, 此时两船的两次相遇都是在甲船尚未第一次到达北岸时(相遇点在图中以“•”表示). 对于本题, 应根据上述三种情况分别列式求解.

设甲、乙两船各自在湖中往返一次所用的时间分别为  $T_{甲}$  和  $T_{乙}$ , 则两船第一次相遇后, 经历时间  $t = nT_{甲}$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

时, 甲将和第一次“同样地”出现在两船第一次相遇的位置. 经历时间

$$t' = n'T_{乙} \quad (n' = 1, 2, \dots)$$

时, 乙将和第一次“同样地”出现在两船第一次相遇的位置. 显然, 若  $t = t'$  时, 则甲和乙便和第一次“同样地”相遇了, 而连续两次这样相遇中间的时间间隔应为  $T_{甲}$  和  $T_{乙}$  的最小公倍数  $T$ .

解 设湖宽为  $x$ , 以  $a$  表示两船第一次相遇时与南岸的距离,  $b$  表示两船第二次相遇时与北岸的距离, 以  $v_{甲}$  和  $v_{乙}$  分别表示甲船和乙船的航速, 同时考虑到两船的航速各自恒定, 故其自出发至第一次相遇的航程与其自出发至第二次相遇的航程之比, 对于两船来说, 这一比值应该相等. 由此, 可对上述的三种可能情况分别解答如下:

(1) 对于图线 1 所示情况, 应有  $\frac{a}{x+b} = \frac{x-a}{b}$ . 将  $a = 300\text{m}$ ,  $b = 200\text{m}$  代入上式并整理之, 可得  $x^2 - 100x - 120000 = 0$ , 解之得  $x = 400(\text{m})$

$$\text{所以 } \frac{v_{甲}}{v_{乙}} = \frac{a}{x-a} = \frac{3}{1}$$

$$\text{则 } \frac{T_{甲}}{T_{乙}} = \frac{v_{乙}}{v_{甲}} = \frac{1}{3}$$

可见  $T_{甲}$ 、 $T_{乙}$  的最小公倍数即为  $3T_{甲}$ , 则两船第一次相遇后, 甲船需再航行

$$s_1 = 3 \times 2 \times 400 = 2400(\text{m})$$

两船又和第一次“同样地”相遇.

(2) 对于图线 2 所示的情况, 应有  $\frac{a}{x+b} = \frac{x-a}{2x-b}$ . 将  $a, b$  值代入并整理有

$$x^2 - 700x = 0$$

所以  $x = 700(\text{m})$

由此可以得到  $\frac{v_{\text{甲}}}{v_{\text{乙}}} = \frac{a}{x-a} = \frac{3}{4}$

故有  $\frac{T_{\text{甲}}}{T_{\text{乙}}} = \frac{v_{\text{乙}}}{v_{\text{甲}}} = \frac{4}{3}$

可见  $T_{\text{甲}}, T_{\text{乙}}$  的最小公倍数为  $3T_{\text{甲}}$ . 则两船第一次相遇后, 甲船再航行

$$s_2 = 3 \times 2 \times 700 = 4200(\text{m})$$

两船又和第一次“同样地”相遇.

(3) 对于图线 3 所示的情况有  $\frac{a}{x-b} = \frac{x-a}{2x-b}$ . 将  $a, b$  值代入并整理有

$$x^2 - 1100x + 120000 = 0$$

解之得  $x = (550 + 50\sqrt{73}) \approx 977(\text{m})$

所以  $\frac{v_{\text{甲}}}{v_{\text{乙}}} = \frac{a}{x-a} = \frac{300}{250 + 50\sqrt{73}}$

则  $\frac{T_{\text{甲}}}{T_{\text{乙}}} = \frac{v_{\text{乙}}}{v_{\text{甲}}} = \frac{5 + \sqrt{73}}{6}$

由于  $T_{\text{甲}}$  与  $T_{\text{乙}}$  的比值为无理数, 故两者间无最小公倍数, 即在这种情况下, 两船不可能再有和第一次“同样地”相遇的情况发生.



### 【巩固习题】

1. 一物体做加速直线运动, 依次通过  $A, B, C$  三点,  $AB = BC$ , 物体在  $AB$  段的加速度为  $a_1$ , 在  $BC$  段的加速度为  $a_2$ , 且物体在  $B$  点的速度  $v_B = \frac{v_A + v_C}{2}$ , 则有 ( )

A.  $a_1 > a_2$

B.  $a_1 < a_2$

C.  $a_1 = a_2$

D. 不能确定

2. 质点的加速度情况如图 1-7-6, 质点的初速为零, 求经过 1min 时间质点所经过的位移.

3. 一质点沿  $x$  轴做直线运动, 其速度  $v$  随时间  $t$  的变化关系如图 1-7-7 所示. 设  $t = 0$  时, 质点位于坐标原点  $O$  处. 试根据  $v-t$  图分别尽可能准确地画出:

(1) 表示质点运动的加速度  $a$  随时间  $t$  变化关系的  $a-t$  图; (2) 表示质点运动的位移  $x$  随时间  $t$  变化关系的  $x-t$  图.

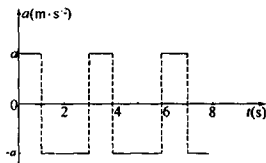


图 1-7-6

4. 甲乙两人在长为  $84\text{m}$  的水池里沿直线来回游泳, 甲的速度是  $1.4\text{m/s}$ , 乙的速度是  $0.6\text{m/s}$ , 他们同时分别从水池的两端出发, 来回共游了  $25\text{min}$ , 如果不计转向的时间, 那么在这段时间里, 他们共相遇了多少次? 若他们同时从同一端出发, 那么在上述时间里, 他们共相遇了多少次?

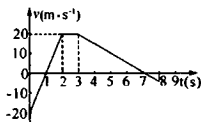


图 1-7-7

5. 在  $60\text{m}$  赛跑中, 一同学起跑后在前  $10\text{m}$  可视为匀加速运动, 到达离起点  $10\text{m}$  时速度为  $8\text{m/s}$ , 以后因脚伤速度下降, 且速率与到起点的距离成反比, 求该同学跑完全程所需时间.

6. 一块草坪上有一条直路, 某人站在路的  $O$  点, 他在路上跑步的速度不超过  $8\text{m/s}$ , 而在草地上的速度不超过  $4\text{m/s}$ . 如果只给他  $30\text{s}$  时间, 他能到达的区域面积有多大?

## 第二章 静力学

### 第一节 常见的几种力



#### 【知识要点】

#### 一、力

力是物体与物体的相互作用。力是矢量，大小、方向和作用点是完整表述一个力的三个要素。

力系是作用在物体上的一群力，根据其力的作用线在空间的几何位置特点，分为空间、平面、汇交、平行力系等。

力的作用效果有两种：一是使受力物体发生形变，二是使受力物体各部分相对位置发生变化。

力的合成与分解。作用在物体上的多个力产生的效果，如果和某个力作用的效果相同，则这个力就可称为其他力的合力，而其他力则称为分力。由分力求合力称为力的合成，由合力求分力称为力的分解。力的合成与分解遵循矢量的合成与分解法则，即平行四边形法则、三角形法则、多边形法则等。

#### 二、力学中常见的几种力

##### 1. 重力

重力是由于地球的吸引而产生的。重力的大小可以用公式  $G = mg$  计算，重力的方向是竖直向下的，作用点在重心处。在一般情况下，一个物体在地球表面附近小范围内可以认为重力是不变的，在忽略地球自转的影响时，可以认为重力就是地球对物体的吸引力，并且重力的方向是指向地心的，若在大范围内考虑，并计及地球自转的影响，则同一物体的重力是可变的，重力将随着距地面的高度、不同的纬度而不同，它实际上是万有引力的一个分力，重力的方向竖直向下。

重力的作用点叫重心，重心可以在物体的内部，也可以在物体的外部。一般讲的重心是指较小的物体，若物体很大，重心也就失去意义。

## 2. 万有引力

宇宙间任何两个物体之间都存在着引力,因为这种引力是普遍存在的,所以称为万有引力.当物体可视为质点时,它们之间作用力的大小可由公式  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$  计算.式中  $G$  为引力恒量,其值为  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ .

## 3. 弹力

物体与物体相接触,两物体发生形变,形变的物体企图恢复原状,因而彼此互施作用力.这种力称为弹力.弹力的大小和物体的形变成正比关系,但比例系数因物质不同而不同.

在弹性限度内,弹簧的弹力和弹簧伸长(或压缩)的长度成正比:

$$F = -kx$$

式中  $k$  为弹簧的劲度系数,由弹簧本身性质决定(如匝数、材料及弹簧的几何尺寸等),负号表示弹力的方向与形变  $x$  的方向相反,弹簧伸长时  $x$  取正.

弹力的方向:若两物体接触处为一接触面,压力或支持力垂直于物体的接触面;对绳子,沿绳伸长方向;对于杆,可根据平衡条件求解;对二力杆件则沿杆的伸长或压缩方向.

弹簧的连接:①弹簧的串联.几个弹簧一个接一个地连接在一起,称为弹簧的串联.设  $n$  个弹簧的劲度系数分别为  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  串联连接,串联后等效的劲度系数  $k_{\#}$ ,

$$\text{则 } \frac{1}{k_{\#}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

②弹簧的并联.将弹簧的一端连在一起,另一端也连在一起,称为弹簧的并联.设  $n$  个弹簧的劲度系数分别为  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  并联连接,在形变相同的情况下,等效的劲度系数为  $k_{\#}$ ,则  $k_{\#} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$

## 4. 摩擦力

相互挤压的粗糙物体之间因有相对运动或相对运动趋势时,在其接触面的切线方向上就有摩擦力产生.摩擦力的方向总是阻碍这个相对运动或阻碍此相对运动趋势.这里的“相对”是以施摩擦力的物体为参照物而言.

摩擦力有静摩擦力、滑动摩擦力和滚动摩擦力之分.相互挤压的物体间只要有相对运动,不管是加速、匀速还是减速运动,它们之间的摩擦力  $f$  都等于摩擦因数  $\mu$  与正压力  $N$  的乘积,即  $f = \mu N$

静摩擦力是相互挤压的物体间因有相对运动趋势而产生的.其值可以从零逐渐增加到某一最大值(最大静摩擦力  $f_0$ ).当物体间将要发生相对运动时的摩擦力为这一最大值  $f_0$ ,它等于静摩擦因数  $\mu_0$  与正压力  $N$  的乘积,即

$$f_0 = \mu_0 N$$

两个特定的物体间,其静摩擦因数  $\mu_0$  要略大于滑动摩擦因数  $\mu$ .在没有特别指明



的情况下可以认为  $\mu_0 = \mu$ 。

摩擦的机理相当复杂,实验指出接触面过于粗糙或过于光滑又清洁时,摩擦因数都会增大;相对速度过低或过大,滑动摩擦因数也增加。不过在通常情况下,这种变化不明显,以至可以忽略不计,所以在一般的分析计算中,都认为摩擦因数不受接触面积、接触面粗糙程度和滑动速度的影响。一般给出的摩擦因数,都是在通常条件下,由实验测出的平均值。

滚动摩擦:滚动摩擦的产生是由圆柱体和地面接触处的形变引起的。滚动摩擦一般远小于滑动摩擦,所以我们移动一个圆柱体或球形物体时宁可使之滚动而不使之滑动。使用滚珠轴承就是为了以滚动摩擦代替滑动摩擦。

摩擦角:如用  $f$  表示滑动摩擦力,  $N$  表示正压力,那么  $\varphi = \arctan(f/N)$  叫做滑动摩擦角。同样用  $f_0$  表示最大静摩擦力,  $N$  表示正压力,那么  $\varphi_0 = \arctan(f_0/N)$  叫做静摩擦角。在两个接触面的性质确定之后,摩擦角的大小是不变的,这一点有时会给解题带来方便。

### 【例题分析】

例1 如右图所示,有五个力作用于  $O$  点,构成一个正六边形的两个邻边和对角线。已知  $F_1 = 10\text{N}$ ,则这五个力的合力等于  $\underline{\hspace{2cm}}$  N。

分析与解 力是矢量,矢量的合成遵循平行四边形法则。用力的平行四边形法则求解,可以先选择两个力,按平行四边形法则合成,再把所得的合力与第三个力合成,依次计算。

在如图所示中,由题设条件可知,  $OF_1F_2F_3F_4F_5$  是一个正六边形,根据正六边形的几何性质,  $F_3$  的大小等于  $20\text{N}$ 。  $OF_1F_3F_4$  是矩形,  $F_1$  和  $F_4$  的合力为  $F_3 = 20\text{N}$ 。同理,  $F_2$  和  $F_5$  的合力也为  $F_3 = 20\text{N}$ 。这五个力的合力为  $3F_3 = 60\text{N}$ 。

评析 本题是一个数理结合的好例子。本题充分利用了数学的平面几何知识,当然选择合适的两个力先合成也是巧解的关键。如果按部就班,先把  $F_1$  与  $F_2$  合成,再与  $F_3$  合成,依次求解,可以得到最后的结论,这样做太繁琐。有些物理问题需要数学技巧。

例2 在密度为  $\rho_0$  的无限大的液体中,有两个半径为  $R$ 、密度为  $\rho$  的球,相距为  $d$ ,且  $\rho > \rho_0$ 。求两球受到的万有引力。

分析与解 设两球的球心分别为  $O$  与  $O'$ 。如果去掉球  $O'$ ,只有球  $O$  单独处于无限大的液体中,由于四周液体对它的引力具有对称性,故球  $O$  受到的合引力为零。

如果将球  $O'$  放回原处,相当于用密度为  $\rho$  的球代替密度为  $\rho_0$  的同体积的液体,因

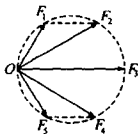


图 2-1-1

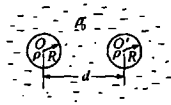


图 2-1-2

为  $\rho > \rho_0$ , 代替的结果将使  $O'$  处的质量增加  $\Delta m = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho_0)$

则根据万有引力定律, 球  $O$  将受到来自球  $O'$  的引力为  $F = G \frac{m_0 \Delta m}{d^2}$

其中  $m_0$  为球  $O$  的质量为  $m_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$$\text{因此两球的相互引力 } F = \frac{16\pi^2 R^6 \rho(\rho - \rho_0)}{9d^2}$$

**评析** 万有引力定律  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$  中,  $m_1$  和  $m_2$  可视为质点时才成立(或质量分布均匀的球才成立). 两个不规则形状物体间的万有引力可以把物体分割成无限小的小物块, 每一小物块都可当作质点看待, 然后求各质点之间的力的合力即为两物体之间的作用力, 以上方法原则上都能求解, 实际上很难求解. 但像本题出现的情况, 可以用等效的方法求解, 等效方法的应用很广.

**例 3** 如图所示,  $A$  和  $B$  为两个完全相同的支座, 其中  $A$  被固定在水平轨道上,  $B$  则能自由滑移. 现将一根粗细均匀的梁水平地支承在  $A$  与  $B$  支座上, 并使其重心恰好处于  $AB$  中点, 如果用一个适当小的力去推支座  $B$ , 则起初梁是保持静止状态, 而支座  $B$  慢慢移向  $A$ . 但当  $B$  接近  $A$  至某一距离时, 梁就随  $B$  一起开始运动.

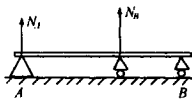


图 2-1-3

设  $AB$  间的距离为  $60\text{cm}$ ,  $A$  和  $B$  支座与梁之间的静摩擦因数为  $\mu_0 = 0.3$ , 滑动摩擦因数为  $\mu = 0.2$ , 试求梁开始移动时,  $A$  和  $B$  之间的距离.

**分析与解** 设梁的重量为  $G$ , 长度为  $L$ .  $A$  和  $B$  对梁的支持力为  $N_A$  和  $N_B$ . 则

$$N_A + N_B = G \quad (1)$$

当  $B$  靠近  $A$  时,  $N_A$  减小,  $N_B$  增大, 以梁的中点为支点, 根据力矩平衡可得

$$N_A L/2 = N_B x \quad (2)$$

$x$  为  $B$  到梁中点的距离.

当梁刚要与  $B$  一起运动时, 梁与  $A$  之间的摩擦力为最大静摩擦力, 梁与  $B$  之间的摩擦力为滑动摩擦力. 梁受到的合力为零, 有

$$\mu_0 N_A = \mu N_B \quad (3)$$

$$\text{由 } (1)、(2)、(3) \text{ 式联立, 可得 } x = \frac{\mu}{2\mu_0} L = \frac{0.2}{2 \times 0.3} \times 60 = 20(\text{cm})$$

即  $A$  与  $B$  的距离为  $20 + 30 = 50\text{cm}$  时, 梁即开始与  $B$  同时移动.

**评析** 梁开始与  $B$  同时移动后, 是否会一直一起下去呢? 用这种方法可以确定梁的重心.

**例 4** 一根长为  $L$  的钢质弹性金属丝, 将一端固定, 另一端加一个扭矩, 当绕轴线扭转  $\varphi$  角时, 产生的弹力矩为  $M = k\varphi$ , 将这根钢丝作为半径为  $R$  的螺旋弹簧, 试估算此弹簧的劲度系数(把钢质弹簧当成是完全理想的).

**分析与解** 设弹簧的匝数为  $n$ , 由题意可得  $n = \frac{L}{2\pi R}$ . 当弹簧受外力作用伸长量为  $x$  时, 金属丝的每一部分都将发生扭转. 在研究弹簧的形变时, 我们可以把它看成是一个只绕它的轴线单纯地扭转的问题来处理. 如图所示,  $ABC$  为其中的一匝, 当  $BC$  半圈倾角为  $\alpha$  时, 则在  $B$  点和  $C$  点处的横截面积也将扭转同样大小的  $\alpha$  角,  $C$  点相对于  $A$  点的横截面转过  $4\alpha$  角. 整根弹簧上下截面相对转过的角度为  $\varphi = 4n\alpha = \frac{L}{2\pi R} 4\alpha$ . 弹簧的伸长量为

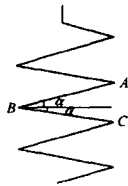


图 2-1-4

$$x = n \cdot 2 \cdot 2R \sin \alpha = \frac{L}{2\pi R} \cdot 2 \cdot 2R \sin \alpha$$

由题意可知, 弹簧的扭转力矩为  $M = k_1 \varphi$

根据胡克定律, 设弹簧的劲度系数为  $k$ , 则弹簧的弹力  $F = k_2 x$ , 弹力的弹力矩为

$$M' = k_1 x R$$

平衡时, 扭力矩应与弹力矩平衡, 即  $M = M'$ , 因此  $k_2 = k_1 / R^2$

**评析** 由上面的结论可知, 弹簧的半径越大, 劲度系数越小. 劲度系数与弹簧的半径有关.

**例 5** 在传送带以  $v_0 = 1 \text{ m/s}$  的速度运动时, 将一箱子从侧面用力推上传送带, 箱在传送带上滑动一段距离而相对静止(相对传送带). 箱子刚接触传送带时相对于地的速度  $u_0 = 2 \text{ m/s}$ . 其方向垂直于传送带的速度方向. 试问箱子在传送带上滑动的过程中, 相对于地的最小速度是多少? 假设摩擦力足够大, 箱子不会从传送带上滑下.

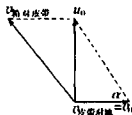


图 2-1-5

**分析与解** 以地面为参照系, 物体起初速度为垂直于传送带的速度方向, 由于摩擦力足够大, 最后箱子相对于皮带静止, 即速度沿着传送带方向, 所以是曲线运动. 以皮带为参照系, 箱子相对于皮带的初速度方向如图 2-1-5 所示. 因为摩擦力是与物体的相对运动方向相反, 所以以皮带为参照系, 箱以初速  $v = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$  作匀减速直线运动. 由运动的相对性可知:

$$v_{\text{箱对地}} = v_{\text{箱对皮带}} + v_0$$

由图 2-1-6 可知, 当箱子对皮带的速度为零时, 箱子对地的速度等于  $v_0$ , 即为皮带对地的速度. 在这个变化过程中, 箱对地的最小速度为  $v_{\min} = v_0 \sin \alpha = v_0 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.9 \text{ (m/}$

s).

**评析** 判断摩擦力方向时,必须注意相对两字,即相对运动或相对运动趋势。

**例 6** 质量为  $m$  的小木块,停放在水平地面上,它与地面的静摩擦因数为  $\mu$ ,一人想用最小的作用力  $F$  使木块移动,则此最小作用力  $F$  的大小为多少?

**分析与解** 如图所示,对木块进行受力分析.设拉力与水平方向的夹角为  $\theta$ .通常的解法是根据正交分解法,分别列出水平方向和竖直方向合力为零的方程式,解得  $F$  关于  $\theta$  的函数,然后利用数学方法求极值。

但本题也可以利用摩擦角的概念来求解.如图 2-1-7 所示的  $\alpha$  为滑动摩擦角,当物体开始滑动时,  $\alpha = \arctan \mu$  保持不变;地面对物体的反作用力  $R$  (即摩擦力  $f$  和支持力  $N$  的合力)大小随着  $F$  的变化而变化,方向不变;而重力的大小和方向都不变.由此可知,求解  $F$  的最小值问题变成:已知一个力的大小和方向都不变,另一个力的方向不变,求这两个力合力的最小值.根据平行四边形法则,  $F$  的最小值为

$$F_{\min} = mg \sin \alpha = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$



### 【巩固习题】

1. 20N, 30N 和 40N 的三个力作用于物体的同一点,它们之间的夹角都是  $120^\circ$ , 求合力的大小和方向。

2. 如图 2-1-8 所示,在半径为  $R$  的两个铁球内各挖一个半径为  $R/2$  的球腔  $C_1$  和  $C_2$ , 两球腔与各球内切, 两球心相距  $d$ , 求两球间引力的大小. 设铁球的密度为  $\rho$ 。

3. 如图 2-1-9 所示,用两段直径为  $d = 0.02\text{m}$  且相互平行的小圆棒  $A$  和  $B$  水平地支起一根长为  $L = 0.64\text{m}$ 、质量均匀分布的木条. 设木条与两圆棒之间的静摩擦因数  $\mu_0 = 0.4$ , 滑动摩擦因数  $\mu = 0.2$ . 现使  $A$  棒固定不动, 并对  $B$  棒施以适当的外力, 使木棒  $B$

向左缓慢移动. 试讨论分析木条的移动情况, 并把它运动情况表示出来. 设木条与圆棒  $B$  之间最先开始滑动。

4. 一薄壁烧杯, 半径为  $r$ , 质量为  $m$ , 重心位于中心线上, 离杯底的距离为  $H$ , 今将水慢慢注入杯中. 问烧杯连同杯内的水共同重心最低时, 水面离杯底的距离等于多少?

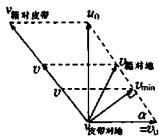


图 2-1-6

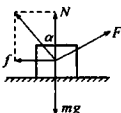


图 2-1-7

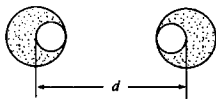


图 2-1-8

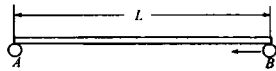


图 2-1-9

为什么? (设水的密度为  $\rho$ )

5. 一根弹簧的劲度系数为  $k$ , 若剪去原长的  $1/3$ , 则剩下部分的劲度系数为多少?

6. 有两个轻弹簧, 劲度系数分别为  $k_1, k_2$ , 按图 2-1-10 所示连接, 并在下面悬挂一重物  $G$ , 滑轮质量不计. 把滑轮和两个弹簧等效一个弹簧, 求等效弹簧的劲度系数.

7. 如图 2-1-11 所示, 质量为  $M$  的方铁块放置在倾斜的粗糙斜面上, 斜面的  $AD$  边平行  $BC$  边. 铁块与斜面的动摩擦因数为  $\mu$ . 斜面的倾角为  $\alpha$ . 如果在铁块上作用一水平力  $F$  与  $BC$  边平行, 此力由零逐渐增大, 问铁块开始运动时: (1) 力  $F$  的大小? (2) 铁块运动的方向与边  $AB$  的夹角多大?

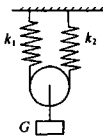


图 2-1-10

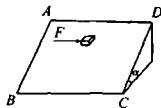


图 2-1-11

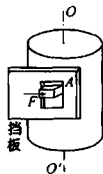


图 2-1-12

8. 有一半径  $r = 0.2\text{m}$  的圆柱体绕竖直轴  $OO'$  以角速度  $\omega = 9\text{rad/s}$  匀速运动, 现用力  $F$  把质量  $m = 1\text{kg}$  的物体  $A$  压在圆柱体的侧面, 由于受光滑挡板的作用, 物体  $A$  在水平方向上不能随圆柱体转动, 而以  $v_0 = 2.4\text{m/s}$  的速率匀速下滑, 如图 2-1-12 所示. 若物体  $A$  与圆柱体的摩擦因数  $\mu = 0.25$ ,  $g = 10\text{m/s}^2$ . 求物体  $A$  受到的力  $F$  的大小.

## 第二节 共点力作用下物体的平衡

### 【知识要点】

几个力交于一点或几个力的作用线交于一点, 这几个力叫做共点力.

几个共点力同时作用于一个物体, 各个力所产生的效果相互抵消, 物体处于静止或匀速直线运动的平衡状态, 这叫做共点力的平衡.

共点力作用下的平衡条件为作用在物体上所有力的合力为零, 即  $\sum \vec{F} = 0$ .

求解共点力作用下物体的平衡问题通常有以下两种方法: ①利用平行四边形法则, ②利用正交分解法, 即  $\sum \vec{F}_x = 0, \sum \vec{F}_y = 0$

由平衡条件, 可以得到以下推论:

①如果一个物体受到几个共点力作用而处于平衡, 则任何一个力都与其余所有力

的合力平衡。

②一个物体受到三个力作用而处于平衡,如果这三个力不平行,则这三个力的作用线一定交于一点,通常叫三力汇交原理。

### 【例题分析】

**例1** 如图2-2-1所示,用砖夹提起四块各重为 $G$ 的砖,设砖夹与砖,以及砖之间的静摩擦因数为 $\mu$ ,求各砖之间的摩擦力的大小。

**分析与解** 选择整体为研究对象,则砖夹与砖的摩擦力大小均为 $2G$ ,然后以1,2为研究对象可得砖3对2的作用力大小为 $F_{32}=0$ ,然后以1为研究对象,则由平衡条件可得1,2间的摩擦力大小 $F_{12}=G$ ;同理可得砖3,4之间的作用力大小为 $F_{34}=G$ ,因此各砖间的摩擦力为 $F_{12}=G$ ;  $F_{32}=0$ ;  $F_{34}=G$ 。

**评析** 解决本题的关键是选择合适的研究对象。

**例2** 如图2-2-2,两竖直杆 $MN$ 和 $PQ$ 相距 $2\text{m}$ ,一根长 $2.4\text{m}$ 的绳的两端拴在这两杆上,第一次令两拴点等高,第二次令两拴点不等高,用一光滑的钩子把一重为 $G=50\text{N}$ 的物体挂在绳子上,问哪一次绳中拉力小? 拉力是多大?

**分析与解** 当两拴点等高时,对钩子进行受力分析,如图2-2-2所示,由对称性可知,两边绳子与水平方向的夹角相等,设为 $\theta$ ,

$$2T\sin\theta = G$$

由题意可知,  $\cos\theta = 2/2.4 = 5/6$ , 所以  $T = 45\text{N}$ 。

当两拴点不等高时,对钩子进行受力分析,如图2-2-3所示,根据正交分解法有

$$\begin{cases} T_1\sin\alpha = T_2\sin\beta \\ T_1\cos\alpha + T_2\cos\beta = G \end{cases}$$

同一绳子上的张力相等,即  $T_1 = T_2$ , 所以  $\alpha = \beta$ 。

设钩子左边绳长为 $L_1$ , 右边绳长 $L_2$ , 钩子到 $MN, PQ$ 的垂直距离为 $x_1, x_2$ , 则

$$\sin\alpha = \sin\beta = \frac{x_1}{L_1} = \frac{x_2}{L_2} = \frac{x_1 + x_2}{L_1 + L_2} = 2/2.4 = 5/6$$

这一结论与两拴点等高时相同,所以两种情况下拉力相同。

**例3** 如图2-2-4所示,斜劈 $A$ 可以在水平面上无摩擦地滑动,其顶角为 $\alpha$ ,顶柱 $B$ 压在 $A$ 上,只能沿竖直方向无摩擦地运动。 $B$ 上放有重物 $G$ 。 $F$ 为水平向左施加在 $A$ 上的推力。 $A, B$ 的重量可以不计,它们之间的静摩擦因数为 $\mu$ 。求:(1)使重物 $G$ 刚好不致下降时 $F$ 的数值 $F_1$ 。(2)使重物 $G$ 刚好不致上升时 $F$ 的数值 $F_2$ 。(3)分析



图2-2-1

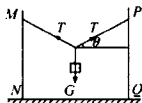


图2-2-2

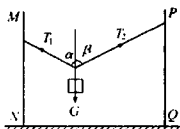


图2-2-3

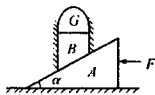


图2-2-4

当  $1 > \mu > \tan \alpha$  时,  $F_1$  和  $F_2$  值的正负, 并说明其意义。

**分析与解** 本题属于连接体问题, 常采用隔离法。分别对  $A$  和  $B$  进行受力分析, 如图 2-2-5 所示。据题意, 重物刚好不下降或上升,  $B$  与  $A$  间的摩擦力应为最大静摩擦力  $\mu N$ 。  $A$  对  $B$  的摩擦力的方向沿斜面向上或向下, 此时  $A$  和  $B$  均处于平衡状态。

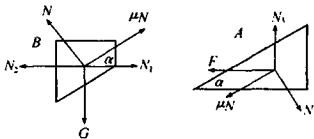


图 2-2-5

(1) 若  $G$  刚好不致下降, 则  $B$  受五个力作用而平衡, 由竖直方向上合力为零, 可得

$$N \cos \alpha + \mu N \sin \alpha = G$$

而  $A$  受四个力作用而平衡, 由水平方向上合力为零, 可得

$$F_1 + \mu N \cos \alpha = N \sin \alpha$$

由以上两式可解得  $F_1 = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} G$

(2) 若  $G$  刚好不致上升, 与(1)问相似,  $F_2 = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} G$

(3) 当  $\mu > \tan \alpha$ , 即  $\mu \cos \alpha > \sin \alpha$ , 可知  $F_1 < 0$ 。这表示要使重物不致下降, 在  $A$ 、 $B$  之间达到最大静摩擦力时,  $F$  的方向必须向右, 也就是说即使不施加  $F$ , 重物也不会下降, 且  $A$ 、 $B$  之间没有达到最大静摩擦。

当  $1 > \mu > \tan \alpha$  时, 即  $\cos \alpha > \mu \cos \alpha > \sin \alpha > \mu \sin \alpha$ , 可知  $F_2 > 0$ 。这表示要使重物上升, 必须对  $A$  施加一个向左的力, 且  $F_2 \geq$

$$\frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} G$$

**例 4** 如图 2-2-6 所示, 长为  $l$  的折梯置于竖直平面内, 已知  $A$ 、 $B$  两处摩擦因数  $\mu_A = 0.2$ ,  $\mu_B = 0.6$ , 不计梯重, 求人能爬多高而梯不滑倒。

**分析与解** 如果地面与梯的摩擦因数足够大, 则梯子不会滑倒, 现两边的摩擦因数较小, 所以梯子有可能滑倒, 先对  $A$ 、 $B$  两点进行受力分析, 如图 2-2-7 所示。

$$f_A = \mu_A N_A, \tan \alpha_A = f_A / N_A = \mu_A$$

$$\alpha_A = \arctan \mu_A = \arctan 0.2 < 30^\circ$$

若  $B$  端开始滑动, 则  $f_B = \mu_B N_B$

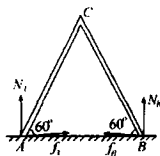


图 2-2-6

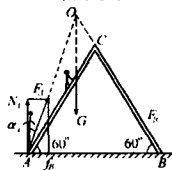


图 2-2-7

$$\tan \alpha_B = \mu_B, \alpha_B = \arctan \mu_B = \arctan 0.6 > 30^\circ$$

所以人必须从  $AC$  爬上, 此时  $B$  端受地面的作用力沿着  $BC$  方向, 如图 2-2-7 所示. 地面对  $A$  的作用力方向沿与竖直成  $\alpha_A$  角, 把人、梯作为整体考虑, 受力情况为  $F_A, F_B, G$ , 所以重力的作用线必通过  $F_A, F_B$  的交点  $O$ , 由几何关系, 设人与  $A$  点的水平距离为  $s$ , 则

$$s \cot \alpha_A = (l - s) \cot 30^\circ$$

### 【巩固习题】

1. 如图 2-2-8 所示, 将水槽支于  $O$  点, 当木块  $A$  浮在左边时, 水槽恰好平衡, 则 ( )

- 用力向下压木块时, 木块受到的浮力增大, 槽的左端向上倾斜
- 用力向下压木块时, 木块受到的浮力增大, 槽的左端向下倾斜
- 木块向右漂浮时, 水槽仍能平衡
- 木块向右漂浮时, 水槽的右端向下倾斜

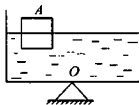


图 2-2-8

2. 两平行直杆竖直放置, 间距为  $d$ , 质量分布不均匀的绳子的长度大于  $d$ , 两端分别系在两杆上, 系结点位于同一水平线上. 已知系结处绳子与直杆之间的夹角分别为  $\theta_1$  和  $\theta_2$ , 试求绳子重心到两杆的垂直距离.

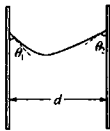


图 2-2-9

3. 如图 2-2-10 所示, 半径为  $R$  的圆柱水平横架空中, 有质量为  $m_1$  与  $m_2$  ( $m_1 = 2m_2$ ) 的两个小木块, 用长为  $\frac{\pi R}{2}$  细绳相连, 木块大小可以忽略, 与圆柱面间的静摩擦因数  $\mu < 1$ , 设线无质量, 柔软不可伸长, 与圆柱面无摩擦,  $m_1$  在右边.



图 2-2-10

现在使圆柱顺时针方向缓慢旋转, 至某一位置时, 物块将要开始滑动, 由此位置开始, 再缓慢逆转, 问转过多大角度后, 物块从左边滑落?

4. 降落伞和人共重  $G$ , 在静止的空气中是匀速直线竖直下降的. 现在由于受到从东向西的风的影响, 降落伞最后沿与水平方向成  $60^\circ$  角斜向下匀速直线下降. 分析这时降落伞受到几个力的作用, 这些力之间关系怎样?

5. 一轻绳跨过两个等高的轻定滑轮 (不计大小和摩擦), 两端分别挂上质量为  $m_1 = 4\text{kg}$  和  $m_2 = 2\text{kg}$  的物体, 如图 2-2-11 所示, 在滑轮之间的一段绳上悬挂物体  $m$ , 为使三个物体不可能保持平衡, 求  $m$  的取值范围.

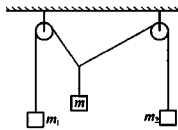


图 2-2-11

6. 一个小物体与竖直墙面之间的动摩擦因数  $\mu = 0.25$ , 当作用力  $F$  与竖直方向成的角度  $\alpha = 53^\circ$  时,  $F$  至少为  $10\text{N}$  才能维



持物体静止,如图 2-2-12.问:(1)在  $\alpha$  不变的情况下,需要多大的力才能使物体沿墙面向上做匀速运动?(2)在  $\mu$  已确定的情况下,要使物体向上做匀速运动, $\alpha$  角有什么限制?

7. 三个半径均为  $r$ , 质量相等的球放在一个半球形碗内, 现把第四个半径也为  $r$ , 质量也相等的相同球放在这三个球的正上方, 要使四个球静止, 半球形碗的半径应满足什么条件? 不考虑各处摩擦.

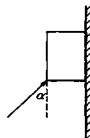


图 2-2-12

### 第三节 一般物体的平衡

#### 【知识要点】

##### 1. 力矩

力矩表示力对物体作用时所产生的转动效应的物理量. 力和力臂的乘积叫做力对转轴的力矩. 力矩是矢量, 力对某一点的力矩的大小为该点到力的作用线所引垂线的长度乘力的大小; 其方向垂直于该垂线和力所构成的平面且遵循右手螺旋法则. 力矩的国际单位是  $\text{N} \cdot \text{m}$ .

##### 2. 力偶

由两个等值、反向的平行力组成. 它对物体的转动效应用力偶矩矢量  $\vec{M}$  来度量.

力偶对任何点的力偶矩均相同, 它对运动物体是自由矢量, 即经滑移和平移后, 力偶对物体的运动效应并不改变.

##### 3. 有固定转动轴物体的平衡条件

力可以使物体发生转动. 物体转动时, 它的各点都沿圆周运动, 圆周的中心在同一直线上, 这条直线叫转动轴. 一个有固定转动轴的物体, 在力的作用下, 如果保持静止, 或匀速转动, 我们称这个物体处于转动平衡状态.

有固定转动轴的物体的平衡条件: 作用在物体上的所有力的合力矩等于零. 即

$$\sum \vec{M} = 0$$

##### 4. 一般物体的平衡条件

受任意的平面力系作用的物体, 平衡条件为

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_i = 0 \quad (\text{对任一转轴})$$

这三个方程组成平面任意力系的平衡方程式,值得注意的是所有力对于某一点的力矩代数和为零时,则对任一点的力矩的代数和都等于零.因此,上述方程组中只能有一个力矩平衡方程.

对空间力系,一般可列出六个独立平衡方程,即所有力在任意轴(例如  $x$  轴)上的投影的代数和为 0(同理,在  $y$  轴、 $z$  轴上的投影代数和为 0,共有三个方程),所有力对任意轴(例如  $x$  轴)的力矩代数和为 0(同理,对  $y$  轴、 $z$  轴的力矩代数和为 0,共有三个方程).

### 【例题分析】

**例 1** 匀质杆  $OA$  重  $P_1$ 、长为  $l_1$ ,能在竖直平面内绕固定铰链  $O$  转动,此杆的  $A$  端用铰链连另一重  $P_2$ 、长为  $l_2$  的均匀杆  $AB$ ,在  $AB$  杆的  $B$  端加一水平力  $F$ .求平衡时此两杆与水平线所成的角度  $\alpha$  及  $\beta$ , $OA$  与  $AB$  间的作用力.

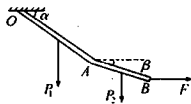


图 2-3-1

**分析与解** 受力分析如图 2-3-1 所示,先以  $AB$  为研究对象,根据合力矩等于零,

有  $Fl_2 \sin \beta = P_2 \frac{l_2}{2} \cos \beta$ , 得  $\tan \beta = P_2 / 2F$

再以  $OA, AB$  整体为研究对象有

$$P_1 \frac{l_1}{2} \cos \alpha + P_2 (l_1 \cos \alpha + \frac{l_2}{2} \cos \beta) = F (l_1 \sin \alpha + l_2 \sin \beta)$$

得  $\tan \alpha = \frac{P_1 + 2P_2}{2F}$

以  $AB$  为研究对象,因为  $AB$  处于平衡状态,所以  $AB$  受的合力等于零,设  $OA$  对  $AB$  的作用力大小为  $N$ ,方向与水平面的夹角  $\theta$ ,则

$$N = \sqrt{F^2 + P_2^2} \quad \theta = \arctan(P_2/F) = \arctan(2 \tan \beta)$$

$\theta$  角的大小也可以用作图法求得.如图 2-3-2 所示, $N$  必通过  $P_2$  与  $F$  的交点  $O'$ .

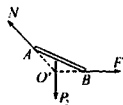


图 2-3-2

**例 2**  $V$  形槽中放置一半径为  $r$  的匀质圆柱,槽边与水平夹角为  $\alpha$ ,如图 2-3-3 所示,接触处的摩擦因数  $\mu = \tan \Phi_m$ ,圆柱重  $G$ ,设转动圆柱所需的最小力偶矩为  $L_m$ ,则当  $\Phi_m < \alpha$  时, $L_m$  的值多大? 当  $\Phi_m \geq \alpha$  时, $L_m$  的值多大?

**分析与解** 一个物体放在倾角为  $\alpha$  的斜面上,物体与斜面的摩擦因数为  $\mu$ ,若  $\mu = \tan \alpha$ ,则物体匀速下滑;若  $\mu > \tan \alpha$  时,物体静止;若  $\mu < \tan \alpha$  时,物体将匀速下滑.与此类似, $\Phi_m$  为摩擦

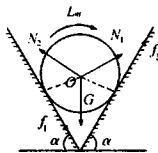


图 2-3-3

角,当  $\Phi_m < \alpha$  时,圆柱与 V 形槽发生相对滑动;当  $\Phi_m \geq \alpha$  时,圆柱与 V 形槽发生相对静止.

当  $\Phi_m < \alpha$  时,设外力偶矩的方向为顺时针方向,则圆柱体的受力情况如图 2-3-3 所示.注意  $N_1 \neq N_2$ ,  $f_1$  和  $f_2$  的方向不同,求转动圆柱所需的最小力偶矩  $L_m$ ,意味着圆柱体处于临界转动状态,此时合力为零,合力矩也为零.以圆柱体的轴线为固定轴,根据固定转动轴的物体平衡条件有  $L_m = (f_1 + f_2)R$

竖直方向合力为零,即  $N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + f_2 \sin \alpha = f_1 \sin \alpha + G$

水平方向合力为零,即  $N_1 \sin \alpha + f_2 \cos \alpha + f_1 \cos \alpha = N_2 \sin \alpha$

其中  $f_1 = \mu N_1$ ,  $f_2 = \mu N_2$

由以上各式解得  $L_m = \frac{GR}{2\cos\alpha} \sin 2\Phi_m$

当  $\Phi_m \geq \alpha$  时,摩擦力足够大,当物体受到力偶矩作用时,不滑动,所以

$$N_1 = 0 \quad L_m = GR \sin \alpha$$

**例 3** 如图 2-3-4 所示,有一长方形匀质物块,其底边长为  $a$ ,高度为  $b$ ,置于斜面上,斜面与物块之间的静摩擦系数为  $\mu$ ,斜面的倾角为  $\theta$ .当  $\theta$  足够小时,物块静止于斜面上,如逐渐将倾角加大,当  $\theta$  取某个临界值  $\theta_0$  时,物块或将开始滑动或将翻倒.试分别求出发生滑动和翻倒时的  $\theta_0$ ,并说明在什么条件下出现的是滑动,在什么条件下出现的是翻倒.

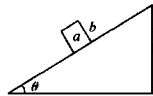


图 2-3-4

**分析与解** 如图 2-3-5 所示进行受力分析,当物体刚要开始滑动时,有  $mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta$ ,解得

$$\theta = \tan^{-1} \mu$$

所以当  $\theta > \tan^{-1} \mu$  时,物体将滑动.

当物体刚要翻倒时,重力的作用线刚好没有超过支面,即平面图中的  $O$  点,由几何关系可得,此时斜面的倾角为

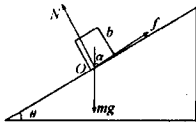


图 2-3-5

$\theta = \tan^{-1} \frac{a}{b}$ , 即当  $\theta > \tan^{-1} \frac{a}{b}$  时,物体将翻倒.

综合上面两种情况,可得:若  $\mu < a/b$ ,当  $\theta$  增大至  $\theta = \tan^{-1} \mu$  时,物块将滑动;若  $\mu > a/b$ ,当  $\theta$  增大至  $\theta = \tan^{-1} \frac{a}{b}$  时,物块将开始翻倒.

**例 4** 如图 2-3-6 所示,长为  $l$  的均质杆, A 端为球铰, B 端与铅垂墙面的摩擦系数为  $\mu$ ,  $OA = a$ ,试求平衡时,图示倾角  $\alpha$  的最大值.

**分析与解** 对 AB 进行受力分析(A 点除外),如图 2-3-7 所示.其中  $N$  的方向垂直于面  $xOz$ ,摩擦力的方向为垂直于  $OB$  且在  $xOz$  平面内(因为 B 点的运动轨迹为以  $O$  为圆心  $OB$  为半径的圆).重力、弹力、摩擦力三力不在一平面内,属于空间力系.

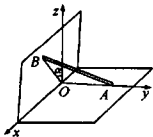


图 2-3-6

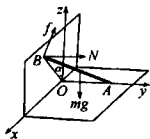


图 2-3-7

当  $\alpha$  角取最大时, 平面  $xOz$  平面对  $B$  的摩擦力刚好达到最大静摩擦力, 即  $f = \mu N$ .  $AB$  仍处于平衡状态, 三力关于  $A$  点的合力矩应为零. 由于三个力为空间力, 直接求合力矩较困难, 通常求解绕某一固定轴的合力矩. 现选择过  $A$  点平行于  $Oz$  为固定轴, 则重力矩为零, 摩擦力矩为  $f \cos \alpha \cdot a$ , 弹力  $N$  的力矩为  $N \cdot \overline{OB} \sin \alpha$ , 由合力矩为零, 得

$$f \cos \alpha \cdot a = N \cdot \overline{OB} \sin \alpha$$

由几何关系得  $\overline{OB} = \sqrt{l^2 - a^2}$

由以上各式解得  $\alpha = \arctan \left( \frac{a\mu}{\sqrt{l^2 - a^2}} \right)$

请读者选择不同的转动轴求解. 比较一下, 哪一转轴较为简便.



## 【巩固习题】

1. 质量分别为  $m_1 = 3\text{kg}$ ,  $m_2 = 1\text{kg}$  的两个小球. 用轻质细杆连接, 并用长  $l$  的细绳系住  $m_1, m_2$ , 绳子跨过光滑的定滑轮  $P$ . 设法让两球和轻杆静止在如图 2-3-8 所示的位置, 试证明  $m_1$  到定滑轮  $P$  的这段绳长  $l' = \frac{1}{4}l$ .

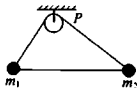


图 2-3-8

2. 如图 2-3-9 所示, 在水平面上有一个光滑的轻质 L 型支架, 其  $A$  端用细线  $AB$  悬挂一个重量为  $G$ 、半径为  $R$  的球, 且  $AB = CD = R$ , 为了使系统平衡, 问在  $D$  点应加一个多大的竖直向下的力?

3. 半径为  $r$  的光滑半球形碗, 固定在水平面上, 一均质棒斜靠在碗边缘, 一端在碗内, 一端在碗外, 在碗内的长度为  $c$ . 试证棒的全长为  $4(c^2 - 2r^2)/c$ .

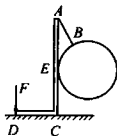


图 2-3-9

4. 两根均质棒  $AB, BC$  在  $B$  处刚性联结在一起,  $a$  及  $b$  为棒  $AB$  和  $BC$  的长度, 且  $\angle ABC$  形成一直角, 如将此棒的  $A$  点用绳系于固定点上, 试证明当平衡时,  $AB$  和竖直直线所成的角  $\theta_0$  满足下列关系

$$\tan \theta_0 = \frac{b^2}{a^2 + 2ab}$$

5. 一均质的梯子, 一端置于摩擦因数为  $\frac{1}{2}$  的地板上, 另一端则斜靠在摩擦因数为  $\frac{1}{3}$  的高墙上. 一个人的体重为梯子的 3 倍, 爬到梯子的顶端时, 梯尚未开始滑动, 则梯与地面的倾角最小为多大?

6. 课桌的桌面与水平面的夹角  $\alpha = 40^\circ$ , 在桌面上放一只正六棱柱形铅笔, 使铅笔既不向下滚动, 又不向下滑动, 试问: (1) 在此情况下, 铅笔与桌面的静摩擦因数是多少? (2) 铅笔应与水平方向至少成多大角度放置?

7. 有一个半径为  $a$ 、高为  $4a$ 、重为  $W$  的两端开口的薄型圆筒, 现将圆筒竖直放在光滑表面的水平面上, 之后将半径为  $r$ 、重为  $P$  两个完全相同的光滑圆球, 放进筒内而呈叠放状, 当  $a < 2r < 2a$  时, 试求圆筒不翻倒的条件.

8. 有一质量  $m = 50\text{kg}$  的杆, 竖立在水平地面上, 杆与地面的最大静摩擦因数为  $\mu = 0.3$ , 杆的上端被固定在地面上的绳索拉住. 绳与杆的夹角  $\theta = 30^\circ$ , 如图 2-3-10 所示.

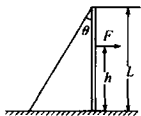


图 2-3-10

(1) 若以水平力  $F$  作用在杆上, 作用点到地面的距离  $h$  为杆长  $L$  的  $\frac{2}{5}$ , 要使杆不滑倒, 则力  $F$  最大不能超过多少?

(2) 若将作用点移到  $h = 4L/5$  处, 情况又如何?

9. 有一长方形木块, 形状大小如图 2-3-11 所示, 放在一粗糙水平面上, 两者间的静摩擦因数和滑动摩擦因数均为  $\mu$ . 今在其上加一外力  $F$ ,  $F$  力距水平面高为  $h$ . 当  $F$  较小时木块静止; 如果  $F$  慢慢增加, 问在什么情况下木块滑动? 什么情况下木块绕  $O$  点翻转?

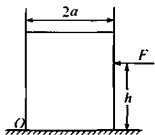


图 2-3-11

10. 如图 2-3-12 所示, 绕线轮  $C$  重  $W = 1000\text{N}$ , 用细线与重  $G = 500\text{N}$  物  $A$  相连, 已知物体  $A$  和轮  $C$  与接触面的摩擦因数分别为  $\mu_A = 0.5$ ,  $\mu_C = 0.2$ , 且  $r = 5\text{cm}$ ,  $R = 10\text{cm}$ , 不计滑轮摩擦与绳重. 求维持平衡的最大重量  $P$ .

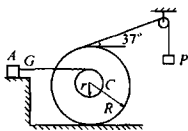


图 2-3-12

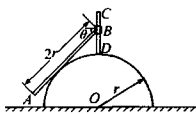


图 2-3-13

11. 如图 2-3-13 所示, 均质杆  $AB$  长为  $2r$ , 一端用铰链与套筒  $B$  相连, 杆身放在半

径为  $r$  的固定圆柱面上,且摩擦角为  $\varphi$ ,不计套筒与竖直杆  $CD$  间的摩擦.问当  $AB$  平衡时, $\theta$  角的最大最小值应满足什么条件?

12. 有一长为  $L$ ,重为  $G_0$  的均匀杆  $AB$ ,  $A$  端顶在竖直的粗糙墙壁上,杆端与墙间的摩擦系数为  $\mu$ ;  $B$  端用一强度足够而不可伸长的绳悬挂,绳的另一端固定在墙壁  $C$  点,木杆呈水平状态,绳与杆的夹角为  $\theta$ ,如图 2-3-14 所示.求杆能保持平衡时  $\mu$  与  $\theta$  应满足的条件.杆保持平衡时,杆上有一点  $P$  存在,若在  $A$  与  $P$  点间悬挂一重物,则当重物的重量  $G$  足够大时总可以使平衡破坏;而在  $PB$  间任一点悬挂任意重量的重物都不能使平衡破坏.求  $PA$  的距离.

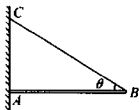


图 2-3-14

13. 如图 2-3-15 所示的支架,用铰链接在竖直墙上,悬挂物的重量为  $500\text{N}$ ,轻杆  $OA$ 、 $OB$  的长度都是  $50\text{cm}$ ,  $AB = 60\text{cm}$ ,且  $A$  和  $B$  等高.均匀杆  $OC$  的倾角  $\theta = 60^\circ$ ,杆重  $G' = 200\text{N}$ ,铰链  $C$  在  $AB$  中点正下方,  $CO \perp DO$ .求:(1)杆  $AO$  对墙的作用力;(2)  $OC$  对墙的作用力.

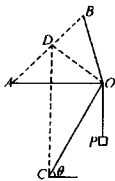


图 2-3-15

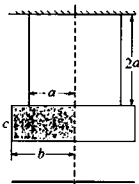


图 2-3-16

14. 薄的长方形平玻璃板,质量为  $m$ ,竖直对称地挂在两个很轻的、无伸缩性的绳子上.如图 2-3-16 所示,每一面的左半个表面都涂上一层化学性质活泼的金属.整体放在玻璃盒中,先抽成真空,然后在某瞬间向内放气态氯至压强  $p$ .假设,在氯分子和金属碰撞时,发生的化学反应的几率为  $P < 1$ ,试计算在平衡态,玻璃板围绕着重轴旋转的角度.(图中的尺寸  $a$ ,  $b$ ,  $c$  已知)

假设,氯的浓度在玻璃板的两面是一样的,随着化学反应,氯气压力的变化可以忽略,所生成的金属氯化物都留在玻璃板上;而且在观察过程中,反应掉的氯是如此之少,可以认为反应几率和玻璃板的质量  $m$  都不会发生变化.

15. 如图 2-3-17 所示,均质杆  $AB$  长为  $l$ ,  $B$  端用球形铰链固定,  $A$  端置于半径为  $r$  的球面上(图为  $1/8$  球面),杆与球面间的摩擦系数为  $\mu$ ,球心  $O$  至杆端  $B$  距离  $OB = a$ ,试求  $AB$  平衡

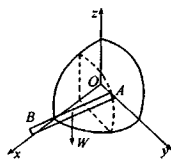


图 2-3-17

时,  $OA$  连线与  $z$  轴所成的最大夹角。

## 第四节 平衡种类

### 【知识要点】

#### 1. 物体平衡的种类

物体平衡的种类有: 稳定平衡、不稳定平衡和随遇平衡。它是处于重力场以及其他有势场的物体在场作用下的三种平衡情况。处于势场的物体和场一起具有势能, 而物体都有向势能较小位置运动的趋势。所谓稳定平衡是指物体处于势能最小位置时的平衡。对它有一个微小的扰动, 使它离开平衡位置, 外界就必须对它做功, 这样势能增加, 扰动后物体就要自动地回到原来势能最小的位置。所谓不稳定平衡是指物体处于势能最大时的平衡。使它离开平衡位置, 外界不必对它做功。任何微小扰动, 总引起重力对它做功, 势能减小, 这样它将继续减小势能, 再也不可能回到原来那个势能最大的位置。所谓随遇平衡是指处于平衡状态的物体, 在受到微小扰动后, 势能始终保持不变, 因此可以在任意位置继续保持平衡。

#### 2. 物体平衡种类的判别方法

##### (1) 受力分析法

当质点受到外界的扰动稍微偏离平衡位置后, 如果所受合外力指向平衡位置, 则此点的平衡是稳定的; 如果所受的合外力背离平衡位置, 则此质点的平衡是不稳定的; 如果所受的合外力为零, 则质点处于随遇平衡状态。

##### (2) 力矩比较法

对于有支轴的刚性物体, 当它受外界扰动而偏离平衡位置时, 如果外力会引起一个回复力矩, 此力矩有把物体拉回到原平衡位置的倾向, 则称物体处于稳定平衡状态; 如果外力引起一排斥力矩, 它有把物体推离平衡位置的倾向, 则称物体处于不稳定状态, 如果物体所受合力矩仍为零, 则称物体处于随遇平衡状态。

##### (3) 重心升降法

对受重力和支持力作用而平衡的物体(包括质点和刚体两种), 判断其平衡种类时, 常用重心升降法。即若使物体稍微偏离平衡位置, 如其重心升高, 则为稳定平衡; 如其重心降低, 则为不稳定平衡; 若其重心高度不变, 则为随遇平衡。

##### (4) 支面判断法

具有支面的物体平衡时, 物体所受重力的作用线一定在支面内, 如果偏离平衡位置后, 重力作用线仍在支面内, 物体就能回到平衡位置, 属于稳定平衡; 但如果物体倾斜较

大时,重力作用线超出支面,重力的力矩会使物体继续远离原来的位置,即原来的平衡被破坏。

### 【例题分析】

**例 1** 将一根长度为  $2l$  的硬铅丝弯成等臂直角形框架,在两臂的端点各固定一个质量为  $m$  的小球,在直角的顶点焊一根长为  $r$  的支杆,支杆平分这一顶角。将杆支在一支座上。试证:当  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}l$  时,

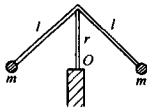


图 2-4-1

平衡为随遇的;当  $r > \frac{\sqrt{2}}{2}l$  时,平衡为非稳定的;而  $r < \frac{\sqrt{2}}{2}l$  时,平衡为稳定的。(不计支杆、铅丝的重量)

**分析与解** 把两球作为整体看待,则它们的重心必在支杆上,当  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}l$  时,重心就在  $O$  点,如图 2-4-2 所示,板架摆

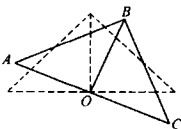


图 2-4-2

过任意角度,重心的高度不变,所以是随遇平衡;当  $r > \frac{\sqrt{2}}{2}l$  时,它们的重心在  $OB$  之间偏转一个角度,重心降低,不稳定平衡;当  $r < \frac{\sqrt{2}}{2}l$  时,重心在  $O$  点下面,稳定平衡。

### 【巩固习题】

1. 将一边长为  $2a$  的立方体匀质木块放在一半径为  $r$  的水平放置的圆柱体的顶部,如图 2-4-3 所示。欲使平衡为稳定平衡,试求  $r$  与  $a$  的关系。(假定摩擦足以阻止立方体在柱面上滑动)

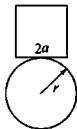


图 2-4-3

2. 如图 2-4-4 所示,浮子由两个半径为  $R$  的球冠相合而成,其质量为  $m_1$ ,中心厚度为  $h < 2R$ 。长为  $l$ 、质量为  $m_2$  的均匀细杆从浮子中心垂直插入,下端恰好到达下球冠表面。细杆的铅垂位置显然是一个平衡位置,试分析平衡的稳定性。

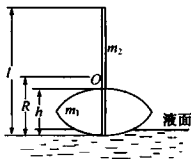


图 2-4-4

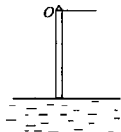


图 2-4-5



3. 一根均匀细杆悬挂在水面上不动,如图 2-4-5 所示.杆可以绕上端水平轴  $O$  在竖直平面内转动.杆的长度为  $l$ ,杆的材料密度为  $\rho$  ( $\rho$  小于水的密度  $\rho_0$ ).当缓慢放下轴时,杆浸入水中.试求杆与竖直线的偏角与从轴到水面距离之关系.

## 第五节 流体静力学

### 【知识要点】

流体是液体和气体的统称.它们的共同特点是,没有一定的形状,具有流动性.

#### 1. 静止流体的压强

静止流体内一点的压强,等于过此点任意一假想面元上正压力大小与面元面积之比,当面元面积趋于零时的极限.在重力作用下,静止流体内等高的各点压强相等,在竖直方向上压强随流体深度增加而增加,即  $p = p_0 + \rho gh$ .其中  $p_0$  为流体上表面的大气压, $\rho$  为流体密度, $h$  为深度.

由于液体的可流动性,在液体中任取一小面元,液体分子间的相互作用必定垂直于该面元而无切向力.由于该面元是在液体中某点任取的,可以断定:压强与方向无关,对液体中任一点来说是一确定值.

#### 2. 浮力

浮力是浸设在静止流体中的物体受到流体对它的各个方向的总压力的合力,浮力的方向是竖直向上的,其大小就等于被物体所排开的流体的重力.数学表达式:

$$F = \rho g V$$

式中  $V$  为物体浸设在液体部分的体积, $\rho$  为液体的密度.浮力的大小与物体的重量无关,与物体在液体中的深度无关.

### 【例题分析】

**例 1** 一个圆台体积为  $V$ ,底面积为  $S$ ,全部浸没在深为  $H$ ,密度为  $\rho$  的水中,且圆台底部与容器底面紧密连成一体,如图 2-5-1 所示,试分析圆台是否受到浮力?(大气压强为  $p_0$ )

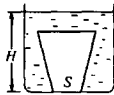


图 2-5-1

**分析与解** 浮力的本质是液体对物体的压力的合力.由于圆台底部与容器底面紧密连成一体,水对圆台的底部无压力,水对圆台上表面的压力向下,水对圆台侧面的压力为垂直侧面斜向上.

现把圆台分成如图 2-5-2 所示的两部分,中间部分是底面积为  $S$  高为  $h$  的圆柱体,则圆柱体只受到向下的压力

$$f = [p_0 + \rho g(H - h)]S$$

剩余部分受到水对它向上的作用力为  $F = \rho(V - Sh)g$

因此,圆台受到的合力为

$$\Delta F = F - f = \rho Vg - (\rho_0 + \rho gH)S$$

讨论:①当  $\rho Vg - (\rho_0 + \rho gH)S > 0$  时,合力向上,有浮力;

②当  $\rho Vg - (\rho_0 + \rho gH)S < 0$  时,合力向下,无浮力;

③当  $\rho Vg - (\rho_0 + \rho gH)S = 0$  时,合力等于零,处于临界状态.

本题要求理解浮力的含义.

**例 2** 如图 2-5-3 所示,  $A$  是一块质量为  $M$  的木块,  $B$  是质量为  $m$  的小铁块,共同浮在水面上.若将小铁块从木块上取下而直接放在水中,那么水的高度将如何变化?

**分析与解** 本例最简单的办法是考察所排开的水的体积.

木块和铁块一起时,排开的水的重量等于木块与铁块的总重量,排

开水的体积为  $V_0 = \frac{(M+m)g}{\rho_0 g} = \frac{(M+m)}{\rho_0}$

其中  $\rho_0$  为水的密度.

铁块在水中时,木块排开的水的重量等于木块的重量,铁块排开的水的体积等于铁块的体积,则排开水的总体积为  $V_1 = \frac{Mg}{\rho_0 g} + \frac{mg}{\rho_{\text{铁}} g} = \frac{M}{\rho_0} + \frac{m}{\rho_{\text{铁}}}$

因为水的密度小于铁,即  $\rho_0 < \rho_{\text{铁}}$ ,所以  $V_1 < V_0$ ,可见水面下降.

**例 3** 如图 2-5-4 所示,杯中盛有密度为  $\rho$  的均匀混合液体,经过一段时间之后,变为两层均匀液体,其密度分别为  $\rho_1$  和  $\rho_2$  ( $\rho_2 > \rho_1$ ),设总体积不变,问杯内底面所受液体压强是否因此而改变?如有改变,是增大还是减小?

**分析与解** 因为液体的总质量不变,若杯子是柱形的,显然液体分层后对容器底面的压强相等,但现在杯子上大下小,由于倾斜的杯壁也支持了一部分液体的重量,故液体对杯底的压强可能要发生变化.

液体对杯底的压强决定于竖直液柱的重量和杯底的横截面积,而竖直液柱的重量又等于全部液体的重量减去斜柱部分液体的重量,假定密度大的液体在杯底形成的厚度很小,甚至可以不计,则斜柱部分全是密度为  $\rho_1$  液体.显然斜柱部分的液体重量和原来相比减小,竖直液柱重量增大,杯底受液体压强增大.这是用极端推理方法求得的.以下作一般的证明:

设分层后的液面如图 2-5-5 所示,  $S$  为混合液体的平均横截面积,  $S_1, S_2$  分别是密度为  $\rho_1$  和  $\rho_2$  液体相应的平均横截面积,  $h_1, h_2$  分别是密度为  $\rho_1$  和  $\rho_2$  液体相应的高度,由于总体积不变,则



图 2-5-2

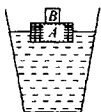


图 2-5-3

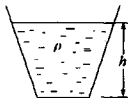


图 2-5-4

$$Sh = S_1 h_1 + S_2 h_2$$

又由于总质量不变,则有  $\rho Sh = \rho_1 S_1 h_1 + \rho_2 S_2 h_2$

液体对杯底的压强在分层前后分别为

$$p_{前} = \rho gh, \quad p_{后} = \rho_1 gh_1 + \rho_2 gh_2$$

把①式代入②式,得  $\rho(S_1 h_1 + S_2 h_2) = \rho_1 S_1 h_1 + \rho_2 S_2 h_2$

而  $S_1 > S_2$

整理后,得  $\rho(h_1 + h_2) < \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$

因此  $\rho g(h_1 + h_2) < \rho_1 gh_1 + \rho_2 gh_2$

即  $p_{前} < p_{后}$

**例 4** 用一根细线竖直悬挂一根长为  $l$  的均匀细木杆,置于水桶内水面上方,如图 2-5-6 所示.当水桶缓慢上提时,细木杆逐渐浸入水中.当木杆浸入水中超过一定深度  $l'$  时,木杆开始出现倾斜现象.求  $l'$ . (已知木杆密度为  $\rho$ ,水的密度为  $\rho_0$ )

**分析与解** 当木杆部分浸入水中时,它受到三个力,悬线的拉力  $T$ ,重力  $G$  和浮力  $F$ ,木杆可以保持竖直状态的平衡.随着浸入深度的增加,木杆不可能在竖直方向稳定平衡,有一扰动就会倾斜,如图 2-5-7 所示.木杆倾斜的原因是拉力、重力和浮力这三个力的力矩共同作用的结果.

如图 2-5-7 所示,木杆受扰动偏离竖直方向  $\theta$  角,以悬线系着点为支点,则张力  $T$  的力矩当然为零,重力的力矩为

$$M_G = G(l/2)\sin\theta = \rho l^2 S g (\sin\theta)/2$$

其中  $S$  为杆的横截面积,设木杆浸入水中的长度为  $x$ ,由浮力的力矩为  $M_F = F(l-x/2)\sin\theta = \rho_0 x(l-x/2)Sg\sin\theta$

若  $M_G > M_F$ ,则杆恢复竖直状态;若  $M_G < M_F$ ,则杆将偏离竖直状态.

因此,要使杆竖直状态,必须

$$\rho l^2 S g (\sin\theta)/2 > \rho_0 x(l-x/2)Sg\sin\theta$$

即  $\rho_0(l-x)^2 - (\rho_0 - \rho)l^2 > 0$

故  $x < l - l\sqrt{1 - \rho/\rho_0}$  或  $x > l + l\sqrt{1 - \rho/\rho_0}$ . 后一个解不符合实际.

故  $x$  不得超过  $l - l\sqrt{1 - \rho/\rho_0}$ .

故  $l' = l(1 - \sqrt{1 - \rho/\rho_0})$  是临界位置,超过这个值,杆将倾斜.

### 【巩固习题】

1. 一个半径为  $R$  的马德堡半球,抽成真空后置于大气压为  $p_0$  的空气中,不计球壳重量,则两半球间压力为 ( )

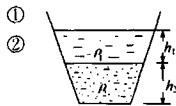


图 2-5-5



图 2-5-6

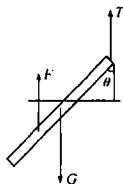


图 2-5-7

A.  $F=0$

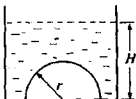
B.  $F=4\pi R^2 p_0$

C.  $F=2\pi R^2 p_0$

D.  $F=4\pi R^2 p_0/3$

E.  $F=p_0\pi R^2$

2. 有一密度为  $\rho_1$ 、半径为  $r$  的半球放在盛有密度为  $\rho_2$  的液体的容器底部,它与容器底部密切接触(即半球表面与容器底面间无液体),如图 2-5-8 所示,若液体深度为  $H$ ,问半球对容器底部的压力是多大?



3. 如图 2-5-9 所示,半径为  $r$  的球浮于密度分别为  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的分层液体的界面处.设分界面正好位于球的直径平面上,问球所受到的浮力有多大?

图 2-5-8

4. 小圆筒 A 底部有一半半径为  $r$  的圆孔,大圆筒套于 A 的外部,里外圆筒中分别盛有密度为  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的液体,液面相平,距 A 底部为  $h$ ,一半径略大于  $r$  的圆球盖住圆孔,如图 2-5-10 所示,试求圆球受液体的浮力.

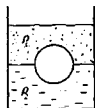


图 2-5-9

5. 某人在一船上,船中有两块物体,一块是密度比水大的石块,另一块是密度比水小得多的木块.小船浮在面积为  $S$  的小池塘的水面上.试问在下面三种情况下,水塘的水面高度将分别作如何变化?(1)把石块单独投入水中;(2)将木块单独投入水中;(3)将木块与石块捆在一起后投入水中,它们一起沉到塘底.

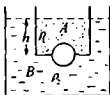


图 2-5-10

6. 在两只形状、大小完全相同的上粗下细的圆台形容器中注入相同质量的不同液体,液体对容器底的压强分别为  $p_1, p_2$ ,如图 2-5-11 所示.若液体的密度为  $\rho_1 > \rho_2$ ,则有( )

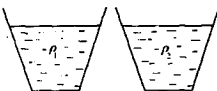


图 2-5-11

A.  $p_1 > p_2$

B.  $p_1 < p_2$

C.  $p_1 = p_2$

D. 条件不足,无法判断

7. 在图 2-5-12 中有一根细而均匀的棒长为  $l$ ,一端悬

以重为  $P_1$  的小球(球的体积可忽略不计).设棒的  $\frac{1}{n}$  浮出水面,求棒的重力  $P$ .

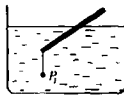


图 2-5-12

8. 在蜡烛的底部插入一个铁钉后,竖立在水中,蜡烛露出水面 1cm,已知蜡烛的密度为水密度的 0.9 倍,现将蜡烛点燃,蜡烛燃烧多长后才可熄灭?

9. 竖直放置的气缸中有一开孔活塞,活塞的孔中又插入一可移动的塞栓.活塞和塞栓的各滑动表面的摩擦均可忽略,它们的下方充满了密度为  $\rho$  的液体,而液体不能从缝隙中流出,活塞和塞栓均处于平衡,如图 2-5-13 所示.现在塞栓顶上放一质量为  $m_0$  的物体,则塞栓相对初始位置将下移多少距离?设气缸横截面积为  $S$ ,塞栓横截面积为  $S_0$ .

10. 石质的水库底上有一棱长为  $a = 2\text{m}$  的立方体, 其材料密度是水密度的 7 倍, 想用一装置把立方体从水库底提上来, 该装置采用吸盘的原理, 如图 2-5-14 所示, 即把一边长为  $a$  的正方形吸盘紧扣在立方体的上表面, 抽走吸盘内的空气直到压强  $p = 0$ , 问能不能借助这个装置把立方体拉到水面? 如不能, 在什么深度立方体脱离吸盘? 已知大气压强  $p_0 = 10^5 \text{Pa}$ .

## 第六节 综合训练

### 【例题分析】

**例 1** 有一木板可绕其下端的水平轴转动, 转轴位于一竖直墙面上, 如图 2-6-1 所示, 开始时木板与墙面的夹角  $15^\circ$ , 在夹角中放一正圆柱形木棍, 截面半径为  $r$ , 在木板外侧加一力  $F$  使其保持平衡. 在木棍端面上画一竖直向上的箭头. 已知木棍与墙面之间和木棍与木板之间的静摩擦因数分别为  $\mu_1 = 1.00$ ,  $\mu_2 = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$ . 若缓慢地减小所加的力  $F$ , 使夹角慢慢张开, 木棍下降. 问当夹角张到  $60^\circ$  时, 木棍端面上的箭头指向什么方向? 附三角函数表

$\theta$	$7.5^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$
$\sin\theta$	0.131	0.259	0.500	0.866
$\cos\theta$	0.991	0.966	0.866	0.500



图 2-6-1

**分析与解** 若圆柱形木棍光滑, 则箭头指向不变. 现两边摩擦因数不同, 则可能一边发生滑动, 另一边不发生滑动即发生无滑动的滚动. 当  $F$  减小时, 判断哪一接触面发生滑动是解决本题的关键.

如图 2-6-2 所示, 对木棍进行受力分析. 因为缓慢地减小所加的力  $F$ , 所以每一状态都是平衡态. 由合力矩为零可知  $F_1 = F_2$ . 由合力为零可得

$$F_1 + F_2 \cos\theta + N_2 \sin\theta = mg$$

$$N_1 = N_2 \cos\theta - F_2 \sin\theta$$

① 木棍在墙面上滑动的条件为:  $F_1 = \mu_1 N_1$ ,  $F_2 \leq \mu_2 N_2$ . 即  $\mu_1 N_1 \leq \mu_2 N_2$ , 结合上面的两平衡方程得

$$N_2 \cos\theta = N_1 + F_2 \sin\theta \leq \mu_2 N_2 / \mu_1 + \mu_2 N_2 \sin\theta$$

$$\sin\theta + 1/\mu_1 \geq \cos\theta / \mu_2$$

代入数据得  $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta \leq 1$ , 解得  $\theta \geq 30^\circ$

即当  $\theta \geq 30^\circ$  时, 木棍在墙面上滑动。

② 木棍在斜面上滑动的条件为:  $F_2 = \mu_2 N_2$ ,  $F_1 \leq \mu_1 N_1$ , 即  $\mu_2 N_2 \leq \mu_1 N_1$ . 与①相类似可得

$$N_2 \cos\theta = N_1 + F_2 \sin\theta \geq \mu_2 N_2 / \mu_1 + \mu_2 N_2 \sin\theta$$

$$\sin\theta + 1/\mu_1 \leq \cos\theta / \mu_2$$

代入数据得  $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta \geq 1$ , 解得  $\theta \leq 30^\circ$

即当  $\theta \leq 30^\circ$  时, 木棍在斜面上滑动。

综上所述:  $\theta$  从  $15^\circ$  到  $30^\circ$  时, 木棍在斜面上先滑动;

$\theta$  从  $30^\circ$  到  $60^\circ$  时, 木棍在墙面上先滑动。

设张角在  $15^\circ$ 、 $30^\circ$  和  $60^\circ$  时木棍中心的高度 (从转轴算起) 为  $h_1$ 、 $h_2$ 、 $h_3$ , 由于  $r/h = \tan(\theta/2)$ , 由图 2-6-3 可知

$$AO = A'O = h_1 = r \cot(15^\circ/2) = 7.75r$$

$$BO = B'O = h_2 = r \cot(30^\circ/2) = 3.73r$$

$$CO = C'O = h_3 = r \cot(60^\circ/2) = 1.73r$$

当木棍由 A 下落至 B 时, 顺时针转  $\varphi_1$  角,

$$\varphi_1 = (h_1 - h_2)/r = 3.84 \text{ rad} = 220^\circ$$

由 B 下落至 C 时, 木棍在木板 L 上逆时针转  $\varphi_2$  角,

$$\varphi_2 = (h_2 - h_3)/r = 2.00 \text{ rad} = 115^\circ$$

而在这一过程中, 木板本身顺时针转了  $30^\circ$ , 因此箭头的最后指向为  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + 30^\circ = 135^\circ$

**例 2** 半径为  $r$ 、质量为  $m$  的三个相同的刚性球放在光滑的桌面上, 两两互相接触, 用一高为  $1.5r$  的圆柱形刚性圆筒 (上下均无底) 将此三球套在筒内, 圆筒的半径选取适当值, 使得各球间及圆筒与球间均保持接触, 但相互间无作用力, 现取一质量为  $m$ 、半径为  $R$  的第四个球放在三球上方的正中, 设所有接触面的摩擦因数均为  $\mu = \frac{3}{\sqrt{15}}$ , 问  $R$  取何值时, 用手轻轻竖直向上提起圆筒, 即能将四球一起提起来?

**分析与解** 此题中四个球的球心不在同一平面上, 属于空间力系。把空间力变成平面力是本题的关键。如图 2-6-4 所示, 画出俯视图和 OA 截面的侧视图。

设系统已按题目要求提高桌面而保持静止, 分别对上球

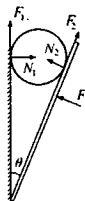


图 2-6-2

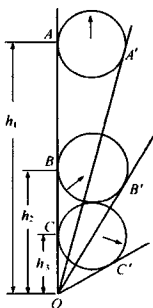


图 2-6-3

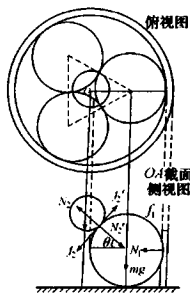


图 2-6-4

和下球进行受力分析.

上球:受到重力、三个下球对它的摩擦力  $f_2$  和弹力  $N_2$  作用.

下球:受到重力、圆筒对它的摩擦力  $f_1$  和弹力  $N_1$ 、上球对它的摩擦力  $f_2$  和弹力  $N_2$ . 把四个球整体作为研究对象, 有  $3f_1 = 4mg$ .

对于上球, 合力为零, 有  $3N_2 \sin \theta - 3f_2 \cos \theta = mg$

对于下球, 合力为零, 有  $N_1 = N_2 \cos \theta + f_2 \sin \theta$

$$f_1 + f_2 \cos \theta - N_2 \sin \theta = mg$$

以球心为轴, 合力矩为零, 有  $f_1 = f_2$ , 根据作用力与反作用力的特点, 有  $f_2 = f_2$ ,  $N_2 = N_2'$ , 由以上各式可解得  $f_1 = f_2 = \frac{4mg}{3}$

$$N_1 = \frac{1}{3} mg \cot \theta + \frac{4}{3} mg \frac{1}{\sin \theta}, N_2 = \frac{4}{3} mg \cot \theta + \frac{1}{3} mg \frac{1}{\sin \theta}$$

为使球不发生相对滑动, 并非上球与下球之间和下球与圆筒之间同时达到最大静摩擦力.

下球与圆筒之间不发生滑动的条件:  $f_1 \leq \mu N_1$ , 即

$$\frac{4mg}{3} \leq \mu \left( \frac{1}{3} mg \cot \theta + \frac{4}{3} mg \frac{1}{\sin \theta} \right)$$

解得 
$$\mu \geq \frac{4 \sin \theta}{4 + \cos \theta}$$

上球与下球之间不发生相对滑动的条件:  $f_2 \leq \mu N_2$ , 即

$$\frac{4mg}{3} \leq \mu \left( \frac{4}{3} mg \cot \theta + \frac{1}{3} mg \frac{1}{\sin \theta} \right)$$

解得 
$$\mu \geq \frac{4 \sin \theta}{1 + 4 \cos \theta}$$

现在  $\mu = \frac{3}{\sqrt{15}}$  已确定, 对于一定的  $\theta$ ,  $4 + \cos \theta > 4 \cos \theta + 1$ . 因此, 两球之间先发生相对滑动. 由  $\frac{3}{\sqrt{15}} \geq \frac{4 \sin \theta}{1 + 4 \cos \theta}$ , 解得  $\theta \leq 46.56^\circ$

由几何知识可得, 圆筒的半径  $R_0 = \left( 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) r$ ,  $\cos \theta = \frac{R_0 - r}{R + r}$

所以 
$$R = \frac{R_0 - r}{\cos \theta} - r \leq 0.68r$$

同时, 球的半径不能太小, 否则将在三球中掉下, 即必须使

$$R > \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 \right) r - 2r = 0.15r$$

因此 
$$0.15r < R \leq 0.68r$$

**例3** 重为  $W$  的 6 根均匀刚性棒光滑铰合成正六边形  $ABCDEF$ , 顶边  $AB$  棒水平固

定在天花板上,问在底边  $DE$  的中点加一个多大的竖直方向的力  $F$ ,可维持正六边形的平衡?

**分析与解** 静力学问题除了常规的用平衡方程求解外,还有一种方法——虚功原理.6根棒的重心位于正六边形的中心.设底边  $DE$  在  $F$  作用下极缓慢地上升很小的位移  $\Delta x$ ,则重心升高  $\frac{\Delta x}{2}$ .由功能关系有  $F \cdot \Delta x = 6W \cdot \frac{\Delta x}{2}$ ,故  $F = 3W$

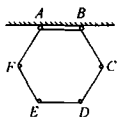


图 2-6-5

### 【精选习题】

1. 有一水果店,所用的秤是吊盘式杆秤,量程为 10kg,现有一较大的西瓜,超过此秤的量程.店员 A 找到另一秤砣,与此秤砣完全相同,把它与原秤砣结合在一起作为秤砣进行称量.平衡时,双砣位于 6.5kg 刻度处,他将此读数乘以 2 得 13kg,作为此西瓜的质量,卖给顾客.店员 B 对这种称量结果表示怀疑.为了检验,他取另一西瓜,用单秤砣正常秤得 8kg,用店员 A 的双秤砣法称量,得读数为 3kg,乘以 2 后得 6kg.这证明了店员 A 的办法是不可靠的.试问,店员 A 卖给顾客的那个西瓜的实际质量是多少?

2. 有 6 个完全相同的刚性长条薄片  $A_i B_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ , 其两端下方各有一个小突起,薄片及突起的质量均可以不计.现将此 6 个薄片架在一只水平的碗口上,使每个薄片一端的小突起  $B_i$  恰在碗口上,另一端小突起  $A_i$  位于其下方薄片的正中,由上方俯视图如图所示.若将一质量为  $m$  的质点放在薄片  $A_6 B_6$  上一点,这一点与此薄片中心的距离等于它与小突起  $A_6$  的距离,如图 2-6-6,求薄片  $A_6 B_6$  中点所受的(由另一薄片的小突起  $A_1$  所施的)压力.

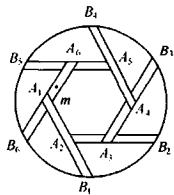


图 2-6-6

3. 一长方形均匀薄板  $AB$ , 可绕通过其重心、垂直于长度方向的固定水平轴  $O$  (垂直纸面) 自由转动,如图 2-6-7 所示.在板上由  $O$  左侧距  $O$  点为  $L$  处以轻绳悬挂一质量为  $m$  的物体.在轴  $O$  的右侧板上放一质量也是  $m$  的立方体,立方体边长以及其左侧面到  $O$  轴的距离均为  $l$ .已知起始板处于水平位置,挂物与地面相接触,轻绳绷紧,整个系统处于平衡状态.现在立方体右侧面中心处施一沿水平方向向右的力  $F$  去拉它,若用符号  $\mu$

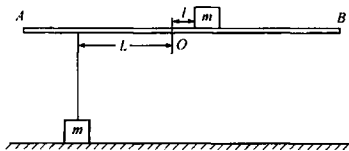


图 2-6-7



表示立方体与板面间的静摩擦因数,当  $F$  从零开始逐渐增大至某一数值时,整个系统的平衡状态将开始被破坏.试讨论:可能出现几种平衡状态被破坏的情况?每种情况出现的条件是什么?要求在以  $\mu$  为纵坐标,  $x (= \frac{2L}{l} - 3)$  为横坐标的图中,画出可能发生这几种情况出现的区域.不要求讨论这些区域交界线上平衡状态被破坏的情况.

4. 用两个“爬犁”(雪橇)在水平雪地上运送一根质量为  $m$ 、长为  $l$  的均匀横梁,横梁保持水平,简化示意图如图 2-6-8 所示,每个爬犁的上端  $A$  与被运送的横梁端头固连,下端  $B$  与雪地接触,假设接触面积很小.一水平牵引力  $F$  作用于前爬犁,作用点到雪地的距离用  $h$  表示.已知前爬犁与雪地间的动摩擦系数为  $k_1$ ,后爬犁与雪地间的动摩擦系数为  $k_2$ .问要在前后两爬犁都与雪地接触的条件下,使横梁沿雪地匀速向前移动,  $h$  应满足什么条件?水平牵引力  $F$  应多大?设爬犁的质量可忽略不计.

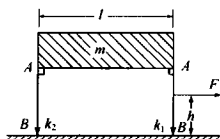


图 2-6-8

5. 两条质量均为  $m$  的相同的均匀细杆  $AB$ 、 $BC$  在  $B$  端相连,杆  $AB$  的上端  $A$  与天花板上的固定点相连,杆  $BC$  的下端  $C$  与水平地面接触,  $A$  点和  $B$  点的连接都是光滑的,地面是粗糙的,  $A$  点到地面的距离为杆长的  $\sqrt{2}$  倍,整个系统可在竖直平面内自由运动.  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别为两杆与竖直线的夹角,如图 2-6-9 所示.(1)试讨论在什么条件下,无论杆与地面的动摩擦系数多少大,这两杆组成的系统都不可能达到平衡,要求用计算器通过数值计算,找出处于这种情况时  $\theta_1$  的取值范围.(2)讨论该系统处在各种平衡位置时摩擦力  $f$  的大小(用  $\theta_1$  和  $\theta_2$  表示)和方向.

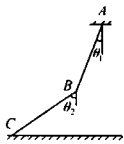


图 2-6-9

6. 一个空心的环形管沿一条直径截成两部分,一半竖立在铅垂平面内如图 2-6-10 所示,管口连线在一水平线上,向管内装入与管壁相切的小滚珠,左、右侧第一个滚珠都与圆管截面相切.已知单个滚珠重  $W$ ,共  $2n$  个,求从左边起第  $k$  个和第  $k+1$  个滚珠之间的相互压力  $N_k$ . (假设系统中处处无摩擦)



图 2-6-10

7. 如图 2-6-11 所示,有两根不可伸长的柔软的轻绳,长度分别为  $l_1$  和  $l_2$ ,它们的下端在  $C$  点相连接并悬挂一质量为  $m$  的重物,上端分别与质量可忽略的小圆环  $A$  和  $B$  可在横杆上滑动,它们与横杆间的静摩擦系数分别为  $\mu_1$  和  $\mu_2$ .已知  $l_1$  和  $l_2$  的数值,且  $l_1 < l_2$ .试求  $\mu_1$  和  $\mu_2$  在各种取值情况下,此系统处于静力平衡时两环之间的距离  $AB$ .

8. 如图 2-6-12 所示,在倾角为  $\varphi$  的足够大的粗糙斜面上,有一质量为  $m$  的质点,被一根弹性绳拴住,绳的另一端固定在斜面上  $O$  点.弹性绳的形变与弹性力服从胡克

定律. 绳原长为  $L$ , 劲度系数为  $k$ , 斜面与质点间的静摩擦因数为  $\mu$ . 试确定质点在斜面上可静止的区域, 并画出此区域边界的示意图.

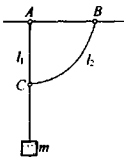


图 2-6-11



图 2-6-12

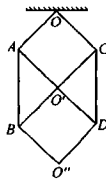


图 2-6-13

9. 如图 2-6-13 所示,  $AO, CO, AD, BC, BO'', DO''$  为均匀钢片, 可绕  $O, A, C, O', B, D, O''$  转动. 由它们组成如图状铰链,  $AB$  与  $CD$  两端分别用绳连接, 下挂重物  $M$ , 若知钢片条  $AO, CO, BO'', DO''$  质量均为  $m$ ,  $AD, BC$  的质量为  $2m$ . 问静止时绳子中的张力为多大?

### 问题与讨论 矢量三角解法

矢量图, 是研究物理问题的重要工具之一. 它不仅适用于物理量中各种矢量的迭加, 而且还适用于可以用矢量表示的代数量(如正弦交流量)的运算. 矢量运算的基本法则则有四种: 平行四边形法、三角形法、多边形法和正交分解法. 下面, 主要介绍三角形法在解决物理问题中的作用.

**例 1** 如图 2-7-1 所示, 重为  $P$  和  $Q$  的两个小环  $A$  和  $B$  都套在一个竖直光滑的大圆环上, 大圆环固定在地上, 长为  $l$  的质量不计的细绳的两端分别拴在小环  $A$  和  $B$  上, 然后细绳挂在光滑的钉子  $O'$  上,  $O'$  位于大圆环圆心  $O$  的正上方, 当它们都静止不动时,  $A$  环和  $B$  环到钉子  $O'$  的距离分别记为  $r$  和  $r'$ , 试证:

$$\frac{r}{Q} = \frac{r'}{P} = \frac{l}{Q+P}$$

**分析与解** 由于不计绳子质量和摩擦, 绳子中张力处处相等, 设为  $T$ . 大圆环对小环  $A$  和  $B$  的弹力  $N_A$  和  $N_B$  的方向分别沿半径  $OA$  和  $OB$  方向. 环  $A$  和  $B$  分别受到共面三个力: 重力、大圆环的弹力和绳子拉力作用而平衡, 如图 2-7-2 所示, 这三个力一定构成封闭的三角形. 由图中可知, 矢量三角形和几何三角形相似, 即

$$\triangle PN_A T \sim \triangle OAO', \quad \triangle QN_B T \sim \triangle OBO'$$

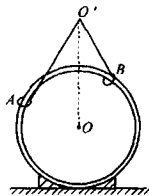


图 2-7-1

由数学知识可得  $\frac{T}{P} = \frac{r'}{OO'}$ ,  $\frac{T}{Q} = \frac{r'}{OO'}$ , 所以

$$\frac{r}{Q} = \frac{r'}{P} = \frac{r+r'}{Q+P} = \frac{l}{Q+P}$$

**例 2** 一架均匀梯子, 一端放置在水平地面上, 另一端靠在竖直的墙上, 梯子与地面及梯子与墙的静摩擦系数分别为  $\mu_1, \mu_2$ , 求梯子能平衡时与地面所成的最小夹角. ( $\theta = \arctan \frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1}$ , 与梯重、梯长均无关)

**分析与解** 当两接触处的静摩擦力都达到最大时, 梯子处于极限平衡状态, 此时梯子与地面所成的夹角最小. 如图 2-7-3 所示, 在 A 处地面对梯子的摩擦力为最大静摩擦力, 即  $f_A = \mu_1 N_A$ .

设  $f_A$  与  $N_A$  的合力为  $F_1$ ,  $F_1$  与  $N_A$  夹角为  $\varphi_1$ , 则  $\tan \varphi_1 = \mu_1$ . 同理可得, 如果墙面对 B 摩擦力和弹力的合力  $F_2$ ,  $F_2$  与  $N_B$  夹角为  $\varphi_2$ , 则  $\tan \varphi_2 = \mu_2$ .

由力的平衡知识可得, 力  $F_1$  和  $F_2$ 、重力  $G$  三力的作用线交于一点 D, 如图 2-7-3 所示, 有

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{BC}{AC} = \frac{DH - DE}{2AH} = \frac{DH}{2AH} - \frac{DE}{2EB} = \frac{1}{2} \cot \varphi_1 - \frac{1}{2} \tan \varphi_2 \\ &= \frac{1}{2\mu_1} - \frac{\mu_2}{2} \end{aligned}$$

因此, 梯子与地面所成的最小角

$$\theta = \arctan \frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1}, \text{ 与梯重、梯长均无关.}$$

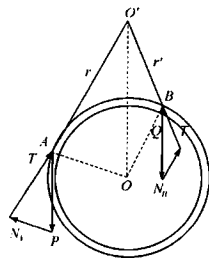


图 2-7-2

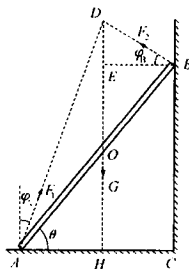


图 2-7-3

### 【巩固习题】

1. 如图 2-7-4 所示, 倾角为  $\alpha$  的斜面 and 挡板之间, 有一个质量为  $M$  的球处于静止状态. 试分析挡板对球的压力  $F$  大小和斜面对小球的支持力  $N$  的大小随  $\theta$  的变化关系.

2. 如图 2-7-5 所示, 在半圆形支架上, 用两根长为半径的细线  $OB$  和  $OA$  悬挂着重为  $G$  的砝码;  $B$  端固定不动, 且  $OB$  与竖直方向成  $\alpha$  角;  $A$  端可以在支架右侧自由滑动. 试分析, 在  $OA$  与竖直方向的夹角  $\beta$  从  $0^\circ$  变到  $90^\circ$  的过程中, 悬线  $OA$ ,  $OB$  和  $OG$  的张力如何变化?

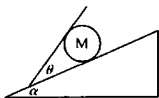


图 2-7-4

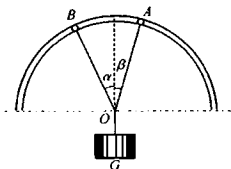


图 2-7-5

3. 如图 2-7-6 所示,一架轻质梯子斜靠在光滑的竖直墙壁上,且与地面的摩擦系数足够大.一个人沿梯子慢慢向上爬,则在此过程中,墙壁对梯子的作用力  $N$  和地面对梯子的作用力  $F$  将发生下述变化( )

- A.  $N$  由小变大,  $F$  由大变小  
 B.  $N$  由小变大,  $F$  由小变大  
 C.  $N$  由大变小,  $F$  由小变大  
 D.  $N$  由大变小,  $F$  由大变小

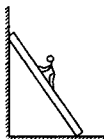


图 2-7-6

4. 如图 2-7-7 所示,用两根轻质绳把重为  $Mg$  的不均匀棒悬挂起来呈水平静止状态;一根绳子与竖直方向的夹角  $\varphi = 38^\circ$ ;另一根与竖直方向的夹角  $\theta = 51^\circ$ . 设棒长  $l = 6.0\text{cm}$ ,试问重心离右端的距离  $x$  等于多少?

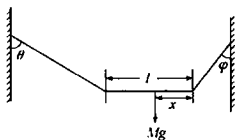


图 2-7-7

5. 一根重绳的两端分别拴在  $A, B$  两点,悬挂如图 2-7-8. 在  $A$  点绳的张力大小为  $20\text{N}$ ,求作用在绳上的重力.

6. 一物体质量为  $m$ ,置于倾角为  $\alpha$  的斜面上,物体与斜面间的滑动摩擦系数为  $\mu_k$ .若要使物体沿斜面匀速向上滑动,求拉力的最小值.

7. 质量为  $m = 2.0\text{kg}$  的均匀长杆 ( $AB = l$ ),  $A$  端用铰链固定在竖直墙壁上,在下端  $B$  用水平方向的拉力  $P$  将杆拉至与墙成  $30^\circ$  角(如图 2-7-9 所示).试作图分析并计算  $P$  力的大小及铰链对  $A$  端的作用力  $R$  的大小和方向 ( $g = 10\text{m/s}^2$ ). (方向可用反三角函数表示,不必查表)



图 2-7-8

8. 如图 2-7-10 所示,一均匀直棒倾斜地放置在粗糙的半球形碗内,若由球心到直棒两端所张的圆心角为  $2\alpha$ ,而直棒与球碗表面间静摩擦系数为  $\mu_s = \tan\beta$ ,试证明直棒与水平面间的倾角  $\theta = \arctan \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha - \beta)}{2}$ .

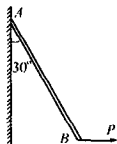


图 2-7-9

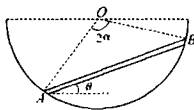


图 2-7-10

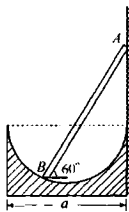


图 2-7-11

9. 如图 2-7-11 所示,一光滑半球形容器,直径为  $a$ ,其边缘恰好与一光滑竖直墙壁相切.现有一均匀直棒  $AB$ ,其  $A$  端靠在墙上, $B$  端与容器底相接触,当棒倾斜与水平成  $60^\circ$  角时棒恰好静止.求棒的长度.

10.  $A$ 、 $B$  为全同的物块,按图 2-7-12 所示铰接于  $M$ 、 $N$ 、 $P$  三处. $M$ 、 $N$  在同一水平面上, $A$ 、 $B$  的重量可忽略不计.顶边水平,且各长  $3\text{m}$ ;侧边竖直,高  $4\text{m}$ .今在  $B$  的顶上距  $P$   $1.5\text{m}$  处加一竖直力  $F=400\text{N}$ ,求  $B$  对铰链  $P$  的作用力.

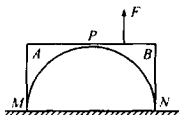


图 2-7-12

11. 如图 2-7-13 所示,一扇窗门高  $1\text{m}$ 、宽  $0.8\text{m}$ 、重  $6\text{kg}$ 、厚度均匀.在门的一侧,距上、下端各  $0.2\text{m}$  的两点安装铰链,门的重量是由两个铰链平均负担,求铰链对门上这两点的作用力.试问铰链相距越近铰链对门的作用力越大还是越小?

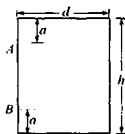


图 2-7-13

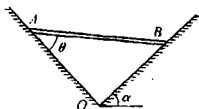


图 2-7-14

12. 在互相垂直的斜面上放置一匀质杆  $AB$ ,如图 2-7-14 所示,设各接触面的摩擦角均为  $\varphi$  ( $\mu = \tan \varphi$ ),求平衡时杆  $AB$  与斜面  $AO$  的交角  $\theta$ . 已知斜面  $BO$  和水平面交角为  $\alpha$ .

## 第三章 牛顿运动定律

### 第一节 牛顿运动定律



#### 【知识要点】

#### 一、牛顿三大定律

第一定律:任何物体都保持静止状态或匀速直线运动状态,直到其他物体的作用迫使它改变这种状态为止。

第二定律:物体受外力作用时,物体所获得的加速度的大小与合外力的大小成正比,并与物体的质量成反比,加速度的方向与合外力的方向相同。用方程式表示,牛顿第二定律的数学表达式为

$$\vec{a} = k \frac{\sum \vec{F}}{m} \text{ 或 } \sum \vec{F} = k m \vec{a}$$

在国际单位制中,取  $k=1$ ,定义出力的单位——牛顿,上式可简化为

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

牛顿第三定律:两个物体间的相互作用力总是等值反向且沿同一直线。

#### 二、牛顿运动定律的应用

应用牛顿定律解题的一般步骤有:(1)仔细审题;(2)确定研究对象;(3)进行力的分析;(4)根据运动学公式或牛顿第二定律列方程;(5)解方程;(6)进行必要的讨论。

对于较复杂的题,特别要注意隐含条件。牛顿定律除了解决单个质点的问题外,还有联接体问题和质点组问题。

##### 1. 联接体问题

两个或两个以上的物体在某一种力(一般是弹力或摩擦力)作用下一起运动,叫做联接体。解联接体的问题一般要用隔离法,即把某一个物体隔离出来进行分析。有时联接体中的各个物体具有不同的加速度,必须确定它们的加速度之间的关系。

##### 2. 质点组动力学

如果我们的研究对象是由多个质点组成的质点组,那么要想解决它们的动力学问题,一个基本的方法是:分别以各个质点作为研究对象运用牛顿第二定律列方程,联列求解。

设想有  $n$  个质点质量分别为  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , 用  $\vec{f}_{ij}$  表示第  $j$  个质点对第  $i$  个质点的作用力, 用  $\vec{F}_i$  表示第  $i$  个质点受到的合外力, 分别对  $n$  个质点列出牛顿第二定律的具体表达式, 则有

$$\vec{F}_1 = \vec{f}_{11} + \vec{f}_{21} + \dots + \vec{f}_{n1} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{F}_2 = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{32} + \dots + \vec{f}_{n2} = m_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{F}_3 = \vec{f}_{13} + \vec{f}_{23} + \dots + \vec{f}_{n3} = m_3 \vec{a}_3$$

.....

$$\vec{F}_n = \vec{f}_{1n} + \vec{f}_{2n} + \dots + \vec{f}_{(n-1)n} = m_n \vec{a}_n$$

由牛顿第三定律可得  $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

以上各式相加可得  $\sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{a}_i$

通常令  $\sum m_i \vec{a}_i = M \vec{a}$ , 其中  $M = \sum m_i$ ,  $\vec{a}$  为质点组质心的加速度。

若质点组所受的合外力等于零, 有  $\sum m_i \vec{a}_i = 0$ 。

### 【例题分析】

**例 1** 质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的木块重叠后放在光滑的水平面上, 如图 3-1-1 所示。  $m_2$  和  $m_1$  间的动摩擦因数为  $\mu$ , 现给  $m_2$  施加随时间  $t$  增大的力  $F = kt$ , 式中  $k$  是常数。试求  $m_1$  和  $m_2$  的加速度  $a_1$  和  $a_2$  与时间的关系, 并绘出此关系的曲线图。

**分析与解** 由于  $m_1$  和  $m_2$  间有摩擦, 而地面是光滑的, 所以刚开始  $m_1$  和  $m_2$  将一起作加速运动, 设这个加速度为  $a$ , 根据牛顿定律有

$$F = kt = (m_1 + m_2) a$$

当  $t$  增大时,  $m_1$  和  $m_2$  间的摩擦力达到最大静摩擦力时,  $m_1$  和  $m_2$  将分离, 此时的摩擦力为  $f = \mu m_2 g$

因此  $m_1$  将做匀加速运动, 加速度  $a_2 = \mu m_2 g / m_1$

$m_2$  将做变加速运动, 加速度为  $a_1 = (kt - \mu m_2 g) / m_2 = kt / m_2 - \mu g$

设分离时刻为  $t_0$ , 则分离时  $a_1 = a_2$ , 所以  $t_0 = \mu(m_1 + m_2) g m_2 / k m_1$

所以本题的解为

当  $t \leq t_0$  时,  $a_1 = a_2 = kt / (m_1 + m_2)$ ;

当  $t > t_0$  时,  $a_1 = kt / m_2 - \mu g$ ,  $a_2 = \mu m_2 g / m_1$ 。

用图线表示, 如图 3-1-2 所示。

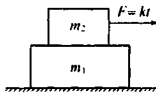


图 3-1-1

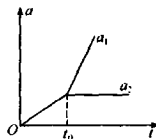


图 3-1-2

**例 2** 如图3-1-3所示,质量为  $m$  的物体  $A$ ,从底线  $l$  为定值的斜面顶点静止开始向下滑动,已知物体与斜面的动摩擦因数为  $\mu$ . 问  $\alpha$  角为何值时,下滑的时间最短,等于多少?

**分析与解** 此题很明显是已知力求运动,问题在于求极值,对于极值问题,通常采用物理分析和借助数学函数求极值两种方法,用数学函数求极值时,注意抓住变量与定量,本题  $l$  是定量.

由受力分析可知,物体的加速度  $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$   
物体的位移  $s = l/\cos\alpha$

由运动学公式  $s = \frac{1}{2}at^2$ , 可得  $t^2 = \frac{4l}{g(\sin 2\alpha - \mu\cos 2\alpha - \mu)}$

由数学知识可得,当  $\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{\mu}\right)$  时,  $t^2$  最小,也即时间  $t$  最短. 最短时间为

$$t_{\min} = \sqrt{\frac{4l}{g(\sqrt{1+\mu^2} - \mu)}}$$

**例 3** 将一单摆摆球拉至使摆线达水平位置,然后由静止释放摆球,求:(1)小球的总加速度及摆线的张力与摆线偏离竖直线的偏转角  $\theta$  的关系;(2)当小球速度的竖直分量为最大时摆线的张力;(3)小球总加速度矢量指向水平方向时摆线与竖直方向的夹角  $\theta$ .

**分析与解** 小球的运动是变速圆周运动,它的加速度可分解为切向加速度  $a_t$  和法向加速度  $a_n$ . 设摆长为  $l$ , 根据机械能守恒, 可求小球在任意点的速度  $v$ .

$$mgl\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = \sqrt{2gl\cos\theta}$$

如图3-1-4所示,进行受力分析,摆线的张力为  $T$ . 由牛顿运动定律可得

$$T - mg\cos\theta = ma_n$$

$$a_n = v^2/l$$

$$mg\sin\theta = ma_t$$

联立以上三式可得  $T = 3mg\cos\theta$

小球的加速度为  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = g\sqrt{1+3\cos^2\theta}$

以上的求解过程中,我们把加速度沿切向、法向分解. 但求第(2)小时,采用直角坐标比较方便,因为要求竖直方向分速度最大. 我们先来分析竖直速度的变化过程,当摆线在水平位置时,竖直方向速度为0;当小球在最低点时,竖直方向速度也为0;其他位置小球均有竖直方向的分速度. 因此,摆线从水平位置运动到小球到达最低点过程中,小球必有竖直方向速度最大值的位置. 这一点在哪里呢? 我们还得从力分析,仔细分析力的变化可知:开始时,小球只受到重力作用,方向竖直向下;当小球到达最低点时,加速度竖直向

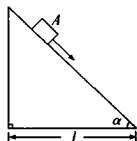


图 3-1-3

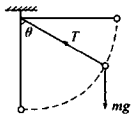


图 3-1-4



上.因此,小球在竖直方向上的运动是先加速后减速的运动,只有当竖直方向的合力等于零时,竖直方向速度最大,即当  $T \cos \theta = mg$  时,竖直方向速度最大.

由第(1)题的求解知,  $T = 3mg \cos \theta$

解得  $\cos^2 \theta = 1/3$  时,竖直方向的速度最大.此时张力  $T = \sqrt{3}mg$ .

要使小球总加速度矢量指向水平,那么有  $a_n, a_t$  的竖直分量的矢量和等于零,即

$$\frac{v^2}{l} \cos \theta = g \sin \theta \cdot \sin \theta$$

解得  $\tan \theta = \sqrt{2}, \theta = 54.7^\circ$

小结:在求竖直方向速度最大时的张力  $T$ ,我们采用的是物理分析法,若采用数学中的函数式求极值就较繁,有兴趣的同学可以推导一下.

**例 4** 如图 3-1-5 所示,质量分别为  $m_A$  和  $m_B$  的两木块 A、B 静止放置在粗糙的水平地面上,两者与地面之间的动摩擦因数均为  $\mu$ ,两木块 A、B 的接触面是倾角为  $\theta$  的斜面,接触面是光滑的.现施一水平推力  $F$  于 A,使 A、B 产生向右的加速度,且 A、B 间不发生相对滑动,试问  $\mu$  和  $F$  各应满足什么条件?

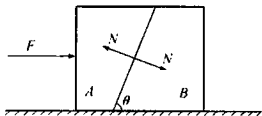


图 3-1-5

**分析与解** 本题有两要求:一是在力  $F$  作用下, A、B 产生不为零的加速度;二是 A、B 间无相对滑动,即 A 不能沿 B 的斜面上滑,试考虑 A、B 之间通过接触面互施的一对作用力和反作用力,其一为 A 对 B 的压力;另一为 B 给 A 的支持力,它们的大小均为  $N$ ,方向与斜面垂直.上述两点要求意味着  $N$  不能太小,否则  $N$  推不动 B,  $N$  也不能太大,否则 A 将离开地面向上滑动.分别隔离 A 和 B.根据上述要求,可找到  $N$  的取值范围.  $N$  与  $\mu$  有关,于是就求出  $\mu$  的取值范围.当 A、B 之间无相对运动时,它们具有共同的加速度,运用牛顿第二定律,根据对  $N$  的要求,即可求得对  $F$  的要求.

设在  $F$  的作用下, A、B 产生加速度.先隔离 B,如右图所示,在水平方向用牛顿第二定律,有

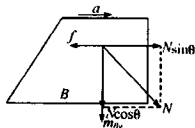
$$N \sin \theta - \mu(m_B g + N \cos \theta) = m_B a > 0 \quad (1)$$

再隔离 A,受重力  $m_A g$  向下;受 B 的支持力  $N$ ,  $N$  向上的分力  $N \cos \theta$ ,为了使 A 不离开地面(即 A、B 之间不产生相对滑动),就要求  $N \cos \theta \leq m_A g$

由不等式①有  $N(\sin \theta - \mu \cos \theta) > \mu m_B g$

②式和③式给出了  $N$  的如下取值范围,

$$\frac{m_A g}{\cos \theta} \geq N > \frac{\mu m_B g}{\sin \theta - \mu \cos \theta} \quad \text{即} \quad \frac{m_A g}{\cos \theta} > \frac{\mu m_B g}{\sin \theta - \mu \cos \theta}$$



②

③

由此得出  $\mu < \frac{m_A}{m_A + m_B} \tan \theta$

当  $\mu$  满足上式时,  $A, B$  将以共同的加速度  $a$  运动,  $A$  对地面所施的正压力为  $(m_A g - N \cos \theta)$ ,  $A$  受地面的水平向左的摩擦力为  $\mu(m_A g - N \cos \theta)$ . 在水平方向对  $A$  用牛顿第二定律, 得  $F - \mu(m_A g - N \cos \theta) - N \sin \theta = m_A a$

上式和①式, 得

$$\frac{N \sin \theta - \mu(m_B g + N \cos \theta)}{m_B} = \frac{F - \mu(m_A g - N \cos \theta) - N \sin \theta}{m_A}$$

即 
$$F = N(\sin \theta - \mu \cos \theta) \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right) \quad (4)$$

把条件③代入④式得  $F > \mu(m_A + m_B)g \quad (5)$

把条件②代入④式得  $F \leq \frac{m_A g}{\cos \theta} (\sin \theta - \mu \cos \theta) \left( 1 + \frac{m_A}{m_B} \right)$

即 
$$F \leq \frac{m_A}{m_B} (m_A + m_B) g (\tan \theta - \mu) \quad (6)$$

综合⑤、⑥式, 推力  $F$  的取值范围应为  $\mu(m_A + m_B)g < F \leq \frac{m_A}{m_B} (m_A + m_B) (\tan \theta - \mu) g$ .

**例 5** 如图 3-1-6 所示,  $C$  为一放在固定的粗糙水平桌面上的斜面, 其质量  $m_C = 6.5 \text{ kg}$ , 顶端有一定滑轮, 滑轮的质量及轴处的摩擦皆可不计.  $A$  和  $B$  是两个滑块, 质量分别为  $m_1 = 3.0 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0.5 \text{ kg}$ , 由跨过定滑轮的不可伸长的轻绳相连. 开始时设法抓住  $A, B$  和  $C$ , 使它们都处于静止状态, 且滑轮两边的轻绳恰好伸直. 今用一大小等于  $26.5 \text{ N}$  的水平推力  $F$  作用于  $C$ , 并同时释放  $A, B$  和  $C$ . 若  $C$  沿桌面向左滑行, 其加速度  $a = 3.0 \text{ m/s}^2$ ,  $B$  相对桌面无水平方向位移 (绳子是一直绷紧的). 试求与桌面的摩擦系数  $\mu$ . (图中  $\alpha = 37^\circ$ ,  $\beta = 53^\circ$ , 重力加速度  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

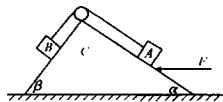


图 3-1-6

**分析与解** 此题是由三个物体组成的系统, 我们可以应用质点组动力学来求解. 设  $A, B, C$  相对于地的加速度大小分别为  $a_A, a_B, a_C$ ;  $A, B$  相对于斜面的加速度大小分别为  $a'_A, a'_B$ . 建立如图 3-1-7 所示的坐标系. 由题意,  $B$  相对桌面无水平方向位移 (绳子是一直绷紧的), 可得  $B$  相对于地面无水平方向的加速度. 即

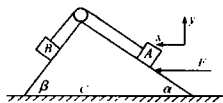


图 3-1-7

$$a_{Bx} = 0$$

$$a_{By} = a_C \tan \beta = 3 \times \tan 53^\circ = 4 (\text{m/s}^2)$$

$$a'_B = a_C / \cos \beta = 3 / \cos 53^\circ = 5 (\text{m/s}^2)$$

由于绳子一直绷紧,所以  $a'_A = a'_B$ 。

由运动学中相对加速度的公式可得

$$a_{1x} = a_c - a'_A \cos \alpha = 3 - 5 \cos 37^\circ = -1 (\text{m/s}^2)$$

$$a_{1y} = -a'_A \sin \alpha = -5 \sin 37^\circ = -3 (\text{m/s}^2)$$

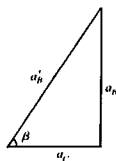
设地面对  $C$  的摩擦力为  $f$ , 支持力为  $N$ , 则根据质点组动力学可得

$$F - f = m_A a_c + m_A a_{1x} + m_B a_{1x}$$

$$N - (m_c + m_1 + m_2)g = m_A a_{1y} + m_B a_{1y}$$

代入数据得  $f = 10\text{N}, N = 93\text{N}$

因此  $\mu = f/N = 10/93 = 0.11$



【巩固习题】

1. 如图 3-1-8 所示, 在与水平面成  $\alpha$  角的斜面上放置两木块  $A$ ,  $B$ , 已知它们的质量分别为  $m_1, m_2$ , 与斜面的动摩擦因数为  $\mu_1, \mu_2$ , 其中  $\mu_1 > \mu_2$ , 求: (1) 在运动过程中,  $A, B$  间的相互作用力; (2) 它们能开始滑动,  $\alpha$  角的最小值。

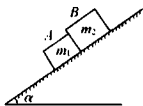


图 3-1-8

2. 如图 3-1-9 所示,  $m_1 = 8\text{kg}, m_B = 10\text{kg}, m_C = 15\text{kg}, \mu_A = 0.25, \mu_C = 0.20, g = 10\text{m/s}^2$ , 问  $A, B, C$  的加速度分别为多少? 绳的张力  $T$  多大?

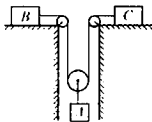


图 3-1-9

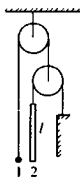


图 3-1-10

3. 如图 3-1-10 所示, 小球 1 的质量是棒 2 的质量的 1.8 倍, 棒的长度  $l = 100\text{cm}$ , 滑轮和绳子的质量以及摩擦力可以忽略不计, 小球置于与棒的下端相同的水平面上, 然后放开系统, 问经过多长时间小球与棒的上端处于同一水平面?

4. 如图 3-1-11 所示, 在水平桌面上固定一个轮轴  $A$ , 轮半径为  $r$ , 其边缘绕有一条足够长的质量不计的细绳, 绳端系住一木块  $B$ , 已知木块与桌面间的动摩擦因数为  $\mu$ , 当轮轴  $A$  以角速度  $\omega$  旋转时, 木块被带动一起旋转, 达到稳定状态后,

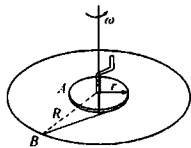


图 3-1-11

$B$  与  $A$  的角速度相同。问：(1) 此时木块  $B$  的旋转半径  $R$  为多大？(2) 当摩擦因数  $\mu$  和轮半径  $r$  为定值时，若欲保持上述稳定状态，则角速度  $\omega$  必须满足什么条件？

5. 如图 3-1-12 所示，一个长为  $2l$  的坚硬滑槽  $AB$ ，沿竖直面滑下，在滑槽的中点安放一个相对滑槽固定不动的小球  $C$ ，其质量为  $m$ ， $B$  端向右以速度  $v$  匀速运动。试求当  $\alpha = 45^\circ$  角时，小球对滑动槽的作用力。

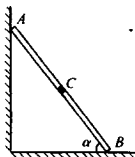


图 3-1-12

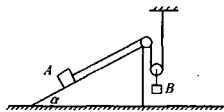


图 3-1-13

6. 如图 3-1-13 所示，质量皆为  $m$  的物块  $A$  和  $B$  通过滑轮相连， $A$  放在倾角为  $\alpha = 37^\circ$  的斜面上，不计滑轮质量及一切摩擦。求绳子中的张力。

7. 如图 3-1-14 所示，一个圆柱体和一个楔子，互相接触地沿着两个与地面成相等夹角  $\alpha$  的固定斜面作无摩擦的移动。圆柱体质量为  $m_1$ ，楔子的质量为  $m_2$ 。试求楔子对圆柱体的压力。

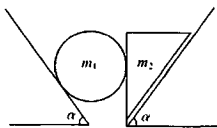


图 3-1-15

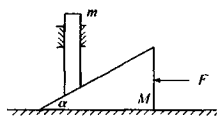


图 3-1-16

8. 如图 3-1-15 所示，质量为  $M$  的劈和质量为  $m$  的杆，在施加于劈上的水平力  $F$  作用下，分别以加速度  $a_1$  和  $a_2$  做无摩擦运动，劈的倾角为  $\alpha$ 。求加速度  $a_1$  和  $a_2$  以及劈与杆的作用力  $N$ 。

9. 三块物体如图 3-1-17 所示那样的堆积，放在光滑的水平面上。1 是长方形厚板，2 和 3 是三角形形劈，它们的质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$  和  $m_3$ 。1 和 2 之间分界面  $A$  的静摩擦系数为  $\mu_A$ ，2 和 3 之间分界面  $B$  的静摩擦系数为  $\mu_B$ ，分界面  $B$  与水平面倾斜成角  $\theta$ 。



图 3-1-17

(1) 向右拉 3，使它具有较小的加速度  $a$ 。此时没有任何一个分界面发生滑动。求分界面  $B$  上摩擦力大小。对于每一分界面，求实际摩擦力与最大摩擦力之比。

(2) 现在逐渐增大 3 具有的加速度，致使两个分界面中有一个发生滑动为止。试问

哪个分界面先发生滑动,即在什么情况下分界面  $A$  先滑动?在什么情况下分界面  $B$  先滑动?

(3)重新从静止开始,向左推  $3$ ,使它具有的加速度逐渐增大,至发生滑动,试叙述此时滑动情况。

(4)假设  $\mu_A=0.50$  和  $\mu_B=0.80$ .问  $\theta$  为何值,当向右拉  $3$  时,使分界面  $B$  先发生滑动;又当向左推  $3$  时,使分界面  $A$  先发生滑动?

10.如图 3-1-18 所示,三角块重  $P$ ,左右两物块各重  $G_1$  和  $G_2$ ,且可在水平面上滑动,设三角块由静止释放,若不计各处摩擦.试求两物块的加速度。

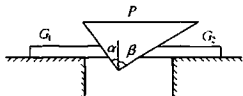


图 3-1-18

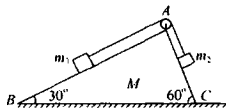


图 3-1-19

11.如图 3-1-19,一三角形楔  $ABC$  置于光滑水平面上,两斜边与平面夹角分别为  $30^\circ, 60^\circ$ ,在斜边上有两物体  $m_1, m_2$ ,用不可伸长的细绳联接并跨在楔顶点  $A$  上的一定滑轮上,  $m_1, m_2$  可在斜面上无摩擦地滑动.令楔的质量为  $M$ ,已知三物体的质量之比为  $m_1:m_2:M=4:1:16$ .滑轮光滑且质量可忽略.求(1)楔的加速度  $a$  及  $m_1$  对于  $M$  的加速度  $a'$ .(2)若  $m_1$  从静止开始沿斜面移动  $20\text{cm}$ ,楔沿水平面移动的距离。

高中物理竞赛培优教程

## 第二节 非惯性参照系

### 【知识要点】

#### 一、牛顿运动定律的适用范围和适用条件

对于宏观低速的运动(运动速度远小于光速的运动),牛顿运动定律是成立的,但对于物体的高速运动(运动速度接近光速)和微观粒子的运动,牛顿运动定律就不适用了,要用相对论观点、量子力学理论处理。

牛顿运动定律的适用条件:(1)质点,(2)惯性系。

#### 二、惯性系和非惯性系

牛顿运动定律成立的参照系,称为惯性系.牛顿运动定律不成立的参照系,称为非惯性系.实验证明,地面已经是一个相当接近惯性系的参照系.一般情况下,相对于地面静止的或做匀速直线运动的参照系都可作为惯性系,非惯性系相对惯性系必然做加速

运动或旋转运动。

### 三、惯性力

牛顿定律对于非惯性系是不适用的,如果引入“惯性力”的概念,就可非惯性系中应用牛顿第二定律,这为解决力学问题提供了新的方法。

设有一非惯性系,它相对于惯性系的加速度为  $\vec{a}_0$ ,质量为  $m$  的物体(研究对象)受到合外力  $\vec{F}$  的作用做加速运动,令物体相对于惯性系的加速度为  $\vec{a}$ ,相对于非惯性系的加速度为  $\vec{a}'$ ,则由运动学公式可得

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

根据牛顿定律可得到

$$\vec{F} = m\vec{a}, \text{ 所以}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}' + m\vec{a}_0$$

整理后得到

$$\vec{F} + (-m\vec{a}_0) = m\vec{a}'$$

若令  $\vec{f} = -m\vec{a}_0$ , 并称  $\vec{f}$  为物体在非惯性系中受到的惯性力,则有

$$\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}'$$

也就是说,当以非惯性系来考察物体的运动时,只要设想物体在通常的相互作用力之外还受到一个惯性力作用,那么解答一切运动力学的步骤与惯性系中相同。当然,惯性力只是设想的力,它没有施力物体,也没有反作用力。

#### 【例题分析】

**例 1** 在火车车厢内有一长  $l$ , 倾角为  $\theta$  的斜面, 当车厢以恒定加速度  $a_0$  从静止开始运动时, 物体自倾角为  $\theta$  的斜面顶部 A 点由静止开始下滑, 已知斜面的静摩擦因数为  $\mu$ , 求物体滑至斜面底部 B 点时, 物体相对于车厢的速度, 并讨论当  $a_0$  与  $\mu$  一定时, 倾角  $\theta$  为多少时, 物体可静止于 A 点?

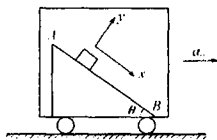


图 3-2-1

**分析与解** 此题若以地面为参照系计算比较复杂, 现以车厢为参照系, 在非惯性系中解题, 则物体受到的惯性力  $f_{\text{惯}} = -ma_0$ , 取如图所示的坐标系, 设物体相对于斜面的加速度为  $a'$ , 根据牛顿第二定律  $mg\sin\theta - \mu N - ma_0\cos\theta = ma'$ ,  $N - mg\cos\theta - ma_0\sin\theta = 0$

$$\text{由以上两式解得 } a' = (g - \mu a_0)\sin\theta - (a_0 + \mu g)\cos\theta$$

由运动学公式  $v^2 = 2a'l$  可得物体相对于车厢的速度

$$v = \sqrt{2l[(g - \mu a_0)\sin\theta - (a_0 + \mu g)\cos\theta]}$$

方向沿着斜面向下。

讨论:物体静止于 A 点的条件,先假设物体有下滑趋势,则摩擦力方向向上,由  $a' \leq 0$ , 有  $\tan\theta \leq \frac{\mu g + a_0}{g - \mu a_0}$ . 再假设物体有上滑趋势,则摩擦力方向向下,有

$$m a_0 \cos\theta - mg \sin\theta - \mu(mg \cos\theta + m a_0 \sin\theta) \leq 0$$

$$\tan\theta \geq \frac{a_0 - \mu g}{g + \mu a_0}$$

因此,当  $a_0$  与  $\mu$  一定时,要使物体静止于斜面,  $\theta$  应满足的关系式

$$\frac{a_0 - \mu g}{g + \mu a_0} \leq \tan\theta \leq \frac{\mu g + a_0}{g - \mu a_0}$$

### 【巩固习题】

1. 如图 3-2-2 所示,三个物体通过滑轮与细绳互相连接,它们的质量与运动方向如图所示. 不计滑轮质量和一切摩擦. 求质量为  $m_1$  物块的加速度及两绳的张力  $T_1$  和  $T_2$ .

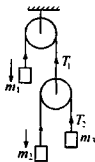


图 3-2-2

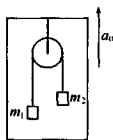


图 3-2-3

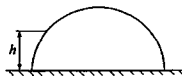


图 3-2-4

2. 如图 3-2-3 所示,一绳子套在固定于电梯天花板的滑轮上,两端各悬挂质量为  $m_1$  和  $m_2$  的重物,电梯开始以加速度  $a_0$  上升,忽略滑轮的质量和摩擦,求:(1)重物  $m_1$  相对于电梯的加速度和相对于地的加速度;(2)滑轮作用于电梯天花板的力.

3. 一质量为  $m$  的小物体,放在半径为  $R$  的半球面上,如果物体和半球面间的摩擦系数等于零,初始时它们相对静止然后滑下,求在下列情况下物体离开球面时,离半球底部的距离  $h$ . 如图 3-2-4 所示.(1)半球面以  $10\text{m/s}$  的速度匀速上升;(2)半球面以加速度  $a = g/2$  匀加速上升;(3)半球面以加速度  $a = g/4$  匀加速向右运动.

4. 在一辆不光滑的铁路平板车上有一只均匀装满货物的集装箱,箱子高为  $H$ ,宽为  $L$ ,右边有一个小滑轮,当车加速向左行驶时,如果加速度为  $a_0$ ,则集装箱开始沿平板车向右慢慢滑动,如图 3-2-5 所示. 要使集装箱开始向左慢慢滑动,求火车应具有的最小向右加速度(滚动摩擦不计).

5. 如图 3-2-6 所示,木柜宽  $2l$ ,其重心高度为  $h$ ,把木柜放在车上,车以加速度  $a$

起动,试分析木柜在车上滑动、翻倒的条件,以防止事故发生。

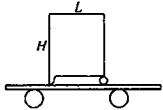


图 3-2-5

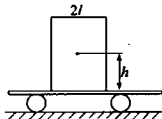


图 3-2-6

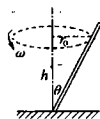


图 3-2-7

6. 一光滑细杆绕竖直轴以匀角速度  $\omega$  转动,细杆与竖直轴夹角  $\theta$  保持不变,如图 3-2-7 所示.一个相对细杆静止的小环自离地面高  $h$  处沿细杆下滑,求小环滑到细杆下端时的速度。

7. 在静止的车厢内有一幅角为  $\theta$  ( $0 < \theta < 90^\circ$ ) 的圆锥摆,当摆球处于图 3-2-8 中的最左位置时车厢开始以常量  $a$  向右做水平匀加速运动,试问摆球相对车厢是否有可能恰好从此时开始以某  $\theta'$  ( $0 < \theta' < 90^\circ$ ) 为幅角做圆锥摆运动?

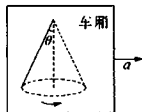


图 3-2-8

8. 如图 3-2-9 所示,质量为  $m_1$  和  $m_2$  的物体挂在绳的两端,绳跨在双斜面体的顶部.斜面与地的夹角分别为  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$ ,摩擦均不计,斜面的质量为  $M$ ,整个系统起初静止.求放开后斜面对地的加速度和  $m_1, m_2$  对斜面的加速度;斜面保持静止的条件是什么?

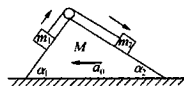


图 3-2-9

9. 在天花板比地板高出 2.0m 的实验火车的车厢里,悬挂着长为 1.0m 的细线,线下端连一个小球,火车缓慢加速且加速度逐渐增大.问:

(1) 若加速度达到  $10\text{m/s}^2$  时,细线恰好被拉断,则细线能承受的最大拉力为小球重力的多少倍?

(2) 若从细线被拉断的时刻起,火车的加速度保持不变则小球落地点与悬挂点的水平距离是多少? ( $g$  取  $10\text{m/s}^2$ )

10. 利用自动小车在间隔距离  $L = 20\text{m}$  的水平轨道上移送重物.用长  $l = 5\text{m}$  的细绳把重物挂在小车上,如图 3-2-10 所示,小车在前半段时间做匀加速运动,后半段时间做匀减速运动,假设小车与重物在初始时刻和运动到终点的时刻都静止不动.试确定小车的加速度大小.假定小车加速和减速两个过程加速度的大小相等。

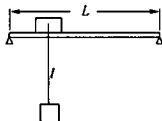


图 3-2-10



### 第三节 万有引力定律与天体运动



#### 【知识要点】

#### 一、开普勒定律

第一定律(轨道定律):所有行星分别在大小不同的椭圆轨道上围绕太阳运动.太阳是在这些椭圆的一个焦点上.

第二定律(面积定律):对每个行星来说,太阳和行星的连线在相等的时间内扫过相等的面积.("面积速度" $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2}rv\sin\theta$ )

第三定律(面积定律):所有行星的椭圆轨道的半长轴的三次方跟公转周期的平方的比值都相等. ( $T^2/a^3 = \frac{4\pi^2}{GM}$ )

#### 二、均匀球壳内外的引力公式

万有引力公式  $F = GmM/R^2$  仅适合于计算两个质点间的引力.当考虑一个物体对某一质点  $A$  的引力时,可以把这个物体看作由无数多个质点所组成,用公式计算出每一个质点对  $A$  的引力,然后求矢量和.但计算结果表明,质量分布呈球对称的球体产生的万有引力,等效于把球体质量集中于球心处的质点所产生的万有引力.另外,均匀球面对球外质点的引力也等同于把球面的质量集中在球心处而成的质点与球外质点的引力,而均匀球壳对位于球壳内的质点的引力等于零,例如放在地心处的物体所受到地球对它的引力为零.

如果所研究的质点  $A$  处于均匀球的内部,可以证明当  $R > R_0$  各处质点对  $A$  的引力互相抵消,仅有  $R_0 \leq R_0$  处各质点对  $A$  的引力能显示出来.因此,均匀球内( $R < R_0$ )各点引力公式为

$$F = G \frac{m}{R^2} \left( \frac{4}{3} \pi r R^3 \rho \right)$$

#### 三、三个宇宙速度

第一宇宙速度又称环绕速度,是人造天体环绕地球运动的速度,设地球的半径为  $R$ ,则  $GMm/R^2 = mv^2/R$ ,第一宇宙速度  $v_1 = \sqrt{GM/R} = 7.9(\text{km/s})$

第二宇宙速度又称脱离速度,是将人造天体发射到地球引力以外的最小速度.设地球的半径为  $R$ ,由机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left( -G \frac{Mm}{R} \right) = -G \frac{Mm}{r}$$

$r$  为地球引力以外的某点到地球的距离, 显然  $r \rightarrow \infty$ , 所以

$$GMm/r = GMm/\infty = 0$$

第二宇宙速度  $v_2 = \sqrt{2GM/R} = 11.2(\text{km/s})$

第三宇宙速度又称逃逸速度, 是使人造天体脱离太阳引力范围的最小发射速度. 设太阳的质量为  $M_0$ , 太阳中心到地球中心的距离为  $R_0$ , 类似于第二宇宙速度的计算, 同理可得  $v = \sqrt{2GM_0/R_0} = 42.2(\text{km/s})$

由于地球绕太阳公转的速度为  $29.8\text{km/s}$ , 所以相对地球只要  $v' = 42.2 - 29.8 = 12.4(\text{km/s})$  的发射速度即可, 这是将地球引力小到可略去不计得出的. 考虑到地球引力存

在, 必须克服地球引力做功, 所以  $\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv'^2$

而  $G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv_2^2$

式中  $v_2$  是第二宇宙速度, 将此式代入上式  $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv'^2$ , 第三宇宙速度

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v'^2} = 16.7(\text{km/s})$$

### 【例题分析】

**例 1** 根据行星绕日做椭圆运动的面积速度为恒量(开普勒第二定律). 试证明各行星绕日运行的周期  $T$  与椭圆轨道的半长轴  $a$  之间的关系为  $T^2/a^3 = \text{常量}$ (即开普勒第三定律).

**分析与解** 先计算面积速度的表达式, 如图 3-3-1 所示. 矢径  $r$  在很小的  $\Delta t$  时间内, 扫过的面积为  $\Delta A$ , 椭圆的弧长为  $\Delta r$ , 矢径  $r$  与椭圆上该点的切线方向夹角为  $\theta$ . 在  $\Delta t$  足够小时, 扫过的面积可当作三角形来处理, 因此

$$\Delta A = \frac{1}{2} r \Delta r \sin \theta$$

面积速度为  $\Delta A / \Delta t = \frac{1}{2} r \Delta r \sin \theta / \Delta t = \frac{1}{2} r v \sin \theta$

各行星绕日运行的周期  $T$ , 可以用椭圆的面积除以面积速度来求解.

设椭圆的半长轴为  $a$ , 半短轴为  $b$ , 太阳到椭圆中心的距离为  $c$ , 则各行星绕日运行的周期为  $T = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2} r v \sin \theta}$ . 一般位置

的面积速度较难求解, 因为  $\theta$  是任意的, 现选择近日点和远日点. 由面积速度相等可得

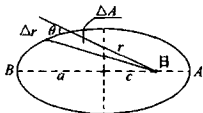


图 3-3-1

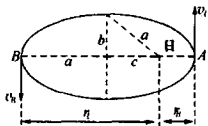


图 3-3-2

$\frac{1}{2} r_A v_A = \frac{1}{2} r_B v_B$ . 从近日点运动到远日点的过程中, 根据机械能守恒定律, 有

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - G \frac{Mm}{r_A} = \frac{1}{2} m v_B^2 - G \frac{Mm}{r_B}$$

由以上两式得  $v_A^2 = \frac{2GM r_B}{(r_A + r_B) r_A}$

由几何关系得  $r_A = a - c$ ,  $r_B = a + c$ ,  $a^2 = b^2 + c^2$

所以  $v_A = \sqrt{\frac{GM}{a}} \cdot \sqrt{\frac{r_B}{r_A}}$

$$\Delta A / \Delta t = \frac{1}{2} r_A v_A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{a}} \cdot \sqrt{r_A r_B} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

$$T = \frac{\pi ab}{\Delta A / \Delta t} = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{GM}}$$

整理后得  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

**例 2** 地球绕太阳做椭圆运动, 已知轨道半长轴为  $a$ , 半短轴为  $b$ , 试求地球在椭圆轨道各顶点处的速度大小及各顶点处的曲率半径, 设太阳的质量为  $M$ , 地球的质量为  $m$ .

**分析与解** 设图 3-3-3, 由题意可得, 地球经过 3, 4 两点的速率相等, 设地球经过 1, 2, 3 点的速率分别为  $v_1, v_2, v_3$ . 根据开普勒定律和机械能守恒定律, 可得

$$\frac{1}{2} (a+c)v_1 = \frac{1}{2} (a-c)v_2 = \frac{1}{2} a v_3 \cdot \frac{b}{a}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - G \frac{Mm}{a+c} = \frac{1}{2} m v_2^2 - G \frac{Mm}{a-c} = \frac{1}{2} m v_3^2 - G \frac{Mm}{a}$$

由以上两式可解得

$$v_1 = \frac{a-c}{b} \sqrt{\frac{GM}{a}}, v_2 = \frac{a+c}{b} \sqrt{\frac{GM}{a}}, v_3 = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

设 1, 2, 3 各点的曲率半径分别为  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , 则由曲线运动知识可知

$$G \frac{Mm}{(a+c)^2} = m \frac{v_1^2}{\rho_1}, G \frac{Mm}{(a-c)^2} = m \frac{v_2^2}{\rho_2}, G \frac{Mm}{a^2} \cdot \frac{b}{a} = m \frac{v_3^2}{\rho_3}$$

由以上三式解得

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{b^2}{a}, \rho_3 = \frac{a^2}{b}$$

### 【巩固习题】

1. 一个沿半径  $R$  绕地球做匀速运动的飞船, 其周期为  $T$ , 飞船欲返回地面, 可在轨道上某点 A 处向反方向喷气, 将飞船速率降低到适当的数值, 从而使飞船可以从这一



图 3-3-3

点开始沿着以地心为焦点的椭圆轨道运动. 椭圆的近地点  $B$  与地球相切. 若地球的半径为  $R_0$ , 求飞船由  $A$  到  $B$  所需的时间.

2. 如图 3-3-4 所示, 一卫星绕地球沿圆轨道运动, 运动速度为  $v_0$ , 卫星离地高度为  $h$ . 设卫星中的辅助发动机向轨道外侧作短时间喷气, 使获得指向地球中心的径向速度  $v_r$ , 此后卫星将沿新的椭圆轨道运动. 试求卫星新轨道的近地点和远地点离地球表面的高度. 设地球为球形, 半径为  $R$ .

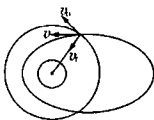


图 3-3-4

3. 如图 3-3-5 所示, 从地球发射火箭到火星进行探测, 发射后火箭绕日沿椭圆轨道运行. 为了节省能量, 火箭离地球的速度方向与地球绕太阳公转的速度方向一致, 并且选择适当的发射时机, 使火箭椭圆轨道的远日点为火星, 近日点为地球. 假定地球和火星均绕日作圆周运动, 圆轨道半径分别为  $r_{地}$  和  $r_{火}$ , 忽略其他行星对火箭的引力作用. 试问:

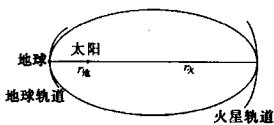


图 3-3-5

- (1) 火箭以多大的相对速度离开地球?
- (2) 火箭到达火星要用多长时间?

4. 经过用天文望远镜长期观测, 人们在宇宙中已经发现了许多双星系统, 通过对它们的研究, 使我们对于宇宙中物质的存在形式和分布情况有了较深刻的认识. 双星系统由两个星体构成, 其中每个星体的线度都远小于两星体之间的距离. 一般双星系统距离其他星体很远, 可以当作孤立系统处理. 现根据对某一双星系统的光度学测量确定, 该双星系统中每个星体的质量都是  $M$ , 两者相距  $L$ . 它们正围绕两者连线的中点做圆周运动.

- (1) 试计算该双星系统的运动周期  $T_{计算}$ ;

(2) 若实验上观测到的运动周期为  $T_{观测}$ , 且  $T_{观测} : T_{计算} = 1 : \sqrt{N} (N > 1)$ . 为了解释  $T_{观测}$  与  $T_{计算}$  的不同, 目前有一种流行的理论认为, 在宇宙中可能存在一种望远镜观测不到的暗物质. 作为一种简化模型, 我们假定在这两个星体连线为直径的球体内均匀分布着这种暗物质, 而不考虑其他暗物质的影响. 试根据这一模型和上述观测结果确定该星系间这种暗物质的密度.

5. 考虑到地球上物体除受地球的引力外还受太阳的引力作用. 若用弹簧秤称量同物体的重量时, 白天的示数与夜晚的示数是否相同? 试说明理由. (地球上各点到太阳的距离之差忽略不计)

## 第四节 综合训练

## 【例题分析】

**例 1** 在如图 3-4-1 所示的系统中,已知方木块的质量为  $m$ ,楔形体的质量为  $M$ ,倾角为  $\alpha$ .滑轮和绳的质量不计,不考虑摩擦力,求楔形体  $M$  的加速度.

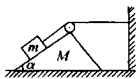


图 3-4-1

**分析与解** 初看此题,觉得有点繁,但在前面我们已介绍过非惯性系力学和质点组动力学,运用这些知识,问题就简单了.

设  $M$  相对于地的加速度为  $\vec{a}_0$ ,  $m$  相对于  $M$  的加速度为  $\vec{a}$ ,  $m$  对地的加速度  $\vec{a}'$ , 则

$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_0 \quad (1)$$

$$|\vec{a}| = |\vec{a}_0| \quad (2)$$

以  $M$  为参照系对  $m$  进行受力分析(如图 3-4-2 所示),由非惯性系动力学方程可得

$$mg \sin \alpha + ma_0 \cos \alpha - T = ma$$

由质点组动力学方程  $\sum \vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$ , 可知

$$ma' + Ma = T$$

联立①,②,③,④可解得  $a = mg \sin \alpha / [M + 2m(1 - \cos \alpha)]$

**例 2** 如图 3-4-3 所示,质量为  $m$  的重球  $B$  与细绳相连.  $A$  端固定,  $C$  端绕过滑轮并以匀速  $v$  拉动,试求图示位置时  $BC$  绳的张力. 不计绳和滑轮的质量以及滑轮的摩擦.

**分析与解** 此题是已知运动求力的问题. 首先必须知道  $B$  点做什么运动,从  $A$  端看  $B$  做圆周运动. 设  $\vec{a}_B$  为  $B$  的加速度,  $\vec{a}_{tBA}$ ,  $\vec{a}_{nBA}$  分别代表切向加速度和法向加速度, 则

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{tAB} + \vec{a}_{nAB}$$

$B$  端相对  $C$  端亦作圆周运动, 且  $\vec{a}_C = 0$ , 所以

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{tBC} + \vec{a}_{nBC}$$

故有  $\vec{a}_{tAB} + \vec{a}_{nAB} = \vec{a}_{tBC} + \vec{a}_{nBC}$

其中  $a_{nAB} = v_{AB}^2 / |AB|$ ,  $a_{nBC} = v_{BC}^2 / |BC|$

$v_{AB}$ ,  $v_{BC}$  分别为  $B$  相对  $A$ 、 $C$  的速度.

对  $B$  进行受力分析, 可知共受三个力作用: 重力  $mg$ ,  $AB$ 、 $BC$  的拉力  $T_A$ 、 $T_C$ , 由牛顿

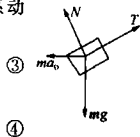


图 3-4-2

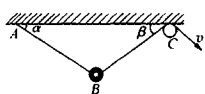


图 3-4-3

定律知  $\vec{T}_A + \vec{T}_C + m\vec{g} = m(\vec{a}_{\tau AB} + \vec{a}_{nAB})$

写成分量式有

水平方向:  $-T_A \cos \alpha + T_C \cos \beta = m(a_{\tau AB} \sin \alpha - a_{nAB} \cos \alpha)$

竖直方向:  $T_A \sin \alpha + T_C \sin \beta - mg = m(a_{\tau AB} \cos \alpha + a_{nAB} \sin \alpha)$

解得  $T_C = \frac{mg \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{m}{\sin(\alpha + \beta)} (a_{\tau AB} \sin^2 \alpha + a_{nAB} \cos^2 \alpha)$

为了求  $T_C$  必须先求  $a_{nBC}$ , 将式  $\vec{a}_{\tau AB} + \vec{a}_{nAB} = \vec{a}_{\tau BC} + \vec{a}_{nBC}$  沿  $a_{nBC}$  方向分解可得

$$a_{\tau AB} \sin(\alpha + \beta) - a_{nAB} \cos(\alpha + \beta) = a_{nBC}$$

$$a_{\tau AB} = \frac{a_{nBC} + a_{nAB} \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ \frac{v_{BC}^2}{BC} + \frac{v_{AB}^2}{AB} \cos(\alpha + \beta) \right]$$

因为  $v_{AB} \sin(\alpha + \beta) = v$

$$v_{BC} \sin(\alpha + \beta) = v \cos(\alpha + \beta)$$

所以  $T_C = \frac{mg \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{mv^2 \cos(\alpha + \beta)}{\sin^4(\alpha + \beta)} \left[ \frac{\cos(\alpha + \beta)}{BC} + \frac{1}{AB} \right]$

解法二: 在人收绳的过程中, 质点  $B$  始终在做以  $A$  点为圆心、 $\overline{AB}$  为半径的圆周运动, 故其运动速度  $v_B$  始终垂直于绳  $AB$ . 到图示位置时,  $v_B$  的方向与绳  $BC$  之间的夹角为  $\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$ . 因此, 质点  $B$  绕  $A$  点的径向运动方程为

$$T_A - T_C \cos(\alpha + \beta) - mg \sin \alpha = m \frac{v_B^2}{AB}$$

为了求  $v_B$ , 可将其分解为沿  $BC$  方向和垂直于  $BC$  方向两个分量. 其中平行于  $BC$  方向的分量

$$v_{B//} = v_B \cos \left[ \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right]$$

这个分量的大小等于人拉绳端的速度  $v$ . 因此

$$v_B = v / \cos \left[ \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = v / \sin(\alpha + \beta)$$


$v_B$  的另一个垂直于  $BC$  的分量

$$v_{B\perp} = v_B \sin \left[ \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = v \cos(\alpha + \beta) / \sin(\alpha + \beta) = v \cot(\alpha + \beta)$$

这就是此瞬间  $B$  质点绕  $C$  点的圆周运动的速度. 所以, 质点  $B$  绕  $C$  点的径向运动方程

$$\text{为 } T_C - T_A \cos(\alpha + \beta) - mg \sin \beta = m \frac{v_{B\perp}^2}{BC}$$

由以上各式可解得  $T_C = \frac{mg \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{mv^2 \cos(\alpha + \beta)}{\sin^4(\alpha + \beta)} \left[ \frac{\cos(\alpha + \beta)}{BC} + \frac{1}{AB} \right]$

 【精选习题】

1. 如图 3-4-4 所示, 在  $xz$  竖直平面内, 支在原点  $O$  的一根弯杆, 其形状可用函数  $z$

$= x^2/k$  来描写,  $k$  为有量纲的非零正常数. 在杆上穿有一个滑块, 杆与滑块的摩擦系数为  $\mu$ .

(1) 不考虑摩擦, 求滑块的高度为  $z$  时, 它在沿杆方向加速度大小, 下列答案中有一个是正确的, 试作出判断. 并说明理由.

理由.  $(0, g, 2g\sqrt{\frac{z}{4z+k}}, gz\sqrt{4z^2+k^2}, gz/k)$

(2) 考虑摩擦, 但杆不动, 在什么情况下, 滑块可以在杆上静止? (用  $z, \mu, g, k$  等表达)

(3) 现在设杆以角速度  $\omega$  绕  $z$  轴匀速转动, 且有关系  $\omega = \sqrt{2g/k}$ . 这时, 滑块可以在何处相对于杆静止?

(4) 若  $\mu = 0.5, \omega = \sqrt{6g/k}$ , 则滑块不滑动的条件又如何?

2. 如图 3-4-5 所示, 一个表面光滑的铅直截面为直角三角形的楔形物体, 斜面的长度为  $l$ , 斜面与底边之间的夹角为  $\alpha$ , 质量为  $M$ , 静止于一光滑的水平桌面上, 将一个质量为  $m$  的质点放在斜面的顶端, 并令其滑下, 试求: (1) 当质点到达斜面下端时楔形物体移动的距离; (2) 质点自斜面顶端到达下端所需的时间.

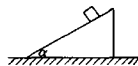


图 3-4-5

3. 有两个相同的摆, 把一个拴在另一个的下面, 使它们各在一个平面内做匀速圆周运动. 设两条摆线与竖直线所成的夹角都很小. 已知在运动过程中两条摆线一直保持在同一个坚直平面内, 求此平面移动的角速度, 以及两质点轨道半径之比.

4. 光滑的水平桌面上有一质量为  $M$  的楔子  $B$ , 这楔子的光滑斜面上还有一质量为  $m$  的物体  $A$ , 如图 3-4-6 所示, 求  $A$  和  $B$  的运动情况及  $B$  对桌面的压力.

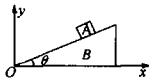


图 3-4-6

5. 质量为  $M$ , 半径为  $R$  的细圆环用细线悬挂起来, 环上串有两个质量同为  $m$  的小球, 今两小球自圆环顶点由静止同时向两边滑下, 如图 3-4-7 所示, 摩擦力可忽略. 试问小球与圆环的质量比  $m/M$  至少要多大才有可能使圆环上升.

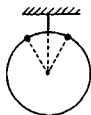


图 3-4-7

6. 10 个相同的扁长木块一个紧挨一个地放在水平地面上, 每个木块的质量  $m = 0.40\text{kg}$ , 长  $L = 0.50\text{m}$ , 它们与地面的静摩擦系数均为  $\mu_2 = 0.10$ . 原来木块处于静止状态. 如图 3-4-8 所示, 左方第一个木块的左端上放一质量为  $M = 1.0\text{kg}$  的小铅块, 它与木块间的静摩擦系数为  $\mu_1 = 0.20$ . 现突然给铅块一向右的初速度  $v_0 = 4.3\text{m/s}$ , 使其在长木块上滑行. 试确定铅块最后的位置在何处 (落在地上还是停在哪块木板上)? 取重力加速度  $g = 10\text{m/s}^2$ , 设铅块的线度与  $L$  相比可以忽略.

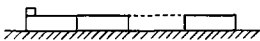


图 3-4-8

7. 在某自行车赛场直行跑道的一侧有一外高内低、倾角为  $\theta$  的斜面, 直行跑道长度为  $L$ , 斜面上端高度为  $h$ , 如图 3-4-9 所示. 运动员由  $A$  点出发, 终点为  $A'$ . 运动员可以选行直线  $AA'$  行进, 或沿对称折线  $AMA'$  行进的路线. 若出发时自行车的速度均为  $v_0$ , 且在行进途中运动员蹬车时驱动力等于所受阻力, 又设车轮与地面间的摩擦足以阻止车轮侧滑, 若要取得较好的成绩, 运动员应采用哪种路线?

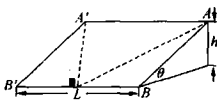


图 3-4-9

8. 如图 3-4-10 所示, 设赛道在同一水平面上, 车轮与地面间的静摩擦因数和动摩擦因数均为  $\mu$ , 且  $\mu$  不随速度变化. 问: (1) 当赛车运动员驾车作  $90^\circ$  转弯时, 应选择图中的半径为  $R_0$  的圆弧外车道还是半径为  $R_i$  的圆弧内车道? (2) 作  $180^\circ$  转弯时又应选择图中的哪个车道? 请做出必要的计算并据此得出结论. 为简化起见, 可把赛车作质点处理, 且设赛车在刹车减速时四轮同时刹车, 并假设赛车在加速过程和减速过程中的加速度的绝对值相等, 赛车在直道上高速行驶的速度  $v > \sqrt{\mu g R_0}$ . (空气阻力不计)

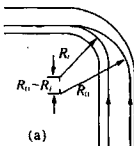


图 3-4-10

高中物理竞赛培优教程

9. 1997 年 8 月 26 日在日本举行的国际天文学大会上, 德国 Max Planck 学会的一个研究组宣布了他们的研究成果: 银河系的中心可能存在一个黑洞. 他们的根据是用口径为 3.5m 的天文望远镜对猎户座中位于银河系中心附近的星体进行六年的观测所得到的数据. 他们发现, 距离银河系中心约 60 亿公里的星体正以 2000km/s 的速度围绕银河系中心旋转. 根据上面的数据, 试在经典力学的范围内 (见提示 2), 通过计算确认, 如果银河系中心确实存在黑洞的话, 其最大半径是多少? (引力常数  $G = 6.67 \times 10^{-20} \text{ km}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ )

提示: (1) 黑洞是一种密度极大的天体, 其表面的引力是如此之强, 以至于包括光在内的所有物质都逃脱不了其引力作用. (2) 计算中可以采用拉普拉斯经典黑洞模型, 在这种模型中, 在黑洞表面上的所有物质, 即使初速度等于光速  $c$  也逃脱不了其引力的作用.

10. 如图 3-4-11 所示, 半径为  $R$  的水平圆台, 可绕通过圆心  $O$  的竖直光滑细轴  $CC'$  转动. 圆台上沿相互垂直的两个半径为方向刻有槽, 质量  $m_A$  的物体  $A$  放在一个槽内,  $A$  与槽底间的静摩擦因数为  $\mu_0$ , 质量为  $m_B$  的物体  $B$  放在另一个槽内, 此槽是光滑的.  $AB$  间用一长为  $l$  ( $l < R$ ) 且不可伸长的轻绳绕过细轴相连. 试求当圆台做匀速转动且  $A, B$  两物体相对圆台不动时, 转动角速度  $\omega$  和  $A$  到圆心的距离  $x$  所应满足的条件. (设此时  $A$  与槽的侧面没有作用力)

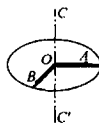


图 3-4-11



## 问题与讨论 分情况讨论解题

许多物理问题所给的条件不确定,因而会有多种结果,这时需要分情况讨论解题。例如,力学中有关摩擦问题;不知道波的传播方向需要多种情况讨论;电学中的黑箱问题;光学黑箱问题;透镜成像的不确定性;等等。本节讨论动力学中有关分情况讨论解题。

**例题** 两滑块  $A_1$  和  $A_2$  叠放在水平桌面上,如图 3-5-1 所示。已知  $A_1$  的质量为  $m_1$ ,  $A_2$  的质量为  $m_2$ ,  $A_2$  与桌面间的静摩擦因数为  $\mu_2$ 。设  $\mu_1$  表示  $A_1$  与  $A_2$  间的静摩擦因数,  $F$  表示作用于滑块  $A_1$  上的水平拉力,则当  $\mu_1$  与  $F$  各取不同值时,  $A_1$  与  $A_2$  可能发生的运动情况有下列四种:

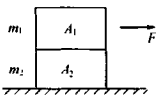


图 3-5-1

- (1)  $A_2$  相对于桌面滑动,但  $A_1$  与  $A_2$  相对静止;
- (2)  $A_2$  相对于桌面滑动,  $A_1$  和  $A_2$  之间存在着相对滑动;
- (3)  $A_2$  相对于桌面静止,  $A_1$  相对于桌面滑动;
- (4)  $A_1$  和  $A_2$  相对于桌面均静止。

试问(1)分别写出上述各种运动情况下  $\mu_1$  和  $F$  所满足的条件;(2)以  $\mu_1$  为横坐标。画出  $F - \mu_1$  的图像,标出上图中每种情况的  $\mu_1$  和  $F$  的取值范围。

**分析与解** (1)分别以  $A_1$  和  $A_2$  为研究对象,如图 3-5-2 所示,进行受力分析。

根据牛顿定律,有

$$\text{对 } A_1: \quad F - f_{21} = m_1 a_1 \quad \text{①}$$

$$N_{21} - m_1 g = 0 \quad \text{②}$$

$$\text{对 } A_2: \quad f_{12} - f_{\text{地}} = m_2 a_2 \quad \text{③}$$

$$Q - m_2 g - N_{12} = 0 \quad \text{④}$$

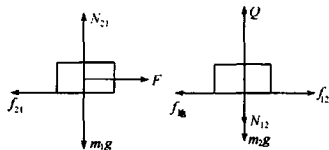


图 3-5-2

现考虑四种可能的运动情况所含的条件:

- (1)  $A_1$  与  $A_2$  相对静止,  $A_2$  相对于桌面滑动,则  $a_1 = a_2 > 0$ 。

$$f_{12} - f_{\text{地}} > 0 \quad \text{即} \quad f_{12} > f_{\text{地}}$$

$$\text{而} \quad f_{12} \leq \mu_1 m_1 g, \quad f_{\text{地}} = \mu_2 (m_1 + m_2) g$$

$$\text{从而得} \quad \mu_1 > \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2$$

$$\text{由①式得} \quad F > f_{21}$$

$$\text{而} \quad f_{21} = f_{12} > f_{\text{地}}$$

$$\text{所以} \quad F > f_{\text{地}} = \mu_2 (m_1 + m_2) g$$

又由①式得  $F - m_1 a_1 = f_{21} \leq \mu_1 m_1 g$

由①式和③式得  $a_1 = \frac{F - \mu_2(m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2}$ , 代入上式得  $F \leq \frac{m_1}{m_2}(\mu_1 - \mu_2)(m_1 + m_2)g$ .

故在(1)情况下  $\mu_1 > \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2$ ,

$$\frac{m_1}{m_2}(\mu_1 - \mu_2)(m_1 + m_2)g \geq F > \mu_2(m_1 + m_2)g$$

(2)情况下,  $a_1 > a_2 > 0$ . 此时:

$$f_{21} = \mu_1 m_1 g \quad f_{地} = \mu_2(m_1 + m_2)g$$

因为  $a_2 > 0$ , 所以  $f_{21} = f_{12} > f_{地}$ . 得  $\mu_1 > \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2$ ;

因为  $a_1 > a_2$ , 所以  $\frac{F - f_{21}}{m_1} > \frac{f_{12} - f_{地}}{m_2}$ . 解得

$$F > \frac{m_1}{m_2}(\mu_1 - \mu_2)(m_1 + m_2)g$$

(3)情况下,  $a_1 > 0, a_2 = 0$ , 由①式得

$$F > f_{21} = \mu_1 m_1 g$$

由③式得  $f_{12} = f_{地}$

因为  $f_{21} = f_{12} = \mu_1 m_1 g$

而  $f_{地} \leq \mu_2(m_1 + m_2)g$

所以  $\mu_1 \leq \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2$

(4)情况下,  $a_1 = a_2 = 0$ , 由①式得  $F = f_{21} \leq \mu_1 m_1 g$

由③式得  $F = f_{地} \leq \mu_2(m_1 + m_2)g$

取值范围如图 3-5-3 所示, 可以验证  $Q$  点是图中几条虚线的交点.

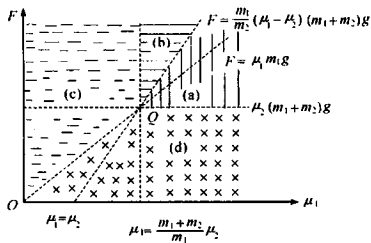


图 3-5-3

## 【巩固习题】

1. 如图 3-5-4 所示,  $A, B, C$  三个物块, 质量分别为  $m_A, m_B$  和  $m_C$ , 用细绳通过质量不计的滑轮相连,  $A, B$  间摩擦系数为  $\mu_1, B$  与桌面间摩擦系数  $\mu_2$ . 若  $m_A = m_B = m_C/2 = m$ , 物  $C$  从静止释放后, 向下做匀加速运动. 求它的加速度  $a_3$  和绳子张力  $T$ .

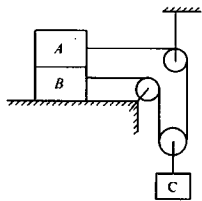


图 3-5-4

2. 上题中, 若  $\mu_2 = 0, \mu_1 = \mu_0$  (静摩擦系数),  $m_C = m_A + m_B$ , 其他条件不变. 试讨论  $A, B$  不发生相对滑动时绳子张力多大?  $\mu_0$  应满足什么条件?

3. 如图 3-5-5 所示, 半径为  $R = 0.5\text{m}$  的空心球绕本身的竖直直径旋转, 角速度为  $5\text{rad/s}$ , 在球内离球底  $R/2$  高处有一小木块同球一起旋转. 问: (1) 实现这一情况所需的最小摩擦因数是多少? (2) 如果  $\omega = 8\text{rad/s}$ , 实现这一情况的条件是什么? (3) 如果木块的位置有微小变化或球的角速度有微小变化, 木块的稳定性如何?

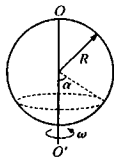


图 3-5-5

4. 如图 3-5-6 所示, 一个小滑块放在半径为  $R$  的光滑半球顶部. 由于轻微的扰动, 它开始由静止下滑. 求在下列情况下, 它离开球面时, 离半球底面的高度  $h$ .



图 3-5-6

(1) 半球面以  $10\text{m/s}$  的速度匀速上升; (2) 半球面以  $g/2$  大小的加速度匀加速上升; (3) 半球面以  $g/4$  大小的加速度匀加速向右运动.

5. 如图 3-5-7 所示, 在光滑水平面上放着一块质量为  $M_3$  的板, 板上叠放着一个斜面体和一个物体, 斜面体和物体的质量分别为  $M_2$  和  $M_1$ , 斜面体斜面的倾角为  $\theta$ . 已知  $M_1$  和  $M_2$  之间的动摩擦因数为  $\mu_1, M_2$  和  $M_3$  之间的动摩擦因数为  $\mu_2$ , 现有一水平恒力  $F$  作用在  $M_3$  上. 问  $F$  为多大时, 三个物体可保持相对静止?

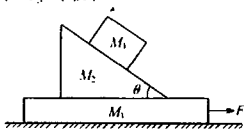


图 3-5-7

6. 如图 3-5-8 所示, 二面角的两个面与水平方向夹角均为  $\alpha$ , 一条长的柔软轻带跨过二面角的棱, 带上放质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的两个物体 ( $m_1 > m_2$ ), 物体与带间的动摩擦因数为  $\mu$ , 带与二面角的面间的摩擦可忽略, 试求两物体的加速度.

7. 有两个相同的摆, 把一个拴在另一个的下面, 使它们各在一个水平面内作匀圆周运动. 设两条摆线与竖直线所成的夹角都很小, 已知运动过程中两条摆线一直保持在同一个竖直平面内, 求此平面转动的角速度, 以及两质点的轨道半径之比.

8. 如图 3-5-9 所示,  $A$ 、 $B$  是两个带柄( $a$  和  $b$ )的完全相同的长方形物体,  $C$  是另一长方体,  $C$  的质量为  $m$ , 它们叠放在一起, 并放在倾角为  $\theta$  的斜面上.  $A$ 、 $B$  与斜面间以及与  $C$  之间皆有摩擦,  $C$  与  $A$  或  $B$  及斜面之间的静摩擦系数均为  $\mu_0$ , 设它们原来都处于静止状态.

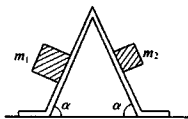


图 3-5-8

试问:(1)若一手握住  $a$ , 使  $A$  不动, 另一手握住  $b$ , 逐渐用力将  $B$  沿倾角为  $\theta$  的斜面上拉, 当力增大到能使  $B$  刚刚开始上移时,  $C$  动不动? 若动, 如何动? (2)此时  $A$  与  $C$  之间的摩擦力多大? (3)若握住  $b$  使  $B$  不动, 握住  $a$  逐渐用力将  $A$  沿倾角为  $\theta$  的斜面往下拉, 当  $A$  开始移动时,  $C$  动不动? 若动, 如何动?

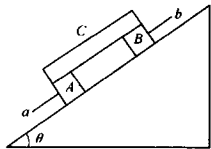


图 3-5-9

9. 有一半径为  $R$  的圆柱体水平地横架在空中, 有质量  $m_1$  与  $m_2$  ( $m_1 = 2m_2$ ) 的两个小木块, 用长为  $\frac{\pi}{2}R$  的细线相联, 成为一个系统, 木块的大小可以忽略, 它与圆柱表面的静摩擦系数  $\mu < 1$ , 细线无质量柔软且不可伸长, 系统横跨在圆柱上,  $m_1$  在右边, 细线贴在圆柱面上, 与圆柱表面无摩擦, 横截面如图 3-5-10 所示.

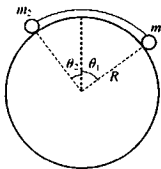


图 3-5-10

现在使圆柱绕水平的并垂直于纸面通过圆心的轴, 沿顺时针方向极缓慢地旋转, 直至某一位置时, 柱上系统将要开始滑落, 由此位置开始, 再极缓慢地沿逆时针方向转动圆柱体, 试问转过多大角度后, 系统开始从左边滑落? (角度可用反三角函数表示)

## 第四章 能量与动量

## 第一节 功和功率



## 【知识要点】

## 一、功

前面一章已经讨论了力  $F$  的瞬时效应——是具有一定质量的物体产生一定的加速度。现在,我们再来讨论一下力对物体的积累效应之一:对空间的积累效应——功。

物体在恒力  $F$  的作用下产生了位移,则力  $F$  对物体所做的功为  $W = F \cdot s \cos \theta$  式中的  $\theta$  是  $F$  和  $s$  的夹角,即  $s \cos \theta$  是  $s$  在  $F$  方向上的投影。功是标量,但有正、负之分,正功和负功的物理意义必须从与做功相联系的能量转化角度去理解。

特别要注意的是:

(1) 上述公式必须在  $F$  是恒力的情况下才适用。如果  $F$  为变力,在中学阶段常有以下几种处理方法:

① 微元法,把整个物理过程分割为无穷段,令每一段都趋向于零。这样在每一小段上,即可把变力做功转化为恒力做功。最后再把每一小段的功加起来,即:

$$W = \sum F \cdot \Delta s \cos \theta$$

如讨论向心力对物体不做功时就是用这个方法。

② 图像法,即作出力  $F$  与位移  $s$  变化的图像,求出图线与位移之间所围的面积,其物理意义就是功  $W$ 。同样由于数学知识限制,一般只用在作出的图线是直线型的情况下。

③ 等效法,即用功能原理(机械能的增量)或者  $P \cdot t$  等效转变为所求的功。

(2) 当物体的位移与力的作用点的位移不相同,应把公式中的  $s$  理解为力的作用点的位移。如图 4-1-1,当用力  $F$  将物体从  $A$  拉到  $B$  的过程中,若要计算  $F$  所做的功  $W$  必须将  $s_2$  代入计算式,而不是  $s_1$ 。

(3) 在给定的运动过程中,由于位移与参照物的选定有关,放在不同的参照系中,可

能有不同的数值,但一对作用力与反作用力所做功之和必为零,与参照系的选择无关.在实际解题的过程中,适当选择一个参照系(无论这个参照系是惯性系,还是非惯性系)将会给解题带来方便.

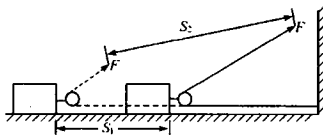


图 4-1-1

## 二、功率

力所作的功与所用时间的比值,称为该力在这段时间内的平均功率,记为  $P = W/t$

若将  $W = Fv\cos\theta$  代入上式,可得  $P = Fv\cos\theta$

值得注意的是:若上式中的  $v$  为平均速度,则所求得的功率  $P$  为平均功率;若  $v$  为即时速度,则求得的  $P$  为即时功率.

### 【例题分析】

**例 1** 足球运动员在  $L = 11\text{m}$  远处罚球,准确地从横梁下踢进一球.横梁下沿的高度为  $h = 2.5\text{m}$ .足球的质量为  $m = 0.5\text{kg}$ ,不计空气阻力,必须传给这个足球的最小能量  $E_{\min}$  是多少?

**解法一** 依题意,足球的运动满足斜抛运动规律,建立直角坐标系,如图 4-1-2 所示,并设足球到球门的距离为  $s$ ,则有

$$s = v_0 \cos\alpha t \quad \text{①}$$

$$h = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{②}$$

由①、②两式消去  $t$ ,得

$$\begin{aligned} v_0^2 &= -gs^2 / [2\cos^2\alpha(h - s\tan\alpha)] = gs^2 / [s\sin 2\alpha - h(\cos 2\alpha + 1)] \\ &= gs^2 / \left\{ \sqrt{s^2 + h^2} \left[ \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} \sin 2\alpha - \frac{h}{\sqrt{s^2 + h^2}} \cos 2\alpha \right] - h \right\} \quad \text{③} \end{aligned}$$

令  $\frac{h}{s} = \tan\theta$ ,则有

$$\cos\theta = \frac{s}{\sqrt{s^2 + h^2}}, \quad \sin\theta = \frac{h}{\sqrt{s^2 + h^2}}$$

故③式可以写为

$$\begin{aligned} v_0^2 &= gs^2 / \left[ \sqrt{s^2 + h^2} [\sin 2\alpha \cos\theta - \cos 2\alpha \sin\theta] - h \right] \\ &= gs^2 / [\sqrt{s^2 + h^2} \sin(2\alpha - \theta) - h] \quad \text{④} \end{aligned}$$

当  $\sin(2\alpha - \theta) = 1$  时,④式分母有极大值,故  $v_0^2$  有极小值,且

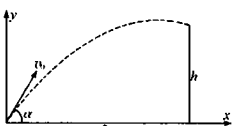


图 4-1-2

$$\begin{aligned} v_{0\min}^2 &= gs^2 / (\sqrt{s^2 + h^2} - h) \\ &= gs^2 (\sqrt{s^2 + h^2} + h) / (\sqrt{s^2 + h^2} - h)(\sqrt{s^2 + h^2} + h) \\ &= g(\sqrt{s^2 + h^2} + h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } E_{\min} &= \frac{1}{2} mv_{0\min}^2 = \frac{1}{2} mg(\sqrt{s^2 + h^2} + h) \\ &= \frac{1}{2} \times 0.5 \times 10 \times (\sqrt{2.5^2 + 11^2} + 2.5) = 34.45(\text{J}) \end{aligned}$$

解法二 如图 4-1-2 所示, 设足球到达球门用时为  $t$ , 则它的运动方程为

$$s = v_0 \cos \alpha t \quad \text{①}$$

$$h = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{②}$$

$$\text{由 ①、② 得 } h = s \tan \alpha - \frac{gs^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha)$$

$$\text{整理得 } gs^2 \tan^2 \alpha - 2v_0^2 \tan \alpha + (gs^2 + 2v_0^2 h) = 0 \quad \text{③}$$

③式是关于  $\tan \alpha$  得二次方程, 其判别式为

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2v_0^2)^2 - 4gs^2(gs^2 + 2v_0^2 h) \geq 0$$

$$\text{求得 } v_0^2 \geq gh + g\sqrt{h^2 + s^2}$$

$$\text{故 } E_{\min} = \frac{1}{2} mv_{0\min}^2 = \frac{1}{2} m(gh + g\sqrt{h^2 + s^2}) = 34.45(\text{J})$$

例 2 一辆汽车的质量是  $10^5 \text{ kg}$ , 该车从静止开始出发, 以恒定的功率行驶, 经过 40s, 前进 400m, 速度达到最大值. 如果车受的阻力始终是车重的 0.05 倍, 问车的最大速度是多少?

解 汽车在运动过程中, 功率恒定, 速度增加, 所以牵引力不断减小. 当减小到与阻力相等时, 速度达到最大值. 汽车所受阻力是恒力, 牵引力是变力, 牵引力做功不能直接用公式  $W = Fs$  来解决, 但可用公式  $W = Pt$  来求解. 因为汽车达到最大速度时牵引力等于阻力, 故有  $P = Fv_m = f v_m$

$$\text{牵引力做的功为 } W_F = Pt = f v_m t$$

设阻力  $f$  做的功为  $W_f$ , 由动能定理可知  $W_F - W_f = \frac{1}{2} m v_m^2$ , 因为

$$W_F = f v_m t, W_f = fs, f = kmg$$

$$f v_m t - fs = \frac{1}{2} m v_m^2$$

$$kmg v_m t - kmg s = \frac{1}{2} m v_m^2$$

$$kg v_m t - kg s = \frac{1}{2} v_m^2$$

将  $k=0.05$ ,  $g=10\text{m/s}^2$ ,  $t=40\text{s}$ ,  $s=400\text{m}$  代入上式中, 得  $v_m^2 - 40v_m + 400 = 0$ , 所以  
 $v_m = 20\text{m/s}$

### 【巩固习题】

1. 正常人心脏在一次搏动中输出血量为  $70\text{ml}$ , 推动血液流动的平均压强为  $1.6 \times 10^4\text{Pa}$ , 设心脏主动脉的内径约为  $2.5\text{cm}$ , 每分钟搏动  $75$  次, 问: (1) 心脏推动血液流动的平均功率是多大? (2) 血液从心脏流出的平均速度是多少?

2. 锤子每次从同一高度落下打击木桩, 每次均有  $80\%$  的能量传给木桩, 且木桩所受阻力  $f$  与插入地面深度  $x$  成正比, 试求木桩每次打入的深度比。

3. 如图 4-1-3 所示, 质量为  $m$  的物体从同一高度  $h$  沿不同斜面下滑, 已知物体与每个斜面的摩擦系数均为  $\mu$ , 且物体都能滑到底端, 试问物体沿途中哪一条线路滑下, 阻力所做的功最小?

4. 一支灌溉水枪均匀喷洒半径为  $12\text{m}$  的农田, 已知从  $4\text{m}$  深井里每分钟抽水  $80\text{L}$  喷出, 试求电动机功率。

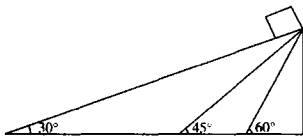


图 4-1-3

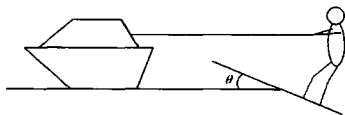


图 4-1-4

5. 在电视节目中, 我们常常能够看到一种精彩的水上运动——划水板。如图 4-1-4 所示, 运动员在快艇的水平牵引下, 脚踏倾斜滑板在水上滑行。设滑板是光滑的, 滑板的划水面积为  $S$ , 滑板与水平方向的夹角(滑板前端抬起的角度)为  $\theta$ , 水的密度为  $\rho$ , 理论研究表明: 水对滑板的作用力大小为  $N = \rho S v^2 \sin^2 \theta$ , 式中的  $v$  为快艇牵引速度。若人的质量为  $m$ , 则快艇对运动员的牵引功率为多少?

6. 以恒定功率从静止开始运动的汽车, 经时间  $t$  后速度达到最大速度  $v_m$ , 期间通过的距离为  $s$ , 则 ( )

- A.  $s > \frac{v_m}{2} t$       B.  $s = \frac{v_m}{2} t$       C.  $s < \frac{v_m}{2} t$       D. 条件不足, 无法判断

7. 如图 4-1-5 所示, 轻杆  $OA$  一端固定在光滑铰链上, 另一端固定着一个质量为  $m$  的小球。杆的中点作用有一水平向右的拉力  $F$ , 现让杆沿逆时针方向转动, 当杆与竖直线成  $45^\circ$  角时, 小球的速度为  $v$ , 此时拉力  $F$  的功率为 \_\_\_\_\_。

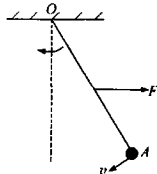


图 4-1-5



8. 列车以速度  $v = 72 \text{ km/h}$  沿水平路行驶, 为使列车在下大雨时也以这样的速度行驶, 问火车头发出的功率应该变化多少? 单位时间内落在列车上的雨水质量  $m_t = 100 \text{ kg/s}$ , 雨下落后顺车厢壁流下, 下雨时摩擦力的变化不计。

## 第二节 动能定理



### 【知识要点】

#### 一、质点动能定理

我们从牛顿第二定律出发, 可以推出: 力对质点做功与质点的状态量  $\frac{1}{2}mv^2$  的增量相等, 即  $W = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

我们规定质点的动能为  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ , 则有  $W = E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k$

#### 二、质点系动能定理

对于质点系, 对其中的第  $i$  个质点应用质点动能定理:

$$W_{i\text{外}} + W_{i\text{内}} = \frac{1}{2}m_i v_{i1}^2 - \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2$$

其中,  $W_{i\text{外}}$  表示外力对该质点的做功,  $W_{i\text{内}}$  表示质点系内力对该质点的做功. 对质点系中的所有质点求和, 有  $\sum W_{i\text{外}} + \sum W_{i\text{内}} = \sum \frac{1}{2}m_i v_{i1}^2 - \sum \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2$

即  $W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k$

所以, 对于质点系来说, 外力做的功与内力做的功的和与质点系动能的增量相等。

注意, 无论是质点动能定理还是质点系动能定理都是由牛顿第二定律推导出来的, 所以它们只适用于惯性系.  $F$  做功的位移和物体速度  $v$  对于不同的惯性系是不一样的, 所以动能相对于不同的惯性系也是不一样的, 在研究问题时我们首先应确定同一个惯性参照系。



### 【例题分析】

例 1 如图 4-2-1 所示的装置中, 重物质量为  $m$ , 开始时车静止在  $A$  点, 且绳已绷直, 然后车加速向左运动, 过  $B$  点时速度为  $v_B$ , 已知  $AB = H$ ,  $AD = H$ , 求车从  $A$  移到  $B$  的过程中, 绳  $Q$  端的拉力对物体做的功。

解 设车运动到 B 点的时候,重物的速度为

$$v, \text{ 则有 } v = v_B \cos \theta = v_B \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} v_B}{2} \quad (1)$$

$$\text{对重物,由动能定理得 } W_T + W_G = \frac{1}{2} m v^2 - 0 \quad (2)$$

$$\text{而 } W_G = -mg(\sqrt{2}-1)H \quad (3)$$

$$\text{联立 (1), (2), (3) 式, 解得 } W_T = (\sqrt{2}-1)mgH + mv_B^2/4$$

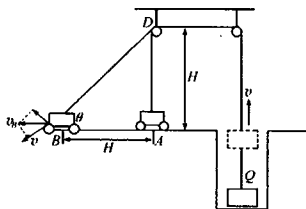


图 4-2-1

例 2 如图 4-2-2, 长  $2l$  的线系住两个相同的小钢球, 放在光滑的地板上, 在线中央有一水平恒力  $F$  作用于线, 问: (1) 钢球第一次相碰时, 在与  $F$  垂直的方向上钢球对地面的速度多大? (2) 经若干次碰撞后, 最后两球一直处于接触状态下运动, 那么因碰撞而失去的总能量是多少?

解 (1) 设  $m$  沿  $F$  方向运动  $x$  长度时, 钢球第一次相碰, 此时力  $F$  的作用点拉过  $(x+l)$ , 两球第一次接触时, 除有水平方向速度外, 还有绕  $O$  点的瞬时速度, 即所求的  $v_1$ , 由动能定理得

$$F(l+x) = 2 \cdot \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_1^2) = mv_1^2 + mv_1^2$$

对整个系统, 在力  $F$  的方向上, 由牛顿第二定律和运动学公式, 有

$$F = 2ma_1, v_1^2 = 2a_1 \cdot x$$

$$\text{联立方程, 解得 } v_1 = \sqrt{\frac{Fl}{m}}$$

(2) 最后两球一起处于接触状态下, 垂直于  $F$  方向上的速度损失了, 这部分动能即失去的总能量, 所以

$$\Delta E_k = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_1^2 = mv_1^2 = Fl$$

例 3  $M$  和  $m$  用绳通过定滑轮连接,  $m$  放在倾角  $\theta = 37^\circ$  的固定斜面上,  $M = 5\text{kg}$ ,  $m = 1\text{kg}$ ,  $m$  和斜面的动摩擦因数  $\mu = 0.5$ , 而物体  $M$  沿杆  $AB$  无摩擦滑动,  $AB$  间距为  $l = 4\text{m}$ , 问当  $M$  由静止开始从如图 4-2-3 所示位置下滑  $h = 3\text{m}$  时, 它的速度多大?

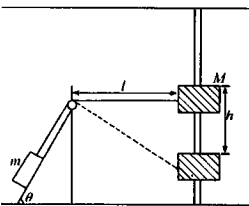


图 4-2-3

解 重力对  $M$  做正功, 绳的张力  $T$  对  $M$  做负功, 杆对  $M$  的支持力不做功。

$$\text{所以 } W = hMg - (\sqrt{l^2 + h^2} - l) \cdot T$$

$$= hMg - (\sqrt{l^2 + h^2} - l) \cdot (mg \sin \theta + \mu mg \cos \theta)$$

当  $M$  下落  $h$  时,  $m$  的速度与  $M$  的速度的关系  $v' = v \sin \theta$ ,

$$E_{k1} = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} mv'^2 = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} m(\sin\theta v)^2$$

由动能定理  $W = E_{k1} - E_{k0}$ , 有

$$hMg - (\sqrt{l^2 + h^2} - l)(mg \sin\theta + \mu mg \cos\theta) = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} m(\sin\theta v)^2 - 0$$

解得

$$v = \sqrt{\frac{2[hMg - (\sqrt{l^2 + h^2} - l)(mg \sin\theta + \mu mg \cos\theta)]}{M + \sin^2\theta \cdot m}}$$

代入数据, 得  $v = 7.2 \text{ (m/s)}$

### 【巩固习题】

1. 一物体由斜面底部以初速度  $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  向斜面上方冲去, 然后又从斜面上滑下, 滑到底部时速度已变成  $v = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . 已知斜面倾角为  $30^\circ$ , 物体与斜面间的滑动摩擦系数为  $\mu_k$ , 求物体上冲到最高点的高度.

2. 如图 4-2-4 所示, 质量为  $M$  的小车静止在光滑水平面上, 长为  $l$  的悬线系着质量为  $m$  的小球于水平位置释放, 下摆到图示  $\alpha$  位置时, 小车的速度为  $v$ , 试求该过程中悬线张力对小球所做的功.

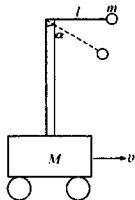


图 4-2-4

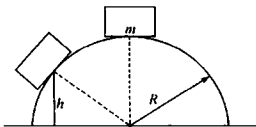


图 4-2-5

3. 一质量为  $m$  的小物体, 放在半径为  $R$  的光滑半球顶上, 初始时, 它们间相对静止, 如图 4-2-5 所示, 现使半球面以加速度  $a = \frac{1}{4}g$  匀加速向右运动, 求物体离开球面时, 离半球底面的距离  $h$ .

4. 以  $36 \text{ m/s}$  的初速度竖直向上抛出一球,  $2 \text{ s}$  末球的动能为  $72 \text{ J}$ , 动量大小为  $12 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 求从抛出到最高点这段时间内球克服空气阻力所做的功  $W_f$ . ( $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ )

5. 某人从塔顶以抛射角  $\alpha = 37^\circ$  抛出一石子, 石子在空中飞行时间  $t = 7.14 \text{ s}$ . 石子落地点离塔底水平距离为  $200 \text{ m}$ . 试求: (1) 塔高; (2) 人对石子所做的功. (设石子质量为  $200 \text{ g}$ )

6. 如图 4-2-6 所示, 有一力  $T$  拉着木箱沿平直路面做匀速运动.  $T$  的大小不变, 但

是总指向  $O$  点,  $O$  点离开地面的高度为  $h$ . 问当  $T$  与木箱运动方向的夹角从  $\theta_1$  增加到  $\theta_2$  的过程中,  $T$  所做的功是多少?

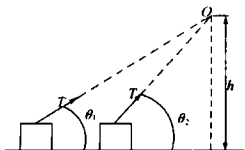


图 4-2-6

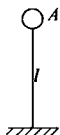


图 4-2-7

7. 如图 4-2-7 所示, 长为  $l$  的轻质杆上端  $A$  固定一个重球, 直立于粗糙地面上, 由静止开始倒落. 试求小球与地面相碰时的速度.

8. 在竖直平面内的光滑轨道如图 4-2-8 所示, 其中  $b$  点左边为直轨道,  $b$  点右边为半径为  $R$  的圆形轨道,  $c$  为轨道的最低点. 一个可看作质点的小球原来静止在离轨道最低点的高度为  $2R$  处, 从静止开始释放, 它将沿轨道运动, 并在图中  $e$  点处脱离轨道. 求  $e$  点与最高点  $d$  点间的弧度值.

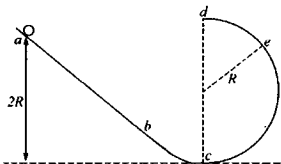


图 4-2-8

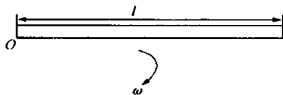


图 4-2-9

9. 如图 4-2-9 所示, 长为  $l$ 、质量为  $m$  均质杆在水平面内以角速度  $\omega$  绕通过杆端的竖直轴  $O$  转动, 试求杆的动能.

### 第三节 势能



#### 【知识要点】

保守力:

我们按力做功的量是否与路径有关, 把力分为保守力和非保守力. 其中, 保守力的做

功量与做功的路径无关,它仅由质点的初始位置和最终位置决定.比如弹力、重力和万有引力都是保守力.非保守力的做功量与做功的路径有关,摩擦力就是一种非保守力.

势能:

因为保守力做功与路径无关的特点,所以在保守力的场中可以提出势能的概念.保守力做的功等于对应的势能的减少,即  $W_{保} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$ .

上式提供了计算势能差的方法,物体在场中的势能却还未定义.我们要规定一个位置的势能为零,则由上式我们可以计算物体在场中任意位置的势能了,它就等于物体从任意位置移到势能零点,保守力做的功.从这里可以看出,势能是相对的.

从概念上来讲,势能是属于质点和保守力场或者说是由保守力相互作用的两质点共同拥有的.这是势能与其他形式的能相比非常特殊的地方.

常见的势能有:

(1)引力势能:规定无穷远处势能为零,则

①质量为  $m_1$  和  $m_2$  相距为  $r$  的两质点间的势能为  $E_p = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$

②质量为  $m$  的质点与质量为  $M$ , 半径为  $R$  的均匀球体间的势能为

$$E_p = -G \frac{Mm}{r} \quad (r \geq R)$$

其中,  $r$  为质点到球心的距离.

③质量为  $m$  的质点与质量为  $M$ , 半径为  $R$  的均匀球壳间的势能为

(i)  $r \geq R$  时,  $E_p = -G \frac{Mm}{r}$

(ii)  $r < R$  时,  $E_p = -G \frac{Mm}{R}$

(2)重力势能:若物体  $m$  在地表附近,通常规定地面为势能零点,质量为  $m$ , 离地面高度为  $h$  的质点与地球组成系统的势能为  $E_p = mgh$

(3)弹性势能:规定弹簧在原长时为势能零点,倔强系数为  $k$  的弹簧当形变量为  $x$  时,势能为  $E_p = \frac{1}{2} kx^2$

### 【例题分析】

**例1** 均匀球壳的半径为  $R$ , 质量为  $M$ , 另有一质量为  $m$  的质点放在球壳内距球心  $r$  处, 试证明势能  $E_p = -G \frac{Mm}{R}$ .

**证明.** 当  $m$  在球壳内时,  $M$  对  $m$  作用力为零. 所以, 在  $m$  从球壳内任意一点移到球壳上的过程中,  $M$  对  $m$  的作用力时刻为零, 相应的做功也为零, 即该过程不需要有外力对  $m$  做功

$$E_{p1} - E_{p0} = 0 \cdot (R - r) = 0, E_{p0} = E_{p1}$$

而  $E_{p1} = -G \frac{M \cdot m}{R}$ , 所以  $E_{p0} = -G \frac{M \cdot m}{R}$

**例 2** 如图 4-3-1 所示, 质量为  $m$  的小球被两个倔强系数为  $k$  的相同弹簧固定在一个质量为  $M$  的盒子中. 盒子从  $h$  高处开始下落, 在盒子下落的瞬间, 两弹簧均未发生形变, 小球静止. 问  $h$  为多少时盒子与地面发生完全非弹性碰撞后还能弹起?

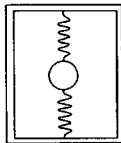


图 4-3-1

**解** 当盒子落地时,  $M$  的动能损失, 对  $m$  用动能定理  $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$   
 设  $M$  与地面的作用力为零的临界时刻,  $m$  上升了  $x$ , 则有

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}kx^2 + mgx$$

地面给  $M$  的支持力为零, 所以  $Mg - 2kx = 0$

联立以上三式, 解得  $h = \frac{Mg}{2k} \left( 1 + \frac{M}{2m} \right)$

要使  $M$  还能跳起来,  $h$  要大于临界情况. 所以  $h > \frac{Mg}{2k} \left( 1 + \frac{M}{2m} \right)$



## 【巩固习题】

1. 一个重物挂在轻弹簧上, 现从弹簧中点向下缓慢地拉弹簧, 为此做了一定的功  $W$ , 然后放松弹簧, 求重物在运动过程中所具有的最大动能.
2. 一身高  $H = 1.9\text{m}$  的跳高运动员, 在地面上的比赛成绩记录是  $2.39\text{m}$ , 如果在月球上比赛, 运动员在同样状况时, 估算能跳的高度是多少? (月球、地球质量和半径的关系是:  $M_{\text{月}} = M_{\text{地}}/81, R_{\text{月}} = R_{\text{地}}/3.8$ )
3. 用一弹簧把两块质量各为  $m_1$  及  $m_2$  的板连接起来, 如图 4-3-2 所示, 问必须加多大的力压在上方的板  $m_1$  上, 才能当力的作用突然停止后, 上方的板跳起来恰能使下方的板  $m_2$  稍被提起? (弹簧的质量可忽略不计)

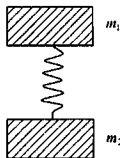


图 4-3-2

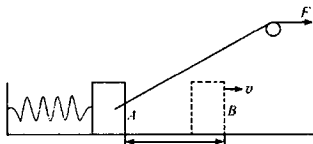


图 4-3-3

4. 求第二宇宙速度.

5. 有一质量为  $M = 2\text{kg}$  的物体, 其一端通过轻弹簧施一大小为  $30\text{N}$  的水平恒力  $F$ , 若弹簧的倔强系数为  $k = 100\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ , 物体与水平面间的动摩擦因数为  $\mu = 0.3$ , 求物体移动  $2\text{m}$  时的速度。

6. 如图 4-3-3 所示, 放在光滑水平面上的质量为  $m = 1\text{kg}$  的物体, 左端连着倔强系数  $k = 100\text{N}/\text{m}$  的弹簧, 并用牵引绳牵引着。开始时, 物体静止在  $A$  点, 这时弹簧对物体的拉力为  $2.5\text{N}$ 。在牵引绳拉力的作用下, 物体沿水平面从  $A$  运动到  $B$ , 达  $B$  时的速度  $v = 2\text{m}/\text{s}$ ,  $A$ 、 $B$  两点相距  $0.2\text{m}$ 。求这一过程拉力对物体所做的功。

## 第四节 机械能守恒定律

### 【知识要点】

#### 一、功能原理

物体系机械能的增量, 等于系统所受外力与系统内部非保守力做功之和, 即

$$W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = E_2 - E_1$$

功能原理实际上是动能定理的变形, 在运用时应注意: 如在考虑机械能时引入了重力势能, 由于势能属于物体和地球共有, 因此物体的重力势能即为内力(保守力), 在计算合外力做功时应剔除重力做功; 同样如引入弹性势能, 就不应再考虑弹簧的弹力做功。另外, 因为功是机械能变化的量度, 所以机械能的变化需要通过做功来实现, 上式中的  $W_{\text{外}}$  反映系统和外界的能量转换,  $W_{\text{非保内}}$  反映系统内部机械能和其他形式能量的转换; 如系统内有滑动摩擦力时,  $W_{\text{非保内}}$  为负值, 表明系统的一部分机械能转换成了系统的内能。

#### 二、机械能守恒定律

对于一个系统来说, 如果外力(除重力或引力、弹性力以外)和非保守内力都不做功, 由功能原理可知, 系统的总机械能保持不变, 这就是系统的机械能守恒定律, 该定律只适用于惯性系, 它同时必须选同一惯性系, 在机械能守恒的系统中, 动能和势能可以相互转换, 这种转换是以通过重力、弹性力等保守力做功来实现的。

### 【例题分析】

例 1 如图 4-4-1 所示, 质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的两物体中间用弹簧相系, 弹簧劲度系数为  $k$ , 开始静止

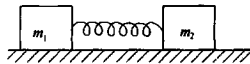


图 4-4-1

于光滑的桌面上。若突然打击  $m_2$  使之具有速度  $v_0$ (这时弹簧未形变), 求弹簧的最大压缩量。(弹簧质量不计)

**分析** 这是一个双体问题,因此我们既可以按常规方法解,也可以用折合质量的方法解。

**解** (1)常规法:整个系统的机械能应该守恒,在弹簧压缩程度最大时,也即弹性势能最大时,系统的动能最小.且这与  $v_0$  的方向无关,因此不必分两种情况讨论.假设  $v_0$  向左,则从这一瞬间起  $m_2$  减速,  $m_1$  加速,但  $v_2$  仍大于  $v_1$ ,弹簧继续压缩,直至两者速度相同,弹簧达到最大压缩量.因此两者之间的作用相当于完全非弹性碰撞.

$$m_2 v_0 = (m_1 + m_2) v$$

$$v = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_0$$

系统损失的动能为  $\Delta E = \frac{1}{2} m_2 v_0^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} m_2 v_0^2 \left( 1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)$

这部分能量转化为弹性势能  $\frac{1}{2} kL^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_0^2$

解得  $L = \pm v_0 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$

$L$  的正负解代表最大伸长和最大压缩.

(2)折合质量法:考虑  $m_2$  相对  $m_1$  的运动,折合质量  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . 开始时相对速度为  $v_0$ ,最大压缩时为零,根据相对的动能定理  $\frac{1}{2} kL^2 = \frac{1}{2} \mu v_0^2$

所以  $L = \pm v_0 \sqrt{\frac{\mu}{k}}$

即  $L = \pm v_0 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$

对比以上两种方法可知,折合质量法比常规方法要略胜一筹.

**例2** 劲度系数为  $k$  的轻质弹簧水平放置,左端固定,右端连接一个质量为  $m$  的木块,如图 4-4-2 所示.开始时木块静止平衡于某一位置,木块与水平面之间的动摩擦因数为  $\mu$ ,然后加一个水平向右的恒力于木块上,则用这个力  $F$  拉木块,当木块的速度再次为零时,弹簧可能的伸长量是多少?

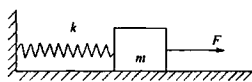


图 4-4-2

**分析** 题目只说“开始时木块静止平衡于某一位置”,并未指明具体的位置,也就是说木块在该位置所受的静摩擦力和弹簧的形变量都不清楚,因此要考虑各种情况.如果弹簧自然伸展时,木块在  $O$  点,那么当木块在  $O$  右方时,所受的弹簧的作用力向右.因为木块初始状态是静止的,所以弹簧的拉力不能大于木块所受的最大静摩擦力  $mg\mu$ . 要将木块向右拉动,还需克服一个向左的静摩擦力  $mg\mu$ . 所以只要  $F \geq 2mg\mu$ , 即可以保



证在任何情况下都能拉动木块。

解 设物体的初始位置为  $x_0$ , 在向右的恒力  $F$  作用下, 物体到  $x$  处速度再次为零, 在此过程中, 外部有力  $F$  做功, 内部有非保守力  $f$  做功, 木块的动能增量为零, 所以根据物体体系的功能原理有  $F(x - x_0) - \mu mg(x - x_0) = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} kx_0^2$ ,

$$F - \mu mg = \frac{1}{2} k(x + x_0)$$

可得 
$$x = \frac{2(F - \mu mg)}{k} - x_0$$

因为木块一开始静止, 所以要求  $-\frac{\mu mg}{k} \leq x_0 \leq \frac{\mu mg}{k}$ , 可见, 当木块再次静止时, 弹簧可能的伸长是  $\frac{\mu mg}{k} \leq x \leq \frac{3\mu mg}{k}$ 。

例3 某行星质量为  $M$ , 半径为  $R$ , 若在距该行星中心  $10R$  处有一物体, 正沿着与它和行星连线夹角  $\theta = 30^\circ$  的方向运动, 如图 4-4-3 所示, 此物体的速度  $v$  至少要多大, 才能避免该物体落在行星上与行星发生碰撞?

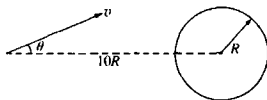


图 4-4-3

分析 研究天体运动问题时, 一般均从开普勒三定律和系统机械能守恒这两个角度着手考虑, 本题也不例外。

解 物体绕行星作椭圆轨道运动, 由开普勒第一定律知, 行星在椭圆轨道的一个焦点上, 要使物体与行星刚好不相撞, 应满足物体过近地点时与行星表面相切, 设在近地点时与行星表面相切, 设在近地点时物体速度为  $v'$ , 则根据机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2} mv'^2 - G \cdot \frac{Mm}{10R} = \frac{1}{2} mv^2 - G \cdot \frac{Mm}{R}$$

由开普勒第二定律得

$$Rv' = 10Rv \sin 30^\circ$$

解得 
$$v = \sqrt{\frac{3GM}{40R}}$$

因此, 物体的速度至少为  $\sqrt{\frac{3GM}{40R}}$  时才能避免该物体落在行星上与行星发生碰撞。

### 【巩固习题】

1. 如图 4-4-4 所示, 级差绞车由两个直径不同而固定在同一轴上的圆柱体组成, 一根绳子固定在两圆柱体上, 当绞车转动时, 绳子从半径较小的圆柱体上松开而缠绕到半径较大的圆柱体上, 借以提起重物。若重物的重量为  $G$ , 小圆柱体和大圆柱体的半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 摇把的半径为  $R_3$ , 问需要以多大的力  $F$  作用于摇把上才能将重物匀

速地提起？

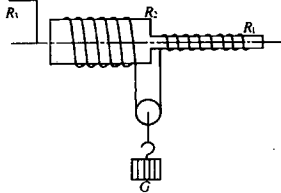


图 4-4-4

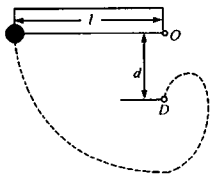


图 4-4-5

2. 将一摆长为  $l$  的单摆拉至水平位置,放手让其自由摆下,当摆到竖直位置时,在悬点  $O$  的正下方距  $O$  为  $d$  的  $D$  处,有一细钉挡着摆线,如图 4-4-5 所示. 试证:  $d = (2\sqrt{3} - 3)l$  时,摆球正好击中钉子.(不计空气阻力,不计线的质量和伸长)

3. 两个质量均为  $m$  的小球用长度为  $l$  的不可伸长的轻线相连,从高  $h$  处自由下落,使线中点碰到水平放置的钉子  $O$  上,如图 4-4-6 所示,如果该线所能承受的最大张力为  $T_0$ ,要将线拉断,线应从高  $h$  为多大处落下?

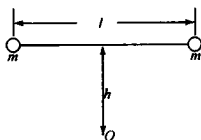


图 4-4-6

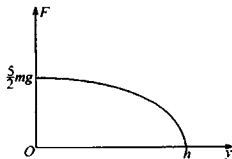


图 4-4-7

4. 跳水运动员从高于水面  $H = 10\text{m}$  的跳台自由落下. 假设运动员的质量  $m = 60\text{kg}$ , 其体形可等效为一长度  $L = 1.0\text{m}$ 、直径  $d = 0.30\text{m}$  的圆柱体,略去空气阻力. 运动员入水后,水的等效阻力  $F$  作用于圆柱体的下端,  $F$  的数值随入水深度  $y$  的变化函数曲线如图 4-4-7 所示. 该曲线可近似看作椭圆的一部分,该椭圆的长、短轴分别与坐标轴  $Oy$  和  $OF$  重合. 椭圆与  $y$  轴相交于  $y = h$  处,与  $F$  轴相交于  $F = (5/2)mg$  处. 为了确保运动员的安全,试计算水池中水的深度  $h$  至少应等于多少? (水的密度  $\rho = 1.0 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ )

5. 有一光滑轨道  $ABC$  如图 4-4-8 所示,  $BC$  部分是水平光滑的平面. 在  $AB$  上离  $BC$  水平面高  $h$  处,把一个质量为  $m$  的小物体由静止释放,物体沿曲面  $AB$  滑落与  $BC$  面上静止的质量为  $M$  的物体发生对心完全弹性碰撞,碰撞后  $m$  弹回高  $h_1$  处,然后再滑下,第二次与  $M$  碰撞. 求要发生第二次碰撞,  $m/M$  的值不能超过多大?

6. 如图 4-4-9 所示, 在盛有水的圆柱形容器内, 竖直地浮着一块圆柱形木块, 木块体积为  $V$ 、高为  $h$ , 其密度为水密度  $\rho$  的一半, 横截面积也为容器横截面积的一半, 水面高为  $2h$ . 用力缓慢地把木块压到容器底上, 设水不会溢出, 求压力所做的功.

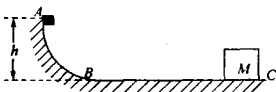


图 4-4-8

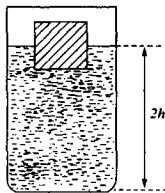


图 4-4-9

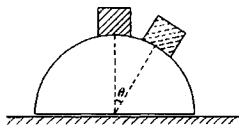


图 4-4-10

7. 如图 4-4-10 所示, 质量为  $M$ 、表面光滑的半球体静止放在水平光滑地面上, 半球顶端有一个质量为  $m$  的小滑块由静止开始下滑, 至圆心角为  $\theta$  处时飞离半球体, 已知  $\cos\theta = 0.70$ , 试求  $M/m$  的值.

## 第五节 冲量、动量、动量定理



### 【知识要点】

#### 一、冲量

由力  $F$  产生的冲量可表示为  $\Delta I = F \cdot \Delta t (\Delta t \rightarrow 0)$ , 其中  $F$  可为时间或空间的函数,  $t$  为时间. 当  $F$  为恒力时, 利用冲量关于时间成线性关系可直接得出  $I = F \cdot (t_2 - t_1)$ . 由于  $F$  是矢量,  $t$  是标量, 因此冲量也是矢量, 方向同  $F$ . 由于力、时间都与参照系的选择无关, 所以力的冲量也与参照系的选择无关.

由于一对作用力与反作用力总是等大, 反向, 同时产生, 同时消失, 因此一对作用力与反作用力产生的冲量必定等大反向.

如果物体受到变力的持续作用, 即  $F$  关于时间或空间的函数不为常量, 则利用在极小一段时间内, 力可视为不变, 对时间无穷细分并用小量迭加的办法对  $\Delta I = F \cdot \Delta t (\Delta t \rightarrow 0)$  矢量迭加求和.

## 二、动量

物体的质量和运动速度的乘积,叫做物体的动量.动量为矢量,方向同物体运动的速度方向.选用不同的参照系时,由于速度与参照系有关,所以动量可能有不同值.通常在不作说明的情况下,物体的动量是指物体相对地面的动量.

## 三、动量定理

物体所受合外力的冲量等于物体动量的增量,小量形式的公式为

$$\Delta I = F \Delta t = \Delta(mv) = m \cdot \Delta v + \Delta m \cdot v (\Delta t \rightarrow 0) \quad \textcircled{1}$$

在不考虑相对论效应时,函数  $m$  对于时间空间都是常数,上式可迭加写为

$$I = m(v_2 - v_1)$$

若外力为变力,参照变力冲量的求法.在理解公式中符号的时候,须注意它既表明合外力的冲量与研究对象的动量增量的数值相等,另一方面表示两者的方向一致.因此,在实际应用动量定理时,也可用正交分解法.另外,动量定理只适用于惯性参照系,在非惯性系中应用动量定理时,则还须考虑惯性力的冲量.但动量定理在不同的惯性参照系中有相同的表示形式,因此,冲量与惯性参照系的选择无关,但须注意速度差必须相对于同一参照系而言才有意义.

动量定理不仅适用于宏观物体的低速运动,对微观现象和高速运动 $\textcircled{1}$ 式仍然适用.

## 四、质点系的动量定理

将质点动量定理扩展到质点系,即可得到质点系的动量定理.质点系中各质点所受外力和内力的总冲量为  $I_{\text{外}}$ 、 $I_{\text{内}}$ ,各质点的初动量值之和及末动量值之和记为  $p_1$  及  $p_2$ ,则必有

$$I_{\text{内}} + I_{\text{外}} = p_2 - p_1$$

由牛顿第三定律可证明,因此得  $I_{\text{外}} = p_2 - p_1$

## 【例题分析】

**例 1** 质量为 4kg 的平板车静止在光滑的水平面上,一质量为 1kg 的玩具汽车在 1s 内由静止从 A 点加速运动到 B 点,AB 间距 0.2m,在这段时间内汽车对平板车的冲量大小为多少?

**分析** 由于不知道加速情况,可用速率的平均值来算.

**解** 当玩具小车运动到 B 点时,小车相对于地面的平均速率为  $v_1$ ,平板车相对于地面的平均速率为  $v_2$ ,有

$$\text{相对运动: } v_1 + v_2 = s_{AB}/t = 0.2\text{m}/1\text{s} = 0.2\text{m/s}$$

$$\text{水平方向动量定理: } I_x = m(v_1 - 0) = M(v_2 - 0)$$

$$\text{解得 } I_x = 0.32(\text{N}\cdot\text{s})$$

由于弹力也有冲量,所以  $I_y = mgt = 1 \times 9.8 \times 1 = 9.8(\text{N}\cdot\text{s})$

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = 9.805(\text{N}\cdot\text{s})$$

注:此题很容易漏掉竖直方向的冲量。

**例 2** 一绳跨过一定滑轮,两端分别拴有质量为  $m$  及  $M$  的物体,如图 4-5-1 所示,  $M > m$ ,  $M$  静止在地面上,当  $m$  自由下落  $h$  后,绳子才被拉紧,求  $M$  从离开地面到落回地面花时多少? 设整个运动过程中  $m$  都不着地。

**分析** 物体  $m$  下落  $h$  距离后有一个绳绷紧的过程,由于绳绷紧的时间极短,所以可以忽略这一过程中重力的冲量,以后两物体通过绳子连在一起做减速运动。

物体  $m$  下落  $h$  时获得的速度为  $v_0$ ,则有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$

绳子绷紧过程中,忽略重力冲量,对  $M, m$  分别根据动量定理

$$\text{得 } -I = mv_{\text{共}} - mv_0, I = Mv_{\text{共}}$$

这样可解得绳绷紧以后,两物体共同运动的速度大小为

$$v_{\text{共}} = \frac{mv_0}{M+m} = \frac{m}{M+m}\sqrt{2gh}$$

以后根据牛顿第二定律有  $T - mg = ma, Mg - T = Ma$

$$\text{解得 } a = \frac{M-m}{M+m}g$$

设  $M$  从离开地面到落回地面花时  $t$ ,则有  $-v_{\text{共}} = v_{\text{共}} - at$

$$\text{解得 } t = \frac{2v_{\text{共}}}{a} = \frac{2m}{M-m}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

注:在求本题绳绷紧瞬时两物体的共同速度时,有同学常用动量守恒定律,这是不妥当的。

**例 3** 用光滑的细条做的正方形卷轴窗帘,面积为  $l \cdot l = 1.5 \times 1.5(\text{m}^2)$ ,质量为  $3\text{kg}$ ,沿着墙壁悬挂在屋檐板上,将窗帘的最下边拾起与上边缘对齐,使之对齐起来,然后让它落下,如图 4-5-2 所示,求出作用于屋檐板上的力  $F$  随时间  $t$  的函数变化关系。

**分析** 设想窗帘下落过程中每一小段窗帘落到最低位置后它留在那里不动,速度为零,作用于屋檐板上的力  $F$  应等于时刻  $t$  原先右边这段窗帘  $OA$  的重力和在  $t$  到  $t + \Delta t$  这段时间里落下的一段窗帘  $AB$  所产生的冲击力  $f$  的和。

$$\begin{aligned} \text{解 设 } OA = x, \text{ 则 } AB = \Delta x, OA \text{ 段质量 } m_2 = \frac{M}{l}x, AB \text{ 段质量 } \Delta m, \frac{\Delta m}{\Delta t}v_1 &= \frac{M}{l}\Delta x \frac{gt}{\Delta t} \\ &= \frac{Mgt}{l} \frac{\Delta x}{\Delta t} \end{aligned}$$

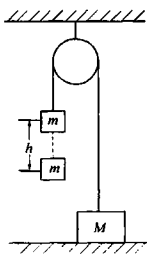


图 4-5-1

上式中,  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  是窗帘右边部分的长度的增长率, 考虑到窗帘左端 C 下落  $h$  时, 窗帘右端只增长  $\frac{1}{2}h$ , 因此  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v}{2}$ , 式中  $v$  为窗帘左端下落  $h$  时的速度, 就是前面的  $v_1$ , 故  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{gt}{2}$

因此  $f = \frac{Mgt}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot gt = \frac{Mg^2}{2l} t^2$

由于 OA 段长  $x = \frac{l}{2} + \frac{h}{2} = \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} gt^2$

所以  $G_s = \frac{Mg}{l} \left( \frac{l}{2} + \frac{gt^2}{4} \right)$

因而 O 点受到作用力  $F = G_s + f = Mg \left( \frac{1}{2} + \frac{3gt^2}{4l} \right)$

由于 C 落到最低点的时间为  $t = \sqrt{\frac{2l}{g}} = 0.55(\text{s})$

代入数据后的  $F(t)$  的函数关系为

$$F(t) = \begin{cases} 14.7 + 144.1t^2 & 0 \leq t \leq 0.55 \\ 29.4 & t > 0.55 \end{cases}$$

### 【巩固习题】

1. 一帆船在静水中顺风飘行, 风速为  $v_0$ . 问: 船速多大时, 风供给船的功率最大? (设帆面是完全弹性面, 且与风向垂直)

2. 如图 4-5-3 所示, 一盛水的容器沿倾斜角为  $\theta$  的固定斜面向下滑动, 从靠近容器底部的细管 A 的管口向外喷出水, 水的速度为  $v_0$ , 细管的内横截面积为  $S$ , 已知水和容器的总质量为  $M$ , 设容器内水的质量可视为不变, 水的密度为  $\rho$ . 当容器下滑时, 水面与斜面平行, 试求容器底部与斜面间的动摩擦因数.

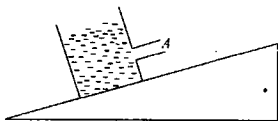


图 4-5-3

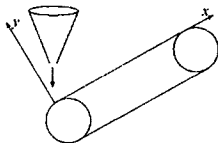


图 4-5-4

3. 如图 4-5-4 所示, 水泥运送装置, 每秒从水泥仓库输出的水泥质量  $\Delta m = 36\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ , 水泥下落到输送带上的速度为  $v_1 = 1.5\text{m/s}$ . 设水泥在脱离输送带时, 速度沿  $x$  轴方向, 输送带的速度  $v_2 = 5.5\text{m/s}$ , 求输送带对水泥沿  $x, y$  轴方向的作用力.

4. 长为  $l$ 、质量为  $m$  的柔软绳子放在水平桌面上, 用手将绳子的一端以恒定的速度  $v$  向上提起, 求当提起高度为  $x$  ( $x < l$ ) 时手的提力?

5. 如图 4-5-5 所示, 自动称米装置准备称米  $M \text{ kg}$ , 米出口处离容器装满  $M \text{ kg}$  米时的高度为  $h$ , 设出口处米的初速为 0, 米的流量为  $M \text{ kg/s}$ , 当台秤称重达  $M \text{ kg}$  加容器重量时, 装置能及时在米出口处切断米流, 问这种装置是否正确? 说明依据。

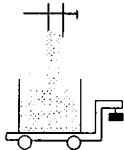


图 4-5-5

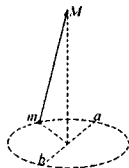


图 4-5-6

6. 如图 4-5-6 所示, 绳子一端固定于  $M$  点, 另一端系一质量为  $m$  的质点以匀角速度绕竖直轴做匀速圆周运动, 绳子与竖直轴之间的夹角为  $\theta$ . 已知  $a, b$  为直径上的两点, 求质点  $a$  点运动到  $b$  点绳子张力的冲量。

## 第六节 动量守恒定律



### 【知识要点】

#### 一、动量守恒定律

当系统所受的合外力为零时, 系统的总动量保持不变, 这就是动量守恒定律. 应用时, 必须注意以下几点:

1. 定律适用于惯性系, 各速度都是对同一惯性系而言, 动量是矢量. 在具体计算时, 经常采用正交分解法, 写出动量守恒定律的分量方程, 这样可把矢量运算转化为标量运算.

2. 分析系统的动量是否守恒时, 只需看合外力是否为零, 而不需考虑内力的情况. 在与碰撞、爆炸等作用时间极短的问题时, 可忽略外力冲量, 从而近似地认为系统的动量守恒.

3. 虽然就整个系统而言, 合外力不为零, 系统的总动量不守恒, 但若某一方向的合外力为零, 则系统在该方向的动量分量守恒.

4. 动量守恒定律不仅适用于低速运动的宏观物体, 而且适用于接近光速运动的微观粒子的相互作用.

## 二、动量守恒定律的推广

由于一个质点在不受外力的作用时,它的总动量是守恒的,所以一个质点系的内力不能改变它质心的运动状态.这个讨论包含了三层意思:

(1)如果一个质点系的质心原来是不动的,那么在无外力作用的条件下,它的质心始终不动,即位置不变.

(2)如果一个质点系的质心原来是运动的,那么在无外力作用的条件下,这个质点系的质心将以原来的速度做匀速直线运动.

(3)如果一个质点系的质心在某一外力作用下做某种运动,那么内力不能改变质心的这种运动.比如某一物体原来做抛体运动,如果突然炸成两块,那么这两块物体的质心仍然继续做原来的抛体运动.

## 【例题分析】

**例1** 质量  $M$  的火箭正以速度  $v_0$  水平飞行,若以相对自身的速度  $u$ , 向相反方向喷出质量为  $m$  的气流,火箭的速度变为多少? 在此过程中,系统的机械能增加多少?

**解** 设火箭喷气后速度变为  $v$ , 则喷出的气体速度为  $(-u+v)$  (这个速度对地而言可以同火箭原来速度方向相同), 根据动量守恒定律有

$$Mv_0 = (M-m)v + m(-u+v)$$

解得 
$$v = v_0 + \frac{m}{M}u$$

系统增加的机械能为

$$\Delta E = \frac{1}{2}(M-m)v^2 + \frac{1}{2}m(u-v)^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}mu^2 \left( \frac{M-m}{M} \right)$$

这部分机械能是由燃料的内能转化而来的.

**注:** 动量守恒定律的瞬时性意味着气流相对自身的速度指气流相对于火箭后来的速度.

**例2** 如图 4-6-1 所示, 质量为  $m$  的小木块, 从高为  $h$ , 质量为  $M$  的光滑斜面顶端滑下, 斜面倾角为  $\theta$ , 放在光滑桌面上, 问: (1)  $m$  滑到底面时,  $M$  后退的距离; (2)  $m$  对  $M$  做功多少?

**分析**  $m$  沿斜面下滑过程中, 系统的动量不守恒, 但系统水平方向的动量守恒. 不过应注意物体沿斜面方向的速度是相对于斜面而言的.

**解** (1) 对  $m$  与  $M$  组成的系统, 任意瞬时水平方向的动量守恒, 即有

$$mw_m = Mv_M$$

式中  $v_m, v_M$  分别为  $m, M$  水平方向的速度大小, 因而得

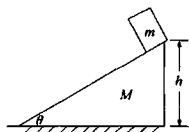


图 4-6-1



$$mv_m \Delta t = Mv_M \Delta t$$

$$\text{即 } m \sum v_m \Delta t = M \sum v_M \Delta t$$

$$\text{因 } s_m = \sum v_m \Delta t, \quad s_M = \sum v_M \Delta t$$

$$\text{故有 } ms_m = Ms_M$$

$$\text{且 } s_m + s_M = h \cot \theta$$

$$\text{可解得 } s_M = \frac{m}{M+m} h \cot \theta$$

(2) 设物体滑到斜面底端时, 物体沿斜面的速度为  $v_2$ , 斜面的速度为  $v_1$ , 则有

$$Mv_1 - m(v_2 \cos \theta - v_1) = 0$$

$$mgh = \frac{1}{2} Mv_1^2 + \frac{1}{2} m[(v_2 \cos \theta - v_1)^2 + (v_2 \sin \theta)^2]$$

$$\text{因而, } m \text{ 对 } M \text{ 所做的功为 } W = \frac{1}{2} Mv_1^2 = \frac{Mm^2 gh \cos^2 \theta}{(M+m)(M+msin^2 \theta)}$$

注: 在求第(1)问时, 很多学生会根据  $mv_m = Mv_M$  写出  $s_m = v_m t, s_M = v_M t$  两式, 因而直接得出  $ms_m = Ms_M$  这个结果, 这种解法是不严谨的, 因为斜面体、物体的运动都不是匀速运动。也有同学直接用平均速度来表示动量守恒定律的速度, 这也是不妥的。

**例 3** 一颗陨石在飞向质量为  $M$  的行星途中(沿着通过行星中心的直线), 碰到绕此行星沿半径为  $R$  的圆周轨道运行的自动宇宙站。站的质量为陨石质量的 10 倍, 碰撞的结果陨石陷入站内, 宇宙站过渡到与行星最近距离为  $R/2$  的新轨道上。求碰撞前陨石的速度  $u$ 。

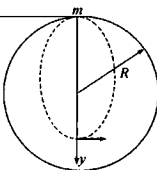


图 4-6-2

**分析** 陨石与宇宙站相撞的时间极短, 故相撞过程中系统的动量守恒, 致使宇宙站的运动速度发生变化, 再结合开普勒定律和机械能守恒定律可解得结果。

**解** 设  $v_1$  是碰撞前站的速度,  $v_2$  是碰撞后站和陨石具有的瞬时速度,  $m$  是陨石的质量,  $10m$  是站的质量。在碰撞前站绕行星沿半径为  $R$  的圆周轨道运行, 于是站的速度

$$v_1 \text{ 满足 } G \frac{10mM}{R^2} = 10m \frac{v_1^2}{R}$$

列出在  $x$  轴和  $y$  轴方向上动量守恒定律的分量式(如图 4-6-2)为

$$10mv_1 = (m + 10m)v_{2x}$$

$$mu = (m + 10m)v_{2y}$$

碰撞后站过渡到椭圆轨道上。在沿着椭圆轨道运行中, 站和陷入站内的陨石的能量

$$\text{保持不变, 因此 } -G \frac{11mM}{R} + \frac{11m}{2}(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) = -G \frac{11mM}{R/2} + \frac{11}{2}mv^2$$

式中  $v$  是站离行星最近时的速度。再根据开普勒第二定律得  $v \cdot \frac{R}{2} = v_{2x}R$

解得

$$u = \sqrt{58GM/R}$$

## 【巩固习题】

1. 如以质量为  $M$  的人,手拿质量为  $m$  的重物,以与水平面夹  $\theta$  角的速度  $v_0$  向前跳去,当它到达最高点时将重物以相对于人的速度  $u$  向后水平抛出,问由此使其跳远距离增加了多少?

2. 一质量为  $m$  的青蛙蹲在木板  $AB$  靠右端的  $E$  点,木板质量为  $M$ ,自由地浮在水面上,现青蛙跳起落在木板靠左端的  $F$  点,已知  $EF = L$ ,水对木板的运动阻力可忽略,求在这种情况下,青蛙的最小初始速度  $v_0$ 。

3. 网球拍以速率  $v_1$  击中以速率  $v_0$  飞来的网球,被击回的网球的最大速率为

4. 如图 4-6-3 所示,在光滑水平面上,有一静止的劈形木块  $A$ ,质量为  $M$ ,一质量为  $m$  的小球,沿水平方向以速度  $v$  碰撞木块  $A$ ,碰后小球被竖直向上弹起,若碰撞中没有机械能的损失,求小球被弹起的高度。

5. 有  $N$  个人,每人的质量均为  $m$ ,站在质量为  $M$  的平板车上,他们从平板车的后端以相对于平板车为  $u$  的水平速度跳下,车朝前方无摩擦地前进,问:(1)假如所有的人同时跳车,平板车的速度多大?(2)如果一次只跳一个人,平板车的末速度是多大?

6. 如图 4-6-4 所示,质量均为  $m$  的两质点  $A$  和  $B$ ,由长为  $l$  的不可伸长的轻绳联系, $B$  质点限制在水平面上的光滑竖直槽内,可沿槽中滑动,开始时  $A$  质点静止在光滑桌面上, $B$  静止在直槽内, $AB$  垂直于直槽且距离为  $\frac{l}{2}$ 。如  $A$  质点以速度  $v$  在桌面上平行于槽方向运动,求绳受到的冲量和槽的反作用力冲量。

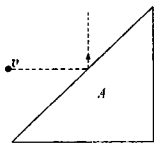


图 4-6-3

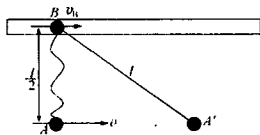


图 4-6-4

7. 一列火车由  $n$  节质量相同的车厢组成,原来各节车厢互相分离,间距均为  $s$ ,第一节车厢以速度  $v$  向第二节车厢运动,最后全部车厢联成一体,忽略铁轨摩擦,问经过多少时间,末节车厢开始运动?

8. 质量为  $M$  的小车放置在光滑的水平面上用长为  $L$  的轻质细绳把质量为  $m$  的小球悬挂在挡板的右边上端,如图 4-6-5 所示,按住小车拉直悬线使其成水平,然后释放小车与小球,小球下落与与车的挡板

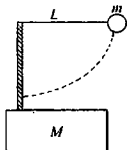


图 4-6-5

发生完全弹性碰撞.求:(1)小球与挡板碰撞前瞬间的速度;(2)小球对挡板的冲力.设小球与挡板碰撞的时间是  $\Delta t$ ;(3)小球与挡板发生碰撞前瞬间绳子的张力.

## 第七节 碰撞和质心运动



### 【知识要点】

#### 一、碰撞

碰撞是指物体间经过极短时间的相互作用而使各自动量发生明显变化的过程.碰撞按速度方向的不同可分为正碰(碰撞前后速度在同一直线)和斜碰(不在同一直线).均可转化为一般模型加以解决(斜碰可用一系列分量式解决).

碰撞按能量损失可分为三种(以两体碰撞为模型).

##### 1. 完全弹性碰撞

即碰撞前后无机械能损失,有

$$\begin{cases} m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 & \text{动量守恒} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 & \text{碰撞前后机械能守恒} \end{cases}$$

式中  $m_1, m_2$  分别为两体质量,  $v_{10}, v_{20}$  和  $v_1, v_2$  分别为两体碰撞前后的速度.

解得

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1 v_{10}}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

以上可做拓展讨论:

$$(1) v_{10} \neq 0, v_{20} = 0 \text{ 时, } v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10}, v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10}$$

特殊情况:  $m_1 = m_2, v_1 = 0, v_2 = v_{10}$

$$m_1 \gg m_2, v_1 \approx v_{10}, v_2 \approx 2v_{10}$$

$$m_1 \ll m_2, v_1 \approx -v_{10}, v_2 \approx 0$$

(2)  $v_{10} \neq 0, v_{20} \neq 0$ , 利用上述公式, 代入

特殊情况:  $m_1 = m_2$ . 碰后两物体速度交换.

##### 2. 非完全弹性碰撞

即碰撞前后有机械能损失.为完全定量研究该类碰撞,引入恢复系数  $e$ . 定义  $e =$

$\frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$ , 其中  $(v_2 - v_1)$  为碰后分离速度,  $(v_{10} - v_{20})$  为碰前接近速度;  $e$  只与物体材料有

关。

不难得到:  $0 \leq e \leq 1$ 。

(1) 当  $e = 0$  时, 为完全非弹性碰撞 (非完全弹性碰撞的特殊情况)

(2) 当  $0 < e < 1$  时, 为非完全弹性碰撞

(3) 当  $e = 1$  时, 为完全弹性碰撞

根据以上定义, 又可得到

$$v_1 = v_{10} - (1 + e) \frac{m_2(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = v_{20} - (1 + e) \frac{m_1(v_{20} - v_{10})}{m_1 + m_2}$$

$$\text{机械能损失 } \Delta E = \frac{1}{2}(1 - e^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20})^2$$

## 二、质心运动

### 1. 质心

设  $n$  个质点组成的系统, 质量分别为  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , 位矢分别为  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ , 定义

$$m_c \vec{r}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad \vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m_c} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

可以证明, 质心  $C(m_c, \vec{r}_c)$  可以代表整个系统的运动状况,  $r_c$  也可表示为分量式

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m_c}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m_c}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m_c}$$

### 2. 质心运动

可以证明, 质心的运动状况只受系统外力的影响, 而与系统内各质点的相互作用无

$$\text{关. } m_c \vec{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i, \quad \text{即 } \dot{P}_c = \sum_{i=1}^n \dot{P}_i \Rightarrow \vec{I}_c = \sum_{i=1}^n \vec{I}_i$$

$$\text{又可得 } \vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m_c} \Rightarrow \vec{a}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{m_c}, \quad \vec{F}_{\text{外}} = m_c \vec{a}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \text{ (系统内的作用力与反作用力相互抵消).}$$

### 【例题分析】

**例 1** 如图 4-7-1, 有四个大小可以不计的小木块 1、2、3、4 等距地依次排列在倾角  $\theta = 30^\circ$  的斜面上, 他们的质量分别为  $m_1 = m, m_2 = 2m, m_3 = 3m, m_4 = 4m$ , 斜面在木块 2 以上部分是光滑的, 以下部分是粗糙的, 四个木块与斜面粗糙部分之间的静摩擦系数和

动摩擦因数均是  $\mu$ , 开始时用手扶住 1, 其余木块都静止在斜面上, 放开手后, 使 1 块自然下落并与 2 块相碰, 接着与 3 块相碰, 设各木块间的碰撞都是完全非弹性的, 当 1, 2, 3 木块联合体下滑时, 恰好停在第 4 块前面, 并不发生碰撞, 求动摩擦因数  $\mu$  的值.

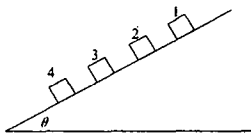


图 4-7-1

分析 本题主要考察碰撞的每个过程环节, 因循环不多, 一般逐个推导.

解 设木块间距为  $d$ , 则 1 与 2 碰撞前的速度  $v_1 = \sqrt{2g\sin\theta \cdot d} = \sqrt{gd}$

相撞后 1, 2 共同速度为  $v_{20} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{3} \sqrt{gd}$

与 3 相撞之前的速度  $v_2 = \sqrt{v_{20}^2 + 2g(\sin\theta - \mu\cos\theta)d} = \sqrt{\left(\frac{10}{9} - \sqrt{3}\mu\right)gd}$

与 3 相撞之后的速度  $v_{30} = \frac{(m_1 + m_2)v_2}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1}{2} v_2 = \sqrt{\left(\frac{5}{18} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mu\right)gd}$

与 4 相撞之前的速度  $v_3 = \sqrt{v_{30}^2 + 2g(\sin\theta - \mu\cos\theta)d} = \sqrt{\left(\frac{23}{18} - \frac{5}{4}\sqrt{3}\mu\right)gd} = 0$

即  $\frac{23}{18} - \frac{5\sqrt{3}}{4}\mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{46\sqrt{3}}{135}$

例 2 如图 4-7-2 中两个圆代表内、外半径几乎同为  $R$  的环形光滑轨道, 它与长方体的底座连在一起放置于光滑的水平面上, 环与底座连体的质量为  $M$ , 轨道内有一质量为  $m$  的光滑小球, 开始时静止于最高处, 后因受微小扰动而朝右滑下, 在以后的运动过程中, 底座始终全部与地面接触, 试在地面参照系中确定小球的运动轨迹.

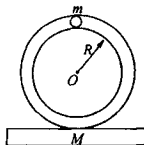


图 4-7-2

分析 系统在水平方向不受外力, 因此水平动量恒为 0, 系统质心水平方向静止.

解 以  $O$  为原点建立直角坐标系, 系统质心横坐标始终为 0, 设轨道以及底座质心的横坐标为  $x_M$ , 小球质心的坐标为  $(x_m, y_m)$ , 任意时刻小球相对轨道转过  $\theta$ .

$$\begin{cases} Mx_M + mx_m = 0 \cdots \text{① 质心横坐标恒为 0} \\ x_m - x_M = R\sin\theta \cdots \text{② } M, m \text{ 的水平位置关系} \\ y_m = R\cos\theta \cdots \text{③ } m \text{ 在 } y \text{ 方向与 } \theta \text{ 的位置关系} \end{cases}$$

由①式得:  $x_M = -\frac{m}{M}x_m$ , 代入②式得:  $\frac{m+M}{M}x_m = R\sin\theta$

则有  $\left(\frac{m+M}{M}x_m\right)^2 + y_m^2 = R^2$

$$\text{即 } \frac{(m+M)^2 x_m^2}{M^2 R^2} + \frac{y_m^2}{R^2} = 1$$

轨迹为椭圆。

例3 如图4-7-3所示,木块与箱子质量均为 $m$ ,且各处均无摩擦.初始时木块以 $v_0$ 的初速向右运动,恢复系数 $e = \sqrt{\frac{1}{2}}$ .问:

(1)要使损失动能不超过系统初动能的40%,最多能碰几次?(2)从开始运动到上述碰撞中,箱子的平均速度是多少?

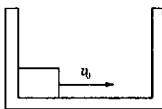


图4-7-3

分析 本题系非完全弹性碰撞的定量研究,给出了具体的恢复系数,可直接代入“知识要点”中关于 $\Delta E$ 的公式.同样可以按以下方法避开该公式.(更有技巧性)

解 (1)根据知识要点中给出的公式,易得,每次碰撞后的相对动能为碰前的 $e^{2x}$ ,则初动能 $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ .设质心速度为 $v_c$ ,而 $v_c = \frac{v_0}{2}$

$$\text{则质心动能 } E_c = \frac{1}{2} \times 2mv_c^2 = \frac{1}{4}mv_0^2$$

$$\text{相对动能 } E_r = E_0 - E_c = \frac{1}{4}mv_0^2$$

$$\text{末相对动能 } E_x = 0.6E_0 - E_c = e^{2x}E_r$$

$$\text{得 } x = \frac{1}{2} \ln 1.2 \approx 4.64$$

即最多4次.

(2)设箱子位移和质心位移分别为 $s_M$ 和 $s_c$ .由于四次后相对位置与初始相同,则

$$s_M = s_c \Rightarrow v_M = \frac{s_M}{t} = \frac{s_c}{t} = v_c = \frac{1}{2}v_0$$



### 【巩固习题】

1. 一块质量为 $M$ ,长为 $L$ 带薄挡板 $P$ 的木板,静止在水平地面上,设木板与地面间的静摩擦因数与动摩擦因数相等,皆为 $\mu$ .质量为 $m$ 的人从木板的一端由静止开始相对于地面匀加速地向前走向另一端,到达另一端时便骤然抓住挡板 $P$ 而停在木板上,已知人在木板间的静摩擦因数足够大,人在木板上不滑动.问在什么条件下,最后可使木板向前方移动的距离达到最大?其值等于多少?

2. 宇宙飞船在陨石碎块粒子流中,以速度 $v$ 迎着粒子运行.后来飞船转过头,开始以速度 $v$ 顺着粒子流方向运行,这时发动机的牵引力为原来的 $1/4$ .试求陨石粒子的速度.飞船可看作是两端平坦的圆柱形,而粒子与护板的碰撞是完全弹性的.

3. 如图4-7-4所示,一水平放置的圆环形刚性套槽固定在桌面上,槽内嵌着三个

大小相同的刚性小球,它们的质量分别是  $m_1, m_2, m_3$ , 其中  $m_2 = m_3 = 2m_1$ . 小球与槽壁刚好接触,而它们之间的摩擦可以忽略不计,开始时三球处在槽中 I, II, III 的位置,彼此之间距离相等,  $m_2$  和  $m_3$  静止,  $m_1$  以初速度  $v_0 = \pi R/2$  沿槽运动,  $R$  为圆环的内半径和小球半径之和,设各球之间的碰撞皆为弹性碰撞,求此系统的运动周期  $T$ .

4. 有三个质量均为  $m$  的 A, B, C 球,可在一无摩擦水平表面自由滑行. 球 A 和 B 连于一长度为  $l$  且不可伸长的无弹性绳两端. 当球 C 以速度  $v$  (向右) 正中球 B 时,两球静止于图 4-7-5 所示位置,已知当球 C 碰撞到球 B 时绳子处于松弛状态  $|AC| = \frac{l}{2}$  (见图),并假定球 B 和球 C 之间为完全弹性碰撞. 试求:

- (1) 在绳子变成拉紧状态后瞬间每球的速度;
- (2) 当绳子变成拉紧状态时此系统初动能丧失的百分率.

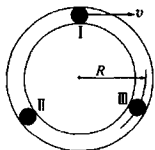


图 4-7-4

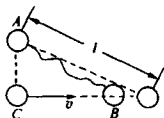


图 4-7-5

5. 如图 4-7-6 所示,在光滑斜槽底部有处于静止状态的小球 1, 质量为  $2m$ , 在斜槽上部离地面高为  $h$  处有质量为  $2m$  的小球 2, 和质量为  $m$  的小球 3 紧挨着放置,放手让两小球开始下滑,问三球发生碰撞后各自升高的最大高度? 若 2, 3 两球是粘结在一起,则情况又如何? (设碰撞是弹性的,球的大小可以忽略)

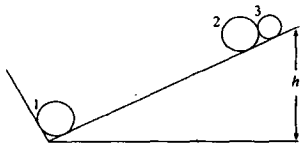


图 4-7-6

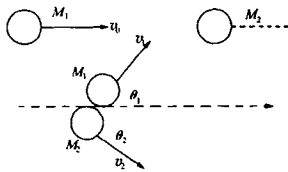


图 4-7-7

6. 如图 4-7-7 质量为  $M_1$  速度为  $v_0$  的质点,与一个质量为  $M_2$  的静止质点作弹性碰撞,然后,  $M_1$  与  $M_2$  的运动方向和  $v_0$  的方向所成的角为  $\theta_1$  和  $\theta_2$ , 试证:

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin 2\theta_2}{\frac{M_1}{M_2} - \cos 2\theta_2}$$

7. 长为  $2l$  的轻绳, 两端各系有一质量为  $m$  的小球, 中点系有质量为  $M$  的小球, 三球成一直线静止于光滑水平桌面上, 绳处于伸直状态, 如图 4-7-8 所示, 现对小球  $M$  施以冲力, 使其获得与绳垂直的初速度  $v$ , 求: (1) 两小球  $m$  相碰时绳中张力  $T$ ; (2) 若从小球  $M$  开始运动到两小球相碰时的时间为  $t$ , 求在此期间小球  $M$  经过的距离  $s$ .

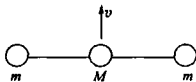


图 4-7-8

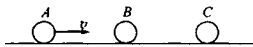


图 4-7-9

8. 如图 4-7-9 所示,  $A, B, C$  三个质量相同的小球沿一直线排列在光滑水平桌面上,  $A$  球受冲击后以速度  $v$  向着  $B$  运动发生对心碰撞, 设小球碰撞的恢复系数为  $e = \frac{1}{2}$ , 求所有碰撞结束后三个球的速度.

9. 一质量为  $M$  的冰球, 静止于水平面上, 另一质量为  $m$  的冰球对着它以速度  $v_0$  快速滑来, 碰撞后质量为  $m$  的冰球停下来, 而质量为  $M$  的冰球则升到  $h_1$  高处, 如图 4-7-10 所示, 在第二次试验中, 两冰球地位互换, 用质量为  $M$  的冰球以速度  $v_0$  撞击静止的质量为  $m$  的小球, 后者上升的高度为  $h_2$ , 求高度比  $h_1/h_2$ . 已知  $M/m = 3$ , 碰撞是对心的, 不计摩擦.

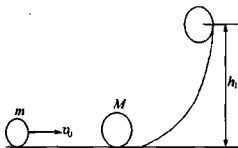


图 4-7-10

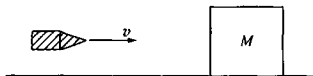


图 4-7-11

10. 如图 4-7-11 所示, 质量  $M = 0.45\text{kg}$  的木块静止于光滑的水平面上. 质量  $m = 0.05\text{kg}$ , 速率为  $8 \times 10^4\text{m/s}$  的子弹水平的射入木块后陷入木块内, 求:

- (1) 子弹克服木块阻力所做的功; (2) 子弹对木块所做的功;
- (3) 系统耗散的机械能; (4) 子弹对木块的冲量及木块对子弹的冲量.

11. 一质量为  $M$  的炸弹, 以速度  $v$  飞行, 其内部的炸药产生能量  $E$ , 使此炸药分为两半, 一半的质量为另一半的  $k$  倍. 若两半仍能沿着原方向前进, 试分别求其速率.



## 第八节 综合训练

## 【例题分析】

**例 1** 放在光滑水平面上的匀质木块 A, 质量为  $M$ . 今有一质量为  $m$  的子弹以水平速度  $v_0$  击中它后, 恰好能从 A 中穿出. 假如把 A 固定在水平面上, 并在它右侧放上一块与 A 质地相同、质量相等的木块 B, 这颗子弹以同样的水平速度击穿 A 后又正好能穿过 B, 求 A 和 B 的厚度之比 (子弹受到的阻力大小只与木块的质地有关).

**分析** 子弹两次击中木块, 我们对这两次物理过程分别进行分析.

第一次木块没有固定, 地面水平光滑, 水平方向上子弹与木块所组成的系统受到的合外力为零, 所以系统动量守恒; 在这一过程中子弹与木块之间的摩擦力又是惟一做功的一对力, 所以可以用动能定理.

第二次木块固定, 击中木块 A 的过程中动量不守恒, 但是子弹受到的阻力大小不变并相对位移与前次相同, 因此系统损失的动能与第一次相同, 所不同的是这次木块没有与子弹一起运动, 随后子弹再击中 B 的过程又是动量守恒的, 同时也可以使用动能定理.

**解** 设 A 木块厚度为  $d_A$ , B 木块厚度为  $d_B$ , 子弹第一次穿过 A 时速度为  $v_A$ , 第二次穿过固定的 A 木块时速度为  $v'_A$ , 穿过 B 时速度为  $v_B$ , 则根据动量守恒定律有

$$\begin{cases} mv_0 = (M + m)v_A & \text{①} \\ mv'_A = (M + m)v_B & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f \cdot d_A = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(M + m)v_A^2 & \text{③} \\ \text{又由能量守恒得} \quad f \cdot d_A = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_A'^2 & \text{④} \\ f \cdot d_B = \frac{1}{2}mv_A'^2 - \frac{1}{2}(M + m)v_B^2 & \text{⑤} \end{cases}$$

五个方程, 有六个未知数, 可能解出比例关系.

$$\text{由①式解出 } v_A \text{ 代入③式得 } f \cdot d_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{mM}{M + m} v_0^2 \quad \text{⑥}$$

$$\text{同理, 由②式解出 } v_B \text{ 代入⑤式得 } f \cdot d_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{mM}{M + m} v_A'^2 \quad \text{⑦}$$

$$\text{又由④式解出 } v_A' \text{ 代入⑦式得 } f \left( d_B + \frac{M}{M + m} d_A \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{mM}{M + m} v_0^2 \quad \text{⑧}$$

$$\textcircled{3}/\textcircled{6} \text{ 得 } \frac{d_B}{d_A} + \frac{M}{M+m} = 1, \text{ 即 } \frac{d_A}{d_B} = \frac{M+m}{m}$$

**例 2** 质量为  $m$  的滑块可沿竖直轨道上下运动, 轨道与滑块之间的最大静摩擦力和滑动摩擦力都是  $f = \frac{1}{2}mg$ . 轨道下方置一劲度系数为  $k$  的弹簧, 弹簧及其顶板的质量都可以忽略不计. 现在让滑块从高弹簧顶板  $d$  处由静止落下, 试求: (1) 滑块能到达的最低位置; (2) 滑块到达最低位置后第一次反弹的高度.

**分析** 这一类文字计算题, 因为不知道各已知量之间的大小关系, 因此可能出现各种不同的情况, 常需要进行讨论.

**解** (1) 设滑块到达最低位置时, 弹簧被压缩的长度是  $s$ , 由功能原理有

$$-\frac{1}{2}mg(d+s) = \frac{1}{2}ks^2 - mg(d+s)$$

可解得  $s = (mg + \sqrt{m^2g^2 + 4kdm})/2k$

(2) 滑块的反弹高度有三种可能的情况:

$$\textcircled{1} \text{ 若 } ks < mg + \frac{1}{2}mg, \text{ 即 } (mg + \sqrt{m^2g^2 + 4kdm})/2 < \frac{3}{2}mg,$$

$$k < 3mg/4d$$

则滑块不能反弹, 即反弹高度为零.

$\textcircled{2}$  设滑块只能反弹到弹簧初始高度的下面  $s'$  处, 由功能原理

$$ks^2/2 - mgs' - (ks^2 - mgs) = -mg(s - s')/2$$

可解得  $s' = (5mg - \sqrt{m^2g^2 + 4kdm})/2k$

因为要求  $s' > 0$ , 所以  $5mg > \sqrt{m^2g^2 + 4kdm}$

即

$$k < 6mg/d$$

所以当  $\frac{3mg}{4d} < k < \frac{6mg}{d}$  时, 滑块的反弹高度为  $(\sqrt{m^2g^2 + 4kdm} - 2mg)/k$ .

$\textcircled{3}$  当  $k > 6mg/d$  时, 滑块反弹后将超过弹簧原来高度, 弹簧恢复原长后, 滑块将与弹簧分开, 继续向上做匀速运动. 设滑块总共能反弹的高度是  $h_2$ , 由功能原理有

$$\frac{1}{2}ks^2 - mgh_2 = \frac{1}{2}mgh_2$$

可解得  $h_2 = \frac{1}{3} \left( d + \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 4kdm}}{2k} \right)$

**例 3** 质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$  和  $m_3$  的三个质点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  位于光滑的水平桌面上, 用已拉直的不可伸长的柔软细绳  $AB$  和  $BC$  连接, 角  $ABC$  为  $\pi - \alpha$ ,  $\alpha$  为一锐角, 如图 4-8-2 所示. 今有一冲量为  $\vec{j}$  的冲击力沿  $BC$  方向作用于  $C$  质点, 求质点  $A$  开始运动时的速

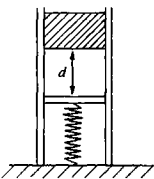


图 4-8-1

度。

**分析** 这是一个三球通过软绳相连的问题,这类问题通常要联立方程组求解,主要由  $x$  方向与  $y$  方向的动量分量守恒以及沿绳方向的速度相等列出方程组。

**解** 设受冲击后  $A, B, C$  三个质点的速度分别为  $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C$ , 根据质点系动量定理有

$$\vec{J} = m_1 \vec{v}_A + m_2 \vec{v}_B + m_3 \vec{v}_C$$

因为软绳的作用力的方向一定是沿绳的,所以  $v_A$  必然沿  $AB$  方向,  $v_C$  必然沿  $BC$  方向,可以设  $v_B$  的方向与  $BC$  方向成  $\theta$ 。将上述矢量分解成沿  $BC$  方向( $x$  方向)和垂直于  $BC$  方向( $y$  方向)的两个分量式。(如图 4-8-3)

$$x \text{ 方向} \quad J = m_1 v_A \cos \alpha + m_2 v_B \cos \theta + m_3 v_C$$

$$y \text{ 方向} \quad 0 = -m_1 v_A \sin \alpha + m_2 v_B \sin \theta$$

由于绳不可伸长,沿绳方向的速度相等,因此又有

$$v_A = v_B \cos(\alpha + \theta)$$

$$v_C = v_B \cos \theta$$

联立以上四个方程,解得 
$$v_A = \frac{J m_2 \cos \alpha}{m_2(m_1 + m_2 + m_3) + m_1 m_3 \sin^2 \alpha}$$

方向为沿  $AB$  方向。

**例 4** 水平桌面上叠放着三个圆柱体  $A, B, C$ , 它们的半径均为  $r$ , 质量  $m_B = m_C = m_A/2$ 。先让它们保持如图 4-8-4 所示的位置, 然后从静止开始释放, 若不计所有接触面间的摩擦, 求  $A$  触及桌面时的速度。

**分析**  $A$  柱下落的同时,  $B, C$  柱分别向左、右水平运动, 此过程中机械能守恒, 水平方向的动量守恒,  $A$  柱下落至某一高度后即与  $B, C$  柱分离, 此后  $A$  仅受到重力作用直到触及桌面。本题关键在于找出  $A$  柱与  $B, C$  柱分离的条件, 并求出分离瞬间  $A$  柱的位置及下落速度。

**解** 设  $A$  与  $B, C$  分离瞬间,  $A, B$  中心连线与竖直方向夹角为  $\alpha$ , 如图 4-8-5 所示, 则  $A$  下落的距离为

$$h = \sqrt{3}r - 2r \cos \alpha$$

设此瞬时  $A$  下落的速率为  $v_A$ ,  $B, C$  的速率分别为  $v_B, v_C$ , 由水平方向动量守恒和系统机械能守恒得

$$m_B v_B - m_C v_C = 0$$

$$m_A g h = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2$$

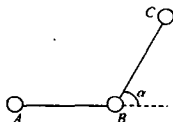


图 4-8-2

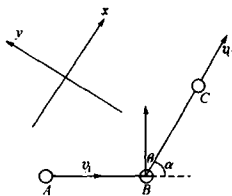


图 4-8-3

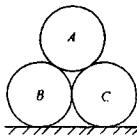


图 4-8-4

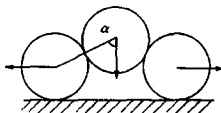


图 4-8-5

$$\text{解得 } v_A^2 + v_B^2 = 2gr(\sqrt{3} - 2\cos\alpha)$$

在 A 与 B 分离前, A 与 B 的中心间距保持不变(恒为  $2r$ ), 所以  $v_A, v_B$  在 A, B 连直线上的投影应当相等, 即  $v_A \cos\alpha = v_B \sin\alpha$

在 AB 分离的瞬间, B 对 A 的弹力为零, A 相对于 B 做圆周运动, 则由牛顿第二定律得

$$m_A g \cos\alpha = m_A \frac{(v_A \sin\alpha + v_B \cos\alpha)^2}{2r}$$

$$\text{由此得 } \cos\alpha = \sqrt{3}/3, v_A^2 = \frac{4}{9}\sqrt{3}gr$$

A 离开 B, C 后以初速度  $v_A$  做竖直下抛运动, 触及桌面时的速度为

$$v_A' = \sqrt{v_A^2 + 2g \cdot 2r \cos\alpha} = \frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{3}gr} = 1.75\sqrt{gr}$$

**例 5** 在航天飞机上, 如图 4-8-6 所示, 有一个长度  $l = 20\text{cm}$  的圆筒, 绕着与筒的长度方向相垂直的轴  $OO'$  以恒定的转速  $\omega = 100\text{r/min}$  旋转, 筒的近轴端离开轴线  $OO'$  的距离为  $d = 10\text{cm}$ , 筒内装满非常粘稠, 密度为  $\rho = 1.2\text{g/cm}^3$  的液体. 有一颗质量为  $m' = 1.0\text{mg}$ , 密度为  $\rho' = 1.5\text{g/cm}^3$  的粒子从圆筒的正中部释放(释放时粒子相对于圆筒静止), 试求该粒子在到达筒端的过程中克服液体的粘滞阻力所做的功.(十三届全国决赛题)

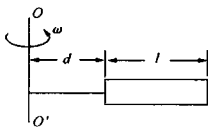


图 4-8-6

**分析** 以旋转圆筒为参照系, 由题意, 相当于质量为  $m' - m$  的粒子由筒中点到筒端移动, 而动能未发生变化(静止), 由此列出粘滞阻力  $W_f$  的表达式.

**解** 由于圆筒为非惯性系, 引入沿半径向外的惯性力  $F = (m' - m)\omega^2 r$ , 则惯性力做正功, 粘滞阻力做负功, 由动能定理有

$$W_F + W_f = \Delta E_k = 0$$

$$\text{所以 } W_f = -W_F$$

由于  $F \propto r$ , 故可用其平均力求做功大小.

$$W_F = \bar{F} \cdot s = (m' - m)\omega^2 \left(d + \frac{3}{4}l\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}m' \left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right)\omega^2 l \cdot \left(d + \frac{3}{4}l\right)$$

$$\text{所以 } W_f = -\frac{1}{2}m' \left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right)\omega^2 l \cdot \left(d + \frac{3}{4}l\right) = -5.5 \times 10^{-7} \text{ (J)}$$

即粒子克服粘滞阻力做了  $5.5 \times 10^{-7} \text{J}$  的功.

**例 6** 从地球向火星发射火星探测器, 设地球和火星都在同一平面上绕太阳作圆周运动, 火星轨道半径  $R_m$  为地球半径  $R_0$  的 1.500 倍, 简单而又比较节省能量的发射过程可分为两步进行: 第一步, 在地球表面用火箭对探测器进行加速, 使之获得足够的动能, 从而脱离地球引力作用成为一个沿地球轨道运行的人造卫星. 第二步是在适当的时刻点燃与探测器连在一起的火箭发动机, 在这段时间内对探测器沿原方向加速, 使其速度数值增加到适当值, 从而使得探测器沿着一个与地球及火星轨道分别在长轴两端相

切的半个椭圆轨道正好射到火星上,如图 4-8-7 所示.问:(1)为使探测器成为沿地球轨道运行的人造卫星,必须加速探测器,使之在地球附近获得多大的速度(相对于地球)?(2)当探测器脱离地球并沿地球公转轨道稳定运行后,在某年 3 月 1 日零时测得探测器与火星之间的角距离为  $60^\circ$ ,如图 4-8-8 所示.问在何年月点燃探测器上的火箭发动机方能使探测器恰好落在火星表面?(时间计算仅需精确到日).已知地球半径为  $R_e = 6.4 \times 10^6 \text{m}$ ,重力加速度  $g$  可取  $9.8 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

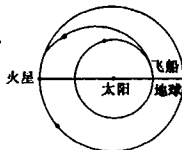


图 4-8-7

分析 对于天体运动问题,主要由机械能守恒定律与开普勒第三定律列出方程或直接求解.

解 (1)设地球质量为  $M_e$ ,探测器及其附加装置的总质量为  $m$ ,要使探测器脱离地球引力作用成为沿地球轨道运行的人造卫星,可以认为探测器的引力势能为零,相对于地球的速度为零,由

机械能守恒得  $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_e m}{R_e} = 0$

得  $v = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} = \sqrt{2gR_e}$ .

代入数据得  $v = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6} = 1.12 \times 10^4 (\text{m/s})$

(2)为使探测器落到火星上,必须选择适当时机点燃探测器上的火箭发动机,使得探测器沿椭圆轨道到达火星轨道的相切点时,火星也恰好运行到这一点.为此,必须首先确定点燃火箭发动机时探测器与火星的相对位置,已知探测器在地球公转轨道上运行周期  $T_d$  与地球公转周期相同,  $T_d = T_e = 365 \text{d}$

根据开普勒第三定律,火星的公转周期为

$$T_m = 365 \sqrt{(1.5)^3} = 365 \times 1.84 = 671 (\text{d})$$

而探测器的椭圆轨道上的半长轴为  $\frac{R_0 + 1.5R_0}{2} = 1.25R_0$

所以探测器在椭圆轨道上的运行周期

$$T_d = 365 \times \sqrt{(1.25)^3} = 365 \times 1.40 = 510 (\text{d})$$

因此探测器从点燃发动机到达火星,需时

$$T_d/2 = 255 \text{d}$$

探测器在点燃发动机前绕太阳转动的角速度为

$$\omega_d = \omega_e = 360^\circ/365 \text{d} = 0.986^\circ/\text{d}$$

火星绕太阳转动的角速度为  $\omega_m = 360^\circ/671 \text{d} = 0.537^\circ/\text{d}$

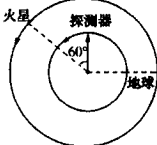


图 4-8-8

由于探测器运行至火星需时 255d, 火星在此期间运行的角距离为

$$\omega_m T_d / 2 = 0.537^\circ \times 255 = 137^\circ$$

即探测器在椭圆轨道近日点发射时, 火星应在某远日点的切点之前  $137^\circ$ , 亦即点燃发动机时, 探测器与火星的角距离应为  $180^\circ - 137^\circ = 43^\circ$ , 如图 4-8-9 所示。

已知某年 3 月 1 日零时探测器与火星的角距离为  $60^\circ$  (火星在前, 探测器在后), 为使其角距离成为  $43^\circ$ , 必须等待两者在各自轨道中运行至某个合适的时日。

设两者到达合适位置, 探测器又经历天数  $t$ , 则

$$60^\circ - 43^\circ = \omega_d t - \omega_m t$$

$$\text{即 } t = \frac{60 - 43}{\omega_d - \omega_m} = \frac{17}{0.499} \text{d} = 37.86 \approx 38(\text{d})$$

故点燃火箭发动机的时刻应为当年的 3 月 1 日之后 38 天, 即同年的 4 月 7 日。

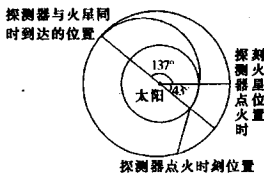


图 4-8-9

### 【精选习题】

1. 长 1 米横截面积  $0.3\text{cm}^2$  的玻璃管, 下端弯为直角, 上端接水龙头, 如图 4-8-10 所示. 如果水的流速是  $2\text{m/s}$ , 水管的质量是  $80\text{g}$ , 求玻璃管偏离竖直线的角度, 橡皮管弹性不考虑。

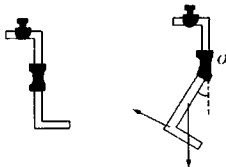


图 4-8-10

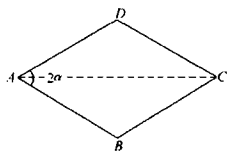


图 4-8-11

2. 如图 4-8-11 四个质量均为  $m$  的质点, 用同样长度且不可伸长的轻绳连接成菱形  $ABCD$ , 静止放在水平光滑桌面上, 若突然给质点  $A$  一个历时极短沿  $CA$  方向的冲击, 当冲击结束的时刻, 质点  $A$  的速度为  $v$ , 其他质点也获得一定的速度,  $BAD$  角为  $2\alpha$ , ( $\alpha$  小于  $45^\circ$ ), 求此质点系统受冲击后的总动量和总动能。

3. 如图 4-8-12 所示, 质量为  $m$  的物体沿光滑斜槽向下滑动, 斜槽过渡是半径为  $r$  的圆周, 在最低点与质量为  $m'$  的物体发生弹性碰撞, 若碰后  $m'$  脱离圆周轨道时的高度为  $H$ ,  $m$  沿槽上升又下滑, 随  $m'$  在同一地点脱轨, 摩擦不计, 问  $m$  从多高处开始运动? 两物体质量比是多少?

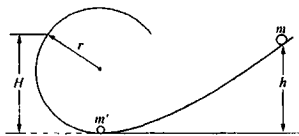


图 4-8-12

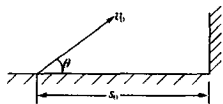


图 4-8-13

4. 军训时,战士距离  $s_0$  以速度  $v_0$  起跳,再用脚蹬墙一次,如图 4-8-13,使身体变为竖直向上的运动以继续升高,墙面与鞋底之间的静摩擦因数为  $\mu$ ,求能使人体重心有最大总升高的起跳角。

5. 如图 4-8-14 所示,在倾角  $\theta$  的光滑斜面上 A 点以  $v$  与斜面成  $\alpha$  角斜抛出一小球,小球与斜面做弹性碰撞,问  $\alpha, \theta$  满足什么条件时小球将逐渐跳回 A 点?

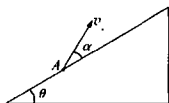


图 4-8-14

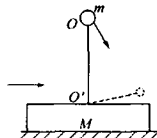


图 4-8-15

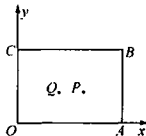


图 4-8-16

6. 如图 4-8-15,质量为  $M$  的金属板置于光滑地面上,中央有一转动轴  $O'$ ,轴上联有一根轻杆,长  $l$ ,上端有一质量小于  $M$  的小球质量为  $m$ ,开始时小球位于最高点,系统静止,放开后  $m$  倒下,当杆转过  $90^\circ$ , $m$  接近金属板时,求杆受到的拉力。

7. 如图 4-8-16 所示, $OACB$  是一台球桌面,取  $OA$  为  $x$  轴, $OC$  为  $y$  轴, $P$  是红球,坐标为  $(x, y)$ , $Q$  是白球,坐标为  $(x', y')$ . 已知  $OA = CB = 25\text{dm}$ , $AB = OC = 12\text{dm}$ .

(1) 若  $P$  球的坐标为  $x = 10\text{dm}$ , $y = 8\text{dm}$ ,问  $Q$  球的位置在什么范围内可使击出的  $Q$  球顺次与  $AB, BC, CO, OA$  碰撞反弹,最后击中  $P$  球。

(2)  $P$  球有没有一些位置是  $Q$  球无论在何处出发,按上述次序永远无法击中的? 若无,加以证明;若有,指出范围,已知碰撞均为弹性碰撞,小球视为质点。

8. 如图 4-8-17,质量  $M = 0.4\text{kg}$  的靶盒位于光滑水平的导轨上,连接靶盒的弹簧一端与墙壁固定,弹簧的倔强系数  $k = 200\text{N/m}$ ,当弹簧处于自然长度时,靶盒位于  $O$  点, $P$  是一固定的发射器,每次发射水平速度  $v = 50\text{m/s}$ ,质量  $m = 0.10\text{kg}$  的球形子弹,当子弹打入靶盒后,便留在盒内(假定为完全非弹性碰撞)。开始时靶盒静止,现约定,每当靶盒到达或停止在  $O$  点时,都有一颗子弹射入靶盒。

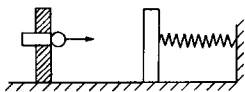


图 4-8-17

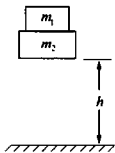


图 4-8-18

(1) 若相继有 6 颗子弹射入靶盒, 问每一颗子弹进入后靶盒离开  $O$  最大距离是多少? 从离  $O$  点到回到  $O$  点经历时间是多少?

(2) 若  $P$  点到  $O$  点的距离为  $0.25\text{m}$ , 问至少发几颗子弹后停止射击, 方能使靶盒来回运动而不会碰到发射器?

9. 质量为  $m_1, m_2$  的物体从  $h$  高处紧挨落下, 如图 4-8-18 所示, 所有碰撞都是完全弹性的, 且都发生在竖直方向上.

(1) 如果碰撞后  $m_1$  处于平衡状态, 两物体质量之比是多少?

(2) 在此情况下,  $m_2$  升起多高?

10. 如图 4-8-19, 质量为  $M$  的长板静置在光滑水平面上, 左侧固定一倔强系数为  $k$  且足够长的水平轻质弹簧, 右侧用一不可伸长的细绳连接于墙上, 且绳张紧拉力为  $T$ , 让一个质量为  $m$ , 初速度为  $v$  的小滑块在长板上无摩擦地对准弹簧向左运动. 问: (1) 在什么情况下绳会被拉断? (2) 绳被拉断后, 长板所能获得的最大加速度是多少? (3) 滑块最后离开长板时, 相对地面速度恰为零的条件是什么?

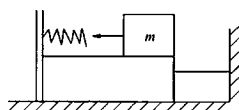


图 4-8-19

11. 如图 4-8-20, 质量为  $m$  的小球随质量为  $M$  的甲小车一起以速度  $v$  做匀速运动, 小球静止在小车内半径为  $r$  的圆弧形槽最低点. 运动中甲车与质量相同的乙车发生完全非弹性碰撞, 摩擦不计. 求: (1) 小球能上升的最大高度; (2) 小球回到圆弧底部时对小车压力是多少?

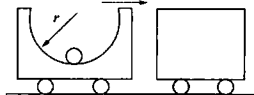


图 4-8-20

12. 一人手持质量为  $m$  的小球, 站在热气球下的吊篮里, 如图 4-8-21, 气球吊篮和人的总质量为  $M$ . 气球以速度  $v$  匀速上升. 人突然将小球向上抛出, 经时间  $t$  后返回人手. 若人抛接小球时相对吊篮的位置不变, 求: (1) 抛球过程人所做的功; (2) 抛球者看到小球上升的最大高度.



图 4-8-21

13. 如图 4-8-22 所示, 长为  $L$  的光滑平台固定在地面上, 中间放小物



体  $A, B$ , 两者彼此接触,  $A$  的上表面是半径为  $R$  ( $R$  远小于  $L$ ) 的半圆形轨道, 轨道顶端距台面的高度为  $h$ , 有一个小物体  $C$ ,  $A, B, C$  质量均为  $m$ . 在运动过程中  $A, C$  始终保持接触. 求: (1)  $AB$  刚分离时  $B$  的速度; (2)  $AB$  分离后,  $C$  所能到达的最大高度; (3) 判断  $A$  在哪边落地, 估计  $A$  从与  $B$  分离到落地经历的时间.

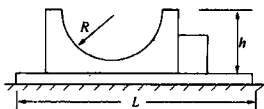


图 4-8-22

14. 质量为  $M$  的大圆环静止在光滑水平桌面上, 另一质量为  $m$  的质点以初速  $v$  自由穿过环上小孔  $P$ , 与内壁发生  $n$  次弹性碰撞后又从小孔自由穿出, 如图 4-8-23 所示, 求质点穿出孔后圆环中心相对桌面的速度.

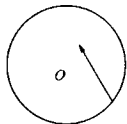


图 4-8-23

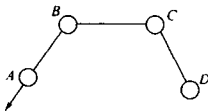


图 4-8-24

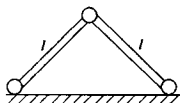


图 4-8-25

15. 如图 4-8-24 所示, 四个质量相等的质点由三根不可伸长的绳子依次连接, 置于光滑水平面上, 三根绳子形成半个正六边形. 现有一冲量作用于端点  $A$  并使这个质点速度为  $u$ , 方向沿绳向外, 求瞬时  $D$  质点的速度.

16. 如图 4-8-25, 两根长度均为  $l$  的刚性轻杆, 一端通过质量为  $m$  的球形铰链连接, 另一端分别接质量为  $m, 2m$  的小球. 将此装置两杆并拢, 铰链向上放在桌上, 然后轻敲一下, 使球往两边滑, 两杆保持在竖直平面内, 摩擦不计. 问: (1) 铰链碰到桌面时的速度; (2) 两杆夹角为  $90^\circ$  时质量为  $2m$  的小球的速度; (3) 两杆夹角为  $90^\circ$  时质量为  $2m$  的小球的位移.

17.  $ABC$  为三个完全相同的光滑小球.  $B, C$  各被一长为  $L = 2.0\text{m}$  的不可伸长的轻线悬挂于天花板上, 两球刚好接触, 以接触点  $O$  为原点作一直角坐标系  $Oxyz$ ,  $z$  轴竖直向上,  $Ox$  轴与两球连心线重合, 如图 4-8-26 所示. 现让  $A$  球射向  $BC$  两球, 使它们同时发生碰撞, 碰前  $A$  速度方向沿  $y$  轴正方向,  $v_0 = 4.0\text{m/s}$ . 碰后,  $A$  沿  $y$  轴负方向反弹,  $u_a = 0.40\text{m/s}$ . (1) 求  $B, C$  碰后偏离  $O$  点的最大位移; (2) 讨论长时间内  $B, C$  两球的运动状况 (忽略空气阻力,  $g = 10\text{m/s}^2$ ).

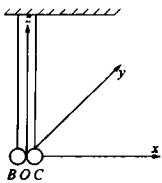


图 4-8-26

### 问题与讨论 极值问题

中学物理习题中, 经常遇到内容丰富、难度较大和技巧性较强的物理极值问题. 求

解物理极值问题要综合运用数学知识和物理知识,能够培养学生综合分析问题和解决问题的能力.下面就介绍一下求解物理极值问题的常用方法.

### 一、用二次方程的判别式求解物理极值

应用此方法时要选择适当的物理量作为未知量,通过巧妙的变换使该物理量出现二次项,成为一个一元二次方程,再利用判别式  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$  求解.

### 二、用二次函数的配方法求解物理极值问题

$$\text{对二次函数 } y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\text{若 } a < 0, \text{ 则 } y \text{ 有极大值. 当 } x = -\frac{b}{2a} \text{ 时, } y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\text{若 } a > 0, \text{ 则 } y \text{ 有极小值. 当 } x = -\frac{b}{2a} \text{ 时, } y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

### 三、利用不等式的性质

1.  $A + B \geq 2\sqrt{AB}$ : 对正数  $A, B$ , 若  $AB$  为常数, 则当  $A = B$  时,  $A$  与  $B$  的和有极小值:  $(A + B)_{\min} = 2\sqrt{AB}$ .

2.  $AB \leq \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$ : 对正数  $A, B$ , 若  $A + B$  为常数, 则当  $A = B$  时,  $A$  与  $B$  的积有极大值:  $(AB)_{\max} = \frac{(A+B)^2}{4}$ .

### 四、用三角函数求解物理极值

对  $y$  关于  $\theta$  的函数  $y = a\sin\theta + b\cos\theta$ , 令  $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , 则有:  $y = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \varphi) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ , 当  $\theta = \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  时取到等号.

### 五、利用矢量三角形求解物理极值问题

在运动学中处理速度和位移、静力学中处理物体的平衡态、在动力学中处理与动量有关的问题时,我们经常运用这种方法来求一个变力的最小值问题.如图 4-9-1, 当挡板倾斜角发生变化时,  $N$  的数值在发生变化, 我们画出力的矢量图如图 4-9-2, 立即可以知道: 当  $N$  与  $T$  相垂直时,  $N$  有最小值:  $N_{\min} = G\sin\theta$ .

### 六、用条件法求解物理极值问题

在解决物理极值问题之前,先分析物理情景、找出出现极大值或极小值的临界条件,以后再根据临界条件具体求解.

**例 1** 一个质量为  $m$  的电子和一个质量为  $M$ 、最初静止的原子进行正碰,碰撞的结果是,一定量的能量  $E$  被贮存到这原子内部,问电子必须具有的最小初动能是多少?

**解** 设电子碰撞前后的速度为  $v_1$  和  $v_1'$ , 而原子碰撞后的速度为  $v_2'$ , 根据动量守恒定律和能量守恒定律有

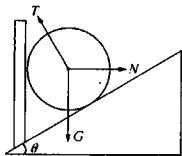


图 4-9-1

$$mv_1 = mv'_1 + Mv'_2 \quad ①$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}Mv_2'^2 + E \quad ②$$

由①式得

$$v_2' = \frac{m}{M}(v_1 - v_1') \quad ③$$

将③式代入②式得

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}(v_1 - v_1')^2 + E$$

整理后得到关于  $v_1'$  的二次方程

$$(M+m)v_1'^2 - 2mv_1v_1' + 2\frac{M}{m}E + (m-M)v_1^2 = 0$$

欲使  $v_1'$  有解, 则该二次方程的判别式  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ , 即

$$(2mv_1)^2 - 4(M+m)\left[2\frac{M}{m}E + (m-M)v_1^2\right] \geq 0$$

由此可得  $\frac{1}{2}mv_1^2 \geq \frac{M+m}{M}E$

所以电子必须具有的最小初动能是  $E_{\min} = \frac{M+m}{M}E$ .

**例 2** 如图 4-9-3 所示, 一个质量  $M = 50\text{kg}$  的人站在秤盘上, 人拉着一根长  $L = 0.9\text{m}$  的轻绳的一端, 绳的另一端拴着一个质量为  $5\text{kg}$  的铅球. 若让球从最低点 A 以  $v_0$  为  $8\text{m/s}$  的水平速度在竖直平面内作圆周运动, 问铅球在运动过程中, 秤盘上读数最小为多少? ( $g$  取  $10\text{m/s}^2$ )

**解** 秤盘的读数除与人的重力有关外, 还与绳对人的拉力有关, 而绳上的拉力的大小又与铅球运动的位置有关. 因此本题应求出当铅球在竖直平面上作变速圆周运动时, 在哪个位置上时绳的拉力的竖直向下的分力最大, 那么在该位置时绳对人的竖直向上的拉力也最大, 则人对秤盘的压力就最小.

以人为研究对象, 人同时受三个力的作用: 重力  $Mg$ , 秤盘的支持力  $N$ , 绳的拉力  $T$ .

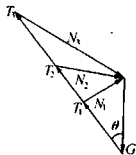


图 4-9-2

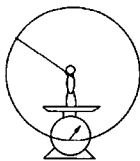


图 4-9-3

大铅球在 A 点时

$$\text{对人: } N_A = Mg + T_A$$

$$\text{对球: } T_A - mg = m \frac{v_0^2}{L}$$

$$\text{所以 } N_A = Mg + mg + m \frac{v_0^2}{L}$$

当球在最高点 B 时, 同理可得

$$\text{对人: } N_B = Mg - T_B$$

$$\text{对球: } \begin{cases} T_B + mg = m \frac{v_B^2}{L} \\ \frac{1}{2} m v_0^2 = mg \times 2L + \frac{1}{2} m v_B^2 \end{cases}$$

$$\text{所以 } N_B = Mg + 5mg - \frac{m v_0^2}{L}$$

当铅球运动到上半圆的任意一点 C 时, 绳与水平方向的夹角为  $\theta$  时, 则有

$$\text{对人: } N_C = Mg - T_C \sin \theta$$

$$\text{对球: } T_C + mg \sin \theta = m \frac{v_C^2}{L}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + mg(L + L \sin \theta)$$

$$\text{所以 } N_C = Mg - \left( \frac{m v_0^2}{L} \sin \theta - 2mg \sin \theta - 3mg \sin^2 \theta \right)$$

要维持铅球在竖直平面内作圆周运动, 应有初速度  $v_0 \geq \sqrt{5gL}$ , 也即向心力  $m \frac{v_0^2}{L}$  的值足够大, 所以  $N_A$  总大于  $N_B$  和  $N_C$ .

$$\text{令 } y = m \frac{v_0^2}{L} \sin \theta - 2mg \sin \theta - 3mg \sin^2 \theta = -3mg \left[ \sin \theta - \frac{\left( \frac{v_0^2}{L} - 2g \right)}{6g} \right]^2 + \frac{m \left( \frac{v_0^2}{L} - 2g \right)^2}{12g}$$

当  $\sin \theta = \frac{\left( \frac{v_0^2}{L} - 2g \right)}{6g}$  时,  $y$  有极大值, 此时  $N_C = Mg - y$  有极小值, 即这时秤盘读数最小. 所以

$$N_{\min} = Mg - y_{\max} = Mg - \frac{m \left( \frac{v_0^2}{L} - 2g \right)^2}{12g} = 50 \times 10 - \frac{5 \left( \frac{8^2}{0.9} - 20 \right)^2}{12 \times 10} = 392 \text{ (N)}$$

### 【巩固习题】

1. 在不刮风的情况下, 雨点在空中下落, 空气的阻力与雨点速度的平方成正比,  $f$

$= kv^2$ , 若  $k$  和雨点质量  $m$  一致, 求雨点在运动中的最大动能是多少?

2. 如图 4-9-4 所示, 质量为  $m$  的物块位于直立弹簧上方  $h$  高度处, 由静止开始落向弹簧. 弹簧的倔强系数为  $k$ , 求物块能获得的最大动能  $E_k$ .

3. 如图 4-9-5 所示, 水平弹簧一端固定, 另一端连接一质量为  $m$  的小球, 弹簧的倔强系数为  $k$ , 小球与水平面的摩擦系数为  $\mu$ , 当弹簧为原长时小球位于  $O$  点, 开始时小球位于  $O$  点右方的  $A$  处,  $O$  与  $A$  之间的距离为  $l_0$ , 从静止开始释放小球.

(1) 为使小球能通过  $O$  点, 而且只能通过一次, 试问  $\mu$  值应在什么范围?

(2) 在上述条件下, 小球在  $O$  点左方的停住点  $B$  与  $O$  点的最大距离是多少?

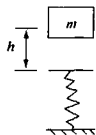


图 4-9-4

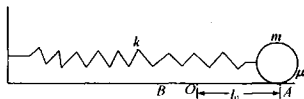


图 4-9-5

4. 如图 4-9-6 所示, 质量分别为  $m_1, m_2$  的两个小物块在光滑的水平面上, 彼此用倔强系数为  $k$  的轻弹簧相连, 弹簧处于自由长度状态. 质量为  $m = m_2 - m_1$ , 水平速度为  $v_0$  的小子弹射到  $m_1$  物块内. 试求: (1) 之后的运动过程中, 物块  $m_2$  的最大加速度的值; (2) 之后的运动过程中, 物块  $m_2$  的最大速度的值.

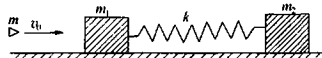


图 4-9-6

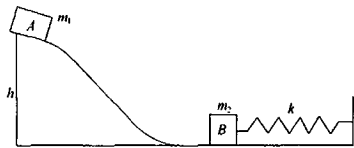


图 4-9-7

5. 如图 4-9-7 所示, 质量为  $m_1$  的重物  $A$  从离地面高度为  $h$  的坡顶由静止开始下滑, 与放置在水地面上的另一质量为  $m_2$  的重物  $B$  作弹性碰撞, 已知  $m_2 = 2m_1$ , 重物  $B$  与劲度系数为  $k$  的轻弹簧相连, 弹簧的另一端固定,  $A$  与  $B$  相碰前,  $B$  处于静止状态, 弹簧则为原长. 忽略一切摩擦阻力, 试求: (1) 碰后弹簧的最大压缩量; (2) 重物  $A$  反弹后能达到的最大高度.

## 第五章 角动量

## 第一节 力矩和角动量

 【知识要点】

## 一、力矩的定义

## 1. 对轴的力矩

对轴的力矩可推动物体绕轴转动或改变物体绕轴转动的角速度. 力矩的大小不仅与力的大小和方向有关, 而且与力的作用点有关. 当力的作用线在垂直于轴的平面( $\pi$ )上时(图 5-1-1), 力矩  $\tau$  的大小与力的作用点  $P$  和轴的距离  $\rho$  成正比, 与力在垂直于  $\rho$  方向上的分量  $F_{\perp}$  成正比, 因为力在  $\rho$  方向上的分量  $F_{\parallel}$  对物体的绕轴转动无作用, 于是有

$$\tau = \rho F_{\perp} = F \rho \sin \theta \quad (5.1-1)$$

式中  $\theta$  是  $F$  与  $\rho$  的夹角,  $\rho$  就是从轴与平面  $\pi$  的交点  $O'$  指向  $P$  点的矢量. 由于在力矩作用下引起的转动有两个可能的方向, 力矩也有正、负两种取向. 例如, 先任意规定轴的正方向, 当逆着轴的正方向去看力矩作用下所引起的物体的转动时, 若物体沿逆时针方向转动, 对应的力矩就取为正, 反之则为负. 由于  $\rho \sin \theta = d$  就是力的作用线与轴的距离, (5.1-1) 式又可写成

$$\tau = Fd \quad (5.1-1a)$$

$d$  常称为力臂, 这正是大家所熟知的力矩表达式.

当力的作用线不在垂直于轴的平面( $\pi$ )上时, 可将力  $F$  分解为平行于轴的分量  $F_{\parallel}$  和垂直于轴的分量  $F_{\perp}$  两部分, 其中  $F_{\parallel}$  对物体绕轴转动不起作用, 而  $F_{\perp}$  就是  $F$  在垂直于轴的平面( $\pi$ )上的投影, 故这时  $F$  对轴的力矩可写成

$$\tau = \rho F_{\perp} \sin \theta \quad (5.1-1b)$$

这里  $\theta$  是  $F_{\perp}$  与  $\rho$  的夹角(图 5-1-2).

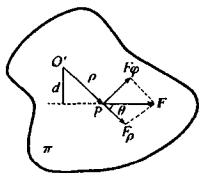
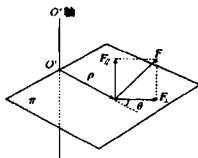


图 5-1-1

图 5-1-2 任意方向的力  
对  $O'$  轴的力矩

## 2. 对参考点的力矩

可将上述对轴的力矩的概念推广到对点的力矩. 在选定的参照系中, 从参考点  $O$  指向力的作用点  $P$  的矢量  $r$  与作用力  $F$  的矢积称为作用力对于参考点  $O$  的力矩, 即

$$\tau = r \times F \quad (5.1-2)$$

$r$  也可称为作用点相对参考点的位矢. 当参考点是坐标原点时,  $r$  就是力的作用点的位矢. 根据矢积的意义, 力矩的大小等于以  $r$  和  $F$  两矢量为邻边所构成的平行四边形的面积, 方向与  $r, F$  所在平面垂直并与  $r, F$  成右手螺旋.

## 二、作用于质点的力矩和作用于质点系的力矩

### 1. 作用于质点的力矩

当质点  $m$  受力  $F$  作用时,  $F$  对参考点  $O$  的力矩即为质点受到的力矩. 这时, 力矩表式(5.1-2)中的  $r$  就是参考点指向质点的矢量, 当参考点为坐标原点时,  $r$  就是质点的位矢. 当质点受  $F_1, F_2, \dots, F_N$   $N$  个力同时作用时, 诸力对某参考点的力矩的矢量和等于合力  $F = F_1 + F_2 + \dots + F_N$  对同一参考点的力矩, 即

$$r \times F_1 + r \times F_2 + \dots + r \times F_N = r \times (F_1 + F_2 + \dots + F_N) = r \times F \quad (5.1-3)$$

### 2. 作用于质点系的力矩

力矩概念也可应用于作用于质点系上的作用力. 一般讲来, 质点系内各质点受到的作用力有外力和内力的区别, 因此应分别考察外力的力矩和内力的力矩.

#### (1) 外力的力矩

当质点系受多个外力作用时, 若第  $i$  个质点受到的合外力为  $F_i$ , 该质点相对某一给定参考点的位矢为  $r_i$ , 则其力矩为  $\tau_{i外} = r_i \times F_i$ , 各质点所受力矩的矢量和, 即质点系所受的总力矩为 
$$\tau_{外} = \sum_i \tau_{i外} = \sum_i r_i \times F_i \quad (5.1-4)$$

由于各外力作用在不同质点上, 各质点的位矢  $r_i$  各不相同, 因而外力对质点系的总力矩一般不能通过外力矢量和的力矩来计算.

但当质点系处在重力场中时, 各质点所受重力与质点的质量成正比, 方向又都相

同,因而作用于质点系的重力相对某一参考点的力矩,根据(5.1-4)式为

$$\tau_{\text{重力}} = \sum_i r_i \times m_i g = \left( \sum_i m_i r_i \right) \times g = r_c \times Mg \quad (5.1-5)$$

即作用于质点系的重力相对某参考点的力矩等于重力的矢量和作用于质心上时对该参考点的力矩.在平动非惯性系中的惯性力显然也具有这种性质.

### (2) 内力的力矩

若  $f_i$  为作用于质点系中第  $i$  个质点上的合内力,  $r_i$  为该质点的位矢,则内力的总力矩为

$$\tau_{\text{内}} = \sum_i r_i \times f_i = \sum_i r_i \times \sum_{j \neq i} f_{ij}$$

由于内力总是成对出现,因而上式可写成  $\tau_{\text{内}} = \sum_{i < j} (r_i \times f_{ij} + r_j \times f_{ji})$

根据牛顿第三定律(强形式),任一对内力  $f_{ij}$  和  $f_{ji}$  必定等值反向,且沿同一直线,因而对任一给定参考点  $O$  来说,力矩也必等值反向,两者相互抵消,即  $r_i \times f_{ij} + r_j \times f_{ji} = 0$

因而内力的总力矩为零  $\tau_{\text{内}} = \sum_{i < j} (r_i \times f_{ij} + r_j \times f_{ji}) = 0 \quad (5.1-6)$

这一结果与内力的冲量相似,但与内力的功不同.

### 三、冲量矩

在明确了力矩的概念以后,可引出冲量矩的概念.

$$\Delta \vec{L} = \vec{\tau} \cdot \Delta t = (\vec{\tau}_{\text{外}} + \vec{\tau}_{\text{内}}) \cdot \Delta t = (\vec{\tau}_{\text{外}} + 0) \Delta t = \vec{\tau}_{\text{外}} \cdot \Delta t$$

此式对质点系适用.

若对质点只需把  $\vec{\tau}_{\text{外}}$  改为  $\vec{\tau}$  即可.

在一段时间内质点或质点系所受的冲量矩为这段时间内冲量矩的累加:

$$\Delta \vec{L}_{\text{总}} = \sum \Delta \vec{L} = \sum \vec{\tau}_{\text{外}} \cdot \Delta t \quad (5.1-8)$$

$\Delta \vec{L}_{\text{总}}$  为矢量,方向与  $\vec{\tau}_{\text{外}}$  相同,单位是  $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ .

### 四、质点的角动量

质点的运动状态可以用动量  $p = mv$  描写,它包含了运动的大小和方向的所有特征.当我们以某定点为参考点来考察质点的运动时,相对参考点而言,除质点的动量外,质点的距离在变化,质点的方位也在变化,前者可用质点相对参考点的位矢的大小变化来表征,后者则可用位矢的方向变化来表征,而位矢方向的变化又可与位矢扫过的角度随时间的变化,即角速度相联系;而角速度不仅有大小,还有方向(以所绕的轴线及顺、逆时针为特征).为了描写质点相对某一参考点的运动,可仿照力矩的定义引入动量矩的概念.从给定参考点指向质点的矢量  $r$  和质点动量  $p = mv$  的矢积称为质点对于参考点的动量矩,用  $l$  表示:  $l = r \times p \quad (5.1-9)$

动量矩又称角动量.

角动量是矢量,它是  $r$  和  $p$  的矢积,因而既垂直于  $r$ ,又垂直于  $p$ ,即垂直于  $r$  与  $p$  所组成的平面,其指向由右手定则决定(图 5-1-3).



质点的角动量是相对给定的参考点定义的,因此,同一质点对不同参考点的角动量是不同的.例如,一圆锥摆的摆球以恒定的角速度  $\omega$  作圆周运动,圆周的半径为  $R$ ,摆的悬线长  $r$ (图 5-1-4),摆球对圆心  $O$  的角动量  $|l| = mvR = m\omega R^2$ ,其大小和方向都恒定不变.但摆球对悬挂点  $O'$  的角动量  $l'$  则不同,尽管其大小  $|l'| = rmv = rmR\omega$  保持不变,但方向却随时间而变.

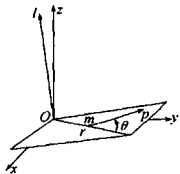


图 5-1-3 质点的角动量

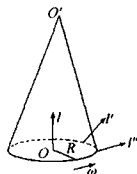


图 5-1-4 角动量与参考点有关

作直线运动的质点,对于不在该直线上的不同参考点的角动量也不相同.通常把考察转动的参考点取为坐标原点,这样,(5.1-9)式中的  $r$  就是质点的位矢.角动量的单位是  $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ .

### 【例题分析】

**例 1** 如图 5-1-5 所示,质量为  $m$  的小球自由落下,某时刻具有速度  $v$ ,此时小球与图中的  $A, B, C$  三点恰好位于某长方形的四个顶点,且小球与  $A, C$  点的距离分别为  $l_1, l_2$ .试求:

- (1) 小球所受重力相对  $A, B, C$  三点的力矩  $M_1, M_2, M_3$ ;
- (2) 小球相对  $A, B, C$  三点的角动量  $L_1, L_2, L_3$ .

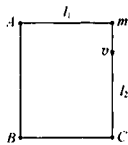


图 5-1-5

**解** (1) 小球所受重力  $mg$  竖直朝下,以  $A$  为参考点的小球位矢  $l_1$  水平向右,  $mg$  与  $l_1$  两者夹角  $\varphi = 90^\circ$ ,可得

$$M_1 \begin{cases} \text{大小: } M_1 = l_1 mg \sin 90^\circ = l_1 mg \\ \text{方向: 垂直图平面朝内} \end{cases}$$

以  $B$  为参考点,小球的位矢  $r$  是从  $B$  指向小球所在位置,力臂长  $h$  即为  $B$  到  $C$  的距离  $l_2$ ,因此有

$$M_2 \begin{cases} \text{大小: } M_2 = hmg = l_2 mg \\ \text{方向: 垂直图平面朝内} \end{cases}$$

以  $C$  为参考点,小球的位矢恰与  $mg$  反向,即有  $\varphi = 180^\circ$ ,因此得

$$M_3 = 0$$

(2) 小球动量  $p = mv$  竖直向下, 与(1)问解答类似地可得

$$L_1 \begin{cases} \text{大小: } L_1 = l_1 mv \sin 90^\circ = l_1 mv \\ \text{方向: 垂直图平面朝内} \end{cases}$$

$$L_2 \begin{cases} \text{大小: } L_2 = l_1 mv \\ \text{方向: 垂直图平面朝内} \end{cases}$$

$$L_3 = 0$$

例2 质量为  $m$ , 长  $l$  的匀质细杆, 绕着过杆的端点且与杆垂直的轴以角速度  $\omega$  转动时, 它的动能和相对端点的角动量大

小分别为  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$ ,  $L = I \omega$

其中  $I = \frac{1}{3} ml^2$

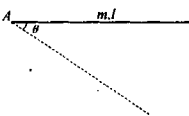


图 5-1-6

今如图 5-1-6 所示, 将此杆从水平位置静止释放, 设此杆能绕着过 A 的固定光滑水平细轴无摩擦地摆下, 当摆角从零达  $\theta$  时, 试求: (1) 细杆转动角速度  $\omega$  和角加速度  $\beta$ ; (2) 固定的光滑细轴为杆提供的支持力  $N$ .

解 (1) 因无摩擦, 机械能守恒, 有  $\frac{1}{2} I \omega^2 = mg \frac{l}{2} \sin \theta$

将  $I = \frac{1}{3} ml^2$  代入后, 可得  $\omega = \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{l}}$ .

以 A 为坐标原点建立垂直于图平面朝内的  $z$  轴, 细杆各部位相对 A 点角动量均沿  $z$  轴方向, 叠加后所得细杆的总角动量  $\vec{L}$  也必沿  $z$  轴方向, 大小则为  $L = I \omega$

固定的光滑细轴为细杆提供的支持力  $N$  相对 A 点力矩为零, 细杆重力相对 A 点力矩为

$$M \begin{cases} \text{大小: } M = mg \frac{l}{2} \cos \theta \\ \text{方向: 沿 } z \text{ 轴} \end{cases}$$

由刚体定轴转动时的角动量变化量与冲量矩相同, 得到  $M \cdot \Delta t = \Delta L$ .

因为  $\frac{\Delta L}{\Delta t} = I \left( \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right) = I \beta$

所以  $\beta = \frac{3g}{2l} \cos \theta$

(2) 如图 5-1-7 所示, 将  $N$  分解为  $N_n$  和  $N_t$ , 支持力与重力合成为细杆质心提供加速度, 可建立下述方程

$$N_n - mg \sin \theta = ma_{c_n}$$

$$mg \cos \theta - N_t = ma_{c_t}$$

其中  $a_{c_n}$  和  $a_{c_t}$  分别为质心作圆周运动的向心和切向加速度, 所以  $a_{c_n} = \frac{l}{2} \omega^2$ ,  $a_{c_t} =$

$$\frac{l}{2}\beta,$$

可得 
$$N_n = \frac{5}{2}mg\sin\theta, N_r = \frac{1}{4}mg\cos\theta$$

**例3** 质量为  $M$ , 半径为  $R$  的匀质圆盘, 绕着过圆心且与圆盘垂直的轴以角速度  $\omega$  旋转时的角动量大小为  $L = l\omega$ ,  $l = \frac{1}{2}MR^2$

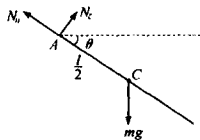


图 5-1-7

有如图 5-1-8 所示系统, 细绳质量可略. 细绳与圆盘间无相对滑动, 定滑轮与中央轴之间光滑接触, 有关参量已在图中标出,  $m_1 > m_2$ , 试求  $a$ .

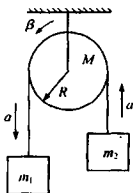


图 5-1-8

**解** 以转轴上某点为参考点, 定滑轮转动角动量方向沿转轴朝外, 大小为  $L = l\omega$

设左、右绳中张力分别为  $T_1, T_2$ . 它们相对转轴力矩之和, 方向沿轴朝外, 大小为

$$M = (T_1 - T_2)R$$

又因为 
$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = l \left( \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right) = l\beta$$

有 
$$(T_1 - T_2)R = l\beta$$

对  $m_1, m_2$  有方程

$$m_1 g - T_1 = m_1 a, T_2 - m_2 g = m_2 a$$

$a$  与  $\beta$  的关系为  $a = \beta R$

可解得 
$$a = \frac{2(m_1 - m_2)}{2(m_1 + m_2) + M} \cdot g$$

### 【巩固习题】

1. 质量为  $M$  的质点固定不动, 在万有引力作用下, 质量为  $m$  的质点绕着它作半径为  $R$  的圆周运动. 取圆轨道上的  $P$  点为参考点, 如图 5-1-9 所示, 试求: (1) 在图中点 1 处,  $m$  所受万有引力相对  $P$  点的力矩大小  $M_1$  和  $m$  相对  $P$  点的角动量大小  $L_1$ ; (2) 在图中点 2 处,  $m$  所受万有引力相对  $P$  点的力矩大小  $M_2$  和  $m$  相对  $P$  点的角动量大小  $L_2$ .

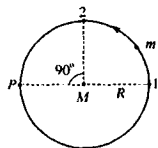


图 5-1-9

2. 电子的质量为  $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , 在半径为  $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$  的圆周上绕氢核作匀速运动. 已知电子相对氢核的轨道角动量为  $\frac{h}{2\pi}$  ( $h$  为普朗克常量, 等于  $6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ), 求电子的角速度大小.

3. 在光滑的水平面上,两个质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的小球,用长为  $l$  的轻线连结.开始时,线正好拉直,  $m_1$  和  $m_2$  的速度分别为  $v_1$  和  $v_2$  ( $v_1 > v_2$ ), 它们的方向相同,且垂直于连线.试问:(1)系统相对质心的角动量为多大?(2)线中的张力为多大?

4. 图中两根匀质金属细棒  $AO$ 、 $BO$  的质量为  $m$ , 长度均为  $l$ ,  $\angle AOB$  为直角,  $O$  点为两棒的焊接点,也是悬挂点.开始时此焊接体  $AOB$  静止在图平面代表的某竖直面内,且  $BO$  棒处于水平位置,而后它将无摩擦地绕着过  $O$  点且与图平面垂直的水平固定细轴旋转.试求:(1)当焊接体  $AOB$  顺时针转动  $\theta$  角时,  $AOB$  的转动角速度  $\omega$  以及角加速度  $\beta$ ; (2)在  $\theta = 45^\circ$  时,转轴承受的水平分力与竖直分力的大小和方向.

图 5-1-10

5. 若将地球绕太阳的公转看作是以太阳为中心的圆周运动,试求地球相对太阳中心的角动量.已知地球的质量  $M_1 = 6.0 \times 10^{24}$  千克,轨道半径  $R = 1.49 \times 10^{11}$  m.

6. 一质量为  $m$  的小球在  $(x_1, 0, 0)$  点由静止释放.设重力加速度沿  $-z$  方向.试求:(1)小球受到的重力相对于原点  $O$  的力矩;(2)小球相对于原点  $O$  的角动量随时间的变化关系.

7. 一质量  $m = 2\text{kg}$  的质点由静止开始作半径  $R = 5\text{m}$  的圆周运动,其相对圆心的角动量随时间的变化关系为:  $L = 3t^2$ , 角动量  $L$  的单位为  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ .试求:(1)质点受到的相对于圆心的力矩;(2)质点运动角速度随时间的变化关系.

## 第二节 质点和质点组的角动量



### 【知识要点】

#### 一、质点角动量定理

我们知道,质点动量的变化等于外力的冲量.质点的角动量如何随外力变化呢?这也不难从牛顿运动定律得到.若质点对某一给定参考点的角动量  $l = r \times mv = r \times p$ , 则其时间变化率为

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta(r \times p)}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \times p + r \times \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

若此给定参考点相对参照系是静止的,则  $\frac{\Delta r}{\Delta t} = v$ ,  $\frac{\Delta r}{\Delta t} \times p = v \times p = v \times mv = 0$ , 而  $\frac{\Delta p}{\Delta t} =$

$F$ ,  $r \times \frac{\Delta p}{\Delta t} = r \times F$ . 但力的作用点相对参考点的位矢和力的矢积即为对参考点的力矩

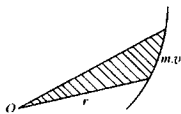
$\tau$ , 于是上式又可写为  $\tau = \frac{\Delta l}{\Delta t}$  (5.2-1)

即质点对任一固定点的角动量的时间变化率等于外力对该点的力矩。这就是质点角动量定理。根据第一节(5.1-8)式,得

$$\Delta l = \sum \tau \cdot \Delta t = l - l_0 \quad (5.2-2)$$

力矩对时间的累加,  $\sum \tau \cdot \Delta t$  就是冲量矩。上式表示质点角动量的增量等于外力的冲量矩,这就是质点角动量定理的另一形式。两种形式的角动量定理,都可写成分量形式。

由于  $r \times v$  在数值上等于以  $r$  和  $v$  为邻边的平行四边形的面积,也就是矢径  $r$  在单位时间内所扫过的面积(面积速度)的两倍,所以角动量  $l = r \times mv$  与面积速度成正比,为面积速度的  $2m$  倍(图 5-2-1)。



角动量与面积速度成正比  
图 5-2-1

## 二、质点系角动量定理

质点系对给定点的角动量等于各质点对该点角动量的矢量和  $L = \sum l_i = \sum r_i \times p_i = \sum r_i \times m_i v_i$  (5.2-3)

若计算角动量的给定点相对惯性系固定不动,则可以(5.2-1)式代入,得

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \sum_i \frac{\Delta l_i}{\Delta t} = \sum_i r_i \times (F_i + f_i)$$

式中  $F_i$  表示第  $i$  个质点受到的来自体系以外的力,  $f_i$  表示该质点受到的来自体系内部的力。但由第一节的讨论,内力对体系的总力矩为零,即  $\sum_i r_i \times f_i = \sum_i \tau_{i内} = 0$  [见

(5.1-6) 式], 于是上式变为  $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \sum_i r_i \times F_i = \sum_i \tau_{i外} = \tau_{外}$

即  $\tau_{外} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$  (5.2-4)

(5.2-4) 式告诉我们,质点系对给定点的角动量的时间变化率等于作用在体系上所有外力对该点力矩之和,这就是体系角动量定理。对(5.2-4)式累加,可得体系角动量定理的另一形式:  $L - L_0 = \sum \tau_{外} \cdot \Delta t$  (5.2-5)

式中  $\sum \tau_{外} \cdot \Delta t$  为外力的总冲量矩。(5.2-5) 式说明,体系对给定点角动量的增量等于外力对该点的总冲量矩。

(5.2-4)、(5.2-5) 式也可写成分量形式。

质点系角动量定理指出,只有外力矩才对体系的角动量变化有贡献。内力矩对体系角动量变化无贡献,但对角动量在体系内的分配是有作用的。

### 【例题分析】

#### 例 1 锥摆

摆长为  $b$  的锥摆作匀速圆周运动,摆线与铅垂轴成  $\alpha$  角,求摆球速率。

解 我们知道,在锥摆的运动过程中,摆球相对支点  $O'$  的角动量  $L' = r' \times mv$  位于过  $O'$  点的铅垂轴  $O'O$  和以  $O'$  点为原点的位矢  $r'$  组成的平面内,且与  $r'$  垂直,如图 5-2-2 所示.尽管  $L'$  的大小恒定,但其方向随时间而变,即  $L' = L'(t)$ .若将角动量矢量  $L'$  的尾部画在同一点  $O'$ ,则  $L'(t)$  也将画出一锥面.可以把  $L'(t)$  分解成平行于  $O'O$  轴的分量  $L'_z$  和垂直于  $O'O$  轴的分量  $L'_{\perp}$  两部分.

$$L'_z = m v b \sin \alpha$$

$$L'_{\perp} = m v b \cos \alpha$$

很明显,  $L'$  的  $z$  方向分量  $L'_z$  的大小和方向都是恒定不变的,但  $L'$  的垂直于  $O'O$  轴的分量  $L'_{\perp}$  则随时间变化,因其方向沿摆球运动圆周的半径,正是这一分量方向的变化导致角动量  $L'$  的变化.可以看出  $|\Delta L'| = |\Delta L'_{\perp}| = L'_{\perp} \Delta \theta = m v b \cos \alpha \Delta \theta$  ①

根据角动量定理,角动量的变化取决于外力矩的冲量.在锥摆运动过程中,作用于摆球的外力有张力和重力两部分,但张力对支点  $O'$  无力矩,重力的力矩位于垂直  $O'O$  的平面内,方向与圆周半径垂直.正是此力矩的作用,使角动量  $L'$  随时间而变.但重力的力矩  $\tau = m g b \sin \alpha$  与  $O'O$  轴垂直,无轴向分量,故角动量在  $O'O$  轴向的分量  $L'_z$  的大小和方向恒定不变,  $\tau$  的作用是引起  $L'_{\perp}$  方向的变化,故有

$$|\Delta L'| = |\Delta L'_{\perp}| = m g b \sin \alpha \Delta t$$
 ②

由①、②式得  $\frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{g \sin \alpha}{v \cos \alpha}$

所以  $r = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} b \sin \alpha = \frac{g b \sin^2 \alpha}{v \cos \alpha}$ ,  $r = \sin \alpha \sqrt{\frac{g b}{\cos \alpha}}$

例 2 如图 5-2-3 所示,两个同样重的小孩,各抓着跨过滑轮绳子的两端,一个孩子用力向上爬,另一个小孩则抓住绳子不动.若滑轮的质量和轴上的摩擦都可忽略,哪一个小孩先到达滑轮?如两小孩的重量不等时,情况又如何?

解 设每个小孩的质量为  $m$ ,两小孩向上的速度分别为  $v_1$  和  $v_2$ ,滑轮的半径为  $R$ .对于两个小孩和滑轮组成的系统,由于两个小孩对轴的重力矩大小相等、方向相反,故系统所受的外力矩为零,系统的角动量守恒,即  $m v_1 R - m v_2 R = 0$ ,  $v_1 = v_2$ ,所以他们同时到达滑轮.

若两个小孩的质量不等,则此系统所受的外力矩  $M_{\text{外}} = m_2 g R - m_1 g R$ ,角动量为  $L = m_1 v_1 R - m_2 v_2 R$ .设两小球起初都不动,  $L = 0$ ,但  $M \neq 0$ ,按角动量

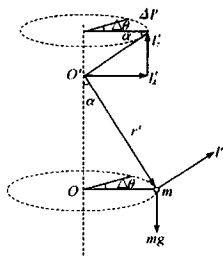


图 5-2-2 锥摆

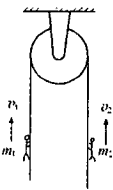


图 5-2-3

定理有  $M_{\text{外}} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = (m_2 - m_1)gR$

如  $m_1 > m_2$ , 则  $\frac{\Delta L}{\Delta t} < 0$ , 尔后  $L < 0$ , 即  $m_1 v_1 < m_2 v_2$ ,  $v_1 < v_2$ ; 反之, 如  $m_1 < m_2$ , 则  $\frac{\Delta L}{\Delta t} > 0$ , 尔后  $L > 0$ , 即  $m_1 v_1 > m_2 v_2$ ,  $v_1 > v_2$ . 总之, 在任何情况下总是体轻的小孩上升得快, 先到达滑轮.

**例 3** 两个质量均为  $m$  的质点, 用一根长为  $2l$  的质量可忽略的轻杆相连, 如图 5-2-4 所示. 两质点以角速度  $\omega$  绕轴转动. 轴线通过杆的中点  $O$  与杆的夹角为  $\theta$ . 试求以  $O$  为参考点质点组的角动量和所受的外力矩.

**解** 以  $O$  为参考点, 两质点的位矢分别为  $r_1$  和  $r_2$ , 按定义, 质点组的角动量  $L = r_1 \times mv_1 + r_2 \times mv_2 = 2(r_1 \times mv_1)$

因为  $r_1$  与  $v_1$  垂直,  $r_1$  的大小为  $l$ , 故  $L$  的大小

$$L = 2mlv = 2ml^2\omega \sin\theta$$

$L$  的方向由  $r_1 \times v_1$  的方向决定, 在  $xy$  平面内与  $y$  轴夹角为  $\theta$ .

在转动过程中,  $L$  的大小不变, 但方向在变, 随着质点组转动, 矢量  $L$  以角速度  $\omega$  转动. 所以在转动过程中必须施加外力矩. 根据质点角动量定理有  $M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$

设  $\hat{L}$  代表沿  $L$  方向的单位矢量, 把角动量表示成  $L = L\hat{L}$ , 由于单位矢量对时间的变化率:  $\frac{\Delta \hat{L}}{\Delta t} = \omega \times \hat{L}$ , 所以

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\Delta(L\hat{L})}{\Delta t} = L \frac{\Delta \hat{L}}{\Delta t} = L(\omega \times \hat{L}) = \omega \times L$$

因为  $\omega \times L$  的大小为  $\omega L \cos\theta$ , 方向垂直于  $xy$  平面向里, 即  $z$  的负方向. 所以外力矩的大小

$$M = \omega L \cos\theta = 2ml^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta$$

方向垂直纸面向里.

上述计算表明, 质点组虽然作绕固定轴转动, 但是, 质点组的角动量  $L$  的方向并不沿  $\omega$  的方向, 外力矩的方向既不沿角动量  $L$  的方向也不沿  $\omega$  的方向, 而是由  $\omega$ ,  $L$  和  $M$  三者构成右螺旋系统.

### 【巩固习题】

1. 如图 5-2-5 所示, 两个质量都为  $m$  的滑冰者, 在冰场两条相距  $L_0$  的平直跑道上均以  $v_0$  速率迎面匀速滑行. 当两者之间的距离等于  $L_0$  时, 分别抓住一根长  $L_0$  的轻绳

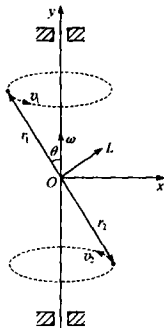


图 5-2-4

两端,而后每人都用对等的力缓慢向自己一边拉绳子,直到两者相距  $L (L < L_0)$  时为止.试求这一过程中,两位滑冰者动能总增量.

2. 如图 5-2-6 所示,在光滑水平面上,质量均为  $M$  的两小球由一长为  $l$  的轻杆相连.另一质量为  $m$  的小球以  $v_0$  的速率向着与杆成  $\theta$  角的方向运动,并与某一  $M$  发生碰撞,碰后  $m$  以  $\frac{1}{2}v_0$  的速率沿原路线反弹.试求碰撞后轻杆系统绕其质心转动的角速度  $\omega$ .

3. 若上题中三球的质量相同,均为  $m$ ,且  $\theta = 45^\circ$ .当运动小球以  $v_0$  的速率与连在杆上的某一球发生弹性碰撞后,即沿垂直于原速度的方向运动,如图 5-2-6 所示.试求:(1) 碰撞后,运动小球的速度  $v_f$ ; (2) 碰撞后,轻杆系统绕其质心转动的角速度  $\omega$ .

4. 如图 5-2-7 所示,在水平的光滑桌面上开有一小孔,一条绳穿过小孔,其两端各系一质量为  $m$  的物体.开始时,用手握住下面的物体,桌上的物体则以  $v_0 = \frac{3}{2}\sqrt{2gr_0}$  的速率作半径为  $r_0$  (即桌上部分的绳长) 的匀速圆周运动,然后放手.求以后的运动中桌上部分绳索的最大长度和最小长度.

5. 质量分别为  $M$  和  $m$  的两物体系于原长为  $a$ , 倔强系数为  $k$  的弹簧的两端,并放在光滑水平桌面上.现使  $M$  获得一与弹簧垂直的速度  $v_0$ . 试证明:若  $v_0 = 3a\sqrt{\frac{k}{2\mu}}$ , 其中  $\mu$  为折合质量,则在以后的运动过程中,两物体之间的最大距离为  $3a$ .

6. 质量为  $m$  的质点在质量为  $M$  的质点(视为固定)的引力场中心以  $M$  为中心作半径为  $r_0$  的圆周运动.若给  $m$  以沿径向的冲量  $J$ , 并设  $J$  与质点的原动量之比为一小量,求  $m$  在以后运动过程中矢径的最大值  $r_2$  与最小值  $r_1$ , 并证明在忽略二级以上小量的情况下,  $r_2 - r_0 \approx r_0 - r_1$ , 即质点  $m$  的运动轨道近似为一偏心的圆.

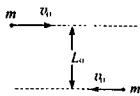


图 5-2-5

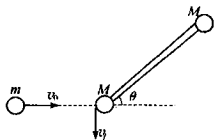


图 5-2-6

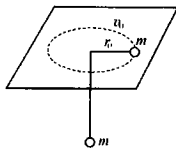


图 5-2-7

### 第三节 角动量守恒定律



#### 【知识要点】

#### 一、质点角动量守恒

当  $r = 0$  时,  $l =$  常矢量

(5.3-1)



即当外力对固定参考点(简称定点)的力矩为零时,质点对该点的角动量守恒.此即质点角动量守恒定律.外力矩为零有两种情况:

1.  $F=0$ ,即无外力,质点作匀速直线运动,它对定点的角动量显然为常量,因为它的面积速度为常量(图 5-3-1).

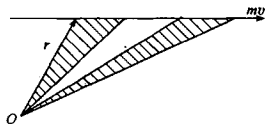
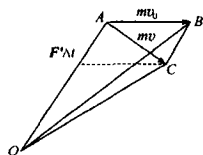


图 5-3-1

2. 力  $F$  通过定点  $O$ , 这样的力称为有心力. 此结论十分重要, 其意义可由图 5-3-2 看出. 在有心力作用下, 其面积速度不变, 即有  $\triangle OAB = \triangle OAC$



在通过  $O$  的外力作用下, 角动量(面积速度)不变

图 5-3-2

由于角动量是矢量, 当外力对定点的力矩虽不为零, 但其某一分量为零时, 则角动量的该分量守恒:

$$\left. \begin{array}{l} \text{若 } \tau_x = 0, \text{ 则 } l_x = \text{常量} \\ \text{若 } \tau_y = 0, \text{ 则 } l_y = \text{常量} \\ \text{若 } \tau_z = 0, \text{ 则 } l_z = \text{常量} \end{array} \right\} \quad (5.3-2)$$

关于质点角动量定理, 有两点值得强调一下:

1. 质点角动量定理系由牛顿定律导出, 因而它仅适用于惯性系.

2. 在质点角动量定理中, 描写质点角动量的参考点必须固定在惯性系中. 因为, 如果参考点运动,  $r$  是从该动参考点指向质点的矢量, 于是  $\frac{\Delta r}{\Delta t} \neq v, \frac{\Delta r}{\Delta t} \times p \neq 0$ , 就得不到(5.2-1)式. 至于参考点是否坐标原点, 则无关紧要.

## 二、质点系角动量守恒

当外力对定点的力矩之和为零, 即  $\tau_{\text{外}} = \sum \tau_{i,\text{外}} = 0$

则  $L = \text{常矢量} \quad (5.3-3)$

即质点系对该定点的角动量守恒, 此即质点系角动量守恒定律.

下面给出  $\tau_{\text{外}} = 0$  的三种不同情况:

1. 体系不受外力, 即  $F_i = 0$  (孤立体系), 显然有  $\tau_{\text{外}} = \sum \tau_{i,\text{外}} = 0$ . 但是一般讲来, 当质点系受外力作用时, 即使外力的矢量和为零, 外力矩的矢量和未必为零, 力偶就是这种情况.

2. 所有的外力通过定点, 这时体系所受外力的矢量和未必为零, 但每个外力的力矩皆为零.

3. 每个外力的力矩不为零, 但外力矩的矢量和为零. 例如, 对重力场中的质点系, 作用于各质点的重力对质心的力矩不为零, 但所有重力对质心的力矩的矢量和却为零.

另外,由于角动量守恒的表式是矢量式,它有三个分量,各分量可以分别守恒。

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } \tau_x = 0, \text{ 则 } L_x = \text{常量} \\ \text{当 } \tau_y = 0, \text{ 则 } L_y = \text{常量} \\ \text{当 } \tau_z = 0, \text{ 则 } L_z = \text{常量} \end{aligned} \right\} \quad (5.3-4)$$

这里  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$  是指外力矩分量的代数和。

### 【例题分析】

例 1 对于圆锥摆,试问:

(1) 摆球相对圆运动中心点  $O_1$  的角动量  $L_1$  是否为守恒量?

(2) 摆球相对悬挂点  $O_2$  的角动量  $L_2$  是否为守恒量?

解 (1) 如图 5-3-3 所示,摆球所受重力  $mg$  和绳中拉力  $T$  的合力等于作圆周运动的向心力  $F_c$ , 此力指向圆运动中心点  $O_1$ , 力矩为零, 故  $L_1$  是守恒量。

顺便一提,若设幅角为  $\theta$ , 摆线长为  $l$ , 摆球质量为  $m$ , 摆球运动方向如图 5-3-3 所示, 那么由

$$\frac{mv^2}{l \sin \theta} = F_c = mg \tan \theta$$

得 
$$v = mv = m \sqrt{\frac{gl}{\cos \theta}} \sin \theta$$

摆球相对  $O_1$  点矢径  $r$  的方向指向摆球所在位置, 大小为  $r = l \sin \theta$ 。因此可得

$$L_1 \begin{cases} \text{大小: } L_1 = rnv = m \sqrt{\frac{gl}{\cos \theta}} l \sin^2 \theta \\ \text{方向: 竖直向上} \end{cases}$$

若摆球运动方向与图示反向, 则  $L_1$  大小不变, 方向改为竖直向下。

(2) 以悬挂点  $O_2$  为参考点, 拉力  $T$  的力矩为零, 重力  $mg$  的力矩不为零 (其方向恰与图中摆球运动方向一致), 因此  $L_2$  不是守恒量。

$L_2$  的方向已在图 5-3-3 中示出, 它是个随摆球运动而旋转的矢量。可以证明 (此处从略),  $L_2$  的竖直分量  $L_{2\perp}$ , 恰好等于  $L_1$ , 它是个守恒矢量;  $L_2$  的水平分量  $L_{2\parallel}$ , 是一个大小不变、方向不断改变的旋转矢量, 因此是个不守恒的矢量。

例 2 一质量  $m = 1.20 \times 10^4 \text{ kg}$  的登陆飞船, 在离月球表面高度  $h = 100 \text{ km}$  处绕月球作圆周运动。飞船采用如下登月方式: 当飞船位于图 5-3-4 中  $A$  点时, 它向外侧 (即沿月球中心  $O$  到  $A$  点的位矢方向) 短时间喷气, 使飞船与月球相切地到达  $B$  点, 且  $\overline{OA}$  与  $\overline{OB}$  垂直。试求飞船到达月球表面时的速度。已知月球的半径  $R_M = 1700 \text{ km}$ ; 在飞船登

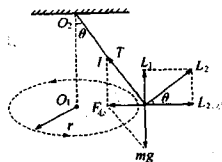


图 5-3-3

月过程中,月球的重力加速度可视为常量  $g_M = 1.62 \text{ m/s}^2$ .

解 设飞船在 A 点的速度为  $v_0$ , 由万有引力定律和牛顿运动定律, 有

$$G \frac{mm_M}{(R+h)^2} = m \frac{v_0^2}{R+h}$$

式中  $m_M$  为月球的质量.

又月球表面附近的重力加速度  $g_M = G \frac{m_M}{R^2}$ , 由以上两式得

$$v_0 = \sqrt{\frac{g_M R^2}{(R+h)^2}} = \sqrt{\frac{1.62 \times (1700 \times 10^3)^2}{(1700+100)^2 \times 10^6}} = 1613 \text{ (m/s)}$$

在飞船即将喷气时, 其质量由  $m'$  和燃气  $\Delta m'$  两部分组成, 其中飞船的剩余部分  $m'$  在 A 点和 B 点只受到引力的作用, 故角动量守恒:

$$m'v_0(R+h) = m'v_B R$$

$$v_B = \frac{R+h}{R} v_0 = \frac{(1700+100) \times 10^3}{1700 \times 10^3} \times 1613 = 1708 \text{ (m/s)}$$

例 3 一质量为  $m$  的物体拴在穿过小孔的轻绳的一端, 在光滑的水平台面以角速度  $\omega_0$  作半径为  $r_0$  的圆周运动, 自  $t=0$  时刻开始, 手拉着绳的另一端以匀速  $v$  向下运动, 使半径逐渐减小. 试求: (1) 角速度与时间关系  $\omega(t)$ ; (2) 绳中的张力与时间关系.

解 (1) 物体  $m$  在水平方向仅受绳子拉力的作用, 它相对小孔的角动量守恒. 当质点与小孔的距离为  $r$  时, 设其角速度为  $\omega$ , 则有  $mr = mr_0$  或  $m\omega r^2 = m\omega_0 r_0^2$

所以  $\omega = \frac{r_0^2}{r^2} \omega_0$

按题意,  $r = r_0 - vt$ , 代入上式得  $\omega = \frac{r_0^2}{(r_0 - vt)^2} \omega_0$

(2) 根据牛顿运动定律  $F = m \left( \frac{\Delta v_r}{\Delta t} + r\omega^2 \right)$

由于  $v_r = v$  是常量, 所以  $\frac{\Delta v_r}{\Delta t} = 0$ ,  $a_r = r\omega^2$

$$F = ma_r = m r \omega^2 = m (r_0 - vt) \left[ \frac{r_0^2}{(r_0 - vt)^2} \omega_0 \right]^2 = m \frac{r_0^4 \omega_0^2}{(r_0 - vt)^3}$$

### 【巩固习题】

1. 一颗卫星沿椭圆轨道绕地球运行. 在近地点, 卫星与地球中心的距离为地球半

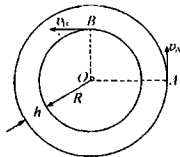


图 5-3-4

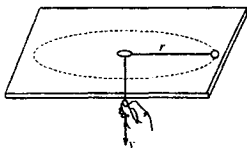


图 5-3-5

径的3倍.而在近地点,卫星的速度为在远地点时的4倍.求在远地点时卫星与地球中心之间的距离为地球半径的多少倍.

2. 一块半径为  $R$  的水平轻质圆盘,可绕过其圆心  $O$  的竖直轴自由旋转.在圆盘下面的边缘处等间隔地系有四个质量都为  $m$  的小球,如图 5-3-6 所示.开始时,圆盘静止,一辆质量也为  $m$  的玩具汽车从  $O$  出发,以恒定的相对于盘的速率  $v_0$  沿半径驶往盘边,并沿盘边行驶.试求:(1)当玩具汽车沿半径行驶时,圆盘的转动角速度  $\omega_1$ ; (2)当玩具汽车沿盘边行驶时,圆盘的转动角速度  $\omega_2$ .

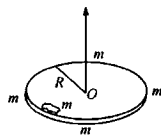


图 5-3-6

3. 若上题中的竖直轴不在圆心,而在某一小球位置处.玩具汽车从该轴处以恒定的相对于圆盘的速率  $v_0$  沿盘边行驶.试求:(1)当玩具汽车行驶到第二小球位置处(即行驶了半圆)时,圆盘的转动角速度  $\omega_1$ ; (2)当玩具汽车行驶到第三小球位置处(即行驶了  $3/4$  圆)时,圆盘的转动角速度  $\omega_2$ ; (3)当玩具汽车回到转轴处时,圆盘的转动角速度  $\omega_3$ .

4. 在一根长为  $3l$  的轻杆上打一个小孔,孔离一端的距离为  $l$ ,再在杆的两端以及距另一端为  $l$  处各系一质量为  $M$  的小球.然后通过此孔将杆悬挂于一光滑的水平细轴  $O$  上,如图 5-3-7 所示.开始时,轻杆静止,一质量为  $m$  的小铅粒以  $v_0$  的水平速度射入中间的小球,并留在里面.若铅粒相对小球静止时杆的角位移可以忽略,试求杆在以后摆动中的最大摆角.

5. 质量皆为  $m$  的两珠子可在光滑轻杆上自由滑动,杆可在水平面内绕过  $O$  点的光滑竖直轴自由旋转.原先两珠对称地位于  $O$  点的两边,与  $O$  相距  $a$ ,在  $t=0$  时刻,对杆施以冲量矩,使杆在极短时间内即以角速度  $\omega_0$  绕竖直轴旋转,求  $t$  时刻杆的角速度  $\omega$ 、角加速度  $\beta$  及两珠与  $O$  点的距离  $r$ .

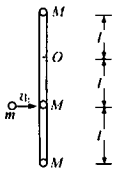


图 5-3-7

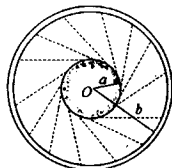


图 5-3-8

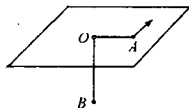


图 5-3-9

6. 一质量为  $M_a$ 、半径为  $a$  的圆筒  $A$ ,被另一质量为  $M_b$ 、半径为  $b$  的圆筒  $B$  同轴套在其外,均可绕轴自由旋转.在圆筒  $A$  的内表面上散布了薄薄的一层质量为  $M_0$  的砂子,并在壁上开有许多小孔.在  $t=0$  时,圆筒以角速度  $\omega_0$  绕轴匀速转动,而圆筒  $B$  则静止.打开小孔,砂子向外飞出并附着在  $B$  筒的内壁上,如图 5-3-8 所示.设单位时间

内喷出砂子的质量为  $k$ , 若忽略砂子从  $A$  筒飞到  $B$  筒的时间, 求  $t$  时刻两筒旋转的角速度.

7. 光滑水平面上有一小球  $A$  被一轻绳拴住, 轻绳穿过平面上小孔  $O$  与小球  $B$  连接. 开始时  $A$  球在水平面上绕  $O$  做匀速圆周运动,  $B$  球静止地向下垂挂着, 如图 5-3-9 所示. 今使小球  $B$  的质量缓慢增加, 直到  $A$  球绕  $O$  点做匀速圆周运动的半径缩短一半, 试问此时  $B$  球质量为初始质量的多少倍?

## 第四节 综合训练

### 【例题分析】

**例 1** 在天花板的  $O$  点悬挂一个轻质光滑小圆环  $P$ ,  $P$  可绕  $O$  点无摩擦地转动. 长为  $L$  的轻绳穿过圆环  $P$ , 绳的两端分别连接质量为  $m_1$  和  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ) 的两个小球  $A_1$  和  $A_2$ , 如图 5-4-1 所示. 设  $A_1$  和  $A_2$  同时作圆锥摆运动, 且在任意时刻  $A_1$ 、 $A_2$  和绳均在该时刻对应的一个竖直平面内, 旋转的角速度同为  $\omega =$

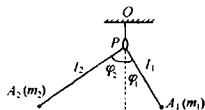


图 5-4-1

$$\sqrt{\frac{g}{L}} \times \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{m_1 m_2}}$$

- (1) 确定  $A_1$ 、 $A_2$  各自到  $P$  的距离  $l_1$ 、 $l_2$ ;
- (2) 计算  $A_1$ 、 $A_2$  和绳构成的系统所受外力相对  $P$  的力矩之和的大小  $M$ ;
- (3) 该系统相对  $P$  的角动量的竖直分量与水平分量中哪个量为守恒量?
- (4) 计算该系统相对  $P$  的角动量的水平分量大小  $L_x$ .

**解** (1) 设  $A_1$ 、 $A_2$  圆锥摆运动的幅角分别为  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ , 则应有

$$m_1 g \tan \varphi_1 = m_1 \omega^2 l_1 \sin \varphi_1$$

$$m_2 g \tan \varphi_2 = m_2 \omega^2 l_2 \sin \varphi_2$$

得 
$$l_1 \cos \varphi_1 = l_2 \cos \varphi_2$$

即摆球  $A_1$ 、 $A_2$  等高. 设绳中张力为  $T$ , 又有 
$$\frac{m_1 g}{\cos \varphi_1} = T = \frac{m_2 g}{\cos \varphi_2}$$

得 
$$m_2 \cos \varphi_1 = m_1 \cos \varphi_2$$

于是有 
$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

又因  $l_1 + l_2 = L$ , 可解得 
$$l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L, \quad l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} L$$

(2)  $A_1, A_2$  所受重力对  $P$  有非零力矩, 它们的方向都是水平方向, 但是彼此反向,

$$\text{故大小为 } M = |m_1 g l_1 \sin \varphi_1 - m_2 g l_2 \sin \varphi_2| = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} L g |\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2|$$

$$\text{由 } \cos \varphi_1 = \frac{g}{\omega^2 l_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \cos \varphi_2 = \frac{g}{\omega^2 l_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{得 } \sin \varphi_1 = \frac{\sqrt{m_2(m_2 + 2m_1)}}{m_1 + m_2}, \sin \varphi_2 = \frac{\sqrt{m_1(m_1 + 2m_2)}}{m_1 + m_2}$$

显然  $\sin \varphi_2 > \sin \varphi_1$ , 因此

$$M = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} L g [\sqrt{m_1(m_1 + 2m_2)} - \sqrt{m_2(m_2 + 2m_1)}]$$

(3) 系统相对  $P$  的角动量的竖直分量大小与方向均恒定, 是守恒量; 角动量的水平分量大小恒定, 但方向要变, 所以不是守恒量。

(4)  $A_1$  相对  $P$  的角动量大小为  $L_1 = (m_1 \omega l_1 \sin \varphi_1) l_1$

$L_1$  的水平分量大小为  $L_{1\parallel} = L_1 \cos \varphi_1 = (m_1 \omega l_1 \sin \varphi_1) l_1 \cos \varphi_1$

同样可得  $A_2$  相对  $P$  的角动量  $L_2$  的水平分量大小为  $L_{2\parallel} = (m_2 \omega l_2 \sin \varphi_2) l_2 \cos \varphi_2$

这两个水平分量的方向相反, 因此系统角动量的水平分量大小为

$$L_{\parallel} = \left| (m_1 l_1) (\omega^2 l_1 \cos \varphi_1) \frac{1}{\omega} \sin \varphi_1 - (m_2 l_2) (\omega^2 l_2 \cos \varphi_2) \frac{1}{\omega} \sin \varphi_2 \right|$$

因

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} L$$

$$\omega^2 l_1 \cos \varphi_1 = g = \omega^2 l_2 \cos \varphi_2$$

故有

$$L_{\parallel} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} L \frac{g}{\omega} |\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2|$$

将  $\omega$  表述式及  $\sin \varphi_1, \sin \varphi_2$  的表述式代入, 即可得

$$L_{\parallel} = \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^3 L \sqrt{gL} \times [\sqrt{m_1(m_1 + 2m_2)} - \sqrt{m_2(m_2 + 2m_1)}]$$

**例 2** 两个质量为  $m$  的小球, 用长为  $l$  的绳子连结起来, 放在一光滑的水平桌面上, 给其中一个小球以垂直于绳子方向的速度  $v_0$ , 如图 5-4-2 所示, 求此系统的运动规律和绳中的张力大小。

**解** 对整个系统来说, 在水平方向不受外力作用, 故系统在水平方向动量守恒。按质心运动规律, 有  $m v_0 = 2m v_c$

式中  $v_c$  为质心的速度, 由此得  $v_c = \frac{1}{2} v_0$

方向与  $v_0$  相同, 所以系统的质心以  $\frac{1}{2} v_0$  的速度作匀速直线运动。

由于整个系统对质心没有外力矩作用, 故系统对质心的角动量守恒, 即

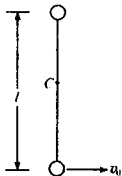


图 5-4-2

$$mv_0 \frac{l}{2} = m\omega \left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\omega \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

式中  $\omega$  为两小球对质心的角速度, 于是  $\omega = \frac{v_0}{l}$ , 即两小球绕质心作匀速圆周运动, 同时质心作匀速直线运动.

$$\text{绳中的张力 } T = m\omega^2 \left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2} m \frac{v_0^2}{l}$$

**例 3** 小滑块  $A$  位于光滑的水平桌面上, 小滑块  $B$  位于桌面上的光滑小槽中, 两滑块的质量都是  $m$ , 并用长为  $l$ 、不可伸长的、无弹性的轻绳相连, 如图 5-4-3(a) 所示. 开始时,  $A, B$  间的距离为  $\frac{l}{2}$ ,  $A, B$  间的连线与小槽垂直, 如图 5-4-3(a) 所示. 今给滑块  $A$  一冲击, 使其获得平行于槽的速度  $v_0$ , 求滑块  $B$  开始运动时的速度.

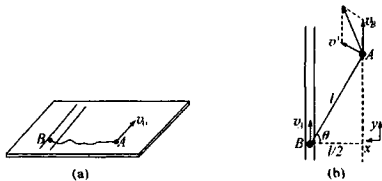


图 5-4-3

**解** 设绳拉紧的瞬间, 滑块  $A$  的速度为  $v_A$ , 滑块  $B$  的速度为  $v_B$ . 在绳拉紧时, 滑块  $A$  相对于滑块  $B$  的运动是以  $B$  为中心的圆周运动, 其相对运动速度设为  $v'$ , 与绳垂直, 如图 5-4-3(b) 所示, 因而, 此时滑块  $A$  的速度  $\vec{v}_A = \vec{v}' + \vec{v}_B$

取坐标系如图 5-4-3(b), 则有  $v_{Ax} = v'_x = v' \sin\theta$ , ①

$$v_{Ay} = v'_y + v_B = v' \cos\theta + v_B \quad ②$$

由图中的几何关系知  $\theta = 60^\circ$  ③

滑块在运动过程中, 在  $y$  方向系统不受外力, 动量守恒:

$$mv_0 = mv_{Ay} + mv_B \quad ④$$

滑块  $A$  对滑块  $B$  原所在的位置的角动量守恒:

$$mv_0 \frac{l}{2} = mv_{Ax} l \sin\theta + mv_{Ay} l \cos\theta \quad ⑤$$

联立以上五式解得

$$v_B = \frac{3}{7} v_0$$

其方向沿  $y$  轴方向.

**例 4** 如图 5-4-4 所示, 质量为  $m$  的两小球系于轻弹簧的两端, 并置于光滑水平桌

面上,当弹簧处于自然状态时,长为  $a$ ,其倔强系数为  $k$ .今两球同时受冲力作用,各获得与连线垂直的等值反向的初速度,若在以后运动过程中弹簧的最大长度  $b = 2a$ ,求两球的初速度  $v_0$ .

解 以初始时刻两球连线中点  $O$  为定点来考察体系的角动量.

$$\text{初始时, } L = mv_0 \frac{a}{2} + mv_0 \frac{a}{2} = mv_0 a$$

体系水平方向不受外力,垂直方向外力的合力为零,体系角动量守恒.当弹簧达到最大伸长时,小球无径向速度,体系的角动量

$$L' = mv \frac{b}{2} + mv \frac{b}{2} = mvb$$

因为  $L = L'$

所以  $mv_0 a = mvb$

体系机械能也守恒,由此可得另一关系式

$$\frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} k(b-a)^2$$

$$\text{即 } mv_0^2 = mv^2 + \frac{1}{2} k(b-a)^2$$

$$\text{由①,②式消去 } v, \text{ 即得 } v_0 = b \sqrt{\frac{k(b-a)}{2m(b+a)}}$$

$$\text{以 } b = 2a \text{ 代入,得 } v_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}a}$$

例5 在半顶角为  $\alpha$  的圆锥面内壁离锥顶  $h$  高处以一定初速度沿内壁水平射出质量为  $m$  的小球,设锥面内壁是光滑的.(1)为使小球在  $h$  高度的水平面上做匀速圆周运动,则初速  $v_0$  为多少?(2)若初速  $v_1 = 2v_0$ ,求小球在运动过程中的最大高度和最小高度.

解 (1)物体在重力  $mg$  和锥壁支撑力  $N$  作用下做圆周运动.因有

$$mg \cot \alpha = mv^2 / R$$

$R$  是圆周半径.以  $R = h \tan \alpha$  代入上式,得

$$v_0 = \sqrt{gh}$$

(2)当初速大于  $v_0$  时,小球不可能维持在原来水平面上做圆周运动,因为这样不满足①式.小球必上升;但又不可能停留在某一个高一些的水平面上做匀速圆周运动,这样小球必在一定的上、下高度间往返地做类似螺旋状的运动.为求这两极限高度,我们来寻找小球运动的守恒量.首先,机械能守恒,因为小球在重力场中运动,支撑力  $N$  不做功;其次,小球在做转动,如果还有守恒量,另一个守恒量必然是角动量或其分量.不



图 5-4-4

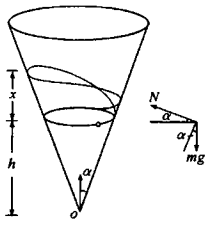


图 5-4-5 右边是小球受力图



难发现,由于外力  $N$  和  $mg$  都在过  $z$  轴的平面内,故外力矩无  $z$  方向分量,即  $\tau_z = 0$ ,因而  $l_z$  为常量.用  $h+x$  表示极限高度,注意到在极限高度上,小球速度必沿水平方向.于是可列出以下两个守恒方程:

$$\text{能量守恒: } \frac{1}{2}mv^2 + mg(h+x) = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh \quad (2)$$

$$\text{角动量分量守恒: } (h+x)\tan\alpha mv = h\tan\alpha mv_1 \quad (3)$$

由②,③式可得  $x$  的三次方程

$$2gx^3 + (4gh - v_1^2)x^2 - 2h(v_1^2 - gh)x = 0 \quad (4)$$

由④式可见,  $x=0$  必为一个解.这是合理的,因为射出速度沿水平方向,该高度必为—极值.消去  $x$  后,得  $x$  的二次方程:

$$2gx^2 + (4gh - v_1^2)x - 2h(v_1^2 - gh) = 0$$

解之得

$$x = \frac{v_1^2 - 4gh + \sqrt{(v_1^2 - 4gh)^2 + 16gh(v_1^2 - gh)}}{4g}$$

根式前不取负号是因为  $x$  不可能小于  $-h$ , 否则是不合理的.

以  $v_1 = 2v_0 = 2\sqrt{gh}$  代入,得  $x = \sqrt{3}h$

### 【精选习题】

1. 在某惯性系  $S$  中,质量分别为  $m_A, m_B$  的两个质点  $A, B$  相距  $r$ , 它们除了彼此间的万有引力不受任何其他作用力,试问  $A, B$  各自处于什么样的运动状态能使其距离不变?

2. 一根轻绳跨过具有光滑水平轴的定滑轮(质量可忽略),两个质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的人各抓住绳子的一端.开始时,两人与水平轴之间的高度差分别为  $h_1$  和  $h_2$ .他们同时开始向上爬,并同时到达该滑轮的水平轴处.试求他们爬绳所经历的时间  $t$ .

3. 两个质量均为  $60\text{kg}$  的滑冰者,在两条相距  $10\text{m}$  的平直跑道上以  $6.5\text{m/s}$  的速率沿相反方向匀速滑行.当他们之间的距离恰好等于  $10\text{m}$  时,他们分别抓住一根长  $10\text{m}$  的绳子的两端.若将滑冰者看成质点,并略去绳子的质量.(1)求他们抓住绳子前后相对绳子中点的角动量;(2)两人都用力往自己这边拉绳子,当他们之间的距离为  $5.0\text{m}$  时,各自的速率是多大?(3)求此时绳中的张力;(4)计算每个人在拉绳过程中所做的功.

4. 由火箭将一颗人造卫星送入离地面很近的轨道,进入轨道时,卫星的速度方向平行于地面,其大小为在地面附近作圆运动的速度的  $\sqrt{1.5}$  倍.试求该卫星在运行中与地球中心的最远距离.

5. (1)质量为  $m$  的人造地球卫星作半径为  $r_0$  的圆轨道飞行,地球质量为  $M$ ,试求卫星的总机械能  $E$ ;(2)若卫星运动中受到微弱的摩擦阻力  $f$ (常量),则将缓慢地沿一螺

旋形轨道接近地球. 因  $f$  很小, 轨道半径变化非常缓慢, 每周的旋转均可近似处理成半径为  $r$  的圆轨道运动, 但  $r$  将逐渐缩短. 试求在  $r$  轨道上旋转一周,  $r$  的改变量  $\Delta r$  及卫星动能  $E_k$  的改变量  $\Delta E_k$ .

6. 从地球表面以第一宇宙速度朝着与竖直方向成  $\alpha$  角的方向发射一抛射体, 忽略空气阻力和地球转动的影响, 试问抛射体能上升多高? 设地球半径为  $R$ .

7. 宇宙飞船在距火星表面  $H$  高度处作匀速圆周运动, 火星半径记为  $R$ . 今设飞船在极短的时间内向外侧点火喷气, 使飞船获得一径向朝里的分速度, 其大小为原速度的  $\alpha$  倍, 因  $\alpha$  很小, 所以飞船新轨道不会与火星表面交会. (1) 试求飞船新轨道近火星点高度  $h_1$  和远火星点高度  $h_2$ ; (2) 设飞船原来的运行速度大小为  $v_0$ , 试计算新轨道运行周期  $T$ .

8. 天狼星是天空中最明亮的恒星, 因此人们很早就已开始观察它的运动. 1844 年德国天文学家弗里德里希·贝塞尔已注意到天狼星的异常情况, 并据此预言它附近有伴星. 1862 年美国阿尔文·克拉克首次观测到这一伴星(系白矮星, 肉眼看不见). 根据以后的观测资料, 该双星系统的运动轨迹如图 5-4-6 所示. 图中粗、细实线分别表示天狼星与其伴星的运动轨迹. 虚线为质心的运动轨迹, 第一组黑点表示 1862 年的双星位置, 其余各组黑点分别表示自 1870 年起直至 1940 年每隔 10 年的双星位置. 双星的平均距离为  $d = 20.4$  天文单位, 它们与质心的距离之比约为 2:5. (1) 由图判断双星在相对做圆周运动还是椭圆运动? 运动周期是多少年? (2) 假定双星相对做距离为  $d$  的匀速圆周运动, 试估算天狼星及其伴星的质量  $M_A$  和  $M_B$  (用太阳质量  $M_s$  表示).

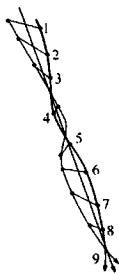


图 5-4-6

9. 质量均为  $m$  的小球 1、2 用长为  $4a$  的轻质细线相连后, 均以初速  $v$  沿着与线垂直的方向在光滑水平面上运动. 开始时线处于伸直状态. 在运动过程中, 线上距离小球 1 为  $a$  的点部位与固定在水平面上的一竖直光滑细钉接触. 设在以后的运动过程中两球不相碰, 试求小球 1 与钉的最大距离(精确到  $0.001a$ ).

10. 假定各国在发射卫星时都遵从以下规定: 卫星进入轨道后不可离开本国领土和领海对应的领空, 即卫星与地心连线和地球表面的交点必须落在自己的领土或领海上. 为下面讨论需要, 给出同步卫星的轨道半径值  $R_0 = 4.21 \times 10^4 \text{ km}$ .

(1) 一个领空范围占据北纬  $20^\circ$  至  $50^\circ$  的国家是否可能发射一颗不用动力飞行的卫星? 一个领空范围占据北纬  $15^\circ$  至南纬  $10^\circ$  的国家呢?

(2) 再讨论一个具体问题. 某国发射一颗周期  $T_0 = 1$  天的不用动力飞行的卫星, 卫星轨道平面即为赤道平面. 容易理解, 如果卫星取一椭圆轨道, 那么它相对地心的角速度就不是定值, 与地面上的参考点之间会发生相对运动. 假设这个国家仅拥有  $\theta = 2^\circ$  纬

度范围的赤道领空,发射者就必须将卫星轨道的偏心率  $e$  限制在一个很小的范围内,以保证卫星不离开本国领空.设椭圆半长轴为  $A$ ,半短轴为  $B$ ,则椭圆焦点与椭圆中心的距离为  $C = \sqrt{A^2 - B^2}$ ,椭圆偏心率便定义为  $e = \frac{C}{A}$ .

试确定偏心率  $e$  的最大可取值.(半长轴为  $A$ 、半短轴为  $B$  的椭圆,面积为  $\pi AB$ )

## 问题与讨论 宇宙中的角动量



### 【知识要点】

#### 一、行星的运动轨道

有心力作用下的二维运动与保守力作用下的一维运动不同.一维运动的特征完全由能量  $E$  (常量) 决定.如一维弹簧振子的运动满足能量守恒:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

虽然能量  $E$  只能决定速度的大小,不能确定速度的方向,但因为运动发生在一直线上,在开始时刻,运动的方向(即所沿的直线)就完全确定了.但二维运动则不同,速度的方向是可变的,  $v = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}$ ,速度的两个分量随时间而变.这时,机械能不仅分配在动能和势能之间,而且还在径向运动和横向运动之间调配.所以,对有心力作用下的二维运动,由  $E$  为常量和  $l$  为常量两个条件共同决定.这也就是说,在有心力作用下的质点运动,一方面,  $r$ 、 $v_r$ 、 $v_\theta$  应满足机械能守恒,另一方面,它们还得保证角动量守恒,即质点的运动由(5.5-1)式和(5.5-2)式共同决定:

$$mr^2\omega = l \text{ (常量)} \quad (5.5-1)$$

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\omega)^2) + U(r) = E \text{ (常量)} \quad (5.5-2)$$

其中  $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ,  $v_r = \frac{\Delta r}{\Delta t}$

这两个方程是关于  $r$ 、 $\theta$  及它们的时间联系方程,在一定的初始条件下,当  $U(r)$  为已知时,从原则上讲,通过求解这两个方程,总可求得  $r(t)$  和  $\theta(t)$ .由  $r(t)$ 、 $\theta(t)$  消去  $t$  就是轨道方程.因而质点的运动轨道完全由  $U(r)$  的具体形式及初始条件确定.

在有心力作用下的质点轨道,有有限与无限两类.所谓无限,就是轨道的矢径可以趋于无限大.而有限的轨道又可分为闭合和不闭合两大类.可以证明,只有当作用力为引力,且作用力的大小与质点至力心距离  $r$  的关系为  $kr$  或  $\frac{C}{r^2}$  (对应的  $U(r) \propto \frac{1}{2}kr^2$  或  $-\frac{C}{r}$ ) 时,轨道才可能是闭合的.质点轨道与  $U(r)$  及总能量  $E$  的关系可列表如表

## 5.5-1.

表 5.5-1

轨道 \ 能量		$E > 0$	$E = 0$	$E_{\min} < E < 0$	$E = E_{\min}$
势能					
$U(r) \sim r^2$	$F \sim -kr$	椭圆	-	-	-
$U(r) \sim \frac{-1}{r}$	$F \sim \frac{-1}{r^2}$	双曲线	抛物线	椭圆	圆
$U(r) \sim \frac{1}{r}$	$F \sim \frac{1}{r^2}$	双曲线	-	-	-

## 二、银河系为什么是扁的？

银河系为什么是扁平的？这可能角动量守恒有关。银河系最初可能是球状的，由于某种原因（例如先期与其他星系的相互作用）而具有一定的角动量。正是这个角动量的存在，使球状银河系不会在引力作用下凝聚（坍缩）成一团，而只能成具有一定半径的盘状。因为在凝聚过程中，角动量守恒要求转速增大，从而使离心力增大，它往往比引力增大得更快。从能量角度看，角动量守恒所要求的转速增大将使动能增大，虽然这时引力势能减小，但当半径小到某一值后，动能的增大将比引力势能的减小量大。但角动量守恒却并不妨碍星系沿着转轴方向的坍缩，因为对这种坍缩，角动量守恒不要求增加转速。这就是说，角动量守恒限制了星系在垂直于转轴方向的进一步坍缩，但不妨碍星系沿转轴方向的坍缩，因而星系最终坍缩成盘状（图 5-5-1）。在沿轴向坍缩过程中减少的引力势能将以辐射的形式释放掉。

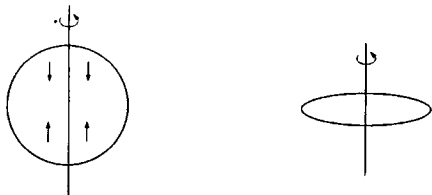


图 5-5-1 银河系在引力和离心力共同作用下坍缩成盘状

## 三、潮汐与日长的持续性增长

地球自转速率即日长并不恒定不变，而有微小（量级为毫秒）的变化。这种变化包括季节性（周期性）的变化和持续性的增长两部分，并已为精确的测量（与铯钟比较）所证

明。日长的持续性增长还与古代的日食记录及珊瑚化石的生长环数目相一致。天文学家发现 2000 年前古人所记录的日食发生的时间,要比根据日长为常数所推算的早约 3 小时。这说明地球自转速率从古代到现代在逐渐变慢,使日长平均每世纪约增长  $0.0016$  秒。如果把这一“减慢效应”应用到更长的时间跨度上,则距今 3.5 亿年以前(泥盆纪)的一年天数约达 400 天,这与泥盆纪珊瑚化石的生长环数目相符(珊瑚环一天长一环)。

日长的季节性变化可能与气流的季节性变化及两极冰山的季节性消熔有关。但如何解释日长的持续性变长?通常认为这是潮汐摩擦造成的。这可说明如下:

潮汐的主要贡献来自月球。现在我们在以地球中心为原点,并与地球一起自转的参照系上来考察月球产生的潮汐现象。在该参照系中,月球绕地球自东向西旋转,如图 5-5-2 所示(图示月球作顺时针旋转)。由于月球绕地球旋转的方向与地球自转方向基本相同,在现在的参照系内,月球绕地球运行一周的时间略大于一天。月球对海水的潮汐力使海水在向着月球和背着月球的两端隆起,此两隆起部分跟随月球一起旋转,这就是每天两次潮汐的起因,相继两次潮汐之间的时间间隔略大于 12 小时。但由于水的粘滞作用,使隆起部分的旋转运动比原来预期的要落后一段时间,结果就使海面的实际形状如图 5-5-2 中的实线所示,两隆起部分  $A, B$  的连线与地球、月球中心连线不相一致。隆起部分跟随月球的旋转运动与海水跟随地球自转的运动不相一致,这必然引起海水内部的摩擦损耗,这种摩擦损耗最终将使地球自转的能量减少,从而使地球自转速率减慢。但从角动量方面来看,似乎有些使人迷惑不解。使地球自转角动量减少的力矩来自何方?地球、月球体系的总角动量应保持不变,地球角动量的减少又如何解释?原来,正是隆起部分在旋转运动上的时间落后在这里起了重要作用。如图 5-5-2 所示,由于隆起部分  $A$  比  $B$  离月球更近,使月球对这两部分的引力大小不同,而有  $f_A > f_B$ 。而由于隆起部分在运动上的时间落后,使  $A, B$  连线与月球、地球连线不相重合,于是  $f_A$  与  $f_B$  对地球中心产生的力矩大小不等,最终有一个顺时针方向的净力矩作用在地球(包括海水)体系上。正是这一力矩使地球的自转角动量减少。与此同时,  $f_A$  与  $f_B$  的反作用力(均作用在月球上)则对月球施加一逆时针的净力矩,此力矩将使月球对地-月体系质心的角动量增大,以保持地-月体系的总角动量守恒。这一效应的实际效果是使月球与地球的距离缓慢增加。

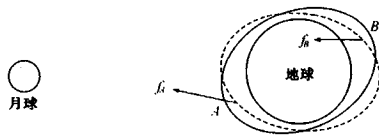


图 5-5-2 潮汐摩擦使地球自转变慢

## 【例题分析】

**例 1** 设太阳固定不动,略去太阳系中其他星体间的相互作用,那么每颗小星体的轨道或为椭圆(包括圆),或为抛物线,或为双曲线,且太阳为这三种曲线中的一个焦点,小星体在距太阳某处的总机械能  $E$  由它在该处的引力势能和动能相加而成,且  $E$  为一守恒量.已知  $E > 0, E = 0, E < 0$  中的每一种情况各对应椭圆、抛物线、双曲线中相应的一种轨道,反之一种轨道也只对应一种能量.现请分析判定具体的对应关系.

**解** 据题设,小星体只受太阳的万有引力作用,小星体运动过程中相对太阳的角动量守恒,开普勒第二定律正是这一守恒性的表现.

小星体机械能守恒,在无穷远处  $E_p = 0, E = E_k$ ,抛物线和双曲线存在无穷远的位置,故先讨论之.

这两种轨道与太阳有限距离位置处,至少有一处小星体运动速率  $v > 0$ ,于是据开普勒第二定律可知,在任意有限位置处均有  $v > 0$ ,即小星体不会在这两种轨道有限位置处停住后返回,而是要继续向远处运动,到达无穷远处.无穷远处必有  $v \geq 0, E = E_k \geq 0$ ,因此抛物线、双曲线轨道均为  $E \geq 0$ .

据题意,余下的椭圆轨道只能对应  $E < 0$ ,即得

判断 1:  $E < 0$  为椭圆轨道.

双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

在无穷远处速度  $v$  的方向(即曲线的切线方向)与渐近线  $y = \frac{b}{a}x$  方向一致,故宜先讨论之.

小星体在双曲线轨道上由太阳(在焦点  $F$  上)向其引出的矢径于单位时间扫过的面积  $\frac{\Delta S}{\Delta t}$  为恒量,此恒量可用小星体在双曲线顶点  $D(a, 0)$  处的参量来表述.如图 5-5-3 所示,有  $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} v_D(c-a)$

所示,有  $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} v_D(c-a)$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

这种表述与小星体实际上是否经过  $D$  点无关,它是数学上的等效表述.在其他位置,  $\Delta t$  时间内行星经过位移量  $v \Delta t$ ,矢径扫过的面积  $\Delta S$  为图中用平行斜线画出的三角形面积.星体趋向无穷远时,  $v \Delta t$  逼近渐近线,三角形的  $r_{\infty} \Delta t$  底边上高即为焦点  $F(c, 0)$  到渐近线的距离  $h = \overline{FG}$ .因两个直角三角形  $OED$  与  $OFG$  全等,故

$$h = FG = \overline{DE} = b$$

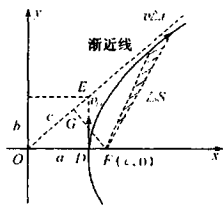


图 5-5-3

无穷远处矢径在  $\Delta t$  时间内扫过的面积为

$$\Delta S = \frac{1}{2} (v_{\infty} \Delta t) h = \frac{1}{2} v_{\infty} b \Delta t$$

即有 
$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} v_{\infty} b$$

与  $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} v_D (c - a)$  联立, 即得  $v_{\infty} = \frac{c - a}{b} v_D = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b} v_D > 0$

因此  $E = E_k(\infty) > 0$

由此得判断 2:  $E > 0$  为双曲线轨道.

据题意, 最后得判断 3:  $E = 0$  为抛物线轨道.

**例 2** 试求由地球向火星发射人造天体的发射速度.

**解** 设地球轨道半径为  $r_e$ , 火星轨道半径  $r_m$ , 则飞船运动的双切椭圆轨道的半长轴  $a$  是  $r_e$  与  $r_m$  的平均值  $a = \frac{1}{2}(r_e + r_m)$

根据(5.5-16)式, 飞船沿椭圆轨道飞行的总能量  $E$  应为

$$E = -\frac{C}{2a} = -\frac{C}{r_e + r_m}$$

式中  $C = GM_e m$ , 其中  $M_e$  为太阳质量,  $m$  为飞船质量,  $G$  为引力常数. 注意, 这里的  $E$  是指飞船在摆脱地球的引力束缚后的总能量. 把此时飞船与太阳的距离仍看成  $r_e$ , 则飞船此时的动能  $E_k$  为

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = E - U = -\frac{C}{r_e + r_m} + \frac{C}{r_e} = C \left( \frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_e + r_m} \right) \quad (1)$$

由此解得飞船此时的速度  $v$  为  $v = \sqrt{2GM_e \left( \frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_e + r_m} \right)}$  (2)

此速度是飞船在摆脱地球引力束缚后相对太阳的速度, 而题目要求的发射速度, 是指飞船刚完成发射而未摆脱地球引力束缚前相对地球的速度. 为求此速度, 仿照求第三宇宙速度的方法, 可在飞船与地球的质心系(实质上即地球参照系)中进行计算. 在地球参照系中, 飞船摆脱地球引力束缚后的速度  $u$  为

$$u = v - V = \sqrt{2GM_e \left( \frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_e + r_m} \right)} - V \quad (3)$$

其中  $V$  为地球轨道速度, 其值为  $V = \sqrt{GM_e/r_e} = 29.8 \text{ km/s}$ . 设题目所求的飞船相对地球的发射速率为  $v'$ , 则由能量守恒有

$$\frac{1}{2} mv'^2 - \frac{GM_e m}{R} = \frac{1}{2} mu^2 \quad (4)$$

其中  $M_e$ ,  $R$  分别为地球的质量与半径. 于是

$$\frac{1}{2} mv'^2 = \frac{1}{2} mu^2 + \frac{GM_e m}{R}$$

$$v'^2 = u^2 + \frac{2GM_e}{R} = u^2 + v_2^2 \quad (5)$$

其中  $v_2 = \sqrt{2GM_e/R} = 11.2 \text{ km/s}$  即第二宇宙速度. 以火星轨道半径  $r_m = 2.28 \times 10^8 = 1.524r_e$  及有关数据代入②, 得

$$v = \sqrt{\frac{2GM_e}{r_e} \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{r_m}{r_e}} \right)} = \sqrt{\frac{GM_e}{r_e}} \sqrt{2 \left( 1 - \frac{1}{1 + 1.524} \right)}$$

$$= 29.8 \sqrt{2 \left( 1 - \frac{1}{2.524} \right)} = 32.7 (\text{km/s})$$

代入③式, 得

$$u = v - V = 32.7 - 29.8 = 2.9 (\text{km/s})$$

代入⑤式, 得所求发射速度

$$v' = \sqrt{2.9^2 + 11.2^2} = 11.6 (\text{km/s})$$



### 【巩固习题】

1. 两艘相同的宇宙飞船分别用随飞船携带的火箭发动机从环绕地球运转的空间站发射出来, 飞船 A 恰好能逃离太阳系, 飞船 B 恰好能落向太阳的中心. 若火箭工作时间相同, 试证飞船 B 比飞船 A 需要有更大功率的火箭. 假设地球围绕太阳运动的轨道为圆形, 忽略空间站与地球的相对速度, 忽略火箭喷发的燃料质量.

2. 发射一宇宙飞船去考察一质量为  $M$ 、半径为  $R$  的行星. 当飞船静止于空间离行星中心  $S$  处时, 以速度  $v_0$  发射一包仪器, 如图 5-5-4 所示. 仪器包的质量  $m$  远小于飞船的质量, 要使这仪器包恰好掠行星表面着陆,  $\theta$  角应是多少?

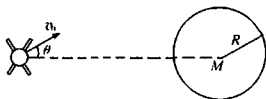


图 5-5-4

3. 一质量为  $m$  的空间站沿半径为  $R$  的圆周绕月球运动. 为使空间站能在月球上登陆, 当空间站运行至轨道上  $P$  点时向前发射一质量为  $m_1$  的物体, 来改变空间站的运行速度, 从而使其沿图 5-5-5 的新轨道运动, 并在月球表面着陆. 已知月球的半径为  $R_m$ , 月球的质量为  $M_m$ , 试求  $m_1$  的发射速度  $v_1$  (相对月球参照系).

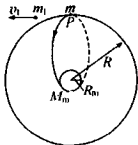


图 5-5-5

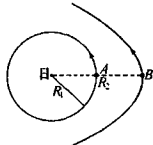


图 5-5-6

4. 太阳系中小星体 A 作半径为  $R_1$  的圆运动, 小星体 B 作抛物线运动, B 在近日点



与太阳相距  $R_2 = 2R_1$ , 且两轨道在同一平面上, 运动方向相同. 设  $B$  运动到近日点时,  $A$  恰好运动到图 5-5-6 所示位置.  $A, B$  随即发生某种强烈的相互作用而迅速合为一个新的星体, 其间质量损失可忽略. 试证新星体绕太阳的运动轨道为椭圆.

## 第六章 振动和波

## 第一节 简谐运动



## 【知识要点】

## 1. 简谐运动的定义

物体在与位移大小成正比,并且总是指向平衡位置的力的作用下的振动,叫简谐运动。

简谐运动的上述受力特征,可以表示为

$$F = -kx$$

上式中  $F$  为简谐运动物体所受到的回复力,  $x$  为运动物体相对于其平衡位置的位移,  $k$  为  $F$  与  $x$  间的比例系数(例如振动物体为弹簧振子时,  $k$  为该弹簧的劲度系数),负号表示回复力的方向与位移的方向相反。

## 2. 简谐运动的方程

理论证明,满足  $F = -kx$  的振动物体的位移  $x$  随时间  $t$  的变化规律是一余弦函数(当然也可以表述为正弦函数),这就是简谐运动的方程

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{①}$$

上式中  $A$  为此振动的振幅,即振动物体离开平衡位置最大位移的大小,  $\omega$  叫此振动的角频率(也称为圆频率),它与此振动的周期  $T$ 、频率  $\nu$  有如下的关系

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

( $\omega t + \varphi$ ) 叫此振动的位相,  $\varphi$  叫此振动的初位相。

简谐运动的周期是由振动系统本身的物理条件来决定的,其关系式为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

上式中  $m$  为振动物体的质量,故此周期又称为此物体的固有周期(对应地也有其固有频率)。

## 3. 简谐运动的几何表述

如图 6-1-1, 设有一质点沿一半径为  $A$  的圆周以角速度  $\omega$  作匀速圆周运动, 图中的  $x$  轴过此圆心  $O$  且与此圆在同一平面内, 现将运动中各时刻质点的位置均投影到  $x$  轴上, 显然这一投影点将在  $x$  轴上以  $O$  点为平衡位置而左右振动. 设时刻  $t=0$  时, 质点所在的位置对应的圆半径与  $x$  轴夹角为  $\varphi$ , 则在时刻  $t=t$  时, 质点相对于圆心已转过的角度为  $\omega t$ , 由图可见, 此刻质点在  $x$  轴上的投影点的坐标(这一坐标也可以理解为它相对于坐标原点  $O$  的位移)为

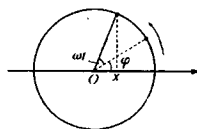


图 6-1-1

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

上式表明, 上述的投影点在  $x$  轴上的运动也是一简谐运动, 由此我们得到一个很有用的结论: 匀速圆周运动的投影为一简谐运动. 这样, 我们可以把任何一个简谐运动都看成是一个对应的匀速圆周运动的投影. 进而便可根据匀速圆周运动的运动学规律来确定简谐运动的对应规律.

由上述, 对于一个振幅为  $A$ , 角频率为  $\omega$ , 初位相为  $\varphi$  的简谐运动, 我们可以用图 6-1-2 所示的做匀速圆周运动的质点  $M$  (其圆轨道半径为  $A$ , 角速度为  $\omega$ , 初位置与  $x$  轴所夹的圆心角为  $\varphi$ ) 在  $x$  轴上的投影来表示, 即任何时刻  $M$  点的速度和加速度在  $x$  轴上的投影就是该时刻振动质点的速度和加速度. 由图可见, 在时刻  $t$  时, 振子的速度  $v$  为  $M$  的速度  $v_M$  ( $v_M = \omega A$ ) 在  $x$  轴上的投影, 为

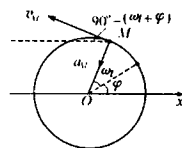


图 6-1-2

$$v = -v_M \sin(\omega t + \varphi) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

振子的加速度  $a$  为  $M$  的加速度  $a_M$  ( $a_M = \omega^2 A$ ) 在  $x$  轴上的投影, 为

$$a = -a_M \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

上两式中, 负号表示该投影的方向与  $x$  轴的正方向相反.

由于  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ , 故上述加速度的表达式也可以写为  $a = -\omega^2 x$ . 根据①, ②, ③式, 可以作出简谐运动物体的位移—时间图像、速度—时间图像和加速度—时间图像, 这些图像均是一条余弦(或正弦)图线.

## 4. 简谐运动的判据

物体的受力或运动, 满足下列三条件之一者, 其运动即为简谐运动:

- (1) 物体运动中受的回复力满足  $F = -kx$ ;
- (2) 物体运动的加速度满足  $a = -\omega^2 x$ ;
- (3) 物体运动的方程可写为  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ .

事实上, 上述的三条并不是互相独立的. 其中条件(1)是基本的, 由它可以导出另外两个条件(2)和(3).

## 【例题分析】

**例 1** 北京和南京的重力加速度分别为  $g_1 = 9.801 \text{ m/s}^2$  和  $g_2 = 9.795 \text{ m/s}^2$ , 把在北京走时准确的摆钟拿到南京, 它是快了还是慢了? 一昼夜差多少秒? 怎样调整?

**解** (1) 因为南京的重力加速度  $g_2$  小于北京的重力加速度  $g_1$ , 所以将摆钟拿到南京后, 摆的周期  $T$  将变大, 即  $T_2 > T_1$ , 在一昼夜中摆动的次数  $N$  就变少了, 即  $N_2 < N_1$ , 所以钟就变慢。

(2) 设钟在北京时钟摆每昼夜摆动  $N_1$  次,

$$N_1 = \frac{24 \times 3600}{T_1} = \frac{86400 \sqrt{g_1}}{2\pi \sqrt{l}}$$

同样 
$$N_2 = \frac{24 \times 3600}{T_2} = \frac{86400 \sqrt{g_2}}{2\pi \sqrt{l}}$$

$$\frac{N_1 - N_2}{N_1} = \frac{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}}{\sqrt{g_1}} = 1 - \sqrt{\frac{9.795}{9.801}} = 0.000306$$

因此一昼夜慢

$$\Delta t = 24 \times 3600 \times 0.000306 = 26.4 (\text{s})$$

(3) 因为

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g_1}}, T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g_2}}$$

又要求

$$T_1 = T_2$$

所以

$$l_2 : l_1 = g_2 : g_1 = 9.795 : 9.801 = 0.9994$$

因此将摆钟从北京搬到南京使用, 只要钟摆缩短到原长的 0.9994 倍即可。

**例 2** 在光滑水平面上放一个弹簧振子, 弹簧劲度系数为  $k = 60 \text{ N/m}$ , 振子质量的  $M = 590 \text{ g}$ , 如图 6-1-3 所示, 当振子静止于平衡状态时, 有一颗质量为  $m = 10 \text{ g}$  的子弹以  $50 \text{ m/s}$  的速度水平射入木块, 使木块开始振动, 试做出木块的振动图。

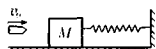


图 6-1-3

**分析** 可将此题的物理过程分成两个阶段: 第一阶段是子弹与木块发生非弹性碰撞过程, 因为这一过程很短, 所以可以忽略在此过程中弹簧发生的形变; 第二阶段是由子弹和木块共同构成的振子在弹簧的驱动下做简谐运动。

**解** (1) 因为第一阶段弹簧的作用力可忽略, 所以由子弹与木块构成的系统动量守恒

$$mv_0 = (m + M)v$$

$$v = \frac{m}{m + M} v_0 = \frac{0.01}{0.01 + 0.59} \times 150 = 2.5 (\text{m/s})$$

(2) 振子在振动过程中保持机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$A = \sqrt{\frac{(m+M)v^2}{k}} = \sqrt{\frac{0.6 \times 2.5^2}{60}} = 0.25(\text{m})$$

$$\text{周期 } T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{0.6}{60}} = 0.628(\text{s})$$

木塊振動如圖 6-1-4 所示。

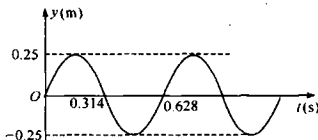


圖 6-1-4

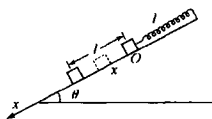


圖 6-1-5

**例 3** 如圖 6-1-5 所示, 在傾角為  $\theta$  的光滑斜面上放置一質量為  $m$  的重物. 重物與一輕彈簧相連, 彈簧的另一端固定在斜面上, 彈簧的勁度係數為  $k$ . 將重物從其平衡位置  $O$  點沿斜面拉長距離  $l$ , 然後靜止釋放. (1) 試證明釋放以後, 重物做簡諧振動; (2) 寫出周期及釋放時刻為零時刻的振動方程.

**分析** 物體在振動過程中沿斜面方向受到重力的下滑分力和彈簧彈力的作用. 若以平衡位置為坐標原點建立  $x$  坐標軸, 則只要分析出重物在任何位置  $x$  所受的合力都滿足方程  $F = -kx$ , 就證明了其運動是簡諧振動. 同時由  $k$  可求出  $\omega$  和  $T$ , 並可分別寫出它們的方程.

**解** (1) 沿斜面向下建立  $x$  軸, 如圖所示,  $O$  點為坐標原點. 設靜止時, 彈簧伸長  $l_0$ , 則在  $O$  點由力的平衡條件有  $mg\sin\theta = kl_0$  ①

設某時刻, 重物在坐標為  $x$  的位置上, 所受合力為

$$F = mg\sin\theta - k(x + l_0) \quad ②$$

聯立①、②兩式, 有  $F = -kx$

這就證明了重物是以平衡位置  $O$  為中心, 沿斜面做簡諧振動, 且  $k$  就是彈簧的勁度係數.

(2) 由公式  $a = -\frac{k}{m}x = -\omega^2x$ , 可得角頻率  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 周期  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ . 設振動方程為

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \quad v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

當  $t = 0$  時,  $x = l, v = 0$ . 則

$$l = A \cos \varphi, 0 = -A \omega \sin \varphi$$

此时必有  $\varphi = 0, A = l$ . 所以释放时刻为零时刻的振动方程为  $x = l \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$

**例 4** 假设沿地球直径开凿一“隧道”，并将地球视作一密度  $\rho = 5.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  的均匀球体. 试判断物体在此“隧道”中做什么运动以及物体由地表落至地心的时间.

**分析** 物体在“隧道”中仅受万有引力作用，因引力始终指向地心，且离地心越近引力越小，在地心处时，引力为零，所以物体肯定是在“隧道”中做往复运动，且中心位置就在地心处. 现在的问题就是设法证明物体的运动是否满足  $F = -kx$  这一方程.

**解** 以地心为坐标原点，沿“隧道”建立  $x$  轴. 设某时刻物体在坐标的  $x$  处，由万有引力定律可得此物体所受的力  $F = G \frac{mM'}{x^2}$ .

其中， $M'$  是以  $|x|$  为半径的地球球体质量，其大小  $M' = \frac{4}{3} \pi |x|^3 \rho$ . 由引力的性质及坐标的关系可知，当  $x > 0$  时，有  $F < 0$ ；当  $x < 0$  时，有  $F > 0$ . 所以

$$F = -\frac{4}{3} G m \pi \rho x = -kx$$

由此可得物体的运动是以地心为平衡位置的简谐振动，且  $k = \frac{4}{3} G m \pi \rho$

由于周期  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{4G\pi\rho}}$ ，由地表落至地心的时间正好为  $\frac{1}{4} T$ ，所以

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{4G\pi\rho}} = 1267(\text{s})$$

**例 5** 如图 6-1-6 所示，质量为  $m$  的匀质细棒置于两只相同的水平转动的圆柱上，两圆柱转动的速率相等，但方向相反. 设圆柱与棒的摩擦因数为  $\mu$ . 开始时，棒的重心在右边圆柱上，两圆柱中心相距为  $a$ . 试证明棒的运动为简谐振动，并求出运动方程.

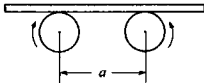


图 6-1-6

**分析** 棒在运动过程中，左边圆柱对它的摩擦力向右，右边圆柱对它的摩擦力向左. 由力矩平衡条件可知，当重心在两圆柱中点时，棒对两圆柱的压力相等，所以棒受到两圆柱的摩擦力的大小相等，方向相反，其合力为零. 棒由右圆柱开始运动时，在重心位于两圆柱中点之前，棒向左做加速运动；重心位于两圆柱中点之后，棒向左做减速运动. 当重心在左边圆柱上时，由对称性可知速度为零，然后棒向右运动. 所以，棒应做往复运动，平衡位置在两圆柱的中点.

**解** 建立水平坐标轴  $Ox$ ，向右为正，取两圆柱之间的中点为原点. 某时刻，棒重心的坐标为  $x$ ，如图 6-1-7 所示. 设棒此时受左右圆柱的弹力为  $N_1$  和  $N_2$ . 根据平衡条件有

$$N_1 + N_2 = mg$$

$$N_1 a = mg \left( \frac{a}{2} - x \right)$$

棒在水平方向上所受的合力  $F = \mu N_1 - \mu N_2$

$$\text{联立①, ②, ③式可解出 } F = -2\mu mg \frac{x}{a} = -kx$$

这就证明了棒的运动是简谐振动. 其中比例系数  $k = \frac{2\mu mg}{a}$ , 圆频率  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2\mu g}{a}}$ , 振幅  $A = \frac{a}{2}$ . 由于运动由正极大位置开始, 所以运动方程为

$$x = \frac{a}{2} \cos \sqrt{\frac{2\mu g}{a}} t$$

### 【巩固习题】

1. 一质量为  $m$  的质点固定在长为  $2l$  的细弦  $AB$  的中点上, 细弦水平张紧, 其张力为  $G$ , 如图 6-1-8, 若忽略弦的质量, 求质点  $m$  在其平衡位置附近作微小振动的频率. 设张力  $G$  比质点的重量大得多.

2. 一物体作简谐运动, 当位移为  $x_1$  时, 速度大小为  $v_1$ , 位移为  $x_2$  时, 速度大小为  $v_2$ , 那么这物体的振动周期  $T$  等于多少?

3. 如图 6-1-9 所示, 用两根长度均为  $l$  的轻杆把质量为  $m$  的小球悬挂在水平杆  $AB$  上, 可以前后摆动, 两杆间夹角为  $\theta$ . 当把  $AB$  稍稍向上转过  $\alpha$  角度, 这个摆的周期多大?

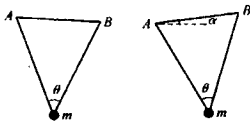


图 6-1-9

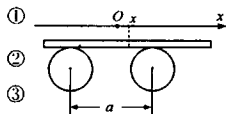


图 6-1-7

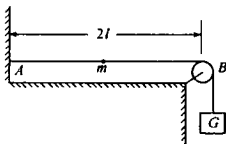


图 6-1-8

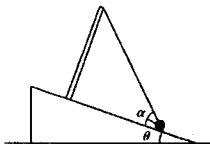


图 6-1-10

4. 如图 6-1-10 所示, 一个摆长  $l$  的单摆置于倾角  $\theta$  的光滑斜面上, 悬点在垂直斜面的直杆上, 且悬线与斜面的夹角为  $\alpha$ , 求单摆沿斜面作简谐运动时的周期.

5. 有一轻质刚性杆, 长为  $L$ , 可绕上端的水平轴自由转动, 下端固结着质量为  $m$  的质点, 构成单摆, 如图 6-1-11 所示. 质点通过一根劲度系数为  $k$  的水平弹簧拴到墙上. 当摆竖直下垂时, 弹簧处于松弛状态. 求此系统小幅度振动的周期.

6. 密度为  $\rho$  的液体, 注入弯折的玻璃管中, 液面总长为  $l$ , 若略略将液体的平衡加

以破坏,管中液面开始上下振动,见图6-1-12,在不计毛细现象及摩擦力的条件下,液体作微振动的周期为多少?

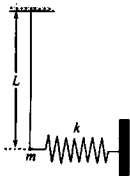


图 6-1-11

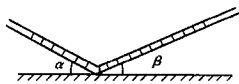


图 6-1-12

7. 如图6-1-13所示,光滑水平面上劲度系数为  $k$  的弹簧右端系质量为  $m_1$  的物体,用外力使  $m_1$  从平衡位置  $O$  左移  $s_0$ . 紧贴  $m_1$  再放质量为  $m_2$  的物体 ( $m_1 = m_2 = m$ ), 然后撤去外力,物体将开始右滑,问:(1)在何处两物分离? 此时  $m_2$  速率为多大? (2)  $m_2$  以后与  $B$  发生弹性碰撞,  $x$  应满足什么条件,才能使  $m_2$  在返回时恰好在  $O$  点与  $m_1$  相碰(两物可看作质点)?

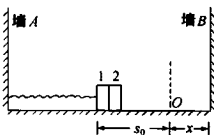


图 6-1-13

## 第二节 振动能量



### 【知识要点】

#### 1. 简谐运动的能量

以弹簧振子为例,在振动中的任何一时刻  $t$  时,振子具有动能  $E_k$ , 弹簧具有弹性势能  $E_p$ . 此两者的值分别为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

由于  $k = m\omega^2$ , 故上式又可写为

$$E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

可见这一振动系统的动能和势能都随时间作周期性变化,但系统总的机械能



$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

保持不变.这一总机械能与振幅的平方成正比,与角频率的平方成正比.这也是简谐运动的一般规律.

简谐运动能量的表述式还为我们提供了求振子频率的另一种方法,这种方法不涉及振子所受的力,因此在力不易求得时较为方便.若将势能  $E_p$  写成位移  $x$  的函数,则

$$\text{由前述势能的表述式可得到 } \omega = \sqrt{\frac{2E_p}{mx^2}}$$

$$\text{或将总能量写成振幅的函数,则由前述总能量的表述式可以得到 } \omega = \sqrt{\frac{2E}{mA^2}}$$

## 2. 阻尼振动、受迫振动和共振

由于振动不可避免地要受到摩擦和其他阻力的作用,振动系统要克服阻力做功,系统能量将逐渐减少,振动的振幅也随之减小.这种振幅随时间逐渐减小的振动叫阻尼振动.

系统在周期性的外力驱动下所发生的振动叫受迫振动.受迫振动的周期等于驱动力的周期,它与振子的固有周期有关.

当驱动力的周期跟振动系统自由振动的周期(在不计阻尼时为其固有周期)相等时,受迫振动的振幅最大,这种现象叫共振.

### 【例题分析】

**例 1** 两个质量均为  $m$  的小木块  $A$  和  $B$ ,用一根劲度系数为  $k$  的轻弹簧相连,靠墙置于光滑的水平地面上,如

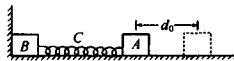


图 6-2-1

图 6-2-1 所示.若先让木块  $A$  向左将弹簧压缩  $d_0$  后释放.(1)试论述木块  $B$  离墙后两木块相对于它们的中心  $C$  点做何种运动;(2)求出反映此运动特征的主要物理量;(3)求当弹簧被再次压缩到最短时,木块  $A$  前进的距离.

**解** (1)释放  $A$  后,弹簧在伸长过程中,将弹性势能转化为  $A$  的动能,当弹簧伸长到原长时,  $B$  开始离墙.设此时  $A$  的速度为  $v_0$ .根据机械能守恒定律,有

$$\frac{1}{2} kd_0^2 = \frac{1}{2} mv_0^2$$

$$\text{解得 } v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} d_0 \quad (1)$$

当  $B$  离墙后,两木块和弹簧组成的系统所受的合外力为零,其质心  $C$  的运动由质心运动定理可知,是以某速度  $v$  向右做匀速直线运动.此速度  $v$  可由系统动量守恒定律求得,即  $mv_0 = 2mv$  (2)

由①、②可得  $v = \frac{d_0}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$ . 当弹簧每次被压缩到最短和拉长到最长时,  $A, B$  均有此相同的速度  $v$ .

由此可知,  $A, B$  的运动一方面是随着中心  $C$  做匀速运动, 另一方面是相对于中心  $C$  以半段弹簧构成的弹簧振子做简谐振动(因为  $A, B$  在水平方向都只受弹簧的弹力作用). 在  $B$  刚离开墙时, 相对于  $C$  来讲,  $A$  正处于平衡位置, 以  $\frac{v_0}{2}$  的速度向右运动. 同时  $B$  也处于平衡位置, 以  $\frac{v_0}{2}$  的速度向左运动. 故  $A, B$  相对于中心  $C$  的运动是同频率、同振幅的简谐振动.

(2) 设弹簧被拉至最长时, 即相对于  $C$  做简谐振动到极端位置时, 其伸长为  $x_0$ . 根据机械能守恒定律, 有  $\frac{1}{2} \cdot 2mv^2 + \frac{1}{2} kx_0^2 = \frac{1}{2} kd_0^2$  ③

由②、③两式可解出  $x_0 = \frac{d_0}{\sqrt{2}}$ . 所以, 其振幅  $A = \frac{x_0}{2} = \frac{\sqrt{2}d_0}{4}$ .

振动周期相当于半段弹簧构成的振子的振动周期. 设半段弹簧的劲度系数为  $k'$ , 整段弹簧可视为两个半段弹簧的串联, 有  $\frac{1}{k} = \frac{1}{k'} + \frac{1}{k'}$ , 所以  $k' = 2k$ . 由此可得

$$\text{周期} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k'}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

$$\text{角频率} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

(3) 当  $A$  再次压缩弹簧到最短时, 它相对于中心  $C$  运动的时间为  $\frac{3}{4}T$ , 做简谐振动到达最左端位置. 向右移动的距离为中心  $C$  匀速向右前进的位移和  $A$  做相对于  $C$  的简谐振动向左移动的位移(振幅)的叠加, 所以  $s = v \cdot \frac{3}{4}T - A = (3\pi - 2) \frac{\sqrt{2}}{8} d$

### 【巩固习题】

1. 如图 6-2-2 所示, 一个半径为  $R$  的凹槽, 该槽是圆柱体侧表面的一部分,  $MN, PQ$  为圆柱表面的母线, 在其一端的最低处有一小孔  $B$ . 现让一小球(球的半径小于  $B$  孔的半径)从槽另一端的边缘点  $M$  处, 以初速度  $v_0$  开始沿平行于  $MN$  的方向运动, 若凹槽的弧长  $\widehat{MP}$  远短于圆弧半径  $R$ ,  $MN = PQ = L$ , 不计摩擦, 要使小球运动到槽的另一端, 恰能落入  $B$  孔中, 则小球的初速度  $v_0$  是多少?

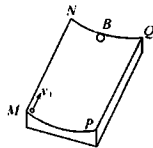


图 6-2-2

2. 如图 6-2-3 所示, 在光滑水平面上有一个水平放置的轻质弹簧, 劲度系数  $k =$

160N/m, 弹簧的一端固定在墙上, 另一端连接着一个质量为  $m_1 = 0.3\text{kg}$  的物体. 有一个质量  $m_2 = 0.1\text{kg}$  的小球从高为  $h = 20\text{cm}$  的斜面上无摩擦滑下, 与  $m_1$  发生正碰后两物体连在一起, 并压缩弹簧, 在水平面上振动起来. 求: (1) 弹簧的最大弹性势能; (2) 振动的周期 ( $g$  取  $10\text{m/s}^2$ ).



图 6-2-3

3. 将一质量  $m = 2000\text{kg}$  的重物, 系在钢丝绳上以匀速  $v_0 = 5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  下降, 若由于卷扬机发生故障, 致使钢丝绳上端突然轧住, 此时钢丝绳相当于劲度系数  $k = 3.92 \times 10^6\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$  的弹簧, 求因重物的振动而引起钢丝绳内的最大张力.

4. 两个相同的小球用长度一样的细线挂在同一个钩子上. 其中一个小球向左偏转一个小角度  $\alpha$ , 而另一个小球 (同一平面内) 向右偏转  $\frac{1}{2}\alpha$ . 两球同时释放, 经过时间  $\tau$  后发生弹性对心碰撞. 问碰撞后经过多少时间, 挂第二个球的线要偏转  $\frac{1}{2}\alpha$  角度?

5. 如图 6-2-4 所示, 用三根竖直的, 长度相同且不可伸长的细轻绳将一个细圆环水平悬挂, 环上拴绳点彼此距离相等. 现借助一些重量不计的福条, 将一与环等质量的重物固定于环心处, 试求环的微小扭转振动周期的变化.

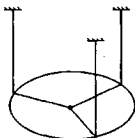


图 6-2-4

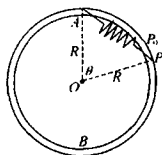


图 6-2-5

6. 如图 6-2-5 所示, 质量为  $m = 1\text{kg}$  的金属小球穿在半径为  $R = 0.5\text{m}$  的光滑金属竖直圈上, 它的位置可用  $\theta$  表示.  $\theta$  的初始值即  $\angle AOP_0 = 60^\circ$ , 此时弹簧处于松弛状态. 设弹簧的劲度系数  $k = 50\text{N/m}$ . 此后, 小球向下滑动. (1) 证明小球可以达到圆的最低点  $B$ ; (2)  $B$  点是否稳定平衡位置? (3) 假设  $B$  点原来就有一个静止的光滑小球, 它与下滑的小球发生弹性碰撞, 已知两球质量相等. 求两球碰后所能达到的最大高度.

### 第三节 机械波



#### 【知识要点】

#### 1. 机械波

机械振动在弹性介质中的传播形成机械波。

波传播的是振动这一运动形式,即前一质点发生了振动,由于质点间弹性力的作用,后一质点也会“跟着”发生振动.这样,后一质点的振动比前一质点的振动总要“落后”一些.

波在传播振动这种运动形式的同时,也将波源的能量传出去,因此,波也是能量传递的一种形式.

波在传播过程中,其波速  $v$ 、频率  $\nu$  和波长  $\lambda$  间的关系为  $v = \lambda\nu$

## 2. 平面简谐波的方程

设坐标原点的简谐运动为  $y(0, t) = A \cos \omega t$

对于振幅无衰减的简谐波,若其传播方向与  $+x$  方向一致,则其方程为

$$y(x, t) = A \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

若其传播方向与  $-x$  方向一致,则其方程为

$$y(x, t) = A \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x \right) = A \cos \omega \left( t + \frac{x}{v} \right)$$

式中  $\frac{2\pi}{\lambda}$  是波沿传播方向推进单位长度距离时引起的相位落后值.

对于球面波,其振幅随传播的距离而衰减,设离波源距离为  $r_1$  处的振幅为  $A_1$ ,离波源相距为  $r_2$  处的振幅为  $A_2$ ,则有  $A_1 r_1 = A_2 r_2$   
即振幅与传播的距离成反比.

球面简谐波的方程为  $y(r, t) = \frac{A}{r} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right)$

式中  $A$  是与波源的距离为一单位长度处的振幅.

## 3. 平面简谐波的图像

以  $y$  轴表示所有质点的位移,  $x$  轴表示各质点的平衡位置,波的传播方向沿  $x$  轴.在某一时刻  $t$ ,由波动方程作出的  $y-x$  关系的余弦曲线就是该时刻的波动图像,它表示介质中各质点的位移分布.对于横波,其波动图像就是这一时刻的波形曲线.

## 4. 波的干涉

频率相同、振动方向一致、有固定相位差的两个波源称为相干波源,它们发出的波在其相遇区域会出现波的干涉现象.

两列相干波到达同一点时,引起的两个振动互相叠加.

当此两振动之间的相位差  $\Delta\varphi$  满足  $\Delta\varphi = 2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) 时,合振动振幅最大,称为干涉极大;当  $\Delta\varphi$  满足  $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$  时,合振动振幅最小,称为干涉极小.  $\Delta\varphi$  不仅与两波源的相位差有关,还与两波传播的距离差有关,设两波传播的距离差为  $(r_2 - r_1)$ ,且两波源的相位相同,则相应的相位差为  $\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$ ,其中  $\lambda$  是波在介质中的波长.由此,

上述产生干涉极大和干涉极小的条件也可以写为:当  $r_2 - r_1 = k\lambda$  时有干涉极大;当  $r_2 - r_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$  时,有干涉极小.

以上两式表明:当某一点距两同相位波源的波程差等于零或者是波长的整数倍时,该点振动的合振幅最大,即其振动总是加强的;当某一点距两同相位波源的波程差等于半波长或者是半波长的奇数倍时,该点振动的合振幅最小,即其振动总是减弱的.

## 5. 声波

### (1) 声波

声波是声源的振动在介质中的传播. 声波是纵波. 声波的传播速度除跟介质有关外,还跟环境温度有关.

### (2) 声波的反射、干涉和衍射

声波遇到障碍物时会改变原来的传播方向,并返回到介质中传播的现象称为声波的反射.

声波发生干涉时,会在一些区域听到较强的声音,而在另一些区域听到较弱的声音.

声波在空气中传播时,波长约在  $0.17 \sim 17\text{m}$  之间,很容易绕过障碍物进行传播,所以人们很容易观察到声波的衍射现象.

### (3) 声音的共鸣

声音的共鸣即声音的共振现象. 当声波在某介质中传播时,若声波频率与此介质的固有频率相等,就会产生共鸣现象.

### (4) 超声波和次声波

通常人耳能听到的声音频率在  $20 \sim 20000\text{Hz}$  之间. 超过  $20000\text{Hz}$  的声波,称为超声波;低于  $20\text{Hz}$  的声波,称为次声波. 超声波波长短,直进性好;次声波波长长,能量大.

### (5) 乐音和噪音

悦耳动听的声音叫乐音,它是由做周期性振动的声源发出的. 嘈杂刺耳的声音叫噪声,它是由做非周期性振动的声源发出的.

### (6) 乐音的三要素

音调、响度和音色称为乐音的三要素.

**音调** 乐音由一些不同频率的简谐波组成,频率最低的简谐波称为基音. 音调由基音频率的高低决定,基音频率高的乐音音调高.

**响度** 响度是声音强弱的主观描述,跟人的感觉和声强(单位时间内通过垂直于声波传播方向上的单位面积的能量)有关.

**音色** 音色反映出不同声源发出的声音具有不同的特色,音色由声音的强弱和频率决定.

## 【例題分析】

例 1 如图 6-3-1 所示,甲、乙分别表示一列横波上相距 3m 的两个质点 A 和 B 的振动图像.求(1)波通过 A、B 两点的时间及波速;(2)若 A、B 之间有一点 P,距 B 为 1m,波长  $\lambda$  满足  $3\text{m} < \lambda < 13\text{m}$ ,则从  $t=0$  开始,经过 1s 时间后 P 点通过的路程是多少?

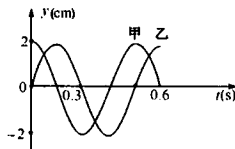


图 6-3-1

分析 由图可知,此波为简谐波.周期、振幅可由图上直接读出.根据 A、B 两点的距离及两点振动的情况,可求出波长,继而求出波速和传播时间.再利用 P 点的振动方程(可根据 B 点或 A 点的振动方程以及波动方程写出),即可求出经过 1s 后 P 点通过的路程.

解 (1)当  $t=0$  时,由图可知,A 在波峰,B 在平衡位置且向上运动.所以,若波由 A $\rightarrow$ B 传播,则  $s = \overline{AB} = \left(n + \frac{1}{4}\right)\lambda_1 = 3\text{m}$

$$\text{若波由 } B \rightarrow A \text{ 传播,则 } s = \overline{AB} = \left(n + \frac{3}{4}\right)\lambda_2 = 3\text{m}$$

$$\text{由此可得 } \lambda_1 = \frac{12}{4n+1}\text{m} \quad (n=0,1,2,3,\dots)$$

$$\lambda_2 = \frac{12}{4n+3}\text{m} \quad (n=0,1,2,3,\dots)$$

由图可知,周期  $T=0.6\text{s}$ .所以,波通过 A、B 两点经历的时间

$$A \rightarrow B \quad t_1 = \frac{s}{\lambda_1} T = 0.15(4n+1)\text{s} \quad (n=0,1,2,3,\dots)$$

$$B \rightarrow A \quad t_2 = \frac{s}{\lambda_2} T = 0.15(4n+3)\text{s} \quad (n=0,1,2,3,\dots)$$

$$\text{波速 } A \rightarrow B \quad v_1 = \frac{\lambda_1}{T} = \frac{20}{4n+1}\text{m/s} \quad (n=0,1,2,3,\dots)$$

$$B \rightarrow A \quad v_2 = \frac{\lambda_2}{T} = \frac{20}{4n+3}\text{m/s} \quad (n=0,1,2,3,\dots)$$

(2)因  $3\text{m} < \lambda < 13\text{m}$ ,所以波长和波速都只有两种可能性:当  $\lambda_1 = 12\text{m}$  时,  $v_1 = 20\text{m/s}$ ; 当  $\lambda_2 = 4\text{m}$  时,  $v_2 = \frac{20}{3}\text{m/s}$ .

$$B \text{ 点的振动方程 } y_B = A \sin \frac{2\pi}{T} t = 2 \sin \frac{10}{3} \pi t$$

若波由 A $\rightarrow$ B,则 P 点相位应超前,所以 P 点的振动方程为

$$y_P = 2 \sin \left[ \frac{10}{3} \pi \left( t + \frac{s'}{v_1} \right) \right] = 2 \sin \left[ \frac{10}{3} \pi \left( t + \frac{1}{20} \right) \right] (\text{cm})$$

当  $t=0$  时,  $y_{P1} = 1\text{cm}$ ; 当  $t=1\text{s}$  时,  $y_{P2} = -2\text{cm}$ .且在  $t=0$  时, P 点向上运动,所以

路程

$$s_1 = (1 + 4 \times 2 + 2 \times 2) = 13 \text{ cm}$$

若波由  $B \rightarrow A$ , 则  $P$  点相位应滞后, 所以  $P$  点振动方程为

$$y_P = 2 \sin \left[ \frac{10}{3} \pi \left( t - \frac{s'}{v_2'} \right) \right] = 2 \sin \left[ \frac{10}{3} \pi \left( t - \frac{3}{20} \right) \right] \text{ (cm)}$$

当  $t = 0$  时,  $y_{P1} = -2 \text{ cm}$ ; 当  $t = 1 \text{ s}$  时,  $y_{P2} = 1 \text{ cm}$ . 且在  $t = 1 \text{ s}$  时,  $P$  点向下运动, 所以  $P$  点通过的路程  $s_2 = (2 \times 2 + 4 \times 2 + 1) = 13 \text{ (cm)}$

**例 2** 两个相同的声源  $S_1$  和  $S_2$ , 如图 6-3-2 所示, 相距  $10 \text{ m}$ , 频率为  $1700 \text{ Hz}$ , 振动位相相同,  $Q$  是  $S_1 S_2$  的中点,  $OQ$  是  $S_1 S_2$  的中垂线长度,  $OQ = 400 \text{ m}$ ,  $OP$  平行于  $S_1 S_2$ , 长度  $OP = 16 \text{ m}$ . 已知空气中的声速是  $340 \text{ m/s}$ , 问 (1) 由  $S_1$  和  $S_2$  发出的声波在空气中的波长是多少? (2) 在  $O, P$  之间的线段上会出现几个振动最弱的位置?

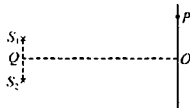


图 6-3-2

解 (1)  $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{1700} = 0.20 \text{ m}$

(2) 为了找出  $O, P$  之间振动最弱的点, 我们首先计算声源  $S_1, S_2$  到  $P$  点的距离之差.

$$S_1 P = \sqrt{400^2 + (16 - 5)^2} = 400.15 \text{ (m)}$$

$$S_2 P = \sqrt{400^2 + (16 + 5)^2} = 400.55 \text{ (m)}$$

$$S_2 P - S_1 P = 0.40 \text{ (m)}$$

由于  $S_1, S_2$  到  $O$  点的距离相等, 所以  $OP$  上任一点与声源  $S_1, S_2$  的距离之差的绝对值在  $0$  到  $0.40 \text{ m}$  之间. 而振动最弱的点到  $S_1, S_2$  的距离之差应为半波长的奇数倍, 因此只可以取  $0.10 \text{ m}, 0.30 \text{ m}$  两个值, 故在  $O, P$  之间的线段上会出现两个振动最弱的位置.

### 【巩固习题】

1. 一列简谐波某时刻的波形如图 6-3-3 甲所示, 图乙表示该波传播介质中某质点以后一段时间的振动图像, 则 ( )

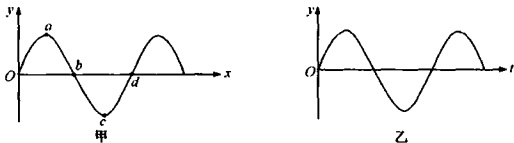


图 6-3-3

- A. 若波沿  $x$  轴正方向传播, 图乙为  $a$  点振动图像  
 B. 若波沿  $x$  轴正方向传播, 图乙为  $b$  点振动图像  
 C. 若波沿  $x$  轴负方向传播, 图乙为  $c$  点振动图像  
 D. 若波沿  $x$  轴负方向传播, 图乙为  $d$  点振动图像

2. 两列波长相同、频率相同、振幅也相同的简谐波  $a$  及  $b$  分别沿  $x$  轴的正负向传播, 波速为  $200\text{m/s}$ , 在  $t=0$  时刻波形如图 6-3-4 所示, 在  $x$  轴上的一点  $P$ , 其平衡位置在  $x=450\text{m}$  处. 求各经过多长时间  $P$  点可第一次出现位移的最小值及第一次出现位移的最大值?

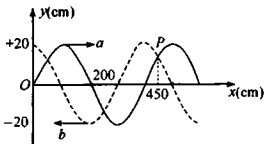


图 6-3-4

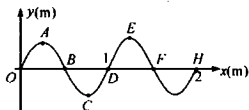


图 6-3-5

3. 如图 6-3-5 所示为一纵波在某时刻的波形图线, 此波波长为多少? 取质点向左运动为正向, 图中哪些点为密部? 哪些点为疏部?

4. 图 6-3-6 所示为一列简谐横波在  $t=0$  时的图像, 波沿  $x$  轴正向传播, 已知在  $\Delta t = 1.1\text{s}$  末时  $P$  点出现第三次波峰, 则质点振动周期为多少? 这列波的波速为多少?

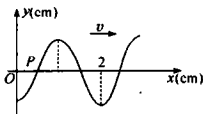


图 6-3-6

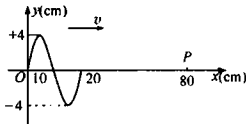


图 6-3-7

5. 一列横波的波源在图 6-3-7 中的坐标原点  $O$  处, 经过  $0.4\text{s}$ , 振动从  $O$  点向右传播  $20\text{cm}$ .  $P$  点离  $O$  点的距离为  $80\text{cm}$ , 试求: (1) 该波传至  $P$  点,  $P$  点起振时速度方向如何? (2) 若波从原点开始向右传播时计时, 经过多长时间质点  $P$  第一次到达波峰?



## 第四节 驻波和多普勒效应



### 【知识要点】

#### 1. 驻波

频率相同、振幅相等、振动方向一致、传播方向相反的两列简谐波互相叠加，便形成驻波。设坐标原点的振动方程为  $y = A \cos \omega t$ ，则满足上述条件的两列简谐波的波动方程分别为

$$y_1 = A \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right), \quad y_2 = A \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x \right)$$

叠加所得的合成波的方程为  $y = y_1 + y_2 = 2A \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \cos \omega t$

式中  $2A \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} x \right)$  是此合成波的振幅，它与  $x$  有关。振幅最大处称为波腹，振幅最小处称为波节。波腹的位置为  $x = k \frac{\lambda}{2} (k \in \mathbf{Z})$

波节的位置为  $x = \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}$

相邻两波腹(或波节)之间的间距为  $\frac{\lambda}{2}$ 。

不同时刻驻波的波形图如图 6-4-1 所示，其中实线表示  $t = 0, T, 2T, \dots$  时的波形；点线表示  $t = \frac{1}{2}T, \frac{3}{2}T, \dots$  时的波形；点画线表示  $t = \frac{1}{8}T, \frac{9}{8}T, \dots$  时的波形。

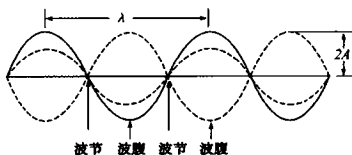


图 6-4-1

#### 2. 多普勒效应

当鸣笛的火车开向站台，站台上的观察者听到的笛声变尖，即频率升高；相反，当火车离开发台，听到的笛声频率降低。

波源与观察者之间有相对运动时，观察者接受到的波的频率  $\nu_R$  与波源的振动频率  $\nu_S$  不同，这种现象称为多普勒效应。机械波的多普勒效应称为经典多普勒效应。这是奥

地物理学家多普勒(J. C. Doppler)首先提出的。

利用声波的多普勒效应可以测定流体的流速、潜艇的速度,还可以用来报警和监测车速。在医学上,利用超声波的多普勒效应对心脏跳动情况进行诊断,如做超声心动、多普勒血流仪等。

(1) 三种情况:

① 相对于媒质,波源不动,观察者以速度  $v_R$  向着或远离波源

运动。如图 6-4-2 所示,  $\nu_R = \frac{u + v_R}{\lambda} = \frac{u + v_R}{u/\nu} = \frac{u + v_R}{u} \nu$

因为此时波源的频率就是波的频率,所以  $\nu_R = \frac{u + v_R}{u} \nu_S$

因此观察者向着波源运动时,接受到的频率大于波源的频率;当观察者远离静止波源运动时,接受到的频率小于波源的频率。

② 相对于媒质,观察者不动,波源以速度  $v_S$  向着观察者运动。

波源运动时,波的频率不再等于波源的频率。这是由于当波源运动

时,它所发出的相邻的两个同相振动状态是在不同地点发出的,这两个地点相隔的距离为  $v_S T_S$ ,  $T_S$  为波源的周期。如果波源是向着观察者运动的,这后一地点到前方的最近的同相点之间的距离是现在媒质中的波长。

若波源静止时,媒质中的波长为  $\lambda_0 (\lambda_0 = u T_S)$ , 则现在媒质中

的波长为  $\lambda = \lambda_0 - v_S T_S = (u - v_S) T_S = \frac{u - v_S}{\nu_S}$

现在波的频率(即观察者接收的频率)为  $\nu_R = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{u - v_S} \nu_S$

因此波源向着观察者运动时,观察者接受到的频率大于波源的频率;当波源远离观察者运动时,观察者接受到的频率小于波源的频率。

③ 相对于媒质,观察者和波源同时运动。综合上述两种情况,可得当波源和观察者

相向运动时,观察者接受到的频率为  $\nu_R = \frac{u + v_S}{u - v_S} \nu_S$

当波源和观察者彼此离开时,观察者接受到的频率为  $\nu_R = \frac{u - v_S}{u + v_S} \nu_S$

### 【巩固习题】

1. 一列横波在空间中沿一直线传播,已知某一时刻此直线上相距为  $s$  的  $A, B$  两点均处于平衡位置,而在  $A, B$  之间仅有一个波峰,若经过时间  $t$ ,  $B$  点恰好达到波峰位置,则该波可能的波速为( )

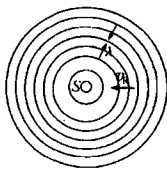


图 6-4-2

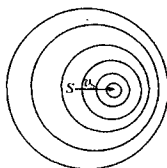


图 6-4-3

A.  $\frac{3s}{4t}$       B.  $\frac{s}{4t}$       C.  $\frac{3s}{2t}$       D.  $\frac{2s}{3t}$

2. 一列横波沿直线传播, 波速为  $2\text{m/s}$ , 在传播方向上取  $A, B$  两点, 从波刚好传到  $A, B$  中某质点时开始计时, 在  $5\text{s}$  内,  $A$  点完成 8 次全振动,  $B$  点完成 10 次全振动, 则波的传播方向是怎样的?  $A, B$  两点距离是多少?

3. 一列横波自  $B$  向  $A$  传播,  $A, B$  间距离为  $8\text{m}$ , 已知  $\lambda > 8\text{m}$ . 质点  $A, B$  振动图线如图 6-4-4 所示, 求这列波的波长和波速.

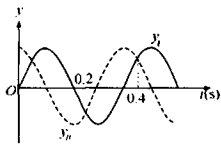


图 6-4-4

4. 如图 6-4-5 所示, 半径为  $45\text{m}$  的圆形广场, 在中心  $O$  及周围一点  $A$  处, 分别安装两台相同的扩音机, 已知声波波长  $\lambda = 10\text{m}$ , 不考虑传播中的衰减及人的运动对声音传播的影响. 有一个人沿着广场周围行走, 当他在  $B$  点时就听不到声音. 然后他继续逆时针方向从  $B$  走到接近  $A$  的过程中, 有几次听不到扩音机的声音?

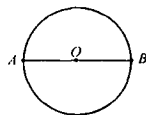


图 6-4-5

5. 一木匠在屋顶上敲打, 每秒打 4 下, 一观察者恰巧在看到木匠把锤子举到最高点时听到钉木板的声音. 设声速为  $344\text{m/s}$ , 则观察者与木匠间的最小距离为多少?

## 第五节 综合训练

### 【例题分析】

**例 1** 设想有一单摆, 其摆长  $l$  与地球半径  $R$  相等, 试求此单摆在地球表面附近摆动时的周期  $T$ . 已知地球半径为  $R = 6370\text{km}$ .

**分析** 摆球在地面附近运动, 可以认为它所受地球引力的大小不变, 为

$$F' = \frac{CMm}{R^2} = mg$$

但如果摆长很长, 则当其摆角即使很小时, 摆动中摆球相对于地面的位移也是较大的. 由此, 在其摆动中所受地球引力的方向变化便不可忽略. 这一点正是本题情况与普通所讨论的普通单摆的区别. (在讨论普通单摆时, 我们认为摆球所受地球引力为恒力——即其大小和方向都是不变的.)

**解** 如图 6-5-1, 设此单摆的摆角为  $\theta$  时, 它偏离平衡位置的位移为  $x$ , 偏离地心  $O$  的角度为  $\alpha$ , 所受地球引力为  $F'$ . 由图可知, 此时摆球所受回复力  $F = -F' \cos \beta =$

$$-mg \cos \beta$$

由图有  $\beta + \alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ , 且由于  $\theta, \alpha$  均为很小的角, 则近似地有  $\theta \approx$

$$\frac{x}{l}, \alpha \approx \frac{x}{R}, \text{代入前式可得}$$

$$F = -mg \sin(\theta + \alpha) \approx -mg(\theta + \alpha) \approx -mg\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{R}\right)x$$

由简谐振动的周期公式有

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{R}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{lR}{(l+R)g}}$$

当  $l = R$  时, 此单摆的周期为  $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}} = 2\pi\sqrt{\frac{6370 \times 10^3}{2 \times 9.80}} = 3540(\text{s}) = 59(\text{min})$

说明 对于普通单摆, 有  $l \ll R$ , 代入以上所得的公式得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\left(1 + \frac{l}{R}\right)g}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

**例 2** 如图 6-5-2 所示, 置于光滑水平面上的轻弹簧, 原长为  $l_0$ , 劲度系数为  $k$ , 一端固定在  $O$  点, 另一端系一质量为  $m$  的小球. 现沿某方向将弹簧拉长  $\Delta l$  至  $A$  点, 然后以垂直于  $OA$  方向并沿水平面将小球以速度  $v_0$  射出. 求: (1) 小球绕  $O$  点转过  $90^\circ$  至  $B$  点时的时间; (2)  $OB$  的长度.

**分析** 本问题不能将运动视为匀速圆周运动和振子振动的叠加. 因为匀速圆周运动是需要向心力的, 而这个力只能由弹簧的弹力提供. 在本题中应当考虑建立平面直角坐标系, 分析小球沿坐标轴的两个分运动. 如果能满足谐振条件, 则可求时间. 同时, 系统的机械能是守恒的, 找到运动规律后,  $OB$  的长度就可由机械能守恒定律求得.

**解** 在水平面上, 沿  $OA$  方向和  $OB$  方向建立平面直角坐标系, 如图 6-5-3 所示. 当小球运动到某点  $C$  时, 设  $OC$  与  $x$  轴的夹角为  $\alpha$ . 根据胡克定律, 弹簧对小球的作用力  $F = k(OC - l_0)$ , 其中  $F$  沿  $x, y$  方向的分量分别是

$$F_x = F \cos \alpha = k(OC - l_0) \cos \alpha = k(x - l_0 \cos \alpha)$$

$$F_y = F \sin \alpha = k(OC - l_0) \sin \alpha = k(y - l_0 \sin \alpha)$$

式中  $(x - l_0 \cos \alpha)$  和  $(y - l_0 \sin \alpha)$  分别为沿  $x$  轴和  $y$  轴方向的弹簧的伸长量.

由此可知, 小球在  $Ox, Oy$  两个方向上, 均满足回复力与相对平衡位置的位移的大

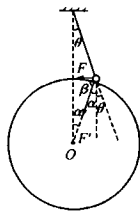


图 6-5-1

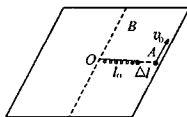


图 6-5-2

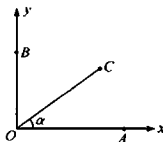


图 6-5-3

小成正比而方向相反的规律. 所以, 小球在  $x, y$  方向均做简谐振动, 其中心位置均为弹簧的原长位置, 其周期均为  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

开始运动时, 在  $x$  方向上, 小球从右极端位置向左运动, 在  $y$  方向上, 小球从平衡位置以速度  $v_0$  向正方向运动.

(1) 到达  $B$  点时, 小球在  $x$  方向上相当于回到平衡位置, 所经历的时间为  $\frac{T}{4}$ , 所以

$$t_{AB} = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(2) 在  $B$  点时, 小球在  $y$  方向上恰好达到极端位置, 所以它在  $y$  方向上的速度为零, 小球的速度就是在  $x$  轴上的最大速度. 所以  $v_B = v_{xm} = \Delta l \omega = \Delta l \sqrt{\frac{k}{m}}$  ①

根据机械能守恒定律, 设沿  $y$  方向弹簧伸长  $\Delta y$ , 对  $A$  点和  $B$  点有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}k\Delta y^2 \quad ②$$

由①、②两式可得  $\Delta y = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$ . 所以  $OB$  的长度  $y = l_0 + \Delta y = l_0 + \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$ .

评析 (1) 本问题中, 无论是沿  $x$  方向还是沿  $y$  方向的振动, 都跟在水平面内一维情况下振子的振动不同. 因为本题中弹簧只伸长不收缩. 假如弹簧要收缩, 那么过  $B$  点后弹簧沿  $x$  方向就应收缩, 这样就会出现沿  $x$  方向弹簧的长度小于  $l_0$ , 而沿  $y$  方向弹簧的长度大于  $l_0$  的结果, 这是不可能的. 事实上, 本问题相当于一个坐标原点做圆周运动的坐标系, 原点就是弹簧的原长位置. 小球在  $B$  点时, 沿  $x$  方向的振动相当于到了这个运动坐标系的原点处.

(2) 如果本题还要求在任意位置时弹簧的长度和小球的运动时间, 那么可以先设出此位置弹簧的伸长量(或长度), 然后根据机械能守恒定律表示出此长度对应的速度(两个分速), 再由振动方程(位移和速度方程)确定伸长量, 最后确定相位, 这样就可找出时间. 读者可以自己算一算.

例3 三根长度均为  $l = 2.00\text{m}$ , 质量均匀的直杆, 构成一正三角形框架  $ABC$ .  $C$  点悬挂在一光滑水平转轴上, 整个框架可绕转轴转动. 杆  $AB$  是一导轨, 一电动玩具松鼠可在导轨上运动, 如图 6-5-4 所示. 现观察到松鼠正在导轨上运动, 而框架却静止不动. 试论证松鼠的运动是一种什么样的运动.

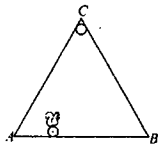


图 6-5-4

分析 对框架来说, 要始终保持静止, 则要求作用在上面的各力对转轴  $C$  的力矩的代数和为零. 由于框架各边自身的重力对  $C$  的合力矩为零, 因此松鼠对  $AB$  杆的作用力的合力矩也应为零. 松鼠对杆的压力是

不变的,其大小为松鼠的重力.但随着距  $C$  的水平距离的改变,此力矩也要改变.所以要求松鼠不仅对杆  $AB$  施加水平力,而且此力的大小还要变化,因为水平力的力臂是不变的.在  $C$  点正下方,这个力应为零,离  $C$  点的水平距离越远,此力应越大.而这个力的反作用力就是松鼠受到的水平力,所以,松鼠的运动应当是以  $C$  点正下方为平衡位置的一种往复运动.

解 分别对框架的  $AB$  段和松鼠的受力情况进行分析,建立水平坐标  $x$  轴,向右为正,以  $C$  点正下方为原点  $O$ .在某一时刻,设松鼠位于坐标  $x$  处,如图 6-5-5 所示.根据力矩平衡条件,对于框架有  $N'lx = F'l\cos 30^\circ$ ,所以

$$F' = \frac{2N'lx}{\sqrt{3}l}$$

对  $AB$  段及松鼠,由牛顿第三定律及平衡关系得  $N' =$

$$N = mg. \text{ 所以 } F = F' = \frac{2mg|x|}{\sqrt{3}l}$$

由图可知,当  $x > 0$  时,有  $F < 0$ ; 当  $x < 0$  时,有  $F > 0$ . 所以对松鼠有

$$F = -\frac{2mgx}{\sqrt{3}l} = -kx$$

这说明松鼠的运动是简谐振动.运动的周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}l}{2g}} = 2.64(\text{s})$$

由此可知,松鼠的运动是在  $AB$  杆上,以  $C$  点正下方  $O$  点为平衡位置的简谐振动,其振幅小于或等于  $\frac{l}{2} = 1.00\text{m}$ , 周期为  $2.64\text{s}$ .

例 4 一个大容器中装有互不相溶的两种液体,它们的密度分别为  $\rho_1$  和  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ). 现让一长为  $L$ 、密度为  $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$  的均匀木棍竖直地放在上面的液体内,其下端离两液体分界面的距离为  $\frac{3L}{4}$ , 由静止开始下落. 试计算木棍到达最低处所需要的时间. 假定由于木棍运动而产生的液体阻力可以忽略不计,且两液体都足够深,保证木棍始终都在液体内部运动,既不露出液面,也不与容器底相碰.

分析 木棍从开始运动到下端进入下面液体的过程中,重力和浮力恒定不变,木棍做匀加速运动.木棍进入下面液体后,因  $\rho_1 < \rho_2$ , 且  $\rho_2 > \frac{\rho_2 + \rho_1}{2}$ , 所以木棍先做加速运动后做减速运动,存在一个合力为零的位置,因此木棍肯定是做振动.如果能够证明此运动为简谐振动,那么相应的振动时间就可由周期公式来计算.但是,如果当棍的上端也进入下面液体后木棍还有速度,则木棍做的运动就变成匀减速运动了.所以振动可能

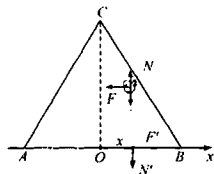


图 6-5-5

只是中间一段时间的行为.在这种情况下,要求的时间由三段组成,即匀加速运动的时间、振动的时间和匀减速运动的时间.

解 (1) 设棍的横截面积为  $S$ , 从开始运动到下端到达液体分界面时有

$$a_1 = \frac{mg - F_{浮}}{m} = g - \frac{\rho_1 L S g}{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} L S} = \frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{\rho_2 + \rho_1} \quad (1)$$

根据  $\frac{3}{4}L = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$ , 可得这段时间为  $t_1 = \sqrt{\frac{3L(\rho_2 + \rho_1)}{2g(\rho_2 - \rho_1)}}$  (2)

(2) 木棍下端进入下面的液体后, 因  $\rho_2 > \rho_1, \rho_2 > \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ , 所以木棍在运动中有合力为零的位置. 设在此位置时木棍在上面液体中的长度为  $L'_0$ , 则  $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) L S g = \rho_1 L'_0 S g + \rho_2 (L - L'_0) S g$ . 由此可解出  $L'_0 = \frac{1}{2}L$ .

即木棍中点在界面时合力为零.

要考察木棍的振动, 需建立竖直方向的  $z$  坐标轴, 以分界面为原点, 向上为正. 当木棍中点的坐标为  $z$  时, 木棍所受的合力

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) L S g + \left[ \rho_1 \left( \frac{1}{2}L + z \right) S g + \rho_2 \left( \frac{1}{2}L - z \right) S g \right] \\ &= -(\rho_2 - \rho_1) S g z = -kz \end{aligned}$$

这就证明了木棍的振动为简谐振动. 其中  $k = (\rho_2 - \rho_1) S g$  (3)

木棍的振动周期  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) S L}{(\rho_2 - \rho_1) S g}} = 2\pi \sqrt{\frac{(\rho_2 + \rho_1) L}{2(\rho_2 - \rho_1) g}}$

设振幅为  $A$ , 木棍下端到达界面时的速度为  $v$ , 则  $v = a_1 t_1$  (4)

由于简谐振动系统的机械能守恒, 所以

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) S L \right] v^2 + \frac{1}{2} k \cdot \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} k A^2 \quad (5)$$

由①, ②, ③, ④, ⑤式可解出振幅  $A = L$

所以从木棍下端到达界面至木棍中点到达界面的运动距离为  $\frac{1}{2}A$ . 设其运动时间为  $t_2$ , 则振动方程为  $z = A \cos \frac{2\pi}{T} t$ . 当  $z$  第一次为  $\frac{1}{2}A$  时,  $t_2 = \frac{T}{6}$ , 所以

$$t_2 = \frac{T}{4} - \frac{T}{6} = \frac{T}{12}$$

由简谐振动的对称性可知, 从木棍中点到达界面至木棍上端也到达界面这段过程中, 振动所需时间也为  $t_2$ . 所以中段振动所需要的总时间

$$2t_2 = \frac{T}{6} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{(\rho_2 + \rho_1)L}{2(\rho_2 - \rho_1)g}}$$

(3) 当木棍全部进入下面液体时, 速度也为  $v$ , 以后做匀减速运动. 其加速度大小

$$a_2 = \frac{F_{浮}' - mg}{m} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{\rho_2 + \rho_1} = a_1$$

所以木棍做匀减速运动的时间也为  $t_1$ .

综上所述, 木棍到达最低处所需要的时间

$$t = 2t_1 + 2t_2 = \frac{6\sqrt{6} + \sqrt{2}\pi}{6} \sqrt{\frac{(\rho_2 + \rho_1)L}{(\rho_2 - \rho_1)g}}$$

**例 5** 一个单摆, 由一根长为  $l$  的刚性轻杆和杆端的重物组成, 单摆做振幅很小的自由振动, 如图 6-5-6 所示. 如果在杆上某点再固定一个质量相等的重物, 则该物应固定在哪一点, 才能使振动周期改变最大? 最大的改变量是多少?



图 6-5-6

**分析** 再固定一个重物后, 此摆便变成了复摆, 可用复摆周期公式计算. 但复摆周期公式中要涉及转动惯量这一物理量, 超过了大竞赛大纲的要求, 故不用复摆公式. 要解决这一问题, 关键是要把现在的周期和原来的周期相比较. 所以应先找出现在的摆的周期表达式, 而在表达式中关键是要找出摆长. 如果能够找出现在的摆的等效摆长, 问题就解决了. 怎样找等效摆长呢? 由于现在的摆在摆动过程中仍遵循机械能守恒定律, 所以应先利用机械能守恒定律找出等效摆长, 然后与原单摆相比较, 最后求得周期改变的最大值以及该重物所对应的位置.

**解** 设所加重物离悬点的距离为  $l_1$ , 将摆拉离平衡位置后与竖直方向的夹角为  $\alpha$ , 放手后摆到达竖直位置时的角速度为  $\omega$ . 根据机械能守恒定律, 有

$$mgl(1 - \cos\alpha) + mgl_1(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}m(l\omega)^2 + \frac{1}{2}m(l_1\omega)^2$$

$$\text{解得} \quad \omega^2 = \frac{2g(l_1 + l)(1 - \cos\alpha)}{l_1^2 + l^2} \quad (1)$$

$$\text{设一单摆与之等效, 摆长为 } l', \text{ 同理有 } \omega^2 = \frac{2g(1 - \cos\alpha)}{l'} \quad (2)$$

由①、②式可得等效摆长  $l' = \frac{l_1^2 + l^2}{l_1 + l}$ . 求出此摆与原单摆的周期之比

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{l'}{l}} = \sqrt{\frac{l_1^2 + l^2}{(l_1 + l)l}} \quad (3)$$

$$\text{令 } \frac{T'}{T} = k, \text{ 可得关于 } l_1 \text{ 的一元二次方程 } l_1^2 - k^2ll_1 + (1 - k^2)l^2 = 0 \quad (4)$$

$$\text{此方程有解的条件为 } \Delta = k^4l^2 - 4(1 - k^2)l^2 \geq 0 \quad (5)$$



分析④式可知,  $k = \frac{T'}{T} < 1$ , 所以取⑤式的合理解应是  $k^2 \leq 2(\sqrt{2}-1)$ . 当  $k^2 = 2(\sqrt{2}-1)$  时,  $\frac{T'}{T}$  最大, 即周期改变量最大.

将  $k^2$  的值代入④式, 可解得周期改变量最大时再固定的重物所对应的位置应在离悬点  $l_1 = (\sqrt{2}-1)l$  的地方. 故周期的最大改变量为  $T' = kT = \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}T \approx 0.91T$

**例 6** 一只狼沿着半径为  $R$  的圆形岛边缘按逆时针方向匀速跑动, 当狼经过某点时, 一只猎犬以相等的速率从岛中心  $O$  出发追逐狼. 设追逐过程中狼、猎犬和圆心  $O$  在任一瞬间均在同一直线上, 求猎犬运动的轨迹和追上狼的位置.

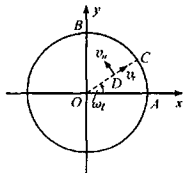


图 6-5-7

**解** 建立如图 6-5-7 所示的坐标, 设时刻  $t=0$  时, 犬和狼分别位于图中的  $O$  点和  $A$  点. 经过一段时间  $t$ , 狼到达  $C$  点, 犬到达距圆心为  $r$  的  $D$  点. 以  $v_0$  表示狼和犬运动的速率, 则狼绕岛做圆周运动的角速度为  $\omega = \frac{v_0}{R}$ , 当猎犬位于  $D$  点时, 以  $v_r$  表示其速度沿圆半径方向的分量,  $v_n$  为其速度沿与此半径垂直方向的分量. 为保证狼、犬和圆心三者总在同一条直线上, 显然应有  $\frac{v_0}{v_n} = \frac{R}{r}$ , 即

$$v_n = \omega r$$

由于  $v_n^2 + v_r^2 = v_0^2$ , 故得  $v_r^2 + \omega^2 r^2 = v_0^2$

又设再过一段很短的时间  $\Delta t$ , 猎犬的上述两速度分量分别变为

$$v_r + \Delta v_r \quad \text{和} \quad \omega(r + \Delta r)$$

则有  $(v_r + \Delta v_r)^2 + \omega^2(r + \Delta r)^2 = v_0^2$

由上两式得  $v_r^2 + \omega^2 r^2 = (v_r + \Delta v_r)^2 + \omega^2(r + \Delta r)^2$

所以  $2v_r \Delta v_r + (\Delta v_r)^2 + 2\omega^2 r \Delta r + \omega^2(\Delta r)^2 = 0$

由于  $\Delta t$  很小, 则  $\Delta v_r$ 、 $\Delta r$  均很小, 故上式中可略去含  $(\Delta v_r)^2$  和  $(\Delta r)^2$  的项, 便有

$$v_r \Delta v_r = -\omega^2 r \Delta r$$

将上式以  $\Delta t$  除之, 并且注意到  $\frac{\Delta r}{\Delta t}$  即等于此刻猎犬速度的径向分量  $v_r$ . 而为了解释  $\frac{\Delta v_r}{\Delta t}$ , 我们可以把图中的圆面假想为一个绕过  $O$  点且垂直于圆面的轴以角速度  $\omega$  旋转的圆盘, 以此圆盘为参照系, 则狼在此参照系中静止, 而犬则仅沿半径方向运动, 其速度仅有  $v_r$ ,  $\frac{\Delta v_r}{\Delta t}$  则为犬在此转动参照系中的加速度, 以  $a_r$  表示之, 则上式变为

$$a_r = -\omega^2 r$$

以上式和简谐运动质点加速度的方程相比较, 两者形式完全相同, 可见此过程中在

上述的转动参照系中看到的猎犬沿半径方向的运动为一简谐运动.不妨设此简谐运动的方程为  $r = A \sin(\omega t + \varphi)$

当  $r = 0$  时,  $a_r = 0$ , 由简谐运动的规律知, 此时对应着振子的振动速度有最大值  $v_m$ , 依题述知, 当犬在圆心时, 其速度方向是沿半径方向指向狼的, 故有  $v_m = v_0$ , 则知此简谐

运动的振幅为  $A = \frac{v_m}{\omega} = \frac{v_0}{\omega} = R$

又由于  $t = 0$  时,  $r = 0$ , 则  $\varphi = 0$ , 故此简谐运动的方程为  $r = R \sin \omega t$

结合图可见, 在相对于地面不动的坐标系  $O-xy$  中, 在时刻  $t$  时猎犬的位置坐标为

$$x = r \cos \omega t = R \cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} R \sin 2\omega t$$

$$y = r \sin \omega t = R \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} R (1 - \cos 2\omega t)$$

由上两式得  $\left(\frac{2x}{R}\right)^2 + \left(1 - \frac{2y}{R}\right)^2 = 1$ , 即  $x^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$ . 即猎犬的运动轨迹是以点  $\left(0, \frac{R}{2}\right)$  为圆心、 $\frac{R}{2}$  为半径的半圆.

当猎犬运动的时间为  $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi R}{2v_0}$  时, 犬到达图中的  $B$  点, 而此时狼运动的路程为  $s = v_0 t = \frac{\pi R}{2}$ , 也刚好到达  $B$  点, 即在此处猎犬追上狼.

**例 7** 在光滑水平面上自由放置一轻弹簧, 其左端固定, 右端系着一物块  $P$ . 另一物块  $Q$  在  $P$  的右边与它紧靠,  $Q$  的质量是  $P$  的 2.5 倍.  $P$  与  $Q$  的右边有一壁与弹簧垂直, 物块与此壁相距  $L = \frac{14\pi}{13}$  cm. 今使  $P, Q$  从原来位置向左移一段距离, 并令其处于静止状态后予以释放. 已知  $P$  在第一次通过平衡位置后完成一次全振动时, 与  $Q$  恰好发生第一次碰撞, 假设所有碰撞均为弹性正碰, 且两物块的大小均可忽略不计. 问: (1) 开始时弹簧的压缩量  $L_0$  为多少? (2) 在  $P$  与  $Q$  第一次分离至第一次碰撞的时间内,  $P$  至两物块第一次分离点的最远距离为多少? (3) 在  $P$  与  $Q$  第一次碰撞至第二次碰撞的时间内,  $P$  至两物块第一次分离点的最远距离为多少? (4) 图 6-5-8 给出了一条余弦曲线, 试以两物块第一次相碰时刻为计时起点, 在图中画出  $P$  和  $Q$  的位移—时间图线, 并标出  $P$  与  $Q$  第二次相碰的时刻.

**解** 如图 6-5-9, 设图中  $O$  点为弹簧处于自然长度时  $P, Q$  物块所在的位置, 则将物块自图示位置由静止释放后, 在弹簧弹力的作用下,  $P$  和  $Q$  将一起加速向右运动到  $O$  点, 越过  $O$  点后, 在弹力的作用下,  $P$  将作减速运动,  $Q$  则维持原来的速度作匀速运动. 则  $O$  点是  $P$  与  $Q$  的第一次分离点. 分离后,  $P$  的运动是简谐运动,  $Q$  的运动是匀速直线运动.

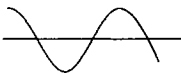


图 6-5-8

设弹簧的劲度系数为  $k$ , 物块  $P$  的质量为  $m_P = m$ , 则  $Q$  的质量为  $m_Q = 2.5m$ .

(1)  $P, Q$  第一次到达分离点  $O$  时, 设其共同速度为  $v_0$ , 则由能量转化关系有

$$\frac{1}{2} k l_0^2 = \frac{1}{2} (m_P + m_Q) v_0^2$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{2} k l_0^2 = \frac{7}{4} m v_0^2 \quad (1)$$

$$P, Q \text{ 分离后, } P \text{ 的振动周期为 } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2)$$

$P, Q$  分离后,  $Q$  以  $v_0$  作匀速运动, 遇墙作弹性碰撞而以原速率返回, 依前述它返回到达  $O$  点的时间是  $P$  完成一次全振动的时间, 故应有  $v_0 T = 2l$ , 即

$$v_0 T = \frac{28\pi}{13} \text{cm} \quad (3)$$

$$\text{由 } (1), (2), (3) \text{ 式可解得 } l_0 = \frac{7\sqrt{14}}{13} l_0 = 2.01(\text{cm})$$

(2)  $P, Q$  第一次分离后,  $P$  作简谐运动的振幅, 就是  $P, Q$  第一次分离后至第一次相碰这段时间内  $P$  离开分离点最远的距离. 以  $A_1$  表示这一距离, 则由能量转化关系有

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k A_1^2 \quad (4)$$

$$\text{由 } (1), (4) \text{ 两式解得 } A_1 = \sqrt{\frac{2}{7}} l_0 = 1.08(\text{cm})$$

(3)  $P$  和  $Q$  的第一次相碰仍在其分离点  $O$ , 碰前, 其速度大小均为  $v_0$ , 设其碰后速度分别为  $v_P$  和  $v_Q$ , 则由碰撞中的动量守恒和机械能守恒, 分别有

$$m_P v_0 - m_Q v_0 = m_P v_P + m_Q v_Q$$

$$\frac{1}{2} m_P v_0^2 + \frac{1}{2} m_Q v_0^2 = \frac{1}{2} m_P v_P^2 + \frac{1}{2} m_Q v_Q^2$$

$$\text{解上两式得 } v_P = \frac{m_P - 3m_Q}{m_P + m_Q} v_0 = -\frac{13}{7} v_0 \quad (5)$$

$$v_Q = \frac{3m_P - m_Q}{m_P + m_Q} v_0 = \frac{1}{7} v_0 \quad (6)$$

碰后,  $P$  又作简谐运动, 设其振幅为  $A_2$ . 由于当  $Q$  的速度为  $v_0$  时, 它由  $O$  点出发至回到  $O$  点往返一次的时间恰为  $P$  的一个振动周期, 现在  $Q$  的速度仅为  $\frac{1}{7} v_0$ , 它不可能在与  $P$  第一次相碰后的  $\frac{1}{2}$  周期内与  $P$  再次相碰, 由此  $A_2$  即为两物块在第一次相碰到第二次相碰这段时间内,  $P$  至两物块第一次分离点的最远距离.  $A_2$  满足

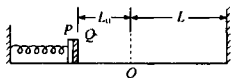


图 6-5-9

$$\frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}m_p v_p^2 \quad (7)$$

由②,③,⑤,⑦式解得  $A_2 = 2(\text{cm})$

(4)以两物块第一次相碰的时刻作为计时起点,取向右方向为坐标正方向,由于  $t = 0$  时  $x_p = 0$ ,故物块  $P$  的振动方程可能为  $x_p = 2\cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right)\text{cm}$

由⑤式知  $t = 0$  时物块  $P$  的速度  $v_p = -\frac{13}{7}v_0$ ,故上式中初位相应取  $+\frac{\pi}{2}$ ,则  $P$  的振动方程应为  $x_p = 2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\text{cm}$

据此方程,可画出物块  $P$  振动的  $x-t$  图线如图 6-5-10 中的余弦曲线所示.

物块  $Q$  到达右壁之前的运动方程为

$$x_Q = v_Q t = \frac{1}{7}v_0 t$$

当  $t = T$  时,  $Q$  的位移为  $x_Q = \frac{1}{7}v_0 T = \frac{4\pi}{13}(\text{cm}) \approx 1(\text{cm}) < L$

故  $Q$  到达右壁之前的位移—时间图线是一条通过原点和点  $(T, 1\text{cm})$  的直线,在图 6-5-10 中,此直线与余弦曲线的交点的横坐标  $t'$  即为两物块第二次相碰的时刻.

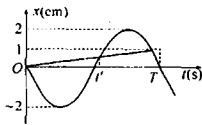


图 6-5-10

**例 8** 三个质量均为  $m$  的小球,由两根原长均为  $l_0$ 、劲度系数均为  $k$  的弹簧相连,置于光滑水平面上,试求此系统稳定振动时的振动周期(只考虑三球在同一直线上运动的情况).

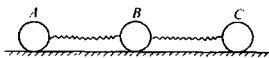


图 6-5-11

**解法一** 由于此系统在水平方向上不受外力作用,故振动中系统的质心位置不变.另外,本题的三球相同,两弹簧也相同,因而具有明显的对称性.由于有上述的两个特点,图 6-5-11 是一种显而易见的满足题述条件的情况,即图中  $B$  球不动,  $A$ 、 $C$  两球分别在  $B$  球两侧对称地振动(此时系统的质心在  $B$  球球心上).在这种情况下,  $C$  球(或  $A$  球)相当于被一个一端固定、劲度系数为  $k$  的弹簧连接、质量为  $m$  的弹簧振子,则其振动周期为  $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

此系统的稳定振动还有一种可能情况是  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三球均参与振动(当然此时仍需保证系统的质心位置不变).由于对称,可以假想将  $B$  球分为左、右两个质量各为  $\frac{m}{2}$  的部分,其左边部分与

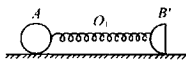


图 6-5-12

$A$  一道组成一个振动系统,右边部分与  $C$  一道组成一个振动系统.显然这两个振动系统有相同的结构,它们分别振动时,周期相同,也可以有相同的振幅.因此,当左右两边的两个振动系统这样配合起来振动时,实际上并不需要把  $B$  球拆开,这样也就形成了

A、B、C 三球同时参与整个系统的振动,其振动周期即为上述的左边部分(或右边部分)的振动周期.如图 6-5-12,对于左边部分(即由半个 B 球 B' 和 A 球组成的系统),其质心位置位于  $O_1$ ,平衡时, $O_1$  与 A 相距为  $\frac{l_0}{3}$ ,振动中  $O_1$  点不动,则对于 A 来说,相当于弹簧的  $O_1$  点固定, $O_1$  点左侧的弹簧连着 A 构成一个弹簧振子,而  $O_1$  点左侧这段弹簧对应的劲度系数  $k'$  为整条弹簧劲度系数的 3 倍,即  $k' = 3k$ ,则这一振动的周期为  $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$

综上所述可见系统振动周期有两个可能值,即  $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  和  $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ .

解法二 对于三球均发生振动的情况,也可通过演绎的方法来求解,具体解法如下

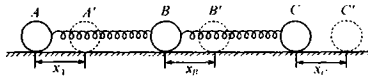


图 6-5-13

如图 6-5-13,设 A、B、C 为三球各自的平衡位置,某刻三球分别位于  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$ ,其对应的位移分别为  $x_A$ 、 $x_B$ 、 $x_C$ ,以图中向右的方向为坐标正方向,则此刻 A、B、C 三球所受合外力分别为

$$F_A = k(x_B - x_A)$$

$$F_B = k(x_C - x_B) + k(x_A - x_B) = k(x_A + x_C - 2x_B)$$

$$F_C = k(x_B - x_C)$$

若设  $k'_A = \frac{x_A - x_B}{x_A}k$ ,  $k'_B = \frac{2x_B - x_A - x_C}{x_B}k$ ,  $k'_C = \frac{x_C - x_B}{x_C}k$ ,则上述三式分别变为

$$F_A = -k'_A x_A$$

$$F_B = -k'_B x_B$$

$$F_C = -k'_C x_C$$

由于是稳定振动,则三球应有相等的振动周期,由上三式显然应该满足

$$k'_A = k'_B = k'_C$$

$$\text{即 } \frac{x_A - x_B}{x_A} = \frac{2x_B - x_A - x_C}{x_B} = \frac{x_C - x_B}{x_C}$$

由  $\frac{x_A - x_B}{x_A} = \frac{x_C - x_B}{x_C}$  可解得  $x_A = x_C$ ,以此代入  $\frac{x_A - x_B}{x_A} = \frac{2x_B - x_A - x_C}{x_B}$  中,可解得

$$x_B = -2x_A$$

所以  $k'_A = \frac{x_A - x_B}{x_A}k = 3k$

故得此时 A 球振动的周期(也就是 B 球和 C 球振动的周期)为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_4}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$$

**例 9** 图 6-5-14 中的实线和虚线分别表示沿 x 轴方向传播的正弦波在  $t=0$  和  $t=1$  秒时刻的波形。

(1) 求该波的频率和波速; (2) 写出  $x=0$  及  $x=1$  m 处的质点的振动表达式。

**分析** 在解决波动问题时,要充分注意波的传播具有双向性和周期性,即虚线波既可能是实线波向右传播若干个波长再加  $\frac{1}{4}$  个波长形成的,也可能是实线

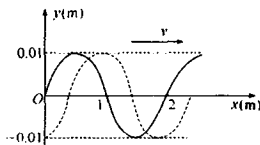


图 6-5-14

波向左传播若干个波长再加  $\frac{3}{4}$  个波长形成的,应充分考虑到所有的可能性。

**解** (1) 由图可知波长  $\lambda = 2$  m, 振幅  $A = 0.01$  m. 如果波向 x 轴正方向传播, 则

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(n + \frac{1}{4}\right)\lambda}{\Delta t} = 2\left(n + \frac{1}{4}\right) \text{ m/s}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \left(n + \frac{1}{4}\right) \text{ Hz}$$

如果波向 x 轴负方向传播, 则  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(n + \frac{3}{4}\right)\lambda}{\Delta t} = 2\left(n + \frac{3}{4}\right) \text{ m/s}$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \left(n + \frac{3}{4}\right) \text{ Hz}$$

(2) 如果波向 x 正方向传播, 则  $x=0$  处质点的振动方程

$$y = 4\cos(2\pi ft + \varphi_0) = 0.01\cos\left[\frac{(4n+1)\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right] \text{ m}$$

$x=1$  m 处质点的振动方程

$$y = 4\cos(2\pi ft + \varphi_0) = 0.01\cos\left[\frac{(4n+1)\pi}{2}t + \frac{3}{2}\pi\right] \text{ m}$$

如果波向 x 轴负方向传播, 则  $x=0$  处质点的振动方程

$$y = 4\cos(2\pi ft + \varphi_0) = 0.01\cos\left[\frac{(4n+3)\pi}{2}t + \frac{3\pi}{2}\right] \text{ m}$$

$x=1$  m 处质点的振动方程

$$y = 4\cos(2\pi ft + \varphi_0) = 0.01\cos\left[\frac{(4n+3)\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right] \text{ m}$$

### 【精选习题】

1. 如图 6-5-15 所示, A、B 两物体叠放在一起, A 与轻弹簧相连, 在光滑的水平面

上构成一弹簧振子.当振子以振幅  $s$  振动时,  $A, B$  间始终没有相对滑动, 则  $A$  从最大位移处向平衡位置滑动的过程中,  $A, B$  间的摩擦力是( )

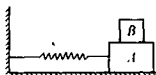


图 6-5-15

- A. 由小变大                      B. 由大变小  
C. 不变化                         D. 不能确定

2. 如图 6-5-16 所示, 在  $xy$  平面内有一沿  $x$  轴正方向传播的简谐横波, 波速为  $1\text{m/s}$ , 振幅为  $4\text{cm}$ , 频率为  $2.5\text{Hz}$ . 在  $t=0$  时刻,  $P$  点位于其平衡位置上方最大位移处, 则距  $P$  点  $0.2\text{m}$  的  $Q$  点( )

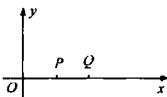


图 6-5-16

- A. 在  $0.1\text{s}$  时的位移是  $4\text{cm}$   
B. 在  $0.1\text{s}$  时的速度最大  
C. 在  $0.1\text{s}$  时的速度向下  
D. 在  $0.1\text{s}$  时的加速度最大

3. 如图 6-5-17 所示, 一个弹簧振子在光滑的水平面上振动, 如果当它恰好运动到平衡位置时有一块粘泥竖直落在它上面, 并随着它一起振动, 那么它的振动情况与原先比较( )

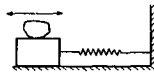


图 6-5-17

- A. 振幅将减小                      B. 振幅将不变  
C. 周期将增大                      D. 周期将不变

4. 一弹簧振子做简谐运动, 周期为  $T$ ( )

- A. 若  $t$  时刻和  $(t+\Delta t)$  时刻振子运动位移的大小相等、方向相同, 则  $\Delta t$  一定等于  $T$  的整数倍  
B. 若  $t$  时刻和  $(t+\Delta t)$  时刻振子运动速度的大小相等、方向相同, 则  $\Delta t$  一定等于  $\frac{T}{2}$  的整数倍  
C. 若  $\Delta t = T$ , 则在  $t$  时刻和  $(t+\Delta t)$  时刻振子运动的速度一定相等  
D. 若  $\Delta t = \frac{T}{2}$ , 则在  $t$  时刻和  $(t+\Delta t)$  时刻弹簧的长度一定相等

5. 利用盛沙的漏斗演示简谐振动的图像, 如果考虑漏斗里砂子逐渐减少, 则沙摆的频率将( )

- A. 逐渐增大                         B. 逐渐减少  
C. 先增大后减少                      D. 先减少后增大

6. 如图 6-5-18 所示, 半径为  $R$  的光滑内球面, 球心在  $C, O$  点在球心正下方, 一小球在距  $O$  点很近的  $A$  点, 由静止释放, 同时另一球在  $O$  点正上方某处自由下落, 要使两球在  $O$  点相碰, 则自由下落的小球高度是多少?(球的大小忽略)

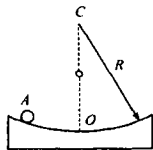


图 6-5-18

7. 图 6-5-19 中实线是一列简谐波在某一时刻的波形图线, 虚线是 0.2s 后它的波形图线. 这列波可能的传播速度是\_\_\_\_\_.

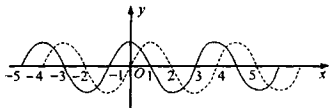


图 6-5-19

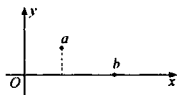


图 6-5-20

8. 图 6-5-20 中有一列正弦横波, 沿  $x$  轴传播, 图中  $a, b$  是绳上两点. 它们在  $x$  轴方向上的距离小于一个波长, 当  $a$  点振动到最高点时,  $b$  点恰经过平衡位置向上运动. 试在图中  $a, b$  之间画出两个波形分别表示: (1) 沿  $x$  轴正方向传播的波; (2) 沿  $x$  轴负方向传播的波.

9. 一列横波在  $x$  轴线上传播着, 在  $t_1 = 0$  和  $t_2 = 0.005\text{s}$  时的波形曲线如图 6-5-21 所示. (1) 由图中读出波的振幅和波长; (2) 设周期大于  $(t_2 - t_1)$ , 如果波向右传播, 波速多大? 如果波向左传播, 波速又是多大; (3) 设周期小于  $(t_2 - t_1)$ , 并且波速为  $6000\text{m/s}$ , 求波的传播方向.

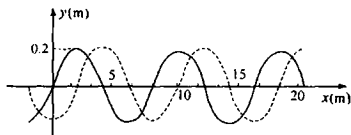


图 6-5-21

10. 用一根劲度系数为  $k$  的轻质弹簧, 将两个质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的木块连接起来, 放在光滑的水平桌面上, 再用细绳将木块拉近, 使弹簧处于压缩状态, 然后将细绳烧断. 如果木块做简谐运动, 试求木块的振动周期.

11. 如图 6-5-22 所示, 劲度系数都是  $100\text{N/m}$  的两根弹簧共同系住一个质量为  $M = 25\text{kg}$  的木块, 地面水平且光滑. 将  $M$  拉离平衡位置  $10\text{cm}$  后由静止释放. (1) 求木块振动的周期; (2) 在木块平衡位置上方  $1\text{cm}$  高处, 有一团质量  $m = 0.4\text{kg}$  的粘泥, 当木块通过平衡位置时恰好落到木块上并随之一起振动. 求此后的振幅.

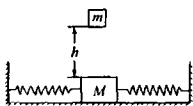
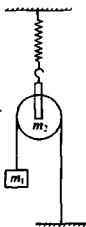


图 6-5-22

12. 不能发生形变的天花板上悬挂着一只轻质弹簧, 弹簧下端挂着一铁块处于静止状态, 这时弹簧伸长量为  $L$ . 在离铁块的正下方  $\frac{3}{2}L$  处有一枪口, 从枪口射出质量等于铁块质量的橡皮泥做成的子弹, 初速度  $v_0 = 3\sqrt{gL}$ . 子弹击中铁块后和铁块一起振动起来, 求: (1) 系统振动周期; (2) 铁块从击中开始向上运动的最大位移; (3) 铁块从开始振动到第一次达到最大速度所需时间.



13. 如图 6-5-23 所示, 一个质量为  $m_2$  的光滑滑轮由劲度系数为  $k$  的轻弹簧吊在天花板上, 一根轻绳一端悬挂一个质量为  $m_1$  的重物, 另一端竖直固定在地板上. 试证明重物沿竖直方向的振动是简谐运动, 并求其周期.



14. 在边长为  $a$  的正方形四个顶点上分别固定电量均为  $Q$  的四个点电荷, 在对角线交点上放一个质量为  $m$ 、电量为  $q$  (与  $Q$  同符号) 的自由点电荷. 若将  $q$  沿着对角线移动一个很小的距离, 它是否会做周期性振动? 若会, 其周期是多少? (忽略重力)

15. 如图 6-5-24 所示, 质量为  $m$  的小球用轻杆悬挂, 两侧用劲度系数为  $k$  的弹簧连接, 杆自由下垂时, 弹簧无形变. 图中  $a$ 、 $l$  已知, 求摆杆做简谐振动的圆频率  $\omega$ .

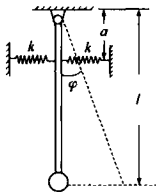


图 6-5-24

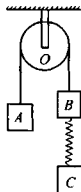


图 6-5-25

16. 如图 6-5-25 所示, 物体  $A$ 、 $B$  用细绳相连, 悬挂于定滑轮  $O$  上. 物体  $C$  用劲度系数为  $k = mg/l$ 、原长为  $l$  的弹簧悬挂于  $B$  下. 已知它们的质量关系为  $m_A = 2m$ ,  $m_B = m_C = m$ . 开始时系统静止, 且使弹簧保持原长释放. 若不计滑轮与绳的质量和摩擦, 试求  $C$  相对于  $B$  的运动规律.

### 问题与讨论 等效方法

物理中的等效方法就是把实际的复杂的物理过程转化为等效的理想的简单的过程来研究和处理. 这是科学研究的一种重要方法, 也是在物理教学中处理问题时常用的方法.

#### 1. 用等效方法研究振动规律

在处理一些复杂的物理过程时, 经常把它等效地看作是某些简单物理过程的迭加, 而这样简单的物理过程既直观又便于解决, 这就是迭加原理(独立作用原理)的思想方法. 等效是前提, 只有这些简单过程同时存在时, 能互不相干, 保持其独立作用效果, 其相关的物理量才能迭加. 因此在研究简谐振动时, 我们把简谐运动过程等效看作是匀速

圆周运动的投影(具体可见本章第一节知识要点),写了简谐振动的方程  $x = A \cos \omega t$  和

它的周期公式  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  等等.

## 2. 组合弹簧振子的等效劲度系数和等效质量

所谓组合弹簧振子,就是由多根弹簧组成的振子或者是振子不止一个的情况.

### (1) 多弹簧系统的串、并联的等效劲度系数

设有几个劲度系数分别为  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  的轻弹簧串联起来,组成一个新弹簧组. 弹簧组的等效劲度系数为  $\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$ .

如果上述几个弹簧并联在一起构成一个新的弹簧组,那么弹簧组的等效劲度系数为  $k = \sum_{i=1}^n k_i$ .

**例 1** 如图 6-7-1 所示,劲度系数分别为  $k_1, k_2$  的两个轻弹簧上端固定,下端用一段细绳连在一起并悬一光滑轻质动滑轮,滑轮下挂一质量为  $m$  的小物体. 当拉动  $m$  在竖直方向作小幅振动过程中,求  $m$  的振动周期.

**解** 这里我们必须抓住弹簧串、并联的本质特征:串联的本质特征是每根弹簧受力相同;并联的本质特征是每根弹簧形变相同. 由此可见图 6-7-1 中两根弹簧是串联.

当  $m$  向下偏离平衡位置  $\Delta x$  时,弹簧组伸长了  $2\Delta x$ ,增加的弹力为

$$F = 2\Delta x k = 2\Delta x \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$m$  受到的合外力(弹簧和动滑轮质量都忽略)

$$\sum F = 2 \times 2\Delta x \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{4k_1 k_2}{k_1 + k_2} \Delta x$$

所以  $m$  的振动周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{4k_1 k_2}} = \pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

### (2) 振子不只一个的等效质量

**例 2** 如图 6-7-2 所示,弹簧与细绳质量可忽略,不计摩擦.  $m_1, m_2, M$  及  $k$  均为已知. 设细绳较长,能使滑轮上、下振动一段时间,试求滑轮的振动周期.

**解** 设某时刻弹簧的伸长是  $x$ ,各物体加速度的方向如图 6-7-2 所示

$$\begin{cases} 2T + Mg - kx = Ma \\ m_1 g - T = m_1 a_1 \\ T - m_2 g = m_2 a_2 \\ a_1 - a_2 = 2a \end{cases}$$

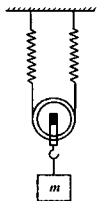


图 6-7-1

消去  $a_1, a_2$  和  $T$ , 可得

$$\left(M + \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}\right)g - kx - \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}a = Ma \quad (1)$$

假设系统平衡时弹簧伸长  $\Delta x_0$ , 此时  $a = 0$ , 即

$$\left(M + \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}\right)g - k\Delta x_0 = 0$$

$$\Delta x_0 = \left(M + \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}\right)\frac{g}{k}$$

如果某时刻  $M$  向上偏离平衡位置  $\Delta x$ , 那么  $x = \Delta x_0 - \Delta x$

将②、③式代入①式, 可有  $k\Delta x - \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}a = Ma$

$$\sum F = -k\Delta x = -\left(M + \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}\right)a$$

所以这个振动系统的等效质量是  $M + \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}$ , 振动周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}\left(M + \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}\right)}$$

### 3. 异型单摆的等效重力加速度和等效摆长

所谓的异型单摆, 就是各种各样形式各异的单摆, 其中  $g$  和  $l$  的含意往往发生了某些变化, 因此必须采用等效方法求出等效重力加速度和等效摆长。

**例 3** 如图 6-7-3 所示, 用一根细绳将一个密度  $\rho = 0.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  的小球拴在装有水的容器底上。若使小球稍微偏离平衡位置而振动起来, 它的周期将是它自由悬挂在空气中振动周期的几倍(水的阻力不计)。

**解** (1) 若将小球自由悬挂在空气中, 设它的摆长是  $l$ , 则它振动的

$$\text{周期 } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(2) 将小球拴在装满水的容器底上时, 小球受到三个力: 重力、浮力和绳子的拉力, 其中绳子的拉力是径向的, 因此不会使小球产生切向的加速度。重力和浮力的合力

$$F = \rho_k gV - mg = 10^3 \times g \times \frac{m}{0.8 \times 10^3} - mg = \frac{1}{4}mg$$

即小球受到一个等效的重力加速度  $g' = \frac{F}{m} = \frac{mg}{4m} = \frac{1}{4}g$

因此其振动周期为  $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{1}{4}g}} = 2 \times 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2T$

可见它在水中的振动周期比在空气中增大了 1 倍。

**例 4** 图 6-7-4 为一种记录地震的水平摆, 摆球  $m$  固定在边长为  $l$ , 质量可忽略不计

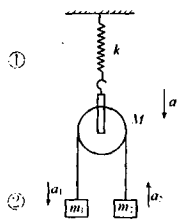


图 6-7-2

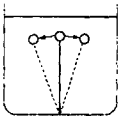


图 6-7-3

的等边三角形框架的顶点  $A$  上, 它的对边  $BC$  跟竖直线成不大的夹角  $\alpha$ , 摆球可绕固定轴  $BC$  摆动. 求摆球做微小摆动的周期.

**分析** 因为摆绕  $BC$  轴摆动, 即摆球的摆动平面是  $BC$  段的中垂面, 所以摆长为  $A$  到  $BC$  之距离. 回复力应当是重力在平衡位置时沿摆长方向的分量再分解到摆球摆动过程中摆弧切线方向上的分量, 即周期公式中的  $g$  应当是重力加速度沿平衡位置时摆长方向的分量.

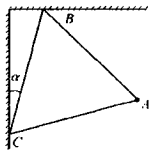


图 6-7-4

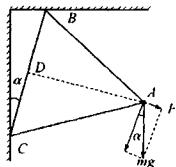


图 6-7-5

**解** 过  $A$  作  $BC$  边的垂线  $AD$ ,  $AD$  的长度  $l' = l \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ , 即为摆长, 如图 6-7-5 所示. 由于重力在  $DA$  方向上的分量为  $F = mg \sin \alpha$ , 所以  $g' = g \sin \alpha$ . 于是可得此摆的周期

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g'}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{3}l}{2g \sin \alpha}}$$

**评析** 对于异形摆, 设法求出其有效摆长和回复力与重力的关系, 是顺利找出周期的关键.

#### 4. 等效方法在电学中的应用举例

串联电路的总电阻等于各个导体的电阻之和, 并联电路总电阻的倒数等于各个导体的电阻的倒数之和. 这些总电阻都可以看作是等效电阻, 可以用等效电路来研究. 对于一个实际电路, 常是有多个用电器串联、并联混合在一起, 往往相当复杂, 这时, 就要进行电路分析, 画出等效电路, 化繁为简, 变难为易, 使问题得到解决. 基于电源的独立性, 电路中的电流是可迭加的, 这就为解决含源电路问题提供了依据, 特别用来理解含有电势而无电流的电路——例如匀强磁场中作切割磁力线平移运动(平动)的闭合线圈——更显出它的优越性.

实践证明, 利用等效的方法来处理复杂的物理问题, 从而学会这一科学思想方法, 确能促进学生知识、技能的“迁移”, 取得举一反三、触类旁通的效果.

## 第七章 分子运动论和热力学第一定律

## 第一节 分子运动论

## 【知识要点】

## 1. 分子运动论的三个基本观点

(1) 物质是由大量分子组成的, 组成物质的分子是很小的, 其直径的数量级一般为  $10^{-10}$  m; 分子质量数量级一般为  $10^{-27}$  kg. 1 mol 任何物质含有相同的分子数, 即  $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , 这个常数称为阿伏伽德罗常数.

(2) 物质分子在永不停息地作无规则运动, 扩散现象和布朗运动可表明这一点.

(3) 分子间同时存在着相互作用的引力和斥力, 且引力和斥力随分子间距的变化而变化, 变化图线如图 7-1-1. ( $r_0 = 10^{-10}$  m)

## 2. 气体分子运动的微观运动特征

气体分子间距较大, 分子直径远小于分子平均间距, 除分子间碰撞瞬间外, 可认为气体分子作自由热运动, 但因分子间频繁碰撞, 所以分子向各方向运动的机会相等.

对理想气体, 由于分子间忽略相互作用力, 相互作用就在分子间碰撞和分子与器壁碰撞间存在. 可推出, 理想气体的压强  $p$ 、分子的平均动能  $\bar{\epsilon}$  和气体的热力学温度间满足关系

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}$$

又因为  $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$ , 则  $p = nkT$

式中  $n$  为单位体积内的分子数, 即分子数密度,  $m$  为<sup>0</sup>气体分子质量,  $k$  为玻耳兹曼常数,  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ .

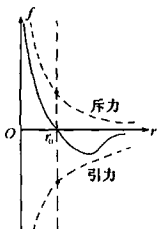


图 7-1-1

## 【例题分析】

**例1** 已知空气的摩尔质量是  $M = 2.9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ , 则空气中气体分子的平均质量多大? 成年人作一次深呼吸, 约吸入  $450 \text{ cm}^3$  的空气, 则作一次深呼吸吸入空气的质量是多少? 所吸入的气体分子数约是多少? (取一位有效数字)

**分析与解** 日常生活状况下, 可认为空气处于标准状况下, 则  $1 \text{ mol}$  空气体积为  $V = 22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ , 则

$$\text{分子的平均质量 } m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{29 \times 10^{-3}}{6.02 \times 10^{23}} = 5 \times 10^{-26} (\text{kg})$$

$$\text{吸入空气质量 } m = \frac{V'}{V} \times M = \frac{450 \times 10^{-6}}{22.4 \times 10^{-3}} \times 29 \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-4} (\text{kg})$$

$$\text{吸入空气的分子数 } n = \frac{V'}{V} \times N_A = \frac{450 \times 10^{-6}}{22.4 \times 10^{-3}} \times 6.02 \times 10^{23} = 1 \times 10^{20} (\text{个})$$

**例2** 为了使玻璃容器达到高真空, 则在抽气时应加热器壁, 以驱走吸附的气体。现有一个半径为  $10 \text{ cm}$  的球形容器, 其壁上吸附一层厚度为分子直径的分子层, 每个分子的截面积为  $10^{-15} \text{ cm}^2$ 。试问在温度  $300^\circ \text{C}$ , 且吸附的分子全部进入容器空间时, 压强将增大多少?

**分析与解** 对容器中气体, 其压强  $p$  为  $p = nkT$

而  $n = \frac{N}{V}, V = \frac{4}{3} \pi R^3$  ( $R$  为球形容器半径)

因为加热, 容器增加的分子数为  $\Delta N = \frac{4\pi R^2}{S_0}$  ( $S_0$  为每个分子截面积)

所以在吸附分子全部进入容器空间时, 压强增量  $\Delta p$  为

$$\Delta p = \Delta nkT = \frac{\Delta N}{V} kT = \frac{3kT}{S_0 R} = \frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 573}{10^{-15} \times 10^{-4} \times 10 \times 10^{-2}} = 2.4 (\text{Pa})$$

**例3** 当原子弹 ( $m = 1 \text{ kg}$ , 钚<sup>232</sup>Pu) 爆炸时, 每个钚原子辐射出一个放射性粒子。假设风将这些粒子均匀吹散在整个大气层, 试计算落在地面附近体积  $V = 1 \text{ dm}^3$  的空气中放射性粒子的数目。地球半径  $6 \times 10^6 \text{ m}$ , 空气的平均摩尔质量为  $29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ 。

**分析与解** 由题意, 散落在单位体积大气层的放射性粒子与该状态下单位体积中所包含的空气分子数应相等。设整个大气层中放射性粒子数为  $N$ , 则

$$N = \frac{m}{\mu \rho_0} N_A \approx 2.5 \times 10^{24} \text{ 个}$$

而大气层中含有总空气分子个数  $N_0$  为  $N_0 = \frac{m_0}{\mu_0} N_A = \frac{4\pi R^2 \rho_0}{g \mu_0} N_A$

标准状况下,  $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 解得  $N_0 = 9.6 \times 10^{43}$  (个)

则标准状态下, 落在地面附近  $V = 1 \text{ dm}^3$  体积内的空气分子数  $n_0$  为

$$n_0 = \frac{N_A}{V_0} = 2.7 \times 10^{22} (\text{个}/\text{dm}^3)$$

放射性粒子在地面附近  $1\text{dm}^3$  体积内的个数  $n$  满足  $\frac{n}{N} = \frac{n_0}{N_0}$ , 所以  $n = \frac{n_0}{N_0} N = 700$  (个/ $\text{dm}^3$ )

### 【巩固习题】

1. 容器内贮有氧气, 它的压强为  $p = 1.013 \times 10^5 \text{Pa}$ , 温度为  $27^\circ\text{C}$ . 求: (1) 单位体积内的分子数; (2) 氧气的密度; (3) 氧分子的质量; (4) 分子间的平均距离; (5) 分子的平均平动动能.

2. 试用分子运动论的知识, 证明理想气体的压强  $p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}$ . 其中  $n$  为分子数密度,  $\bar{\epsilon}$  为分子平均平动动能.

3. 体积为  $1\text{cm}^3$  的安全瓶装标准状态下的空气, 放在压强可以认为等于零的宇宙空间, 在瓶上穿一个小孔, 假设每秒钟从小孔飞出一亿个分子, 则经多长时间安全瓶中压强等于零?

4. 质量  $50.0\text{g}$ 、温度为  $18^\circ\text{C}$  的氦气装在容积为  $10.0\text{L}$  的密闭容器中, 容器以  $200\text{m/s}$  的速率作匀速直线运动. 若容器突然停止, 定向运动的动能全部转化为分子热运动的动能, 则平衡后氦气的温度增大多少?

5. 已知一密闭容器内气体分子平均间距为  $3 \times 10^{-9}\text{m}$ , 温度为  $27^\circ\text{C}$ , 试估算容器内的气体压强为多大? (取 1 位有效数字)

6. 已知在真空中, 动能为  $E_k$ 、垂直向器壁飞行的银原子持续到达器壁上产生的压强为  $p$ . 若银原子到达器壁后便吸附在器壁上, 形成银层的密度为  $\rho$ , 银的摩尔质量为  $\mu$ , 问银层增厚的速率多大?

7. 立方体容器中含有  $k = 10^{-3}\text{mol}$  的理想气体, 设在任一时刻垂直于立方体六个面中每个面运动的分子数是相等的. 若分子的质量  $m_0 = 3 \times 10^{-23}\text{g}$ , 分子热运动的平均速度  $v = 500\text{m/s}$ . 分子和器壁的碰撞可认为是完全弹性的. 求气体的压强.

## 第二节 理想气体的状态方程

### 【知识要点】

#### 1. 理想气体模型

理想气体是对真实气体的一种抽象, 它严格遵循气体的三个实验定律. 常温常压下

的实际气体可认为是理想气体。

从微观结构看,理想气体具有下列特征:

- (1)分子是具有有一定质量但没有大小的小球;
- (2)除了相互间或分子与器壁间的弹性碰撞外,可忽略分子间的相互作用,因此理想气体可忽略分子势能。

## 2. 理想气体的状态参量

理想气体处于平衡状态时,描述其宏观状态的物理量称为状态参量,有压强  $p$ 、体积  $V$ 、温度  $T$  以及各化学成分的质量  $m$ 。

温度是从宏观上描述物体冷热程度的物理量。从微观上看是表征分子无规则热运动剧烈程度的物理量,是理想气体分子平均平动动能大小的标志。若用  $\bar{\epsilon}$  表示分子的平均平动动能,  $T$  表示理想气体温度,  $n$  表示分子数密度, 则  $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2}nkT$  ( $k$  为玻耳兹曼常数)

理想气体体积指气体分子所能到达的空间范围。

理想气体压强等于单位时间内分子碰撞器壁时施加给单位面积器壁的平均冲量。则

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon} = nkT$$

## 3. 气体三个实验定律

(1)玻意耳定律: 常温常压下一定质量的气体, 在温度保持不变时, 它的压强和体积的乘积是一个常数。

$$pV = C_1$$

常数  $C_1$  在不同的温度时有不同的数值。

(2)查理定律: 常温常压下一定质量的气体, 在体积保持不变时, 它的压强与热力学温度成正比。

$$p = C_2 T$$

常数  $C_2$  在不同体积时有不同的数值。

(3)盖·吕萨克定律: 常温常压下一定质量的气体, 在压强保持不变时, 它的体积与热力学温度成正比。

$$V = C_3 T$$

常数  $C_3$  在不同压强下有不同的数值。

## 4. 理想气体的状态方程

根据气体三个实验定律(玻意耳定律、查理定律和盖·吕萨克定律), 可推出理想气体平衡状态下各状态参量之间的关系, 即状态方程

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad \text{或} \quad p = nkT$$



$m, \mu$  分别为理想气体质量和摩尔质量.  $R$  为普适气体恒量,  $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 8.21 \times 10^{-2} \text{ atm} \cdot \text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $k$  为玻耳兹曼常数,  $n$  为理想气体单位体积内的分子数.

### 5. 混合气体的道尔顿分压定律

英国科学家道尔顿提出:混合气体的压强等于各组气体的分压强之和.用  $p$  表示混合气体的压强,  $p_1, p_2, p_3, \dots$  表示各组气体的分压强,即

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

这就是道尔顿分压定律.

$n$  种不同的气体,混合地装在同一容器中,若单位体积内所含各种气体的分子数分别为  $n_1, n_2, \dots$ , 则单位体积内的总分子数  $n$  为  $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots$

若平衡态时,各气体的温度均为  $T$ , 则  $p_1 = n_1 kT$ ,  $p_2 = n_2 kT$ ,  $p_3 = n_3 kT, \dots$

由道尔顿分压定律  $p = n_1 kT + n_2 kT + n_3 kT + \dots = nkT$

由理想气体状态方程,  $p = nkT$ , 可见理想气体状态方程也适用混合气体.

### 【例题分析】

**例 1** 一容器中盛有氮气和氢气的混合气体,当温度为  $T$  时,氮分子全部分离成原子,这时压强为  $p$  (氢的分离忽略不计),当温度为  $3T$  时,两种气体全部分离成原子,容器中压强等于  $4p$ . 问混合气体中氮和氢的质量比是多少?

**分析与解** 设容器体积为  $V$ , 而氮气、氢气的质量为  $m_N, m_H$ , 氮气、氢气的摩尔质量为  $\mu_{N_2}, \mu_{H_2}$ , 当分离成原子后,摩尔质量各将变成原来的一半.

$$\text{在温度 } T \text{ 时,氮分离成原子后气体压强 } p_{N_1} \text{ 为 } p_{N_1} = \frac{m_N RT}{\frac{\mu_{N_2}}{2} V} = \frac{2m_N RT}{\mu_{N_2} V} \quad (1)$$

$$\text{此时,氢气压强 } p_{H_1} \text{ 为 } p_{H_1} = \frac{m_H RT}{\mu_{H_2} V} \quad (2)$$

$$\text{由题意和道尔顿分压定律 } p = p_{N_1} + p_{H_1} = \left( \frac{2m_N}{\mu_{N_2}} + \frac{m_H}{\mu_{H_2}} \right) \frac{RT}{V} \quad (3)$$

在温度为  $3T$  时,氮原子气体压强  $p_{N_2}$  和氢原子气压强  $p_{H_2}$  有关系

$$4p = p_{N_2} + p_{H_2} = \left( \frac{2m_N}{\mu_{N_2}} + \frac{2m_H}{\mu_{H_2}} \right) \frac{R \cdot 3T}{V} \quad (4)$$

$$\text{由 } (3), (4) \text{ 得 } \frac{1}{4} = \frac{\frac{2m_N}{\mu_{N_2}} + \frac{m_H}{\mu_{H_2}}}{\frac{2m_N}{\mu_{N_2}} + \frac{2m_H}{\mu_{H_2}}} \cdot \frac{1}{3}, \quad \frac{m_N}{m_H} = \frac{\mu_{N_2}}{\mu_{H_2}} = \frac{28}{2} = 14$$

**例 2** 在一个带活塞的圆筒内装配着著名的托里拆利装置,如图 7-2-1 所示,在水银棒上方有氢气,在圆筒内有空气.在初始状态,水银柱高度为 70cm,空气压强为 100cmHg,温度为 273K.然后向上提升活塞,等温下直至状态 2.此时水银柱高度降为 40cm,空气压强为 60cmHg,继而保持体积不变,使温度升高到  $T_3$ ,此时水银柱的高度为 50cm,最后,使温度变为  $T_4$ ,水银柱高度为 45cm,而空气压强没有变化,试求在最后的状态下氢气的温度和压强.

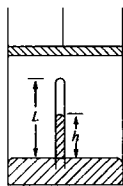


图 7-2-1

**分析与解** 在初始状态,空气、氢气温度  $T_1 = 273\text{K}$ ,空气压强  $p_1 = 100\text{cmHg}$ ,氢气压强  $p'_1 = 30\text{cmHg}$ .设管子长度为  $L$ ,因为圆筒截面积远大于管子截面积,所以管内液面升降对管外水银面升降影响可忽略不计,则氢气体积  $V_1 = (L - 70)S_0$ ,  $S_0$  为管子截面积,设此时空气体积为  $V_1$ .

到状态 2 时,空气、氢气温度  $T_2 = 273\text{K}$ ,空气压强  $p_2 = 60\text{cmHg}$ ,氢气压强  $p'_2 = 20\text{cmHg}$ ,氢气体积  $V_2 = (L - 40)S_0$ ,空气体积可认为仍为  $V_1$ ,则氢气从初状态到状态 2,由玻意耳定律得  $30(L - 70) = 20(L - 40)$  ①

解得  $L = 130(\text{cm})$

当再等容升温至  $T_3$  时,设空气压强为  $p_3$ ,则氢气压强为  $p'_3 = p_3 - 50$ ,氢气体积  $V_3 = (L - 50)S_0$ ,空气体积仍为  $V_1$ ,则对氢气,应用状态方程可得

$$\frac{20(L - 40)}{273} = \frac{(p_3 - 50)(L - 50)}{T_3} \quad ②$$

$$\text{对空气,由查理定理得 } \frac{60}{273} = \frac{p_3}{T_3} \quad ③$$

由②,③并代入  $L$ ,可得第 3 状态温度  $T_3$  和空气压强  $p_3$  为

$$T_3 = 364(\text{K}) \quad p_3 = 80(\text{cmHg})$$

当最后温度变为  $T_4$  时,因空气压强  $p_4 = p_3$ ,则氢气压强  $p'_4 = p_4 - 45$ ,氢气体积为  $V_4 = (L - 45)S_0$ ,对氢气,在第 3 状态到第 4 状态用状态方程

$$\frac{(p_3 - 50)(L - 50)}{T_3} = \frac{(p_4 - 45)(L - 45)}{T_4} \quad ④$$

代入  $p_3, T_3, L, p_4$  可解得

$$T_4 = 451.2(\text{K}) \quad p_4 = p_3 - 45 = 80 - 45 = 35(\text{cmHg})$$

**例 3** 如图 7-2-3 所示,两个截面面积不同,两端开口的光滑管组成一个气缸被竖直固定着,用  $A, B$  两个被细绳连接的活塞密封一定质量的气体,两活塞均可在各自的管中作无摩擦滑动.活塞的总质量为  $m = 4.5\text{kg}$ ,两管截面面积之差为  $\Delta S = 20\text{cm}^2$ .当外界大气压为  $1.0 \times 10^5\text{Pa}$  时,被密封的气体体积为  $8.0 \times 10^{-8}\text{m}^3$ ,而活塞处于平衡状态,在上面活塞上加一个质量为  $\Delta m = 0.50\text{kg}$  的砝码,活塞位移多少后,再次处平衡状态?

(设活塞在移动过程中, 气体温度不变, 活塞在滑动过程中, 不会碰到管的连接部分,  $g = 10\text{m/s}^2$ )

**分析与解** 活塞整体  $A, B$ , 在没移动时, 设气体压强为  $p_1$ , 体积为  $V_1$ , 则

$$p_1 \Delta S = p_0 \Delta S + mg \quad (1)$$

加上质量为  $\Delta m$  的砝码后, 设活塞下移  $x$ , 则重新平衡时

$$p_2 \Delta S = p_0 \Delta S + (m + \Delta m)g \quad (2)$$

$p_2$  为后一状态的气体压强.

设重新平衡后的气体体积为  $V_2$ , 则  $V_1 - V_2 = x \Delta S \quad (3)$

又由状态方程  $p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (4)$

解①, ②, ③, ④得  $x = \frac{\Delta mg V_1}{p_0 \Delta S^2 + (m + \Delta m)g \Delta S} = 0.080(\text{m})$

### 【巩固习题】

1. 在容积为  $V$  的容器中, 盛有用以实验的气体(可视为理想气体), 压强为  $p_1$ , 连同容器称重得重量为  $G_1$ , 然后缓慢放掉一部分气体, 压强降至  $p_2$ , 再称得重量为  $G_2$ . 问在 1 大气压强, 此气体密度为多大? 设整个过程在等温下进行.

2. 如图 7-2-4 所示, 一个带阀门的气缸, 缸内有一个弹簧, 其两端分别与缸底、活塞相连, 活塞横截面积  $S = 1.0 \times 10^{-3} \text{m}^2$ , 现在先打开阀门, 使气缸内部与外界  $27^\circ\text{C}$ 、 $1.0 \times 10^5 \text{Pa}$  的大气相通, 此时活塞距气缸底部的距离为  $10\text{cm}$ , 处于平衡. 然后关闭阀门, 在活塞上面放  $40\text{kg}$  的重物, 活塞下降  $5\text{cm}$  而平衡, 对气缸加热, 使缸内气体温度上升达到  $57^\circ\text{C}$ , 同时在活塞上面堆放重物, 使活塞保持不动, 最后打开阀门, 并使缸温降至  $27^\circ\text{C}$ . 问活塞最终静止在什么地方? (取  $g = 10\text{m/s}^2$ 、活塞质量  $4\text{kg}$ , 摩擦不计, 并假设弹簧都在其弹性限度内)

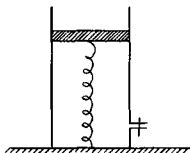


图 7-2-4

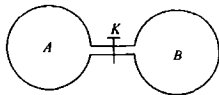


图 7-2-5

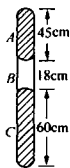


图 7-2-6

3. 如图 7-2-5 所示  $A, B$  两容器容积相等, 用一细玻璃管连接, 玻璃管上有开关  $K$ ,  $K$  闭合时  $t_A = 0^\circ\text{C}$ ,  $p_A = 1$  大气压;  $t_B = 40^\circ\text{C}$ ,  $p_B = 0.5$  大气压,  $K$  打开时, 混合后气体的

温度为  $t = 15^\circ\text{C}$ 。求打开  $K$  后容器内的压强。

4. 如图 7-2-6 所示, 在一根上端开口, 下端封闭的竖直玻璃管内, 下段有 60cm 长的水银柱, 中段有 18cm 的空气柱, 上段有 45cm 长的水银柱, 水银面恰与管口齐平。已知大气压强  $p_0 = 75\text{cmHg}$ , 若使玻璃管绕下端在竖直平面内缓慢地转一周(设温度不变), 问管中空气柱的长度变为多少?

5. 用贮气罐通过阀门向一体积为  $V_0$  的真空室充气, 贮气罐的体积为  $V$ , 罐内气体的压强为  $p$ , 当气罐与真空室相连后, 便打开阀门, 使之与真空室连通。达到平衡后, 关闭阀门, 并换一个新的气罐与真空室相连。打开阀门让气体进入真空室后再关闭阀门, 以后再换一个气罐。如此持续向真空室充气, 直到真空室中气体的压强为  $p_0$ 。问共需多少个气罐? 假定充气过程中温度保持恒定。

6. 一辆质量为  $M$ 、长度为  $L$  的车厢可以无摩擦地沿水平地面运动。车厢内充满总质量为  $m$  的气体, 正中间由可以动的竖直轻隔板分开。气体的初始温度为  $T$ 。右半侧车厢内装有加热器, 使气体温度加热到  $2T$ , 在左半侧车厢内气体保持初始温度。试求车厢发生的位移。

7. 一内径均匀的 U 形细玻璃管竖直倒立放置,  $A$  端封闭,  $D$  端为开口, 如图 7-2-7 所示, 当竖直管  $AB$  内空气温度为  $27^\circ\text{C}$  时, 管内封闭的空气柱长为 40cm, U 形管水平部分  $BC$  长 5cm, 充满了水银, 当  $AB$  管内的气温发生变化时, 水平部分的水银将发生移动, 设管外大气压强恒为  $75\text{cmHg}$ , 试问要使管内水银离开水平管  $BC$ ,  $AB$  管内空气温度应是多少?

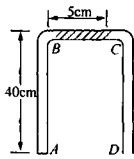


图 7-2-7

8. 如图 7-2-8 所示, 在一辆静止的小车上, 竖直固定一两端开口内径均匀的 U 形管, U 形管的竖直部分与水平部分的长度均为  $l$ , 管内充有水银, 两管内水银面距管口均为  $l/2$ , 现将 U 形管端均密闭, 并让小车水平向右作匀加速运动, 运动中 U 形管两管内水银面的高度差恰为  $l/3$ , 求小车的加速度。(设大气压强为  $\rho gl$ , 水银密度为  $\rho$ , 温度不变)

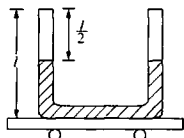


图 7-2-8

9. 在一个横截面积为  $S$  的密闭容器中, 有一个质量为  $m$  的活塞把容器中的气体分成两部分, 活塞可在容器中无摩擦地滑动, 当活塞处于平衡时, 活塞两边气体的温度相同, 压强都是  $p$ , 体积分别为  $V_1$  和  $V_2$ , 如图 7-2-9, 现在用某种方法使活塞稍微偏离平衡位置, 然后放开, 活塞将在两边气体压力的作用下来回运动, 整个系统可看作是恒温的。(1) 求活塞运动的周期, 将结果用  $p, V_1, V_2, m$  和  $S$  表示; (2) 求气体温度  $t = 0^\circ\text{C}$  时的周期  $\tau$  与气体温度  $t' = 30^\circ\text{C}$  时的周期  $\tau'$  之比。

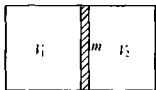


图 7-2-9

10. 如图 7-2-10 所示, 两个固定的水平气缸, 由水平硬杆相连的活塞面积  $S_A = 0.8\text{m}^2, S_B = 0.2\text{m}^2$ , 两气缸通过一根带阀门  $K$  的细管连通, 最初阀门关闭,  $A$  内贮有气体,

$B$  内为真空,两活塞分别与各自气缸底相距  $a = b = 30\text{cm}$ ,活塞静止.今将阀门  $K$  打开,活塞将向何处移动? 移动多远? (设温度不变,不计摩擦,大气压为  $p_0$ )

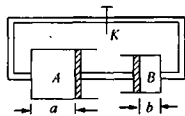


图 7-2-10

### 第三节 热力学第一定律和热力学第二定律

#### 【知识要点】

#### 一、热力学第一定律

##### 1. 功、热量和内能的变化

对理想气体从一个状态到另一状态的准静态变化过程中,热力学系统与外界将发生能量的交换,同时气体内能将改变,做功和传热是改变理想气体内能的两种不同形式.

##### (1) 功

对气体一个有限的准静态过程,系统的体积由  $V_1$  变到  $V_2$  时,外界对系统所做的功

$$\text{为 } W = \sum \Delta W_i = \sum p_i \Delta V_i$$

外界对系统做功,  $W$  取正;系统对外做功,  $W$  取负.

##### (2) 热量

若理想气体的热容为  $c$ ,则在温度改变  $\Delta T$  的过程中,系统吸收或放出的热量

$$Q = c \Delta T$$

对一个系统的热容,从同一状态出发按不同过程变化,其热容不同.气体等容变化过程的热容称定容热容  $c_V$ ,压强不变过程的热容称定压热容  $c_p$ .

##### (3) 内能

物体由所有分子热运动的动能和分子势能的总和称为物体的内能.理想气体无分子势能,因此理想气体内能只是所有分子热运动动能的总和.它与气体分子数、气体温度及气体种类有关,与气体体积无关.内能是一个由体系状态决定的状态量.

每摩尔理想气体的内能  $U_m$  可表示为  $U_m = \frac{i}{2} RT$ ,  $i$  称自由度,单原子气体  $i = 3$ ,双原子气体  $i = 5$ .

$n$  摩尔理想气体在温度由  $T_1$  变到  $T_2$  的过程中,其内能的改变量

$$\Delta U = n \frac{i}{2} R (T_2 - T_1)$$

## 2. 热力学第一定律

热力学第一定律的实质是包括热现象在内的能量守恒和转化定律。它揭示出做功和热传递是系统与外界之间发生能量转移的两种方式。而能量转移的结果是系统的内能发生变化。可定量表示为  $\Delta U = Q + W$ ，其中  $\Delta U$  表示内能的增量， $\Delta U > 0$  表示内能增加； $\Delta U < 0$  表示内能减小。Q 表示系统吸放的热量， $Q > 0$  表示从外界吸热； $Q < 0$  表示向外界放热。W 表示系统与外界间做的功， $W > 0$  表示外界对系统做功； $W < 0$  表示系统对外界做功。

## 3. 理想气体热力学过程的主要公式

过程	初态、终态参量间的关系	外界对系统做的功	系统与外界的交换热量
等温	$T_1 = T_2, \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$	$nRT_1 L \frac{V_2}{V_1}$	$nRT_1 L \frac{V_2}{V_1}$
等容	$V_1 = V_2, \frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2}$	0	$nc_V (T_2 - T_1)$
等压	$p_1 = p_2, \frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2}$	$p(V_2 - V_1)$	$nc_p (T_2 - T_1)$
绝热	$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$ $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$ $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$	$nc_V (T_2 - T_1)$	0

## 二、热力学第二定律

### 1. 与热现象有关的自然过程的“方向性”

热力学第一定律告诉我们，在一切热力学过程中能量必须守恒。但仅满足能量守恒的热力学过程是不一定能进行的。实验表明，自然界中一切与热现象有关的实际宏观过程都是不可逆的，即只能按一定的“方向”进行。功可以自动转化为热，但热不能自动地转化为功。热量自动地可由高温物体传给低温物体，但反之就不能进行。

### 2. 热力学第二定律

热力学第二定律就是关于宏观自然过程进行方向的规律，常见有二种表述。

克劳修斯表述：热量不能自动地从低温物体传给高温物体。

开尔文表述：不可能从单一热源吸收热量，使之完全变为有用功，而不产生其他影响。

两种表述表面看虽不同，但已经证明，上面的二种表述是等价的。

## 【例题分析】

**例 1** 横截面积为  $S$  和  $\alpha S$  ( $\alpha > 1$ ), 长度相同的两圆柱形“对接”的容器内盛有理想气体, 每个圆筒中间位置有一个用硬杆相连的活塞, 如图 7-3-1 所示. 这时舱 I 内气体压强为  $p_1$ , 舱 III 内气体压强为  $\beta p_1$ , 活塞处于平衡, 整个系统吸收热量  $Q$ , 温度上升, 使各舱温度相同. 试求舱 I 内压强的变化.  $1 \text{ mol}$  气体内能为  $CT$  ( $C$  是气体摩尔热容量), 圆筒和活塞的热容量很小, 摩擦不计.

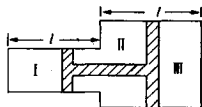


图 7-3-1

**分析与解** 如图 7-3-1, 设 I, II, III 三部分气体的摩尔数分别为  $n_1, n_2, n_3$ , 压强分别为  $p_1, p_2, p_3$ , 体积分别为  $V_1, V_2, V_3$ . 因为每部分气体温度相同, 由克拉珀龙方程

$$p_1 V_1 + p_2 V_2 + p_3 V_3 = (n_1 + n_2 + n_3) RT \quad (1)$$

对活塞, 由平衡条件  $(p_3 - p_2) \alpha S = (p_1 - p_2) S$  (2)

而  $p_3 = \beta p_1$  (3)

$$V_1 = \frac{l}{2} S \quad (4)$$

$$V_2 = \frac{l}{2} (S + \alpha S) \quad (5)$$

$$V_3 = \frac{l}{2} \alpha S \quad (6)$$

解①、②、③、④、⑤、⑥得  $p_1 = \frac{(n_1 + n_2 + n_3)(\alpha - 1) RT}{(\alpha^2 \beta - 1) S l}$  (7)

假设系统吸热后活塞不移动, 则三部分气体都应作等容升温变化, 因题意说明了三舱升温相同, 则任一状态因  $\frac{p}{T} = C$  ( $C$  为常数), 说明三舱气体的压强都增加相同的倍数. 活塞确实不移动, 由定容变化规律, 则吸收热量

$$Q = (n_1 + n_2 + n_3) C \Delta T$$

由⑦式, 舱 I 内气体压强的变化量  $\Delta p_1$  为  $\Delta p_1 = \frac{QR(\alpha - 1)}{(\alpha^2 \beta - 1) C S l}$

**例 2**  $1 \text{ mol}$  理想气体经历了一个在  $T$ - $V$  图上标为 1-2-3-1 的循环过程, 如图 7-3-2 所示. 其中过 1-2 的方程为  $T = 2T_1 \left(1 - \frac{1}{2} \beta V\right) \beta V$ , 过程 2-3 为经过原点的直线上的一段, 过程 3-1 的方程式为  $T = T_1 \beta^2 V^2$ , 式中  $\beta$  是常量, 状态 1 和 2 的热力学温度为  $T_1$  和  $\frac{3}{4} T_1$ . 求该气体在此循环过程中对外所做的功.

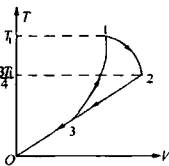


图 7-3-2

**分析与解** 变换状态参量  $p, V$  来描述状态变化规律, 画出

$p-V$  图. 对 1-2 过程, 因为  $pV = RT$ , 所以

$$p = 2RT_1 \left(1 - \frac{1}{2}\beta V\right) \beta = -R\beta^2 T_1 V + 2R\beta T_1 \quad (1)$$

对 2-3 过程, 由  $T-V$ , 可见为一等压过程;

对 3-1 过程, 用状态方程同理可变换为

$$p = RT_1 \beta^2 V \quad (2)$$

由题给过程变化规律和 (1), (2) 式, 可得

$$1 \text{ 状态: } p_1 = \beta RT_1, V_1 = \frac{1}{\beta}$$

$$2 \text{ 状态: } p_2 = \frac{1}{2} \beta RT_1 = \frac{p_1}{2},$$

$$V_2 = \frac{3}{2\beta} = \frac{3}{2} V_1$$

$$3 \text{ 状态: } p_3 = p_2 = \frac{p_1}{2}, V_3 = \frac{1}{2\beta} = \frac{V_1}{2}$$

可画得  $p-V$  线如图 7-3-3 所示. 则系统在循环中对外做正功, 功的数值为等腰三角形面积, 即

$$A = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) (V_2 - V_1) = \frac{1}{4} RT_1$$

**例 3** 有一底面积为  $100\text{cm}^2$  的圆筒, 筒壁、活塞以及内部的隔板都是完全绝热的. 当右方压强大于左方压强时, 隔板的阀门打开. 如图 7-3-4 所示. 开始时有  $42\text{g}$  氮气在左方, 有  $2\text{g}$  氮气在右方, 左右两方的长度均为  $112\text{cm}$ , 温度均为  $0^\circ\text{C}$ , 外部压强为  $1\text{atm}$ , 定容比热  $c_V = 0.75\text{cal}/(\text{g}\cdot\text{K})$ , 定压比热为  $c_p = 1.25\text{cal}/(\text{g}\cdot\text{K})$ . 另加外力 (除大气压) 慢慢地把活塞推向隔板, 当阀门打开时稍停片刻, 而后继续缓慢地推动活塞, 直至到达隔板为止. 求外力所做总功.

**分析与解** 由氮气初始温度和质量, 可得左方氮气压强为  $6\text{atm}$ ; 右方氮气压强为  $1\text{atm}$ , 所以开始时阀门是关闭的. 加外力推活塞的开始阶段, 只绝热压缩右方氮气, 设压到刚打开阀门时右方氮气体积为  $V_1$ , 由绝热过程方程  $pV^\gamma = \text{恒量}$ , 则

$$1 \times (112 \times 100)^{\frac{5}{3}} = 6 V_1^{\frac{5}{3}}$$

$$\text{解得 } V_1 = 3.82 \times 10^3 (\text{cm}^3)$$

此时右方氮气温度  $T_1$  为

$$T_1 = \frac{p \cdot V_1}{n_1 R} = 552 (\text{K})$$

这一阶段中, 外界对气体做功全部转化为右方氮气的内能, 功  $W_1$  为

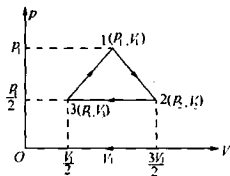


图 7-3-3

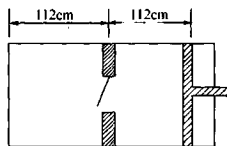


图 7-3-4



$$W_1 = m_{\text{右}} C_V (T_1 - T_0) = 1.76 \times 10^3 \text{ (J)}$$

接着打开阀门,左右氦气混合,设混合后温度为  $T_2$ ,则

$$T_2 = \frac{m_{\text{左}} T_0 + m_{\text{右}} T_1}{m_{\text{左}} + m_{\text{右}}} = 313 \text{ (K)}$$

这一阶段,活塞对气不做功,又绝热,所以内能不变。

当进一步缓慢推动活塞时,氦气体积由  $(11.2 + 3.82) \times 10^3 \text{ cm}^3$  变到  $11.2 \times 10^3 \text{ cm}^3$  绝热压缩,由绝热方程

$$\hat{T} V^{\gamma-1} = \text{恒量}$$

则压缩后温度  $T_3$  满足  $313 \times (15.0)^{\frac{5}{3}-1} = T_3 (11.2)^{\frac{5}{3}-1}$

解得  $T_3 = 380 \text{ (K)}$

这一阶段中做的功  $W_2$  也等于增加的内能。

$$W_2 = (m_{\text{左}} + m_{\text{右}}) c_V (T_3 - T_2) = 2.95 \times 10^3 \text{ (J)}$$

所以整个过程中外力做的功  $W$  为

$$W = W_1 + W_2 - p_0 S l = 1.76 \times 10^3 + 2.95 \times 10^3 - 10^5 \times 10^{-2} \times 1.12 = 3.59 \times 10^3 \text{ (J)}$$

### 【巩固习题】

1. 如图 7-3-5 所示,有两个底面积为  $1 \text{ dm}^2$  的圆筒,左方筒装有一种气体,质量  $4 \text{ g}$ , 体积  $22.4 \text{ L}$ , 压强  $1 \text{ atm}$ , 温度  $0^\circ \text{C}$ 。右方筒装同种气体,质量  $7.44 \text{ g}$ , 体积  $22.4 \text{ L}$ , 温度  $0^\circ \text{C}$ , 左方圆筒筒壁绝热,右方圆筒靠一大热库维持温度为  $0^\circ \text{C}$ 。整个系统在真空中。放开活塞,通过连杆,移动了  $5 \text{ dm} = 0.5 \text{ m}$  后达到平衡并静止。试问右方圆筒中的气体吸收了多少热量? 气体的定容比热为  $0.75 \text{ cal}/(\text{g} \cdot \text{K})$ 。

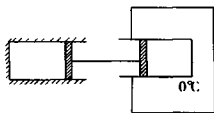


图 7-3-5

2. 如图 7-3-6 中  $A$  管是真空的,横截面积为  $S_1$ ,广口容器  $B$  的横截面积为  $S_2$  ( $S_2 \gg S_1$ ),开始时, $B$  中的水银面恰好与活栓  $D$  相平,打开阀门  $D$  后  $A$  管中水银面上升高度为  $H$ , $B$  中水银面下降  $\Delta h$  ( $\Delta h \ll H$ )。已知水银密度为  $\rho$ ,系统温度保持不变,则该过程中系统向外放出多少热量?

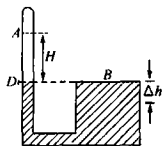


图 7-3-6

3. 一直立的汽缸中装有  $\gamma \text{ mol}$  单原子理想气体,汽缸为一质量为  $M$ ,面积为  $A$  的活塞所密封。整个汽缸和活塞都是绝热的,且位于真空室内。起初活塞被锁钉夹持在某个位置,使汽缸中气体的体积为  $V_0$ ,绝对温度为  $T_0$ ,拔去销钉后,活塞下落,最终活塞停止在某平衡位置。这时汽缸中气体的体积为  $V$ ,温度为  $T$ ,忽略活塞和汽缸热容量以及它们之间的摩擦,试计算气体最终温度  $T$  和体积  $V$ 。

4. 如图 7-3-7 所示密闭容器原来是抽空的, 轻弹簧悬挂一轻活塞, 弹簧  $k = 100\text{N/m}$ , 活塞面积  $S = 100\text{cm}^2$ . 开始时活塞在容器底且弹簧恰好等于原长. 今在活塞下面引入某种气体, 当其温度为  $300\text{K}$  时, 活塞上升  $10\text{cm}$ ; 若保持气体质量不变, 使其温度从  $300\text{K}$  缓慢上升到  $1200\text{K}$ , 则需向气体提供多少热量? 已知该气体定容摩尔容量  $c_V = 3R/2$ .

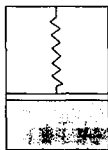


图 7-3-7

5. 一绝热的气缸, 活塞可在气缸内无摩擦的移动, 如图 7-3-8 所示. 活塞外面是大气, 大气压强为  $p_0$ . 开始时, 活塞被固定, 气缸内盛有  $n$  mol 的理想气体, 其压强为  $p_1 = 5p_0$ , 温度  $T_1 = 350\text{K}$ , 体积  $V_1 = 7\text{L}$ . 已知每摩尔质量的气体的内能可表示成  $U = 5RT/2$ ,  $R$  为摩尔气体常数,  $T$  为绝对温度. 今释放活塞, 让它自由移动, 问当活塞再次平衡时, 气缸内气体的温度和体积各为多少?

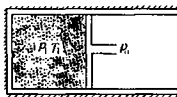


图 7-3-8

6. 将  $26\text{g}$  乙炔 ( $\text{C}_2\text{H}_2$ ) 气体与  $96\text{g}$  氧气混合后充分燃烧, 共能放出  $3.4 \times 10^5\text{J}$  的热量. 已知  $\text{O}_2$  的定容摩尔热容量  $c'_V = 20\text{J/mol}\cdot\text{K}$ , 生成物  $\text{CO}_2$  和  $\text{H}_2\text{O}$  的定容摩尔热容量  $c_V = 25\text{J/mol}\cdot\text{K}$ , 燃烧前混合气体温度为  $27^\circ\text{C}$ .

(1) 如果将它们置于容积为  $0.5\text{m}^3$  的绝热容器内燃烧, 气体的最终压强多大?

(2) 如果将混合气体置于绝热气缸中缓慢燃烧, 绝热材料制成的活塞可以无摩擦滑动但不漏气, 则最终气体体积多大? 外部压强为  $1.0 \times 10^5\text{Pa}$ .

7. 一定量的单原子理想气体在一密闭容器中等压膨胀到体积为原来的  $1.5$  倍, 然后又被压缩, 体积和压强均减为  $\frac{1}{3}$ , 且过程中压强与体积成正比, 比例系数不变. 在此压缩过程中气体向外放热  $Q_0$ , 压缩后气体重新等压膨胀到原体积. 为使气体等容回到上面提到的第一次膨胀前的状态, 需要传给气体的热量  $Q$  是多少?  $1\text{mol}$  单原子理想气体的内能等于  $\frac{3}{2}RT$ .

8. 一空调器按卡诺循环运转, 其中的做功装置连续工作时所提供的功率为  $P_0$ .

(1) 夏天, 室外温度恒为  $T_1$ , 启动空调器连续工作, 最后可将室温降至恒定的温度  $T_2$ , 室外通过热传导在单位时间内向室内传输的热量正比于  $(T_1 - T_2)$ , 比例系数为  $A$ . 试用  $T_1$ 、 $P_0$  和  $A$  来表示  $T_2$ .

(2) 当室外温度为  $30^\circ\text{C}$  时, 若这台空调器只有  $30\%$  的时间处于工作状态, 则室温可维持  $20^\circ\text{C}$ , 试问室外温度最高为多少时, 用此空调器仍可使室温维持在  $20^\circ\text{C}$ ?

(3) 冬天, 可将空调器吸热、放热反向. 试问室外温度最低为多少时, 用此空调器可使室温维持在  $20^\circ\text{C}$ ?

## 第四节 热传递方式



### 【知识要点】

物体间或同一物体的各部分间的热量的转移过程叫热传递.热传递的方式有三种:对流、传导和热辐射.物体间或同一物体各部分间的温度差决定着能否发生热传递及热传递的方向.热量总是高温物体(或温度高的物体部分)自发地传给低温物体(或温度低的物体部分).

#### 1. 对流

液体和气体较热部分与较冷部分之间,由于密度的不同,形成了循环流动,使温度渐趋均匀一致的过程称为对流.对流是液体和气体传热的主要形式.

#### 2. 热传导

热传导是指物体的相邻部分间的温度差所引起的能量迁移.热传导是固体中传热的主要形式,气体、液体中常与对流同时发生.

实验表明,在热传导中所传递的热量与传热介质的截面面积、传热介质中单位距离的温度差及传热时间成正比.若有一块横截面积为  $S$ 、厚度为  $\Delta d$  的板,板两面的温度差为  $\Delta T$ ,则在时间  $\Delta t$  内垂直于板的两面流过的热量  $\Delta Q$  满足  $\Delta Q \propto S \cdot \Delta t \cdot \frac{\Delta T}{\Delta d}$

若设单位时间内传递的热量为  $H$ (称为热量迁移率),则  $H = -kS \frac{\Delta T}{\Delta d}$ ,

$k$  称材料的导热系数,它由材料决定,表征物质的导热能力. $k$  大的材料称热的良导体,式中负号表示热传导总是高温处向低温处进行.

#### 3. 热辐射

在任何温度下,物体都以发射电磁波的形式向外传递能量,这种热传递的形式叫做热辐射.

在热辐射中,有一类物体在任何温度下能够全部吸收任何波长的辐射而无反射,把这类物体称为黑体,黑体单位面积的辐射功率  $P$  与其绝对温度的四次方成正比,即:

$$P = \sigma T^4$$

式中  $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{W/m}^2 \cdot \text{T}^4$ ,称斯忒藩常数.

对非黑体,单位面积的辐射功率  $P$  与温度  $T$  的关系可写成  $P = \varepsilon \sigma T^4$ ,式中  $\varepsilon$  称为表面辐射系数,对灰体  $0 < \varepsilon < 1$ ,它由物体的表面性质决定,与波长无关.

## 【例题分析】

例1 设有一块由不同厚度  $L_1$  和  $L_2$  以及不同热导率  $k_1$  和  $k_2$  的两层物质构成的复合板,接触表面积为  $S$ .假定它两个外表面的温度为  $T_2$  与  $T_1$ ,如图 7-4-1 所示,试求在热流达到稳定状态时,通过这一复合板的热量迁移率.

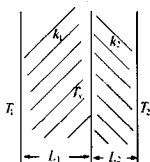


图 7-4-1

分析与解 设两物质分界面处的温度为  $T_x$ ,则两物质界面处的热量迁移率  $H_1, H_2$  满足

$$H_1 = k_1 S \frac{T_x - T_1}{L_1}, H_2 = k_2 S \frac{T_2 - T_x}{L_2}$$

$S$  为两物质接触截面积.

热流达稳定时,  $H_1 = H_2$ , 得  $k_1 S \frac{T_x - T_1}{L_1} = k_2 S \frac{T_2 - T_x}{L_2}$

解得  $T_x = \frac{L_1 k_2 T_2 + L_2 k_1 T_1}{L_1 k_2 + L_2 k_1}$

所以通过复合板的热量迁移率

$$H = \frac{k_2 S}{L_2} \left( T_2 - \frac{L_1 k_2 T_2 + L_2 k_1 T_1}{L_1 k_2 + L_2 k_1} \right) = \frac{S(T_2 - T_1) k_1 k_2}{L_1 k_2 + L_2 k_1}$$

例2 设地球上能被人类利用的能源功率共计为  $P = 10^{13} \text{W}$ , 而传到地球上的太阳能功率为  $P_0 = 10^{17} \text{W}$ . (1) 试问因利用地球上的能源而使地球表面升高的温度是多少? (2) 若从生态平衡的观点看, 若升温不超过  $\Delta T_0 = 0.1 \text{K}$  的话, 则地球上的能源可允许利用的最大功率为多少?

分析与解 (1) 设地球只吸收太阳能时吸收功率为  $P_0$ , 地球表面温度为  $T$ , 由斯忒藩-玻耳兹曼定律, 得  $P_0 = \sigma T^4$ .

设因多利用地球上的能源功率  $P$  时, 地球表面增加的温度为  $\Delta T$ , 则

$$P_0 + P = \sigma (T_0 + \Delta T)^4 = \sigma T_0^4 \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right)^4 \approx \sigma T_0^4 \left( 1 + 4 \frac{\Delta T}{T_0} \right) = P_0 + \frac{4P_0}{T_0} \Delta T$$

所以  $\Delta T = \frac{PT_0}{4P_0}$

因  $P_0 = 10^{17} \text{W}$ ,  $P = 10^{13} \text{W}$ ,  $T_0$  可取  $300 \text{K}$

则  $\Delta T = 75 \times 10^{-4} (\text{K})$

即可使地球表面温度升高  $10^{-2} \text{K}$ .

(2) 若升温不能超过  $\Delta T_0 = 0.1 \text{K}$ , 则地球上能源可允许利用的最大功率  $P_{\max}$  为

$$P_{\max} = \frac{4P_0}{T_0} \Delta T_0 \approx 10^{14} (\text{W})$$

**例3** 若将一可调温的电熨斗的温度调至“Ⅰ”档,则可周期性地通电 10s,再断电 40s,使熨斗加热到表面温度为 100℃,若把旋钮调至“Ⅱ”档,则熨斗周期性通电 20s,再断电 30s.求旋钮在此位置时熨斗表面达到的温度.如果温度调节器坏了,通电的熨斗可加热到什么温度?设熨斗的散热是和熨斗表面温度与周围空气温度的差成正比,房间里空气的温度为 20℃.

**分析与解** 设电熨斗加热器功率为  $P_0$ ,  $T_1, T_1'$  分别为温度调节器调至“Ⅰ”、“Ⅱ”档稳定状态时熨斗表面温度;  $t_1, t_1'$  分别为温度调节器调至“Ⅰ”、“Ⅱ”档时的通电时间,  $t_2, t_2'$  分别为断电时间;  $T_0$  为室温.则在加热稳定时有

$$P_0 t_1 = kS(T_1 - T_0)(t_1 + t_2) \quad ①$$

$$P_0 t_2 = kS(T_1' - T_0)(t_1' + t_2') \quad ②$$

式中  $S$  为熨斗的散热表面积,  $k$  为散热系数.

解①,②得 
$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{(T_1 - T_0)(t_1 + t_2)}{(T_0 - T_0)(t_1' + t_2')}$$

$$T_1 = T_0 + (T_1 + T_0) \frac{t_1 + t_2}{t_1' + t_2'} \cdot \frac{t_1'}{t_1} = 180^\circ\text{C}$$

若温度调节器损坏,则将一直加热下去.设最后温度为  $T$ ,加热时间为  $t$ ,则

$$P_0 t = kS(T - T_0)t \quad ③$$

解①,③得  $T = T_0 + (T_1 + T_0) \frac{t_1 + t_2}{t_1} = 420^\circ\text{C}$

### 【巩固习题】

1. 计算一颗太空中人造卫星的温度,卫星的主体假设是直径为 1m 的球,且卫星主体各处温度均匀一致.卫星处于地球附近的大空中,但不在地球的阴影中.

已知太阳表面温度  $T_S = 6000\text{K}$ ,太阳半径  $R_S = 6.96 \times 10^8\text{m}$ ,太阳至地面距离  $d = 1.5 \times 10^{11}\text{m}$ .当卫星在阳光中升达某一温度时,卫星辐射功率等于从太阳的吸收功率.假设太阳和卫星都近似为黑体,求出卫星的热平衡温度.

2. 往量热器中倒入一勺热水,量热器温度升高 5℃;再往量热器倒入一勺热水,量热器温度又升高了 3℃.如果往量热器再倒入 48 勺热水,试问量热器温度还能升高多少?设置热器与外界的热交换忽略不计.

3. 容积均为 4L,高度均为 40cm 的两个不同材质的热水瓶,其中一个为圆形截面,另一个为方形截面,在室温为零度时,两只瓶中均灌满 100℃ 的水,经过一段时间后,圆筒形瓶内的水温降为 95℃.问另一瓶内的水温降到了多少度?(忽略热水温度降低对散热的影响)

4. 两根金属棒  $A, B$  尺寸相同,  $A$  的导热系数是  $B$  的两倍,用它们来导热.设高温

端和低温端温度恒定. 求将  $A$ 、 $B$  并联、串联使用时的能流之比. 设棒的侧面是绝热的, 能流即单位时间内通过某截面传递的热量.

5. 当物体被加热到绝对温度  $T$  时, 其每平方米每秒辐射能量为  $5.67 \times 10^{-8} T^4 \text{ W}$ . 如果在地球公转轨道处太阳的辐射通量密度为  $1400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . 问距太阳多远处铁粒能变成液滴? 地球到太阳距离  $d$  为  $150 \times 10^6 \text{ km}$ . 铁的熔解温度为  $1535 \text{ K}$ . 设铁粒可处理为黑体.

6. 一个供热系统, 如果房外温度为  $-20^\circ\text{C}$ , 则房内温度为  $+20^\circ\text{C}$ ; 如果房外温度为  $-40^\circ\text{C}$ , 则房内温度为  $+10^\circ\text{C}$ . 求房间中暖气管的温度.

## 第五节 综合训练

### 【例题分析】

例 1 在带有加热器的密闭圆柱形容器中, 质量为  $M$  的活塞下方有一定量的水及其蒸汽, 活塞上方是真空, 如图 7-5-1 所示. 已知当加热器功率  $N_1$  时, 活塞以不变速度  $v_1$  缓慢上升; 当加热器功率增加到  $N_2 = 2N_1$  时, 活塞上升速度变为  $v_2 = 2.5v_1$ . 这时容器内温度不变. 求这个温度是多少? 已知这个温度下汽化热  $L = 2.2 \times 10^6 \text{ J/kg}$ ,  $N_1 = 100 \text{ W}$ ,  $M = 40 \text{ kg}$ ,  $v_1 = 0.01 \text{ m/s}$ . 图 7-5-1



分析与解 因为活塞以不变速度上升, 所以水蒸汽加热过程中等压变化, 压强  $p$  为

$$p = \frac{Mg}{S} \quad (1)$$

而加热器加热  $\Delta t$  时间内, 给水的热量, 由能量守恒关系式得

$$N_1 \Delta t = L \Delta m + q \Delta t \quad (2)$$

$\Delta m$  为加热中汽化的水的质量,  $q$  为单位时间内系统散失的热量. 因容器内温度不变, 可认为  $q$  为恒量.

又活塞上移, 水蒸汽体积增量

$$\Delta V = v_1 \Delta t S \quad (3)$$

对水蒸汽, 近似可视为理想气体, 则  $p \Delta V = \frac{\Delta m}{\mu} RT$  (4)

由 (2), (3), (4) 可解得  $N_1 = \frac{\mu L M g v_1}{RT} + q$  (5)

当加热器功率为  $N_2$  时, 同理可推出  $N_2 = \frac{\mu L M g v_2}{RT} + q$  (6)

因为  $N_2 = 2N_1$ , 所以 (6) - (5) 得  $N_1 = \frac{\mu L M g}{RT} (v_2 - v_1)$

而  $v_2 = 2.5v_1$ , 代入各已知数值  $T = \frac{1.5v_1 \mu L M g}{R N_1} = 286(\text{K})$

例2 一定质量的理想气体, 压强为  $p_1$ , 温度为  $T_1$ , 与同体积的压强为  $p_2$ , 温度为  $T_2$  的同种理想气体相混合, 已知混合后气体体积为原来的体积之和, 在混合过程中, 与外界未发生能量交换, 气体的比热可视为常数. 求混合后气体的温度和压强.

分析与解 设混合前每一部分体积为  $V_0$ , 摩尔数分别为  $n_1, n_2$ , 则由状态方程可得

$$\frac{p_1 V_0}{T_1} = n_1 R, \quad (1)$$

$$\frac{p_2 V_0}{T_2} = n_2 R \quad (2)$$

设混合压强为  $p$ , 温度为  $T$ , 则  $p \cdot 2V_0 = (n_1 + n_2)RT$  (3)

由①, ②, ③可得  $\frac{2p}{T} = \frac{p_1}{T_1} + \frac{p_2}{T_2}$  (4)

又混合过程中未与外界发生能量交换, 所以一部分吸热等于另一部分的放热, 即

$$n_1 C(T_1 - T) = n_2 C(T - T_2) \quad (5)$$

由①, ②, ⑤得混合后的温度  $T$  为  $T = \frac{(p_1 + p_2) T_1 T_2}{p_1 T_2 + p_2 T_1}$  (6)

解④, ⑥得混合后的压强为  $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$

例3 图7-5-2(a)表示竖直放置的左端封闭、右端足够长且开口的U形均匀玻璃管中以水银柱封闭一段长  $l_0 = 15\text{cm}$  的空气柱, 两边管中水银柱长度分别为  $h_1 = 22.5\text{cm}$  和  $h_2 = 27.5\text{cm}$ , 管弯曲部分的长度可忽略不计, 大气压  $p_0 = 75\text{cmHg}$ , 今将管缓慢倒转使其呈竖直开口向下, 管内空气柱达到新的平衡, 如图7-5-2(b)所示, 试求: (1) 新平衡状态下空气柱的长度; (2) 讨论新平衡状态是稳定平衡还是不稳定平衡; 如为不稳定平衡, 则需进一步分析该状态被扰动破坏后的情况.

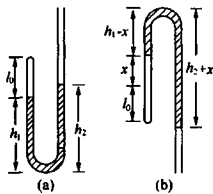


图 7-5-2

分析与解 设试管的截面积为  $S$ , 倒转后封闭管中仍有水银, 而空气柱长度增加了  $x$ , 则由玻意耳定律

$$p_1 l_0 S = p_2 (l_0 + x) S$$

而  $p_1 = p_0 + (h_2 - h_1)$

$$p_2 = p_0 - (h_2 - h_1) - 2x$$

代入数据得  $x_1 = 5(\text{cm}), x_2 = 15(\text{cm})$

因为  $x_1, x_2$  均小于  $h_1$ , 所以倒转后, 封闭管中的确仍有水银, 对应空气柱长度为

$$l_1 = l_0 + x_1 = 20(\text{cm}) \quad \text{或} \quad l_2 = l_0 + x_2 = 30(\text{cm})$$

(2) 对  $l_1 = 20\text{cm}$  情况, 则此时平衡状况下封闭气体压强  $p_3 = 60\text{cmHg}$ , 设左端水银面有微小升降扰动  $\Delta x$ , 则由玻意耳定律, 封闭气体压强

$$p_4 = \frac{60 \times 20}{20 + \Delta x} (\text{cmHg})$$

则弯管中水银薄层两边压强差

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_4 - p_3 + 2\Delta x = \frac{1200}{20 + \Delta x} - 60 + 2\Delta x \\ &\approx 60 \left( 1 - \frac{\Delta x}{20} \right) - 60 + 2\Delta x = -\Delta x \end{aligned}$$

因为  $\Delta x$  上升取正, 则  $\Delta p < 0$ , 表明该平衡态为稳定平衡。

对平衡时气柱长  $l_2 = 30\text{cm}$ , 同前述方法可得

$$\Delta p' = \frac{1200}{30 + \Delta x} - 40 + 2\Delta x \approx \frac{2}{3} \Delta x > 0$$

所以此平衡状态为不稳定平衡态, 受微小扰动后, 水银将全部进入右管. 设最后空气柱长度为  $x_3$ , 由玻意耳定律得

$$(p_0 + h_2 - h_1) l_0 S = (p_0 - h_1 - h_2) x_3 S$$

得

$$x_3 = 48(\text{cm})$$

可证明这一平衡状态为稳定的平衡状态。

**例 4** 如图 7-5-3 所示, 一根两端封闭、粗细均匀的石英玻璃管, 竖直放置, 内有一段水银柱, 将管隔成上、下两部分. 下方为空气, 上方为一种可分解的双原子分子气体. 此种双原子分子的性质为: 当  $T > T_0$  时, 其分子开始分解为单原子分子气体. 用  $n_0$  表示  $T_0$  时双原子分子数,  $\Delta n$  表示  $T_0 + \Delta T$  时分解了的双原子分子数, 其分解规律为  $\Delta T$  很小时, 有关系  $\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\Delta T}{T_0}$

已知初始温度为  $T_0$ , 此时, 下方气柱长度为  $2l_0$ , 上方气柱长度为  $l_0$ , 水银柱产生的压强为下方气体压强的  $\alpha$  倍 ( $0 < \alpha < 1$ ). 试讨论当温度由  $T_0$  开始缓慢上升时, 水银柱将上升还是下降. 忽略石英玻璃管和水银柱体积随温度的变化.



图 7-5-3

**分析与解** 设温度变化时, 水银柱不移动, 且温度为  $T_0$  时, 1 气体压强为  $p_0$ , 温度上升至  $T_0 + \Delta T$  时, 其压强为  $p_1$ , 因体积不变, 有

$$p_1 = \frac{p_0(T_0 + \Delta T)}{T_0} = p_0 \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) \quad \text{①}$$

由题意, 在温度为  $T_0$  时, 上部气体压强  $p'_1 = p_0 - 2p_0$ , 当温度升至  $T_0 + \Delta T$  时, 有  $\Delta n$  个双原子气体分子分解成  $2\Delta n$  个单原子气体分子, 所以气体分子数由  $n_0$  增至  $n_0 + \Delta n$ , 设此时气体压强为  $p_2$ , 则由克拉珀龙方程得



$$(1-\alpha)p_0 l_0 S = \frac{n_0}{N_A} RT_0 \quad (2)$$

$$p_2 l_0 S = (n_0 + \Delta n)(T_0 + \Delta T)/N_A \quad (3)$$

$N_A$  为阿伏伽德罗常数.

解①, ②, ③得  $p_2 = (1-\alpha)p_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^2$

升温后水银柱上下气体对它的压强差  $\Delta p$  为

$$\Delta p = p_1 - (p_2 + ap_0) = (2\alpha - 1)p_0 \frac{\Delta T}{T_0} - (1-\alpha)p_0 \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 \quad (4)$$

因  $\Delta T$  很小, 所以  $\Delta p \approx (2\alpha - 1)p_0 \frac{\Delta T}{T_0}$

则, 当  $\alpha > \frac{1}{2}$  时,  $\Delta p > 0$ , 水银柱将上升; 当  $\alpha < \frac{1}{2}$  时,  $\Delta p < 0$ , 水银柱下降; 当  $\alpha = \frac{1}{2}$  时, 由④式  $\Delta p < 0$ , 可见水银柱下降.

**例 5** 1mol 理想气体, 其内能可表示为  $U = \frac{3}{2} RT$ ,  $R$  为气体常数,  $T$  为绝对温度, 依照  $p = -\frac{p_0}{V_0} V + p_0$  的规律, 由体积  $V_1 = \frac{1}{10} V_0$  开始膨胀. 求: (1) 在膨胀过程中, 气体达到的最高温度; (2) 气体开始由吸热转入放热时的体积和吸收热量的最大值.

**分析与解** (1) 由  $p, V$  变化规律和状态方程

$$p = -\frac{p_0}{V_0} V + p_0 \quad (1)$$

$$pV = RT \quad (2)$$

解得 
$$T = \frac{p_0 V - \frac{p_0}{V_0} V^2}{R} = \frac{p_0 V_0}{4R} - \frac{1}{R} \left( \sqrt{\frac{p_0}{V_0}} V - \frac{1}{2} \sqrt{p_0 V_0} \right)^2 \quad (3)$$

可见, 当  $\sqrt{\frac{p_0}{V_0}} V - \frac{1}{2} \sqrt{p_0 V_0} = 0$ , 即  $V = \frac{1}{2} V_0$  时,  $T$  有最大值, 最大值为  $T_{\max} = \frac{p_0 V_0}{4R}$ .

(2) 由  $p, V$  变化规律, 可作出  $p-V$  图线如图 7-5-4 所示.

当气体体积由  $V_1 = \frac{1}{10} V_0$  开始膨胀到体积为  $V$  时, 外界对气体做的功  $\Delta A$  可表示为图中过程曲线下面积.

$$\begin{aligned} \Delta A &= -\frac{1}{2} (p_1 + p)(V - V_1) \\ &= -\frac{1}{2} \left( -\frac{p_0}{V_0} V_1 + p_0 - \frac{p_0}{V_0} V + p_0 \right) (V - V_1) \end{aligned}$$

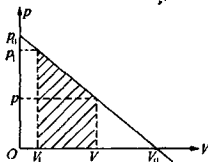


图 7-5-4

$$\Delta A = -\frac{1}{2} \left[ -\frac{p_0}{V_0} (V^2 - V_1^2) + 2p_0 (V - V_1) \right] \quad (4)$$

内能的变化  $\Delta U = \frac{3}{2} (pV - p_1 V_1)$

$$\text{即} \quad \Delta U = \frac{3}{2} R \left( -\frac{p_0}{V_0} V^2 + p_0 V + \frac{p_0}{V_0} V_1^2 - p_0 V_1 \right) \quad (5)$$

由热力学第一定律, 外界传给体系的热量

$$\Delta Q = \Delta U - \Delta A = \frac{3}{2} R \left( -\frac{p_0}{V_0} V^2 + p_0 V + \frac{p_0}{V_0} V_1^2 - p_0 V_1 \right) - \frac{1}{2} \left[ -\frac{p_0}{V_0} (V^2 - V_1^2) + 2p_0 (V - V_1) \right]$$

$$\text{即} \quad \Delta Q = \frac{2p_0}{V_0} \left( V_1 - \frac{5}{8} V_0 \right)^2 - \frac{2p_0}{V_0} \left( V - \frac{5}{8} V_0 \right)^2 \quad (6)$$

由⑥式, 当  $\Delta Q < 0$  时为吸热, 而  $\Delta Q > 0$  为放热, 而⑥式中第一项决定初态, 第二项决定末态, 所以气体开始由吸热转入放热时, 有

$$\frac{2p_0}{V_0} \left( V_1 - \frac{5}{8} V_0 \right)^2 = 0$$

$$\text{即} \quad V = \frac{5}{8} V_0$$

此时, 气体吸收热量也达最大, 最大值为

$$\Delta Q_{\max} = \frac{2p_0}{V_0} \left( V_1 - \frac{5}{8} V_0 \right)^2 = \frac{2p_0}{V_0} \left( \frac{1}{10} V_0 - \frac{5}{8} V_0 \right)^2 = \frac{441}{800} p_0 V_0$$

**例 6** 某甲设计了一个如图 7-5-5 所示的“自动喷泉”装置, 其中  $A, B, C$  为三个容器,  $D, E, F$  为三根细管。管栓  $K$  是关闭的。  $A, B, C$  及细管  $D, E$  中均盛有水。容器水面的高度差分别为  $h_1$  和  $h_2$ , 如图所示。  $A, B, C$  的截面半径为  $12\text{cm}$ ,  $D$  的半径为  $0.2\text{cm}$ 。甲向同伴乙说: “我若拧开管栓  $K$ , 会有水从细管口喷出。”乙认为不可能。理由是: 低处的水自动走向高处, 能量从哪儿来? 甲当即拧开  $K$ , 果然见到有水喷出, 乙哑口无言, 但不明自己的错误所在。甲又进一步演示, 在拧开管栓  $K$  前, 先将喷管  $D$  的上端加长到足够长, 然后拧开  $K$ , 管中水面即上升, 最后水面静止于某个高度处。(1) 论证拧开  $K$  后水柱上升的原因; (2) 当  $D$  管上端足够长时, 求拧开  $K$  后  $D$  中静止水面与  $A$  中水面的高度差; (3) 论证水柱上升所需能量的来源。

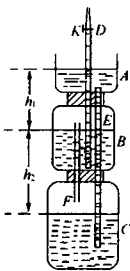


图 7-5-5

**分析与解** 实践证明, 甲的设计是正确的, 所以乙的结论肯定是错的。

(1) 设大气压为  $p_0$ , 水的密度为  $\rho$ 。拧开  $K$  前的情况如图 7-5-6 的 (a) 图所示。由流体静力学可知,  $B, C$  中气体的压强为  $p_B = p_C = p_0 + \rho g (h_1 + h_2)$  ①

$D$  中气体的压强为  $p_D = p_B - \rho gh_1$  ②

由①、②式可得  $p_D = p_0 + \rho gh_2$ , 即  $p_D > p_0$ , 当拧开  $K$  后,  $D$  中气体压强降至  $p_0$ , 此时  $p_B - p_0 > \rho gh_1$  ③

即  $D$  管中容器  $B$  水面以上的那一段水柱所受合力向上, 所以  $D$  管中水柱上升.

(2) 拧开  $K$  后, 水柱上升, 因  $D$  管上端已足够长, 故水不会从管口喷出. 设到  $D$  中的水面静止时  $D$  中增加水量的体积为  $\Delta V$ , 则  $B$  中减少水量的体积增加亦为  $\Delta V$ , 其水面将略有降低, 因而  $B$  及  $C$  中气体压强略有下降,  $A$  中的水将通过  $E$  管流入  $C$  中, 当从  $A$  流入水量的体积等于  $\Delta V$  时,  $B$ 、 $C$  中气体压强恢复原值. 因为  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的半径为  $D$  管半径的 60 倍, 截面积比为 3600 倍, 故  $A$ 、 $B$ 、 $C$  中少量水的增减 ( $\pm \Delta V$ ) 引起的  $A$ 、 $B$ 、 $C$  中水面高度的变化可忽略不计, 即  $h_1$  和  $h_2$  的数值保持不变.

设  $D$  中水面静止时与  $A$  中水面的高度差为  $h$ , (见图 7-5-6(b)), 则有

$$p_0 + \rho g(h_1 + h_2) = p_0 + \rho g(h + h_1) \quad ④$$

由此可得  $h = h_2$  ⑤

(3) 将图 7-5-6(a) 和 (b) 两图相比较可知, 其差别在于体积为  $\Delta V$  的水从  $A$  移至  $C$  中, 另  $\Delta V$  的水又由  $B$  移入  $D$  中. 前者重力势能减少, 而后者重力势能增大, 前者的重力势能减少量为

$$\Delta E_1 = \rho \Delta V g (h_1 + h_2) \quad ⑥$$

$D$  中增加的水柱的重心离  $A$  中水面的高度为  $h_2/2$ , 故后者的重力势能增量为

$$\Delta E_2 = \rho \Delta V g \left( h_1 + \frac{1}{2} h_2 \right) \quad ⑦$$

即  $\Delta E_1 > \Delta E_2$

由此可知, 体积为  $\Delta V$  的水由  $A$  流入  $C$  中减少的势能的一部分转化为同体积的水由  $B$  进入  $D$  中所需的势能, 其余部分则转化为水柱的动能, 故发生上下振动,  $D$  中水面静止处为平衡点. 由于水与管间有摩擦等原因, 动能逐渐消耗, 最后水面停留在距  $A$  中水面  $h_2$  处.

### 【精选习题】

1. 如图 7-5-7 所示, 一个竖直放置的汽缸除底部导热外, 其余部分 (包括活塞) 都不导热. 汽缸中有一个可自由移动的不导热隔板将汽缸分成  $A$ 、 $B$  两部分, 其内各盛有  $1 \text{ mol}$  的同种理想气体. 开始时,  $A$ 、 $B$  气体的压强都等于  $p_0$ , 体积都等于  $V_0$ , 外界的压力也等于  $p_0$ . 现对汽缸底部缓慢加热, 使活塞上移, 汽缸内气体的总体积增至  $3V_0$ . 已知 1

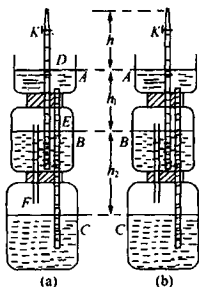


图 7-5-6

摩尔该种理想气体的内能  $U = \frac{3}{2}RT$ , 设活塞、隔板的质量以及汽缸、活塞、隔板所吸收的热量都可忽略不计, 且在加热过程中  $A$ 、 $B$  内气体的压强仍保持为  $p_0$ . 试分析并计算: (1)  $B$  中气体的最终体积  $V_B$  和温度升高量  $\Delta T_B$ ; (2)  $A$  中气体的最终体积  $V_A$  和温度升高量  $\Delta T_A$ ; (3) 对汽缸底部所加的热量  $\Delta Q$ .

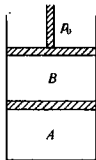


图 7-5-7

2. 在一以绝热壁包围的刚性圆柱形封闭汽缸内, 装着一个有小阀门  $L$  的绝热活塞, 在汽缸的  $A$  端装有电热器  $H$ , 可用于加热气体.

开始时活塞紧贴汽缸  $B$  端的内壁, 小阀门  $L$  关闭. 整个汽缸内盛有一定质量的某种理想气体, 其温度为  $T_0$ . 活塞与汽缸壁之间的摩擦可以忽略. 现设法把活塞压至气缸中央, 并用销钉  $F$  把活塞固定, 从而把汽缸分成体积相等的左右两室, 如图 7-5-8 所示. 在上述压缩气体的过程中, 设外界对气体做功  $W$ , 气体的温度上升到  $T$ .

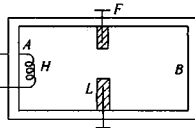


图 7-5-8

现开启小阀门, 经过足够长的时间后将它关闭, 再拔去

销钉使活塞可以自由移动, 并用电热器加热气体. 加热完毕并经过一定时间后, 得知左室内气体的压强变为加热前的 1.5 倍, 右室的体积变为原来的 0.75 倍, 试求电热器传给气体的热量.

3. 空气是混合气体, 其中气体质量的百分率是: 氮气约 76.9%, 氧气约 23.1%, 其他组分可忽略不计.

现有一汽缸, 缸内充有空气, 并装有一些极细钢丝组成的钢丝棉; 汽缸内的活塞能无摩擦地活动, 使缸内气压恒为  $1.01 \times 10^5 \text{Pa}$ ; 缸内有非常缓慢的化学反应, 假定反应生成  $1 \text{mol}$  的  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  后, 氧气耗尽. 已知这一过程是在  $1.01 \times 10^5 \text{Pa}$ 、 $300\text{K}$  的条件下进行的, 系统放出热量  $8.24 \times 10^5 \text{J}$ . 试求在此过程中: (1) 整个系统内能的改变量; (2) 缸内气体内能的改变量; (3) 缸内氮气密度的改变量.

计算时, 缸内气体作理想气体处理;  $1 \text{mol}$  氧气和  $1 \text{mol}$  氮气的内能均认为是  $\frac{5}{2}RT$ ; 缸内钢丝棉等固态物质与缸内气体相比, 所占体积很小, 可忽略不计.

4. 如图 7-5-9 为某一定质量理想气体的  $p$ - $V$  图像, 气体状态变化按图中箭头所标方向进行.  $B$  状态时温度为  $600\text{K}$ , 从  $A \rightarrow B$  过程中吸收热量为  $8.5 \times 10^5 \text{J}$ . 问: (1) 该循环过程中气体的最高和最低温度各为多少? (2)  $B \rightarrow C$ 、 $C \rightarrow D$ 、 $D \rightarrow A$  各过程中, 每个过程气体吸收(或放出)的“净热量”是多少?

5. 一球形热气球, 其隔热很好的球皮连同吊篮等装载的总质量为  $300\text{kg}$ , 经加热后, 气球膨胀到最大体积, 此时它的直径为  $18\text{m}$ , 球内外气体成分相同, 而球内气体压强则稍稍高过大气压. 试求出刚好能使热气球上升时球内空气的温度. 已知此时大气温度

为  $27^{\circ}\text{C}$ , 压强为  $1\text{atm}$ , 在标准状态下空气的密度为  $1.3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

6. 一根截面均匀、不变形的 U 形细塑料管, 两臂长分别为  $l_0 = 20.0\text{cm}$  和  $h_0 = 180.0\text{cm}$ , 竖直放置, 如图 7-5-10 所示. 管内灌有水银, 长管上端开口, 短管上端封闭, 管内封着长  $l = 10.0\text{cm}$  的空气柱, 已知长管及横管中的水银柱长度分别为  $h = 60.0\text{cm}$  和  $x = 10.0\text{cm}$ , 大气压强  $p_0 = 76.0\text{cmHg}$ . 现将此管绕通过长管拐角点 A 且与塑料管所在平面相垂直的轴线沿逆时针方向缓慢地转过  $180^{\circ}$ , 然后将长管的开口端迅速截去  $50.0\text{cm}$ , 求与管内封闭的空气相接触的水银面的最后位置.

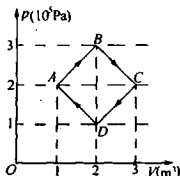


图 7-5-9

7. 如图 7-5-11 所示, 一薄壁钢筒竖直放在水平桌面上, 筒内有一与底面平行并可上下移动的活塞 K, 它将筒壁隔成 A、B 两部分, 两部分的总容积  $V = 8.31 \times 10^{-2}\text{m}^3$ . 活塞导热性能良好, 与筒壁无摩擦、不漏气. 筒的顶部轻轻放上一质量与活塞 K 相等的铅盖, 盖与筒的上端边缘接触良好 (无漏气缝隙). 当筒内温度  $t = 27^{\circ}\text{C}$  时, 活塞上方 A 中盛有  $n_A = 3.00\text{mol}$  的理想气体, 下方 B 中盛有  $n_B = 0.40\text{mol}$  的理想气体, B 中气体的体积占总容积的  $1/10$ . 现对筒内气体缓慢加热, 把一定的热量传给气体, 当达到平衡时 B 中气体的体积变为占总容积的  $1/9$ . 问筒内的气体温度  $t'$  是多少? 已知筒外大气压强为  $p_0 = 1.04 \times 10^5\text{Pa}$ , 普适气体恒量  $R = 8.31\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

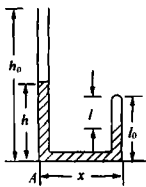


图 7-5-10

8. 毛细管由两根内径分别为  $d_1$  和  $d_2$  的薄玻璃管构成, 其中  $d_1 > d_2$ , 如图 7-5-12 所示. 管内注入质量为  $M$  的一大滴水. 当毛细管水平放置时, 整个水滴“爬进”细管内, 而当毛细管竖直放置时, 所有水从中流出来. 试问当毛细管的轴与竖直方向之间成多大角时, 水滴一部分在粗管内而另一部分在细管内? 水的表面张力系数为  $\sigma$ , 水的密度为  $\rho$ . 对玻璃来说, 水是浸润液体.

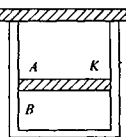


图 7-5-11

9. 图 7-5-13 所示的圆柱形容器, 其截面积  $S = 1.70 \times 10^{-2}\text{m}^2$ , 器壁绝热, 圆筒内有两个以弹簧相连接的绝热活塞, 弹簧的劲度系数为  $k = 1.50 \times 10^4\text{N/m}$ , 筒中部有一带孔的固定隔板, 筒壁上有开口, 与大气相通. 整个装置的结构及尺寸见附图. 容器左、右两气室中分别盛有同种的理想气体, 左室中有一电加热器. 已知: 大气压强  $p_0 = 1.00 \times 10^5\text{Pa}$ ; 电加热器未加热前两室气体均处于平衡状态, 温度均为  $T_0 = 300\text{K}$ , 压强均为  $p_0$ ; 活塞的位置如图所示,  $l_0 = 1.00 \times 10^{-1}\text{m}$ , 如果通过加热器对左室气体不断地徐徐加热, 弹簧长度的最大改变量  $l_m = 7.40 \times 10^{-2}\text{m}$ , 理想气体的

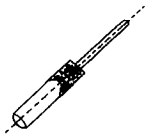


图 7-5-12

绝热过程遵循的规律为  $pV^\gamma = \text{恒量}$ , 筒内每摩尔气体的内能与温度的关系为  $E_0 = RT/(a-1)$ , 式中  $T$  为热力学温度,  $R$  为摩尔气体常量. 求当左室气体吸热为  $Q = 1000\text{J}$  时, 左、右两室气体的温度和压强. 设活塞与筒壁的摩擦可忽略不计, 且不漏气. 计算过程各量均取三位有效数字.

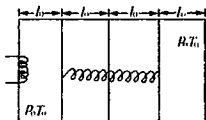


图 7-5-13

10. 有一内径均匀、两支管等长且大于  $78\text{cm}$  的一端开口的 U 形管  $ACDB$ . 用水银将一定质量的理想气体封闭在  $A$  端后, 将管竖直倒立. 平衡时两支管中液面高度差  $2\text{cm}$ , 此时闭端气柱长  $L = 38\text{cm}$ , 如图 7-5-14 所示. 已知大气压强相当于  $h_0 = 76\text{cmHg}$  高. 若保持温度不变, 不考虑水银与管壁的摩擦, 当轻轻晃动一下 U 形管, 使左端液面上升  $\Delta h$  ( $\Delta h < 2\text{cm}$ ) 时, 将出现什么现象? 试讨论并说明理由.

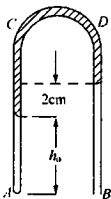


图 7-5-14

11. 有一底部开口的热气球, 其体积  $V_0 = 1.1\text{m}^3$  是常数. 气球蒙皮的质量  $m_0 = 0.187\text{kg}$ , 其体积可忽略不计. 空气的初始温度为  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ , 正常的外部气压为  $p_0 = 1.013 \times 10^5\text{Pa}$ , 在这些条件下的空气密度为  $\rho_1 = 1.2\text{kg/m}^3$ . 问: (1) 为使气球刚好能浮起, 气球内的空气必须加热到多高的温度? (2) 把气球系牢于地, 把内部空气加热到稳态温度  $t_3 = 110^\circ\text{C}$  时, 热气球的绳上的拉力多大? (3) 将气球下部扎紧, 在气球内部的空气维持稳态的温度  $t_3 = 110^\circ\text{C}$  的情形下, 气球在温度为  $20^\circ\text{C}$  和地面大气压为  $p_0 = 1.013 \times 10^5\text{Pa}$  的等温大气中上升, 在这些条件下, 气球能达到的高度  $h$  是多少? (4) 在高度  $h$  处 [见问题(3)], 将气球从其平衡位置拉离  $\Delta h = 10\text{m}$ , 然后释放, 问气球将做什么运动?

12. 直立的气缸内装有一定质量的理想气体, 每摩尔这种气体的内能是  $E = (3/2)RT$ , 其中  $R$  为气体普适常量,  $T$  为热力学温度. 质量  $M = 7.00\text{kg}$  的活塞与一倔强系数  $k = 300\text{N/m}$  的轻质弹簧相连, 弹簧的下端固定在气缸底部, 如图 7-5-15 所示. 活塞与气缸壁间的摩擦及弹簧的体积均可忽略不计. 平衡时, 测得气缸内气体温度为  $T_1 = 300\text{K}$ , 压强  $p_1 = 1.40 \times 10^5\text{Pa}$ , 气柱长  $L_1 = 50.0\text{cm}$ , 而活塞上方大气压强  $p_0 = 1.00 \times 10^5\text{Pa}$ . 活塞的截面积  $S = 25.0\text{cm}^2$ . 现有一质量  $m = 3.00\text{kg}$  的铅柱自活塞正上方  $H = 80.0\text{cm}$  高处自由落下, 与活塞发生完全非弹性碰撞, 碰撞时间极短而可忽略. 已知碰后铅柱在运动过程中某一时刻又与活塞分开, 此时气缸内气体的温度  $T_2 = 290\text{K}$ . 铅柱最终上升到活塞初始位置上方  $h = 7.80\text{cm}$  高度. 试求自铅柱与活塞开始一起向下运动到铅柱刚离开活塞的整个过程中, 外界传给气缸内气体的热量. 计算中重力加速度取  $g = 10.0\text{m/s}^2$ , 并假设活塞是绝热的, 气缸壁是可以导热的, 弹簧始终处于弹性限度范围之内.

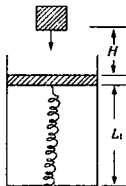


图 7-5-15

## 问题与讨论 临界情况解题

临界往往是指物理过程的转折状态,出现转折状态的条件称为临界条件.有时临界条件亦可以是维持某一物理过程的必要条件.所以求解临界问题的关键是寻找和正确运用临界条件.

例1 液体A, B互不相溶,它们的饱和蒸汽压  $p$  与温度  $T$  (绝对温标)的关系为

$$\ln \frac{p_i}{p_0} = \frac{a_i}{T} + b_i, \quad (i = A \text{ 或 } B)$$

其中  $p_0$  为标准大气压,  $a_i, b_i$  为液体本身性质所确定的常量.已测得两个温度点的  $p_i/p_0$  值如下:

$$40^\circ\text{C} \quad p_A/p_0 = 0.284 \quad p_B/p_0 = 0.07278$$

$$90^\circ\text{C} \quad p_A/p_0 = 1.476 \quad p_B/p_0 = 0.6918$$

(1) 在外部压强  $P_0$  时,确定 A, B 的沸点;

(2) 现将 100 克的液体 A 和 100 克的液体 B 注入一个容器内,并在 A 的表面上覆盖一薄层非挥发性液体 C, C 与 A, B 互不相溶, C 的作用是防止 A 的自由蒸发.如图 7-6-1 所示,各液层高度不大,液体内因重力而形成的附加压强均可忽略. A, B 的摩尔质量比为  $Y = \mu_A/\mu_B = 8$ .

今对容器缓慢、持续地加热,液体温度  $t$  ( $^\circ\text{C}$ ) 随时间  $\tau$  变化关系如图 7-6-2 所示.请确定图中温度  $t_1$  和  $t_2$  (精确到  $1^\circ\text{C}$ ) 以及在  $\tau_1$  时刻液体 A 和液体 B 的质量 (精确到 0.1 克).

假设: A, B 的蒸汽均能处理为理想气体,因此也服从道尔顿分压定律.

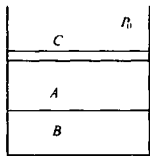


图 7-6-1

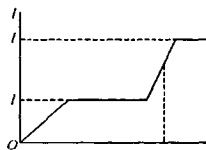


图 7-6-2

解 (1) 沸点即为  $p_i/p_0 = 1$  时的温度,记为  $T_b$  (或  $t_b$ ).由  $\ln(p_i/p_0) = 0$ , 可得

$$T_{b,i} = -a_i/b_i \quad \text{①}$$

系数  $a_i, b_i$  可由题文所给数据算出.例如对 A 有

$$\ln 0.284 = [a_A/(273.15 + 40)] + b_A$$

$$\ln 1.476 = [a_A / (273.15 + 90)] + b_A$$

由此可算得  $a_A = -3748.49\text{K}$ ,  $b_A = 10.711$  ②

同样方法可算得  $a_B = -5121.64\text{K}$ ,  $b_B = 13.735$  ③

据①式有

$$\begin{cases} T_{b,A} = 349.45\text{K}, t_{b,A} = 77^\circ\text{C} \\ T_{b,B} = 372.89\text{K}, t_{b,B} = 99.74^\circ\text{C} \approx 100^\circ\text{C} \end{cases}$$

(2) 所求  $t_1, t_2$  显然为两个相变温度, 即两个沸点. 先考虑第一次开始沸腾的温度  $t_1$ . 液体  $A, B$  内部形成的汽泡的内压强分别等于  $A, B$  的饱和蒸汽压,  $A, B$  交界面上形成的汽泡的内压强则等于  $A, B$  饱和蒸汽压之和(道尔顿分压定律). 因此在系统被缓慢而均匀地加热时,  $A, B$  交界面上形成的汽泡的内压强首先达到  $p_0$ , 温度  $t_1$  正是对应这两种液体在相互接触区域发生的共同沸腾, 它显然低于  $A, B$  各自的沸点.

由题文所给条件可写出

$$\frac{p_i}{p_0} = e^{(a_i/T) + b_i} \quad ④$$

$t_1$  需满足  $(p_A + p_B) / p_0 = 1$

即  $y(t_1) = e^{(a_A/t_0 + t_1) + b_A} + e^{(a_B/t_0 + t_1) + b_B} = 1$

为从这个超越方程在数值上确定  $t_1$ , 可以  $t_1$  近似地采用二分逼近方法取值, 每次检查等式左边  $y(t_1)$  是大于还是小于 1, 计算结果如下:

$t_1 = 40^\circ\text{C}$	$y(t_1) < 1$ (参考已知条件)
$t_1 = 77^\circ\text{C}$	$y(t_1) > 1$ ( $77^\circ\text{C}$ 为 $A$ 的沸点)
$t_1 = 59^\circ\text{C}$	$y(t_1) = 0.749 < 1$
$t_1 = 70^\circ\text{C}$	$y(t_1) = 1.113 > 1$
$t_1 = 66^\circ\text{C}$	$y(t_1) = 0.966 < 1$
$t_1 = 67^\circ\text{C}$	$y(t_1) = 1.001 > 1$
$t_1 = 66.5^\circ\text{C}$	$y(t_1) = 0.983 < 1$

因此, 在所要求的精度范围内,  $t_1 = 67^\circ\text{C}$ .

在沸点  $t_1$  下加热一段时间后,  $A, B$  中必有其一全部沸腾掉, 只剩下另外一种液体时便停止沸腾. 而后加热时温度又线性上升, 当温度达到该液体的自身沸点时又开始沸腾, 因此  $t_2$  必为  $t_{b,A}$  或  $t_{b,B}$ .

在  $t_1$  温度沸腾过程中,  $A, B$  在每个升高的汽泡中饱和蒸汽质量比  $m_A/m_B$  等于这两种蒸汽的密度比  $\rho_A/\rho_B$ , 从而有  $m_A/m_B = \rho_A/\rho_B = \mu_A p_A / \mu_B p_B = \gamma p_A / p_B$

由②, ③, ④式可算得  $t_1$  时  $p_A = 0.734 p_0$ ,  $p_B = 0.267 p_0$ . 因此  $m_A/m_B = 22.0$

这表明  $A$  的蒸发质量是  $B$  的 22 倍, 液体  $A$  的 100g 质量全蒸发掉时, 液体  $B$  仅蒸发掉  $100\text{g}/22 = 4.5\text{g}$



可见在  $t_1$  时刻容器中液体 A 的质量为零; 液体 B 的质量为  $(100 - 4.5) = 95.5\text{g}$ . 而  $t_2 = t_{b, B} = 100^\circ\text{C}$  ③

**例 2** 在竖直平面内有一个半径为  $R$  的圆环, 同一平面内有一点 A, 由点 A 到圆环上任一点 M 用光滑直线联结. 在重力作用下, 一金属小环  $m$  从 A 点由静止出发滑到 M. 问 M 点位于何处时,  $m$  滑动所用的时间最短?

**解** 如图 7-6-3 所示, 延长 AM 与圆相交于 N. 过 N 作水平线与 AD 相交于 K, 则金属小环沿光滑直线下滑的加速度为  $g \sin \theta$ , 即  $a =$

$$g \cdot \frac{\overline{AK}}{\overline{AN}}, \text{ 且 } \overline{AM} = \frac{1}{2} at^2, \text{ 所以 } t^2 = \frac{2 \overline{AM}}{g \cdot \frac{\overline{AK}}{\overline{AN}}} = \frac{2 \overline{AM} \cdot \overline{AN}}{g \cdot \overline{AK}}$$

由几何学切割线定理得知  $\overline{AM} \cdot \overline{AN} = (\overline{AT})^2 = \text{常数}$ , 所以

$$t^2 = \frac{2(\overline{AT})^2}{g \cdot \overline{AK}}$$

式中  $2(\overline{AT})^2/g$  为常数, 并设为  $C$ , 则  $t^2 = \frac{C}{\overline{AK}}$ ,  $M$  点的选择不同,  $\overline{AK}$  的值也不同. 当  $\overline{AK} = H$  时, 其值最大, 因此  $t^2$  最小,  $t$  也最小. 也就是当  $\overline{AO}$  与圆相交之点为  $M$  时, 小金环由 A 点滑到圆环所用的时间为最短.

### 【巩固习题】

1. 一根截面均匀、不变形的 U 型细塑料管, 两臂长分别为  $l_0 = 20.0\text{cm}$  和  $h_0 = 180.0\text{cm}$ , 竖直放置, 如图 7-6-4 所示. 管内灌有水银, 长管上端开口, 短管上端封闭, 管内封着长  $L = 10.0\text{cm}$  的空气柱, 已知长管及横管中的水银柱长度分别为  $h = 60.0\text{cm}$  和  $x = 10.0\text{cm}$ , 大气压强  $P_0 = 76.0\text{cmHg}$ . 现将此管绕通过长管拐角点 A 且与塑料管所在平面相垂直的轴线沿逆时针方向缓慢地转过  $180^\circ$ , 然后将长管的开口端迅速截去  $50.0\text{cm}$ , 求与管内封闭的空气相接触的水银面的最后位置.

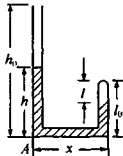


图 7-6-4

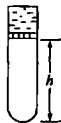


图 7-6-5

2. 如图 7-6-5 所示, 一竖直圆筒下端封闭, 上方有一无摩擦不漏气的轻质活塞, 封

闭一定量空气, 活塞上方贮有水银, 水银面恰好与管口相齐, 此时筒内气体压强为  $P_0 \text{cmHg}$ , 现向活塞上方缓缓倒入水银而不溢出, 设气柱温度保持不变, 气柱起始高度  $h$  必须满足的条件是什么?

3. 直立的汽缸内装有一定质量的理想气体, 每摩尔气体的内能是  $E = (3/2)RT$ , 其中  $R$  为气体普适常量,  $T$  为热力学温度. 质量  $M = 7.00 \text{kg}$  的活塞与一劲度系数  $k = 300 \text{N/m}$  的轻质弹簧相连, 弹簧的下端固定在汽缸底部, 如图 7-6-6 所示. 活塞与汽缸壁间的摩擦及弹簧的体积均可忽略不计. 平衡时, 测得汽缸内气体温度为  $T_1 = 300 \text{K}$ , 压强  $p_1 = 1.40 \times 10^5 \text{Pa}$ , 气柱长  $L_1 = 50.0 \text{cm}$ . 而活塞上方大气压强  $p_0 = 1.00 \times 10^5 \text{Pa}$ , 活塞的截面积  $S = 25.0 \text{cm}^2$ . 现有一质量  $m = 3.00 \text{kg}$  的铅柱自活塞正上方  $H = 80.0 \text{cm}$  高处自由落下, 与活塞发生完全非弹性碰撞, 碰撞时间极短而可忽略. 已

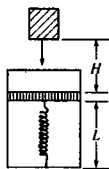


图 7-6-6

知碰后铅柱在运动过程中某一时刻又与活塞分开, 此时汽缸内气体的温度  $T_2 = 290 \text{K}$ , 铅柱最终上升到活塞初始位置上方  $h = 7.80 \text{cm}$  高度. 试求自铅柱与活塞开始一起向下运动到铅柱刚离开活塞的整个过程中, 外界传给汽缸内气体的热量. 计算中重力加速度取  $g = 10.0 \text{m/s}^2$ , 并假设活塞是绝热的, 汽缸壁是可以导热的, 弹簧始终处于弹性限度范围之内.

4. 质量足够大的长平板从  $t = 0$  时刻开始在水平方向上自静止出发朝右做匀加速运动, 加速度大小为  $a$ . 如图 7-6-7 所示, 在板的上方  $H$  高度处有一静止的小球, 在  $t = 0$  时刻自由落下, 而后与平板发生碰撞. 设小球与平板接触时的滑动摩擦系数  $\mu = 0.1$ , 小球反弹高度也为  $H$ . 将小球反弹离开平板时相对地面参照系的速度方向与朝右的水平方向夹角记为  $\beta$ , 试求  $\tan\beta$  与  $a$  的关系, 并作  $\tan\beta - a$  曲线.

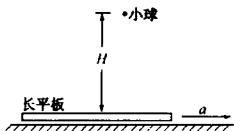


图 7-6-7



图 7-6-8

5. 光线射到由折射率  $n_1$  和  $n_2$  玻璃制作的、两个半球组成的球上 ( $n_1 > n_2$ ), 球开始绕垂直于入射光线的轴以角速度  $\omega$  转动, 如图 7-6-8 所示. 在靠近球的下部放置一块水平的屏, 试求屏上光斑的最大偏移距离.

## 第八章 固体、液体和物态变化

## 第一节 固体性质



## 【知识要点】

## 一、晶体和非晶体

固体可分为晶体和非晶体两大类。晶体又可分为单晶体和多晶体。晶体的特点是：晶体有一定的熔点，在溶解或凝固中，温度保持不变。单晶体还具有规则的几何外形，物理性质具有各向异性。同一种化学成分的某些物质，能同时以晶体形式和非晶体形式存在。

## 二、晶体的微观结构特征

从微观结构上看，所有晶体都是大量相同的结构单元（分子、原子或离子等粒子组成）在空间周期性的规则排列组成。这些结构单元的质心在空间周期性排列的总体称为空间点阵。各结构单元间很强的相互作用力，决定各粒子只能在自由平衡位置附近不停的无规则振动。

由于构成晶体点阵的结构单元周期性的、并且具有某种对称性的规则排列，决定了晶体宏观上有规则的天然几何外形，和物理性质呈现各向异性。又由于晶体点阵中各结构单元严格的相互位置关系，所以晶体受热达到瓦解程度的温度是一样的。不断加热，不断瓦解结合关系，直至瓦解完成变成液体，温度始终不必升高，所以晶体有一定的熔点。

## 三、物体的热膨胀

热膨胀是指物体在外界压强不变的条件下，长度、面积、体积随温度升高而增加的现象。在相同条件下，气体、液体、固体的热膨胀程度不同，气体最显著，固体最不明显。也有极少数物质，在某一定温度范围内，当温度升高时体积反而减小，这种现象叫反常膨胀。如：水在  $0^{\circ}\text{C} \sim 4^{\circ}\text{C}$  内的膨胀。

## 1. 线膨胀

固体受热时线度的增长称线膨胀. 设  $0^\circ\text{C}$  时, 固体的长度为  $l_0$ , 当温度升高到  $t^\circ\text{C}$  时, 固体长度为  $l_t$ , 实验证明  $\frac{l_t - l_0}{l_0 t} = \alpha$

式中比例系数  $\alpha$  称线膨胀系数, 单位为  $\text{K}^{-1}$ , 不同物质线膨胀系数不同, 上式也可写成

$$l_t = l_0(1 + \alpha t)$$

## 2. 体膨胀

固体受热线膨胀的同时自然它的体积也膨胀, 即体膨胀. 设  $V_0$  为  $0^\circ\text{C}$  时体积,  $V_t$  为温度升高到  $t^\circ\text{C}$  时体积,  $\beta$  表示体膨胀系数, 单位为  $\text{K}^{-1}$ . 实验表明, 固体体膨胀的规律为  $V_t = V_0(1 + \beta t)$

该关系式不仅固体适用, 液体的体膨胀也符合这一规律. 对不同材料体膨胀系数也不同. 对于各向同性的材料(通常金属、玻璃等), 线膨胀系数  $\alpha$  和体膨胀系数  $\beta$  间有关系  $\beta = 3\alpha$

在一般情况下, 液体的体膨胀系数要比固体的大得多.

### 【例题分析】

**例 1** 一铜环在温度为  $0^\circ\text{C}$  时的直径为  $1.00000\text{cm}$ , 一铝球在温度为  $100^\circ\text{C}$  时的直径为  $1.00200\text{cm}$ . 这时铝球能搁在铜环上, 如图 8-1-1 所示. 以后达到热平衡. 假设没有热量散失给周围物体, 铝环在平衡温度时恰好穿过铜环. 试问铝球和铜环的质量之比多大? 已知线膨胀系数  $\alpha_{\text{Cu}} = 1.7 \times 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$ ,  $\alpha_{\text{Al}} = 2.3 \times 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$ , 比热  $c_{p\text{Cu}} = 0.0923 (\text{cal/g} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $c_{p\text{Al}} = 0.215 (\text{cal/g} \cdot ^\circ\text{C})$ .

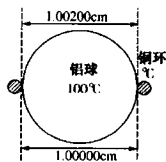


图 8-1-1

**分析与解** 设铝球质量为  $M$ , 铜环质量为  $m$ , 热平衡温度为  $t^\circ\text{C}$ , 则铝球直径  $l_1$  和铜环内径  $l_2$  分别有

$$l_1 = l_{10}[1 + \alpha_{\text{Al}}(t - 100)]$$

$$l_2 = l_{20}[1 + \alpha_{\text{Cu}}(t - 0)]$$

当铝球能穿过铜环时,  $l_1 = l_2$ , 即  $l_{10}[1 + \alpha_{\text{Al}}(t - 100)] = l_{20}(1 + \alpha_{\text{Cu}}t)$

$$\text{解得} \quad t = \frac{l_{10}(1 - 100\alpha_{\text{Al}}) - l_{20}}{\alpha_{\text{Cu}}l_{20} - \alpha_{\text{Al}}l_{10}}$$

又因为没有热量散失给周围物体, 所以铝球放出热量  $Q_{\text{Al}}$  与铜环吸收的热量  $Q_{\text{Cu}}$  有关系

$$Q_{\text{Al}} = Q_{\text{Cu}}$$

$$Mc_{p\text{Al}}(100 - t) = mc_{p\text{Cu}}t$$

$$\text{得} \quad \frac{m}{M} = \frac{c_{p\text{Al}}(100 - t)}{c_{p\text{Cu}}t} = \frac{c_{p\text{Al}}}{c_{p\text{Cu}}} \left[ \frac{100(\alpha_{\text{Cu}}l_{20} - \alpha_{\text{Al}}l_{10})}{l_{10}(1 - 100\alpha_{\text{Al}}) - l_{20}} \right]$$

代入数据得  $\frac{m}{M} = 2.3$

**例 2** 一根 1.0m 长的竖直玻璃管, 在 20℃ 时用某种液体灌到一半, 问当玻璃管温度升高到 30℃ 时, 液柱高度变化了多少? 已知玻璃线膨胀系数  $\alpha = 1.0 \times 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$ , 液体的体膨胀系数  $\beta = 4.0 \times 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$ .

**分析与解** 设 0℃ 时, 玻璃管的横截面积为  $S_0$ , 液体的体积为  $V_0$ ; 20℃ 时玻璃管的横截面积为  $S_{20}$ , 液体体积为  $V_{20}$ ; 30℃ 时, 玻璃管横截面积为  $S_{30}$ , 液体体积为  $V_{30}$ . 则

$$S_{20} = S_0[1 + 2\alpha(t_{20} - 0)]$$

$$V_{20} = V_0[1 + \beta(t_{20} - 0)]$$

$$S_{30} = S_0[1 + 2\alpha(t_{30} - 0)]$$

$$V_{30} = V_0[1 + \beta(t_{30} - 0)]$$

因为 20℃ 时, 液体灌至管一半高度, 即  $\frac{V_{20}}{S_{20}} = 0.5$

所以 30℃ 时液柱高度  $h$  为  $h = \frac{V_{30}}{S_{30}} = \frac{(1 + \beta t_{30})(1 + 2\alpha t_{20})}{2(1 + \beta t_{20})(1 + 2\alpha t_{20})}$

代入数据得  $h = 0.5001(\text{m})$

**例 3** 有人曾用图 8-1-2 所示的装置测量液体的体膨胀系数. AB 为粗细均匀 U 形玻璃管, 竖直放置, 两臂分别插在恒温容器 C (较热的) 和 D (较冷的) 中, U 形管中盛有适量的待测液体. 通过测量 C, D 内的温度和 U 形管两臂内液面的高度, 就可计算出待测液体的体膨胀系数. 试导出计算公式. 不计玻璃管的热膨胀.

**分析与解** 设 C, D 恒温容器的温度分别为  $t_1, t_2$ , 两管内液体体

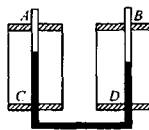


图 8-1-2

积分别为  $V_1, V_2$ , 液柱高度分别为  $h_1, h_2$ , 有  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_2}$

当 U 形管中液柱处于平衡时, 两边液柱等重. 因为  $g$  相同, 所以两边液柱质量相同, 也即相同温度时它们有相同的体积, 设 0℃ 时两边液柱体积为  $V_0$ , 则

$$V_1 = V_0(1 + \beta t_1)$$

$$V_2 = V_0(1 + \beta t_2)$$

所以得  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{1 + \beta t_1}{1 + \beta t_2}$ , 解得  $\beta = \frac{h_1 - h_2}{h_2 t_1 - h_1 t_2}$

由上式可见, 通过测量 C, D 内的温度  $t_1, t_2$  和 U 形管内两臂液面的高度  $h_1, h_2$ , 可得体膨胀系数  $\beta$ .

### 【巩固习题】

1. 已知氯化钠的摩尔质量为  $\mu = 5.85 \times 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 密度为  $\rho = 2.22 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

$m^{-3}$ , 估算两相邻钠离子的最近距离。(保留一位有效数字)

2. 要使一黄铜套筒在  $20^{\circ}\text{C}$  时紧箍在一根直径为  $2.0\text{cm}$  的杆上, 如果套筒在  $400^{\circ}\text{C}$  时恰好能套进此杆, 问套筒原来在  $20^{\circ}\text{C}$  时的内直径为多大? 已知黄铜的线膨胀系数  $\alpha = 1.9 \times 10^{-5}\text{K}^{-1}$ .

3. 一座具有黄铜摆的钟在  $0^{\circ}\text{C}$  时走得很准(即摆动一次恰为  $2\text{s}$ ), 问当温度升到  $20^{\circ}\text{C}$  时, 它将变快还是变慢? 每天变化多少时间?

4.  $0^{\circ}\text{C}$  时一水银温度计测泡的容积为  $1.5\text{cm}^3$ , 其玻璃管的截面积为  $0.015\text{mm}^2$ , 若这时水银恰好贮满测泡, 问在  $10^{\circ}\text{C}$  时管中水银柱的高度为多少? 已知玻璃的线膨胀系数为  $9.0 \times 10^{-6}\text{K}^{-1}$ , 水银的体膨胀率为  $1.82 \times 10^{-4}\text{K}^{-1}$ .

5. 厚度均为  $0.2\text{mm}$  的钢片和青铜片, 在  $293\text{K}$  时, 将它们的端点焊接起来, 成为等长的平面双金属片, 若钢和青铜的线膨胀系数分别为  $10^{-5}(1/^{\circ}\text{C})$  和  $2 \times 10^{-5}(1/^{\circ}\text{C})$ . 当把它们的温度升高到  $393\text{K}$  时, 它们将弯成圆弧形, 如图 8-1-3 所示, 试求这圆弧的半径, 在加热时忽略厚度的变化.

6. 在不同的温度范围, 水的体膨胀系数不同,  $0^{\circ}\text{C} \leq t \leq 4^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_1 = -3.3 \times 10^{-5}\text{K}^{-1}$ ;  $4^{\circ}\text{C} \leq t \leq 10^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_2 = 4.8 \times 10^{-5}\text{K}^{-1}$ ;  $10^{\circ}\text{C} \leq t \leq 20^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha_3 = 1.5 \times 10^{-5}\text{K}^{-1}$ . 如果水在温度  $t_1 = 1^{\circ}\text{C}$  时的体积  $V_1 = 10^3\text{cm}^3$ , 求水在温度  $t = 15^{\circ}\text{C}$  时体积  $V$ .

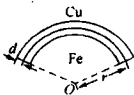


图 8-1-3

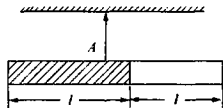


图 8-1-4

7. 两根均匀的不同金属棒, 密度分别为  $\rho_1, \rho_2$ , 线膨胀系数分别为  $\alpha_1, \alpha_2$ , 长度都为  $l$ , 一端粘合在一起, 温度为  $0^{\circ}\text{C}$ , 悬挂棒于 A 点, 棒恰成水平并静止, 如图 8-1-4. 若温度升高到  $t^{\circ}\text{C}$ , 要使棒保持水平并静止, 需改变悬点, 设位于 B, 求 A, B 间的距离.

## 第二节 液体性质



### 【知识要点】

#### 一、液体及其微观结构特征

液态物质即液体, 一方面像固体一样具有固定的体积, 且不易被压缩; 另一方面它

没有一定的形状,具有流动性;在物理性质上表现为各向同性,与气体性质相似.这是因为液体分子间的距离比固体仅改变了3%左右,分子仍受分子间相互作用力的束缚,液体分子运动与固体相似,主要表现为在平衡位置附近做热振动,但液体分子间较固体分子间大的间隙,使得液体分子围绕平衡位置振动的时间(定居时间)较短,平衡位置也是不断的改变,分子容易从一处到另一处,表现出固体没有的流动性.

## 二、液体的表面现象

液体总是与气体、固体或其他的液体相接触,这接触面称为液体表面.由于液体表面不同于液体内部的微观结构,使得液体表面具有与液体内部不完全相同的性质和表现.

### 1. 液体的表面张力

在液体与气体接触的表面层中,由于分子间距较液体内部大,所以表面层内液体分子间的作用力主要表现为引力.因而使表面层具有收缩的趋势.从能量角度看,由于液体表面层分子间为引力,所以分子在表面层中比在液体内部具有较大的势能.从力学知识知道,一个系统要达到稳定平衡,势能应为最小,所以液体分子间的作用力有使液体表面积尽可能减小的趋势.我们把这种液体表面两部分间相互吸引的力称为表面张力.

可见,液体表面张力即液体表面各部分间分子作用引力.可证明,表面张力的方向与液面相切,垂直于两部分液面的分界线,指向表面收缩的方向,大小跟分界线长度成正比.设分界线长度为  $L$  的液面,表面张力  $f$  为

$$f = \sigma L$$

式中  $\sigma$  叫表面张力系数,单位  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,它与液体的性质(种类、纯净度等)以及温度有关,与液面大小无关.

### 2. 浸润现象

在液体与固体接触的表面的一薄层(附着层)中,由于固体分子和液体分子间的作用力不同于液体内部分子间的作用力,受到液体分子和固体分子共同吸引的附着层内分子,表现出使液体表面收缩或展延的力.当固体分子对液体分子引力大于液体分子的引力时,液体分子进入附着层,液体分子比在液体内部具有更小的引力势能,所以形成了附着层液体的展延倾向,这就是浸润现象.反之,当固体分子对液体分子的吸引力小于液体分子间的吸引力时,附着层与表面层的情况相近,附着层收缩,呈现不浸润现象.

气压计等玻璃管中水银面总是上凸,是水银不浸润玻璃的结果,反之水装入玻璃容器,表面下凹说明水对玻璃是浸润的.药棉的脱脂处理,金属喷漆前的去污除锈等都是为了让药水、油漆能浸润它们,而雨衣、帐幕又要用不被水浸润的材料制作.

同一种液体可以对一些固体是浸润的,而另一固体是不浸润的.一般说,化学性质相近的液体固体有浸润现象,而化学性质相差悬殊的液体和固体则不浸润.

### 3. 毛细现象

在细管中的浸润液体沿管上升和不浸润液体沿管下降的现象称毛细现象。能够发生毛细现象的细管称毛细管。毛巾、粉笔、砖块等内部有很多细小的通道，起着毛细管的作用。土壤中，正是靠很多毛细管，使地下水上升到地表，施下的液体肥料输送到植物的根部。锄松土壤，破坏毛细管可保存地下水；压紧土壤，可使土壤中毛细管变得更细，便于引上地下水。

浸润液体能在毛细管中上升，是因为浸润液体跟毛细管内壁接触时，附着层的展延，使得弯曲液面变大，而表面张力的收缩作用又要使液面减小，于是管内液体上升，以减小液面。当表面张力向上的拉引力和管内升高液柱的重力平衡时，管内液体稳定在一定的高度。同学们可自己解释不浸润现象。如图 8-2-1 所示，毛细管内径设为  $r$ ，则液面与管壁接触线长为  $2\pi r$ ，设接触角为  $\theta$ （接触角为固液接触处，液面和固体表面的切线在液体内部所成的夹角），液体表面张力系数为  $\sigma$ ，则表面张力在竖直方向的作用力为

$$F = \sigma \cdot 2\pi r \cos\theta$$

而升高液柱的重量  $G = \rho\pi r^2 gh$

则平衡时有  $\sigma \cdot 2\pi r \cos\theta = \rho\pi r^2 gh$

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r}$$

若液体浸润毛细管壁， $\theta < \frac{\pi}{2}$ ，则  $h > 0$ ，表示液面上升；

若液体不浸润毛细管壁， $\theta > \frac{\pi}{2}$ ，则  $h < 0$ ，液面下降。

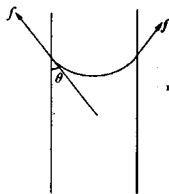


图 8-2-1

### 【例题分析】

**例 1** 一滴质量为  $2.28 \times 10^{-3} \text{ kg}$  的水银，滴落在玻璃板上，分裂成半径为  $10^{-6} \text{ m}$  的小水银珠，若分裂过程是等温的，表面张力系数  $\sigma = 0.490 \text{ N/m}$ 。求在分裂过程中为克服表面张力所做的功。已知水银密度  $\rho = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。

**分析与解** 水银滴分裂，水银滴表面积发生改变，设表面积增量为  $\Delta S$ ，则分裂过程克服表面张力所做的功为

$$W = \sigma \cdot \Delta S \quad ①$$

设分裂前后水银滴半径分别为  $R, r$ ，分裂成  $n$  滴，则

$$\Delta S = n \cdot 4\pi r^2 - 4\pi R^2 \quad ②$$

而分裂前后质量不变  $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho = n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad ③$

$$n = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \quad ④$$



$$R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} \quad (5)$$

解①, ②, ④, ⑤得  $W = \sigma \cdot 4\pi \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{\frac{2}{3}} \left[\frac{3m}{4\pi\rho} - 1\right] = 4.9 \times 10^{-2}(\text{J})$

例2 有一半径为  $R$  的球形液膜, 证明液膜对球内气体产生的附加压强为  $\Delta p = \frac{4\sigma}{R}$ ,  $\sigma$  为液膜物质的表面张力系数.

分析与解 取部分液膜, 所受表面张力  $f$  为

$$f = 2 \times \sigma \cdot 2\pi R \sin\theta \quad (\text{注意内外两个表面})$$

所以, 由于表面张力作用而产生的附加压强  $\Delta p$  为

$$\Delta p = \frac{f}{\Delta S} = \frac{4\sigma\pi R \sin^2\theta}{\Delta S}$$

而  $\Delta S = \pi(R \sin\theta)^2$ , 所以  $\Delta p = \frac{4\sigma}{R}$

例3 在半径  $r = 3.0 \times 10^{-4} \text{m}$  的细玻璃管中注入水, 可以看到管内水面呈半径为  $r$  的半球面, 管的下端形成水滴. 设水滴形状可以看成是半径为  $R = 3.0 \times 10^{-3} \text{m}$  的球体的一部分. 如图 8-2-3 所示, 试求管中水柱的长度. 已知水的表面张力系数  $\sigma = 7.3 \times 10^{-2} \text{N/m}$ .

分析与解 如图液面图, 两表面处表面张力的竖直分量平衡了管内液柱的重力.

设管中液柱高为  $h$ , 则液柱重力  $G = \rho h \pi r^2 g$

而上下表面总的表面张力的竖直分量  $F$  为

$$F = F_2 + F'_1 = \sigma \cdot 2\pi r + \sigma(2\pi R \sin\theta) \cdot \sin\theta$$

而  $\sin\theta = \frac{r}{R}$

解①, ②, ③得  $\rho h \pi r^2 g = 2\pi r \sigma + 2\pi \sigma R \frac{r^2}{R^2}$   $h = \frac{2\sigma(R+r)}{\rho R g}$

代入数据可得  $h = 0.039(\text{m})$

### 【巩固习题】

1. 已知从滴管缓慢滴下 100 滴液体, 其质量  $M = 3.30 \text{g}$ , 滴管内径  $d = 1.35 \text{mm}$ , 如图 8-2-4 所示, 试求该液体的表面张力系数.

2. 在  $\square$  形铁丝框上架有一可以自由移动的细铁丝  $ab$ , 如图 8-2-5 所示. 细铁丝长  $20 \text{cm}$ , 框上布着液膜, 如用力拉动  $ab$  使液膜总表面积增加  $200 \text{cm}^2$ , 外力需做多少功? 已知液体的表面张力系数为  $7.2 \times 10^{-2} \text{N/m}$ , 摩擦力忽略不计.

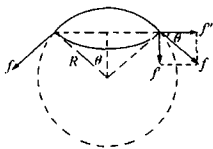


图 8-2-2

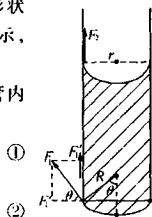


图 8-2-3

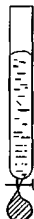


图 8-2-4

3. 将端点相互连接的三根细线绑在水面上,如图 8-2-6 所示.其中第一、二条线各长 1.5cm,第三条线长 1cm.若在图中 A 点滴下某种杂质,使表面张力系数减小到原来 2/5,求每根线的张力.然后又把该杂质滴在 B 点,求每根线的张力变为多少?已知水的表面张力系数  $\sigma = 7 \times 10^{-2} \text{N/m}$ .

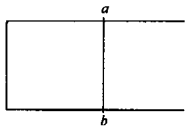


图 8-2-5

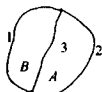


图 8-2-6

4. 在密度为  $\rho = 7.8 \text{g/cm}^3$  的钢针表面上涂一薄层不能被水浸润的油以后,再把它轻轻地横放在静水的表面,为了使针在  $0^\circ\text{C}$  时不掉入水中,不考虑浮力,问该钢针的直径最大为多少?

5. 如图 8-2-7 所示,一支两端开口的玻璃毛细管内径  $4 \times 10^{-4} \text{m}$ ,长度 0.2m,将其水平浸入水银面下  $h = 0.15 \text{m}$  处,空气全部留在管内,则管中空气柱的长度为多少?已知水银的表面张力系数  $0.49 \text{N/m}$ ,大气压强  $10^5 \text{Pa}$ ,水银与玻璃接触角  $180^\circ$ .

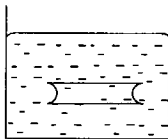


图 8-2-7

6. 将少量水银放在两块水平的平板玻璃间,问什么负荷(包括上板重量)加在上板时,能使两板间的水银厚度处处都等于  $1.0 \times 10^{-4} \text{m}$ ,并且每板和水银的接触面积为  $4.0 \times 10^{-3} \text{m}^2$ ,水银的表面张力系数  $0.45 \text{N/m}$ ,水银与玻璃的接触角为  $135^\circ$ .

7. 水油边界的表面张力系数  $\sigma = 1.8 \times 10^{-2} \text{N/m}$ ,为了使  $1.0 \times 10^{-3} \text{kg}$  的油在水内散成半径为  $r = 10^{-6} \text{m}$  的小油滴,问至少要做多少功?已知油的密度为  $900 \text{kg/m}^3$ .

### 第三节 物态变化



#### 【知识要点】

#### 一、汽化和液化

物质由液态转化为气态的过程叫做汽化.由气态转化为液态的过程叫液化.汽化过程吸热,液化过程放热.

汽化有蒸发和沸腾两种形式.

##### 1. 蒸发和沸腾

蒸发是发生在液体表面的汽化过程,它可在任何温度下进行.蒸发时液体从周围物体吸收热量,因而蒸发有致冷作用.影响蒸发速度的因素主要有:(a)自由表面大小,自由表面越大,蒸发越快;(b)液体温度高低,液体温度高,蒸发快;(c)通风条件好坏,通风好蒸发快;(d)液面上压强大小,压强小蒸发快;(e)液体本身的性质.

沸腾是液体表面和内部同时进行的汽化过程.要使沸腾发生,它的饱和汽压必须等于外界气压;沸腾时液体的温度保持不变,我们把这个温度称该液体的沸点.不同液体在相同压强下的沸点不同;同种液体,外界压强增加,沸点升高;反之降低.

从分子运动论的观点看,因为液体中总有部分分子动能大于平均动能的分子,这部分动能大的分子又处于液面上,则增大了脱离液内分子束缚而逸出液面的可能性,与此同时成为蒸汽的分子在与其他分子不断碰撞后也可能返回液面或进入液体内部.如果同一时间内,从液体中逸出的分子数大于返回液体的分子数,宏观上表现为蒸发.因逸出分子动能大于平均动能,使液体内部留着分子的平均动能减小,致使液体温度下降.

沸腾从分子运动论观点看,与蒸发无本质差别,只是在液面上蒸发的同时,液体内部出现大量小汽泡向上浮起至液面破裂,大大增加了汽化的速度.

## 2. 饱和汽和未饱和汽

在蒸发过程中,若单位时间飞离液面分子数大于返回液体中的分子数,此时蒸发继续.若液体盛于密闭容器中,则随着蒸发的不断进行,蒸汽分子数密度逐渐增大,一定时间后使单位时间内通过表面蒸发出来的分子数等于返回液体的蒸汽分子数,达到动态平衡,把此时的蒸汽称为饱和蒸汽(简称饱和汽),对应的压强称饱和汽压.在一个密闭容器中只要有该种液体存在,最终此种液体蒸汽必然处于饱和态.

饱和汽有如下性质:

- (1)在同一温度下,不同液体的饱和汽压一般不同;
- (2)一种液体的饱和汽压随温度的升高而迅速升高,只要密闭容器中仍然有液体存在;
- (3)温度一定时,同种液体的饱和汽压与饱和汽的体积无关.

液体汽化时,未达动态平衡的蒸汽称未饱和汽,未饱和汽近似遵循理想气体状态方程.

## 3. 汽化热

单位质量某种液体在温度不变下,变成同温度的饱和汽时所吸收的热量称为汽化热.常用  $L$  表示,国际单位是  $J/kg$ .

同种液体在不同温度时汽化热不同,温度越高,汽化热越小.不同液体在温度相同时汽化热不同.

液体汽化因温度不变,所以外界热源要不断供给液体热量,一方面来增加分子势能,从而增加物质内能,另一方面克服恒定的外压强做功,它们间关系满足热力学第一

定律.

#### 4. 液化

当饱和汽的体积减小或温度降低时,汽将转化成液,这一过程称液化,汽凝结为液时要放出热量.实验表明,单位质量的汽凝结为液体时所放出的热量,等于同一温度下液体变为相同温度的汽时的汽化热.

#### 二、熔解和凝固

物质从固态变为液态叫熔解,从液态变为固态叫凝固.

因为固体分晶体和非晶体,对晶体,在一定压强下,有一定熔化温度,即熔点.反之凝固时有一个凝固点.实验表明,同一种晶体,在同一压强下,它的熔点与凝固点相同.而非晶体在熔解和凝固中,温度不是保持不变的,所以非晶体没有熔点和凝固点.

单位质量的某种物质(晶体),在熔点时,从固态完全熔解成同温度液体时吸收的热量称这种物质的熔解热,用 $\lambda$ 表示,国际单位制单位是 $\text{J/kg}$ .在液体凝固时要放出热量,单位质量的某物质凝固时,放出的热量等于它的熔解热.熔点跟压强有关,因而物质的凝固热也与压强有关.若有质量为 $m$ 的晶体熔解(凝固)时吸收(放出)热量 $Q$ 为

$$Q = \lambda m$$

#### 三、升华和凝华

物质从固态不经液态直接变成气态的现象称升华.物质直接从气态变为液态的现象称凝华.

单位质量的固态物质升华时吸收的热量叫升华热;单位质量的气态物质凝华时放出的热量叫凝华热.在相同的外界条件下,凝华热等于升华热,且等于它的熔解热和汽化热之和.

在相同条件下,不同物质升华热不同;同一物质不同条件下的升华热也不同.

#### 四、空气的湿度、露点

##### 1. 空气的湿度

空气的湿度表示空气的干湿程度,它取决于空气中所含水蒸气的密度,即单位体积的空气中所含的水蒸气的质量.因常温下,某一温度的水蒸气的压强近似地与其密度成正比,所以常用空气中水蒸气的压强来表示空气的湿度.

空气中所含水蒸气的压强称空气的绝对湿度,单位为毫米汞柱( $\text{mmHg}$ 高)或毫巴( $\text{mb}$ ).

某温度时空气的绝对湿度跟同温度下水的饱和汽压的百分比叫做空气的相对湿度.若用 $p$ 表示绝对湿度, $P$ 表示饱和汽压,则相对湿度 $\beta$ 可表示为 $\beta = \frac{p}{P} \times 100\%$ .相对湿度反映了空气中的水汽离开饱和的程度.

##### 2. 露点

空气中的水蒸气一般情况下都处于未饱和状态,即相对湿度小于1.要使水蒸气饱和,可以采用降低温度的方法,使空气中原来所含的未饱和水蒸气刚好能变为饱和水蒸气时的温度称为露点.

因气温降至露点时,空气中的实际水蒸气压强(绝对湿度)等于饱和水蒸气压强,所以通过测定露点来确定绝对湿度、相对湿度.

### 【例题分析】

**例1** 一个初始体积为  $V_0$  的汽缸中,盛有 2mol 的空气和少量的水(体积可略).总的压强是 3.0atm.第一次等温膨胀,使体积加倍,水刚好全部消失,总压强变为 2.0atm.第二次等温膨胀,使体积再次加倍.试求:(1)汽缸中气体温度;(2)汽缸中水蒸气的摩尔数;(3)第二次膨胀后,汽缸中气体的总压强.(题中空气、水蒸气均看作理想气体)

**分析与解** (1)在汽缸中有水时,水蒸气必饱和.设初态时空气压强  $p_1$ 、饱和水汽压强为  $p_0$ ,则  $p_1 + p_0 = 3.0$  ①

由等温膨胀,体积加倍时,空气压强减为  $\frac{p_1}{2}$ ,则  $\frac{p_1}{2} + p_0 = 2.0$  ②

解①、②得  $p_1 = 2.0\text{atm}$ ,  $p_0 = 1.0\text{atm}$

由  $p_0 = 1.0\text{atm}$ ,可知汽缸中气体温度为  $100^\circ\text{C}$ .

(2)设水蒸气有  $n$  mol,第一次等温膨胀,由理想气体状态方程得

$$p_0 \cdot 2V_0 = nRT_0 \quad ③$$

$$\frac{p_1}{2} \cdot 2V_0 = n_{\text{空}} RT_0 \quad ④$$

解③、④得  $n = 2\text{mol}$

(3)因第一次膨胀后,水全部消失变成水蒸气,所以第二次等温膨胀中,由道尔顿分压定律,在体积加倍时,水蒸气和空气压强均变为原来一半,故  $p_{\text{总}} = \frac{p_0}{2} + \frac{p_1}{4} = 1\text{atm}$

**例2** 用不导热细管连接的两个相同容器,容器里装有压强为 1atm、相对湿度  $\beta_1 = 50\%$ 、温度为  $100^\circ\text{C}$  的空气,现将其中一个容器浸在  $0^\circ\text{C}$  的冰中,试问系统的压强改变为多大?每一容器中的相对湿度多大?已知  $0^\circ\text{C}$  时水汽饱和汽压为 4.6mmHg.

**分析与解** 当一个容器浸入  $0^\circ\text{C}$  的冰中时,另一容器中的空气、水蒸气将流入该容器,整个系统的压强降低,达平衡时,两边容器中空气、水蒸气分别有相同的压强,设此状态空气压强为  $p_{\text{空}}$ 、水蒸气压强为  $p_{\text{水}}$ .

由于浸入前后空气总摩尔数不变,所以有

$$\frac{p_{\text{空}} V_0}{RT_{100}} + \frac{p_{\text{空}} V_0}{RT_0} = 2 \times \frac{V_0 p_0 (1 - \beta_1)}{RT_{100}}$$

其中  $V_0$  为一个容器的容积,  $p_0$  为开始时容器内气体压强

解得

$$p_{\text{空}} = \frac{2p_0(1-\beta_1)}{1+T_{100}/T_0} = 321(\text{mmHg})$$

因为水蒸气的压强  $p_{\text{水}}$  一定不大于同温度水蒸气的饱和气压,即

$$p_{\text{水}} \leq p_{\text{饱}(0^\circ\text{C})} = 4.6(\text{mmHg})$$

若没有水蒸气凝结,按水蒸气摩尔总数不变,类似求  $p_{\text{空}}$  方法得  $p_{\text{水}} = p_{\text{空}} = 321\text{mmHg}$ ,  $p_{\text{水}} > p_{\text{饱}(0^\circ\text{C})}$ , 说明这一冷却过程必有水蒸气凝结,所以容器中水蒸气压强  $p_{\text{水}} = p_{\text{饱}(0^\circ\text{C})} = 4.6\text{mmHg}$ , 则容器中气体总压强

$$p' = p_{\text{空}} + p_{\text{水}} = 325.6(\text{mmHg})$$

$$0^\circ\text{C} \text{ 容器中相对湿度 } \beta_2 = \frac{p_{\text{水}}}{p_{\text{饱}(0^\circ\text{C})}} \times 100\% = 100\%$$

$$100^\circ\text{C} \text{ 容器中相对湿度 } \beta_3 = \frac{p_{\text{水}}}{p_{\text{饱}(100^\circ\text{C})}} \times 100\% = 0.6\%$$

**例 3** 已知有冰、水和水蒸气在一封闭容器中,如三态能平衡共存,则系统的温度和压强必定分别是  $t_0 = 0.01^\circ\text{C}$ ,  $p_0 = 4.58\text{mmHg}$ . 现有冰、水、水蒸气各  $1\text{g}$  处于上述平衡态,若保持总体积不变,对系统缓缓加热,输入热量  $Q = 0.255 \times 10^3\text{J}$ , 试估算系统再达平衡后,冰、水和水蒸气的质量. 已知在此条件下冰的升华热  $L_{\text{升}} = 2.83 \times 10^3\text{J/kg}$ , 水的汽化热  $L_{\text{汽}} = 2.49 \times 10^3\text{J/kg}$ .

**分析与解** 因加热系统,系统中再次平衡后,冰、水、水蒸气所处状态跟所吸收热量有关. 因为冰熔解热  $L_{\text{熔}}$  满足  $L_{\text{熔}} = L_{\text{升}} - L_{\text{汽}} = 0.34 \times 10^3\text{J/kg}$

对  $1\text{g}$  冰全部熔解吸热  $Q_1$  为  $Q_1 = L_{\text{熔}} m = 0.34\text{J} > Q$

说明该过程中冰不能全部熔解,所以再次平衡时,系统温度、压强均不变,则水蒸气

$$\text{密度 } \rho_{\text{汽}} \text{ 为 } \rho_{\text{汽}} = \frac{p_0 M}{RT_0} \approx 5 \times 10^{-3}(\text{kg/m}^3)$$

观察比较有:  $\rho_{\text{汽}} \ll \rho_{\text{冰}}$ ,  $\rho_{\text{汽}} \ll \rho_{\text{水}}$ . 所以在冰熔解过程中,因同质量水蒸气体积远大于水、冰体积,可以认为水蒸气'体积不变,故水蒸气的质量仍为  $1\text{g}$ .

设冰、水质量各为  $m_1$ 、 $m_2$ , 则

$$m_1 + m_2 = 2 \quad \text{①}$$

$$(1 - m_1)L_{\text{熔}} = Q \quad \text{②}$$

解①、②得  $m_1 = 0.25(\text{g})$ ,  $m_2 = 1.75(\text{g})$

所以再次平衡时,系统中冰、水、水蒸气质量各为  $0.25\text{g}$ 、 $1.75\text{g}$ 、 $1\text{g}$ .

### 【巩固习题】

1. 将一端封闭的管(管内含有空气)放进装有水的水槽中,水面以上部分的管长为  $2H$ , 管内水面距封闭顶端  $H$ , 如图 8-3-1 所示. 整个系统初始温度为  $0^\circ\text{C}$ . 求将整个系统

加热到沸点时管内水面的位置。设管外大气压强为  $p_0$ ； $0^\circ\text{C}$  时水的饱和汽压可忽略不计；系统加热到沸点后，外界传给系统的热量足够小，因而管内的液面还是比较平静。

2. 一个被加热到温度  $t_1$ 、半径为  $R$  的铁球放在温度  $t_2 = 0^\circ\text{C}$  的冰上，问球陷入冰里的深度是多少？设球全部陷入冰里；不计球散失到空气中的热量，也不考虑熔化的水被加热，冰的溶解热为  $L_m$ 、密度为  $\rho_1$ ；铁的密度  $\rho_2$ 、比热为  $c$ 。

3. 两个完全相同的可透热高玻璃筒，一个装有由原来筒中的水结成的高  $h = 25\text{cm}$  的冰，另一个装有温度  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  的水，水面高度也是  $25\text{cm}$ 。现把水倒冰上，并立即标记出水面位置。在达到热平衡后，发现水面升高  $\Delta h = 0.5\text{cm}$ ，问冰的初始温度是多少？已知冰的密度  $\rho_{\text{冰}} = 900\text{kg/m}^3$ ，冰的溶解热  $L_m = 340\text{kJ/kg}$ ，比热  $c = 2100\text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ 。

4. 将一份潮湿空气的体积压缩为原来的  $1/4$ ，它的压强增至原来的 3 倍。若再把体积压缩  $1/2$ ，压强变为最初的 5 倍。以上一切过程中温度保持不变，空气和水蒸汽均视为理想气体。问在最初条件下相对湿度是多少？

5. 活动活塞将一气缸分成容积均为  $V_0 = 1 \times 10^{-3}\text{m}^3$  的两个相等部分，一部分装有干燥空气，另一部分装有水和水蒸气。水的质量  $m = 4\text{g}$ 。加热气缸，活塞便开始移动，当它移到缸长为  $1/4$  时便停止了移动，空气的平均摩尔质量为  $28\text{g/mol}$ 。问：(1) 加热前缸内水蒸气的质量  $m_1$  是多少？(2) 气缸内空气的质量  $m_2$  等于多少？

6. 在一密闭容器里有温度  $T_0 = 100^\circ\text{C}$  的饱和水蒸气和少量水，水蒸气的质量  $M = 0.1\text{kg}$ ，水的质量  $m = 0.001\text{kg}$ ，继续对容器加热，问水刚好蒸发完时：(1) 容器被加热到的最后温度  $T$  是多少？(2) 所需热量  $Q$  是多少？已知每升高  $1^\circ\text{C}$ ，饱和水汽压增加  $\Delta p = 3.7 \times 10^3\text{Pa}$ ，水的汽化热为  $L_m = 2.25 \times 10^6\text{J/kg}$ ，水蒸气的定容比热容  $c_v = 1.38 \times 10^3\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ 。

7. 如图 8-3-2 所示。把容器 A、B 用带有开关  $K_1$  的细管及带有开关  $K_2$  的细管连在一起，A 的温度始终保持  $57^\circ\text{C}$ ，B 的温度始终保持  $27^\circ\text{C}$ 。开始时，两容器都封闭着，A、B 都只注入饱和水蒸气（容器中没有空气，且水汽没有凝结），A 和 B 的体积都一样，均为  $8.21 \times 10^2\text{l}$ ，已知水在  $27^\circ\text{C}$  时的饱和蒸汽压为  $3.52 \times 10^{-2}\text{atm}$ ，在  $57^\circ\text{C}$  时饱和蒸汽压为  $17.08 \times 10^{-2}\text{atm}$ 。细管体积忽略不计，问：(1) 若打开  $K_1$ ，达平衡后 A 中尚余多少摩尔水蒸气？(2) 若接(1)后，把  $K_1$  关闭，打开  $K_2$ ，并用真空泵将 B 容器抽成真空，然后再把  $K_2$  关闭，打开  $K_1$ ，这时 A、B 容器中最后的压强为多少？

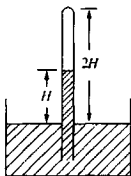


图 8-3-1

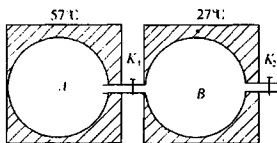


图 8-3-2

## 第四节 综合训练

## 【例题分析】

**例 1** 一铝片先在干燥空气中称质量,再在湿空气中称质量,湿空气中水蒸气分压为 15.2mmHg,称质量时用铜砝码,大气压强为 760mmHg,温度在两种情况中相同.如果所用秤的灵敏度只能对  $1 \times 10^{-7}$ kg 的差别才有反应,问铝片至少有多少质量才能在上述两种情况下表现出差别?已知铝的密度为  $2.7 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ ,铜的密度为  $8.5 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ .称量在  $20^\circ\text{C}$  进行.

**分析与解** 由理想气体状态方程和密度公式,气体密度与状态参量间有

$$\rho = \frac{pM}{RT}$$

$M$  为气体摩尔质量.

在  $p_0 = 760 \times 10^{-3} \times 9.8 \times 13.6 \times 10^3 \text{N/m}^2$ . 空气摩尔质量  $M_{\text{空}} = 0.029 \text{kg}$ ,  $T = 293 \text{K}$ ,

所以干空气密度  $\rho_{\text{干}} = \frac{p_0 M_{\text{空}}}{RT} = 1.206 (\text{kg/m}^3)$

而水摩尔质量  $M_{\text{水}} = 0.018 \text{kg}$ ,  $p_{\text{水}} = 15.2 \times 10^{-3} \times 9.8 \times 13.6 \times 10^3 (\text{N/m}^2)$ ,  $T = 293 \text{K}$ ,所以湿空气中水汽密度  $\rho_{\text{水}} = 0.015 (\text{kg/m}^3)$

同理,湿空气中,空气密度  $\rho_{\text{空}} = 1.182 (\text{kg/m}^3)$

所以湿空气密度  $\rho_{\text{湿}} = \rho_{\text{水}} + \rho_{\text{空}} = 1.197 (\text{kg/m}^3)$

干、湿空气密度差  $\Delta\rho = \rho_{\text{干}} - \rho_{\text{湿}} = 9 \times 10^{-3} (\text{kg/m}^3)$

又 1kg 铜和铝的体积差  $\Delta V = V_{\text{铜}} - V_{\text{铝}} = \frac{1}{\rho_{\text{铜}}} - \frac{1}{\rho_{\text{铝}}} = 0.252 \times 10^{-3} (\text{m}^3)$

当在干空气中达到平衡的 1kg 铝与 1kg 铜放到湿空气中,则其浮力变化量

$$\Delta F = \Delta\rho \cdot \Delta V = 22.2 (\text{N/kg})$$

因为天平灵敏度为  $1 \times 10^{-7} \text{kg}$ ,为使在干、湿空气中称量铝的差异能表现出来,铝的质量

$\Delta m$  至少为  $\Delta m = \frac{1 \times 10^{-7}}{\Delta F} = 0.044 (\text{kg})$

**例 2** 在质量为  $m_1$  的铜量热器中含有质量为  $m_2$  的水,共同温度为  $t_1$ ,一块质量为  $m_3$ 、温度为  $t_3$  的冰投入量热器中,求各种可能情形下的最终温度.在计算中  $t_3$  应取负值.铜比热  $c_1 = 0.1 \text{kcal}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,水的比热  $c_2 = 1 \text{kcal}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,冰的比热  $c_3 = 0.5 \text{kcal}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,冰的熔解热  $L = 80 \text{kcal/kg}$ .

**分析与解** 在冰投入后达到热平衡以后量热器中可能存在三种不同的状态:(1)只



有冰；(2)只有水；(3)冰水共存。

(1)若量热器中水全部结冰,则最后平衡温度  $t_a \leq 0$ ,由热平衡方程

$$c_3 m_3 (t_a - t_3) = (c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12} + m_2 L + c_2 m_2 (0 - t_a) + c_1 m_1 (0 - t_a)$$

解得 
$$t_a = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12} + c_3 m_3 t_3 + m_2 L}{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3}$$

因为  $t_a \leq 0$ ,则上式满足条件

$$(c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12} \leq -c_3 m_3 t_3 - m_2 L$$

(2)若量热器中只有水,则最终平衡温度  $t_b \geq 0$ ,由热平衡方程可得

$$c_3 m_3 (0 - t_3) + m_3 L + c_2 m_2 (t_b - 0) = (c_1 m_1 + c_2 m_2) (t_{12} - t_2)$$

解得 
$$t_b = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12} + c_3 m_3 t_3 - m_3 L}{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3}$$

因为  $t_b \geq 0$ ,则上式满足条件

$$-c_3 m_3 t_3 + m_3 L \leq (c_2 m_2 + c_1 m_1) t_{12}$$

(3)若量热器中冰水共存,则  $t_c = 0^\circ\text{C}$ . 设混合后有质量为  $m_0$  的冰融化,由热平衡方程  $c_3 m_3 (0 - t_3) + m_0 L = (c_1 m_1 + c_2 m_2) (t_{12} - 0)$

解得 
$$m_0 = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12} + c_3 m_3 t_3}{L}$$

由(1)(2)解,上式成立的条件是

$$-c_3 m_3 t_3 + m_3 L > (c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12} > -c_3 m_3 t_3 - m_2 L$$

例3 两个肥皂泡在连起来之前,经常先生成一个中间形的泡,在中间有一个隔膜,如图8-4-1所示。(1)已知  $r_1$  和  $r_2$ ,求把两个泡分开的膜的半径  $r_{12}$ ; (2)假设  $r_1 = r_2 = r$ ,求在生成中间泡之前两个泡的半径为多少? 把中间泡两部分分开的膜消失后,新泡的半径将是多少?

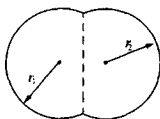


图8-4-1

分析与解 如图所示,  $p_1$  和  $p_2$  不相等,则球1和球2内的压强与外界大气压的差值不等,所以分隔两泡的膜不会是一个平面,设膜是半径为  $r_0$  的球膜,由半径为  $r$  的肥皂泡内外压强差  $\Delta p$  公式  $\Delta p = \frac{4\sigma}{r}$  可推出隔膜两边气体的附加压强  $\Delta p' = \frac{4\sigma}{r_0}$ . 而两边球内气体压强差  $\Delta p''$  可表示为

$$\Delta p'' = p_0 + \frac{4\sigma}{r_1} - \left( p_0 + \frac{4\sigma}{r_2} \right) = \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) 4\sigma$$

$r_1, r_2$  的大小决定隔膜凹凸的方向. 因为稳定时  $\Delta p' = \Delta p''$ , 所以

$$r_0 = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

$r_1 > r_2$ , 中间膜由泡2凸向泡1; 反之凸向泡2.

(2) 若  $r_1 = r_2 = r$ , 由空间关系, 可推得中间隔膜面为平面, 两球心间距为  $r$ , 即  $d = \frac{r}{2}$ , 如图 8-4-2. 设生成中间泡前泡半径为  $R$ , 由体积不变条件, 可得

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi(2r^3 + d^3 - 3r^2d)$$

$$\text{代入 } d = \frac{r}{2}, \text{ 得 } \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{5}{24}\pi r^3, R = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}r$$

又设中间隔膜破裂后泡半径为  $R_0$ , 仍利用体积不变, 可得

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 = 2 \times \left( \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{5}{24}\pi r^3 \right)$$

$$\text{解得 } R_0 = \frac{3}{4}\sqrt[3]{4}r$$

**例 4** 在一个横截面积为  $S$  的密闭容器中, 有一质量为  $M$  的活塞把容器隔成 I、II 两室, I 室中为饱和水蒸气, II 室中有质量为  $m$  的氮气. 活塞可在容器中无摩擦地滑动. 原来, 容器被水平地放置在桌面上, 活塞处于平衡时, 活塞两边的气体温度均为  $T_0 = 373\text{K}$ , 压强同为  $p_0$ , 如图 8-4-3 所示. 今将整个容器缓慢地转到图 8-4-4 所示的直立位置, 两室温度仍是  $T_0$ , 并且少量水蒸气液化成水. 已知水的汽化热  $L$ , 水蒸气和氮气的摩尔质量分别为  $\mu_1$  和  $\mu_2$ . 求在整个过程中, I 室内的系统与外界交换的热量.

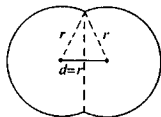


图 8-4-2

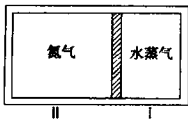


图 8-4-3

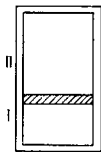


图 8-4-4

**分析与解** 当容器处在初始位置时, 设水蒸气的体积为  $V_1$ , 氮气的体积为  $V_2$ , 当容器处在直立位置时, 水蒸气的体积为  $V - \Delta V$ , 压强仍为  $p_0$ ; 氮气体积为  $V_2 + \Delta V$ , 设压强为  $p$ , 则  $p = p_0 - \frac{Mg}{S}$  ①

由克拉珀龙方程  $p_0 V_2 = \frac{m}{\mu_2} RT_0$  ②

$$p(V_2 + \Delta V) = \frac{m}{\mu_2} RT_0 \quad ③$$

由①、②、③可解得  $\Delta V = \frac{MgV_2}{p_0 S - Mg} = \frac{mMgRT_0}{p_0 \mu_2 (p_0 S - Mg)}$  ④

设水蒸气中转变成为水的质量为  $\Delta m$ , 因为只有少量水蒸气变成水, 所以水的体积可忽略不计, 则  $\Delta m = \frac{\mu_1 p_0 V_1}{RT_0} - \frac{\mu_1 p_0 (V_1 - \Delta V)}{RT_0}$

$$= \frac{\mu_1 p_0}{RT_0} \cdot \frac{mMgRT_0}{\rho_0 \mu_2 (p_0 S - Mg)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{Mg}{\rho_0 S - Mg} m$$

$$\text{故 I 室内的系统向外界放热 } Q = \Delta ml = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{mMgL}{\rho_0 S - Mg}$$

**例 5** 把质量为  $m_1 = 100\text{g}$  的氮气与未知质量的氧气混合, 在温度  $T = 77.4\text{K}$  的条件下, 让单位体积的混合气体做等温压缩, 混合气体的压强和体积的关系如图 8-4-5 所示. (1) 确定氧气的质量  $m_2$ ; (2) 计算在  $T = 77.4\text{K}$  时饱和氧气的压强  $p_{0K}$ . (说明:  $T = 77.4\text{K}$  是标准大气压下液态氮的沸点, 液态氧的沸点更高)

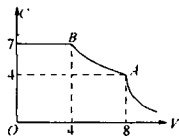


图 8-4-5

**分析与解** 因为液态氧的沸点更高, 所以等温压缩中氧气先达到饱和气压, 从题给图线可知从 A 点开始, 氧气达饱和气压, 设氧气饱和气压为  $p_1$ , 则 A → B 中氧气压强  $p_1$  不变, 而质量减少; 到 B 点后, 氮气达饱和气压, 设为  $p_2$ , 设氧气质量为  $m_2$ , 在 A 点氮气压强为  $p$ , 则

$$p_1 V_1 = \frac{m_2}{\mu_{O_2}} RT \quad (1)$$

$$p V_1 = \frac{m_1}{\mu_{N_2}} RT \quad (2)$$

$$\text{在 A 点有 } p + p_1 = 4 \quad (3)$$

$$\text{在 B 点有 } p_1 + p_2 = 7 \quad (4)$$

又因为 A → B 中氮气质量  $m_1$  不变, 则

$$p V_A = p_2 V_B \quad (5)$$

$$\text{由 } V_1 = 2 V_B$$

$$\text{所以 } p_2 = 2p \quad (6)$$

式①代入③, ④可解得  $p = 3, p_1 = 1, p_2 = 6$

$$\text{再由①, ②得 } \frac{p_1}{p} = \frac{m_2 \mu_{N_2}}{m_1 \mu_{O_2}}$$

$$\text{所以 } m_2 = \frac{p_1 m_1 \mu_{O_2}}{p \mu_{N_2}} = \frac{1 \times 100 \times 32}{3 \times 28} = 38.1(\text{g})$$

即混合气体中有氧气 38.1g, 77.4K 下氧气的饱和气压为

$$p_{0K} = \frac{1}{6} p_2 = \frac{1}{6} (\text{atm})$$

## 【精选习题】

1. 如图 8-4-6 所示, 这是一个测量金属杆膨胀系数的装置.  $M$  为一平面镜, 平行光束照射到镜面上, 反射后在直尺上形成光斑. 镜的支架一端  $a$  放在一固定的平台上, 另一端  $b$  支撑在金属杆的上端, 杆的底端则固定. 当杆受热膨胀时, 其长度  $L$  伸长, 将镜架的  $b$  端抬高, 使反射后的光斑在直尺上移过距离  $d$ . 已知镜尺距离  $D = 100\text{cm}$ , 镜架两支点  $ab$  间的距离  $l = 5\text{cm}$ , 金属杆的长度  $L = 50\text{cm}$ , 温度升高  $50^\circ\text{C}$ , 尺上光斑移过的距离  $d = 2\text{cm}$ , 试求金属杆的线膨胀系数. (本题中所涉及的角度都很小, 可用  $\tan\alpha = \sin\alpha = \alpha$  的近似)

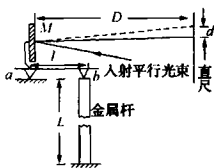


图 8-4-6

2. 有两根长度均为  $50\text{cm}$  的金属丝  $A$  和  $B$  牢固地焊在一起, 另两端固定在牢固的支架上, 如图 8-4-7 所示. 其线膨胀系数分别为  $\alpha_A = 1.1 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_B = 1.9 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ ; 劲度系数分别为  $k_A = 2 \times 10^6\text{N/m}$ ,  $k_B = 1 \times 10^6\text{N/m}$ , 金属丝  $A$  受到  $450\text{N}$  的拉力时就会断开, 金属丝  $B$  受到  $520\text{N}$  的拉力时才断. 假定支架的间距不随温度改变, 问当温度由  $30^\circ\text{C}$  下降到  $-20^\circ\text{C}$  时, 会出现什么情况呢? ( $A, B$  丝都不断, 还是  $A$  断或者  $B$  断, 还是两丝都断呢?) 不计金属丝的重量, 在温度  $30^\circ\text{C}$  时它被拉直但张力为零.

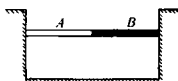


图 8-4-7

3. 将一充满水银的气压计下端浸在一个广阔的盛水银的容器中, 读数为  $p = 0.950 \times 10^5\text{N/m}^2$ . (1) 求水银柱高度; (2) 考虑毛细现象后, 真正的大气压强多大? 已知毛细管直径  $d = 2.0 \times 10^{-3}\text{m}$ , 接触角  $\theta = \pi$ , 水银的表面张力系数  $\sigma = 0.49\text{N/m}$ ; (3) 若允许误差  $0.1\%$ , 求毛细管直径所允许的最小值.

4. 体积  $V = 6.0 \times 10^{-3}\text{m}^3$  的绝热密封容器内盛有温度  $T_1 = 393\text{K}$  的饱和水蒸气, 饱和蒸汽压  $p_1 = 1.96 \times 10^5\text{Pa}$ , 今向容器内喷入温度  $T' = 283\text{K}$  的一定质量的水后, 容器内温度降至  $T_2 = 373\text{K}$ , 而饱和蒸汽压也降至  $p_2 = 9.81 \times 10^4\text{Pa}$ . 已知水的比热  $c = 4.186 \times 10^3\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ , 水蒸气的摩尔定容热容  $c_V = 3R$ ,  $T_2, p_2$  时的汽化热  $L = 2.26 \times 10^6\text{J/kg}$ . 试问此过程中有多少质量的原水蒸气凝结成水? (1 摩尔气体在等体过程中每升高  $1\text{K}$  所需吸收的热量, 称为该气体的摩尔定容热容).

5. 如图 8-4-8 所示, 有一个一端开口, 一端封闭的长圆柱形导热容器, 将其开口向上竖直放置, 在气温为  $27^\circ\text{C}$ 、大气压为  $760\text{mmHg}$ 、相对湿度为  $75\%$  时, 用一质量可不计的光滑薄活塞将开口端封闭. 已知水蒸气  $27^\circ\text{C}$  时的饱和气压为  $26.7\text{mmHg}$ , 在  $0^\circ\text{C}$  时  $4.5\text{mmHg}$ . (1) 若保持温度不变, 想通过在活塞上方注入水银加强的方法使管内开始有水珠出现, 那么容器至少为多

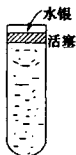


图 8-4-8

长? (2)若在水蒸气刚开始凝结时固定活塞,降低容器温度,当温度降至 $0^{\circ}\text{C}$ 时,容器内气体的压强为多大?

6.  $1\text{mol}$  单原子理想气体缓慢地经历了一个循环过程,在  $p$ - $V$  图中这过程是一个椭圆,每  $\text{mol}$  气体内能为  $\frac{3}{2}RT$ . 已知此气体若处在椭圆中心  $O'$  点对应的状态时,其温度  $T_0 = 300\text{K}$ . 求: (1)在整个循环过程中气体的最高温度  $T_1$  和最低温度  $T_2$ ; (2)气体从状态  $C$  到状态  $B$  过程中吸收的热量.

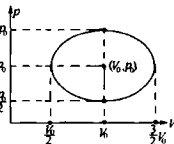


图 8-4-9

7. 已知每摩尔单原子理想气体温度每升高  $1\text{K}$  时,内能增加  $\frac{3}{2}R$ , 现有  $n$  摩尔单原子理想气体经历  $p$ - $T$  图中的  $ABCA$  循环过程,如图 8-4-10 所示,其中  $C$  到  $A$  的过程满足关系  $p^2 = nRT$ ,  $BA$  的延长线过坐标原点,还已知  $p_B = 2p_A$ , 求: (1)从温度最低的状态到体积最大的状态变化过程中,气体从外界的净吸热(已知  $A$  状态温度为  $T_A$ ,  $C$  状态温度为  $T_C$ ); (2)在一个循环过程中,气体从外界的净吸热.

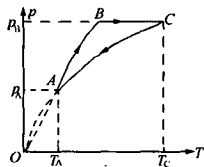


图 8-4-10

8. 设有两种互不相溶的液体  $A$  和  $B$ , 它们的饱和蒸汽压  $p_i$  ( $i = A$  或  $B$ ) 满足公式  $\ln\left(\frac{p_i}{p_0}\right) = \frac{a_i}{T} + b_i$  ( $i = A$  或  $B$ ), 式中  $p_0$  为标准大气压,  $T$  为蒸汽的绝对温度,  $a_i$  和  $b_i$  是由液体性质所决定的常量(符号  $\ln$  表示自然对数,即以  $e = 2.7182818\cdots$  为底的对数).

表 8-4 给出在温度为  $40^{\circ}\text{C}$  和  $90^{\circ}\text{C}$  时,液体  $A$  和  $B$  的  $\frac{p_i}{p_0}$  值.

表 8-1

$t(^{\circ}\text{C})$	$p_i/p_0$	
	$i = A$	$i = B$
40	0.284	0.07278
90	1.476	0.6918

说明:表中数值的误差可以忽略.

(1)在外部压强为  $p_0$  的条件下,确定液体  $A$  和  $B$  各自的沸点(沸腾温度).

(2)现将液体  $A$  和  $B$  注入一个容器,形成如图 8-4-11(a)所示的两层液体.液体  $B$  的表面上再覆盖一薄层非挥发性液体  $C$ , 液体  $C$  与  $A$  或  $B$  互不相溶,其作用仅仅防止液体  $B$  上表面的自由蒸发.液体  $A$ 、 $B$  的分子质量比(在气相状态下)为  $\gamma = \frac{\mu_A}{\mu_B} = 8$ .



图 8-4-11

设液体  $A$ 、 $B$  的质量开始时均为  $100$  克, 各液层的高度和密度都不很大, 因而容器中任何位置的压强可近似地视为与标准大气压  $p_0$  相同。

现将容器中的液体系统缓慢、持续地加热, 液体温度随时间  $\tau$  变化关系如图 8-4-11(b) 所示。

请确定图 8-4-11(b) 中两处水平部分对应的温度  $t_1$  和  $t_2$ , 以及在  $t_1$  时刻液体  $A$  和液体  $B$  的质量, 温度  $t_1$  和  $t_2$  应精确到  $(1^\circ\text{C})$ , 液体的质量应精确到  $\frac{1}{10}\text{g}$ 。

注意: 假定两种液体的蒸汽均很好地满足: (1) 服从道尔顿分压定律; (2) 可按理想气体处理, 即使它们的压强已达到饱和蒸汽压。

9. 图 8-4-12 表示在  $10^\circ\text{C}$  到  $30^\circ\text{C}$  范围内水的饱和蒸汽压曲线。现将温度为  $27^\circ\text{C}$ 、压强为  $1\text{atm}$ 、相对湿度  $80\%$  的空气封闭在某一容器中, 把它逐渐冷却到  $12^\circ\text{C}$ 。试问: (1) 这时空气的压强是多少? (2) 温度降到多少时开始有水凝结? 这时空气中所含的水蒸汽为百分之几?

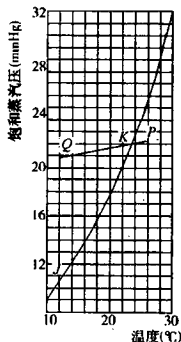


图 8-4-12

10. 有一个用伸缩性极小且不漏气的布料制作的气球(布的质量忽略不计), 直径为  $d = 2.0$  米。球内充有压强  $p_0 = 1.005 \times 10^5 \text{Pa}$  的气体。该布料能承受的最大不被撕破力为  $F_m = 8.5 \times 10^3 \text{N/m}$ 。开始时, 气球被置于地面上, 该处的大气压强为  $p_0 = 1.000 \times 10^5 \text{Pa}$ , 温度  $T_0 = 293\text{K}$ 。假设空气的压强和温度均随高度而线性地变化, 压强的变化为  $a_p = -9.0 \text{Pa/m}$ , 温度的变化为  $a_T = -3.0 \times 10^{-3} \text{K/m}$ 。问该气球上升到多高时将破裂? 假设气球上升很缓慢, 球内温度随时与周围空气温度保持一致。在考虑气球破裂时, 可忽略气球周围各处和底部之间空气压强的差别。

11. 在容积为  $2 \times 10^{-3} \text{m}^3$  的容器中装有  $1\text{mol}$  氢气和少量的水, 开始时容器中压强为  $17\text{atm}$ , 然后加热容器, 使其中压强增至  $26\text{atm}$ , 求容器的初态温度及末态温度以及被蒸发的水的质量。表中列出的是在一些温度下水的饱和蒸汽压的数值:

$p(10^5 \text{ N/m}^2)$	1	2	3	5	8	10
$t(^\circ\text{C})$	100	120	133	152	170	180

注意:解題要有毫米方格坐标纸。

(提示:用表中数据绘出饱和蒸汽压曲线  $p_1(t)$ ,再画出 1mol 氢气在定容下的压强温度曲线  $p_2(t)$ .将两曲线在相同横坐标下的纵坐标值相加,画成一条合成曲线.在合成曲线上求出初、末态温度.再在  $p_1(t)$  曲线上求出初、末态的饱和蒸汽压,从而求出已蒸发的水的质量.)

12. 图 8-4-13 所述系统用在不同功率条件下使液体沸腾.对于每个功率,蒸汽在 300s 时间内被冷凝和收集.测量结果如下表所列.求液体蒸汽的比热.讨论产生误差的原因和消除方法.

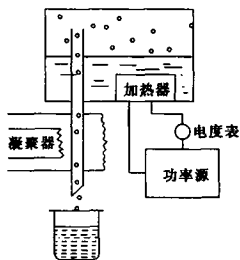


图 8-4-13

加热器电压 (V)	能量 (kW·h)	质量流 (g/300s)
200	0.0237	26.0
200	0.0239	28.3
200	0.0240	27.9
180	0.0191	19.5
160	0.0150	14.2
140	0.0114	8.8
120	0.0083	3.9
120	0.0084	4.1
120	0.0085	4.2

(提示:由能量守恒定律知加热系统产生的功率  $P = \frac{dm}{dt}L + P_0$ , 其中  $\frac{dm}{dt}$  为质量流,  $L$  为汽化热,  $P_0$  为损失的功率.利用表中数据作出功率  $P = W/t$  ( $W$  为能量)和质量流的直线图.图中斜率即蒸汽的比热,截距为损失的功率.)

13. 有一根玻璃毛细管,长为 0.600m,内径为 2.0mm,内有 50mm 水银柱.水银柱把毛细管分成两部分.一部分为真空,另一部分为空气和水汽的混合物.现将毛细管一端与桌面接触并倾斜管子,这时充有空气和水汽的气柱长度  $l$  将发生变化.现以  $h$  表示毛细管另一端离开桌面的高度.改变  $h$  作多次测量,每次测量后均要等气体恢复平衡后才进行下一次测量,其测量数据如下:

$l(\text{mm})$	521	259	100	68	51
$h(\text{mm})$	100	200	400	500	600

问管内空气和水有多少?

14. 正确使用高压锅(见图 8-4-14)的办法是:将已加上密封锅盖的高压锅加热,当锅内水沸腾时,加上一定重量的高压阀,此时可以认为锅内空气已全部排出,只有水的饱和蒸汽.继续加热,水温将继续升高,到高压阀被蒸汽顶起时,锅内温度即达到预期温度.

某一高压锅的预期温度为  $120^{\circ}\text{C}$ ,如果某人在使用此锅时,未按上述程序而在水温被加热至  $90^{\circ}\text{C}$  时就加上高压阀(可以认为此时锅内水汽为饱和汽),问当继续加热到高压阀开始被顶起而冒气时,锅内温度为多少?

已知:大气压强  $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{Pa}$ ;  $90^{\circ}\text{C}$  时水的饱和汽压  $p_w(90) = 7.010 \times 10^4 \text{Pa}$ ;  $120^{\circ}\text{C}$  水的饱和汽压  $p_w(120) = 1.985 \times 10^5 \text{Pa}$ ; 在  $90^{\circ}\text{C}$  和  $120^{\circ}\text{C}$  之间水的饱和汽压  $p_w$  和温度  $t(^{\circ}\text{C})$  的函数关系如图 8-4-15 所示.

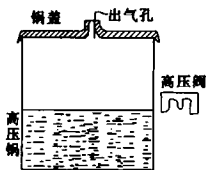


图 8-4-14

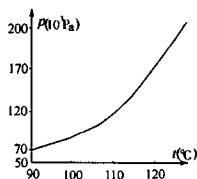


图 8-4-15

## 问题与讨论 热学图线的应用(2)

物理图像由于具有形象描述物理状态、物理过程和物理规律,直观展现物理图景的特点,构成了分析物理问题的重要方法.热学问题若能正确适时地运用状态变化的过程图线(等温线、等容线、等压线及绝热线等)来展现热学状态的变化过程;运用图线上几何量(图线斜率、截距面积等)所蕴含的物理意义来揭示热学状态参量间的关系;运用不同条件下状态变化图线的转折点、交点来确定过程变化的临界状态或极值状态等,既是竞赛物理中热学知识、方法传授的重要内容,更是对学生能力培养的重要途径.近几年的竞赛试题都在运用图线解决问题上有所体现.

### 1. 运用图线交点、转折点确定特殊物理状态

同坐标平面上,不同的热学过程图线会出现交点或切点,说明两过程经历了相同的物理状态或表现为出现极值状态.若能运用好已知图线,则可推断另一图线所对应的热学过程的变化情况,确定状态变化特征及状态参量.



## 【例题分析】

例1 导热活塞将汽缸分成体积各为  $V_0 = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的两相同部分, 左边装有干燥空气, 右边装有水蒸气和  $m_{\text{水}} = 4 \text{ g}$  的水. 现对汽缸缓慢加热, 活塞向左移动. 当活塞移动四分之一汽缸长度以后, 活塞静止下来, 即使汽缸温度继续升高也不能使它再向左移动. 试问: (1) 加热前活塞右边的水蒸气质量  $m_{\text{水}}$  是多少? (2) 汽缸的初始温度  $t_1$  为多高? (3) 活塞刚达 1/4 汽缸长度时的末态温度  $t_2$  是多少? 已知水的饱和蒸汽压与温度关系如下表:

$t$ (°C)	100	120	133	152	180
$p$ (Pa)	$1 \times 10^5$	$2 \times 10^5$	$3 \times 10^5$	$5 \times 10^5$	$10 \times 10^5$

分析与解 (1) 设汽缸中水汽的初始压强为  $p_1$ , 温度为  $t_1$ ; 加热到活塞不能移动时, 温度为  $t_2$ , 水汽压强为  $p_2$ ; 水蒸气  $t_1$  温度时质量为  $m_{\text{水}}$ , 水质量为  $m_{\text{水}}$ .

$$\text{则对 } t_1 \text{ 温度时水蒸气, 有克拉珀龙方程 } p_1 V_0 = \frac{m_{\text{水}} R}{\mu_{\text{水}}} (t_1 + 273) \quad \text{①}$$

$$\text{对 } t_2 \text{ 温度时水汽, 同理有 } p_2 \cdot \frac{3}{2} V_0 = \frac{m_{\text{水}} + m_{\text{水}}}{\mu_{\text{水}}} R (t_2 + 273) \quad \text{②}$$

$V_0$  为开始时水汽体积,  $\mu_{\text{水}}$  为水的摩尔质量.

$$\text{对空气, 有状态方程 } \frac{p_1 V_0}{t_1 + 273} = \frac{p_2 \cdot \frac{1}{2} V_0}{t_2 + 273} \quad \text{③}$$

$$\text{解①, ②, ③得 } m_{\text{水}} = \frac{1}{2} m_{\text{水}} = 2 \text{ (g)}$$

(2) 求水汽的初始温度, 可利用水汽压强  $p$  与温度  $t$  的关系图线. 因为  $t_1$  温度的饱和水汽状态, 必定就在水汽压强和温度的  $p-t$  线上, 也在水饱和汽的  $p-t$  线上, 即位于两线的交点处. 若能作出水汽  $p-t$  线, 结合已知的饱和汽的  $p-t$  线是不难从图线得  $t_1$  和  $t_2$  的.

因为活塞两边压强、温度总相等, 所以当水汽不蒸发也不凝结时, 活塞不会因水汽温度变化而移动, 即水汽将作等容变化, 则它的  $p-t$  线是一直线. 设初态时活塞右边只有水蒸气, 则由状态方程得

$$p = \frac{m_{\text{水}} R}{\mu_{\text{水}} V_0} (t + 273) \quad \text{④}$$

取两个特殊的  $t$  值, 代入④式, 可作出直线  $ab$ , 如图从  $ab$  直线与饱和汽的  $p-t$  线的交点  $K$ , 可得

$$t_1 = t_K = 143 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$p_K = 3.7 \times 10^5 \text{ Pa}$$

(3)同理,在水汽末态处维持  $\frac{3}{2}V_0$  等容变化的  $p-t$  线方程满足

$$p = \frac{(m_{\text{汽}} + m_{\text{水}})R}{\mu_{\text{水}} \cdot \frac{3}{2}V_0} (t + 273)$$

由⑤式作出  $p-t$  线  $cd$ , 它与水汽饱和汽压线交点  $J$ , 即为加热后的末状态. 则由图线坐标得  $t_2 = t_J = 172^\circ\text{C}$

**例 2** 已知每 mol 单原子理想气体温度升高 1K 时, 内能增加

$1.50R$  ( $R$  为摩尔气体恒量), 现有  $\frac{2.00}{8.31}$  mol 的单原子理想气体, 经历

$ABCD$  循环过程, 在  $p-V$  图上是一个圆, 如图 8-5-2 所示.

图中横坐标表示气体容积  $V$ , 纵坐标表示气体压强, (1) 试分析该循环过程中哪一点  $H$ , 气体的温度最高, 并求出该温度; (2) 气体由状态  $C$  到状态  $D$  过程中, 内能增加, 外界对气体做功, 气体吸热各多少?

**分析与解** (1) 本题所给热学循环中, 可由等温变化状态方程与圆循环过程的  $p, V$  为变量的圆方程联列而得的方程组, 可求出气体的最高温度. 但利用等温线为等轴双曲线. 圆又关于  $OO'$  对称, 则由几何图线寻找等轴双曲线和圆的切点, 可更简捷的得到最高温度点.

如图 8-5-3, 此圆循环过程的圆心  $O'$  在  $p-V$  图线第一象限的角平分线  $OO'$  上; 又气体等温变化有

$$pV = \text{恒量}$$

该等温过程的  $p-V$  线为等轴双曲线. 因此, 圆与最高温度下等温变化的等轴双曲线在最高温度的切点必在公共的对称轴线  $OO'$  与圆的交点上, 即图中的  $H$  点. 则由气体状态方程可得

$$T_H = \frac{p_H V_H}{nR} = \frac{\left[ \left( 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \right) \times 10^5 \right] \left[ \left( 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \right) \times 10^{-3} \right]}{\frac{2}{8.31} \times 8.31} = 687(\text{K})$$

(2) 如图结合状态方程可得

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = 600(\text{K})$$

$$T_D = \frac{p_D V_D}{nR} = 300(\text{K})$$

而内能改变量

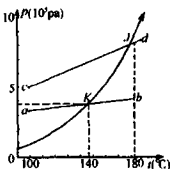


图 8-5-1

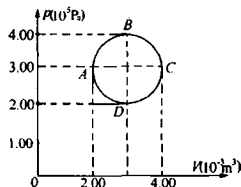


图 8-5-2

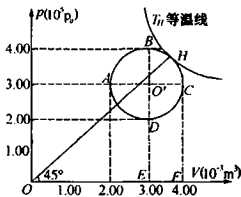


图 8-5-3

$$\Delta E_{CD} = n \times 1.5R(T_D - T_C) = -900(\text{J})$$

又根据图线, 状态 C 到 D 过程中, 外界对气体做的功为图线与  $p$  轴、 $V$  轴所围的“面积”, 即  $W_{CD} = \left[ (3 \times 1) - \frac{\pi}{4} \times 1^2 \right] \times 10^2 = 222(\text{J})$

由热力学第一定律, 状态 C 到状态 D 过程中吸收热量

$$Q_{CD} = \Delta E_{CD} - W_{CD} = -1122(\text{J})$$

负号表示该过程是放热 1122J.

## 2. 运用图线变换, 简化和凸现状态参量间的关系

不同状态参量, 对同一状态变化过程的反映会呈现不同的图线. 在这些图线中, 不同的参量间关系在不同图线上凸现关系的简捷直观程度有所不同. 能运用图线间的转换去寻求所需状态参量间的简捷关系, 是运用热学图线解题的重要举措.

例 3 1mol 理想气体经历了一个在  $T$ - $V$  图上标为 1-2-3-1 的循环过程, 如图 8-5-4 所示. 其中过程 1-2 的状态方程为

$$T = 2T_1(1 - 0.5\beta V)\beta V$$

过程 2-3 为经过原点的直线上的一段

过程 3-1 的状态方程为  $T = T_1\beta^2 V^2$ ,

式中  $\beta$  是常量. 状态 1 和 2 的热力学温度已知为  $T_1$  和  $\frac{3}{4}T_1$ . 求该气体在此循环过程中对外所做的功.

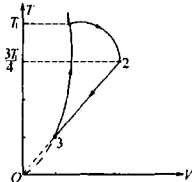


图 8-5-4

**分析与解** 因为热学循环中气体对外做的功可用  $p$ - $V$  线与

坐标轴所围的“面积”来表示. 因此若能把已知的  $T$ - $V$  图线转换为  $p$ - $V$  图线, 问题会变得易求解.

对过程 1-2 的  $T$ - $V$  关系与气体状态方程  $pV = nRT$  联立, 得

$$P = 2RT_1(1 - 0.5\beta V)\beta = -R\beta^2 T_1 V + 2R\beta T_1 \quad (1)$$

在  $p$ - $V$  图上, ①式  $p$ 、 $V$  关系为一直线; 对过程 2-3, 因  $T$ - $V$  线是过原点直线, 所以是一个等压过程, 即  $p_3 = p_2$  (2)

$p$ - $V$  图线为一平行  $V$  轴直线; 对 3-1 过程, 同理可得

$$p = RT_1\beta^2 V \quad (3)$$

在  $p$ - $V$  图像上图线为延长线过坐标原点的线段.

由上面分析, 题给循环过程在  $p$ - $V$  图像上是三直线段构成的三角形, 且由①、②、③式和题中已知, 可确定

$$\text{状态 1 的参量 } p_1 = \beta RT_1, V_1 = \frac{1}{\beta}$$

$$\text{状态 2 的参量 } p_2 = \frac{1}{2}\beta RT_1 = \frac{1}{2}p_1, V_2 = \frac{3}{2\beta} = \frac{3}{2}V_1$$

状态 3 的参量  $p_3 = p_2 = \frac{1}{2} p_1$ ,  $V_3 = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2} V_1$

由  $(p_1, V_1)$ ,  $(p_2, V_2)$ ,  $(p_3, V_3)$  和三过程图线的变化特征, 可画出题给循环过程的  $p$ - $V$  图线如图 8-5-5 所示.

则循环中气体对外做的功为图中等腰三角形所围“面积”.

$$W = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) (V_2 - V_3) = 0.25 RT_1$$

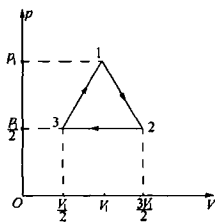


图 8-5-5

## 第九章 静电场

## 第一节 库仑定律和电荷守恒定律



## 【知识要点】

## 1. 库仑定律

实验表明,当两个电荷处于真空中时,它们之间的相互作用力为

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

式中  $Q$  的单位是 C, 静电力恒量  $k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$ . 库仑力的方向: 在两点电荷连线上, 同种电荷相斥, 异种电荷相吸.

库仑定律是电磁学中最基本的定律之一. 库仑定律成立的条件: (1) 电荷是点电荷; (2) 两点电荷是静止或相对静止; (3) 只适用于真空.

## 2. 电荷守恒定律

自然界只存在两种电荷, 一种叫正电荷, 一种叫负电荷. 电子所带的电荷是负电荷, 质子所带的电荷是正电荷, 它们所带的电量都是  $1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ . 实验指出, 所有电量或者等于电子、质子的电量, 或者是它们的整数倍. 通常把  $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$  的电量叫元电荷.

大量实验证明: 在一个与外界没有电荷交换的系统内, 正负电荷的代数和在任何物理过程中始终保持不变.

系统与外界无电荷交换时, 系统的电荷代数和守恒. 电荷守恒定律是自然界的普遍规律, 它适用于宏观系统, 也适用于微观系统. 我们讨论的静电感应, 导体间接触或连接, 电容器连接时电荷的重新分布、转移等现象都要用到电荷守恒定律.



## 【例题分析】

例 1 三个完全相同的金属小球, A 球带电为  $8q$ , B 球带电为  $-6q$ , C 球原来不带

电,让 C 先后与 A、B 相碰,然后如图 9-1-1 所示放置.若  $\angle CAB = 30^\circ$ ,且 AC 垂直于 BC,  $BC = d$ ,求 B 球所受库仑力.

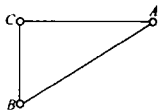
**分析与解** 当两个相同的金属球相碰时,将等分电量.由题意可知三个球带电量: A 球为  $4q$ , B、C 球皆为  $-q$ , B 球所受 A、C 两球对它的作用力的大小分别为

$$F_{AB} = k \frac{4q^2}{(2d)^2}, \quad \text{方向由 B 指向 A}$$

$$F_{CB} = k \frac{q^2}{d^2}, \quad \text{方向由 C 指向 B}$$

由题意可知,两力的夹角为  $120^\circ$ ,所以其合力的大小为  $k \frac{q^2}{d^2}$ ,方向与 AB 成  $60^\circ$  向斜下方.

图 9-1-1



**例 2** 如图 9-1-2 所示, A、B 为两个固定的点电荷,带电量皆为  $q$ ,放入第三个可以自由运动的点电荷 C,带电量也是  $q$ ,若 C 的质量为  $m$ ,它以多大角速度绕 AB 转动时,可以使三个点电荷保持间距皆为  $a$ ? A、B、C 的电性如何才能满足以上要求?

**分析与解** 作圆周运动的质点必需有力提供向心力,即 A、B 对 C 的合力一定要指向 AB 中点,不难看出,电性要求是 A、B 同性, C 与它们异性.

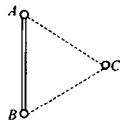


图 9-1-2

根据库仑定律, A、B 对 C 的作用力的大小相等,即为  $k \frac{q^2}{d^2}$ ,两力的合力为

$$F = 2k \frac{q^2}{d^2} \cos 30^\circ$$

由牛顿第二定律可知  $F = 2k \frac{q^2}{d^2} \cos 30^\circ = m\omega^2 a = m\omega^2 a \cos 30^\circ$ , 则  $\omega = q \sqrt{2k/(ma^3)}$

**例 3** 两个带正电的点电荷,带的电量都是  $Q$ ,固定放置在 x 轴上 A、B 两点处,如图所示, AB 距原点 O 的距离都是  $r$ .若在原点处放置另一个点电荷,其电量大小为  $q$ ,质量为  $m$ .

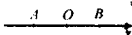


图 9-1-3

(1) 当限制点电荷  $q$  只能在哪些方向上运动时,它在 O 处才是稳定平衡?

(2) 讨论在这些方向上受扰动后,它的运动情况.

**分析与解** (1) 设  $q$  为正电荷.当点电荷  $q$  沿 x 轴作微位移时,它受到库仑力的合力沿 x 轴指向原点 O,这个合力将使  $q$  回到 O 点,所以 O 点是稳定平衡;当点电荷  $q$  沿垂直 x 轴方向作微位移时,它受到库仑力的合力沿该方向指向无穷远处,所以  $q$  将在此力作用下沿该方向向无穷远处作匀加速直线运动而远离原点 O,所以 O 点是不稳定平衡;当微扰动是沿任意方向时,只要求解  $q$  所受库仑力合力在位移方向上分量的指

向,若指向原点  $O$ ,则是稳定平衡,反之,则是不稳定平衡.

设  $OP = x$ ,  $AP = a$ ,  $BP = b$ ,如图 9-1-4 所示,进行受力分析,则电荷  $q$  在  $OP$  方向上受的合力为

$$f = k \frac{qQ}{a^2} \cos \alpha - k \frac{qQ}{b^2} \cos \beta$$

由数学知识可知  $a^2 = r^2 + x^2 + 2rx \cos \theta$

$$b^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta$$

$$\cos \alpha = \frac{x + r \cos \theta}{a} = \frac{x + r \cos \theta}{(r^2 + x^2 + 2rx \cos \theta)^{1/2}}$$

$$\cos \beta = \frac{r \cos \theta - x}{b} = \frac{r \cos \theta - x}{(r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta)^{1/2}}$$

所以

$$\begin{aligned} f &= \frac{kqQ(x + r \cos \theta)}{(r^2 + x^2 + 2rx \cos \theta)^{3/2}} - \frac{kqQ(r \cos \theta - x)}{(r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta)^{3/2}} \\ &= k \frac{qQ}{r^3} \left[ \frac{x + r \cos \theta}{\left(1 + \frac{2x}{r} \cos \theta\right)^{3/2}} - \frac{r \cos \theta - x}{\left(1 - \frac{2x}{r} \cos \theta\right)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

因为  $q$  是受扰动而偏离  $O$  位置,所以  $x$  很小.由数学知识可知

$$\begin{aligned} f &\approx k \frac{qQ}{r^3} \left[ \left(x + r \cos \theta\right) \left(1 - \frac{3x}{r} \cos \theta\right) - (r \cos \theta - x) \left(1 + \frac{3x}{r} \cos \theta\right) \right] \\ &= \frac{2kqQx}{r^3} (1 - 3\cos^2 \theta) \end{aligned}$$

由此可见,当  $\cos^2 \theta > 1/3$  时,  $f < 0$ ,即合力的方向指向原点,与位移方向相反,所以  $q$  是稳定平衡;当  $\cos^2 \theta < 1/3$  时,  $f > 0$ ,即合力的方向背离原点,所以  $q$  是不稳定平衡.

(2) 在稳定范围内,当  $q$  带正电荷时  $f = \frac{2kqQx}{r^3} (1 - 3\cos^2 \theta) = kx$ ,

$f$  与  $x$  大小成正比,方向相反,所以  $q$  将做简谐运动,振动周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{mr^3}{2kqQ(1 - 3\cos^2 \theta)}}$$

如果  $q$  带负电荷,讨论与上述类似.请读者自己论证.

**例 4** 如图所示,在半径  $R = 0.1\text{m}$  的原来不带电的金属球  $A$  内,有两个球形空腔,两空腔内各放置一点电荷  $q_1 = -3 \times 10^{-9}\text{C}$  和  $q_2 = 9 \times 10^{-9}\text{C}$ ,它们与空腔内壁不接触,在  $A$  球外距球心  $O$  点  $r = 10\text{m}$  处放一点电荷  $q_3 = 6 \times 10^{-10}\text{C}$ ,试求  $q_1, q_2, q_3$ , 及球  $A$  所受的静电力.

**分析与解** 由于静电感应,两空腔内分别感应电荷  $q_1' = 3 \times 10^{-9}\text{C}$  和  $q_2' = -9 \times 10^{-9}\text{C}$ .且  $q_1, q_2$  所受的静电力  $F_1, F_2$  分别为  $F_1 = F_2 = 0$

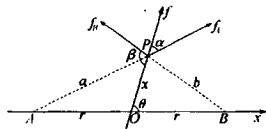


图 9-1-4

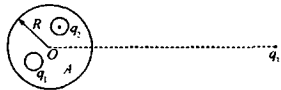


图 9-1-5

由电荷守恒定律可知, A 球外表面的电荷总量  $Q_A = -(q_1 + q_2) = 6 \times 10^{-9} \text{ (C)}$

因为  $R = 0.1$  米,  $r = 10$  米, 即  $r \gg R$ , 所以 A 球与  $q_3$  的作用力可以看成两点电荷  $q_3, Q_A$  相距为  $r$  的库仑力. 即

$$F_A = F_3 = \frac{kQq_3}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-9} \times 6 \times 10^{-10}}{10^2} = 3.24 \times 10^{-10} \text{ (N)}$$

**评析** 此题把 A 球带电分布当作点电荷看待, 是由于  $r \gg R$ . 若这个条件不成立, 则 A 球表面电荷的分布将受到  $q_3$  的影响而变得不均匀, 使得问题复杂化, 一般情况下,

$F_3 < \frac{kQq_3}{r^2}$ , 是斥力, 但当  $r$  足够小而  $R$  又较大的情况下, 球 A 与  $q_3$  有可能为引力.

**例 5** 如图所示, 一无限大接地金属板上方, 离板为  $a$  处有一点电荷  $+q$ , 由于静电感应, 金属板带负电. 求  $q$  受到的静电力.

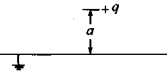


图 9-1-6

**分析与解**  $q$  受到的静电力应是感应电荷对它的吸引力. 但无法知道感应电荷的分布, 因而无法计算. 从场的观点看,  $q$  受到的力应是感应电荷在该点产生的场对  $q$  的作用力. 由电场线图我们可以发现, 金属板上方的电场线与无金属板,  $q$  点正下方距  $q$  点  $2a$  处放一  $-q$  的点电荷一样, 所以  $q$  受到的静电力为  $F = \frac{kq^2}{4a^2}$ .

**评析** 上述的方法, 通常叫平面镜像法. 其思路是感应电荷和  $q$  在金属板上产生的电场可以用  $q$  和相对于金属板对称的  $-q$  产生的电场来代替, 保证金属板的电势为零. 除了平面镜像法外, 还有球面镜像法, 见课后习题.

### 【巩固习题】

1. 半径为  $R$  的细圆环上均匀带电, 电量为  $Q$ , 圆环轴线上距环心  $h$  处有一点电荷  $q$ , 求点电荷  $q$  受  $Q$  的库仑力.

2. 如图 9-1-7 所示, 三个质量为  $0.2\text{g}$  的球形导体, 分别用细线悬挂在同一点上, 线长  $10\text{cm}$ . 三个小球带等量同号电荷, 三球张开, 线互成  $60^\circ$ , 求各小球所带电量的大小.

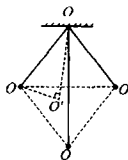


图 9-1-7

3. 如图 9-1-8 所示, 在自由空间取一惯性系, 其中有三个带电质点  $P_1, P, P_2$ .  $P_1, P_2$  与  $P$  分别相距  $l_1, l_2$ . 在其间库仑力的作用下,  $P$  点始终保持不动,  $P_1$  和  $P_2$  围绕  $P$  点作圆周运动, 且在运动中始终三点共线, 试求为了满足上述要求,  $P_1, P_2$  两带电质点的荷质比之间的比值. 荷质比是指带电质点电量与质量之比.

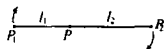


图 9-1-8

4. 在  $x$  轴的  $x = a$  和  $x = -a$  两位置上, 各有一个电量均为  $Q$  的固定点电荷, 在



$x=0$  处有一电量为  $q$ 、质量为  $m$  的自由小球,且  $Q$  与  $q$  同号.今使小球沿着  $x$  轴方向稍稍偏离  $x=0$  位置,设小球只受两固定带电质点的库仑力,其他作用力均可忽略.试证明小球将在  $x$  轴上围绕  $x=0$  点作简谐振动,并求出小球的振动周期.

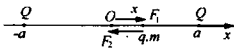


图 9-1-9

5. 在  $Ox$  轴的原点  $O$  处有一固定的、电量为  $Q$  ( $Q > 0$ ) 的点电荷,在  $x = -l$  处有一固定的、电量为  $-2Q$  的点电荷.今有一正试验电荷  $q_0$  放在  $x$  轴上  $x > 0$  的位置.并设斥力为正,吸引力为负.

(1) 当  $q_0$  的位置限制在  $Ox$  轴上变化时,求  $q_0$  的受力平衡位置,并讨论平衡的稳定性;

(2) 试定性地画出试验电荷  $q_0$  所受的合力  $F$  与  $q$  在  $Ox$  轴上的位置  $x$  的关系图线.

6. 如图 9-1-10 所示,在不带电的金属球  $A$  内有两个球形空腔,两空腔球心  $O_1$ ,  $O_2$ ,相距为  $a$ ,在两空腔中心分别放置点电荷  $q_1$ ,  $q_2$ ,在大金属球外两空腔球心连线放置一点电荷  $q_3$ ,设  $q_3$  到  $q_2$  的距离为  $b$ ,达到静电平衡后,大金属球  $A$  给点电荷  $q_1$  的作用力为多少?

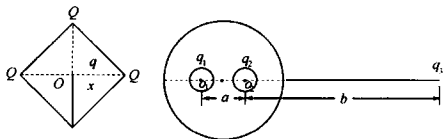


图 9-1-10

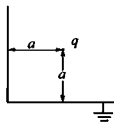


图 9-1-11

7. 两块互成直角的接地的薄金属板间有一距板面较近的点电荷  $q$ ,  $q$  距两板的距离均为  $a$ ,如图 9-1-11 所示.求电荷  $q$  所受的力.

## 第二节 电场和电场强度

### 【知识要点】

从电场的观点看,电荷间的相互作用可分为两个基本问题:电荷产生电场和电场对电荷的作用.

电场强度,简称场强,是指放入电场中某一点电荷受到的电场力  $F$  跟它的电量  $q$  的比值.数学表达式为

$$E = \frac{F}{q}$$

$q$  为检验电荷,  $F$  为  $q$  在场中受到的力. 场强的方向规定为正电荷的受力方向.

只要有电荷存在, 在电荷的周围就存在着电场. 静止电荷在其周围的真空中产生电场, 叫静电场, 该电荷称为真空中静电场的场源电荷, 电场对放入场中的电荷有力的作用.

在点电荷组成的电场里, 任一点的场强等于各个点电荷单独存在时各自在该点产生的场强的矢量和, 这就是场强叠加原理.

几种典型电场的场强:

(1) 点电荷电场: 由场强的定义和库仑定律可得, 真空中点电荷的场强分布为

$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

(2) 均匀带电球壳的电场

设有带电量为  $Q$ , 半径为  $R$  的均匀带电球壳. 由电场线的分布可知, 只要球壳内没有电荷, 壳内就没有电场线分布, 即内部的场强  $E_{\text{内}}$  为  $E_{\text{内}} = 0$

对于球壳外, 电场线分布与点电荷  $Q$  在球心处的电场线一样. 因此壳外的场强  $E_{\text{外}}$  为

$$E_{\text{外}} = k \frac{Q}{r^2} (r > R)$$

(3) 匀强电场

设有电荷面密度为  $\sigma$  的无限大带电平板, 求其两侧的场强. 根据场强叠加原理, 空间某一点的场强, 应是板上所有点电荷在该点产生场的叠加. 由于平板是无穷大, 根据对称性, 板两侧的电场方向如图 9-2-1 所示, 且是匀强电场, 但用叠加原理求场强的大小要用到高等数学.

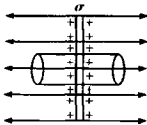


图 9-2-1

下面我们不用很严密的方法介绍一个定理, 并根据它求上述场

强, 先考虑点电荷, 设一电量为  $Q$  的点电荷, 则空间的场分布为  $E = k \frac{Q}{r^2}$

现取以  $Q$  为球心,  $R$  为半径作一球面, 则  $Q$  发出的电场线全部穿过这个面. 像这样穿过一个面的电场线总数叫做穿过这个面的电通量, 用符号  $\Phi$  表示. 对于点电荷

$$\Phi = E \cdot S = k \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi kQ$$

由上式可知电通量与所取的面无关. 即取任一面, 只要这个面内包含  $Q$ , 通过此面的电通量为  $4\pi kQ$ .

推论 1 若所取的面不包含  $Q$ , 则通过此面的电通量为零.

推论 2 通过任意一个闭合曲线的电通量等于该面所包围的电荷电量的代数和的  $4\pi$  倍.

推论2.通常叫高斯定理,利用高斯定理可以很方便地求出许多对称场的场强分布.如无限大平板,我们可以取关于板对称的圆柱体面,如图所示,设圆柱面的横截面半径为 $r$ ,高为 $l$ ,则

$$\Phi_E = E \cdot \pi r^2 + E \cdot \pi r^2 + 0 = 4\pi k \cdot \pi r^2 \cdot \sigma$$

因此,电荷面密度为 $\sigma$ 的无限大带电平板两侧的场强为 $E = 2\pi k\sigma$

### 【例题分析】



图 9-2-2

**例1** 如图9-2-2所示,电荷均匀分布在半球面上,它在这半球面的中心 $O$ 处的电场强度等于 $E_0$ 。(1)证明半球面底部的平面是等势面;(2)两个平面通过同一直径,夹角为 $\alpha$ ,从半球中分出一部分球面.试求所分出的这部分球面上的电荷在 $O$ 处的电场强度 $E$ .

**分析与解** (1)证明一个平面是等势面一般有以下两条思路:a.根据电势叠加原理求出各点的电势,判断是否相等;b.根据场强叠加原理求出各点的场强,判断场强方向是否垂直平面.

设想有另一个完全相同的半球面与此半球面构成完整的球壳,则球壳及其内部各点电势都相等.根据对称性可知上、下两个半球壳分别在底面上各点引起的电势是相等的,再由电势叠加原理可知,当只有半球壳存在时,半球壳在底面上各点引起的电势也是相等的,而且电势是两个球壳的一半.

场强是矢量,场强叠加比电势叠加要复杂.此题直接在底面上计算场强较困难.我们可用反证法来说明场强方向一定垂直底面.假定半球壳在底面产生的场强不垂直底面,则当把半球壳补完整时,两半球壳在底面产生的合场强也不垂直底面,这与球壳是等势体相矛盾.因此,假设不成立.

(2)由对称可知, $E_0$ 的方向如图9-2-3所示,同样我们可知分出两部分的电场强度 $E_1$ 、 $E_2$ ,由矢量图可得

$$E_1 = E_0 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

**评析** 原则上,根据电势叠加原理和场强叠加原理可求,已知电荷分布的任何电场的电势和场强,但在实际处理问题时,通采用等效、填补等办法更有效.

**例2** 均匀带电的半径为 $R$ 的球,电荷的体密度为 $\rho$ .以 $O_1$ 为球心挖去半径为 $R_1$ 的小球.求球空腔部分的电场强度.

**分析与解** 利用点电荷的场强公式,根据场强叠加原理求空腔内的场强较困难,要用到高等数学知识.现在可设想是电荷的体密度为 $\rho$ ,半径为 $R$ 的完整的球再在空腔的位置叠加加上电荷的体密度为 $-\rho$ ,半径为

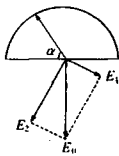


图 9-2-3

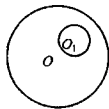


图 9-2-4

$R_1$  的小球. 则就空腔中的场强而言是等效的. 而电荷分布均匀的球内的场分布, 由高斯定律可求得为

$$E = \frac{4}{3}\pi k\rho r$$

设球腔中任一点  $P$ ,  $OP = r$ ,  $O_1P = r_1$ , 则  $P$  点的场强为

$$\vec{E}_{\text{合}} = \vec{E} + \vec{E}_1 = \frac{4}{3}\pi k\rho(\vec{r} - \vec{r}_1) = \frac{4}{3}\pi k\rho\vec{a}$$

其中  $\vec{a}$  的大小为  $O$  到  $O_1$  的距离, 方向为  $O$  指向  $O_1$ . 如图 9-2-5 所示, 球腔内的场强为匀强电场.



图 9-2-5

### 【巩固习题】

1. 等边三角形  $ABC$  的边长为  $a$ , 在它的顶点  $B$  和  $C$  上各有电量为  $Q > 0$  的点电荷. 试求三角形中心  $O$  处场强  $E$  的大小和方向.

2. 半径为  $R$  的圆环上均匀带电, 总电量  $Q > 0$ . 试求与环平面垂直, 且通过圆心的中央轴线上的场强分布.

3. 如图 9-2-6 所示, 在半径为  $R$  的大球中, 挖去半径为  $R/2$  的小球, 小球与大球内切, 大球余下的部分均匀带电, 总电量为  $Q$ . 试求距大球球心  $O$  点  $r$  处 ( $r > R$ )  $P$  点的场强. 已知  $OP$  连线经过小球球心.

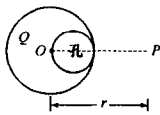


图 9-2-6

4. 一无限长均匀带电细线弯成如图 9-2-7 所示的平面图形, 其中  $AB$  是半圆弧,  $AA'$  和  $BB'$  是两平行直线,  $A'$  和  $B'$  向右端无限延伸. 试求圆心  $O$  处的电场强度.

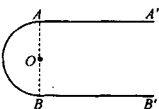


图 9-2-7

5. 求无限长均匀带电直线的场强. 已知直线的电荷线密度为  $\lambda$ .

6. 如图 9-2-8 所示,  $-d \leq x \leq d$  的空间区域内分布着电荷体密度为  $\rho$  的正电荷, 在  $x > d$  和  $x < -d$  的区域为真空. 若在  $x = 2d$  处将一质量为  $m$ , 电量为  $-q$  ( $q > 0$ ) 的带电粒子从静止开始释放, 问经过多长时间此带电粒子刚好穿越带电空间区域.

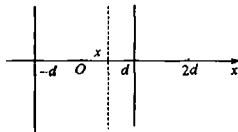


图 9-2-8

### 第三节 电势

#### 【知识要点】

电势反映电场能的性质,电场力做功电势能减小,克服电场力做功电势能增加.

电势:电场中某点处电荷的电势能  $\mathcal{E}$  与它的电量  $q$  之比值叫做场中该点的电势  $U$ .

即

$$U = \mathcal{E}/q$$

电势叠加原理:任意带电体电场中某点的电势,等于带电体上各部分电荷单独存在时,在该点产生电势的代数和.

电势差:电场中两点电势的差值.若场中  $A, B$  两点的电势分别为  $U_A, U_B$ ,则两点的电势差记作  $U_{AB}, U_{AB} = U_A - U_B$ .

几种典型电场的电势

#### (1) 点电荷电势

如图所示,空间有一点电荷,电量为  $Q$ ,先计算  $AB$  两点的电势差.设  $A, B$  到  $Q$  的距离分别为  $r_A, r_B$ ,把检

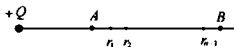


图 9-3-1

验电荷  $q$  从  $A$  移到  $B$  电场力做功为  $W$ ,由于是变力做功,不能直接求  $W$ ,现把  $AB$  分成  $n$  段,当  $n$  足够大时,  $W$  可表示为

$$W = \frac{kQq}{r_A r_1} (r_1 - r_A) + \frac{kQq}{r_1 r_2} (r_2 - r_1) + \dots + \frac{kQq}{r_B r_{n-1}} (r_B - r_{n-1}) = kQq \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

由电势差定义得  $U_{AB} = \frac{W}{q} = \frac{kQ}{r_A} - \frac{kQ}{r_B} = U_A - U_B$

若以无穷远处为零电势,即把  $r_B \rightarrow \infty, U_B = 0$ .则  $U_A = \frac{kQ}{r_A}$

由于  $A$  是任意的,所以点电荷的电势为  $U = \frac{kQ}{r}$ .

#### (2) 均匀带电球壳电场的电势

与场强公式相类似,根据点电荷的电势,可得半径为  $R$  的均匀带电球壳电场的内、

外电势分别为  $U_{内} = \frac{kQ}{R}, U_{外} = \frac{kQ}{r}$

#### 【例题分析】

例 1 半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的两个同心球面均匀带电,电荷面密度分别为  $\sigma_1$  和

$\sigma_2$ . 试求: (1) 大球面任一直径  $AB$  上的电势分布? (2) 如果过  $AB$  将两球各切掉一半, 如图 9-3-2 所示, 剩下两半球仍均匀带电, 电荷面密度不变. 直径  $AB$  上的电势分布又如何?

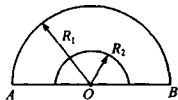


图 9-3-2

**分析与解** (1) 由均匀带电球壳的电势分布可知: 大球面均匀带电, 因此它在球内产生的电势处处相等, 有  $U_1 = \frac{kQ_1}{R_1}$

$$\text{其中 } Q_1 = \sigma_1 4\pi R_1^2$$

$$\text{所以 } U_1 = 4\pi k\sigma_1 R_1 \quad (r \leq R_1)$$

小球面均匀带电, 它在球内和球外的电势为  $U_2 = \frac{kQ_2}{R_2} \quad (r \leq R_2), U_2 = \frac{kQ_2}{r} \quad (r > R_2)$

$$\text{其中 } Q_2 = \sigma_2 4\pi R_2^2$$

$$\text{即 } U_2 = 4\pi k\sigma_2 R_2 \quad (r \leq R_2)$$

$$U_2 = 4\pi k\sigma_2 R_2^2 / r \quad (r > R_2)$$

由电势叠加原理可得: 直径  $AB$  上电势分布为

$$U = U_1 + U_2 = 4\pi k(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2) \quad (r \leq R_2)$$

$$U = U_1 + U_2 = 4\pi k\left(\sigma_1 R_1 + \frac{\sigma_2 R_2^2}{r}\right) \quad (R_2 < r \leq R_1)$$

(2) 当通过直径  $AB$  将两个球面都切去一半时, 因为剩下的半球面和切去的半球面相对  $AB$  是对称的, 所以剩下的大(小)半球面对直径  $AB$  上的电势的贡献仅为完整球面的一半. 即  $U'_1 = \frac{1}{2} U_1 = 2\pi k\sigma_1 R_1 \quad (r \leq R_1)$

$$U'_2 = \frac{1}{2} U_2 = 2\pi k\sigma_2 R_2 \quad (r \leq R_2)$$

$$U'_2 = \frac{1}{2} U_2 = 2\pi k\sigma_2 \frac{R_2^2}{r} \quad (r > R_2)$$

直径  $AB$  上的电势分布为  $U = U'_1 + U'_2 = 2\pi k(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2) \quad (r \leq R_2)$

$$U = U'_1 + U'_2 = 2\pi k\left(\sigma_1 R_1 + \frac{\sigma_2 R_2^2}{r}\right) \quad (R_2 < r \leq R_1)$$

**例 2** 如图 9-3-3 所示, 三根等长的细绝缘棒连接成等边三角形,  $P$  点为三角形的内心,  $Q$  点与三角形共面且与  $P$  关于  $AC$  棒对称, 三棒带有均匀分布的电荷, 此时, 测得  $P, Q$  两点的电势各为  $U_P, U_Q$ . 现将  $BC$  棒取走, 而  $AB, AC$  棒的电荷分布不变, 求这时  $P, Q$  两点的电势.

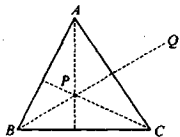


图 9-3-3

**分析与解** 由于三棒带有均匀分布的电荷, 所以三根棒对  $P$  点电势的贡献应相同, 设为  $U_1$ . 由对称性可知,  $AC$  对  $Q$

点电势的贡献与它对  $P$  点电势的贡献应相等;  $BC$  和  $BA$  对  $Q$  点电势的贡献也应相等, 设为  $U_2$ . 则电势叠加原理可得

$$U_P = 3U_1$$

$$U_1 + 2U_2 = U_Q$$

由以上两式解得  $U_1 = U_P/3$ ,  $U_2 = U_Q/2 - U_P/6$

取走  $BC$  棒后,  $P, Q$  的电势为  $U'_P = 2U_1 = 2U_P/3$

$$U'_Q = U_1 + U_2 = U_P/6 + U_Q/2$$

### 【巩固习题】

1. 有两个质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的带电相同小球, 每个球的电量为  $Q$ , 开始时两个小球相距甚远, 一个以初速  $v$  向另一个运动, 而另一个初速为 0, 假定作用在小球上的惟一的力是小球间的静电斥力, 求两个小球能接近的最小距离.

2.  $N$  个相同的球形水银液滴, 都带有相同的电量, 具有相同的电势  $U$ , 如果这些水银聚集在一起成一个大的水银滴, 这个大水银滴的电势多大?

3. 如图 9-3-4 所示, 半径为  $R_2$  的导电球壳包围半径为  $R_1$  的金属球, 金属球原来具有电势  $U_1$ . 如果让球壳接地, 那么金属球的电势变为多少?

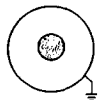


图 9-3-4

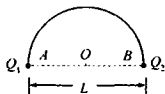


图 9-3-5

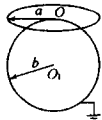


图 9-3-6

4. 正点电荷  $Q_1$  和  $Q_2$  分别置于  $A, B$  两点, 相距为  $L$ , 现以  $L$  为直径作半圆, 如图 9-3-5 所示, 试求在此半圆上电势最低点  $P$  的位置.

5. 一个半径为  $a$  的孤立的带电金属丝环, 其中心处电势为  $U_0$ . 将此环靠近半径为  $b$  的接地的球, 只有环中心点位于球面上, 如图 9-3-6. 试求球上感应电荷的电量.

6. 如图 9-3-7 所示, 点电荷  $+Q$  位于金属球壳的中心, 金属球壳的内、外半径分别为  $R_1, R_2$ , 球壳所带的净电荷为零. 若在无限处电势为零, 求  $A, B$  两点的电场强度和电势的大小.

7. 如图 9-3-8 所示, 半径分别为  $R_1$  与  $R_2$  的两个同心半球面相对放置, 两个半球面均匀带电, 电荷面密度分别为  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 试求大的半球面所对应底面直径  $AOB$  上电势分布.

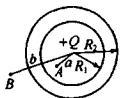


图 9-3-7

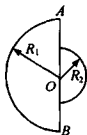


图 9-3-8

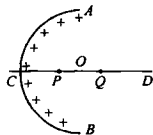


图 9-3-9

8. 电荷  $q$  均匀分布在半球面  $ACB$  上, 球面的半径为  $R$ ,  $CD$  为通过半球顶点  $C$  与球心  $O$  的轴线, 如图 9-3-9 所示.  $P$ 、 $Q$  为  $CD$  轴线上在  $O$  点两侧、离  $O$  点距离相等的两点. 已知  $P$  点的电势为  $U_P$ , 试求  $Q$  点的电势  $U_Q$ .

9. 如图 9-3-10 所示, 在真空中有 4 个半径为  $a$  的不带电的相同导体球, 球心分别位于边长为  $r$  ( $r > a$ ) 的正方形的四个顶点上. 首先, 让球 1 带电荷  $Q$  ( $Q > 0$ ), 然后取一细金属丝, 其一端固定于球 1 上, 另一端分别依次与球 2、3、4、大地接触, 每次接触时间都足以使它们达到静电平衡. 设分布在细金属丝上的电荷可忽略不计. 试求流入大地的电量的表达式.

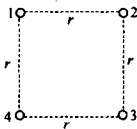


图 9-3-10

10. 两个互相绝缘的同心导体薄球壳, 内球壳半径为  $r_1$ , 外球壳半径为  $r_2$ . 开始时内球壳带电量为  $Q$ , 外球壳不带电.

- (1) 试求外球壳内、外两个侧面的电荷及外球壳的电势;
- (2) 将外球壳接地后再与地绝缘, 计算此时外球壳内、外两侧面的电荷;
- (3) 再将内球壳接地, 求此时内球壳的总电量.

11. 点电荷  $+Q$  附近有一半径为  $R$  的导体球, 球心到点电荷  $Q$  的距离为  $d$ , 如图 9-3-11 所示. 求: (1) 当导体球接地时, 感应电荷  $Q'$ ; (2) 当导体球不接地时它的电势  $U$ .

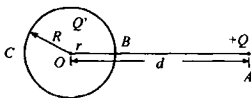


图 9-3-11

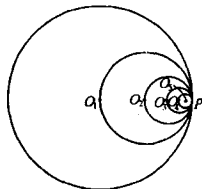


图 9-3-12

12. 真空中, 有五个电量均为  $q$  的均匀带电薄球壳, 他们的半径分别为  $R, R/2, R/4, R/8, R/16$ , 彼此内切于  $P$  点, 如图 9-3-12 所示. 球心分别为  $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5$ , 求  $O_1$  与  $O_5$  间的电势差.



## 第四节 电容和静电场的能量

### 【知识要点】

电容是导体或导体组容纳电量特征的物理量,导体的电容等于它所带电量和它电势的比.

导体组所带电量和电势的比值只跟导体组的几何形状有关而不受其他物体影响,这种导体组叫做电容器.电容器的电容为  $C = Q/U$ ,  $Q$  为一导体所带电量的绝对值,  $U$  为导体组之间的电势差.在国际单位制中,电容的单位是法拉.常用的单位还有微法拉和皮法拉.

$$(1) \text{ 孤立导体电容 } C = \frac{Q}{U} = \frac{\Delta Q}{\Delta U},$$

半径为  $R$  的孤立球形导体的电容为  $C = \frac{R}{k}$ .

#### (2) 平行板电容器的电容

设平行板电容器的极板面积为  $S$ , 每板的面电荷密度为  $\sigma$ , 两板的距离为  $d$ , 则两板间的电场强度为  $E = 4\pi k\sigma$

电势差为  $U = Ed = 4\pi k\sigma d$

$$\text{电容为 } C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{4\pi k\sigma d} = \frac{S}{4\pi kd}$$

若两板间充满相对介电常量为  $\epsilon_r$  的介质, 则电容为  $C = \frac{\epsilon_r S}{4\pi kd}$ .

#### (3) 球形电容器

半径为  $R_2$  的导体球(或球壳)和内半径为  $R_1$  的导体球壳同心放置, 便组成球形电容器. 其电容为  $C = \frac{R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)}$

若  $R_1 \approx R_2$ , 即两球壳靠得很近时, 可近似看作平行板电容器有  $C = \frac{S}{4\pi kd}$

其中  $R_1 \approx R_2 \approx R$ ,  $S = 4\pi R^2$ ,  $d = R_2 - R_1$ . 若  $R_2 \rightarrow \infty$ , 则内球变成孤立导体, 其电容为  $C = \frac{R}{k}$ .

以上讨论可以看出, 电容器的电容, 仅与电容器本身的几何尺寸有关, 而与极板上的带电量无关.

#### (4) 电容器的连接

电容器串联时的特点是每个电容器的电量相等,此时总电容的倒数等于各分电容的倒数和,即  $\frac{1}{C_{\text{串}}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n}$

电容器并联时的特点是每个电容器两极板间电势差相等,此时总电容等于各分电容之和,即  $C_{\text{并}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

(5) 电容器充电后的电能

电容为  $C$  的电容器,充至电压为  $U$ ,此时电量为  $Q$ ,则电容器的储能为如图 9-4-1 所示的三角形“面积”,即

$$E = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

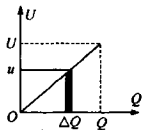


图 9-4-1

(6) 平行板电容器两板间的作用力

若平行板电容器带电量为  $Q$ ,两板间的场强为  $E$ ,则两板间的

作用力为  $F = \frac{1}{2}EQ$

(7) 三端电容网络的 Y-Δ 变换

如图 9-4-2 中左边是三端电容的 Δ 型网络元,右边是三端电容的 Y 型网络元,它们之间的变换关系为



图 9-4-2

$$\begin{aligned} C_{AB} &= C_a C_b / (C_a + C_b + C_c) & C_a &= (C_{AB} C_{BC} + C_{BC} C_{CA} + C_{CA} C_{AB}) / C_{BC} \\ C_{BC} &= C_b C_c / (C_a + C_b + C_c) & \text{和} & C_b &= (C_{AB} C_{BC} + C_{BC} C_{CA} + C_{CA} C_{AB}) / C_{CA} \\ C_{CA} &= C_c C_a / (C_a + C_b + C_c) & C_c &= (C_{AB} C_{BC} + C_{BC} C_{CA} + C_{CA} C_{AB}) / C_{AB} \end{aligned}$$

### 【例题分析】

**例 1** 三个完全相同的电容器连接如图 9-4-3 所示,已知电容器 1 带电量为  $Q$ ,上板带正电荷;电容器 2,3 原来不带电。

- (1) 用导线将  $a, b$  相连,求电容器 2 的上、下板所带电量及其符号;
- (2) 然后断开  $a, b$ ,将  $a, c$  相连,再断开  $a, c$ ,将  $a, b$  相连,求电容器 2 的上、下板所带电量及其符号;
- (3) 在(2)的情况下将  $a, d$  相连,再求电容器 2 上、下板所带电量及其符号。

**分析与解** (1) 设  $a, b$  相连后, 三个电容器上的电量分别为  $q_1, q_2, q_3$ , 则根据电荷守恒定律, 电容器 1, 2 上极板的总电量保持不变, 有

$$q_1 + q_2 = Q, q_1 + q_3 = Q$$

由回路的电压关系, 可得电容器 1 两端的电压应等于电容器 2, 3 两端电压之和, 即

$$U_1 = U_2 + U_3$$

因为  $C = \frac{Q}{U}$ , 所以  $\frac{q_1}{C} = \frac{q_2}{C} + \frac{q_3}{C}$

由以上各式解得  $q_1 = \frac{2}{3}Q, q_2 = q_3 = \frac{1}{3}Q$ . 因此, 电容器 2 上板带正电, 电量为  $Q/3$ .

(2) 断开  $a, b$ , 把  $a, c$  相连, 则电容器 2 上电量不变, 电容器 1, 3 并联, 并联的总电量为  $Q_{\#} = q_1 + q_2 = Q$ , 每个电容的电量为  $Q/2$ .

再断开  $a, c$ , 将  $a, b$  相连, 三电容器上的电量将改变, 设为  $q'_1, q'_2, q'_3$ , 同样根据电量关系和电压关系, 可得  $q'_1 + q'_2 = Q/3 + Q/2 = 5Q/6$

$$-q'_2 + q'_3 = -Q/3 + Q/2 = Q/6$$

$$\frac{q'_1}{C} = \frac{q'_2}{C} + \frac{q'_3}{C}$$

由以上三式可解得  $q'_1 = \frac{11}{18}Q, q'_2 = \frac{2}{9}Q, q'_3 = \frac{7}{18}Q$

因此, 电容器 2 上板电量为正, 电量为  $\frac{2}{9}Q$ .

(3) 在(2)的情况下将  $a, d$  相连, 则电容器 1 被短路, 电容器 2, 3 并联, 并联的总电量为  $q'_3 + (-q'_2) = Q/6$ .

由于电容相同, 两电容带电量都为  $\frac{Q}{12}$ , 电容器 2 上板带负电荷.

**例 2** 如图 9-4-4 所示, 电容器  $C$  可用两种不同的方法使其充电到电压  $U = n\mathcal{E}$ . (1) 开关倒向  $B$  位置, 依次由 1 至 2 至 3……至  $n$ ; (2) 开关倒向  $A$  位置一次充电使电容  $C$  的电压达到  $n\mathcal{E}$ .

试求: 两种方式充电的电容器最后储能和电路上损失的总能量. (电源内阻忽略不计)

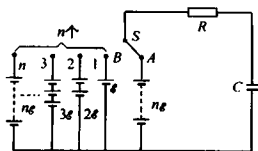


图 9-4-4

**分析与解** 对  $B$  第一次充电储能  $E_1 = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$

电源输出功  $W_1 = Q_1\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$

$$\text{电路上电能损失 } \Delta E_1 = W_1 - E_1 = C\mathcal{E}^2 - \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$$

$$\text{第二次充电储能 } E_2 - E_1 = \frac{1}{2}C(2\mathcal{E})^2 - \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 = \frac{3}{2}C\mathcal{E}^2$$

$$\text{电源输出功 } W_2 = \Delta Q_2 \cdot 2\mathcal{E} = (C2\mathcal{E} - C\mathcal{E})2\mathcal{E} = C2\mathcal{E}^2$$

$$\text{电路上电能损失 } \Delta E_2 = W_2 - (E_2 - E_1) = 2C\mathcal{E}^2 - \frac{3}{2}C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$$

不难证明每次充电, 电能损失为  $\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$

$$\text{第 } n \text{ 次充电储能 } E_n - E_{n-1} = \frac{1}{2}C(n\mathcal{E})^2 - \frac{1}{2}C[(n-1)\mathcal{E}]^2 = \frac{1}{2}(2n-1)C\mathcal{E}^2$$

$$\text{电源输出功 } W_n = \Delta Q_n n\mathcal{E} = [C \cdot n\mathcal{E} - C(n-1)\mathcal{E}]n\mathcal{E} = nC\mathcal{E}^2$$

$$\text{电路上能量损失 } \Delta E_n = W_n - (E_n - E_{n-1}) = nC\mathcal{E}^2 - \frac{1}{2}(2n-1)C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$$

可以看出每次充电储能  $\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2, \frac{3}{2}C\mathcal{E}^2, \dots, \frac{1}{2}(2n-1)C\mathcal{E}^2$  按  $\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$  的奇数倍增加  $[\frac{1}{2}(2n-1)C\mathcal{E}^2]$ , 每次电源输出功  $C\mathcal{E}^2, 2C\mathcal{E}^2, \dots, nC\mathcal{E}^2$  按  $C\mathcal{E}^2$  的自然数倍增加

$[nC\mathcal{E}^2]$ . 但是每次充电能量损失不变  $\Delta E_n = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$

$$\text{因此对 } B \text{ 种方式充电, 电容器最后储能 } E_B = \frac{1}{2}C(n\mathcal{E})^2 = \frac{1}{2}n^2C\mathcal{E}^2$$

充电过程能量总损失

$$\Delta E_n = n \cdot \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$$

$$\text{但对 } A \text{ 种方式充电, 电容器最后储能不变 } E_A = \frac{1}{2}C(n\mathcal{E})^2 = \frac{1}{2}n^2C\mathcal{E}^2$$

充电过程能量总损失  $\Delta E_A = W - E_A$

$$\Delta E_A = Qn\mathcal{E} - \frac{1}{2}n^2C\mathcal{E}^2 = C \cdot n\mathcal{E} \cdot n\mathcal{E} - \frac{1}{2}n^2C\mathcal{E}^2 = n^2 \cdot \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$$

即  $\Delta E_A = n\Delta E_B$ , 两种方式都能使电容器达到相同的储能, 但  $A$  种方式使充电能量损失增加了  $n$  倍.

**例 3** 静电加速器, 其高压电极外面都有一接地的金属罩, 罩内充有一定压强的气体. 设电极是一金属球, 接地金属罩是一同心金属薄球壳, 如图 9-4-5 所示, 仪器工作时电极与金属罩之间的电势差为  $U_0$ .

(1) 若  $R_1$  已给定, 则在理想情况下,  $R_2$  取何值, 电极处的场强有最小值?

(2) 在实际情况中往往适当选择  $R_1/R_2$  之值, 使电极处的场强为上. 述最小值约若干倍, 但仍低于击穿场强. 求当电极场强为上述最小值 4 倍时,  $R_1/R_2$  应

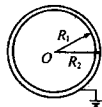


图 9-4-5

选的值。

**分析与解** 为了求电极处的场强,须知道金属球表面的电荷分布.现已知仪器工作时电极与金属罩之间的电势差为  $U_0$ ,可用两种方法求解金属球表面的电荷量.(1)金属球和同心薄金属球壳构成球面电容器,故可用球面电容器的电容  $C = \frac{1}{k\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$  来求解;(2)利用电势叠加原理来求解.

**解法一** (1)球面电容器带电量  $Q = CU_0 = \frac{R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)} U_0$ .由球面对称可知,电极表面的场强为  $E_{R_1} = \frac{kQ}{R_1^2}$ ,因此  $E_{R_1} = \frac{k}{R_1^2} \cdot \frac{R_1 R_2 U_0}{k(R_2 - R_1)} = \frac{U_0}{R_1(1 - R_1/R_2)}$   
当  $R_1$  一定时,  $R_2 \rightarrow \infty$ ,  $E_{R_1}$  有极小值  $E_{\min} = \frac{U_0}{R_1}$ .

**解法二** (1)球壳接地电势为零,该电势是金属球和金属罩所带电量  $+Q$  与  $-Q$  产生的电势的叠加,即  $U_0 = \frac{kQ}{R_1} - \frac{kQ}{R_2} = kQ \frac{(R_2 - R_1)}{R_1 R_2}$   
 $-Q$  在壳内产生的场强为零,  $+Q$  在电极表面电场即为合场强(即电极表面处的场强)因此,  $E_{表} = \frac{kQ}{R_1^2}$

两式联立消去  $Q$  可得  $E_{表} = \frac{U_0}{R_1(1 - R_1/R_2)}$

当  $R_1$  一定时,  $R_2 \rightarrow \infty$  时,场强最小,最小值为  $E_{\min} = \frac{U_0}{R_1}$ .

(2)由  $E' = \frac{U_0}{R_1(1 - R_1/R_2)} = 4E_{\min} = \frac{4U_0}{R_1}$ , 可得  $R_1/R_2 = \frac{3}{4}$ .

### 【巩固习题】

1. 一个金属球借助导电薄板从起电机上获得电荷,板在每次与球接触后又从起电机上带电至电量  $Q'$ .如果球在第一次与板接触后带电量为  $q$ ,求球可能获得的最大电量.
2. 板板相同的两个平板空气电容器充以同样的电量,第一个电容器两极板间的距离是第二个电容器的两倍.如果将第二个电容器插在第一个电容器的两极板间,并使所有极板都相互平行,问系统的静电能如何改变?
3. 平行板电容器电容为  $C_0$ ,它是由两块相距为  $d$  的金属板  $A, B$  所组成.若将此电容器放入一金金属盒  $KK'$  内,如图 9-4-6 所

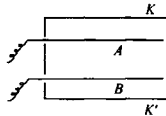


图 9-4-6

示,金属盒上下两内壁与  $A, B$  分别相距为  $\frac{d}{2}$ , 不计边缘效应时,电容器的电容  $C'$  变为多大? 如将盒中电容器的一极板与金属盒相连接,这时电容器  $C''$  的电容又为多少大?

4. 如图 9-4-7 所示,半径  $r=10\text{cm}$  的金属球置于半径为  $R=20\text{cm}$  的薄金属空心球内. 两球同心,内球靠一根长导线经外球的开孔接地,若外球带电量  $Q=10^{-8}$  库,求外球电势.

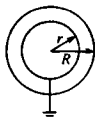


图 9-4-7

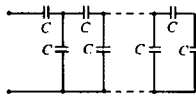


图 9-4-8

5. 由许多电容都为  $C$  的电容器组成一个多级网络,如图 9-4-8 所示. 问:(1)无限增加级数,整个网络的总电容是多少?(2)如在最后一级右边的电容器上并联一个多大的电容  $C_x$ ,可使整个网络的总电容也为  $C_x$ ?

6. 由  $n$  个单元组成的电容器网络,每一个单元由三个电容器连接而成,其中两个电容器的电容都是  $3C$ ,另一个电容器的电容为  $2C$ ,如图 9-4-9 所示,图中  $a, b$  为网络的输入端,  $a', b'$  为其输出端. 今在网络的输入端间加一恒定的电压  $U$ ,在其输出端  $a', b'$  间接入一电容为  $C$  的电容器.

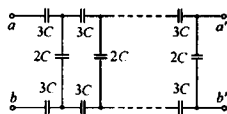


图 9-4-9

(1)求从第  $k$  ( $k < n$ ) 个单元输入端起,后面所有电容器贮存的总电能;(2)先把第一个单元输出端与后面的网络断开,再除去电源,并把它的输入端短路,求这时构成第一单元的三个电容器贮存的总电能.

7. 两个绝缘的球形导体,其半径为  $r_1, r_2$ ,带电后其电势分别为  $U_1$  和  $U_2$ ,然后用细导体将两个带电球连接起来,求在导线上放出的能量.

8. 如图 9-4-10 所示,电容器网络中各电容器用数字标出的电容量的单位均为  $\mu\text{F}$ ,试求  $A, B$  间的等效电容  $C_{AB}$ .

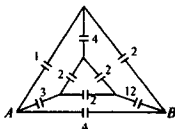


图 9-4-10

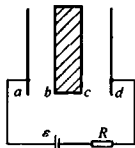


图 9-4-11

9. 如图 9-4-11 所示,  $ad$  为一平行板电容器的两个极板,  $bc$  是一块长宽都与  $a$  板相同的厚导体板, 平行地插在  $a, d$  之间, 导体板的厚度  $bc = ab = cd$ . 极板  $a, d$  与内阻可忽略的电动势为  $\xi$  的蓄电池以及电阻  $R$  相联如图, 已知在没有导体板  $bc$  时电容器  $a, d$  的电容为  $C$ . 现将导体板  $bc$  抽走, 设已知抽走过程中所做的功为  $A$ , 求这过程中电阻  $R$  上消耗的电能.

## 第五节 电场中的导体和电介质极化

### 【知识要点】

#### 一、导体 绝缘体(电介质)

在外电场作用下能很好地传导电流的物体叫导体.

在外电场作用下不容易传导电流的物体叫绝缘体, 又叫电介质.

绝缘体(电介质)之所以导电能力弱, 在于它的分子中正负电荷束缚很紧(形成一对束缚电荷)在一般条件下不能相互分离, 因而在电介质内部能作自由运动的电荷极少, 在外电场作用下, 电介质表面上出现束缚电荷, 这种现象叫做电介质的极化. 不同的介质在同一电场作用下, 极化程度不同, 为了描述介质不同的极化性质引入介电常量  $\epsilon_r$ , 这一物理量. 当平行板电容器充满各向同性的均匀介质时, 其电容增加. 设  $C$  为充满各向同性的均匀介质时平行板电容器的电容,  $C_0$  为真空时平行板电容器的电容, 则有  $C/C_0 = \epsilon_r$ .

电介质按其分子结构可分为两类:

第一类电介质的分子当无外电场存在时正负电荷“中心”是重合, 这类分子叫做无极分子.

第二类电介质的分子, 当无外电场存在时, 正负电荷的“中心”并不重合, 这类分子叫做有极分子.

#### 二、电场的导体

放入电场中的导体, 由于自由电子在电场力作用下的定向移动, 可以达到静电平衡状态, 即导体内没有电荷定向移动(无规则热运动仍存在)的状态. 静电平衡状态下的导体具有

- (1) 导体内部场强(外电场与感应电荷场强之矢量和)为零;
- (2) 导体为等势体;
- (3) 导体外表面的电场线与导体表面(等势面)垂直;
- (4) 电荷仅分布于导体表面(对孤立带电体电荷仅分布在外表面), 且电荷分布密度

与表面各处曲率有关。越是尖突的地方，电荷分布的密度越大，附近的场强也越强。

### 【例题分析】

**例** 有一空气平行板电容器，极板面积为  $S$ ，用电源连接，极板充有  $+Q_0$ 、 $-Q_0$ ，断电后保持极板距离不变，在极板中部占极板间一半体积的空间填满相对介电常量为  $\varepsilon$  的电介质，求：(1)  $O$  点的电场强度；(2)  $a$  点的电场强度；(3) 图乙中与正极板接触那部分电介质界面上的极化电荷。

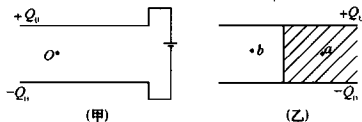


图 9-5-1

**分析与解** (1) 由无限大平板在空间的场强分布可得， $O$  点的场强为  $E_0 = \frac{4\pi k Q_0}{S}$ 。

(2) 如图乙所示，当极板中部占极板间一半体积的空间填满相对介电常量为  $\varepsilon$  的电介质后，相当于左右两电容器并联，总电量为  $Q_0$ ，电容之比  $C_{左} : C_{右} = 1 : \varepsilon$ ，电量之比为  $Q_{左} : Q_{右} = 1 : \varepsilon$ ， $Q_{左} = Q_0 / (1 + \varepsilon)$ 。因此， $a$  点的场强与  $b$  点相等，即

$$E_a = E_b = \frac{4\pi k Q_{左}}{S/2} = \frac{2 \cdot 4\pi k Q_0}{1 + \varepsilon S}$$

(3) 由(2)知  $a$  点的场强与  $b$  点相等，而两板的自由电荷量不相等， $Q_{左} < Q_{右}$ ，因此  $b$  点的场强应是自由电荷和极化电荷共同产生的，即  $Q_{左} = Q_{右} + Q_{极}$

因此，极化电荷为  $Q_{极} = Q_{左} - Q_{右} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} Q_0$

### 【巩固习题】

1. 如图 9-5-2 所示，平行板电容器中原来充满了均匀介质，给平行板电容器充电，如果介质内的场强为  $E_0$ 。现在在介质中  $A$  处挖一个球形小空腔，实际上等于介质内有一小气泡，试比较  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的场强与原场强  $E_0$  的大小。

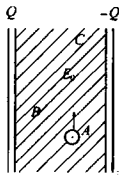


图 9-5-2

2. 正对面积为  $S$ ，两板间距为  $d$  的平行板电容器，接在电源上充电至电压  $U$ ，试求：(1) 平行板电容器极板间的场强  $E_0$  的大小；(2) 除去电源，插入面积也为  $S$ ，宽度为  $d/2$ ，介电常数为  $\varepsilon$  的电介质，则极板间电介质内外的场强  $E_A$  和  $E_B$  的大小和  $E_0$  关系如何？(3) 如果在仍接着电源的条件下，插入上述的介质，重新回答问题(2)。



3. 原电容器的电容为  $C_0$ , 现插入厚度为  $\frac{d}{2}$ , 介电常数为  $\epsilon$  的介质, 且只占  $\frac{S}{2}$  面积如图 9-5-4 所示, 求现在电容器的电容量  $C$ . (不考虑边缘效应)

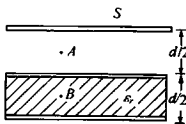


图 9-5-3

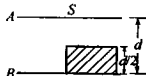


图 9-5-4

## 第六节 综合训练

### 【例题分析】

**例 1** 对于两个无限大的平行平面带电导体板来说, (1) 相向的两面上, 电荷的面密度是大小相等符号相反; (2) 相背的两面上, 电荷的面密度总是大小相等符号相同.

**分析与解** 如图 9-6-1 所示, 两无限大的平行平面带电导体板, 设四个面 1, 2, 3, 4 上的电荷面密度分别为  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ . 由高斯定理知它们各自在平面 I 两侧产生的电场强度的大小为  $E_i = 2k\pi\sigma_i$ .

因为处于静电平衡的导体内部场强处处为零, 所以导体板内部 a、b 两点的场强为零. 即  $E_a = E_b = 0$

根据场强叠加原理, a、b 两点的场强是四个面产生的场强的矢量和, 设向右为正方向, 则

$$E_a = 2k\pi(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4) = 0, E_b = 2k\pi(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4) = 0$$

由以上两式可得  $\sigma_2 = -\sigma_3$

即相向的两面上, 电荷的面密度总是大小相等符号相反;  $\sigma_1 = \sigma_4$

即相背的两面上, 电荷的面密度总是大小相等符号相同.

**例 2** 如图 9-6-2, 平行板电容器极板是边长为 a 的正方形, 相距 l, 竖直插入介电常数为  $\epsilon$ , 密度为  $\rho$  的液态介质中, 维持电源电压为 V, 液面被吸引力拉起来. 试求作用在电介质单位面积上的吸引力 T 及液面的上升高度.

**分析与解** 设液面上升 h 高时, 系统处平衡, 此时电容为 C. 设想由于电源做功,

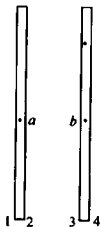


图 9-6-1

使高度增加  $\Delta h$ , 则电源做的总功为

$$\Delta A = V\Delta q = V^2\Delta C = V^2 \frac{a}{4\pi kl} (\varepsilon - 1)\Delta h$$

静电能增量为  $\Delta E = \frac{1}{2} V^2\Delta C = V^2 \frac{a}{8\pi kl} (\varepsilon - 1)\Delta h$

重力势能增量  $\Delta E_p = Tal\Delta h$

由能量守恒定律可得  $\Delta A = \Delta E + \Delta E_p$

以上各式解得  $T = \frac{V^2(\varepsilon - 1)}{8\pi kl^2}$

由平衡条件得  $Tal = \rho gah$

所以  $h = \frac{V^2(\varepsilon - 1)}{8\pi k\rho gl^2}$

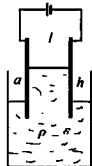


图 9-6-2

### 【精选习题】

1. 有一半径为  $R$  的不导电的半球薄壳, 均匀带电, 倒扣在  $xOy$  平面上, 如图 9-6-3 所示, 图中  $O$  为球心,  $ABCD$  为球壳边缘,  $AOC$  为直径. 有一电量为  $q$  的点电荷位于  $OC$  上的  $E$  点,  $OE = r$ . 已知将此点电荷由  $E$  点缓慢移至球壳顶点  $T$  时, 外力需要做功  $W$ ,  $W > 0$ , 不计重力影响.

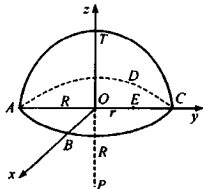


图 9-6-3

(1) 试求将此点电荷由  $E$  点缓慢移至  $A$  点外力需做功的正负及大小, 并说明理由.

(2)  $P$  为球心正下方的一点,  $OP = R$ . 试求将此点电荷由  $E$  点缓慢移至  $P$  点外力需做功的正负及大小, 并说明理由.

2. 将电荷  $q$  均匀地分布在一原来不带电的半径为  $R_0$  的肥皂泡的表面上(表面张力不计), 由于肥皂泡表面上电荷相互排斥, 使半径增大到  $R$ , (设膨胀过程中温度保持不变), 已知大气压为  $p_0$ , 求肥皂泡上电荷  $q$ .

3. 如图 9-6-4 所示, 三个电容器  $C_1, C_2, C_3$  的电容值均等于  $C$ , 电源电动势为  $\mathcal{E}$ ,  $R_1, R_2$  为电阻,  $K$  为双掷开关, 开始时, 三个电容器都不带电, 先接通  $Oa$ , 再接通  $Ob$ , 再接通  $Oa$ , 再接通  $Ob$ ……如此反复换向, 设每次接通都已达到静电平衡, 试问(1)当  $K$  第  $n$  次接通  $Ob$  并达到平衡后, 每个电容器两端的电压各为多少? (2)当反复换向的次数无限增多时, 在所有电阻上消耗的总电能是多少?

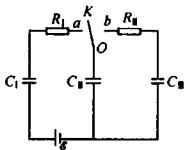


图 9-6-4

4. 两块平行放置的大金属薄板面积都是  $S$ , 它们之间的距离为  $d$  ( $d$  远小于金属板的线度). 已知  $A$  板带电  $+Q_1$ ,  $B$  板带电  $+Q_2$  ( $Q_2 < Q_1$ ). 求(1)空间各处的电场强度;

(2)  $A, B$  两板间的电势差。

5. 一个边长为  $L$  的正方形平板电容器, 板面竖直地串联在电路中, 如图 9-6-5 所示。电池保证电压稳定为  $V_0$ 。  $I$  为一电流计。今有一块矩形金属板, 长度也为  $L$ , 宽为  $L'$  ( $L > L'$ ), 厚为电容器板间距离  $D$  的  $1/p$  ( $p > 1$ )。开始时金属板竖直地放在电容器正中线上方, 下端与电容器板上端对齐, 然后自由下落。求  $t$  时刻电容器板上的电量。忽略所有边缘效应以及电磁力对金属板下落的影响。

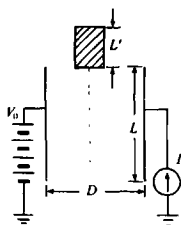


图 9-6-5

6. 有 100 块平行放置的正方形大导体板, 每块边长均为  $L$ , 相邻两板彼此相对的两个表面的间距为  $d$ ,  $d \ll L$ , 将这些导体板从左至右顺次编号为  $1, 2, \dots, 100$ 。开始每板上都带有静电荷, 已知第 1 块板上的静电量为  $q_1$  ( $q_1 > 0$ ), 第  $n$  块板上的静电量为  $q_n = nq_1$ 。今将第 1 块和第 100 块导体板接地, 如图 9-6-6 所示。忽略边缘效应。问 (1) 从第 1 块和第 100 块导体板上流入大地的电量  $\Delta q_1$  和  $\Delta q_{100}$  各为多少? (2) 上述两板接地后哪块板上的电势最高? 其电势是多少?

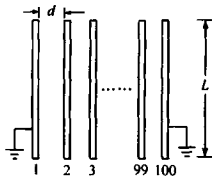


图 9-6-6

7. 一平行板电容器, 电容  $C_0 = 300 \text{ pF}$ , 极板  $A_1$  接在一电源的正极,  $A_2$  接在另一电源的负极, 两电源的电动势均为  $150 \text{ V}$ , 它们的另一极均接地。取一厚金属板  $B$ , 其面积与  $A_1$  及  $A_2$  相同, 厚度为电容器两极板间距离的  $1/3$ , 插入电容器两极板间的正中央, 如图 9-6-7 所示。

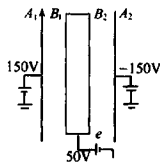


图 9-6-7

(1) 取一电动势为  $50 \text{ V}$  的电源  $\mathcal{E}$ , 负极接地, 将其正极与金属板  $B$  相连。问此时由电源  $\mathcal{E}$  送到金属板  $B$  的总电量是多少?

(2) 在上述情况下, 左右平移金属板  $B$ , 改变它在电容器两极板间的位置, 使  $B$  板上的电量向电源  $\mathcal{E}$  回输, 直到电源  $\mathcal{E}$  原来输给金属板  $B$  的电量全部送回电源时, 固定  $B$  板的位置。然后切断所有三个电源, 并将  $B$  板从电容器中抽出。求这时电容器两极板  $A_1, A_2$  之间的电压。

8. 试求图 9-6-8 所示电路中  $A, B$  间的等效电容  $C_{AB}$ 。已知  $C_1 = C_2 = C_3 = C_9 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_8 = C_{10} = 3 \mu\text{F}$ 。

9. 在静电复印机里, 常用如图 9-6-9 所示的电路来调节  $A, C$  两板间电场强度的大小, 从而用来控制复印件的颜色深浅。在操作时, 首先对由金属平板  $A, B$  组成的平行板电容器充电。该电容器的  $B$  板接地,  $A, B$  间填充有介电常数为  $\epsilon$  的电介质, 充电后两板间的电势差为  $U$ 。而后断开充电电源, 将连接金属平板  $C$  和可调电源  $\mathcal{E}$  的开关  $S$  闭合。

这样  $A, C$  两板间的电场强度将随可调电源  $\mathcal{E}$  的电动势变化而得以调节. 已知  $C$  板与  $A$  板靠得很近, 相互平行, 且各板面积相等.  $A, B$  板间距为  $d_1$ ,  $A, C$  板间距为  $d_2$ ,  $A, C$  板间的相对介电常数为 1. 试求当电源  $\mathcal{E}$  的电动势为  $U_0$  时,  $A, C$  两板间空气  $P$  点的电场强度.

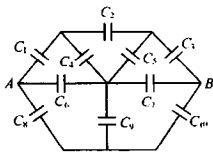


图 9-6-8

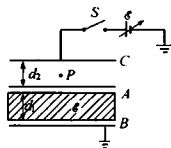


图 9-6-9

### 问题与讨论 微元法

在中学物理中, 往往遇到一些用常规方法难以解决的问题. 如研究对象难以确定或者研究对象不是理想物理模型(如质点、点电荷等); 问题中所涉及的物理量是非线性变量, 无法用初等数学进行计算; 等等. 这时, 可以采用微元法, 即将所研究的对象或者所涉及的物理过程, 分割成许多微小单元, 从而将非理想物理模型变成理想物理模型; 将曲面变成平面; 将曲线变成直线; 将非线性变量变成线性变量, 甚至常量. 然后, 利用常规方法进行分析 and 讨论, 简捷、迅速地得出结果. 本节讨论在静电学中微元法的应用.

**例 1** 均匀带电球壳半径为  $R$ , 带正电, 电量为  $Q$ , 若在球面上划出很小一块, 它所带电量为  $q$  ( $q \ll Q$ ). 试求球壳的其余部分对它的作用力.

**分析与解**  $q$  所受的作用力应为球壳的其余部分电荷在  $q$  处产生的场强与  $q$  的乘积.

**解法一** 如图 9-7-1 所示,  $A$  是球面上划出的很小一块面积元(无限分割), 因带电量  $q$ , 故可视作一点电荷(近似处理), 其在  $A$  内、外两侧面引起的场强大小均设为  $E_q$ , 方向相反. 现设球壳其余部分在  $A$  处的场强为  $E_A$ , 则在  $A$  内侧面由于球壳内部场强为零, 应有关系式  $E_A - E_q = 0$

而  $A$  外侧面, 由均匀球壳场强公式可得

$$E_A + E_q = k \frac{Q}{R^2}$$

由以上两式可得

$$E_A = k \frac{Q}{2R^2}$$

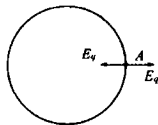


图 9-7-1

则点电荷  $q$  在  $A$  处所受球壳其余部分对它作用力为  $F = \frac{kQq}{2R^2}$ .

**解法二** 由于划出部分很小,所以可当作面积为  $\Delta S$  的平面,在靠近  $\Delta S$  很近的点的场强计算,可以把面元  $\Delta S$  当作无限大平面,则根据高斯定理,面元两侧离面元很近的点的场强为  $2\pi k\sigma$ ,  $\sigma$  为球面的面密度.

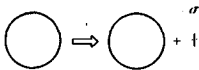


图 9-7-2

缺口处的场强计算,可等效于面密度为  $\sigma$  均匀球面与面密度为  $-\sigma$  的面元  $\Delta S$  的叠加,如图 9-7-2 所示,所以缺口处的场强为

$$\text{缺口内侧 } E_{\text{内}} = 2\pi k\sigma = 2\pi k \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{kQ}{2R^2}$$

$$\text{缺口外侧 } E_{\text{外}} = -2\pi k\sigma + k \frac{Q}{R^2} = k \frac{Q}{2R^2}$$

因此,缺口处场强为  $E = k \frac{Q}{2R^2}$ ,  $q$  所受的作用力  $F = Eq = \frac{kQq}{2R^2}$ .

**解法三** 静电场的能量密度  $W = \frac{E^2}{8\pi k}$ , 现将球面缓慢压缩到  $R - \Delta R$  球面上, 设  $\Delta R$  为无穷小量, 以至  $R$  外的空间场强保持不变, 但在附加的被收缩的区域

$$\Delta V = 4\pi R^2 \cdot \Delta R$$

电场能改变为  $\Delta W = \frac{E^2}{8\pi k} \cdot 4\pi R^2 \cdot \Delta R$ , 其中  $E = k \frac{Q}{R^2}$ .

设把球面分成  $n$  个小区域, 每一个小区域都可当作点电荷, 电量为  $q$ , 除  $q$  外其余电荷在  $q$  点的场强为  $E_x$ , 则外力对  $q$  做功为  $E_x \cdot q \cdot \Delta R$

外力对球做的总功为  $\sum E_x \cdot q \cdot \Delta R = E_x \cdot Q \cdot \Delta R$

由能量守恒定律知  $E_x \cdot Q \cdot \Delta R = \frac{E^2}{8\pi k} \cdot 4\pi R^2 \cdot \Delta R$ ,  $E_x = k \frac{Q}{2R^2}$

所以,  $q$  所受的作用力  $F = E_x q = \frac{kQq}{2R^2}$ .

**例 2** 平行板电容器的极板面积为  $S$ , 板间距离为  $D$ . 其间充满介质, 介质的介电常量是变化的, 在一个极板处为  $\varepsilon_1$ , 在另一极板处为  $\varepsilon_2$ , 其他各处的介电常量与到介电常量为  $\varepsilon_1$  处的距离成线性关系, 如图所示, 试求此电容器的电容  $C$ .

**分析与解** 如图 9-7-3 所示, 建立坐标, 把电容器看成  $n$  个相同的电容器  $C_i$  的串联, 则电容器的电容

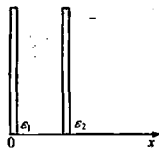


图 9-7-3

$$C = \frac{C_i}{n}, C_i = \frac{S \cdot \varepsilon_i}{\Delta x_i}$$

由题意可得  $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_1 + kx$ ,  $k = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{D}$ . 所以

$$C_i = \frac{S \cdot \mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_{i+1} - \mathcal{E}_i} = \frac{kS}{\left(\frac{\mathcal{E}_{i+1}}{\mathcal{E}_i} - 1\right)} = nC$$

$$\frac{\mathcal{E}_{i+1}}{\mathcal{E}_i} = \frac{kS}{nC} + 1$$

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \left(\frac{kS}{nC} + 1\right)^n = \left(\frac{kS}{nC} + 1\right)^{\frac{nC}{kS} \cdot \frac{kS}{C}}$$

由数学知识知  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

所以, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = e^{\frac{kS}{C}}$ , 解得  $C = \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)S}{D(\ln \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}$ .

**例3** 今有一半径为  $a$  原来不带电的金属球, 现使它处于电量为  $q$  的点电荷的电场中. 点电荷位于金属球外, 与球心的距离为  $R$ . 试计算金属球表面的感应电荷产生的电场在此球内的平均电场强度.

**分析与解** 根据静电平衡条件和场强叠加原理, 金属球所有感应电荷在金属球内某一点的合场强  $E_i$  与点电荷  $q$  在该点的场强  $E_q$  大小相等, 方向相反. 即  $E_i = -E_q$ .

因此, 金属球表面的感应电荷所产生的电场在此球内的平均电场强度与点电荷在此球内的平均电场强度大小相等.

为了求点电荷在此球内的平均电场强度, 可设想金属球内有均匀体电荷密度  $\rho$ . 则电荷  $q$  对金属球作用力等效于球体的全部电荷集中在球心的点电荷与点电荷  $q$  的作用力, 即  $F = \frac{kQq}{R^2}$ . 另外, 也可以把球分割成很小的一块  $\Delta V_i$ , 每一块的电量为

$$\Delta Q_i = \rho \cdot \Delta V_i$$

电荷  $q$  与金属球的作用力等于  $q$  与  $\Delta Q_i$  作用力的矢量和, 设  $q$  在  $\Delta Q_i$  处的场强为  $E_i$ ,

$$\text{则 } F = \sum E_i \cdot \Delta Q_i = \rho \sum E_i \cdot \Delta V_i$$

$$\text{因此 } \frac{kQq}{R^2} = \rho \sum E_i \cdot \Delta V_i$$

$$\text{而 } Q = \rho V, \text{ 所以 } \frac{\sum E_i \Delta V_i}{V} = \frac{kq}{R^2}.$$

### 【巩固习题】

1. 试证明: 一个点电荷在均匀带电的球壳内任意一点受到的电场力为零.
2. 总电量为  $Q$  的电荷均匀分布在半径为  $R$  的固定圆环上, 今将带电量  $q$ 、质量很小的质点  $A$  以  $v_0 = 10\text{m/s}$  的初速由圆环的中心  $O$  垂直于圆环平面向  $E$  射出, 如图 9-7.

4 所示,若  $q$  与  $Q$  的电性相反,则质点沿  $OE$  轴运动时可到达的最远点为  $P$ ,而  $OP = \sqrt{3}R$ .试问:(1)为了使质点  $A$  从  $O$  向  $E$  方向射出后能到达无限远处,质点  $A$  的初速最小为多少?(2)今将质点  $A$  改为质量相同,但带电量为  $q = -q$  的另一质点  $B$ ,那么,当质点  $B$  到达  $P$  点时的速率为多少?

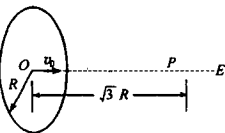


图 9-7-4

3. 如图 9-7-5 所示,一个半径为  $R$  的金属球与大地相连,在距球心  $l$  处放一点电荷  $q$ .求金属球上感应电荷的电量.

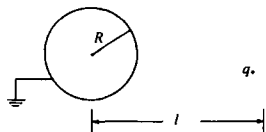


图 9-7-5

4. 有一半径为  $R$ ,带电量为  $Q$  的均匀带电圆环,求过其圆心垂直于环面的轴线上的场强的最大值及其位置.

5. 有两根均匀带电的半无穷长平行直导线(它们的电荷线密度均为  $\eta$ ),端点连线  $LN$  垂直于这两条直导线,如图 9-7-6 所示, $LN$  的长度为  $2R$ .试求在  $LN$  的中点  $O$  处的电场强度.

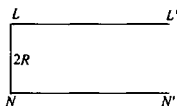


图 9-7-6

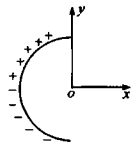


图 9-7-7

6. 如图 9-7-7 所示,半径为  $R$  的半圆形绝缘线上、下  $1/4$  圆弧上分别均匀带电  $+q$  和  $-q$ ,求圆心处的场强.

7. 已知球面均匀带电  $Q$ 、半径  $R$ ,试计算带电球面上的表面张力系数.

8. 已知半径为  $R$  的均匀带电半球面,电荷面密度为  $\sigma$ ,求球心处的电场强度.

9. 两块长与宽均为  $a$  与  $b$  的导体平板在制成平行板电容器时,稍有偏斜,使两板一对宽边相距为  $d$ ,另一对宽边相距为  $d+h$ ,如图 9-7-8 所示,且  $h \ll d$ .若此电容器内充满了介电常数为  $\epsilon$  的电介质,试求它的电容.

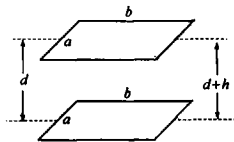


图 9-7-8

10. 有一带电圆环,  $AB$  为它的一条直径.如果要使  $AB$  上的场强处处为零,问圆环上的电荷应该如何分布?

11. 如图 9-7-9 所示,在强度为  $E$  的均匀电场中放着

一个均匀的金属球,其半径为  $R$ ,由于静电效应,在球上产生了面密度为  $\sigma$  的电荷. $\sigma$  和图 9-7-9 上标出的角  $\alpha$  有关系,求关系式  $\sigma(\alpha)$ .

12. 两个半球合在一起组成一个完整的金属球,球的半径为  $R$ ,如图 9-7-10 所示.求两个半球间的静电斥力.

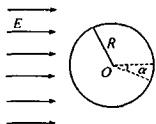


图 9-7-9

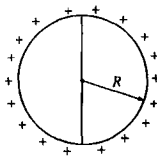


图 9-7-10

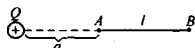



图 9-7-11

13. 如图 9-7-11 所示,一根原来不带电的长  $l$  的金属丝,现使它处于电量为  $Q$  的点电荷的电场中.点电荷位于金属丝延长线上,与金属丝一端距离为  $a$  处.试计算金属丝表面感应电荷所产生的电场在此金属丝上的平均电场强度.



## 第十章 稳恒电流

## 第一节 欧姆定律

 【知识要点】

## 一、电 流

## 1. 电流的产生

电荷的定向移动形成电流. 形成电流的条件是: 存在自由电荷(即存在导体)和导体两端存在电势差(即存在电压).

## 2. 电流的方向

规定正电荷移动的方向为电流的方向, 那么负电荷移动的方向与它所形成的电流的方向相反. 在一段不含源的电路中, 电流总是由高电势处流向低电势处.

## 3. 电流的大小

为描述电路中电流的强弱, 引入电流强度的概念(单位时间内通过导体横截面的电量). 其表达式为  $I = q/t$ .

电流强度简称电流, 是一个标量.

## 二、电阻定律

当温度一定时, 导体的电阻跟它的长度成正比, 跟它的横截面积成反比, 其数学表达式为:  $R = \rho \frac{l}{S}$ .

式中  $\rho$  为导体的电阻率, 由材料性质决定, 物理意义是反映材料导电性能的好坏. 它适用于粗细均匀的金属导体及浓度均匀一致的电解液.

电阻率随温度变化的关系为  $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$ ,

式中  $\rho_0$  为  $0^\circ\text{C}$  时电阻率,  $\alpha$  叫电阻的温度系数, 单位是  $^\circ\text{C}^{-1}$ , 不同材料的电阻温度系数不同.

有些金属合金或化合物的温度在降到接近绝对零度时, 它们的电阻率突然减小到

零,这种现象叫做超导现象.处于这种状态的物体叫超导体.

### 三、欧姆定律

导体中的电流强度  $I$  跟它的两端的电压  $U$  成正比,跟它的电阻  $R$  成反比,其数学

$$\text{表达式为 } I = \frac{U}{R},$$

它只适用于电阻率温度系数  $\alpha$  很小的金属导体和均匀分布的电解液导电,对气体、半导体来说就不适用了.上式可写为:  $U = IR$

此式表示经过一个电阻,沿电流的方向电势降低的数值等于电流强度与电阻的乘积.

### 四、电功和电热

1. 电功:指电路中电场力所做的功或电流所做的功.它是描述电能转化为其他形式的能的物理量.公式:  $W = qU = It \cdot U = IUt$

2. 焦耳定律:电流通过导体产生的热量跟电流强度的平方、导体的电阻和通电时间成正比.公式:  $Q = I^2 Rt$

只有在纯电阻电路中,  $W = IUt$  和  $Q = I^2 Rt$  才是相等的.如果电路不是纯电阻电路,如电路中含有电动机、电解槽等用电器时,电能除转换为内能外,还要转换成机械能、化学能等,所以电功必大于电热.

### 【例题分析】

**例 1** 为了使圆柱形长导体的电阻不随温度变化,可将两根横截面积相同的碳棒和铁棒串联起来,已知碳的电阻率  $\rho_{10} = 4.0 \times 10^{-5} \Omega \cdot \text{m}$ ,铁的电阻率  $\rho_{20} = 1.0 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$ ;碳和铁在  $0^\circ\text{C}$  时的电阻率温度系数分别为  $\alpha_1 = -0.8 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $\alpha_2 = 6.0 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,问两棒的长度之比应为多少?

**分析与解** 将碳棒和铁棒串联之后,其电阻为

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 = R_{10}(1 + \alpha_1 t) + R_{20}(1 + \alpha_2 t) \\ &= (R_{10} + R_{20}) \left( 1 + \frac{R_{10}\alpha_1 + R_{20}\alpha_2}{R_{10} + R_{20}} \cdot t \right) \end{aligned}$$

复合棒的电阻率温度系数为  $\alpha = \frac{R_{10}\alpha_1 + R_{20}\alpha_2}{R_{10} + R_{20}}$ ,

式中  $R_{10} = \rho_{10} \frac{l_1}{S}$ ,  $R_{20} = \rho_{20} \frac{l_2}{S}$ .  $l_1, l_2$  分别为碳、铁棒的长度,代入上式后,令  $\alpha = 0$ . 得

$$\rho_{10} l_1 \alpha_1 + \rho_{20} l_2 \alpha_2 = 0$$

$$\text{则 } \frac{l_1}{l_2} = -\frac{\rho_{20} \alpha_2}{\rho_{10} \alpha_1} = \frac{1.0 \times 10^{-7} \times 6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-5} \times 0.8 \times 10^{-3}} = \frac{1}{53}$$

**例 2** 用均匀电阻线作成的正方形的网络,如图 10-1-1 所示,由 9 个相同的小正方形组成,小正方形每边的电阻均为  $r = 8\Omega$ . (1) 在  $A, B$  两点间接入电压  $U = 5.7\text{V}$ ,求流

过 A 点的总电流强度为多少? (2) 若用导线连结 C, D 两点, 问通过此导线的电流强度为多少? (此导线电阻忽略不计)

**分析与解** (1) 当 A, B 两点间接入电压后, 在正方形网络中产生电流. 相对于 CABD 来说, 该网络中的上下两半部具有对称性, 如图(a)所示. 故 1 与 1', 2 与 2', 3 与 3', 4 与 4', 5 与 5' 和 O 与 O' 均分别为等位点, 因而图(a)可简化为图(b), 即图(b)是图(a)沿

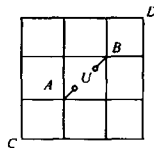


图 10-1-1

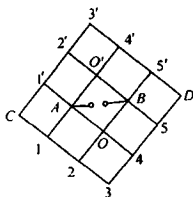
CABD 折叠而成, 图(b)中每一个电阻值为  $\frac{r}{2} = 4\Omega$ , 再考虑到 3 点与 O 点电势相等, 图(b)又可进一步简化为图(c). 这样, AB 两端的等效电路为  $R_{AB} = \frac{(4 \times 5) \times 8}{(4 \times 5) + 8} = 5.7\Omega$ ,  $I_{AB} = \frac{U}{R_{AB}} = \frac{5.7}{5.7} = 1(\text{A})$

(2) 当用导线连 C, D 两点时, 图(c)中只要把 C, D 用导线相连即可, 图中最上面的支路等效电阻为  $R_1 = 8\Omega$ , 第 2 行的支路等效电阻为  $R_2 = 12\Omega$ , A, B 间上半部电路的等效电阻  $R_{AB上} = 8 + \frac{8 \times 12}{8 + 12} = 12.8\Omega$

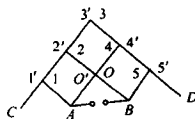
$$\text{通过 } CD \text{ 间导线的电流为 } I_{CD} = \frac{U}{R_{AB上}} \times \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5.7}{12.8} \times \frac{12}{20} = 0.267(\text{A})$$

**例 3** “220V, 100W”的白炽灯泡 A 和“220V, 60W”的白炽灯泡 B 的伏安特性曲线如图 10-1-2 所示.

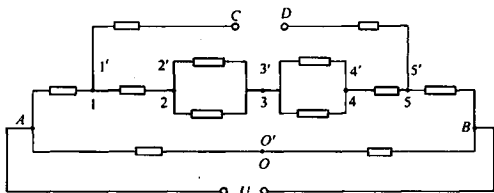
(1) 若将两灯泡并联接在 110V 的电源上时, 两灯泡实际消耗的电功率分别为  $P_A =$



图(a)



图(b)



图(c)

\_\_\_\_\_,  $P_B =$  \_\_\_\_\_.

(2)若将两灯泡串联接在 220V 的电源上时, 两灯泡实际消耗的电功率分别为  $P'_A =$  \_\_\_\_\_,  $P'_B =$  \_\_\_\_\_.

**分析与解** (1)因灯丝的电阻在不同温度下阻值并不相同, 欧姆定律不适用.

两灯泡是并联接在 110V 的电源上, 所以 A、B 两灯泡的电压相等. 在图(a)上: 110V 处作平行于电流轴的直线, 和 A、B 两曲线交于两点, 其对应的电流强度分别为  $I_A = 0.36A$ ,  $I_B = 0.22A$ , 即为两灯并联在 110V 电源上时通过两灯的实际电流值. 此时两灯实际消耗的功率为:  $P_A = I_A U =$

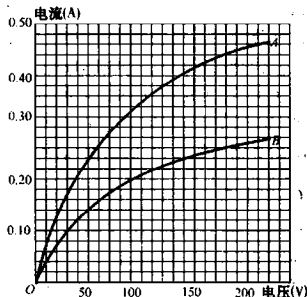
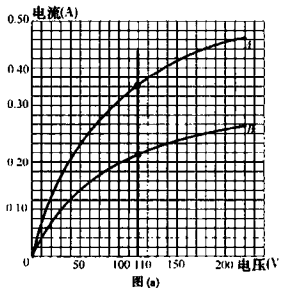
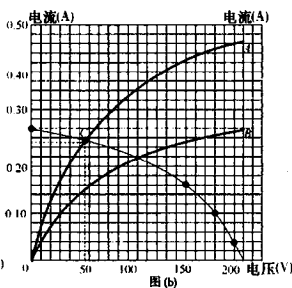


图 10-1-2



图(a)



图(b)

40W,  $P_B = I_B U = 24W$

(2)当两灯泡串联接在 220V 的电源上时, 通过两灯的电流强度相等, 并且两灯上的电压之和为 220V. 所以取 (0, 220V) 为新坐标系的原点, 作出 B 曲线的反转曲线, 两曲线相交于 C 点, 如图(b)所示. 得  $I = 0.245A$ ,  $U_A = 55V$ , 则  $U_B = 165V$ . 此时 A、B 两灯的消耗功率分别为:  $P'_A = I U_A = 13.5W$ ,  $P'_B = I U_B = 40.4W$

**例 4** 如图 10-1-3 所示的电路中,  $R_1 = R_3 = R_5 = \dots = R_{99} = 5\Omega$ ,  $R_2 = R_4 = R_6 = \dots = R_{98} = 10\Omega$ ,  $R_{100} = 5\Omega$ ,  $\mathcal{E} = 10V$ , 内阻不计. (1)求  $R_2$  上的电功率; (2)找出各电阻上电功率的分配规律.

**分析与解** (1)从最右端的“格子”看去, 不难得知每个“格子”的等效电阻均为  $5\Omega$ , 故整个网络的总电阻为  $10\Omega$ .  $I_{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{总}}} = \frac{10}{10} = 1(A)$ ,  $I_2 = \frac{I_{\mathcal{E}}}{2} = 0.5(A)$ , 则

$$P_2 = I_2^2 R_2 = 2.5(W)$$

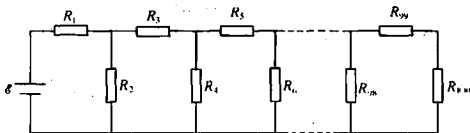


图 10-1-3

(2)各电阻上电流分配关系:奇数号电阻上的电流通式为  $I_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}} A$ , 奇号电阻的阻值为  $R_{2n-1} = 5\Omega$ , 则功率  $P_{2n-1} = I_{2n-1}^2 \cdot R_{2n-1} = \frac{5}{2^{2n-2}} (W)$  ( $n$  取自 1 至 50)

偶号电阻上电流通式为  $I_{2m} = \frac{1}{2^m} A$ , 阻值  $R_{2m} = 10\Omega$ , 则功率

$$P_{2m} = I_{2m}^2 \cdot R_{2m} = \frac{5}{2^{2m-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2^{2m-2}} (W) \quad (m \text{ 取自 } 1 \text{ 至 } 49)$$

从上述奇、偶号电阻上的功率表达式可看出,两者功率相差一半,整体构成一个等比数列,因此合并得  $P_k = \frac{5}{2^{k-1}} (W)$  ( $k = 1, 2, 3, 4, \dots, 99$ )

又因为  $R_{100} = R_{99}$ ,  $I_{100} = I_{99}$ , 所以  $P_{100} = P_{99} = \frac{5}{2^{98}} (W)$ .

### 【巩固习题】

1. 求在下列情况下通过导体横截面的电荷量。

(1) 电流强度在 10s 内均匀地从 0 增加到 3A;

(2) 电流强度从 18A 起,每经过 0.01s 减少一半,一直降到零。

2. 如图 10-1-4 所示,一段长为  $l$ , 横截面积为  $S$  的

均匀导体,其电阻率与图中  $x$  的关系是  $\rho = \rho_0(1 + \frac{x}{l})$ ,

求这段导体的电阻。

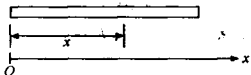


图 10-1-4

3. 有一条长 350km 的海底电缆 AB, 现发现由于其

绝缘外皮在某处受到外来损伤导致绝缘性能变坏,为探查其受损地点,现作如下测量:

① 使 B 端开路,在 A 端与地之间接入 200V 的恒定电压,测得 B 端对地的电压为 40V;

② 使 A 端开路,在 B 端与地之间接入 200V 的恒定电压,测得 A 端对地的电压为 50V.

你能根据以上测量结果计算出破损地点距 A 端的距离吗?

4. 如图 10-1-5 所示,  $P$  为一块均匀的半圆形薄片电阻合金片. 先将它按图(a)的方式接在电极 A、B 之间,测得它的电阻为  $R$ . 然后再将它按图(b)的方式接在电极 C、D 之间,这时  $P$  的电阻值为多少?

5. 铂电阻温度计在  $0^{\circ}\text{C}$  时的阻值为  $200.0\Omega$ , 当浸入正在熔化的三氯化锡中时, 阻值变为  $257.6\Omega$ , 求三氯化锡的熔点. 已知电阻的温度系数  $\alpha = 0.00392^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

6. 一个小灯泡伏安特性曲线如图 10-1-6 所示, 将它接在电压  $U_{AB} = 8\text{V}$  的电路中, 电路还串有  $R_2 = 8\Omega$  的一个电阻. 求此时灯泡两端的实际电压和流过灯泡的电流强度.

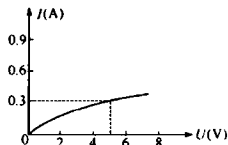


图 10-1-6



图 10-1-7

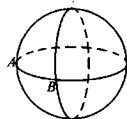


图 10-1-8

7. 如图 10-1-7 所示的方格导线网, 每边电阻均为  $r$ , 计算  $A$  和  $B$  两点间的电阻  $R_{AB}$ .

8. 三个相同的金属圈两两正交地连成如图 10-1-8 所示的形状, 若每一金属圈的原电阻为  $R$ , 试求图中  $A, B$  两点间的等效电阻  $R_{AB}$ .

9. 如图 10-1-9 所示, 分压电路的端电压为  $U = 6\text{V}$ , 电灯泡  $R_L$  上标有“ $4\text{V}, 4\text{W}$ ”, 滑动变阻器  $ab$  的总电阻  $R_{ab} = 13.5\Omega$ , 当滑动触头滑至  $C$  处时, 电灯恰能正常发光. 求此时滑动变阻器  $R_{ab}$  上消耗的总功率.

10. 如图 10-1-10 所示, 已知  $c, d$  间电压是  $0.1\text{V}$ , 则  $a, b$  端输入电压为多少伏? 如果  $c, d$  间电阻  $R$  所消耗的功率是  $0.1\text{W}$ , 则  $a, b$  两端输入的总功率是多少?

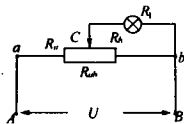


图 10-1-9

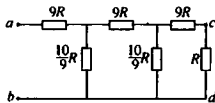


图 10-1-10

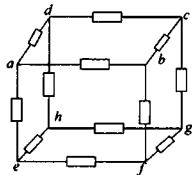


图 10-1-11

11. 由十二个相同的电阻连接成一个正方体框架, 若每个电阻的阻值均为  $R$ , 问从立方体的八个顶点中的任意两个顶点测量时, 立方体的总电阻各等于多少?

## 第二节 含源电路的欧姆定律

### 【知识要点】

#### 一、含源电路的欧姆定律

当导体内部含有电源时,其电流与电压的关系服从另一规律,称为含源电路欧姆定律。

如图 10-2-1 所示含有电源的电路,称之为含源电路。电路中每一点都有稳定的电势,任意两点间都有稳定的电势差。假定电流方向为从  $a$  到  $b$ ,则经过  $\mathcal{E}_1$  后,电势降低  $\mathcal{E}_1$ (因电源  $\mathcal{E}_1$  参与充电);经过  $\mathcal{E}_2$  后,电势升高  $\mathcal{E}_2$ (因电源  $\mathcal{E}_2$  参与放电)。得含源电路的欧姆定律为

$$U_a - \mathcal{E}_1 - Ir_1 - IR + \mathcal{E}_2 - Ir_2 = U_b$$

$$U_a - U_b = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + Ir_1 + Ir_2 + IR$$

注意:(1)  $U_a - U_b$  就表示从  $a$  到  $b$  电势降低的值。

(2) 电路元件上电势降的正、负符号规定。

当从电路中的一点到另一点的走向确定后,如果支路上的电流流向和走向一致,该支路电阻元件上的电势降取正号,反之取负号。

当支路上电源电动势的方向(规定从电源的负极指向电源正极)和走向一致时,电源的电势降为电源电动势的负值(电源内阻视为支路电阻),反之取正值。

#### 二、闭合电路欧姆定律

若图 10-2-1 中的  $a, b$  两点用导线相连,则此电路称之为闭合电路。按上述方法得

$$U_a - \mathcal{E}_1 - Ir_1 - IR + \mathcal{E}_2 - Ir_2 = U_a$$

$$-\mathcal{E}_1 - Ir_1 - IR + \mathcal{E}_2 - Ir_2 = 0$$

上式说明在电路中的任意一个闭合回路上,电势降的代数和等于零。

符号规定同上,只不过前述两点间的走向要改为闭合回路的绕行方向。

#### 三、基尔霍夫定律

对于无法简单地运用串、并联规则来求解的复杂电路,可以根据基尔霍夫大定律列方程组来进行求解。

##### 1. 基尔霍夫第一定律——节点定律

流入电路任一节点(三条以上支路汇合点)的电流强度之和等于流出该节点的电流强度之和。

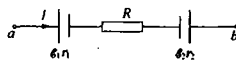


图 10-2-1

显然节点定律是电流连续性原理的必然结果.若某复杂电路有  $n$  个节点,但只有  $(n-1)$  个独立的方程式.

## 2. 基尔霍夫第二定律——回路定律

对于电路中任一回路,沿回路环绕一周,电势降落的代数和为零.

若某复杂电路有  $m$  个独立回路,就可写出  $m$  个独立方程式.

用基尔霍夫定律来解决分支电路的问题时,还应注意:①独立方程的个数应等于所求的未知数的个数;②每支路上的电流方向可以任意假定,解出的结果如为负值,即说明电流的实际的方向与所假定的方向相反.

基尔霍夫定律分别阐明了电荷流动时的电量守恒定律和能量守恒定律,在解决实际问题中起着重要的作用.

### 【例题分析】

**例 1** 如图 10-2-2 所示,  $\mathcal{E}_1 = 12\text{V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 8\text{V}$ ,  $r_1 = 1\Omega$ ,  $r_2 = 0.5\Omega$ ,  $R_1 = 3\Omega$ ,  $R_2 = 1.5\Omega$ ,  $R_3 = 4\Omega$ , 求通过各个电阻的电流.

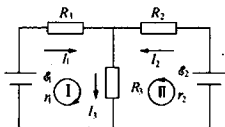


图 10-2-2

**分析与解** 设通过电阻  $R_1$  的电流为  $I_1$ , 方向向右, 通过电阻  $R_2$  的电流为  $I_2$ , 方向向左, 如图所示. 则根据节点电流方程, 通过  $R_3$  的电流  $I_3 = I_1 + I_2$ , 方向向下, 图中的 I、II 是所取的两个回路的绕向.

在回路 I 中, 根据回路电压方程  $-\mathcal{E}_1 + I_1 r_1 + I_1 R_1 + (I_1 + I_2) R_3 = 0$

在回路 II 中, 根据回路电压方程  $-\mathcal{E}_2 + I_2 r_2 + I_2 R_2 + (I_1 + I_2) R_3 = 0$

将上述两式联立, 可解得  $I_1 = 1.25\text{A}$ ,  $I_2 = 0.5\text{A}$ ,  $I_3 = 1.75\text{A}$

**例 2** 如图 10-2-3 所示, 7 个相同的电阻  $R$  构成一个二端电阻网络. 试求  $A, B$  两点之间的等效电阻  $R_{AB}$ .

**分析与解** 如图 10-2-4 所示, 设电流  $I$  从  $A$  点流入, 从  $B$  点流出. 设  $A, C$  间的电流为  $I_1$ , 则  $A, E$  间的电流为  $I - I_1$ , 根据对称性, 因  $C, D$  间的电流是  $I_1$ , 故  $E, F$  间的电流也是  $I_1$ . 则  $D, E$  间的电流是  $I - 2I_1$ . 同理, 因  $A, E$  间的电流是  $I - I_1$ , 故  $D, B$  间的电流也是  $I - I_1$ . 各部分电流的方向如图 10-2-4 所示.

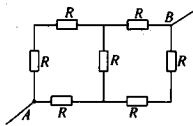


图 10-2-3

选定  $A, D$  两点, 因  $U_{ACD} = U_{AED}$ , 有

$$I_1 \cdot 2R = (I - I_1)R + (I - 2I_1)R, \text{ 得}$$

$$I_1 = \frac{2}{5}I$$

再选  $A, B$  两点, 列出  $U_{ACDB}$  为:



$$U_{ACDB} = I_1 \cdot 2R + (I - I_1)R$$

$$\text{则 } U_{ACDB} = \frac{7}{5}IR, \text{ 而 } U_{AB} = U_{ACDB}$$

$$\text{所以有 } R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{7}{5}R$$

进一步思考:若本题中的电阻全部改成相同电容  $C$ ,问  $A$ 、 $B$  间等效电容为多少?

可用类比方法来思考该问题,电阻  $R$  和电容  $C$  都是元件的特性,它们的定义分别是

$$R = \frac{U}{I} \quad ①$$

$$C = \frac{Q}{U} \quad ②$$

$$\text{把②式变换成 } \frac{1}{C} = \frac{U}{Q} \quad ③$$

①与③比较,可以发现  $R$  与  $\frac{1}{C}$  可类比,  $I$  与  $Q$  可类比.前面所述规律均可移植到电容上.因此等效电容  $C_{AB} = \frac{5}{7}C$ .

**例 3** 平面的无穷方格电阻丝网络如图 10-2-5 所示,其中每一小段电阻丝的电阻均为  $r$ ,试求相邻两个格点  $A$ 、 $B$  间的等效电阻  $R_{AB}$ .

**分析与解** 设电流  $I$  从  $A$  点流入但不从  $B$  点流出,而是沿四个方向流向无穷远处.由对称性可知,在这一过程中,有  $\frac{I}{4}$  的电流流经  $AB$  段;再设电流  $I$  不是从  $A$  点流入,而是从四周无穷远对称地流来,并从  $B$  点流出,根据对称性可知此过程中

也有  $\frac{I}{4}$  的电流流经  $AB$  段.电流  $I$  从  $A$  点流入,最后从  $B$  点流出的流动方式,实为上述两假设过程的叠加.于是  $A$  到  $B$  的电流为

$$\frac{I}{4} + \frac{I}{4} = \frac{I}{2}$$

$$U_{AB} = \frac{I}{2} \cdot r$$

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{r}{2}$$

( $R_{AC} = \frac{2}{3}r$ ,由同学们自己解答)

**例 4** 证明图(a)中的 Y 形电阻网络与图(b)中的  $\Delta$  形电阻网络的等效变换关系为

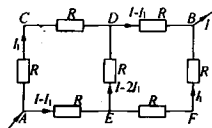


图 10-2-4

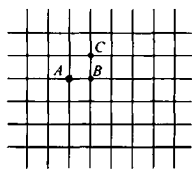
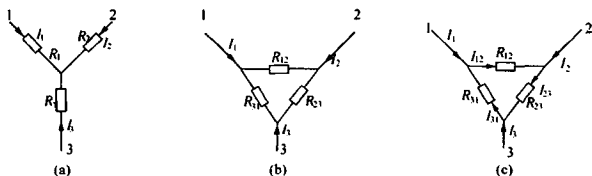


图 10-2-5



$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \\ R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \\ R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \end{cases}$$

**分析与证明** 设流经电阻  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$  的电流分别为  $I_{12}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{31}$ , 方向如图所示. 对图(a)中的Y形网络有

$$\begin{cases} I_1 R_1 - I_2 R_2 = U_{12} \\ I_3 R_3 - I_1 R_1 = U_{31} \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

解得

$$I_1 = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} U_{12} - \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} U_{31}$$

对于图(b)中的△形网络有

$$\begin{cases} I_{12} = \frac{U_{12}}{R_{12}} \\ I_{31} = \frac{U_{31}}{R_{31}} \\ I_1 + I_{31} = I_{12} \end{cases}$$

解得

$$I_1 = \frac{U_{12}}{R_{12}} - \frac{U_{31}}{R_{31}}, \quad \text{所以有}$$

$$\frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} U_{12} - \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} U_{31} = \frac{U_{12}}{R_{12}} - \frac{U_{31}}{R_{31}}$$

由于式中各对应项的系数相等, 故有  $R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$ ,

$$R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}, \quad \text{同理 } R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

以上证明了由Y形网络变成△形网络电阻之间等效关系.

在上面三个等效变换关系式中, 将  $R_{12}$ ,  $R_{31}$ ,  $R_{23}$  作为已知量, 就可解出  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ .

用上述变换关系,请同学们再求一下例2中的等效电阻。

### 【巩固习题】

1. 如图 10-2-6 所示,  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 3\Omega$ ,  $\mathcal{E} = 4V$ ,  $r = 1\Omega$ , 若电流由  $B$  流入,  $A$  流出,  $R_1$  的消耗功率为  $0.5W$ , 求  $U_D$ 。

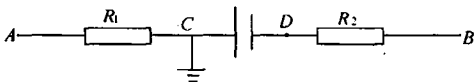


图 10-2-6

2. 如图 10-2-7 所示,  $\mathcal{E}_1 = 12V$ ,  $\mathcal{E}_2 = 10V$ ,  $\mathcal{E}_3 = 8V$ ,  $r_1 = r_2 = r_3 = 1\Omega$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\Omega$ ,  $R_5 = 3\Omega$ . 求: (1)  $a, b$  间的电势差; (2)  $c, d$  间的电势差。

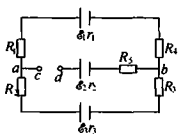


图 10-2-7

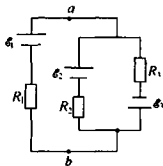


图 10-2-8

3. 如图 10-2-8 所示的电路中, 已知  $\mathcal{E}_1 = 3.0V$ ,  $\mathcal{E}_2 = 1.5V$ ,  $\mathcal{E}_3 = 2.2V$ ,  $R_1 = 1.5\Omega$ ,  $R_2 = 2.0\Omega$ ,  $R_3 = 1\Omega$ , 电源内阻不计, 求  $U_{ab}$ 。

4. 有一无限平面导体网络, 它由大小相同的正六边形网眼组成, 如图 10-2-9 所示。所有六边形每边的电阻均为  $R$ . 求 (1) 结点  $a, b$  间的电阻; (2) 如果有电流  $I$  从  $a$  点流入网络, 由  $g$  点流出网络, 那么流过  $de$  段电阻的电流  $I_{de}$  为多大?

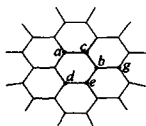


图 10-2-9

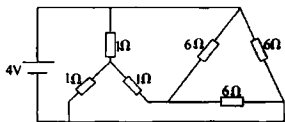


图 10-2-10

5. 试求如图 10-2-10 所示电路中的电流  $I$ . (电池内阻不计)
6. 10 根电阻值均为  $R$  的电阻丝连接成如图 10-2-11 所示的电阻网络, 试求  $A, B$  之间的等效电阻  $R_{AB}$ 。

7. 如图 10-2-12 所示电路中,  $\mathcal{E}_1 = 12\text{V}$ ,  $r_1 = 0.1\Omega$ ,  $\mathcal{E}_2 = 6\text{V}$ ,  $r_2 = 0.05\Omega$ ,  $R_1 = 5.9\Omega$ ,  $R_2 = 2.45\Omega$ ,  $R_3 = 3.00\Omega$ ,  $R_4 = 2.00\Omega$ ,  $R_5 = 1.00\Omega$ . 求电阻  $R_5$  两端的电压.

8. 直流电源, 电容网络如图 10-2-13 所示, 求电容  $C_1, C_2, C_3$  的各自电量  $Q_1, Q_2, Q_3$ , 各支路电量从正到负的方向已设定如图所示.

9. 由同种材料制成的截面相同的均匀导线组成一个四面体骨架, 其每边长度在图 10-2-14 中已标出, 试求  $A, B$  间等效电阻.

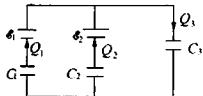


图 10-2-13

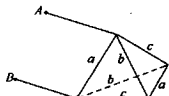


图 10-2-14

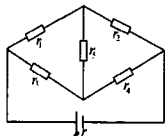


图 10-2-15

10. 在如图 10-2-15 所示的电路中, 若电源电动势  $\mathcal{E} = 1.5\text{V}$ , 电源内阻  $r = 0.1\Omega$ ,  $r_1 = 1\Omega$ ,  $r_2 = 1.6\Omega$ ,  $r_3 = r_5 = 2\Omega$ ,  $r_4 = 1.2\Omega$ . 试求总电流及各分支电流.

### 第三节 电动势



#### 【知识要点】

#### 一、电源的电动势、输出功率、电池组

##### 1. 电动势

电动势反映电源把其他形式的能转化为电能本领的物理量, 用  $\mathcal{E}$  表示, 其大小定义为非静电力把单位正电荷从电源负极移到正极所做的功, 即  $\mathcal{E} = \frac{W_{\text{非}}}{q}$ , 单位为伏 (V).

在闭合电路中, 电源的电动势等于外电压 (路端电压) 与内电压之和.

##### 2. 输出功率

电源的输出功率是指通过外电路的电流强度  $I$  与路端电压  $U$  的乘积, 即  $P_{\text{出}} = IU$ . 如图所示,  $P_{\text{出}} = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(r+R)^2} R = \frac{\mathcal{E}^2}{\frac{(R-r)^2}{R} + 4r}$ , 当  $R =$



$r$  时,  $P_{\text{出}}$  有最大值即  $P_m = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$ .  $P_{\text{出}}$  与外电阻  $R$  的这种函数关系可用图 10-3-1 定性地表示.

电源的效率是电源的输出功率与电源的总功率之比.  $\eta = \dots$

$$\frac{I^2 R}{I^2(R+r)} \times 100\% = \frac{R}{R+r} \times 100\%, \text{ 因此当 } R \text{ 增大时, } \eta \text{ 提高, 当 } R = r \text{ 时, 电源有最大输出功率, 但效率仅为 } 50\%.$$

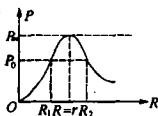


图 10-3-1

### 3. 电池组

把  $n$  个电动势都是  $\mathcal{E}$ 、内电阻都是  $r$  的电池串联起来, 所得串联电池组的电动势和内阻分别为  $\mathcal{E}_{串} = n\mathcal{E}$ ,  $r_{串} = nr$ . 当用电器的额定电压高于单个电池的电动势时, 可以用串联电池组供电. 但这时全部电流要通过每个电池, 所以用电器的额定电流必须小于单个电池允许通过的最大电流.

把  $n$  个电动势都是  $\mathcal{E}$ 、内电阻都是  $r$  的电池并联起来, 所得的并联电池组的电动势和内电阻分别为:  $\mathcal{E}_{并} = \mathcal{E}$ ,  $r_{并} = \frac{r}{n}$ . 当用电器的额定电流比单个电池允许通过的最大电流大时, 可以采用并联电池组供电. 但这时用电器的额定电压必须低于单个电池的电动势.

若上述两种情况都不满足, 可用混联电池组.

## 二、叠加原理, 等效电压源与等效电流源

用基尔霍夫方程组计算直流电路问题需要求解代数方程组, 虽然不难, 但如果电路复杂, 方程很多, 则运算繁, 易出错. 现介绍求解直流电路中广泛应用的叠加原理、等效电源定理的等效方法. 对于不同类型和特点的电路问题, 适当选用上述定理和方法, 可使计算大为简化.

### 1. 叠加原理

若电路中有多个电源, 通过电路中任一支路的电流等于电路中各个电动势单独存在时在该支路上产生的电流之代数和. 这与力学中常用的“力的独立作用原理”极为相似.

应用时要注意, 当单独考虑某一电源的作用时, 将其他电压源的电动势用内电阻代替, 若电源为理想电压源(即内阻等于零), 则将电源短路; 同时, 若电源为电流源, 则将电流源开路用内电阻代替, 若为理想电流源(其内阻无限大), 将电流源开路即可.

### 2. 等效电源定理

#### (1) 等效电压源定理(戴维宁定理)

两端有源网络可等效于一个电压源, 其电动势等于网络的开路端电压, 内阻等于从网络两端看除电源(即将电动势短路)网络的电阻.

#### (2) 等效电流源定理(诺尔顿定理)

两端有源网络可等效于一个电流源, 电流源的  $I_0$  等于网络两端短路时流经两端点的电流, 内阻等于从网络两端看除电源网络的电阻.

## 【例题分析】

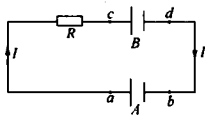


图 10-3-2

例 1 在如图 10-3-2 所示的电路中, 电池 A 的电动势  $\mathcal{E}_A = 24\text{V}$ , 内电阻  $r_A = 2\Omega$ , 电池 B 的电动势  $\mathcal{E}_B = 12\text{V}$ , 内电阻  $r_B = 1\Omega$ , 而外电阻  $R = 3\Omega$ . 试计算: (1) 电路中的电流; (2) 电池 A 的端电压  $U_{ab}$ ; (3) 电池 B 的端电压  $U_{cd}$ ; (4) 电池 A 所消耗的化学能功率以及所输出的有效功率; (5) 输入电池 B 的功率以及转变成化学能的功率; (6) 电阻 R 所产生的热功率.

分析与解 (1) 应用闭合电路的欧姆定律, 得

$$I = \frac{\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B}{R + r_A + r_B} = \frac{24 - 12}{3 + 2 + 1} = 2(\text{A})$$

方向如图示所指方向.

(2) 设所选定的顺序方向自 b 经过电池 A 而到 a, 根据一段含源电路的欧姆定律得

$$U_{ba} = Ir_A - \mathcal{E}_A = 2 \times 2 - 24 = -20(\text{V})$$

负号表示 a 点的电势高于 b 点的电势 20V.

(3) 同理可得

$$U_{cd} = Ir_B + \mathcal{E}_B = 2 \times 1 + 12 = 14(\text{V})$$

(4) 电池 A 的化学能功率  $P_1 = I\mathcal{E}_A = 2 \times 24 = 48(\text{W})$ , 而其输出功率  $P_2 = IU_{ab} = 2 \times 20 = 40(\text{W})$ , 消耗在内电阻的功率  $P_3 = I^2 r_A = 2^2 \times 2 = 8(\text{W}) = P_1 - P_2$ .

(5) 同理可得, 输入电池 B 的功率  $P_4 = 28\text{W}$ , 变为化学能的功率  $P_5 = 24\text{W}$ , 消耗在内电阻的功率  $P_6 = 4\text{W}$ .

(6) 电阻 R 上的热功率  $P_7 = I^2 R = 2^2 \times 3 = 12(\text{W})$ .

例 2 如图 10-3-3 所示的电路中,  $\mathcal{E}_1 = 3\text{V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 1.0\text{V}$ ,  $r_1 = 0.5\Omega$ ,  $r_2 = 1.0\Omega$ ,  $R_1 = 10.0\Omega$ ,  $R_2 = 5.0\Omega$ ,  $R_3 = 4.5\Omega$ ,  $R_4 = 19.0\Omega$ . (1) 试用等效电压源定理计算从电源 ( $\mathcal{E}_2, r_2$ ) 正极流出的电流  $I_2$ ; (2) 试用等效电流源定理计算从节点 B 流向节点 A 的电流  $I_1$ .

分析与解 (1) 将原电路中的 ABCDE 部分等效为一个电压源, 其电动势和内电阻分别记为  $\mathcal{E}_0, r_0$ , 如图(a)所示. 由等效电压源定理, 应有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \frac{R_1}{r_1 + R_1 + R_2 + R_3} \mathcal{E}_1 = 1.5(\text{V}) \\ r_0 &= \frac{R_1(r_1 + R_2 + R_3)}{R_1 + r_1 + R_2 + R_3} = 5(\Omega) \end{aligned}$$

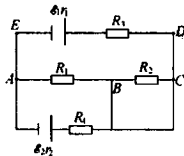
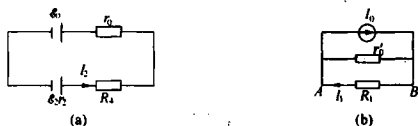


图 10-3-3



由闭合电路欧姆定律得  $I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{r_2 + R_1 + r_0} = -0.02(\text{A})$

$I_2$  为负值, 表明真实的电流方向从电源  $\mathcal{E}_2$  的负极流出。

(2) 将原电路中 A、B 两个节点短接, 构成的等效电流源 ( $I_0, r'_0$ ), 如图 (b) 所示。由等效电流源定理,  $I_0$  为原电路流经 A、B 短接后的支路电流, 利用线性叠加原理可得

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R_3 + R_2} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2 + R_4} = 0.35(\text{A})$$

$r'_0$  则等于从 A、B 两节点看原电路除去电源电动势和 A、B 间电阻的网络电阻, 为

$$r'_0 = \frac{(r_1 + R_3 + R_2)(r_2 + R_4)}{(r_1 + R_3 + R_2) + (r_2 + R_4)} = 6.7(\Omega)$$

由  $r'_0$  和  $R_1$  之间的分流关系, 得  $I_1 = \frac{r'_0}{r'_0 + R_1} I_0 = 0.14(\text{A})$

**例 3** 如图 10-3-4 所示的甲、乙两个电路中电源电动势  $\mathcal{E}$  和内电阻  $r$  已知, 定值电阻  $R_0$  已知, 求电阻  $R$  调至多大时,  $R$  上获得的电功率最大, 其最大值为多少? 电源在什么条件下输出功率最大?



图 10-3-4

**分析与解** 应用等效电压源, 把图 (甲)、(乙) 分别等效成图 (1)、(2)。其中  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$ ,  $r_1 = r + R_0$ ,

$$\mathcal{E}_2 = \frac{R_0}{r + R_0} \mathcal{E}, \quad r_2 = \frac{rR_0}{r + R_0}$$

因此对图 (甲), 当  $R = r_1 = r + R_0$  时,  $R$  上获得的功率

最大, 其值为  $P_{\text{甲}} = \frac{\mathcal{E}_1^2}{4r_1} = \frac{\mathcal{E}^2}{4(r + R_0)}$

对图 (乙), 当  $R = r_2 = \frac{rR_0}{r + R_0}$  时,  $R$  上获得的功率最大, 其值为  $P_{\text{乙}} = \frac{\mathcal{E}_2^2}{4r_2} =$

$$\frac{R_0 \mathcal{E}}{4r(r+R_0)}$$

为了求出电源的最大功率(即外电路得到的电功率),只要把  $R_0$  与  $R$  看成一个整体即可求。

对于图(甲),当  $R = R_0 - r$  时,电源有最大输出功率。

对于图(乙),当  $r = \frac{R_0 R}{R_0 + R}$ , 即  $R = \frac{r R_0}{R_0 + r}$  时,电源有最大输出功率。

上述两种情况下,电源的最大输出功率都为  $\frac{\mathcal{E}^2}{4r}$ 。

**例 4** 如图 10-3-5 所示,由电动势  $\mathcal{E} = 6\text{V}$ 、内阻不计的蓄电池向电阻  $R_0 = 20\Omega$ 、额定电压  $U_0 = 4.5\text{V}$  的灯泡供电。(1)用滑线变阻器按照电位计方式向灯泡提供额定电压。要使系统的效率不低于  $\eta = 0.6$ ,问变阻器的阻值及它应承受的最大电流是多少?(2)处于额定电压下的灯泡和蓄电池的最大可能效率是多少?它们同适当选择的变阻器应如何进行连接,才能取得最大效率?

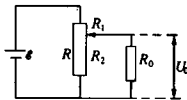


图 10-3-5

**解** (1)所谓效率是指灯泡消耗功率  $P_0 = U_0^2/R_0$  与电源消耗的功率  $P = I\mathcal{E}$  之比。因  $U_0, R_0, \mathcal{E}$  为定值,故

$$\eta \propto \frac{1}{I} \quad (1)$$

这说明  $I$  与  $1/\eta$  成正比关系。若能知道比例系数,就能求出在最小效率 0.6 时的最大电流。由图可见总电流强度

$$I = \frac{U_0}{R_0} + \frac{U_0}{R_2} \quad (2)$$

$$\text{而 } \mathcal{E} = IR_1 + U_0 \quad (3)$$

$$\text{故 } \eta = P_0/P = U_0^2/R_0 \mathcal{E} I \quad (4)$$

$$I = \frac{U_0^2}{R_0 \mathcal{E} \eta} \quad (5)$$

$$\text{设 } \eta_0 = 0.6 \text{ 时的电流强度为 } I(\eta_0), \text{ 则 } I(\eta_0) = \frac{U_0^2}{R_0 \mathcal{E} \eta_0} = 0.281(\text{A}) \quad (6)$$

当  $\eta > \eta_0$  时,  $I(\eta) < I(\eta_0)$ , 故变阻器承受的最大电流为  $I(\eta_0) = 0.281\text{A}$ 。

下面来求出最大电流时的变阻器电阻阻值。由③、④式可得

$$R_1 = R_0 \frac{\mathcal{E}}{U_0} \left( \frac{\mathcal{E}}{U_0} - 1 \right) \eta \quad (7)$$

这说明  $R_1$  与  $\eta$  成正比关系。由②、④式可得



$$R_2 = R_0 \left( \frac{U_0}{\eta \mathcal{E}} - 1 \right) \quad \text{或} \quad \eta = \frac{U_0}{\mathcal{E} \left( 1 + R_0/R_2 \right)} \quad (8)$$

这是  $R_2$  与  $\eta$  的函数关系。设变阻器的总电阻为  $R = R_1 + R_2$ ，现将⑦、⑧式之左式代入，可得

$$R = R_0 \frac{\mathcal{E}}{U_0} \left( \frac{\mathcal{E}}{U_0} - 1 \right) \eta + R_0 \left( \frac{U_0}{\eta \mathcal{E}} - 1 \right) = \text{常数} \cdot \eta + \frac{\text{常数}}{\text{常数}/\eta - 1} \quad (9)$$

当  $\eta = \eta_0 = 0.6$  时， $R(\eta_0) = 8.53 \Omega$ 。由⑦式可见， $R_1$  随  $\eta$  线性增加；又注意到  $1 > \eta > 0$ ，故从⑧式知，当  $\eta$  增加时  $R_2$  增加，这说明  $\eta$  随总电阻  $R$  的单调增加。现要求  $\eta \geq \eta_0 = 0.6$ ，故  $R(\eta_0) = 8.53 \Omega$  是满足此条件的最小电阻。又由①式可知  $I(\eta_0) = 0.281 \text{ A}$  是最大电流。

(2) 比较①、⑦、⑧式这些  $\eta$  的函数表达式，可发现利用⑧式中的右边式子讨论  $\eta_{\max}$

较为方便。由⑧式知，当  $R_2 \rightarrow \infty$  时， $\eta = \eta_{\max} = \frac{U_0}{\mathcal{E}} = 0.75$  (10)

这时由⑦式可得  $R_1 = \eta_{\max} \frac{\mathcal{E}}{U_0} \left( \frac{\mathcal{E}}{U_0} - 1 \right) R_0 = 0.67(\Omega)$

由①式知，当  $\eta = \eta_{\max}$  时， $I = I_{\min}$ 。又由②式可知，只有当  $R_0 \rightarrow \infty$  时才存在  $I_{\min}$ ，故

$$I = I_{\min} = \frac{U_0}{R_0} = 2.25(\text{A})$$

$R_2 \rightarrow \infty$  意味着变阻器一端断开， $R_1$  与  $R_0$  直接串联，如图

10-3-6 所示。



### 【巩固习题】

1. 功率为  $150 \text{ W}$ ，工作电压  $U = 15 \text{ V}$  的直流电动机，用电动势  $\mathcal{E} = 1.5 \text{ V}$ ，内阻  $r = 0.45 \Omega$  的电池供电，为使电机按设计参数正常运转，最少需要多少个电池？应把它们怎样连接起来？

2. 如图 10-3-7 所示电路，电源内阻不计，当电动势  $\mathcal{E}_1$  减小  $1.5 \text{ V}$  以后，怎样改变电动势  $\mathcal{E}_2$  使流经电池  $\mathcal{E}_2$  的电流强度与  $\mathcal{E}_1$  改变前流经  $\mathcal{E}_2$  的电流强度相同？

3. 有一台内阻损耗都不计的直流发电机，其定子的磁场恒定，先把它的电枢(转子)线圈与一个电阻  $R$  相连，电枢上绕细绳，最后  $m$  物以  $v_1$  匀速下滑，如图 10-3-8(a) 所示。现将一电动势为  $\mathcal{E}$ ，内阻  $r = 0$  的电源如图(b)所示接入，使发电机做电动机用， $m$  不变，求最后重物匀速上升的速率  $v_2$ 。

4. 电动势分别为  $\mathcal{E}_1$  和  $\mathcal{E}_2$ ，内阻  $r_1$  和  $r_2$ ，如图 10-3-9(a) 所示的两个电池，用一个电动势为  $\mathcal{E}$  和内阻为  $r$  的电池，如图(b)所示的电池代替，流过电阻  $R$  的电流强度不

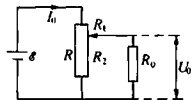


图 10-3-6

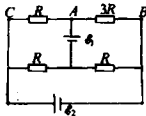


图 10-3-7

变,并且与  $R$  无关,问  $\mathcal{E}$  与  $r$  和  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  与  $r_1, r_2$  应有何关系?

如果开始时不是两个电池,而电动势分别为  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  和内阻分别为  $r_1, r_2, \dots, r_n$  的  $n$  个电池,那么  $\mathcal{E}$  与  $r$  又应以何公式表述?

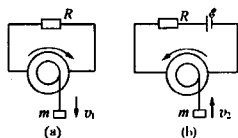


图 10-3-8

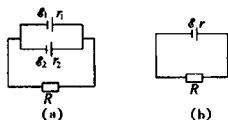


图 10-3-9

5. 把一个“10V, 2W”的纯电阻用电器  $A$  接到某一电动势和内阻都不变的电源上,用电器实际消耗的功率为 2W; 而把一个“10V, 5W”的纯电阻用电器  $B$  接到这一电源上,用电器实际消耗的功率小于 2W. 求满足上述要求的条件。(设用电器的电阻不随温度变化)

6. 如图 10-3-10 所示是伏安法测电源电动势和内电阻的一种接法,假设测量中所有的偶然误差都已排除,试分析这种测法电动势和内电阻测得值与真实值的关系。

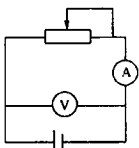


图 10-3-10

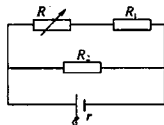


图 10-3-11

7. 如图 10-3-11 所示电路,  $R_1 = 1.2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $\mathcal{E} = 6V$ ,  $r = 1\Omega$ . 问:(1) 变阻器  $R$  调到多大时,变阻器上消耗的功率最大,是多少?(2)  $R$  调到多大时,  $R_1$  上消耗的功率最大? 是多少?

8. 在如图 10-3-12 所示电路中,电源电动势  $\mathcal{E} = 6V$ ,内阻不计.电阻  $R_1 = 20\Omega$ ,  $R_2 = 10\Omega$ ,电容  $C_1 = 200\mu F$ ,  $C_2 = 100\mu F$ . 求电容器充电稳定后,若将  $D, E$  间电键  $S$  闭合,是否有电流通过此电键? 方向如何? 当达到稳定后,电容器  $C_1, C_2$  分别带有多少电量? 在此过程中共有多少电量通过电键  $S$ ?

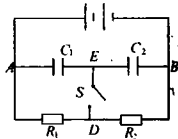


图 10-3-12

9. 图 10-3-13 对蓄电池进行充电的电路,  $A, B$  两端接在充电机的输出端上,蓄电池组的内阻  $r = 2\Omega$ . 指示灯  $L$  的规格为

“6V, 3W”。当可变电阻  $R$  调到  $20\Omega$  时, 指示灯恰能正常发光, 电压表示数为  $52V$  (设电压表是理想的)。试求: (1) 蓄电池的总电动势; (2) 充电机的输出功率; (3) 对蓄电池组的输入功率; (4) 转化为蓄电池组的化学能的功率。

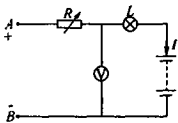


图 10-3-13

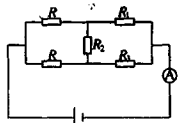


图 10-3-14

10. 如图 10-3-14 所示电路, 各电阻的阻值都是  $1\Omega$ , 安培计和电源的内阻皆可忽略, 电源电压为  $10V$ 。试求: (1) 通过安培计的电流强度; (2) 若两个  $R$  是好电阻, 而  $R_1, R_2, R_3$  是坏电阻, 它们互不相关地时通时断,  $R_1, R_2, R_3$  各自通电的几率都是  $\frac{1}{2}$ , 求电源的平均输出功率。(  $R_1, R_2, R_3$  通电时电阻值仍为  $1\Omega$  )

## 第四节 电表改装

### 【知识要点】

实验室常用的测量电流大小的仪表是磁电式电流表, 用符号  $G$  表示。表头内阻  $R_g$  和满偏电流  $I_g$  是描述表头基本性质的两个重要参数, 表头结构一定, 这两个参数就惟一确定。量程  $I_g$  仅几十微安到几毫安, 内阻  $R_g$  的值约为  $10^2\Omega \sim 10^3\Omega$ 。虽然电流表灵敏, 但却不能满足一般电流的测量。因此, 在实际使用中须对电流表进行改装。同一块表头配合不同的辅助电路可改装成不同用途的电表。

#### 一、将电流表改装成安培表

利用图 10-4-1 并联电路的分流特性, 给  $G$  表并联一个分流电阻  $R$ , 如图所示, 就组成了一个量程为  $I$  的电流表, 其符号为  $A$ 。  $R$

的值计算如下  $I_g R_g = (I - I_g) R$   $R = \frac{I_g R_g}{I - I_g} = \frac{R_g}{\frac{I}{I_g} - 1} = \frac{R_g}{n - 1}$ ,

式中的  $n = \frac{I}{I_g}$  为电流量程扩大比。

若将分流电阻  $R$  分成若干个电阻串联, 则可获得一个多量程测量需要的电流表。如图 10-4-2 所示的是有三个量程的安培表。显然,  $I_1 > I_2 > I_3$ 。

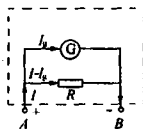


图 10-4-1

## 二、将电流表改装成伏特表

利用串联电路的分压特性,给 G 表串联一个分压电阻  $R$ ,如图 10-4-3 所示,就组成了一个量程为  $U$  的电压表,其符号为 V.  $R$  的值计算如下  $I_g R_g + I_g R = U$

$$R = \frac{U - I_g R_g}{I_g} = \frac{U - I_g R_g}{I_g R_g} \cdot R_g = \frac{U - U_g}{U_g} R_g$$

$$= \left( \frac{U}{U_g} - 1 \right) R_g = (n - 1) R_g$$

式中的  $U_g$  是表头的最大降压;  $n = \frac{U}{U_g}$  为电压量程的扩大比.

若在表头中串入  $n$  个分压电阻,就可改装成不同量程的电压表.如图 10-4-4 所示是有三个量程的电压表.显然  $U_1 < U_2 < U_3$ .

## 三、将电流表改装成欧姆表

能直接测量电阻阻值的仪表叫欧姆表.它是根据闭合电路的欧姆定律制成的,其结构如图 10-4-5 所示.

图 10-4-5 中  $R_0$  是欧姆表调零电阻,测量前,应先将两表笔短接,调  $R_0$  使指针满偏,此时指针的位置定为欧姆表的零点.满偏电流为  $I_g = \frac{\mathcal{E}}{R_g + R_0 + r} = \frac{\mathcal{E}}{R_{内}}$

当待测电阻  $R_x = R_{内}$  时,指针指在表盘中央,此时

$$\frac{I_g}{2} = \frac{\mathcal{E}}{R_{内} + R_x}$$

所以欧姆表的内阻,又叫做中值电阻.

当测量未知电阻  $R_x$  时,通过表头的电流强度  $I_x$  为

$$I_x = \frac{\mathcal{E}}{R_{内} + R_x}$$

显然当两表笔断开时,通过表头电流为零.指针处在  $I = 0$  的位置,此处定为欧姆表的  $\infty$ .

$I_x$  与  $R_x$  有一一对应的关系,但不是正比关系,所以欧姆表表盘刻度是不均匀的.显然是右边疏,左边密.

## 【例题分析】

例 1 图 10-4-6 是一个电压、电流两用表中的两个电流档,量程为  $I_1 = 1\text{mA}$ ,  $I_2 = 500\text{mA}$ ; 一个电压档,量程为  $U = 10\text{V}$ . 已知表头 G 的满偏电流  $I_g = 500\mu\text{A}$ , 内阻  $R_g =$

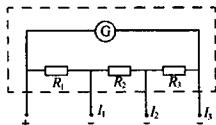


图 10-4-2

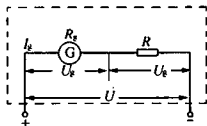


图 10-4-3

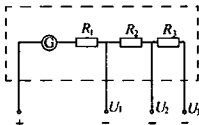


图 10-4-4

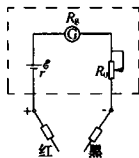


图 10-4-5

600Ω, 求电阻  $R_1$ ,  $R_2$  和  $R_3$  的阻值.

**分析与解** 对电流表量程  $I_1$  档, 电路结构是  $R_1$  和  $R_2$  的串联支路与表头  $R_g$  并联; 对电流表量程  $I_2$  档, 其结构是表头  $R_g$  与电阻  $R_2$  串联后, 再与电阻  $R_1$  并联; 对电压表量程档, 其结构是电阻  $R_1$  和  $R_2$  的串联支路与表头  $R_g$  并联后成为一个“新”的表头, 再与电阻  $R_3$  串联.

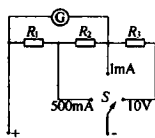


图 10-4-6

$S$  接  $I_1 = 1\text{mA}$  档, 由并联电路特点得

$$I_g R_g = (I - I_g) R = (I - I_g)(R_1 + R_2), \text{ 所以}$$

$$R = \frac{I_g R_g}{I - I_g} = 600(\Omega)$$

$S$  接  $I_2 = 500\text{mA}$  档, 由并联电路特点得

$$I_g (R_g + R_2) = (I_2 - I_g) R_1, R = R_1 + R_2, \text{ 所以}$$

$$R_1 = \frac{I_g (R_g + R)}{I_2} = 1.2(\Omega)$$

$$R_2 = R - R_1 = 598.8(\Omega)$$

$S$  接  $U = 10\text{V}$  档时, “新”表头的满偏电流  $I'_g = I_1 = 1\text{mA}$ , “新”表头的内阻  $R'_g =$

$\frac{R_g R}{R_g + R} = 300(\Omega)$ . “新”表头的满偏电压  $U'_g = I'_g R'_g = 0.3(\text{V})$ . “新”表头与电阻  $R_3$  串联扩

大量程为  $U$ , 根据串联分压原理则有  $U'_g + I'_g R_3 = U$ . 所以  $R_3 = \frac{U - U'_g}{I'_g} = 9.7 \times 10^3(\Omega)$ .

**例 2** 实验室有一个破损的多量程动圈式直流电流计, 有  $1\text{mA}$ ,  $10\text{mA}$  和  $100\text{mA}$  三档, 由一个单刀三掷开关转换, 其内部电路如图 10-4-7 所示. 电流计的表头已烧坏, 无法知道其电特性, 但三个精密分流电阻完好, 且测得  $R_1 = 144\Omega$ . 现有两个表头  $A$  和  $B$ , 外形都与原表头相同. 表头  $A$  的满刻度电流为  $0.2\text{mA}$ , 内阻为  $660\Omega$ ; 表头  $B$  的满刻度电流为  $0.5\text{mA}$ , 内阻为  $120\Omega$ . 试问在保留分流电阻  $R_1$ ,  $R_2$  和  $R_3$  的情况下, 应该用哪个表头修复此电流计? 如何修复?

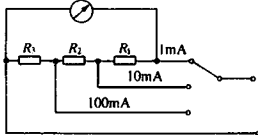


图 10-4-7

**分析与解** 原表头的满刻度电流  $I_0$  和内阻  $r_0$  均未知, 但其间的关系必须保证图 10-4-7 中三档量程分别为  $1\text{mA}$ ,  $10\text{mA}$  和  $100\text{mA}$ , 利用这一条件可确定  $I_0$  与  $r_0$  之间的关系. 两个现成的表头  $A$  和  $B$  中, 凡能保证表头电流  $I_0$  与  $r_0$  之间满足上述关系者, 便可代替原表头修复此电流计.

$$\text{原表头对 } 1\text{mA 档, 可得下述关系式 } \frac{I_0}{1 - I_0} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{r_0}$$

对 10mA 档和 100mA 档,可分别得出  $\frac{I_0}{10 - I_0} = \frac{R_2 + R_3}{r_0 + R_1}$ ,  $\frac{I_0}{100 - I_0} = \frac{R_3}{r_0 + R_1 + R_2}$   
 式中原表头电流  $I_0$  的单位取为 mA,内阻  $r_0$  的单位取为  $\Omega$ .由以上三式消去  $R_2, R_3$ ,利  
 用  $R_1 = 144\Omega$ ,得出  $I_0$  与  $r_0$  之间满足的关系式为  $I_0(r_0 + 160) = 160$

表头 A 的参数为  $I_0 = 0.2\text{mA}$ ,  $r_0 = 660\Omega$ ,因

$$I_0(r_0 + 160) = 0.2 \times (660 + 160) = 164 \neq 160$$

故表头 A 不能在保持  $R_1, R_2$  和  $R_3$  不变的条件下使用.

表头 B 的参数为  $I_0 = 0.5\text{mA}$ ,  $r_0 = 120\Omega$ ,虽然

$$I_0(r_0 + 160) = 0.5 \times (120 + 160) = 140 \neq 160$$

但若将  $r_0$  加上  $40\Omega$ ,使表头 B 的内阻变为  $r'_0 = r_0 + 40 = 160\Omega$ ,即可满足原表头的  $I_0$  与  $r_0$  之间的关系.因此,答案是,表头 B 可用来修复此电流计,办法是将表头 B 与一个  $40\Omega$  的电阻串联后接入原表头的位置即可.

**例 3** 现有一只满偏电流为  $I_g$ 、内阻为  $r$  的半偏向电流表头.试用它及其他一些必要元件,设计出一只顺向刻度欧姆表,画出其线路图并粗略指明其刻度值.

**分析与解** 知识要点中讲到的欧姆表是反向刻度的,而顺向刻度指被测电阻为零时,欧姆表指针不偏转,而被测电阻为  $\infty$  时,欧姆表指针正好满偏,因此电流表与电阻必须并联.图 10-4-8 为顺向刻度欧姆表的线图.

红黑笔短接,即被测电阻为零,其时指针不偏转,刻度为零.

红黑笔分开,即被测电阻为  $\infty$ ,其时调节  $R_1$ ,使指针满刻度,此

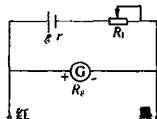


图 10-4-8

时有  $I_g = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r + R_g}$

红黑笔按被测电阻  $R_x$ ,指针偏转  $n$  格,满刻度的格数为  $N$ ,则有

$$I = \frac{n}{N} I_g = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r + \frac{R_g R_x}{R_g + R_x}} \cdot \frac{R_g}{R_g + R_x}$$

令  $R_0 = \frac{(R_1 + r)R_g}{(R_1 + r) + R_g}$ ,则有  $R_x = \frac{nR_0}{N - n}$ . 中点时的被测电阻为  $R_0$ .

**例 4** 欲测电阻  $R$  的值,现有几个标准电阻,一个电池和一只未经标定的电流计,连成如图 10-4-9 所示的电路.第一次与电流计并联的电阻  $r$  为  $50.00\Omega$ ,电流计的示数为 3.9 格;第二次  $r$  改用  $100.00\Omega$ ,电流计的示数为 5.2 格;第三次  $r$  改用  $10.00\Omega$ ,同时将待测电阻  $R$  换成一个  $20.00\text{k}\Omega$  的标准电阻,结果电流计的示数为 7.8 格,已知电流计的示度与通过的电流成正比,求电阻  $R$  的值.

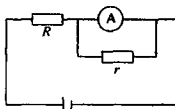


图 10-4-9

**分析与解** 对第三次测量,  $r$  改用  $10.00\Omega$ , 若待测电阻不换, 由于  $r$  上的分流增加, 电流计的示度必明显减小, 而将待测电阻  $R$  换成  $20.00k\Omega$  的标准电阻后, 电流计的示度为 7.8 格, 明显增大, 这说明电路的总电流必明显增大, 由此可推断: 待测电阻  $R$  比  $20.00k\Omega$  明显要大。

因此电源的内阻可忽略不计. 用  $I_0$  表示电流计偏转 1 格的电流,  $R_g$  表示电流计的内阻. 另外由于电流计的示度只有两位有效数字, 标准电阻的四位有效数字无意义, 对三次测量可列出以下三式

$$\frac{\mathcal{E}}{50 + R_g + R} \cdot \frac{50 R_g}{50 + R_g} \cdot \frac{1}{R_g} = 3.9 I_0$$

$$\frac{\mathcal{E}}{100 + R_g + R} \cdot \frac{100 R_g}{R_g + 100} \cdot \frac{1}{R_g} = 5.2 I_0$$

$$\frac{\mathcal{E}}{10 + R_g + 20000} \cdot \frac{10 R_g}{10 + R_g} \cdot \frac{1}{R_g} = 7.8 I_0$$

由于  $R$  比  $20k\Omega$  明显大, 以上各式分母中, 与  $R$  相加部分及与  $20k\Omega$  相加部分可略去, 使以上三式近似变为

$$\frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{50}{50 + R_g} = 3.9 I_0$$

$$\frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{100}{100 + R_g} = 5.2 I_0$$

$$\frac{\mathcal{E}}{20000} \cdot \frac{10}{10 + R_g} = 7.8 I_0$$

解上述三式可得  $R_g = 50\Omega$ ,  $R = 120k\Omega$

### 【巩固习题】

1. 电流表电阻  $R_g = 10\Omega$ , 满偏电流  $I_g = 0.02A$ , 现要把它改装为量程为  $10A$  的安培表, 但手头可用作分流器的惟一电阻为  $0.03\Omega$ , 那末, 跟电流表串联的电阻  $R$  应多大?

2. 一只三量程的电压表, 线路如图 10-4-10 所示, 求: (1)  $R_1, R_2, R_3$  的阻值; (2)  $500V$  电压表的内阻.

3. 欧姆表的电池用久后(但仍能调零)被测电阻的测量值与其真实值相比是偏大还是偏小?

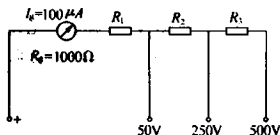


图 10-4-10

4. 设某欧姆表的刻度盘如图 10-4-11 所示,  $AB$  弧为以指针转轴为圆心和圆弧, 两表笔分开时指针指  $A$ , 接触时指针指  $B$ .  $C$  为  $AB$  弧的中点,  $D$  为  $AC$  弧的中点,  $E$  为  $AD$  弧的中点,  $F$  为  $CB$  弧的中点. 已知欧姆表的  $R_{\text{中}}$  为  $4.8\text{k}\Omega$ , 电流表指针偏转的角度与电流成正比(即电流表的刻度是均匀的), 则  $A, B, C, D, E, F$  各点代表的电阻值为多少?

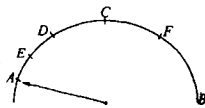


图 10-4-11

5. 如图 10-4-12 所示的电路, 安培表的示数为  $10\text{mA}$ , 伏特表的示数为  $2\text{V}$ . 当电阻  $R_x$  与伏特表分开, 同安培表并联后, 安培表的示数减小到  $2.5\text{mA}$ , 求伏特表的内电阻和  $R_x$  的值.(电源内阻不计)

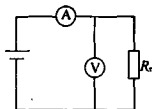


图 10-4-12

6. 某个分压电阻串接在电压表上, 使测量电压的程扩大到  $n$  倍; 另一个分压电阻串接在电压表上, 使量程扩大到  $m$  倍. 如果把这两个电阻并联后再串接到电压表上, 问它的量程扩大多少倍?

7. 在电阻  $r = 100\Omega$  的分流器与测量仪器并联的情况下, 当外电路电流  $I' = 3\text{A}$  时, 指针偏转满刻度. 在电阻  $R_0 = 300\Omega$  的分压电阻与未带分流器的电流计串联情况下, 仪器的标度大约为没有分压电阻和分流电阻时的 4 倍. 当外电路电流  $I = 7.5\text{A}$  时, 为了使仪器指针偏转满刻度, 问分流器应该取多大电阻?

8. 有两个不同的电流表, 每个电流表内指针的偏转与电流强度成正比, 刻度是均匀的. 电阻为  $R_1$  的电阻器与第一个电流表连接, 电阻未知的  $R_x$  电阻器与第二个电流表连接. 开始时两电流表串联, 再接到  $A$  和  $B$  两点上, 如图 10-4-13 所示. 在这种情况下, 两个电流表中指针的偏转分别为  $n_1$  和  $n_2$ , 然后将这两个电流表并联, 再接到  $A, B$  两点上, 如图 10-4-14 所示, 在这种情况下两指针的偏转分别为  $n'_1$  和  $n'_2$ . 求第二个电阻器的电阻  $R_x$ .

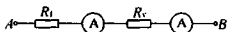


图 10-4-13

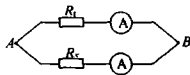


图 10-4-14

9. 如图 10-4-15 所示的电路中, 有 50 只不同的电流表 ( $A_1 - A_{50}$ ), 50 只规格相同的电压表 ( $V_1 - V_{50}$ ). 第一只电压表的读数为  $U_1 = 9.6\text{V}$ , 第一只电流表的读数为  $I_1 = 9.5\text{mA}$ , 第二只电流表的读数为  $I_2 = 9.2\text{mA}$ , 求所有电压表读数之和.

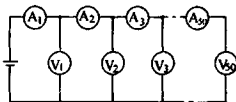


图 10-4-15

10. 一台高级灵敏电流计, 每一个量程范围都含有各



自独立的线路。当量程选用  $10\mu\text{A}$  档时, 电流计接某一电路中, 电流计指示的电流强度为  $I_1 = 2.95\mu\text{A}$ , 然后将转换开关到  $3\mu\text{A}$  时, 电流计指示的电流强度为  $I_2 = 2.90\mu\text{A}$ 。求在接入电流计前电路中的电流强度  $I_0$ 。

## 第五节 惠斯通电桥与补偿电路

### 【知识要点】

#### 一、惠斯通电桥

用欧姆表测电阻, 虽然很方便, 但不够准确; 而用伏安法测电阻, 电表引起的系统误差又难以消除。在实验室里比较准确地测量电阻, 常用惠斯通电桥。

图 10-5-1 是惠斯通电桥的原理图。  $R_1, R_2, R_3, R_x$  四个电阻是电桥的四个臂, 其中  $R_x$  是待测电阻,  $G$  是灵敏电流计。测量时, 调节  $R_3$  使电流计  $G$  中的电流为零时,  $A, B$  两点等势, 电桥平衡, 易得如下关系式  $R_1 R_x = R_2 R_3$ 。

惠斯通电桥的精确度决定于已知电阻的准确度和电流计  $G$  的灵敏度。采用惠斯通电桥法测电阻, 既避免了电流表分流、电压表分压的影响, 又能消除电源电动势和内阻变化对测量的影响。

惠斯通电桥有多种形式, 中学实验室里常用的是滑线式电桥, 如图 10-5-2 所示。  $CD$  为  $1\text{m}$  长的均匀电阻线,  $B$  是滑动触头, 可沿  $CD$  移动。当电桥平衡时, 可得  $R_x = \frac{l_2}{l_1} R$ 。

#### 二、补偿电路

补偿电路是一种比较精确地测量电压、电动势、电阻、电流的仪器, 用于测电动势、电压时叫电势差计。

图 10-5-3 是用补偿法测量电动势的原理电路图, 其中  $\mathcal{E}_x$  是被测电源,  $\mathcal{E}_s$  是标准电池,  $\mathcal{E}$  是工作电源。  $AC$  是一段均匀电阻丝,  $G$  是灵敏电流计。先将开关  $K$  掷于 1 方, 调节触头  $B$  使电流计电流为零。这时  $D$  与  $B$  点等电位, 故

$$\mathcal{E}_x = U_{AB} = IR_{AB} \quad (I \text{ 是流过 } AB \text{ 的电流})$$

再将开关掷于 2 方, 因一般  $\mathcal{E}_s \neq \mathcal{E}_x$ , 调节滑动触头至另一点  $B'$  以重新达到平衡。同理有  $\mathcal{E}_s = U_{A'B'} = I'R_{A'B'}$ 。

因两种情况下  $G$  都无电流, 故  $I = I'$ , 则有

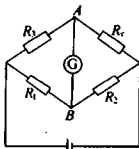


图 10-5-1

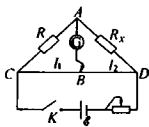


图 10-5-2

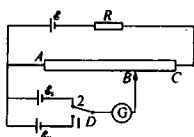


图 10-5-3

$$\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_s} = \frac{R_{AB}}{R_{AB'}} = \frac{l_{AB}}{l_{AB'}}$$

其中  $l_{AB}$  及  $l_{AB'}$  分别为  $AB$  及  $AB'$  段的长度。测出  $l_{AB}$  和  $l_{AB'}$ ，利用  $\mathcal{E}_s$  的已知值便可由上式求得  $\mathcal{E}_x$ 。

用电势差计测量电动势的最大优点是它不影响被测电路的工作情况。因此在精确测量中经常用到。

### 【例题分析】

**例 1** 图 10-5-4 是测量灵敏电流表  $G$  的内电阻  $R_g$  的一个实验电路。 $P, R, S$  为阻值已知的电阻， $Q$  为电阻箱，调节  $Q$  使电键  $K$  不论接通或断开， $G$  表的读数都不发生变化。求：(1) 电流表内阻  $R_g$ ；(2) 已知电源电动势  $\mathcal{E}$ ，内阻不计，求流过电流表的电流强度。

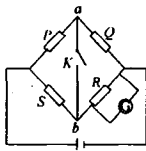


图 10-5-4

**分析与解** (1) 这是一个电桥电路，不论  $K$  接通或断开，流过电流表  $G$  的电流不变化，说明  $G$  两端的电压不变化，也就是  $U_{ab}$  必等于零，电桥平衡。因

$$\text{此 } \frac{P}{Q} = \frac{S}{R + R_g}, \text{ 解得 } R_g = \frac{RSQ}{PR - SQ}.$$

(2) 由于电源内阻不计， $G$  两端的电压为

$$U_G = \frac{\frac{R \cdot R_g}{R + R_g}}{S + \frac{R \cdot R_g}{R + R_g}} \cdot \mathcal{E} = \frac{RR_g}{S(R + R_g) + RR_g} \mathcal{E}$$

流过电流表  $G$  的电流强度

$$I_G = \frac{U_G}{R_g} = \frac{R}{S(R + R_g) + RR_g} \cdot \mathcal{E} = \frac{R}{RS + (S + R)R_g} \cdot \mathcal{E}$$

将  $R_g$  的代入上式，得

$$I_G = \frac{R}{RS + (S + R) \cdot \frac{PSQ}{PR - SQ}} \cdot \mathcal{E} = \frac{PR - SQ}{RS(P + Q)} \cdot \mathcal{E}$$

**例 2** 某电路具有 8 个节点，每两个节点之间都连有一个阻值为  $2\Omega$  的电阻。在此电路的任意两个节点之间加上  $10V$  电压，如图 10-5-5 所示，求电路的总电流、各支路的电流以及电阻上消耗的总功率。

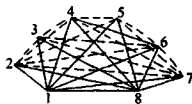


图 10-5-5

**分析与解** 因各个点都是等同的，所以在 1 点和 8 点加上电压就是在任意两点上加上的电压。把电路图简化成如图 10-

5-6 所示的电路图。由电桥平衡可知，2, 3, 4, 5, 6, 7 点都是等势点，则它们间相连的电阻

都可删掉.实际的工作电路就是7个并联的支路,其中1,8两点之间支路的电阻为 $2\Omega$ ,另外6个支路的电阻为 $4\Omega$ . $R_{\text{总}} = 0.5\Omega$ ,  $I_{\text{总}}$

$$= \frac{U}{R_{\text{总}}} = \frac{10}{0.5} = 20(\text{A}).$$

$$\text{节点 } 1, 8 \text{ 之间支路的电流 } I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{10}{2} = 5(\text{A})$$

$$\text{其他支路的电流 } I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{10}{4} = 2.5(\text{A})$$

$$\text{电阻消耗的总功率 } P = \frac{U^2}{R_{\text{总}}} = \frac{10^2}{0.5} = 200(\text{W})$$

**例3** 在图10-5-7所示的电路中, $xy$ 为一均匀电阻丝,全长155cm.当电键 $S_1, S_2$ 都闭合时,将滑动接触点接在 $xy$ 线上的 $p$ 处, $xp = 135\text{cm}$ ,检流计 $G$ 指针恰好没有偏转.如果将电键 $S_2$ 打开,而 $S_1$ 仍闭合,则须将滑动触点移至 $y$ 处,检流计才可不发生偏转.已知 $R_1 = 8.00\Omega$ ,试求电池 $\mathcal{E}$ 的内阻 $r$ 的值.

**分析与解** 因为在两种情况下,通过电流计所在支路的电流都为零,所以通过 $xy$ 导线支路的电流不发生变化,故加在 $xp$ 两端的电压之比即为 $xp$ 导线的长度之比.

$$\text{在 } \mathcal{E} \rightarrow x \rightarrow p \rightarrow y \rightarrow R \rightarrow \mathcal{E} \text{ 回路中,两种情况下电流强度 } I \text{ 相同,有 } \frac{U_{xp_1}}{U_{xp_2}} = \frac{IR_{xp_1}}{IR_{xp_2}} = \frac{135}{155}$$

$$= \frac{27}{31}$$

$$\text{而 } U_{xp_1} = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1 + r} R_1, U_{xp_2} = \mathcal{E}, \text{ 所以 } \frac{R_1}{r + R_1} = \frac{27}{31}$$

代入数据解得  $r = 1.185\Omega$

**例4** 有7个外形完全一样的电阻,已知其中6个的阻值相同,另一个的阻值不同.请按照下面提供的器材和操作限制,将那个阻值不同的电阻找出来,并指出它的阻值是偏大还是偏小,同时要求画出所用电路图,并对每步判断的根据予以论证.

提供的器材有:(1)电池;(2)一个仅能用来判断电流方向的电流表(量程足够),它的零刻度在刻度盘的中央,而且已知当指针向右偏转时电流是由哪个接线柱流入电流表的;(3)导线若干.

操作限制:全部过程中电流表的使用不得超过三次.

**分析与解** 判断所用电路如图10-5-8, $a, b, c, d$ 为四个电阻. $P, Q$ 间可接电流计,由电流计中电流 $I$ 的方向可判断出 $P, Q$ 两点中哪一点的电势较高.可能出现下列三种情况:

1.  $I = 0$ ,这表示四个电阻的阻值相等.

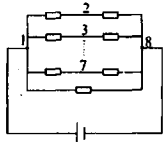


图 10-5-6

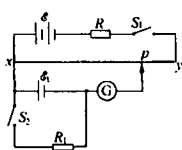


图 10-5-7

2.  $I$  从  $P$  到  $Q$ , 这表示  $P$  点电势较高,  $a, b, c, d$  中有一电阻偏大或偏小. 有下列四种可能:  $b$  偏大;  $c$  偏大;  $a$  偏小;  $d$  偏小.

3.  $I$  从  $Q$  到  $P$ , 这表示  $P$  点电势较低, 有四种可能:  $a$  偏大;  $d$  偏大;  $b$  偏小;  $c$  偏小.

应采取的实验步骤和判断: 设七个电阻为 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, 阻值相同的称为正常电阻, 阻值不同的那个为特异电阻.

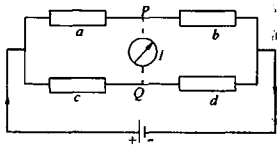


图 10-5-8

第一次测量: 将 ①, ②, ③, ④ 分别接入  $a, b, c, d$  位置, 这时可有以下三种情况:

情况 A:  $I$  向下, 则有四种可能: ②大; ③大; ①小; ④小.

情况 B:  $I$  向上, 则有四种可能: ①大; ④大; ②小; ③小.

情况 A 和情况 B 中, 其余三个电阻 ⑤, ⑥, ⑦ 均正常.

情况 E:  $I = 0$ , 这时 ①, ②, ③, ④ 正常, 特异电阻在 ⑤, ⑥, ⑦ 中.

第二次测量: 若情况 A 或情况 B 成立, 进行第二次测量时将 ①, ② 对调, 即将 ②, ①, ③, ④ 分别接入  $a, b, c, d$  位置. 这时可能有以下两种情况:

情况 C:  $I$  向下, 这时有以下四种可能: ①大; ③大; ②小; ④小.

情况 D:  $I$  向上, 这时有以下四种可能: ②大; ④大; ①小; ③小.

若情况 E 成立, 特异电阻在 ⑤, ⑥, ⑦ 中. 第二次测量取其中两个, 例如 ⑤, ⑥ 放于电路中  $a, b$  位置,  $c, d$  位置用正常电阻, 则有三种情况:

情况 F:  $I$  向下, 这时有二种可能: ⑤小; ⑥大.

情况 G:  $I$  向上, 这时有二种可能: ⑥小; ⑤大.

情况 H:  $I = 0$ , 这时 ⑤, ⑥ 均正常, 特异电阻即为 ⑦.

前两次测量分析:

若情况 A, C 成立, 则只有两个可能: ④小; ③大.

若情况 A, D 成立, 则只有两个可能: ①小; ②大.

若情况 B, C 成立, 则只有两个可能: ②小; ①大.

若情况 B, D 成立, 则只有两个可能: ③小; ④大.

若情况 E, F 成立, 则只有两个可能: ⑤小; ⑥大.

若情况 E, G 成立, 则只有两个可能: ⑥小; ⑤大.

若情况 E, H 成立, 则只有一个可能: 即 ⑦ 为特异电阻, 偏大抑或偏小待定.

第三次测量: 无论以上前六种情况哪一种成立, 可疑电阻的范围均缩小成为两个, 可能是某一个偏小, 或是某一个偏大. 第三次测量可将可能偏小的电阻与三个正常电阻接入电路, 根据电流计的电流方向即可判断出它或者确定偏小或者是正常电阻. 若是前者, 这个电阻就是特异电阻. 若后者成立, 则可能偏大的那个电阻, 阻值确实偏大, 是特

异电阻。

对于情况 E, H, 只需测定⑦的阻值偏大或偏小。用⑦及三个正常电阻接入电路, 可根据测定结果作出判断。

注: 若第一次测量结果为情况 A 或 B, 进行第二次测量时可以利用正常电阻⑤, ⑥, ⑦中的任意两个代替①, ②, ③, ④中的任意两个, 分析与判断方法与上述相似。

### 【巩固习题】

1. 如图 10-5-9 所示的惠斯通电桥电路中, 电桥不平衡。试证明电流从 D 流向 B 的条件为  $\frac{R_1}{R_2} < \frac{R_3}{R_4}$ 。

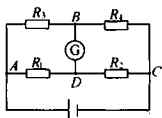


图 10-5-9

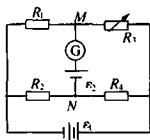


图 10-5-10

2. 如图 10-5-10 所示的电桥电路中, 电池组电动势  $\mathcal{E}_1 = 20\text{V}$ ,  $R_1 = 240\Omega$ ,  $R_2 = 20\Omega$ ,  $R_4 = 20\Omega$ , 电池  $\mathcal{E}_2 = 2\text{V}$ 。问可变电阻  $R_3$  应调到多大时, 电流表中电流为零?

3. 图 10-5-11 为用电势差计测电池内阻的电路图。  $R_M = 100\Omega$ , 实验开始时,  $S_2$  打开,  $S_1$  拨到 1 处, 调节  $R_N$  使流过  $R_{AB}$  的电流准确地达到标定值。然后将  $S_1$  拨到 2 处, 调节 C。当检流计 G 的指针指零时, 读得  $U_{AC} = 1.5025\text{V}$ ; 再闭合  $S_2$ , 滑动 C, 当检流计 G 的指针指零时, 读得  $U_{AC} = 1.4455\text{V}$ 。试根据这些数据计算电池  $\mathcal{E}_x$  的内阻  $r$ 。

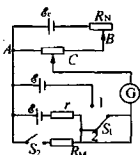


图 10-5-11

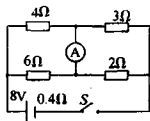


图 10-5-12

4. 如图 10-5-12 所示, 电流表内阻不计, 电源内阻为  $0.4\Omega$ , 电动势为  $8\text{V}$ 。问流过电流表的电流为多大?

5. 如图 10-5-13 所示电路, 各电阻的阻值已标示在图上, 电源电动势  $\mathcal{E} = 3\text{V}$ , 内阻

$r = 0.2\Omega$ . 调节  $R_x$  使通过电流计的电流  $I_1 = 0$ . 求满足此条件时电流  $I_2$  的值. 若使调节后的  $R_x$  保持不变, 仅将此电路中电源支路的元件与灵敏电流计支路的元件全部互换位置, 问通过灵敏电流计的电流强度为多大?

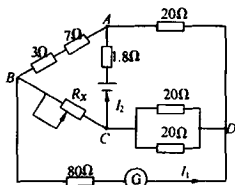


图 10-5-13

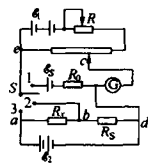


图 10-5-14

6. 图 10-5-14 是一个用补偿电路测定未知电阻  $R_x$  的电路. 已知  $\varepsilon_1 = 2.0366\text{V}$ ,  $R_0 = 20.00\Omega$ . 当  $S$  拨至 1,  $e, c$  间的电阻线长度  $L_1 = 38.25\text{cm}$  时; 当  $S$  拨至 2,  $L_2 = 25.38\text{cm}$ ; 当  $S$  拨至 3,  $L_3 = 87.47\text{cm}$  时,  $G$  表指针均指零位. 试求  $R_x$  的值.

7. 电路由若干电阻器组成, 电阻器的连接方式如下: 该电路上  $n$  个节点中每两个点之间接一个电阻为  $r$  的电阻器. 如果任意两点接在电动势为  $\mathcal{E}$ 、内阻为  $r$  的电池组上, 试求在这个电路上释放的功率.

8. 如图 10-5-15 所示的是滑线式电桥, 均匀电阻丝  $ADC$  长  $L = 100.00\text{cm}$ , 电阻率  $\rho = 1.600 \times 10^{-6}\Omega \cdot \text{m}$ , 截面积  $S = 1.000 \times 10^{-6}\text{m}^2$ . 电桥平衡时,  $AD$  间电阻丝长  $L_1 = 45.00\text{cm}$ ,  $R_3 = 23.50\Omega$ , 电动势  $\mathcal{E} = 3.00\text{V}$ , 内阻  $r = 0.45\Omega$ ,  $R$  接入电路的电阻值为  $1.00\Omega$ . 求: (1) 电阻  $R_x$  的阻值; (2) 估计当滑片  $D$  滑至  $L_1 = 60.00\text{cm}$  时 (其余条件不变), 干路上的电流; (3) 若在滑片  $D$  由  $A$  向  $C$  移动时, 在  $a$  点附近,  $\text{G}$  表指针突然从某一值跳跃性反向偏转为另一值. 试分析引起这种现象出现的原因.

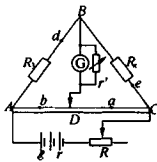


图 10-5-15

9. 将 200 个电阻连成如图 10-5-16 所示电路, 图中各  $P$  点是各支路中连接两个电阻的导线上的点, 所有导线的电阻都可忽略. 现将一个电动势为  $\mathcal{E}_0$ 、内阻为  $r_0$  的电源接到任意两个  $P$  点处, 然后将一个没接电源的支路切断, 发现流过电源的电流与设切断前一样, 则这 200 个电阻  $R_1, R_2, \dots, R_{100}, r_1, r_2, \dots, r_{100}$  应有怎样的关系式? 这时图中  $AB$  导线和  $CD$  导线之间的电压是多少?

10. 六个外形相同的电阻, 用导线连成如图 10-5-17 所示的电路, 已知其中五个电阻的阻值  $R$  均精确地等于  $2\Omega$ , 另一个阻值则与  $2\Omega$  有明显差异. 用欧姆表对图示电路

测量三次,就可以找出这个与众不同的电阻.试扼要说明测量方法和论据.

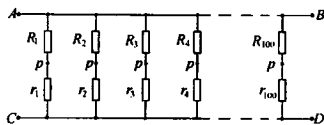


图 10-5-16

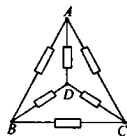


图 10-5-17

## 第六节 物质的导电性



### 【知识要点】

#### 一、金属中的电流 欧姆定律的微观解释

##### 1. 电流强度的微观表达式 $I = neSv$

如图 10-6-1 所示,设金属导体的横截面积为  $S$ ,单位体积内的自由电子数为  $n$ ,自由电子定向移动的平均速率为  $v$ ,那么时间  $t$  内通过某一横截面的电量为  $q = neSvt$ ,则有  $I = \frac{q}{t} = neSv$

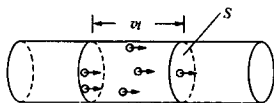


图 10-6-1

注意三个速率:常温下金属中自由电子热运动速率的数量级约为  $10^5$  m/s,自由电子的定向移动速率的数量级约为  $10^{-5}$  m/s,而合上开关,电灯就亮是电流的传导速率所致,即电场的传播速率(等于光速)  $3.00 \times 10^8$  m/s.

##### 2. 欧姆定律的微观解释

如图 10-6-2 所示,在一段长为  $l$ ,横截面积为  $S$  的长直导线两端加上电压  $U$ ,则电子在无规则热运动的基础上产生一个定向运动的加速度

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{ml}$$

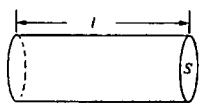


图 10-6-2

自由电子运动中要与金属正离子频繁碰撞,结果使其定向移动速率变为零(因为自由电子碰撞后向各个方向弹射的机会相等).因此自由电子在两次碰撞之间做初速为零的匀加速直线运动.设自由电子的平均碰撞时间间隔为  $\tau$ ,则自由电子的定向移动的平均速率

$$\bar{v} = \frac{1}{2} a\tau = \frac{e\tau U}{2ml}$$

因此

$$I = neS\bar{v} = \frac{e^2 n S \tau}{2 m l} U$$

对于给定的一般导体而言,式中的 $\frac{e^2 n S \tau}{2 m l}$ 是常量,从而可得电流与电压成正比,这就是欧姆定律.

若将上式写成 $I = \frac{U}{R}$ ,则 $R = \frac{2 m l}{e^2 n S \tau}$ ,这就是一段导体的电阻的微观表达式.

根据 $R = \rho \frac{l}{S}$ ,则电阻率的微观表达式为 $\rho = \frac{2 m}{e^2 n \tau}$ .

用 $\lambda$ 表示自由电子在两次碰撞之间前进的平均路程(称为“平均自由程”). $\lambda$ 可以用自由电子的总平均速率与平均碰撞时间间隔 $\tau$ 来计算.由于热运动的平均速率 $v_{热}$ 远大于定向移动速率,可以近似认为 $\lambda = v_{热} \tau$ ,代入电阻率的微观表达式,可得

$$\rho = \frac{2 m v_{热}}{e^2 n \lambda}$$

因为 $v_{热}$ 随温度的升高而增大,所以 $\rho$ 随温度的升高而增大.

## 二、液体中的电流 法拉第电解定律

### 1. 液体中的电流

液体导体主要是指电解质导电和液体金属导电两种.但两者的导电机理不同,液态金属导电是电子导电,而金属本身不发生化学变化;电解质导电的自由移动电荷是正负离子,在导电时,总伴随着电解现象:正离子奔向阴极板,得到电子发生还原反应,负离子奔向阳极,失去电子而发生氧化反应.在溶液中还可能同时发生其他的化学反应.

### 2. 法拉第电解定律

(1)法拉第电解第一定律:电解质导电时,在极板处析出物质的质量 $m$ 与通电时间 $t$ 及电流强度 $I$ 成正比.数学表达式为

$$m = k I t = k q$$

式中的比例系数 $k$ 叫电化当量, $k$ 随析出物的不同而不同.某种物质的电化当量在数值上等于通过一库仑电量时所析出该种物质的质量.单位为 $\text{kg/C}$ .

(2)法拉第电解第二定律:物质的电化当量 $k$ 与该物质的化学当量 $\frac{M}{n}$ ( $M$ 是该物质的摩尔质量, $n$ 为化合价)成正比.数学表达式为

$$k = \frac{M}{F n}$$

式中的 $F$ 是法拉第恒量,对任何物质都相同,数值为 $F = 9.65 \times 10^4 \text{C/mol}$

结合两个定律,可得法拉第电解定律的统一表达式为 $m = \frac{M}{F n} q$



### 三、气体中的电流 被激放电和自激放电

#### 1. 气体的导电性

在通常情况下,气体是不导电的。只有在电离剂存在或强大的电场情况下才会被电离而导电。所谓电离剂是指能使气体电离的物质,如紫外线、X射线或其他射线的照射,以及燃烧着的火焰均能使气体电离。气体电离后生成电子和正离子,有些电子附着在中性分子上也会形成负离子。因此参与气体导电的载流子既有电子又有离子。气体导电不遵循欧姆定律。

#### 2. 被激放电与自激放电

由于引起气体电离的原因不同,气体导电又可分为被激放电(在电离剂作用下的导电)和自激放电(没有电离剂作用,在高电压作用下的导电)两大类。自激放电与碰撞电离密切相关。在气体中常有少量的电子和离子(宇宙射线或其他因素所形成的),它们在电场的作用下获得较大的动能而与分子碰撞时,它们将使分子分裂成离子,或从分子中撞出电子,使分子变成正离子。新形成的离子和电子,又获得较大的动能与分子碰撞,形成连锁反应产生自激导电。不过为了维持气体的持续放电,阴极必须源源不断地提供电子。因为正、负载流子分别到达极板后,气体放电就停止了。由此可见,气体自激放电有两个必要条件:气体电离和阴极发射电子。

常见的气体自激放电现象有以下几种:

①辉光放电:稀薄气体中的高压放电。气体稀薄时电子和离子在强电场作用下(因分子间距增大)获得较大的动能维持自激放电。气体的气压越小所需电压也越低。霓虹灯、日光灯、高压水银灯等气体电光源均属辉光放电。

②弧光放电:高温下气体电离导电。如电焊、弧光灯等均属此类。开始放电所需温度约为2000K左右。弧光放电要求电压不高(几十伏),而电流很大(几十安培甚至更大),这说明此时气体有良好的导电性,电阻很小。例如电焊时,焊条与工件接触处电阻很大,电流通过时要放出大量的热量升温,使周围空气电离,当焊条与工件稍微分离后,它们之间的气体发生自激放电并产生电弧。

③火花放电:在通常气压时,高压下的放电。产生火花放电的电压大小跟气体的性质、气压、电极的大小、形状及距离等因素有关。例如闪电。

④电晕放电:在高电压导体附近一层空气中的持续放电。放电时发出微弱的光并伴有臭氧产生。放电原因是强大电场使附近空气电离。它是高压设备漏电的主要原因。避雷针则是利用电晕放电使电荷持续放掉中和以避免能量的巨大的光花放电。

#### 四、真空中的电流

在稀薄气体辉光放电中,如果继续抽出放电管内的气体,当管中气压降到0.1Pa左右时,辉光放电停止,因为这时管内已近真空,电子运动过程中几乎碰不到气体分子,不可能使气体电离发光了。这时对着阴极的玻璃管壁上却发出荧光,这表明玻璃管壁发出

的荧光是由阴极发射的一种射线引起的,称这种射线为阴极射线,能产生阴极射线的管子叫阴极射线管。

示波管是在阴极射线管基础上制成的,示波管由电子枪、偏转板和荧光屏组成。

## 五、半导体及晶体管

### 1. 半导体的导电特性

导电性能介于导体和绝缘体之间的物质称为半导体。例如锗、硅等。

半导体具有一些特殊的导电特性

①热敏特性:当半导体的温度升高后,其电阻率显著减小,应用是制成热敏电阻。

②光敏特性:当光照射到半导体上,它的导电能力显著增强,而光照一停止,导电能力又很差,应用是制成光敏电阻和光电二极管等。

③掺杂特性:在纯净的半导体中,掺入微量的有用元素,可使导电能力发生显著变化,应用是制成N型半导体和P型半导体等。

### 2. N型半导体和P型半导体

半导体的导电性能是由它的原子结构决定的。例如半导体硅,它的每个原子的最外层有四个价原子,它们和周围的相同原子构成四个共价键,因而电子受束缚,不能自由移动,但由于热运动,其中极少数电子有可能挣脱束缚成为自由电子,同时在原来的共价键中留下一个空穴,电子和“空穴”就是半导体中存在的两种载流子。

#### ①N型半导体

在纯净的半导体中掺入微量的五价元素磷,一些硅原子会被磷原子代替,磷原子有五个价电子,它与硅原子组成共价键时多出一个价电子,这个电子在室温下很容易激发成为自由电子,因而这类半导体中自由电子的浓度要比空穴的浓度大得多,它主要靠电子导电,称为N型半导体或电子型半导体。

#### ②P型半导体

在纯净的半导体中掺入微量的三价元素硼,可产生大量空穴,因此,这种半导体中空穴数远大于自由电子数,主要载流子是空穴,称为空穴型半导体或P型半导体。

### 3. PN结和晶体二极管

采用特殊的工艺可以用先后掺杂的方法,把一块纯净半导体制成一部分是P型半导体,另一部分是N型半导体。这时,在两种半导体的交界面上就会得到一个具有特殊性质的导电薄层,叫做PN结。它具有单向导电性,PN结是组成晶体二极管、晶体三极管及其他半导体器件的基础。

在PN结的P区和N区各装上一个电极,再装上管壳,就组成了晶体二极管,它具有单向导电性,跟P区相连的是二极管的正极,二极管符号如图10-6-3所示,它仅允许电流从正极流向负极。

### 4. 晶体三极管

两个  
两和大竹  
(甲)

出地

在者  
末式

小的

为铜  
中央  
溶液

晶体三极管也是由P型半导体和N型半导体所组成。它有两个PN结,根据组合方式不同,晶体三极管有PNP型和NPN型两种。它们的构造和符号如图10-6-4(甲)和(乙)所示。

它有三个电极:发射极 $e$ 、基极 $b$ 和集电极 $c$ 。三极管具有放大作用。它正常工作时,需要有两个电源,并按如图10-6-5(甲)、(乙)两图所示方式连结。在输入端加上一个电讯号,在输

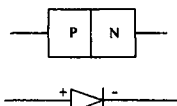


图 10-6-3

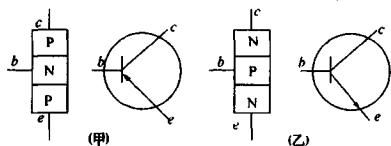


图 10-6-4

出端电阻 $R_c$ 上就会得到一个放大的电讯号。

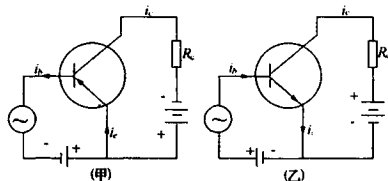


图 10-6-5

三极管的电流分配满足以下规律:发射极电流、集电极电流 $i_c$ 和基极电流 $i_b$ 间存在着以下关系 $i_e = i_c + i_b$ ,  $i_c \gg i_b$ ,  $\beta = \frac{i_c}{i_b}$ 。

末式叫做三极管的电流放大倍数。

晶体三极管是组成各种电子设备的基本元件。三极管在电路中主要起放大作用,很小的电流变化控制较大的电流变化。

### 【例题分析】

例1 如图10-6-6所示,一个矩形电解槽,左、右壁 $A$ 、 $B$ 均为银质,左、右壁及底为玻璃。有一个密合很好的铜板置于槽的中央,平行于 $A$ 、 $B$ 放置而将槽隔成两半,其中一半盛有硝酸银溶液,另一半盛硫酸铜溶液。 $A$ 、 $B$ 间接有电压为100V的直流电

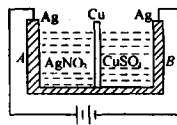


图 10-6-6

源,于是发现中间铜板的质量以  $8\text{mg/s}$  的速率增加.试求电源供给的电功率是多少?已知铜、银的电化当量分别是  $k_{\text{Cu}} = 0.3294 \times 10^{-6}\text{kg/C}$ ,  $k_{\text{Ag}} = 1.118 \times 10^{-6}\text{kg/C}$ .

**分析与解** 电解槽通电后,发生电化学反应,溶液中的离子在电场力作用下,正离子到达阴极获得电子被还原,在阴极上析出,负离子到达阳极失去电子被氧化.则左侧 A 壁银溶解,铜板左侧面析出银,铜板右侧面铜溶解,铜离子 ( $\text{Cu}^{2+}$ ) 到达右侧 B 板得到电子析出.设过程中两边溶液浓度不变,铜板上增加的质量便是析出的银质量与溶解掉的铜质量之差,用  $\Delta m$  表示,有  $\Delta m = m_{\text{Ag}} - m_{\text{Cu}}$  ①

根据法拉第电解第一定律  $m = kt$  ②

设经过时间  $\Delta t$ ,铜板增加的质量为  $\Delta m$ ,并由题设条件可知  $\frac{\Delta m}{\Delta t} = 8\text{mg/s} = 8 \times 10^{-6}\text{kg/s}$ .

将②代入①,则有  $\Delta m = m_{\text{Ag}} - m_{\text{Cu}} = k_{\text{Ag}}I\Delta t - k_{\text{Cu}}I\Delta t$

$$\text{得 } I = \frac{\Delta m / \Delta t}{k_{\text{Ag}} - k_{\text{Cu}}} = \frac{8 \times 10^{-6}}{(1.118 - 0.3294) \times 10^{-6}} = 10(\text{A})$$

供给电解槽的功率即为电源输出功率  $P = IU = 10 \times 100 = 1.0 \times 10^3(\text{W})$

**例 2** 在封口的毛细管内有两段水银柱,它们被一小滴  $\text{HgI}_2$  电解质溶液隔开,如图 10-6-7 所示.毛细管的内径  $d = 0.3\text{mm}$ ,管子与电阻  $R = 390\text{k}\Omega$  的电阻器串联,再接到电动势  $\mathcal{E} = 10\text{V}$  的电池上,试问经过多少时间液滴沿标尺移动一个刻度.

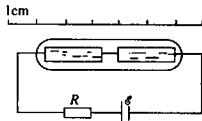


图 10-6-7

**分析与解** 在电解质液里电流流动与物质的迁移有关.

本题中在阴极发生还原反应,从电解质中还原成金属水银;而在阳极发生氧化反应,水银被氧化,即转化为电解液.

根据法拉第电解定律,在时间  $t$  内在阴极上析出水银的质量  $m = \frac{1}{F} \frac{M}{n} It$

因为金属水银、电解液和电源内阻与  $R$  相比小得多,所以电流强度等于  $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$

在阴极上析出水银以及在阳极上水银的溶解导致一小滴电解液朝阳极方向移动,

液滴移动距离  $L$  与阴极上析出的水银的质量显然有如下关系  $m = \rho \cdot \frac{\pi d^2}{4} L$

由此得电解液滴移动距离  $L$  所经过的时间  $t = \frac{\pi d^2 F n \rho R L}{4 M \mathcal{E}}$

将有关数据以及  $L = 1\text{cm}$  代入,得到  $t = 100\text{h}$ .

**注:**类似的“水银钟”广泛应用于电子技术中,用作小型定时装置,运行时间计算器.它们也用作库仑测量器,测量在长时间内通过电路的电量.

**例 3** 在图 10-6-8 所示的电路中,两个电容器的电容相等,即  $C_1 = C_2 = C$ ,两个二极管皆为理想二极管(正向电阻为零,反向电阻为无限大).当电源输入电压为图 10-6-

9 所示的稳定方波时, 试在图 10-6-10 中分别绘出达到稳定状态后  $LD$  点间的电压  $U_{LD}$  和  $MD$  点间的电压  $U_{MD}$  随时间变化的图像. 图中  $t=0$  表示达到稳定状态后的某一时刻.

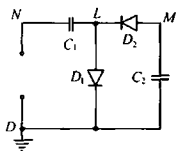


图 10-6-8

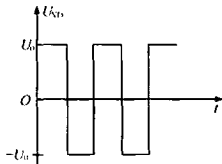


图 10-6-9

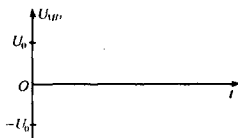
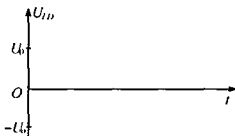


图 10-6-10

**分析与解** 输入电压是周期性方波. 当输入电压为正半周时,  $C_1$  充电,  $D_1$  导通,  $D_2$  截止,  $C_2$  不充不放, 此时等效电路图如图 10-6-11 所示. 当输入电压为负半周时,  $C_1$  放电,  $C_2$  充电,  $D_2$  导通,  $D_1$  截止, 此时等效电路图如图 10-6-12 所示, 多次反复达到稳定态后,  $C_1$  两端电压数值为  $U_0$ ,  $C_2$  两端电压数值为  $2U_0$ .

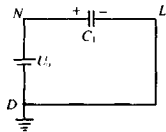


图 10-6-11

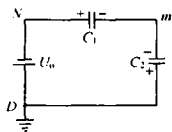


图 10-6-12

考虑到对“地”的正负关系可得

$$U_{LD} = U_{LN} + U_{ND}$$

达到稳定状态时  $U_{LN} = -U_0$ , 所以

$$U_{LD} = -U_0 + U_N = \begin{cases} -U_0 + U_0 = 0 (\text{正半周}) \\ -U_0 - U_0 = -2U_0 (\text{负半周}) \end{cases}$$

因为  $U_{MD} = U_{C2}$ , 所以  $U_{MD} = -2U_0$ .  $U_{LD}$  和  $U_{MD}$  图像如图 10-6-13 甲和乙所示.

本题的电路叫做倍压整流电路.  $C_2$  上可得到为电源电压两倍的电压, 因此叫双倍

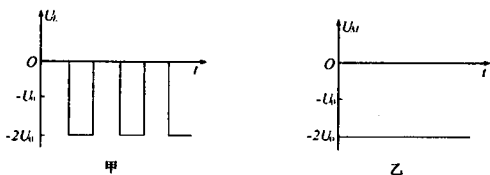


图 10-6-13

压整流.利用同样的原理还可设计出三倍压(图 10-6-14)、四倍压……乃至  $n$  倍压(图 10-6-15)的整流电路,分析其工作原理后可得到如下规律:①  $n$  倍压电路需要有  $n$  个电容和  $n$  个二极管;② 倍压整流电路承载能力很小,而且要经过无穷长的时间才能完全达到稳态;③ 稳态时所有电容上都是稳定的直流电压,所有二极管都处于反向截止状态.

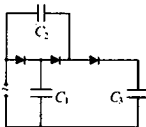


图 10-6-14

例 4 晶体三极管的基极  $B$ 、发射极  $E$  和集电极  $C$  的电势分

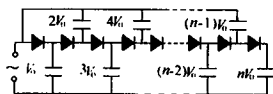


图 10-6-15

别用  $U_B$ 、 $U_E$  和  $U_C$  表示.理想的硅 NPN 开关二极管的性能如下:

当  $U_B$  较  $U_E$  高 0.6V 或更高,即  $U_B - U_E \geq 0.6V$  时,三极管完全导通,即  $E$  和  $C$  之间相当于用导线接通.

当  $U_B - U_E < 0.6V$  时,三极管关断,即  $E$  和  $C$  之间完全不通.开关三极管只有完全导通和关断两种状态.图 10-6-16(a)是一个有实际用途的电路,Ⅰ和Ⅱ都是理想的 NPN 开关三极管.要求:(1)在图 10-6-16(b)中画出电压  $U_2$  随输入电压  $U_1$  变化的图线;(2)举出此电路一个可能的应用.

分析与解 1. 如图 10-6-17 所示,以电源负极为电势零点.

(i) 当输入电压  $U_1 = 0V$  时,  $U_{B1} - U_{E1} = 0 < 0.6V$ , 故三极管 Ⅰ 关断,这时  $U_{E2} = U_{E1} = 0V$ .

$$U_{B2} - U_{E2} = 10 \times 12 / (4 + 20 + 10) \approx 3.5(V) > 0.6V$$

所以三极管 Ⅱ 导通,输出电压为

$$U_2 = 510 \times 12 / (2000 + 510) \approx 2.4(V)$$

三极管 Ⅱ 导通后,在  $R_1$  (指 510Ω 那个电阻)上有电压降,使发射极电势升高.这时

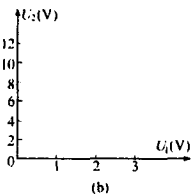
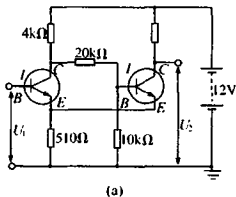


图 10-6-16

$$U'_{E2} = U'_{E1} = 12 \times 510 / (2000 + 510) \approx 2.4(\text{V})$$

$$U'_{B1} - U'_{E1} = 0 - 2.4 = -2.4(\text{V}) < 0.6\text{V}$$

$$U'_{B2} - U'_{E2} = 3.5 - 2.4 = 1.1(\text{V}) > 0.6\text{V}$$

故三极管 I 仍关断, II 仍导通, 处于稳定状态。

(2) 使输入电压增加到  $U_1 = U'_{B1} = 3.0\text{V}$  时,  $U'_{B1} - U'_{E1} = 3.0 - 2.4 = 0.6(\text{V})$

使三极管 I 导通, 导通后, 由于  $R_1$  上的电压降使  $U'_{E1}$  变为

$$U''_{E1} \approx 12 \times 510 / [510 + 4000 \times 2000 / (4000 + 2000)] \approx 3.3(\text{V})$$

(此式中忽略了并联的  $20\text{k} + 10\text{k}$ ) 而

$$U'_{B2} = 3.3 \times 10 / (10 + 20) \approx 1.1(\text{V})$$

$$U'_{B2} - U''_{E2} = 1.1 - 3.3 = -2.2(\text{V}) < 0.6\text{V}$$

使三极管 II 关断, 这样  $U''_{E1}$  由  $3.3\text{V}$  变为  $12 \times 510 / (510 + 4000) = 1.3(\text{V})$

$$U'_{B1} - U''_{E1} = 3.0 - 1.3 = 1.7(\text{V}) > 0.6\text{V}$$

故三极管 I 仍保持导通, 因为三极管 II 关断,  $U_{E2} = 12\text{V}$ 。这时输出电压  $U'_2 = 12\text{V}$ , 电路处于稳定状态。

(3) 继续增加输入电压时, 输出电压不再变化, 仍为  $U'_2 = 12\text{V}$ 。

(4) 从  $U_1 = 3.0\text{V}$  减小输入电压时, 由于现在  $U''_{E1} = 1.3\text{V}$ , 因此, 输入电压降低到  $U_1 = U''_{B1} = 1.9\text{V}$ , 能使  $U''_{B1} - U''_{E1} = 0.6\text{V}$ , 电压再降一点, 即达到(1)中所讨论的情况, 三极管 I 关断, II 导通, 这时输出电压又变到  $U_2 = 2.4\text{V}$ , 当输入电压  $U_1$  由  $1.9\text{V}$  变到  $0$  时, 仍与(1)中所讨论的情况相同, 输出电压保持在  $U_2 = 2.4\text{V}$ , 不再改变。

2. 例如用来控制水塔自动上水、冰箱自动启动等。

### 【巩固习题】

1. 两个电解池串联着, 一电解池在镀银, 一电解池在电解水, 在某一段时间内, 折

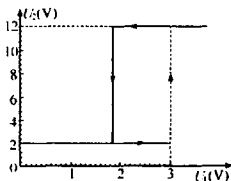


图 10-6-17

出的银是 0.5394g, 析出的氧气应是多少?

2. 一条银导线, 横截面积  $S = 0.5\text{mm}^2$ , 通以  $I = 2.0\text{A}$  电流. 若平均每个银原子有一个电子参与导电, 且已知银的摩尔质量  $M = 108 \times 10^{-3}\text{kg}$ , 密度  $\rho_{\text{银}} = 10.5 \times 10^3\text{kg/m}^3$ , 电阻率  $\rho = 1.6 \times 10^{-8}\Omega \cdot \text{m}$ , 电子质量  $m = 9.1 \times 10^{-31}\text{kg}$ , 阿伏伽德罗常数  $N_A = 6.0 \times 10^{23}\text{mol}^{-1}$ , 环境温度为  $27^\circ\text{C}$ . 求:

- (1) 银导线内自由电子密度  $n$ ;
- (2) 电子定向平均移动速率  $v$ ;
- (3) 一个电子两次相继碰撞的平均时间  $\tau$ ;

$$(4) \text{电子热运动平均速率 } u = \sqrt{\frac{8RT}{\pi N_A m}};$$

(5) 导线内的电场强度  $E$ ;

(6) 电子的平均自由程  $\lambda$ .

3. 用电解原理可以校准安培计. 设通电 2h 后, 在阴极上析出 43.8g 的银, 安培计指示为 5.68A, 问安培计的误差是多少?

4. 已知铜的摩尔质量  $M = 63.6\text{g/mol}$ , 化合价  $n = 2$ . 要在  $\text{CuSO}_4$  溶液里电解出铜 159g. (1) 需要多少电量通过溶液? (2) 这些铜要在一天夜里析出, 通过溶液的电流强度是多少? (3) 这过程中有多少个铜离子跑到极板上? (4) 求铜的电化当量  $k$ ; (5) 如电解时加在电解槽上的电压为 12V, 则电解过程中需要消耗多少电能?

5. 用 X 射线使空气电离时, 在平衡情况下, 每立方厘米有  $10^8$  对离子. 已知每个正、负离子的电量都是  $1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ , 正离子的移动速率为  $1.27\text{cm/s}$ , 负离子的移动速率为  $1.84\text{cm/s}$ . 求这时空气中单位横截面积上的电流强度.

6. 若有一个真空二极管, 其中阴极和阳极是一对平行导体片, 面积都是  $2.0\text{cm}^2$ , 它们之间的电流  $I$  完全由电子从阴极跑向阳极形成. 若电流  $I = 50\text{mA}$ , 电子达到阳极时的速率是  $1.2 \times 10^7\text{m/s}$ , 电子电量为  $-1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ . 求阳极表面处每立方毫米内的电子数.

7. 图 10-6-18 电路中,  $R_1 = R_2 = 4000\Omega$ ,  $R_3 = 2000\Omega$ ,  $D_1$ 、 $D_2$  为理想二极管, 电源电动势  $\mathcal{E} = 6\text{V}$ , 内阻不计, 当电键闭合时, 电源功率为多少? 若将电源正负极对调, 电源功率又为多少?

8. 图 10-6-19 所示电路中,  $E_c = 1.5\text{V}$ ,  $R_b = 150\text{k}\Omega$  时, 毫安表读数为  $0.8\text{mA}$ . 则该晶体管三极管的  $\beta$  值是多少?

9. 在图 10-6-20 所示电路中, 当条形磁铁向螺线管内插入的瞬时, 微安表与电压表的读数将怎样变化?

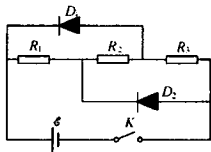


图 10-6-18



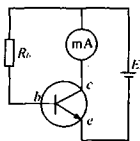


图 10-6-19

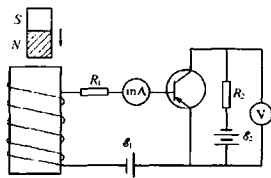


图 10-6-20

10. 如图 10-6-21 所示, 电阻  $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$ , 电动势  $\mathcal{E} = 6\text{V}$ , 两个相同的二极管  $D$  串联在电路中, 二极管  $D$  的  $I_D - U_D$  特性曲线如图 10-6-22 所示, 求: (1) 通过二极管的电流  $I_D$ ; (2) 电阻  $R_1$  消耗的功率  $P_1$ .

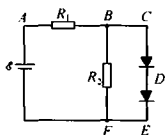


图 10-6-21

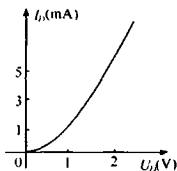


图 10-6-22

## 第七节 综合训练

## 【例题分析】

**例 1** 有若干电阻组成如图 10-7-1 所示的电路, 其中  $A$ 、 $B$  两点的接地电阻是固定不动的, 输入电压  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , 仅取  $1\text{V}$  或者  $0$  两个值,  $0$  表示接地. 问: (1) 当  $n = 3$  时,  $B$  点的输出电压有几个可能的值; (2) 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $B$  点最大输出电压为多少?

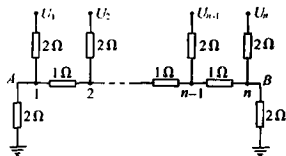


图 10-7-1

**分析与解** (1) 当  $n = 3$  时,  $U_1, U_2, U_n$  仅取  $1\text{V}$  或者  $0$  两个值, 共有  $2^3 = 8$  种情况. 相应地  $B$  点的输出电压有 8 种可能的值. 由电路的特点可算出各电压值.

可能情况	$U_1$	$U_2$	$U_3$	计算式	电压
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1/3	1/3
3	0	1	0	$(1/3) \times (1/2)$	1/6
4	0	1	1	1/2	1/2
5	1	0	0	$(1/3) \times (1/2) \times (1/2)$	1/12
6	1	0	1	$(1/12) + (1/3)$	5/12
7	1	1	0	$(1/6) + (1/12)$	1/4
8	1	1	1	$(1/4) + (1/3)$	7/12

(2) 由于是分压输出, 显然只有当  $U_1 = U_2 = \dots = U_n = 1V$  时,  $B$  点的输出电压最大, 否则至少有一个电阻接地, 则  $B$  点的等效接地电阻变小, 输出电压也相应变小.

故当  $n$  固定时, 有最大输出电压的电路图如图 10-7-2 所示. 这时根据叠加原理, 输出电压  $U(n)$  等于每一电源单独使用时提供的输出的电压

$$\text{之和 } U(n) = \sum_{i=1}^n U_i$$

其中  $U_i$  为  $U_i = 1V$ ,  $U_{k \neq i} = 0$  的情况下的输出电压. 由图 10-7-2 可算出为  $U_i = (1/3)(1/2)^{n-i}$

故有

$$U(n) = \sum_{i=1}^n U_i = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{3} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right]$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $U = 3V$ .

**例 2** 滑线变阻器常用来限流和分压, 其原理电路分别如图 10-7-3 和图 10-7-4 所示. 已知电源端电压为  $U$  (内阻不计), 负载电阻为  $R_0$ , 滑线变阻器的全电阻为  $R$ , 总匝数为  $N$ ,  $A, C$  段的总电阻为  $R_{AC}$ . (1) 在图 10-7-3 中, 当滑动端  $C$  移动时, 电流  $I$  的最小改变量  $\Delta I$  为多少? (设变阻器每匝阻值  $\ll R_0$ ) (2) 在图 10-7-3 中, 为使在整个范围内电流  $I$  的最小改变量  $\Delta I$  不大于  $I$  的 0.1%, 滑线变阻器的匝数  $N$  不得小于多少匝? (3) 在图 10-7-4 中, 滑线变阻器的额定电流  $I_r$  不得小于多少? (4) 在图 10-7-4 中设  $R_0 \gg R$ , 证明: 负载端电压  $U'$  与  $R_{AC}$  有简单的正比关系.

**分析与解** 滑动端  $C$  移动一匝时, 电路中电流的改变量即为最小值, 当然这一最小值还与滑动端  $C$  的具体位置有关.

(1) 对图 10-7-3 所示的电路, 不论滑动端  $C$  位置在何处, 均有  $I = \frac{U}{R_0 + R_{AC}}$ . 设变阻器每匝阻值为  $\Delta R$ , 当滑动端  $C$  移动一匝时, 电流  $I$  变为

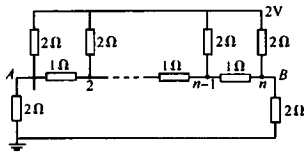


图 10-7-2

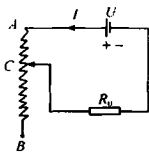


图 10-7-3

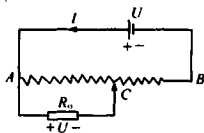


图 10-7-4

$$I + \Delta I = \frac{U}{R_0 + R_{AC} + \Delta R} = \frac{U}{(R_0 + R_{AC}) \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0 + R_{AC}}\right)}$$

$$\approx \frac{U}{R_0 + R_{AC}} \left(1 - \frac{\Delta R}{R_0 + R_{AC}}\right)$$

故得  $\Delta I = -\frac{U}{(R_0 + R_{AC})} \cdot \Delta R$ , 显然  $\Delta R = \frac{R}{N}$ . 故

$$\Delta I = -\frac{U}{(R_0 + R_{AC})^2} \cdot \frac{R}{N}$$

式中负号表明: 当  $R_{AC}$  增加(或减小)时, 电流  $I$  则减小(或增大).

(2) 因  $\frac{\Delta I}{I} = \frac{R}{N(R_0 + R_{AC})}$ , 所以当  $R_{AC} \rightarrow 0$  时,  $\Delta I/I$  值最大, 故当  $R_{AC} \rightarrow 0$  时, 得

$$\frac{\Delta I}{I} = -\frac{R}{NR_0}$$

由题意  $\frac{I}{\Delta I} \geq 10000$ , 因而  $N \geq 10000 \frac{R}{R_0}$ .

(3) 在图 10-7-4 所示电路中, 外电路总电阻为

$$R_Z = R - R_{AC} + \frac{R_0 R_{AC}}{R_0 + R_{AC}} = R - \frac{R_{AC}^2}{R_0 + R_{AC}} = R - \frac{R_{AC}}{\frac{R_0}{R_{AC}} + 1}$$

由此可见, 当  $R_{AC}$  增大时,  $R_Z$  单调减小. 当  $R_{AC} \rightarrow R$  时,  $R_Z \rightarrow R - \frac{R^2}{R_0 + R} = \frac{R_0 R}{R_0 + R}$ .

总电流  $I$  随  $R_Z$  的单调减小而单调增大, 且  $I \rightarrow \frac{(R_0 + R)U}{R_0 R}$ .

此电流为滑动端  $C$  就要滑至尽头而尚未滑出尽头时流过变阻器最末端的电流. 因此所求额定电流应为  $I_e \geq \frac{(R_0 + R)U}{R_0 R}$ .

(4) 由图 10-7-4 可知, 负载电压  $U' = \frac{U}{R - R_{AC} + \frac{R_0 R_{AC}}{R_0 + R_{AC}}} \cdot \frac{R_0 R_{AC}}{R_0 + R_{AC}}$ .

当  $R_0 \gg R$  时,  $R_0 \gg R_{AC}$ , 故得  $U' = \frac{U}{R - R_{AC} + R_{AC}} \cdot R_{AC}$ .

**例 3** 如图 10-7-5 所示电路中, 三个相同规格的电容器, 其电容为  $C$ , 把它们串联后接到电动势为  $\mathcal{E}$  的电池组上, 充电结束后再切断电源, 然后同时接入两个电阻值均为  $R$  的电阻, 电路连接如图 10-7-5 所示. (1) 问每个电阻上放出的热量  $Q$  是多少? (2) 当中间那个电容器上的电压减少到电池组电动势的  $1/10$  时, 流过两个电阻上的电流强度  $I_1$  和  $I_2$  的值是多少?

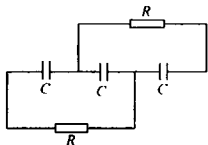


图 10-7-5

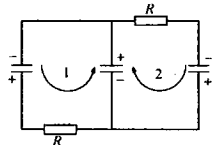


图 10-7-6

**分析与解** (1) 在充电结束后接通电阻前, 每个电容器两端的电压为  $U_1 = \mathcal{E}/3$ , 每个极板上所带的电量为  $q_1 = CU = \frac{C}{3} \cdot \mathcal{E}$ .

$$\text{三个电容所储的总电能为 } E_1 = 3 \times \frac{1}{2} CU_1^2 = \frac{3}{2} C \cdot \frac{\mathcal{E}^2}{9} = \frac{C\mathcal{E}^2}{6}$$

接通电阻后, 三个电容器相并联, 如图 10-7-6 所示, 根据电荷守恒定律, 上、下三个极板原带的正、负电荷分别中和后又重新分配. 显然, 重新分配后每个极板上带电量为

$$q_2 = \frac{1}{3} q_1 = \frac{C\mathcal{E}}{9}$$

两极板间的电压变为  $U_2 = \frac{q_2}{C} = \frac{\mathcal{E}}{9}$ .

$$\text{三个电容器最后还能储存的总电能为 } E_2 = 3 \times \frac{1}{2} CU_2^2 = \frac{3}{2} \times C \times \frac{\mathcal{E}^2}{81} = \frac{C\mathcal{E}^2}{54}$$

根据能量守恒, 每个电阻上消耗的热能应等于三个电容器减少的总电能的一半, 联系两个能量方程有  $Q = \frac{E_1 - E_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{C\mathcal{E}^2}{6} - \frac{C\mathcal{E}^2}{54} \right) = \frac{2}{27} C\mathcal{E}^2$

(2) 当两个相同电阻接通后, 形成两个回路同时放电, 中间的那个电容器先放电, 然后被反充电. 当中间那个电容器上的电压  $U_1 = \mathcal{E}/10$  时, 极板上此时刻带有电量  $q_1 = C\mathcal{E}/10$ . 放电时, 下板仍为负电荷, 充电时下板变为正电荷, 如图 10-7-6 所示. 由对称关系可知, 只需研究回路 1 即可.

① 放电过程出现  $U_1 = \mathcal{E}/10$  时, 流过  $R$  上的电量为

$$q_R = \frac{q_1 - q_1'}{2} = \frac{\frac{C\mathcal{E}}{3} - \frac{C\mathcal{E}}{10}}{2} = \frac{7}{60} C\mathcal{E}$$

此时回路 1 应满足的电压方程为  $U_3 + U_{I_2} = I_1 R$

$$\text{将 } U_3, U_{I_2} \text{ 的值代入得 } I_1 = \frac{U_3 + U_{I_2}}{R} = \frac{\frac{13}{60}\mathcal{E} + \frac{1}{10}\mathcal{E}}{R} = \frac{19}{60} \frac{\mathcal{E}}{R}$$

② 充电过程出现  $U_{I_2} = \mathcal{E}/10$  时, 流过  $R$  上的总电量为

$$q'_R = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{\frac{C\mathcal{E}}{3} + \frac{C\mathcal{E}}{10}}{2} = \frac{13}{60} C\mathcal{E}$$

$$\text{此刻第一个电容器上的电压为 } U_4 = \frac{q_1 - q'_R}{C} = \frac{\frac{C\mathcal{E}}{3} - \frac{13}{60} C\mathcal{E}}{C} = \frac{7}{60} \mathcal{E}$$

此时回路 1 应满足的方程为  $U_4 - U_{I_2} = I_2 R$

$$\text{将 } U_4, U_{I_2} \text{ 的值代入上式得 } I_2 = \frac{U_4 - U_{I_2}}{R} = \left( \frac{7}{60} - \frac{1}{10} \right) \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1}{60} \frac{\mathcal{E}}{R}$$

**例 4** 如图 10-7-7 所示是由 24 个等值电阻连接而成的网络, 图 10-7-8 中电动势为  $\mathcal{E} = 3.00\text{V}$ 、内阻  $r = 2.00\Omega$  的电源与一阻值为  $28.0\Omega$  的电阻  $R'$  及二极管  $D$  串联后引出两线  $P$ 、 $Q$ , 二极管  $D$  的正向伏安曲线图如图 10-7-9 所示。

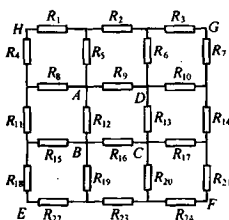


图 10-7-7



图 10-7-8

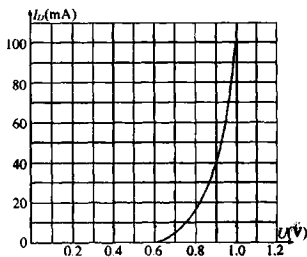


图 10-7-9

(1) 将  $P$ 、 $Q$  两端与图中电阻网络  $E$ 、 $G$  两点相接, 测得二极管两端间的电压为  $0.86\text{V}$ , 求电阻网络  $E$  与  $A$  间的电压  $U_{EA}$ ; (2) 若将  $P$ 、 $Q$  两端与图中电阻网络  $B$ 、 $D$  两点相接, 求通过二极管  $D$  的电流  $I_D$  和网络中  $E$ 、 $G$  间的电压  $U_{EG}$ 。

**分析与解** (1) 当引线两端  $P$ 、 $Q$  与电阻网络  $E$ 、 $G$  两点相接时, 二极管两端的电压  $U_{D1} = 0.86\text{V}$ , 则电阻网络  $E$ 、 $G$  两点间电压为  $U_{EG} = \mathcal{E} - I_1 R - U_{D1}$

式中  $R$  为电源内阻  $r$  与电阻  $R'$  的阻值的和, 从图 10-7-9 所示的二极管  $D$  的正向伏安曲线中可查得电压  $U_{D1}$  对应的电流  $I_1$  为  $25.0\text{mA}$ , 此电流就是流过电阻  $R$  及由  $E$  点流入电阻网络的电流. 将数据代入 (1) 式, 得  $U_{EG} = 1.59\text{V}$

电阻网络  $EG$  两端的等效电阻  $R_{EG}$  可由图 10-7-10 表示. 根据对称性,  $H, A, G, F$  电势相等, 且知  $U_{EA}$  为  $U_{EG}$  的一半, 即  $U_{EA} = 0.695V$

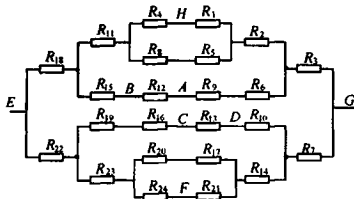


图 10-7-10

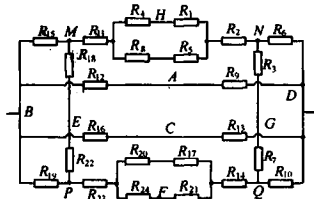


图 10-7-11

或设  $R_1$  至  $R_{24}$  各电阻的阻值均为  $R_0$ , 由图可求得等效电阻  $R_{EG}$  与  $R_0$  有关系

$$R_{EG} = \frac{13}{7} R_0$$

而等效电阻  $R_{EG} = \frac{U_{EG}}{I_1} = 55.6\Omega$ , 求得

$$R_0 = \frac{7}{13} R_{EG} = 29.9(\Omega)$$

$$U_{EG} = \frac{I_1}{2} R_{18} + \frac{3}{7} \frac{I_1}{2} (R_{15} + R_{12}) = \frac{I_1}{2} \left( 1 + \frac{6}{7} \right) R_0 = \frac{13}{14} I_1 R_0$$

(2) 当引线两端  $P, Q$  与电阻网络  $B, D$  两点相接时, 由图 10-7-11 求得等效电阻

$R_{EG}$  与  $R_0$  的关系, 并代入  $R_0$  的阻值, 有  $R_{BD} = \frac{5}{7} R_0 = 21.4(\Omega)$

通过二极管  $D$  的电流  $I_D$  与二极管两端电压有关系  $U_{D2} = E - I_{D2}(R_{BD} + R_0)$

代入数据得  $U_{D2} = 3 - I_D \times 51.3$

这是一条联系  $U_D$  与  $I_D$  的直线方程, 但是  $U_D$  与  $I_D$  又必须满足二极管的伏安特性曲线, 在图 10-7-12 中描出上式所示的直线, 它与二极管伏安特性曲线的交点的坐标即为通过二极管的电流  $I_D$ , 由图 10-7-12 中读出  $I_D = 40.5\text{mA}$ . 根据对称性, 图 10-7-10 中,  $P, M$  两点等势,  $N, Q$  两点等势, 流过  $R_{18}, R_{22}$  及流过  $R_3, R_7$  电阻的电流均为 0, 因此,  $E, G$  间的电势差与  $M, N$  间的电势差相等. 由图中知

$$U_{EG} = U_{MN} = \frac{2}{7} \frac{I_D}{2} \left[ R_{11} + \frac{(R_4 + R_1)(R_8 + R_1)}{R_4 + R_1 + R_8 + R_1} + R_2 \right] = \frac{2}{2} \frac{I_D}{2} \cdot 3 R_0 = 0.52V$$

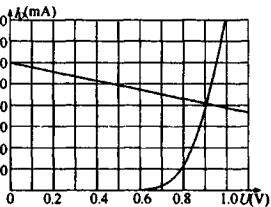


图 10-7-12

例5 试设计一个由电阻元件组成且能满足下列要求的直流电路:

(1)有四个端点  $A, B, A', B'$ , 其中  $B$  与  $B'$  是直接相连的.  $A', B'$  开路时,  $A, B$  间的电阻为  $8.0\Omega$ ;  $A, B$  开路时,  $A', B'$  间的电阻也是  $8.0\Omega$ ;

(2)在  $A, B$  两端加上  $1.0V$  电压时 ( $A$  接正,  $B$  接负), 测得  $A', B'$  两端的电压为  $0.10V$  ( $A'$  为正,  $B'$  为负). 在  $A', B'$  两端加上  $1.0V$  电压时, 测得  $A, B$  间的电压为  $0.1V$ ;

(3)所用电阻元件的个数要尽可能地少;

(4)要求设计两种电路.

分析与解 由要求(1)知该直流电路具有输入与输出端可对易的对称性. 按条件(3), 电阻元件个数要尽量少. 因  $B$  与  $B'$  是直接相连的, 故最少需三个电阻元件. 按照上述要求, 这样的电路只有如图 10-7-13(a)和图 10-7-13(b)所示的 T 形接法与  $\pi$  形接法.

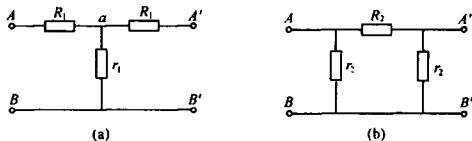


图 10-7-13

对图 10-7-13(a)而言, 在  $A', B'$  开路时,  $A, B$  间电阻

$$R_{AB} = R_1 + r_1 = 8.0\Omega \quad ①$$

当  $A, B$  端加上  $U_1 = 1.0V$  电压时,  $a, B$  间电压  $U_{aB} = \frac{r_1}{R_1 + r_1} U_{AB}$  ②

而测量  $A', B'$  间开路电压时,  $a, A'$  间电势降为零, 故  $a, B$  间电压就是  $A', B'$  间电压 ③

$$U_{A'B'} = U_{aB}$$

其中  $U_{A'B'} = 0.1V$ . 由①, ②, ③式可解得  $r_1 = 0.8\Omega, R_1 = 7.2\Omega$

对图 10-7-13(b)而言, 在  $A', B'$  开路时

$$R_{AB} = \frac{r_2(R_2 + r_2)}{R_2 + 2r_2} \quad ④$$

设  $U_{AB} = 1V, U_{A'B'} = 0.1V$ , 又有  $U_{A'B'} = \frac{r_2}{r_2 + R_2} U_{AB}$  ⑤

因为  $R_{AB} = 8.0\Omega$ , 则由④, ⑤式可解得  $R_2 = 79.2\Omega, r_2 = 8.8\Omega$ .



### 【精选习题】

1. 一个由粗细均匀的同种金属丝组成的如图 10-7-14 所示正方形的电路, 试求 1-2 段和 3-4 段金属丝在单位时间内释放的热量之比  $Q_{12}:Q_{34}$  (1, 2 与电源的连接导线电阻不计).

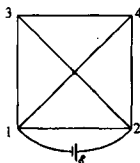


图 10-7-14

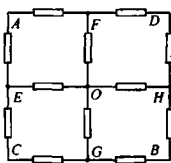


图 10-7-15

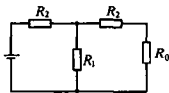


图 10-7-16

2. 图 10-7-15 所示电路中, 每个电阻的阻值均为  $R$ . 在  $A, B$  间加一个电压后, 测得  $F, H$  两点间电压为  $U_0$ . 求: (1) 加在  $A, B$  两点的电压; (2) 从  $A$  流入、从  $B$  流出的电流强度.

3. 为了降低负载电阻上的电压, 有时在电路中加入“T”型网络, 如图 10-7-16 所示. 现要求加上“T”型网络后, 负载  $R_0$  上的电压变为原来的一半, 而电源的输出功率则不变. 已知  $R_0 = 300\Omega$ , 求  $R_1, R_2$  之值.

4. 在图 10-7-17 所示的电路中  $\mathcal{E}_1 = 20\text{V}, \mathcal{E}_2 = 24\text{V}, \mathcal{E}_3 = 10\text{V}, R_1 = 10\Omega, R_2 = 3\Omega, R_3 = 2\Omega, R_4 = 28\Omega, R_5 = 17\Omega, C_1 = C_2 = 20\mu\text{F}, C_3 = 10\mu\text{F}$ , 电源内阻忽略不计, 问: (1)  $A, B$  两点的电势各为多少? (2) 若三个电容器起始均不带电, 求三个电容器与  $A, B, D$  相接的各极板上的电量.

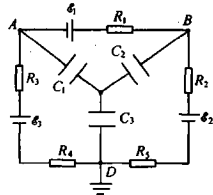


图 10-7-17

5. 二端电阻网络如图 10-7-18 所示. 试求  $P, Q$  两点之间的等效电阻  $R_{PQ}$ .

6. 额定功率  $P = 60\text{W}$ , 额定电压  $U = 220\text{V}$  的白炽灯的灯丝质量  $m = 0.3\text{g}$ , 把它通过断续器接到稳压电源上, 断续器周期性地接通和断开电路, 闭合电路的时间  $T_1 = 8 \times 10^{-3}\text{s}$ , 断开电路的时间  $T_2 = 12 \times 10^{-3}\text{s}$ , 电源电压为  $U_0$ , 这时恒能使灯泡正常发光, 假定灯丝材料的比热  $c = 140\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . 求: (1) 电源电压  $U_0$ ; (2) 估算一个周期内灯丝温度变化量  $\Delta T$ .

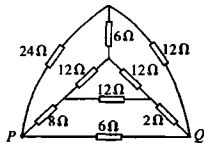


图 10-7-18

7. 在如图 10-7-19 所示的电路中, 各电阻值相同, 有  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ . 电池两端电压是  $U_1 = 1\text{V}, U_2 = 2\text{V}, U_3 = 3\text{V}$ , 试确定: (1) 流过每个电阻上的电流强度的大小和方向; (2) 流过每个电池的电流强度的大小和方向.

8. 把  $2.92\text{g}$  食盐溶解在  $1\text{L}$  水中, 测得其中  $44\%$  的食盐分子发生电离. 若电离后钠离子的迁移率(单位场强所引起的平均移动速率)为  $4.5 \times 10^{-8}\text{m}^2/\text{s} \cdot \text{V}$ , 氯离子迁移率为  $6.67 \times 10^{-8}\text{m}^2/\text{s} \cdot \text{V}$ . 求该食盐溶液的电阻率  $\rho$ . (已知钠和氯的摩尔质量分别为  $23 \times$



$10^{-3}\text{kg}$  和  $35 \times 10^{-3}\text{kg}$ )

9. 如图 10-7-20 所示, 直流电动机的轴与圆盘中心相连, 开关  $S$  断开时, 电压表的读数  $12.6\text{V}$ ; 开关  $S$  接通时, 电流表的读数  $2\text{A}$ , 电压表的读数为  $12\text{V}$ . 圆盘半径为  $5\text{cm}$ , 测速计测得转速为  $50/\text{s}$ , 两弹簧秤读数各为  $7.27\text{N}$  和  $6.10\text{N}$ , 问: (1) 电动机的输入功率、输出功率、效率为多少? (2) 拉紧皮带可使电动机停转, 此时电压表、电流表的读数又各为多少? 电动机的输入功率又为多大?

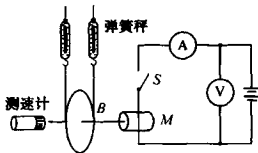


图 10-7-20

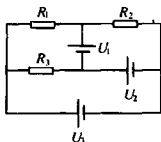


图 10-7-19

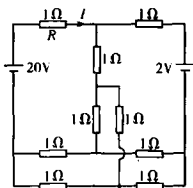


图 10-7-21

10. 图 10-7-21 所示电路中每个电阻的阻值都是  $1\Omega$ , 试求流过电阻  $R$  的电流  $I$ .

11. 一平行板电容器两极板间距为  $2d$ 、面积为  $S$ , 中间充满厚度相同, 介电常数均为  $\epsilon$ , 电阻率分别为  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的两层漏电介质. 两极板与电压为  $U$  的直流电源相接 (如图 10-7-22 所示), 电源内阻忽略不计. 试求: (1) 流过两层介质的电流强度; (2) 二介质交界面堆积的自由电荷; (3) 二介质内的电场强度.

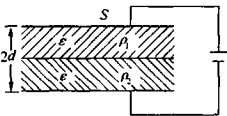


图 10-7-22

12. 图 10-7-23(甲)所示电路中  $R_1$  是阻值为  $1.0\text{k}\Omega$ 、且阻值不随温度改变的标准电阻, 电源电动势为  $7.0\text{V}$ , 其内阻可不计. (乙)图中实线是电阻  $R$  的伏安特性曲线, 电路周围的环境温度保持  $t_0 = 25^\circ\text{C}$  不变, 电阻  $R$  散热跟它与环境温度的关系是, 温差每相差  $1^\circ\text{C}$ , 放热  $6 \times 10^{-4}\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . 问: (1) 调节  $R_2$ , 使  $R_1$  与  $R$  消耗的电功率相等, 这时  $R$  的温度是多少? (2) 当  $R_2 = 0$  时  $R$  上的电压和  $R$  的阻值各是多大?

13. 图 10-7-24 所示的由电容和直流电源构成的网络中,  $C_1 = 4C_0$ ,  $C_2 = 2C_0$ ,  $C_3 = C_0$ , 电源电动势为  $E$ , 电源内阻可忽略不计. 开始时  $K_4$  断开,  $K_1, K_2, K_3$  接通, 为三个电容充电. 而后断开  $K_1, K_2, K_3$ , 接通  $K_4$ , 使电容器放电. (1) 计算放电过程中, 电阻  $R$  上产生的总热量; (2) 确定放电量达到总放电量一半时, 流经电阻  $R$  的电流强度.

14. 如图 10-7-25 所示, 12 根电阻均为  $R$  的电阻丝连接成正六面体框架. 在 2 根电阻丝中连有电动势分别为  $E_1$  与  $E_2$  的电源, 另外 5 根电阻丝中连有 5 个相同的电容器

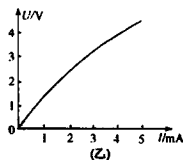
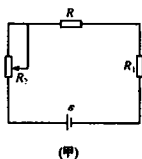


图 10-7-23

C. 设电源正、负极之间的距离可忽略, 内阻也可忽略, 且  $E_1 = 2I_0R$ ,  $E_2 = I_0R$ . 试求: (1) 图中棱  $AB$  中的电流  $I_{AB}$ ; (2) 图中棱  $A'B'$  中电容器极板上的电量  $Q_{A'B'}$ .

15. 有三个阻值相等的电阻, 安装在电阻盒内, 并引出四个接线柱  $A, B, C, D$ . 如图 10-7-26(甲)所示. 另有一个检验器, 如图 10-7-26(乙)所示, 内有内阻不计的电流表和电源, 并引出  $X, Y$  接线柱, 当将  $X, Y$  分别与  $AB, AD, BD, CD$  连接时, 电流表的读数依次为  $0.30A, 0.15A, 0.10A, 0.30A$ . 试根据以上测量结果画出甲图内三个电阻的接线图.

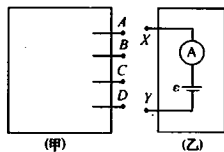


图 10-7-26

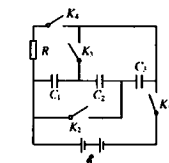


图 10-7-24

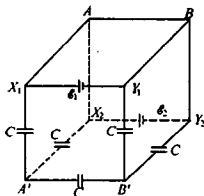


图 10-7-25

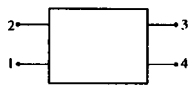


图 10-7-27

16. 如图 10-7-27 所示, 有一木盒子上有四个接线柱, 其内部装有由电阻、电容和晶体二极管各一个组成的电路, 并已知任意两个接线柱之间最多只有一个元件, 且 1-3, 2-4 接线柱之间没有跨接电容. 用多用电表的电阻挡进行测量的数据如下表:

(注:  $1^+ - 2^-$  指红表笔接接线柱接 1, 黑表笔接接线柱接 2. 晶体二极管作实用情况看待)

序号	测试方式	结果	序号	测试方式	结果
1	$1^+ - 2^-$	$420\Omega$	7	$4^+ - 1^-$	0
2	$1^- - 2^+$	$420\Omega$	8	$4^- - 1^+$	0
3	$2^+ - 3^-$	充放电	9	$1^+ - 3^-$	充放电
4	$2^- - 3^+$	$690\Omega$	10	$1^- - 3^+$	$1300\Omega$

5	3 <sup>+</sup> -4 <sup>-</sup>	1310Ω	11	2 <sup>+</sup> -4 <sup>-</sup>	410Ω
6	3 <sup>-</sup> -4 <sup>+</sup>	充放电	12	2 <sup>-</sup> -4 <sup>+</sup>	410Ω

17. 如图 10-7-28 所示的网络中, 已知部分支路上电流值及其方向, 某些元件参数和支路交点的电势值(有关数值及参数已标在图上). 请你利用所给的有关数值及参数求出含有电阻  $R_x$  的支路上的电流值  $I_x$  及其方向.

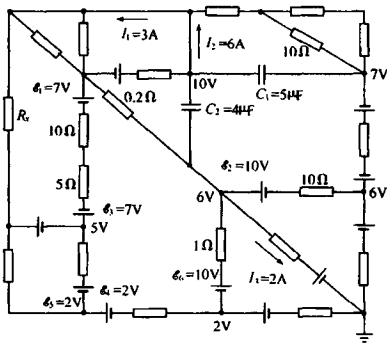


图 10-7-28

18. 六个相同的电阻(阻值均为  $R$ ) 连成一个电阻环, 六个接点依次为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 如图 10-7-29(甲) 所示. 现有五个完全相同的这样的电阻环, 分别称为  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$ .

现在将  $D_2$  的 1, 3, 5 三点分别与  $D_1$  的 2, 4, 6 三点用导线连接, 如图 10-7-29(乙) 所示. 然后将  $D_3$  的 1, 3, 5 三点分别与  $D_2$  的 2, 4, 6 三点用导线连接……依次类推, 最后将  $D_5$  的 1, 3, 5 三点分别连接到  $D_4$  的 2, 4, 6 三点上.

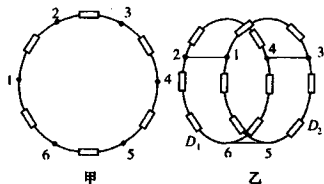


图 10-7-29

(1) 证明全部接好后, 在  $D_1$  上的 1, 3 两点间的等效电阻为  $\frac{724}{627}R$ ; (2) 求全部接好后, 在  $D_5$  上的 1, 3 两点间的等效电阻.

19. 某暗盒内是由若干定值电阻接成的电路. 从该电路中引出四个端钮 1, 1', 2 和 2', 如图 10-7-30(a) 所示. ① 当 2-2' 端短接, 1-1' 端加  $U_1 = 9.0$  伏电压时, 测得  $I_1 = 3.0$

安,  $I_2 = 3.0$  安, 方向如图 10-7-30(b) 所示。②当 1-1' 端短接, 2-2' 端加  $U_2 = 3.0$  伏电压时, 测得  $I'_1 = 1.0$  安,  $I'_2 = 1.5$  安, 方向如图 10-7-30(c) 所示。(1) 试判断确定暗盒内能满足上述条件的最简单的电路并计算构成此电路的各电阻的阻值。(2) 当 1-1' 端接电动势  $E = 7.0$  伏、内阻  $r = 1.0$  欧的电源而 2-2' 端接  $R_L = 6.0$  欧的负载时, 如图 10-7-30(d) 所示, 该负载获得的功率  $P_L$  是多少?

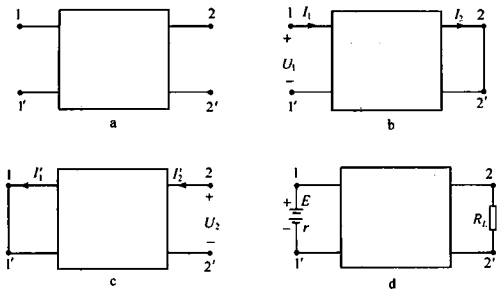


图 10-7-30

20. 远距离开动与停止电动机, 通常用电磁开关(交流接触器), 其构造示意图如图 10-7-31 所示。  $T_1, T_2$  为由电磁铁驱动的电路板, 上面画斜线部分为导体。电磁铁  $M$  不通电时,  $T_1, T_2$  处于图示位置, 主触点  $A_1$  与  $A'_1, A_2$  与  $A'_2$  均不接通; 电磁铁  $M$  通电时,  $T_1, T_2$  被吸引向上移动, 使主触点  $A_1$  与  $A'_1$  接通,  $A_2$  与  $A'_2$  接通。电磁开关通常还附有四对接点  $B_1, B'_1, B_2, B'_2, C_1, C'_1$  和  $C_2, C'_2$ , 都称为辅助接点。电磁铁不通电时, 接点  $B_1$  与  $B'_1, B_2$  与  $B'_2$  均不接通, 而接点  $C_1$  与  $C'_1$  接通,  $C_2$  与  $C'_2$  接通。电磁铁通电时, 情况正好相反。

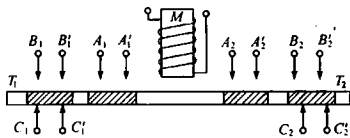


图 10-7-31

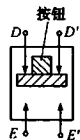


图 10-7-32

控制用的按钮开关的构造如图 10-7-32 所示。  $D, D'$  为一对接点, 按钮下装有弹簧, 不按按钮或按后手又松开时, 按钮都处在图中所示位置,  $D, D'$  接通; 按下按钮时,  $D, D'$  切断。  $E, E'$  为另一对接点, 按下按钮时接通, 不按按钮或按后手又松开时切断。

现在,电机的主电路(主接点与电源、电机的连线)已经接好如图 10-7-33,请你在图上画连线,连接控制电路以满足下述要求:在高电机较远的甲、乙两处地方,均设开机按钮和停机按钮,当电机停止时,按下任何一个开机按钮(随即松开),电机即开始运转;当电机运转时,按下任何一个停机按钮(随即松开),电机即可停机(辅助接点限定只利用  $B_2, B'_2$ )。

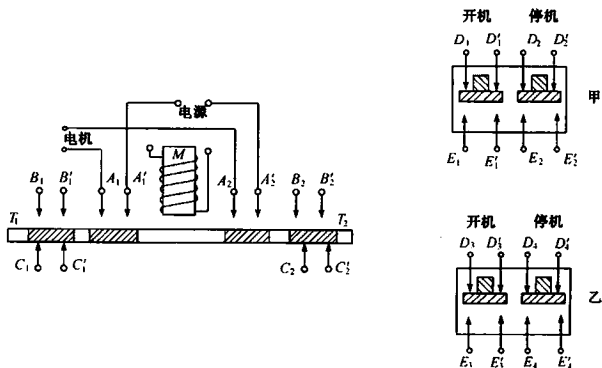


图 10-7-33

21. 某电视台有一台用于智力竞赛的抢答显示系统(抢答机),它可供红、黄、蓝三个参赛队使用.抢答机用继电器控制,其线路如图 10-7-34 所示(参见后附说明).主持

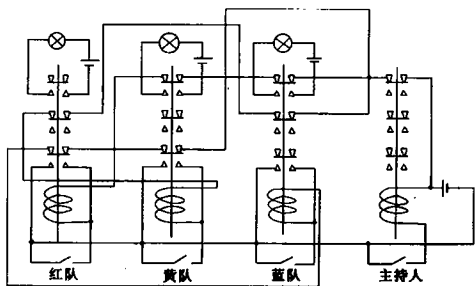


图 10-7-34

人宣布问题要求抢答,然后说“现在开始”以后,最先按下按钮的队的指示灯点亮,其余任何一个队再按按钮则无任何反应。而亮灯的队松开按钮后其指示灯依然点亮。若在主持人说“现在开始”前任何一个队违规提前按按钮,导致自己的指示灯点亮,主持人即可判定该队犯规。为了解除某队指示灯点亮的状态,主持人只需按一下自己操作台上的按钮,即可恢复初始的待命状态。现在为满足四个队参加比赛,必须增加一个供绿队使用的绿灯线路,为此需将原线路改装,技术人员已将部分线路连好,如图10-7-35所示。请你将尚未完成的接线继续接受,使其整体成为一台供四个队参赛用的抢答机。

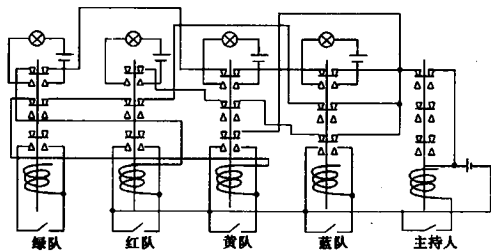


图 10-7-35

说明:

(1) 各图中  $\swarrow$  表示按钮开关,按下时为接通,松手时自动弹起为断开。

(2) 图 10-7-36 中  $L$  为电磁铁线圈,不通电时,继电器不吸合,如图 10-7-36(a) 所示,这时三对常闭接点  $A_1$  与  $A'_1$  接通,  $A_2$  与  $A'_2$  接通,  $A_3$  与  $A'_3$  接通;三对常开接点  $B_1$  与  $B'_1$ ,  $B_2$  与  $B'_2$ ,  $B_3$  与  $B'_3$  均不相通。 $L$  通电时,继电器吸合,如图 10-7-36(b) 所示。三对常闭接点断开,三对常开接点中  $B_1$  与  $B'_1$  接通,  $B_2$  与  $B'_2$  接通,  $B_3$  与  $B'_3$  接通。

(3) 作图时,不连接的交叉线如图 10-7-37 所示。

(4) 两连接的交叉线,在连接处画上黑点,如图 10-7-38

所示。

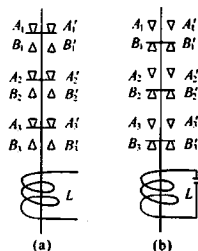


图 10-7-36



图 10-7-37



图 10-7-38

## 问题与讨论 根据自相似性求其电阻

在求无限网络的等效电阻时,常常碰到电阻结构的相似性,即局部与整体相似,或在标度变换下的自相似性.用数学语言表述为下一次分割的局部与此次分割的整体相似.实际上这就是现代数学中的“分形”思想.

**例 1** 电阻丝无限网络如图 10-8-1 所示,每一段金属丝的电阻均为  $r$ ,试求  $A$ 、 $B$  两点间的等效电阻  $R_{AB}$ .

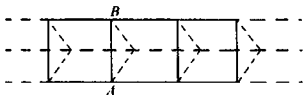


图 10-8-1

**分析与解** 设想有电流从  $A$  流入,  $B$  流出,由对称性可知,网络中背面(即图中无限长的虚线)那根无限长电阻丝中各点等势.我们可以这

样来思考:不妨设想电流从  $A$  点流入,从  $B$  点流出,据对称性,此金属丝中电流只能从两侧向中间流(或从中间流向两侧),那么若使电流从  $B$  点流入,从  $A$  点流出,一方面因电流反向,此金属丝中电流也须从中间向两侧流(或两侧向中间流),另一方面,“ $B$  点流入、 $A$  点流出”的效果是一样的,仍要求此金属丝中的电流从两侧向中间流(或从中间向两侧流),这样便发生了矛盾.故可删去背面这根电阻丝.这样可把立体网络等效为图 10-8-2 所示的平面网络.

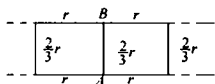


图 10-8-2

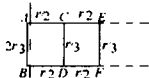


图 10-8-3

又因网络相对  $A$ 、 $B$  联线具有左右对称,故可折叠成图 10-8-3 所示,此网络可视为  $A$ 、 $B$  之间  $2r/3$  电阻与图中虚线右侧的两端开路半无限网络并联而成.

从虚线往右看,两端开路半无限网络的电阻计为  $R_{AB}$ .其结构和从  $CD$  两端往右看的两端开路半无限网络的结构具有相似性.因为是无限网络,有  $R_{AB} = R_{CD} = R_x$ .这样

$$R_x = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} + \frac{R_x \cdot \frac{r}{3}}{R_x + \frac{r}{3}}, \text{ 解得 } R_{x1} = \frac{3 + \sqrt{21}}{6} r \text{ 和 } R_{x2} = \frac{3 - \sqrt{21}}{6} r, \text{ 舍去 } R_{x2}, \text{ 所以 } R_{AB} =$$

$$\frac{\frac{2}{3}r \cdot R_x}{\frac{2}{3}r + R_x} = \frac{2\sqrt{21}}{21}r.$$

**例2** 用同种均匀金属丝连接成的无限内接等边三角形电阻网络如图 10-8-4 所示, 每个外三角形的三边中点为内接三角形的三个顶点. 设最外面的等边三角形的边长为  $a$ , 金属丝单位长度的电阻为  $r$ , 试求  $A$ 、 $B$  之间的等效电阻  $R_{AB}$ .

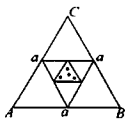


图 10-8-4

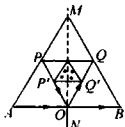


图 10-8-5

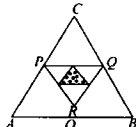


图 10-8-6

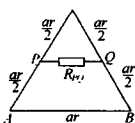


图 10-8-7

**分析与解** 如图 10-8-5 所示, 网络相对图中的虚直线  $MON$  具有左、右对称性. 若电流从  $A$  点流入, 从  $B$  点流出, 那么从左侧流向  $MON$  的电流分布必定与从  $MON$  向右侧流出的电流分布相同. 因此,  $A$  到  $O$  的电流与  $O$  到  $B$  的电流相同,  $P'$  到  $O$  的电流与  $O$  到  $Q'$  的电流相同. 因而,  $P'OQ'$  与  $AOB$  可在  $O$  处分开, 而不影响计算的结果. 换言之, 可将图 10-8-5 的网络等效成图 10-8-6 所示的网络.

因为每一次的内接正三角形的边长是前一次要被分割的外三角形的边长的二分之一, 因此图 10-8-6 的网络相当于在大三角形  $ABC$  两边中点  $P$  与  $Q$  之间连接一个边长为  $\frac{a}{2}$  的无限内接三角形网络, 两者在结构上体现了在标度变换下的自似性, 阻值的变化也应具有这样性质, 即  $P$ 、 $Q$  两点之间的等效电阻  $R_{PQ} = \frac{R_{AB}}{2}$ , 则图 10-8-6 的网络可等

效为图 10-8-7 所示的网络. 对图 10-8-7 的网络, 容易得出  $R_{AB} = \frac{ar + 2R_{PQ}}{2ar + 3R_{PQ}}$ . 则

$$R_{AB} = \frac{\sqrt{7}-1}{3}ar$$

**例3** 如图 10-8-8 所示的是等边  $\triangle ABC$ , 将其三边中点连接起来 (称为第一次分割), 得图 10-8-9; 将图 10-8-9 中余下的三个三角形即  $\triangle ADE$ 、 $\triangle BDF$ 、 $\triangle EFC$  的各边中点连接起来 (称为第二次分割), 得图 10-8-10; 按照上述办法, 进行第三次分割, 得图 10-8-11; 这样无限地分割下去, 得到一个无限网络. 设经过  $n$  次分割后的几何对象表示由相同规格的电阻丝构成的电阻网络, 每段分割线就代表一根电阻丝, 且  $\triangle ABC$  的每边电阻丝的电阻均为  $r$ . 求: (1) 经过第三次分割后的电阻网络中任两个顶点间的等效电阻 (顶点指  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ); (2) 经过第  $n$  次分割后的电阻网络中任两个顶点间的等效电阻.

**分析与解** (1) 最初的网络  $\triangle ABC$  由“ $\triangle - Y$ ”变换可化为图 10-8-12 所示网络, 每



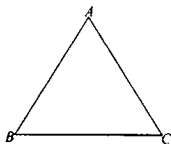


图 10-8-8

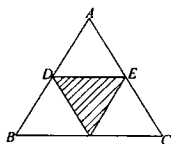


图 10-8-9

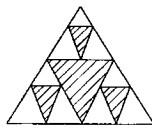


图 10-8-10

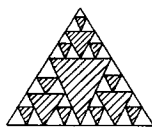


图 10-8-11

条边的阻值为  $\frac{r}{3}$ 。

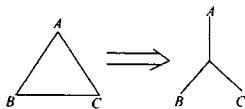


图 10-8-12

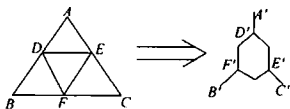


图 10-8-13

再将经一次分割后的网络的周边 $\triangle$ 变为Y形,得图 10-8-13 所示网络,继而对  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$  组成的三角形进行 $\triangle$ 变为Y形,得图 10-8-12 所示,而三个图 10-8-12 形式的组合又像图 10-8-13 一样又变成图 10-8-12 的形式。

上述变换情况,恰恰反映了这种分割在标度变换下的自相似性,阻值的变化也应具有这样性质,即构成等比数列。

$$\triangle ABC \text{ 的电阻 } R_{AB} = \frac{2}{3} r.$$

经过一次分割后的电阻网络  $R_{AB1} = \frac{5}{9} r$ . (计算方法参照例 2)

$$\text{则公比 } q = \frac{R_{AB1}}{R_{AB}} = \frac{5}{6}, \text{ 从而 } R_{AB2} = \frac{5}{6} R_{AB1} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 R_{AB} = \frac{125}{324} r$$

$$(2) \text{ 由 (1) 中分析有 } R_{ABn} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \frac{2}{3} r$$

### 【巩固习题】

1. 在如图 10-8-14 所示二端无限网络中,每个电阻的阻值均为  $R$ ,求  $A, B$  间等效电阻  $R_{AB}$ 。

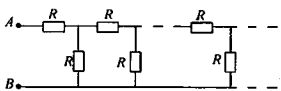


图 10-8-14

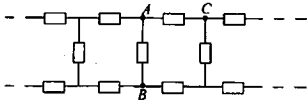


图 10-8-15

2. 电阻丝无限网络如图 10-8-15 所示, 每一段电阻丝的电阻均为  $R$ , 试求  $A, B$  两点间的等效电阻  $R_{AB}$  以及  $A, C$  两点间的等效电阻  $R_{AC}$ .

3. 如图 10-8-16 所示为一无穷长的三角形电路, 其中每个电阻阻值都是  $R$ , 求  $A, B$  两点间的等效电阻  $R_{AB}$ .

4. 如图 10-8-17 所示, 由电阻组成的长链有无数个结点. 第一个结点有阻值为  $R$  的两个电阻, 第二个结点有阻值为  $2R$  的两个电阻, 第三个结点有阻值为  $4R$  的两个电阻, 如此下去, 下一个结点的电阻总是前一个结点电阻的 2 倍, 那么  $A, B$  两点间的等效电阻  $R_{AB}$  为多少?

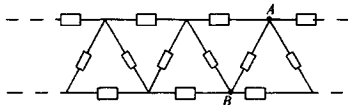


图 10-8-16

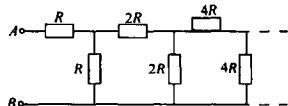


图 10-8-17

5. 如图 10-8-18 所示, 由电阻  $R_1$  和  $R_2$  组成的一无限长的梯形网络, 试问: (1)  $A, B$  两端之间的等效电阻是多少? (2) 当在  $A, B$  两端之间加上电压  $U_0$  时,  $U_{CD}, U_{EF}, U_{GH}$  …… 之间有何关系? (3)  $R_1/R_2$  为多少时, 可使梯形网络的每一节成为衰减一半电压的衰减器?

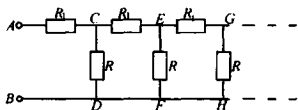


图 10-8-18

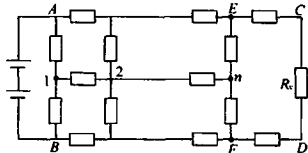


图 10-8-19

6. 如图 10-8-19 所示, 已知电池组的电动势  $\mathcal{E} = 10\text{V}$ , 内阻为  $r = 0.5\Omega$ , 每个电阻均为  $5\Omega$ ,  $n$  为有限值. (1)  $C, D$  间应该接多大的电阻  $R_x$ , 才能使电源的输出功率跟  $n$  的具体数值无关? 此时的输出功率是多少? (2) 要使电源的输出功率最大, 各电阻  $R$  的值应为多大?

7. 如图 10-8-20 所示的电路网络, 每个电阻的阻值均为  $R$ , 求在  $C, D$  间接上一个多大的电阻  $R_x$ , 使  $A, B$  间的总电阻与格数无关, 总电阻是多少?

8. 如图 10-8-21 所示的无限旋转内接正方形金属丝网络由一种粗细一致、材料相同的金属丝构成, 其中每一个内接正方形的顶点都在外侧正方形四边中点上. 已知最外侧正方形每边长的电阻都为  $R_0$ , 求网络中  $A, C$  两端间等效电阻  $R_{AC}$ ; 以及  $E, G$  两端间

等效电阻  $R_{EG}$ .

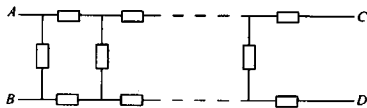


图 10-8-20

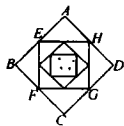


图 10-8-21

9. 正三角形框, 每个边电阻为  $R$ , 18 个边构成如图 10-8-22 所示 9 个正三角形组成的网络. 求  $R_{AB}$ .

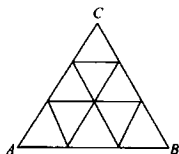


图 10-8-22

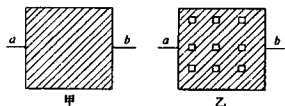


图 10-8-23

10. 如图 10-8-23(甲), 边长为  $9l$ 、厚薄均匀的薄电阻合金正方形板的两边嵌有导电性能良好的金属丝, 此时  $a, b$  间的阻值为  $R$ , 之后在该板上均匀对称地打上九个边长为  $l$  的正方形孔(如图 10-8-23(乙)所示), 求此时  $a, b$  间的阻值?

11. 如图 10-8-24 所示为一线型电阻无限网络, 每个电阻的阻值均为  $r$ . 试求: (1)  $A, B$  间的等效电阻  $R_{AB}$ ; (2) 若在  $A, B$  两点接上电动势为  $\mathcal{E}$ 、内阻为  $r$  的电源, 第  $n$  个网络中各电阻上的电流强度是多少?

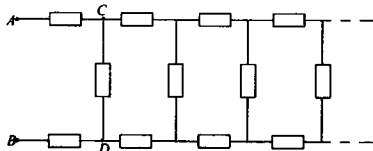


图 10-8-24

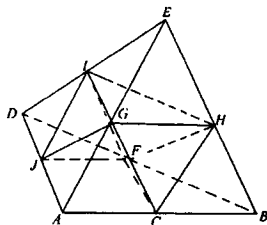


图 10-8-25

12. 正四面体框架电阻网络如图 10-8-25 所示, 其中每段电阻均为  $R$ , 试求: (1)  $CE$

点间等效电阻  $R_{CE}$ ; (2)  $CI$  点间等效电阻  $R_{CI}$ .

13. 由 7 个阻值均为  $r$  的电阻组成的网络元如图 10-8-26(甲)所示, 由这种网络元彼此连接形成的单向无限网络如图 10-8-26(乙)所示, 试求图(乙)中  $P, Q$  两点之间的等效电阻  $R_{PQ}$ .

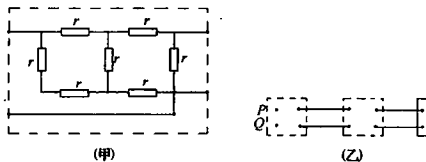


图 10-8-26

## 第十一章 磁场与电磁感应

## 第一节 磁场和电流的关系

## 【知识要点】

## 一、磁场

在磁体或运动的电荷周围存在着一种物质,它能够对铁磁性物质或其他运动的电荷有作用力,这种物质就称为磁场.一切磁现象都来源于电荷的运动.

1. 磁感应强度  $B$ 

用图 11-1-1 所示的装置来研究磁场,在等臂天平右盘下,吊有通电线圈,线圈下半部分处于方向与其平面垂直的磁场中,线圈所通的电流强度  $I$ , 受力导线的长度  $L$  均可测量,线圈所受的磁场力  $F$ , 可以通过天平平衡计算出. 实验时发现  $F/IL$  的比值之值, 因磁场不同而不同, 于是我们定

$$\text{义 } B = \frac{F}{IL}$$

为磁场的磁感应强度,单位是特斯拉(T).

## 2. 磁感线

假想的一组闭合曲线,曲线上任一点的切线方向都跟该点的磁感应强度方向一致. 磁感线不相交,疏密程度反映了磁场强度.

## 3. 匀强磁场

磁感应强度处处相同的磁场,称为匀强磁场. 匀强磁场的磁感线方向一致,彼此平行、疏密均匀. 如两个靠得很近的相互平行的异名磁极之间的磁场或通电长直密绕螺线管内的磁场.

4. 磁通量  $\Phi$ 

为了用磁感线的疏密程度来反映磁场的强弱,把磁感线量化,引入了磁通量的概

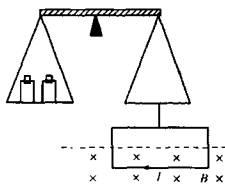


图 11-1-1

念,把磁感应强度  $B=1$  特的磁场中,垂直穿过单位面积的磁感线的条数定义为一个基本单位,称为 1 韦伯(Wb),于是磁通量  $\Phi$  的定义为  $\Phi = BS\cos\alpha$ , ②

式中  $\alpha$  为磁场方向与面的方向(即面的法线方向  $n$ )的夹角,于是  $B = \frac{\Phi}{S\cos\alpha}$ ,所以磁感应强度又称为磁通密度,简称磁密.

### 5. 电流的磁场

#### 毕奥—萨伐尔定律

如图 11-1-2, 设  $\Delta L$  为导线的一段线微元,其电流强度为  $I$ , 则在真空中距该“线微元”为  $r$  的  $P$  处,此通电微元产生的磁感应强度

$$\text{为 } \Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \Delta L \sin\theta, \quad \text{③}$$

式中  $\theta$  为电流方向与矢径  $r$  之间的夹角,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{T}\cdot\text{m}/\text{A}$ ,  $\Delta B$  的方向为右手定则.

#### (1) 圆形电流中心的磁感应强度

把通电圆环分为无穷多的线微元  $\Delta L$ , 每个  $\Delta L$  在中心  $O$  处产生的磁感应强度都是一样的.

$$\text{因为 } \Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \Delta L$$

$$\text{所以 } B = \sum \Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sum \Delta L = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} 2\pi r$$

$$\text{所以 } B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

#### (2) 无限长直线电流的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{可用微元法证明})$$

式中  $r$  是场点  $P$  到导线的垂直距离.

#### (3) 长度为 $L$ 的有限长直导线电流 $I$ 的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

显然,当  $L$  趋于无限大时,  $\theta_1 \rightarrow 0^\circ$ ,  $\theta_2 \rightarrow 180^\circ$ , ⑥式变为⑤式.

#### (4) 细长密绕通电螺旋管内的磁感应强度

$$B = \mu_0 n I$$

式中  $n$  是螺旋管单位长度上线圈的匝数,⑦式表示的场是匀强磁场.

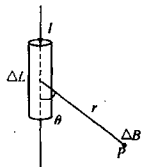


图 11-1-2

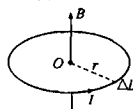


图 11-1-3



图 11-1-4

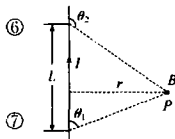


图 11-1-5

## 安培力

### 1. 安培力

通电导线在磁场中所受到的作用力,称为安培力。

$$F = BIL\sin\theta \quad (8)$$

式中  $\theta$  是  $B$  与  $I$  (即  $L$ ) 的夹角,当导线与磁场方向垂直时,安培力最大,当导线与磁场平行时,安培力为零。安培力  $F$  的方向,可用左手定则来判断,结果表明,不管通电导线与磁场方向的夹角如何,安培力  $F$  的方向永远垂直  $B$  与  $I$  所决定的平面,即  $F \perp B$ 、 $F \perp I$ 。

### 2. 磁力矩

可以证明,匀强磁场对通电线圈作用的力偶矩的计算式为  $M = NBIS\cos\theta$  (9)

式中  $N$  为线圈匝数, $I$  为线圈中通过的电流强度, $\theta$  为线圈平面与磁场方向所夹的角, $S$  为线圈的面积,而不管线圈是否是矩形线圈,并且力偶矩的大小与转轴的位置无关。

### 【例题分析】

**例 1** 如图 11-1-6 所示,将均匀细导线做成的环上的任意两点  $A$  和  $B$  与固定电源连接起来,计算由环上电流引起的环中心的磁感应强度。

**解** 设  $A$ 、 $B$  两点之间的电压为  $U$ ,导线单位长度上的电阻为  $\rho$ ,则  $I_1 = \frac{U}{aR\rho}$  (1)

$$I_2 = \frac{U}{\rho R(2\pi - a)} \quad (2)$$

磁感应强度  $B$  可以视为圆环的各个部分(将圆环视为许多个很小长度部分的累加)的贡献之和。

$$\text{因为 } \Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \Delta L, \text{ 所以 } B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R^2} L_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R^2} aR = \frac{\mu_0 I_1 a}{4\pi R}, \quad (3)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R} (2\pi - a) \quad (4)$$

把①代入③得  $B_1 = \frac{\mu_0 U}{4\pi\rho R^2}$ ,把②代入④得  $B_2 = \frac{\mu_0 U}{4\pi\rho R^2}$ 。由于  $B_1$ 、 $B_2$  方向相反,因此在环中心的磁感应强度等于零。

**例 2** 如图 11-1-7 所示,长直电流  $I_1$ 、 $I_2$  互相平行,相距  $d$ 。矩形线圈  $AECD$  与长直电流共面,线圈的  $AE$  边与长直电流平行,且与  $I_2$  的距离为  $x$ 。线圈的边长分别为  $a$ 、 $b$ 。试求:(1)  $AE$ 、 $CD$  边上任一点的磁感应强度;(2) 线圈通顺时针方向的稳恒电流  $I_3$  时线圈受到的磁场力。

**解** (1) 设  $AE$ 、 $CD$  边上任一点的磁感应强度分别为  $B_{AE}$ 、 $B_{CD}$ ,且设  $I_1$  的磁场方向为正方向,则

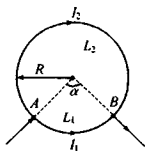


图 11-1-6

$$B_{AE} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+x)} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}$$

$$B_{CD} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+x+a)} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(x+a)}$$

(2) 线圈处于非均匀磁场中, 它所受的力为线圈 4 条边受的力的矢量和. 由图 11-1-7 可知,  $EC$  边和  $DA$  边受的力互相抵消, 所以线圈受的合力  $F$  是  $AE$  边和  $CD$  边所受的力的矢量和.

设  $AE, CD$  边受的力分别为  $F_{AE}, F_{CD}$ , 沿  $x$  方向的力为正, 则

$$\begin{aligned} F &= F_{CD} - F_{AE} = bI_3(B_{CD} - B_{AE}) \\ &= bI_3 \left[ \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+x+a)} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(x+a)} - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+x)} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} \right] \\ &= \frac{\mu_0 abI_3}{2\pi} \left[ \frac{I_2}{x(x+a)} - \frac{I_1}{(d+x)(d+x+a)} \right] \end{aligned}$$

**例 3** 一质量均匀分布的细圆环, 其半径为  $r$ , 质量为  $m$ , 令此环均匀带正电, 总电量为  $Q$ . 现将此环平放在绝缘的光滑水平桌面上, 如图 11-1-8 所示, 并处于磁感应强度为  $B$  的均匀磁场中, 磁场方向竖直向下. 当此环绕通过其中心的竖直轴以角速度  $\omega$  沿图示方向旋转时, 试求环中的张力.

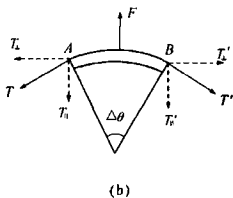
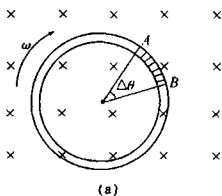


图 11-1-8

**解法一** 由于环在转动, 环上的电荷随环一起定向运动, 这相当于在此环上有恒定电流  $I = \frac{Q}{2\pi} = \frac{\omega Q}{2\pi}$  ①

在环上取一微小段弧  $AB$ , 弧长  $\Delta L \triangleq \Delta\theta r$

$$F = IB\Delta L = \frac{\omega Q}{2\pi} B\Delta\theta \cdot r \quad ②$$

$$\Delta m = \frac{m}{2\pi} \Delta\theta \quad ③$$



$$\text{向心力} \quad 2T \sin \frac{\Delta\theta}{2} - F = \Delta m \omega^2 r \quad (4)$$

②、③代入④,又因为  $\Delta\theta$  很小,故  $\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$ , 所以

$$2T \frac{\Delta\theta}{2} - \frac{\omega Q}{2\pi} B \Delta\theta r = \frac{m}{2\pi} \Delta\theta \omega^2 r, \text{ 即 } T = \frac{\omega r}{2\pi} (QB + m\omega)$$

**解法二** 取环上一微小段圆弧  $AB$ , 它所对应的圆心角为  $\Delta\theta$ , 其质量为  $\Delta m = m \times \Delta\theta/2\pi$ . 所带电荷为  $\Delta q = Q \times \Delta\theta/2\pi$ .  $\Delta q$  电荷以  $\omega r$  的线速度运动, 运动电荷在磁场中受到洛伦兹力. 由左手定则可知该力方向垂直于圆环指向外, 如图 11-1-8(b) 所示. 其大小为  $F' = \Delta q \cdot vB = Q \cdot \frac{\Delta\theta}{2\pi} \cdot \omega r B$ . 以微小段  $AB$  弧为研究对象

$$2T \sin \frac{\Delta\theta}{2} - F' = \Delta m \cdot \omega^2 r. \text{ 所以}$$

$$T = \frac{\omega r}{2\pi} (QB + m\omega)$$

### 【巩固习题】

1. 如图 11-1-9 所示, 长度为  $l$ , 质量为  $m$  的金属杆, 用两根长度均为  $h$  的金属轻杆接在水平轴上, 构成框架, 放入均匀磁场中, 磁感应强度为  $B$ , 方向竖直向上. 当开关  $K$  闭合一会再断开, 短时间  $\tau$  内电流脉冲  $I_0$  通过框架, 试确定框架偏离竖直平面的最大偏角. 可以认为在短时间  $\tau$  内框架偏移很小.

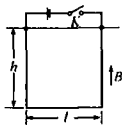


图 11-1-9

2. 铜棒质量为  $0.1\text{kg}$ , 静卧于相距  $8\text{cm}$  的水平轨道上, 两者间的动摩擦因数为  $0.5$ . 现从一轨道载送  $5\text{A}$  电流至另一轨道, 欲使铜棒滑动, 两轨道间所加的匀强磁场强度最小值为多少?

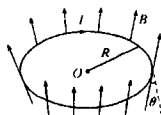


图 11-1-10

3. 图 11-1-10 所示, 一个半径为  $R$  的导电圆环与一个轴向对称的发散磁场处处正交, 环上各点磁感应强度  $B$  的大小相同, 方向均和环面轴线方向成  $\theta$  角, 若导线环上载有一恒定电流  $I$ , 试求磁场作用在圆环上安培力的大小和方向.

4. 在磁感应强度  $B = 0.08$  特, 方向竖直向下的磁场中, 一根长度  $l_1 = 20$  厘米, 质量  $m = 24$  克的横杆, 水平地挂在两根长度均为  $l_2 = 0.12$  米的细径导线上, 如图 11-1-11 所示. 导线的两个固定点接上电源, 调节滑动变阻器使电路中维持恒定电流  $I = 2.5$  安. 导线从偏离竖直位置角  $\alpha = 30^\circ$  放下, 求当导线通过竖直位置时横杆的速度  $v$ .

5. 图 11-1-12 中  $abcd$  表示的是电流计中的通电线圈,  $ab = cd = L_1 = 1\text{cm}$ ,  $ad = bc = L_2 = 0.9\text{cm}$ , 共有  $n = 50$  匝, 磁感应强度  $B = 0.5\text{T}$ , 均匀转向分布, 线圈两端接有螺旋弹簧, 每转过  $1^\circ$  弹簧可产生  $2.5 \times 10^{-19}\text{N}\cdot\text{m}$  的恢复力矩, 若线圈最大偏转角为  $90^\circ$ . 求: (1) 该

电流计的满刻度值  $I$ ; (2) 当指针偏转  $40^\circ$  时, 通入线圈的电流强度.

6. 一个导电的细硬环放在不导电的水平面上, 并且处于均匀磁场中, 磁力线水平方向, 磁感应强度为  $B$ , 环的质量为  $m$ , 半径为  $R$ . 问通过环的电流必须多大, 才能使环开始上升? (与水平面只有一个触点)

7. 图 11-1-13 所示, 倾角为  $\theta$  的斜面上放一木制圆柱, 其质量  $m = 0.2\text{kg}$ , 半径为  $r$ , 长为  $l = 0.1\text{m}$ , 圆柱上顺着轴线  $OO'$  绕有  $N = 10$  匝线圈. 线圈平面与斜面平行, 斜面处于竖直向上的匀强磁场中, 磁感强度为  $B = 0.5\text{T}$ . 当通入多大电流时, 圆柱才不致往下滚动?

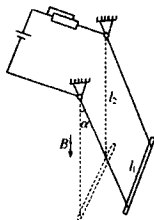


图 11-1-11

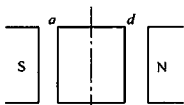


图 11-1-12

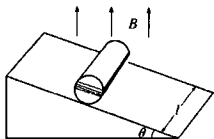


图 11-1-13

## 第二节 电荷在磁场中的运动



### 【知识要点】

#### 一、洛伦兹力

安培力是磁场对定向运动电荷作用力的宏观表现, 磁场对运动电荷的作用力称为洛伦兹力.

带电量为  $q$  的粒子以速度  $v$  在匀强磁场  $B$  中运动时, 受到的洛伦兹力的大小为

$$f = Bqv \sin \theta$$

式中  $\theta$  为  $B$ 、 $v$  之间的夹角. 洛伦兹力方向可由左手定则判断, 但  $f$  总是垂直于  $(B, v)$  所在的平面. 因洛伦兹力总是与粒子运动速度垂直, 故洛伦兹力对带电粒子总不做功.

#### 二、质谱仪

质谱仪是用来研究物质同位素的装置. 图 11-2-1 为其结构示意图.  $N$  为一离子源,  $S_1, S_2$  为加速电场,  $S_3$  的下方为一垂直纸面向外的匀强磁场  $B'$ ,  $PP'$  之间另加有电场 ( $PP'$  实际上就是一个速度选择器), 从  $PP'$  无偏转出来的粒子垂直进入匀强磁场作匀速圆周运动, 即

$$R = \frac{mv}{B'q}$$

由于  $q, B', v$  均为定值, 则  $m$  大的同位素其圆周运动的半径  $R$  亦大, 从而区别出各种同位素, 并且测得  $R$  后即可计算出该同位素的离子质量  $m$ 。

### 三、回旋加速器

回旋加速器是用来加速带电重粒子的装置, 它的工作原理是在匀强磁场中, 带电粒子做匀速圆周运动时的周期与速度无关。回旋加速器的核心部分是两个 D 型金属扁盒, 如图 11-2-2 所示, 盒中间开有一个窄缝, 在两个 D 型盒之间加交流电压, 于是在缝隙中形成交变电场, 由于电屏蔽作用, 在 D 型盒内部电场很弱。D 型盒装在真空中, 整个装置放在巨大电磁铁的两极之间, 磁场方向垂直于 D 型盒的底面。

回旋加速器的工作原理如图 11-2-3 所示, 放在  $A_0$  处的离子源发出一个带正电的粒子, 在匀强磁场中作匀速圆周运动, 绕半周后回到缝隙边缘, 这时在  $A_1 A_1'$  处加上一个向上的电场, 粒子将被加速, 速率由  $v_0$  增加到  $v_1$ , 然后以  $v_1$  的速率作匀速圆周运动, 经过相同时间后, 粒子又回到缝隙边缘, 若这时电场方向恰好反向, 这粒子在缝隙中将继续被加速。这样, 只要在缝隙中交变电

场的周期  $T = \frac{2\pi m}{Bq}$  不变, 便可保证粒子每次通过缝隙时总被加速。粒子的轨道不断增大, 并靠近 D 型盒边缘, 当达到预期的速率后, 再用特殊的装置将它引出。

设 D 型盒的半径(也是粒子的最大回旋半径)为

$R$ , 由  $R = \frac{\sqrt{2mE_k}}{Bq}$ , 可得粒子加速的最大动能

$$E_k = \frac{B^2 q^2 R^2}{2m}$$

但相对论指出, 粒子的质量  $m$  与速率有关, 当粒子的速率增大时, 它的质量将随之增大, 它的回旋周期也将增大, 因而在加速过程中, 粒子不能按时到达缝隙, 总要迟到一点而不能保证在经过缝隙时总被加速。特别是当粒子的接近光速  $c$  时, 回旋加速器的工作原理即不再成立, 因而不能正常工作, 故不宜用回旋加速器加速电子等带电粒子。

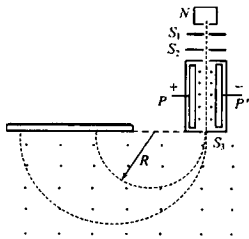


图 11-2-1

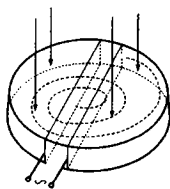


图 11-2-2

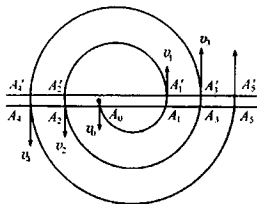


图 11-2-3

**【例题分析】**

**例 1** 如图 11-2-4 所示,  $A_1$  和  $A_2$  是两块面积很大、互相平行又相距较近的带电金属板, 相距为  $d$ , 两板间的电势差为  $U$ . 同时, 在这两板间还有方向与均匀电场正交而垂直纸面向外的均匀磁场. 一束电子通过左侧带负电的板  $A_1$  的小孔, 沿垂直于金属板的方向射入, 为使该电子束不碰到右侧带正电的板  $A_2$ , 问所加磁场的磁感应强度至少要多大? 设电子所受到的重力及从小孔进入时的初速度均可不计.

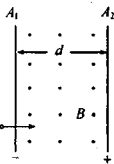


图 11-2-4

**解法一** 在电场力和磁场力的作用下, 进入两板间的电子将在由  $A_1$  向  $A_2$  运动的过程中向上偏转, 但不会离开纸面. 考虑到磁场为临界值时, 电子运动的轨迹刚好与板  $A_2$  相切, 如图 11-2-5 所示, 采用图中坐标系, 对切点  $P$  有  $x_p = d, v_{px} = 0$

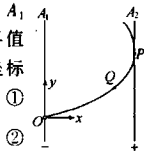


图 11-2-5

由能量关系得  $\frac{1}{2} m(v_{py})^2 = eU$

再取运动轨迹上某点  $Q$ , 当电子运动到  $Q$  点时, 它所受到  $y$  方向的力是

$$F_y = ev_x B$$

这个力提供电子在  $y$  方向的加速度  $ev_x B = ma_y$ , ③

注意到③式对电子运动过程中各个时刻都是成立的, 它可以写成

$$eB \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} = m \frac{\Delta v_{yi}}{\Delta t_i}$$

所以

$$eB \Delta x_i = m \Delta v_{yi}$$

④

把电子从  $O$  点到  $P$  点运动过程中所有的小段满足④式的关系式全部加起来有

$$\sum_i (eB \Delta x_i) = \sum_i (m \Delta v_{yi})$$

由于

$$\sum_i \Delta x_i = x_p - x_0 = d$$

$$\sum_i \Delta v_{yi} = v_{py} - v_{0y} = v_{py}$$

所以

$$eBd = mv_{py}$$

⑤

将②式代入⑤式即可解得  $B = \frac{\sqrt{2emU}}{ed}$

这是电子束运动轨迹与板  $A_2$  相切情况下, 磁感应强度  $B$  的临界值, 只要所加磁场的磁感应强度大于此值, 电子就不会碰到  $A_2$  板.

**解法二** 设电子刚进入磁场时, 有一个沿  $y$  轴方向的速度和沿  $-y$  轴方向的速度  $v'$ ,  $v' = v$ , 电子的实际速度为 0, 其中  $v$  的速度使电子受到沿  $-x$  方向的磁场力  $f = evB$ , 且设这个磁场力恰与电场力平衡, 有  $evB = e \frac{U}{d}$ , 所以  $v = \frac{U}{Bd}$  ①

大小不变,而  $v'$  的速度使电子受到沿  $+x$  方向的磁场力

$$f' = ev'B = evB$$

这样等效地看做电子刚进入磁场时有沿  $+y$  方向的速度  $v$  和沿  $-y$  方向的速度  $v'$ , 另有沿  $+x$  方向的磁场力  $f'$ , 如图 11-2-6 所示. 根据运动合成的观点, 电子的运动可看做两个运动的合成: 一是由速度  $v$  决定的沿  $+y$  轴方向的匀速直线运动, 另一是由  $v'$  和  $f'$  决定的逆时针方向的匀速圆周运动, 这个圆周运动的半径由  $ev'B = m$

$$\frac{v'^2}{R} \text{ 得 } R = \frac{mv'}{eB} = \frac{mv}{eB}$$

要使电子不碰到  $A_2$  板, 要求  $2R < d$

$$\text{由 } \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ 式可得 } B > \frac{\sqrt{2emU}}{ed}$$

**例 2** 如图 11-2-7 所示, 经  $U = 1000\text{V}$  电压加速的电子 (加速前电子静止) 从电子枪  $T$  射出, 其初速沿直线  $\alpha$  的方向. 若要求电子能击中在  $\varphi = 60^\circ$  方向、与枪口相距  $d = 5.0\text{cm}$  的靶  $M$ . 试求在以下两种情形, 所需的匀强磁场的磁感应强度  $B$  的大小: (1) 磁场  $B$  垂直于由直线  $\alpha$  和靶  $M$  所确定的平面; (2) 磁场  $B$  平行于枪口  $T$  向靶  $M$  所引的直线  $TM$ .

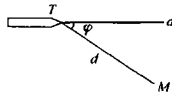


图 11-2-7

**解** 设电子从枪口  $T$  射出的速度为  $v$ , 则  $\frac{1}{2}mv^2 = eU$ , 故  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ , 式中  $m, e$  为电子的质量、电量 (绝对值).

(1) 如图 11-2-8, 为了击中靶  $M$ , 电子圆轨道的半径  $R$  与  $d$  及  $\varphi$  应满足下述关系

$$R = \frac{d/2}{\sin\varphi}$$

又圆半径  $R$  与磁场  $B$  的关系为

$$R = \frac{mv}{eB}$$

由上两式, 为了击中靶, 须  $B = \frac{2\sin\varphi}{d} \sqrt{\frac{2mU}{e}}$

把  $m = 9.11 \times 10^{-31}\text{kg}$ ,  $e = 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$  等数据代入, 得  $B = 3.7 \times 10^{-3}\text{T}$

(2) 当  $B \parallel TM$  时, 电子作等距螺旋线运动, 如图 11-2-9 所示, 电子以  $v_{\parallel} = v\cos\varphi$  沿  $TM$  作匀速直线运动, 到达  $M$  点所需时间为  $t = \frac{d}{v\cos\varphi}$ .

同时, 电子以  $v_{\perp} = v\sin\varphi$  在垂直于  $B$  的平面内作匀速圆周运动, 绕一整圈的时间

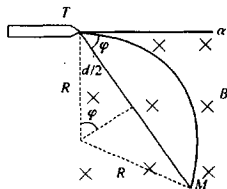


图 11-2-8

即周期为  $T = \frac{2\pi m}{eB}$ .

为了能够击中  $M$  点, 要求  $t = nT$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). 故

要求  $B$  为  $B = \frac{2n\pi mv \cos \varphi}{ed}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

把有关数据代入, 得  $B = n \times 6.7 \times 10^{-3} \text{T}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

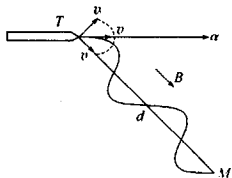


图 11-2-9

**例 3** 磁流体发电机的示意图如图 11-2-10 所示, 横截面为矩形的管道长为  $l$ , 宽为  $a$ , 高为  $b$ , 上、下两个侧面是绝缘体, 相距为  $a$  的两个侧面是电阻可忽略的导体, 此两导体侧面与一负载电阻  $R_L$  相联. 整个管道放在一匀强磁场中, 磁感应强度的大小为  $B$ , 方向垂直于上下侧面(向上). 现在电离气体(正、负带电粒子)持续稳定地流经管道. 为了使问题简化, 设横截面上各点流速相同. 已知流速与电离气体所受的摩擦阻力成正比; 且无论有无磁场存在, 都维持管两端电离气体压强差为  $p$ . 设无磁场存在时电离气体的流速为  $v_0$ , 求有磁场存在时此磁流体发电机的电动势的大小  $\mathcal{E}$ . 已知电离气体的平均电阻率为  $\rho$ .

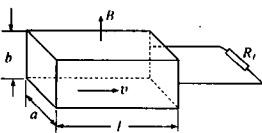


图 11-2-10

**解** 电离气体在磁场的作用下, 带正电的粒子向外侧偏转, 带负电的粒子向内侧偏转, 使外侧电势高于内侧电势, 在外、内两侧间形成电场. 当这个电场足够大时, 带电粒子同时受电场力和洛仑兹力作用而平衡时, 不再发生偏转, 此时内、外两侧间形成一稳定电势差  $U$ , 这个电势差即等于电动势  $\mathcal{E}$ . 由二力平衡得

$$qvB = q \frac{U}{d} = q \frac{\mathcal{E}}{a}$$

$$\mathcal{E} = vaB \quad (1)$$

当外接电阻  $R_L$  时, 管道内有由内侧流向外侧的电流  $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ ,  $R$  为整个电路的电阻,

即  $R = \frac{\rho a}{lb} + R_L$ . 所以管内<sup>+</sup>气体所受安培力为  $F = IBa$  (2)

由左手定则可知, 此力方向向左.

因为电离气体是匀速移动的, 当无磁场时, 管两端电离气体的压力差与摩擦力平衡. 当有磁场时, 电离气体受到压力差与安培力及此时的摩擦力平衡. 已知摩擦力与流速成正比, 因而可通过两次平衡求得电离气体的流速  $v$ .

当无磁场时, 用  $f$  表示摩擦力, 由力的平衡可知  $pab = f$  (3)

当有磁场时, 用  $f'$  表示摩擦力, 由力的平衡可知  $pab = F + f'$  (4)

已知流速与摩擦力成正比, 所以有  $\frac{v_0}{v} = \frac{f}{f}$  ⑤

$$\text{由以上诸式可解得 } \zeta = \frac{Bv_0 a}{B^2 v_0 a} \cdot \frac{1}{1 + \rho b \left( \frac{\alpha}{lb} + R_L \right)}$$

**例 4** 在半径为  $R$ , 高为  $H$  的圆筒内有  $N$  个电子, 平行圆筒轴方向有磁感应强度为  $B$  的恒定磁场. 假设所有电子速度大小相等, 位于垂直磁场的平面内, 电子与圆筒壁的碰撞是完全弹性的. 试估计这样的“电子气”对圆筒壁的压强多大? 与磁场关系如何?

电子电量为  $e$ , 质量为  $m$ , 可以认为  $\frac{mv}{eB} \ll R$  ( $B$  表示“强”磁场), 电子之间相互作用不计.

**解** 所有电子运动方向垂直于磁场, 在洛伦兹力作用下作圆弧运动, 其半径  $r = \frac{mv}{Be} \ll R$ . 只有运动轨道中心位于离壁距离  $h < r$  (见图 11-2-11) 处的电子才与圆筒壁发生碰撞, 每次碰撞中电子传递给壁的动量为  $\Delta p = 2mv \sin \alpha$

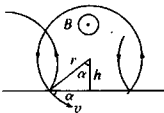


图 11-2-11

每两次碰撞的时间间隔  $\Delta t = \frac{2(\pi - \alpha)r}{v}$

于是, 要估计每个电子对壁的作用力可近似认为  $f = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv^2 \sin \alpha}{(\pi - \alpha)r}$

与壁上面积为  $S$  的小单元面碰撞的电子数  $Z = 2rSn = 2rS \frac{N}{\pi R^2 H}$

式中  $n$  为圆筒内电子密度.

于是这  $Z$  个电子对筒壁的压强可写作

$$p = \frac{Zf_{\text{平均}}}{S} = 2rf_{\text{平均}} = 2rn \frac{mv^2}{r} \left( \frac{\sin \alpha}{\pi - \alpha} \right)_{\text{平均}} = 2nmv^2 c$$

式中  $f_{\text{平均}}$  是电子对壁的平均作用力, 而  $c = \left( \frac{\sin \alpha}{\pi - \alpha} \right)_{\text{平均}}$  这是一个常数, 与磁场无关.

最后, 得到“电子气”对圆筒壁的压强等于  $p = 2cnmv^2 = \frac{2cNmv^2}{\pi R^2 H}$

且与磁场无关.

### 【巩固习题】

1. 半径为  $R$  的长圆柱形螺线管线圈通以恒定电流, 在螺线管内产生磁感强度为  $B$  的均匀磁场. 一个电子以速度  $v$  沿半径 (垂直于螺线管轴) 从螺线管线圈之间飞进去, 如图 11-2-12 所示, 电子在磁场中发生偏转, 经过一定时间后飞出螺线管, 求电子在螺线管内运

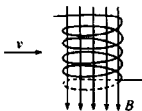


图 11-2-12

动时间  $t$ 。

2. 带电小球系在长度为  $l$  的不可伸长细线上, 在均匀的恒定磁场中转动, 磁感应强度为  $B$ , 方向向上, 小球质量为  $m$ , 电荷为  $q$ , 转动周期为  $T$ , 如果线总是拉紧的, 求小球作圆周运动的半径  $r$ 。

3. 如图 11-2-13(a) 所示,  $M$ 、 $N$  为中心开有小孔的平行板电容器的两极, 相距  $D = 1\text{m}$ , 其右侧为垂直纸面向里的匀强磁场, 磁感强度  $B = 1 \times 10^{-3}\text{T}$ , 磁场区域足够长, 宽为  $d = 0.01\text{m}$ ; 在极板  $M$ 、 $N$  之间加有如图 11-2-13(b) 所示的变电压 (设  $N$  极电势高于  $M$  极时电压为正), 现有带负电粒子不断从极板  $M$  中央小孔处射入电容器内 (粒子初速度可看作零, 重力不计), 取其荷质比  $q/m = 2 \times 10^6\text{C/kg}$ , 试问: (1) 在交变电压第一个周期内哪些时刻进入电容器内的粒子能从磁场的右侧射出来? (2) 若上述交变电压的周期可以变化, 则其周期满足什么条件时, 才能保证有带电粒子从右侧射出来?

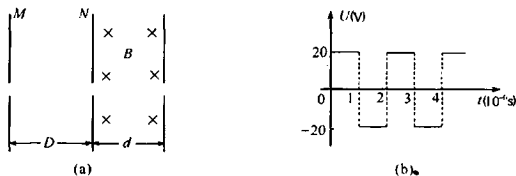


图 11-2-13

4. 电偶极子由两个质量相同, 电量分别为  $+q$  和  $-q$  的粒子组成, 它们固定在长度为  $l$  的轻硬杆的两端, 杆在水平面内绕通过偶极子中心的铅直轴  $O$ , 以角速度  $\omega$  转动, 如图 11-2-14 所示, 在某个时刻加上匀强磁场, 磁感应强度为  $B$ , 方向铅直向下, 试描述偶极子稳定运动状况。

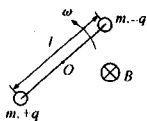


图 11-2-14

5. 有一带负电的液滴在竖直向下的均强电场和匀强磁场作用下, 在水平面内作直径为  $0.2\text{m}$  的匀速圆周运动, 已知  $E = 100\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $B = 25\text{T}$ , 不计空气阻力和浮力, 若液滴的质量  $m = 10^{-5}\text{kg}$ , 问若去掉电场后, 液滴绕行一周, 动能的增量是多少?

6. 在倾角为  $\alpha$ , 摩擦系数为  $\mu$  的斜面上放有质量为  $M$ , 带电量为  $Q$  的小垫圈, 磁感应强度为  $B$  的匀强磁场垂直于斜面, 如图 11-2-15 所示, 垫圈无初速度下滑, 求垫圈稳定速度的大小和方向。

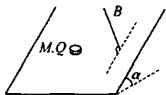


图 11-2-15

7. 质量为  $0.1\text{g}$  的小球带  $4 \times 10^{-4}\text{C}$  的电量, 把它套在很长的



绝缘直棒上,将此棒竖直地放入相互平行且都是水平的匀强电场和匀强磁场中,其场强  $E = 10\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$ ,磁感强度  $B = 0.5\text{T}$ .若小球与棒之间的动摩擦因数为  $0.2$ ,求小球沿棒下滑的最大速度.

8. 利用回旋加速器加速荷质比为  $q/m$  的带电粒子,如果加速电压  $U$  以及匀强磁场的磁感强度  $B$  均已知,将上述带电粒子的能量加速到  $\mathcal{E}$ ,需要多少时间?

9. 回旋加速器的 D 型盒半径为  $R = 60\text{cm}$ ,两盒间距  $1\text{cm}$ ,用它加速质子时可使每个质子获得  $4\text{MeV}$  的能量,加速电压为  $U = 2 \times 10^4\text{V}$ . 求:(1)该加速器中偏转磁场的磁感强度  $B$ ;(2)质子在 D 型盒中运动的时间  $t$ ;(3)整个加速过程中,质子在电场中运动的总时间  $t'$ .

### 第三节 法拉第电磁感应定律

#### 【知识要点】

##### 一、法拉第电磁感应定律

导体回路中感应电动势  $\mathcal{E}$  的大小与穿过回路的磁通量随时间的变化率  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  成正比.这就是法拉第电磁感应定律.数学式为

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (1)$$

式中的负号用以确定电动势的方向.如果导体回路由  $N$  匝线圈组成,则

$$\mathcal{E} = - N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (2)$$

##### 二、动生电动势

因导体在磁场中作切割磁感线的运动,致使导体上产生的电动势叫动生电动势.

若长为  $\Delta L$  的一小段导体在磁场  $B$  中以速度  $v$  运动,且  $\Delta L$  与  $B$  垂直,则  $\Delta L$  上的动生电动势的大小为  $\mathcal{E} = Bv\Delta L\sin\theta$  (3)

式中  $\theta$  是  $v$  与  $B$  的夹角.动生电动势起因于洛伦兹力.

##### 三、感生电动势

若导体回路不作切割磁感线的运动,但导体回路内的磁感应强度随时间变化,这时导体回路内产生的电动势叫感生电动势.

感生电动势起因于磁场的变化.磁场随时间变化时能激发起电场.这种电场叫感生电场或涡旋电场.

如图 11-3-1 所示是一圆柱状均匀磁场区的横截面图,截面半径为  $R$ .如果磁感应

强度  $B$  随时间增加,变化率为  $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ ,  $B$  的方向如图所示垂直纸面向里,则磁场中以  $O$  点为圆心、以  $r$  为半径的导体回路上的感生电动势为

$$\mathcal{E} = \begin{cases} -\frac{\Delta B}{\Delta t} \pi r^2 & (r \leq R) \\ -\frac{\Delta B}{\Delta t} \pi R^2 & (r > R) \end{cases} \quad (4)$$

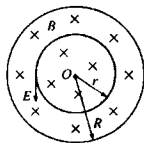


图 11-3-1

可以证明:导体回路内的涡旋电场的方向沿导体回路上各点的切线方向,其大小为

$$E = \begin{cases} -\frac{r}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t} & (r \leq R) \\ -\frac{R^2}{2r} \frac{\Delta B}{\Delta t} & (r > R) \end{cases} \quad (5)$$

需要指出的是,⑤式仅适用于  $R$  为有限量时均匀变化的圆柱形匀强磁场,而且柱形区域外不存在其他磁场.由于径向与  $E$  垂直,故处于径向上的导体无感生电动势.

#### 四、楞次定律

闭合回路中感应电流的方向,总是使它产生的穿过回路所包围面积的磁通量补偿引起感应电流的磁通量的变化.

#### 【例题分析】

**例 1** 用直径 1mm 的超导材料制成的导线做成一个半径为 5cm 的圆环,圆环处于超导状态,环内电流为 100A,经过一年,经检测发现,圆环内电流的变化量小于  $10^{-6}$ A. 试估算该超导材料电阻率数量级的上限.

**解** 当圆环内通过电流  $I$  时,圆环中心的磁感应强度为  $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$

穿过圆环的磁通量可近似为  $\Phi = BS = \frac{\mu_0}{2} \pi I r$  (1)

根据法拉第电磁感应定律,电流变化产生的感生电动势的大小为

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\mu_0}{2} \pi r \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (2)$$

圆环的电阻  $R = \frac{\mathcal{E}}{I} = \frac{\mu_0 \pi r \Delta I}{2I \Delta t}$  (3)

根据已知条件  $r = 0.05\text{m}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$ ,  $I = 100\text{A}$ ,

$\frac{\Delta I}{\Delta t} \leq 10^{-6} \text{A/s} \approx 3 \times 10^{-14} \text{A/s}$ , 代入③式得  $R \leq 3 \times 10^{-23} \Omega$ . 代入电阻率  $\rho$  公式得

$$\rho = R \frac{S}{l} = R \frac{d^2}{8r} = 7.5 \times 10^{-29} (\Omega \cdot \text{m})$$

**例 2** 如图所示,在半径为 10cm 的圆柱形空间充满了磁感应强度为  $B$  的均匀磁场,方向垂直纸面向里,磁感应强度以  $\frac{\Delta B}{\Delta t} = 3 \times 10^{-3} \text{T/s}$  的恒定速率增大.有一根长为 20cm 的金属细棒放在图示位置,其一半位于磁场内部,另一半位于磁场外部,求棒的两端  $a, b$  之间的电势差.

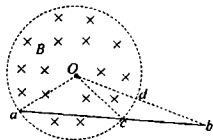


图 11-2-2

**解** 当圆柱形内的磁场均匀增大时,在磁场周围会产生一涡旋电场(感生电场),该电场的电场线是一组以圆柱形中心轴  $O$  为中心的圆,且与磁场方向垂直,因此,该感生电场在任何一个地方皆与圆柱形半径方向垂直,因此,电场力会推动  $ab$  导体内自由电荷的移动而做功,在导体  $ab$  中产生感应电动势, $a, b$  两端产生感应电压.

设用导线将  $Oa, Ob$  连成一闭合电路,其中  $Ob$  与圆交于  $d$  点,由于  $Oa, Ob$  皆与感生电场垂直,因而不产生感应电动势,故回路  $Oab$  的感应电动势大小即等于  $ab$  导体的感应电动势大小.

由楞次定律知这个电动势的方向由  $a$  指向  $b$ .由法拉第电磁感应定律得

$$U_a - U_b = \mathcal{E} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{\Delta B}{\Delta t} (S_{\triangle Oac} + S_{\text{扇}Ocd})$$

式中  $S_{\triangle Oac}$  代表  $\triangle Oac$  的面积,大小为

$$S_{\triangle Oac} = \frac{1}{2} \times 0.1 \times 0.1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^{-2} \text{m}^2$$

而  $S_{\text{扇}Ocd}$  代表扇形  $Ocd$  的面积,大小为

$$S_{\text{扇}Ocd} = \frac{1}{2} \times 0.1^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \times 10^{-2} \text{m}^2$$

可得  $U_a - U_b = -2.1 \times 10^{-5} \text{V}$

**例 3** 在图 11-3-3 中,一菱形均匀线圈在均匀恒定磁场  $B$  中以角速度  $\omega$  绕其对角线匀速转动,转轴与磁场垂直.已知  $\angle acd = \alpha$ ,  $dc$  间距等于  $l$ ,则当线绕至与  $B$  平行位置时,求(1)  $U_a - U_c$  的值;(2) 设  $b$  为  $ac$  中点,  $U_b - U_c$  的值;(3)  $ac$  间电势最低点的位置.

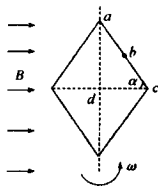


图 11-3-3

**解** (1) 由含源电路的欧姆定律有

$$U_a - U_c = -\mathcal{E}_{ac} + IR$$

式中  $R$  为线圈  $ac$  边的电阻,由对称性可知  $\mathcal{E}_{ac} = \frac{1}{4} \mathcal{E}_{\text{总}}$ , 所以

$$U_a - U_c = -\frac{1}{4} \mathcal{E}_{\text{总}} + \frac{\mathcal{E}_{\text{总}}}{4R} R = 0$$

$$(2) U_b - U_c = -\mathcal{E}_{bc} + I \frac{R}{2}$$

因为  $ab$  与  $bc$  上各点切割磁感线的速度不同, 所以  $\mathcal{E}_{bc} \neq \frac{1}{2}\mathcal{E}_{ac}$ , 但有关系

$$\mathcal{E}_{bc} = \mathcal{E}_{ac} - \mathcal{E}_{ab}$$

在本题中,  $B \perp v$ , 但  $ac$  与  $B$  不垂直, 导体  $ac$  上各点的速度不同、角速度相同。

因为  $\mathcal{E}_{ac} = B \cdot (X_c \cdot \tan\alpha) \cdot \omega \frac{X_c}{2}$ ,  $\mathcal{E}_{ab} = B \cdot (\frac{X_c}{2} \cdot \tan\alpha) \cdot \omega \frac{X_c}{4}$ , 所以

$$\mathcal{E}_{bc} = \mathcal{E}_{ac} - \mathcal{E}_{ab} = \frac{3}{8} B X_c^2 \omega \tan\alpha$$

$$\text{又因为 } U_b - U_c = -\mathcal{E}_{bc} + I \cdot \frac{R}{2} = -\frac{3}{8} B X_c^2 \omega \tan\alpha + \frac{\mathcal{E}_{ac}}{4} \cdot \frac{R}{2}$$

而  $\mathcal{E}_{ac} = 4\mathcal{E}_{bc}$ , 所以  $U_b - U_c = -\frac{1}{8} \omega B X_c^2 \tan\alpha$

(3) 设  $p$  点为  $ac$  间的电势最低点, 则  $a$  相对于  $p$  的电势差  $U_{ap}$  的值, 此时最大。设  $p$  点到轴的距离为  $x$ , 如图 11-3-4 所示。

因为  $U_{ap} = -\mathcal{E}_{ap} + I \cdot R_1$

而  $\mathcal{E}_{ap} = B \cdot x \tan\alpha \cdot \frac{x}{2} \omega$

$$I = \frac{\mathcal{E}_{ac}}{4R} \quad R_1 = \frac{R}{X_c} x$$

所以  $U_{ap} = \frac{1}{2} \omega B \tan\alpha [-x^2 + X_c x] = \frac{1}{2} \omega B \tan\alpha [\frac{X_c^2}{4} - (x - \frac{X_c}{2})^2]$

显然, 当  $x = \frac{X_c}{2}$  时,  $U_{ap}$  取最大值, 其值等于  $\frac{1}{8} \omega B X_c^2 \tan\alpha$ , 故电势最低点  $p$  为  $ac$  的中点。

**例 4** 当加上垂直于线圈平面的磁场时, 通过半径为  $R$  的线圈的电量为  $Q$ 。如果将线圈折成由两个圆组成的“8”字形(当磁场不变时), 并且小圆的半径为  $\frac{R}{4}$ 。问通过线圈的电量为多少? (“8”字平面也垂直于磁场)

**解** 根据题意开始没有磁场, 因而, 磁通量的变化就等于加上磁场时穿过线圈的磁通量  $\Phi$ 。根据法拉第电磁感应定律线圈中产生感生电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi}{\Delta t}$$

另一方面, 根据欧姆定律  $\mathcal{E} = IR = RQ/\Delta t$

由这两个关系式得到  $Q = -\frac{\Phi}{R}$

这意味着, 通过线圈的电量与穿过此线圈的磁通量成正比。

在将线圈折成“8”字形时, 磁通量的变化与三种可能的折叠方法有关(见图 11-3-5)。

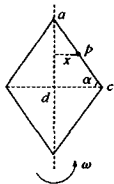


图 11-3-4

考虑到穿过翻转的圈套中磁通量必须加上相反的符号,对于三种情况有如下关系:

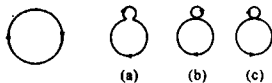


图 11-3-5

$$(a) \text{ 线圈“夹”成“8”字形 } \Phi_1 = \frac{5}{8} \Phi \quad \Delta \Phi_1 =$$

$$-\frac{3}{8} \Phi \quad Q_1 = -\frac{3}{8} Q$$

$$(b) \text{ 翻转小圈套 } \Phi_2 = \frac{1}{2} \Phi \quad \Delta \Phi_2 = -\frac{1}{2} \Phi \quad Q_2 = -\frac{1}{2} Q$$

$$(c) \text{ 翻转大圈套 } \Phi_3 = -\frac{1}{2} \Phi \quad \Delta \Phi_3 = -\frac{3}{2} \Phi \quad Q_3 = -\frac{3}{2} Q$$

在所有三种情况中负号表明,在线圈翻转部分里电荷流动方向与当加上磁场时情况相反。

**例 5** 两个半径为  $R$  的相同的金属圆环,沿着通过两环圆心的直线在同一平面上相向平动,如图 11-3-6 所示,磁感应强度为  $B$  的均匀磁场垂直于两个环面.求当两圆环平均速度均为  $v$ ,而角  $\alpha = \pi/3$  时刻,磁场对两个圆环的作用力的大小和方向,两圆环接触点为  $a$  和  $b$ ,且接触良好.长度等于圆环周长的金属丝的电阻为  $r$ ,环的电感不计.

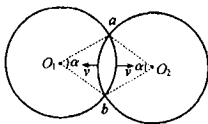
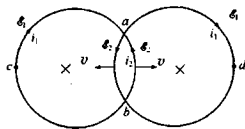
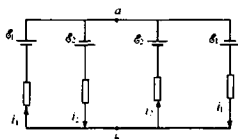


图 11-3-6

**解** 设均匀磁场方向垂直环面向里,要计算圆环所受磁场力的大小与方向,需先判定和计算圆环中各部分的感应电流的大小和方向.由电路对称性,我们可设弧  $acb$  和弧  $adb$  的电动势为  $\mathcal{E}_1$ 、电流为  $i_1$ ,而相交点  $a$ 、 $b$  之间的小圆弧的电动势为  $\mathcal{E}_2$ 、电流为  $i_2$ ,其流向如图 11-3-7(甲)所示,等效电路如图 11-3-7(乙)所示.



(甲)



(乙)

图 11-3-7

每段圆弧在切割磁感线时产生的感应电动势大小都等效于弦  $ab$  切割磁感线时产生的感应电动势大小,所以有  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = BRv$  ①

$$\text{圆环上各部分电阻为 } r_1 = \frac{5}{6} r, r_2 = \frac{1}{6} r \quad \text{②}$$

$$\text{对最左边的回路,由欧姆定律得 } \mathcal{E}_2 - i_2 r_2 - i_1 r_1 + \mathcal{E}_1 = 0 \quad \text{③}$$

$$\text{对左边圆环回路有 } -i_1 r_1 + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + i_2 r_2 = 0 \quad \text{④}$$

将①、②式的结果分别代入③、④两式,可得

$$\begin{cases} 5i_1 + i_2 = 12 \frac{BRv}{r} \\ 5i_1 - i_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

由⑤式可解得  $i_1 = 1.2 \frac{BRv}{r}$ ,  $i_2 = 6 \frac{BRv}{r}$ .

圆环上各部分圆弧所受磁场力等效于相同的电流流过弦  $ab$  时所受磁场力,由此可知,两圆环的大圆弧部分受力大小为  $F_1 = i_1 BR = 1.2 \frac{B^2 R^2 v}{r}$  (6)

两相交部分的小圆弧受力大小为

$$F_2 = i_2 BR = 6 \frac{B^2 R^2 v}{r} \quad (7)$$

由右手定则,  $O_1$  圆环大小两段弧受力方向皆向左,其合力也向左,大小为

$$F_{O_1} = F_1 + F_2 = 7.2 \frac{B^2 R^2 v}{r}$$

而  $O_2$  圆环所受磁场力的合力方向向右,大小为  $F_{O_2} = 7.2 \frac{B^2 R^2 v}{r}$

**例 6**  $PQ_n P_n$  是由若干正方形导线方格  $PQQ_1 P_1$ ,  $P_1 Q_1 Q_2 P_2$ ,  $P_2 Q_2 Q_3 P_3$ ,  $\dots$ ,  $P_{n-1} Q_{n-1} Q_n P_n$  构成的网络,如图 11-3-8 所示.

方格每边长度  $d = 10.0 \text{ cm}$ , 边  $QQ_1$ ,  $Q_1 Q_2$ ,  $Q_2 Q_3, \dots$  与边  $PP_1$ ,  $P_1 P_2$ ,

$P_2 P_3, \dots$  的电阻都等于  $r$ , 边  $PQ$ ,  $P_1 Q_1$ ,  $P_2 Q_2, \dots$  的电阻都等于  $2r$ , 已知  $PQ$  两点间的总电阻为  $Cr$ ,  $C$  是一已知数, 在  $x > 0$  的半空间分布有随时间  $t$  均匀增加的匀强磁场, 磁场方向垂直于  $Oxy$  平面并指向纸里.

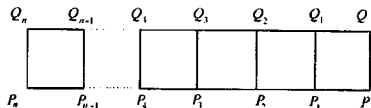


图 11-3-8

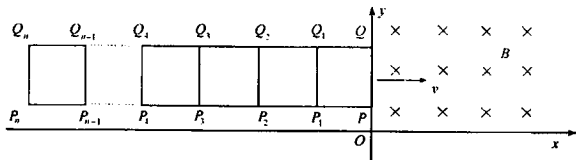


图 11-3-9

今令导线网络  $PQ_n P_n$  以恒定的速度  $v = 5.0 \text{ m/s}$ , 沿  $x$  方向运动并进入磁场区域, 在运动过程中方格的边  $PQ$  始终与  $y$  轴平行, 若取  $PQ$  与  $y$  轴重合的时刻为  $t = 0$ , 在以

后任一时刻  $t$  磁场的磁感强度为  $B = B_0 + bt$ , 式中  $t$  的单位为  $s$ ,  $B_0$  为已知恒量,  $b = 0.10 B_0$ , 求  $t = 2.5s$  时刻, 通过导线  $PQ$  的电流 (忽略导线网络的自感)。

解 网络由  $n$  个方格构成, 用  $R_n$  表示  $PQ$  两端的总电阻, 则  $R_n = Cr$

设  $P_1Q_1$  左边所有方格 (包括  $P_1Q_1$ ) 的总电阻为  $R_{n-1}$ ,  $P, Q$  间的电阻是  $PQ$  的电阻与  $P, Q$  两点左侧部分的总电阻  $R_{n-1} + 2r$  的并联, 则可求得  $R_n = \frac{2(R_{n-1} + 2r)r}{R_{n-1} + 4r}$ , 即

$$R_{n-1} = \frac{4r(R_n - r)}{2r - R_n}$$

同理可得  $R_{n-2} = \frac{4r(R_{n-1} - r)}{2r - R_{n-1}}$  ①

即由  $PQ$  两端的总电阻便可求得  $P_1Q_1$  左边所有方格的总电阻, 并由此类推可求得任意两点  $P_iQ_i$  左边 (包括  $P_iQ_i$ ) 所有方格的总电阻。

由网络沿  $x$  方向运动的过程中, 因导线切割磁感线和磁场随时间变化, 都可以在导线中产生感应电动势。

每一个完整的方格通过  $y$  轴所经历的时间为  $T = \frac{d}{v} = 2s$  ②

当  $t = 2.5s$ , 有一个完整的方格已在磁场区域中, 此刻网络在磁场中的位置如图 11-3-10 所示。

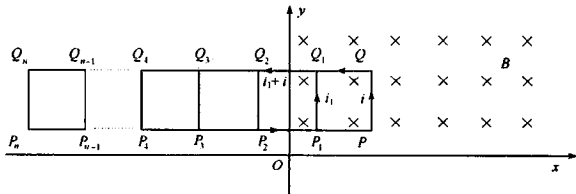


图 11-3-10

设有关导线中的电流如图 11-3-10 所示, 令方格  $PQ_1Q_1$  中的感应电动势为  $\mathcal{E}_1$ , 则有  $4ir - 2i_1r = \mathcal{E}_1$  ③

若方格  $P_1Q_1Q_2P_2$  中的感应电动势为  $\mathcal{E}_2$ , 则有

$$2i_1r + (i + i_1)(2r + R_{n-2}) = \mathcal{E}_2$$
 ④

由于方格  $PQ_1P_1$  全部都在磁场中,  $PQ$  与  $P_1Q_1$  因切割磁感线而产生的动生电动势之和为零,  $\mathcal{E}_1$  仅是因为磁场随时间的变化而引起的, 即有

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = d^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = d^2 b$$
 ⑤

方格  $P_1Q_1Q_2P_2$  的  $P_2Q_2$  尚未进入磁场, 故  $\mathcal{E}_2$  中的一部分是因  $P_1Q_1$  在磁场中的

运动而产生的动生电动势  $\mathcal{E}' = Bdv = (B_0 + bt)dv$

另一部分则是由磁场的变化引起的感生电动势,即

$$\mathcal{E}_2 = dv(t-T) \frac{\Delta B}{\Delta t} = dv(t-T)b = dvbt - d^2b \quad (6)$$

所以  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}'_2 + \mathcal{E}_2 = B_0dv + 2Bdv - d^2b$  (6)

解③,④,⑤,⑥式得

$$i = \frac{2r(B_0dv + 2bdvt - d^2b) + (4r + R_{n-1})d^2b}{20r^2 + 6rR_{n-2}} \quad (7)$$

由①式可得  $R_{n-1} = \frac{4(C-1)}{2-C}r, R_{n-2} = \frac{2(5C-6)}{4-3C}r$  (8)

代入有关数据得  $i = \frac{B_0}{r} \cdot \frac{56-41C}{8} \times 10^{-3}$  (9)

### 【巩固习题】

1. 光滑 U 型金属框架宽为  $l$ , 足够长, 其上放一质量为  $m$  的金属棒  $ab$ , 左端连接有一电容器和电键, 当  $K$  断开时, 给棒一个初速  $v_0$ , 使棒始终垂直框架并沿框架匀速运动 ( $v < v_0$ ), 如图 11-3-11 所示, 求电容器电容.

2.  $AB$  杆受一冲量作用后以初速  $v_0$  沿水平面内的导轨运动, 经一段时间后停止,  $v_0 = 4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $AB$  的质量  $m = 5\text{kg}$ , 导轨宽  $l = 0.4\text{m}$ , 电阻  $R = 2\Omega$ , 其余电阻不计, 磁场  $B = 0.5\text{T}$ , 棒和导轨间动摩擦因数  $\mu = 0.4$ , 测得整个过程中通过导线的电量  $q = 10^{-2}\text{C}$ . 求: (1) 整个过程中产生的电热  $Q$ ; (2)  $AB$  杆的运动时间  $t$ .

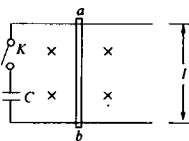


图 11-3-11

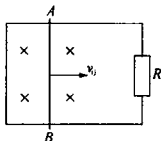


图 11-3-12

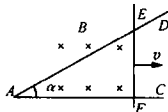


图 11-3-13

3. 两条水平导轨  $AC$  和  $AD$  成角  $\alpha$ , 导体  $EF$  以恒定速度  $v$  沿导轨运动, 如图 11-3-13 所示. 磁感应强度为  $B$  的均匀磁场垂直于导轨所在平面. 求导体  $EF$  从  $A$  点运动到  $C$  点这段时间内电路中释放的总热量. 导体  $EF$  每单位长度的电阻为  $r$ , 两条导轨的电阻不计.  $EF \perp AC, v \perp EF, AC = d$ .

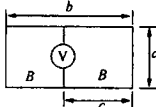


图 11-3-14

4. 具有一定电阻的同种金属丝做成大小为  $a \times b$  的长方形, 如图 11-3-14 所示. 有一个磁场垂直于长方形面, 磁感应强度  $B$  按照规律  $B = at$  呈线性



增加。在到边长为  $a$  的一边距离为  $c$  处, 接上电阻很大的伏特表。求这伏特表所表示电压的大小。

5. 在磁感应强度为  $B$ , 水平方向的均匀磁场内, 有一个细金属丝环以速度  $v$  作无滑动的滚动, 如图 11-3-15 所示。环上有长度为  $l$  的很小的缺口, 磁场方向垂直于环面。求当角  $AOC$  (见图) 为  $\alpha$  时环上产生的感应电动势。

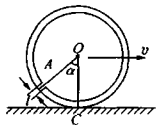


图 11-3-15

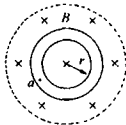


图 11-3-16

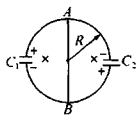


图 11-3-17

6. 如图 11-3-16 所示, 在虚线圈范围内有一均匀磁场, 磁感应强度  $B$  正以  $0.1 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}$  均匀减小, 今在这一范围内放置一个金属圆环, 使圆环平面垂直于磁场, 已知圆环半径  $r = 0.1 \text{ m}$ . 试问: (1) 环内产生的感应电动势大小; (2) 环上  $a$  点处的电场强度大小和方向; (3) 若金属环的电阻为  $2 \Omega$ , 环内电流多大? (4) 若在环上某一点将环断开, 并把两端点稍稍分开, 环上这两个端点间的电势差多大?

7. 半径为  $R$  的金属丝圆环, 有一个沿直径放置的金属跨接线, 左、右两半圆上分别接上电容器  $C_1$  和  $C_2$ , 如图 11-3-17 所示。将环放置在磁感应强度随时间而线性增大的磁场中,  $B(t) = B_0 t / T$ , 磁场方向垂直于环面。某一时刻撤去跨接线, 接着磁场停止变化。求两个电容器上带的电量。

8. 用长度为  $l$ 、电阻为  $R$  的一段粗细均匀金属丝做成圆环及一条长度等于直径的弦。将圆环放入均匀磁场中, 磁感应强度的方向垂直于环面, 其大小按规律  $B = kt$  变化, 如图 11-3-18 所示。求在金属丝中释放的功率。

9. 如图 11-3-19 所示, 两根竖直放置在绝缘地面上的金属框架, 框架的上端接有一电容为  $C$  的电容器, 框架上有一质量为  $m$ , 长为  $l$  的金属杆平行于地面放置, 与框架接触良好无摩擦, 离地面的高度为  $h$ , 强度为  $B$  的匀强磁场与框架平面相垂直, 开始时电容器不带电, 自静止起将棒释放, 求棒落到地面的时间。不计各处电阻。

10. 质量为  $m$  的跨接杆可以无摩擦地沿水平的平行导轨滑动, 两轨之间宽为  $d$ . 导轨和电阻为  $R$  的电键器连接, 放在竖直方向的均匀磁场中, 磁感应强度为  $B$ , 跨接杆初速度为  $v_0$ , 如图 11-3-20 所示。试求跨接杆到停下来所滑行的距离。所求答案与磁感应强度  $B$  的方向有什么关系?

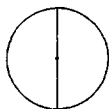


图 11-3-18

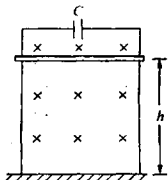


图 11-3-19

11. 图 11-3-21 中  $da, cb$  为相距  $l$  m 的平行导轨(电阻很小, 可以忽略),  $a, b$  间接有一固定电阻, 阻值为  $R$ , 长直细杆  $MN$  可以按任意角  $\theta$  架在平行导轨上, 并以匀速  $v$  滑动(平移),  $v$  的方向与  $da$  平行, 杆  $MN$  有电阻, 每米长的电阻值为  $R$ , 整个空间充满磁感强度为  $B$  的匀强磁场, 方向如图. 求(1)固定电阻  $R$  上消耗的功率最大时角  $\theta$  的值; (2)求杆  $MN$  上消耗的电功率最大时角  $\theta$  的值.

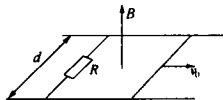


图 11-3-20

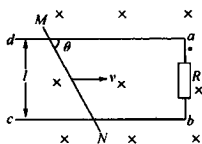


图 11-3-21

## 第四节 自感和互感

### 【知识要点】

#### 一、自感

当流过电路本身的电流发生变化时, 在电路中产生阻碍电流变化的感生电动势, 这种电磁感应现象叫自感.

在自感现象中产生的感生电动势叫自感电动势  $\mathcal{E}_L$ , 大小为  $\mathcal{E}_L = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$  ①

式中的  $L$  称为自感系数, 它与线圈的形状、匝数, 以及铁芯的材料等因素有关.

#### 二、互感与变压器

由于一个回路中的电流变化而在邻近另一个回路中产生感生电动势的现象, 称为互感, 变压器就是利用互感现象来改变交流电压的.

变压器的构造如图 11-4-1 所示, 原、副线圈匝数分别为  $n_1, n_2$ , 常见的理想变压器必须满足以下四个条件:(1)没有漏磁, 即通过铁芯各处的磁通量都相同;(2)线圈电阻不计;(3)铁芯不消耗电能;(4)原、副线圈的感抗都趋于无穷大.

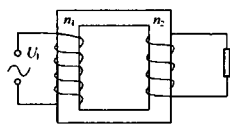


图 11-4-1

这样对理想变压器必有  $e_1 = n_1 \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, e_2 = n_2 \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$

$$U_1 = e_1, U_2 = e_2$$

所以 
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (2)$$

因理想变压器不计能量损耗,所以变压器的输入功率等于输出功率,即

$$U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2$$

因此 
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3)$$

但上式只适用于只有一个副线圈的变压器,对有多副线圈的变压器回路应当用

$$U_1 I_1 = U_2 I_2 + U_3 I_3 + \dots + U_n I_n \quad \text{和} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}, \frac{U_1}{U_3} = \frac{n_1}{n_3} \dots$$

来进行计算。

变压器除了有改变电压、电流的作用外,还有变换负载阻抗的作用,以实现阻抗匹配。

如图 11-4-2 所示,负载阻抗  $R$  接在变压器的副线圈上,图中虚线部分可以用一个阻抗  $R'$  来等效替代,电路如图 11-4-3 所示。

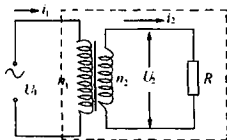


图 11-4-2

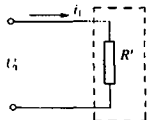


图 11-4-3

所谓等效,就是输入电路的电压和电流、功率不变,或者说成:直接接在电源上的阻抗  $R'$  和接在变压器副线圈的阻抗  $R$  是等效的。

推算可知 
$$R' = \frac{U_1}{i_1}, R = \frac{U_2}{i_2}$$

由于  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}, \frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$ , 代入可得  $R' = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R$

由上式可知,变压器原、副线圈的匝数比不同,负载阻抗反映到原边的阻抗  $R'$  不同,因而可以选取不同的匝数比,把负载阻抗变换为所需要的比较合适的数值,这种做法通常称为阻抗匹配。收音机中的扬声器前的变压器即起着阻抗匹配的作用。

### 【例题分析】

**例 1** 在图 11-4-4 中,电流表 A 是理想电表,电压表 V 的量为 20V,它是由量程为  $0 \sim 50\mu\text{A}$  的表头改装而成的,电感的自感系数  $L$  足够大,电源电动势为 12V,不计电源内阻,问(1)合上  $K$  时,两表上的示数最大各为多少?(2)断开  $K$  时,两表上的示数将

如何变化？(3) 断开  $K$  时，哪些元件容易损坏？应如何避免不必要的损失？

**解** 合上  $K$  瞬间，若电感线圈的自感系数足够大，可认为电流不能从电感线圈中通过，这样电源、开关、 $R$ 、电流表  $A$ 、电压表  $V$  构成一串联回路。以后电感线圈中电流逐渐增大，待稳定后因不计电感线圈的内阻，故电流都从电感线圈所在回路通过。

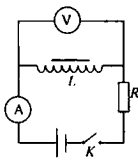


图 11-4-4

$$(1) \text{ 由题意, 电压表的内阻 } R_V = \frac{U_g}{I_g} = \frac{20}{50 \times 10^{-6}} = 4 \times 10^5 (\Omega)$$

$$\text{合上 } K \text{ 瞬间, 电压表 } V \text{ 上读数最大, 其值为 } U_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{R_V + R} \cdot R_V \approx \mathcal{E} = 12 (\text{V})$$

$$\text{在电路稳定以后, 电流表 } A \text{ 上读数最大, 其值为 } I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12}{1} = 12 (\text{A})$$

(2) 断开  $K$  以后，电流表  $A$  上的读数就由  $12\text{A}$  减为  $0$ ，电压表  $V$  上读数由  $0$  突变到接近  $4.8 \times 10^6 \text{V}$  ( $I_{\max} R_V$ )，再减为  $0$ 。

(3) 断开  $K$  时，电压表  $V$  及开关  $K$  容易损坏。为避免不必要的损失可在断开  $K$  前先把电压表取下，并把电键  $K$  放入耐压高的绝缘体中，如放入油中。

**注：**电感线圈的作用是由于存在自感，既不能使通过电感线圈的电流突然增加，也不能使通过电感线圈的电流突然减小。对理想电感（直流电阻不计）而言，可认为电流能维持瞬间不变。

**例 2** 某理想变压器，当其输入端接在电动势为  $\mathcal{E}$ ，内阻为  $r$  的交流电源上，输出端接上电阻为  $R$  的负载时， $R$  上可获得最大功率。问：(1) 这时输入电流多大？负载上的最大功率为多少？(2) 负载获得最大功率时，变压器的原副线圈电压各为多少？(3) 变压器的变压比为多少？

**解** (1) 设原线圈中电流为  $I_1$  时，负载上获得最大功率，这时变压器的输出功率也最大，则  $P_1 = I_1 \mathcal{E} - I_1^2 r = -(\sqrt{r} I_1 - \frac{\mathcal{E}}{2\sqrt{r}})^2 + \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$ 。

$$\text{当 } \sqrt{r} I_1 = \frac{\mathcal{E}}{2\sqrt{r}}, \text{ 即 } I_1 = \frac{\mathcal{E}}{2r} \text{ 时, } P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}.$$

(2) 设负载上电压为  $U_2$ ，则  $\frac{U_2^2}{R} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$ ，即  $U_2 = \frac{\mathcal{E}}{2} \sqrt{\frac{R}{r}}$ ，这时原线圈上电压

$$U_1 = \mathcal{E} - I_1 r = \frac{\mathcal{E}}{2}$$

(3) 变压器的变压比为  $\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{r}{R}}$ 。

**例 3** 如图 11-4-5 所示，在光滑的水平面上，有边长  $l = 0.8\text{m}$  的正方形导线框  $abcd$ ，其质量  $m = 100\text{g}$ ，自感系数  $L = 10^{-3} \text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1}$ ，电阻忽略。该导线框的  $bc$  边在  $t = 0$

时,从  $x=0$  处以初速  $v_0=4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  进入磁感强度为  $B$  的有界匀强磁场区域,磁场区域宽度  $s=0.2\text{m}$ ,  $B$  的方向与导线框平面垂直,大小为  $0.5\text{T}$ . 求  $t=\pi/36\text{s}$  时刻导线框  $bc$  边的位置.

解  $bc$  边进入磁场区,  $ad$  边仍在磁场区外时,  $bc$  边切割磁感线要产生动生电动势,同时  $abcd$  回路中还会出现自感电动势,本题的关键是要确定线框的运动特点.

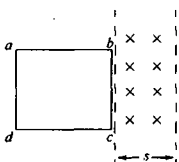


图 11-4-5

因线框电阻不计,在  $bc$  边进入磁场而  $ad$  未进入时,  $bc$  边的

动生电动势与自感电动势相平衡,即  $L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = Blv$ , 即

$$L\Delta I = Blv\Delta t = Bl\Delta x$$

考虑到  $t=0$  时,  $x=0$ ,  $v=v_0$ , 于是上式变为

$$LI = Blx$$

因为  $F = ma = -BlI = -\frac{B^2 l^2}{L} x \propto x$

故导线框作简谐运动, 振动周期为  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = \frac{2\pi}{Bl}\sqrt{mL} = \frac{\pi}{20}(\text{s})$

设振动方程为  $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ , 则  $v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$

当  $t=0$  时,  $x=0$ ,  $v=v_0=4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

代入后可得  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $A = 0.1\text{m}$ .

这意味着  $bc$  边到达  $s/2$  处将返回,  $bc$  边经  $t_1 = \pi/\omega$  时间到  $x=0$  处, 速度  $v = -v_0$ , 以后导线框将以  $v_0$  沿  $x$  轴的负向作匀速直线运动,  $t = \pi/36\text{s}$  时  $bc$  边的位置.

$$x = v(t - t_1) = -4\left(\frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{\omega}\right) = -0.035\text{m}.$$

### 【巩固习题】

1. 由于接触不完善, 在短路的超导螺线管里电流发生变化, 这个电流产生的磁场的磁感应强度每小时减小  $2\%$ . 试求接触电阻  $R$ . 螺线管的自感系数  $L = 1\text{H}$ .

2. 电感为  $L$  的线圈和电阻为  $R$  的电阻器并联, 再通过电键  $K$  接到电动势为  $\mathcal{E}$ , 内阻为  $r$  的电池上, 如图 11-4-6 所示. 开始电键  $K$  断开, 电路中没有电流. 求电键闭合后通过电阻器的电量. 线圈的电阻不计.

3. 电感系数分别为  $L_1$  和  $L_2$  的两个线圈, 通过电键  $K_1$  和  $K_2$  接入电动势为  $\mathcal{E}$  和内阻为  $r$  的电源上, 如图 11-4-7 所示, 开始两个电键都断开. 当电键  $K_1$  闭合并且通过线圈  $L_1$  的电流达到某个值  $I_0$  后, 电键  $K_2$  闭合. 求当电键  $K_2$  闭合后通过线圈  $L_1$  和  $L_2$  的稳定电流. 线圈的电阻不计.

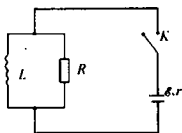


图 11-4-6

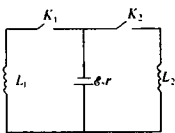


图 11-4-7

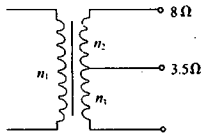


图 11-4-8

4. 如图 11-4-8 所示, 输出变压器的副线圈绕组有中间抽头, 以便接  $8\Omega$  或  $3.5\Omega$  的扬声器, 为了使两者都能达到阻抗匹配, 求副线圈绕组中两部分线圈的匝数之比  $n_2/n_3$ .

## 第五节 综合训练

### 【例题分析】

**例 1** 在空间有相互垂直的场强为  $E$  的匀强电场和磁感强度为  $B$  的匀强磁场, 如图 11-5-1 所示, 一电子从原点静止释放, 求电子在  $y$  轴方向前进的最大距离.

**分析** 电子在  $y$  轴方向的距离最大时, 其速度必沿  $x$  轴方向.

**解法一** 设电子在  $y$  轴运动的最大距离为  $y_m$  时速度达  $v$ , 因洛伦兹力不做功, 故  $eEy_m = \frac{1}{2}mv^2$ .

由于电场力总是沿  $y$  轴方向, 所以电子在  $x$  轴方向上速度分量的增大是由洛伦兹力的水平分量引起的, 设电子从  $O$  点运动到极大值点洛伦兹力水平分量的平均值记为  $f_x$ , 则  $f_x \cdot t = mv$ , 且  $f_x = eBv_x$ .

根据运动的独立性, 考虑  $y$  轴方向分运动有  $v_y \cdot t = y_m$ .

解联立方程可得 
$$y_m = \frac{2mE}{eB^2}$$

**解法二** 电子从坐标原点静止释放后在电场力和磁场力作用下作曲线运动轨迹如图 11-5-2 所示, 取运动轨迹上某一点  $Q$ , 当一个电子经过  $Q$  点时, 它所受到的  $x$  方向的力是

$$F_x = ev_y B$$

这个力提供了电子在  $x$  方向的加速度  $ev_y B = ma_x$ .

注意到上式对电子运动过程中各个时刻都是成立的, 它可以写成  $eB\Delta y_i / \Delta t_i = m\Delta$

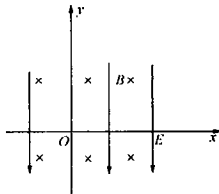


图 11-5-1

$$(v_x)_i / \Delta t_i$$

$$\text{亦即 } eB \Delta y_i = m \Delta (v_x)_i$$

若把电子从  $O$  点到  $P$  点(轨迹上离  $x$  轴距离最远点)运动过程中所有小段的上述关系式全部加起来,得  $\sum_i (eB \Delta y_i) =$

$$\sum_i [m \Delta (v_x)_i]$$

$$\text{因 } \sum_i \Delta y_i = y_m, \sum_i \Delta (v_x)_i = (v_x)_p, \text{ 所以有 } eB y_m = m (v_x)_p$$

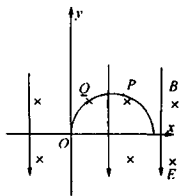


图 11-5-2

$$\text{利用动能定理,电子从 } O \text{ 到 } P \text{ 点有 } eE y_m = \frac{1}{2} m (v_x)_p^2$$

$$\text{这样可得 } y_m = \frac{2mE}{eB^2}$$

**解法三** 虽然电子在  $O$  点速度为零,但也可以设想为具有沿  $x$  方向的速度  $+v$  和  $-v$ ,其中  $v$  满足  $Bev = eE$

照此设想,电子在其后的运动过程中将受到三个力,一个是沿  $y$  方向的电场力,一个是由于电子沿  $x$  轴向右运动而产生的  $-y$  方向的洛仑兹力,另一个是电子沿  $-x$  轴运动产生的  $y$  方向的洛仑兹力,注意到电子沿  $-y$  方向所受的洛仑兹力和它所受的电场力相平衡,故电子的运动综合起来可视为是一个速度为  $v$  沿  $x$  轴正向的匀速直线运动和一个速率为  $v$  的匀速圆周运动的合成,对匀速圆周运动,有  $evB = mv^2/R$

$$\text{其中 } R = y_m/2, \text{ 可得 } y_m = \frac{2mE}{eB^2}$$

**注:**在复合场中(如电磁场)由于洛仑兹力与运动速度始终垂直,一般带电粒子的运动轨迹为曲线,这时有关运动的独立性知识可派上用场。

**例 2** 如图 11-5-3,电源的电动势为  $U$ ,电容器的电容为  $C$ ,  $K$  是单刀双掷开关,  $MN$ ,  $PQ$  是两根位于同一水平面内的平行光滑长导轨,它们的电阻可以忽略不计,两导轨间距为  $L$ ,导轨处在磁感强度为  $B$  的均匀磁场中,磁场方向垂直于两导轨所在的平面并指向图中纸面向里的方向。  $l_1$  和  $l_2$  是两根横放在导轨上的导体小棒,它们在导轨上滑动时与导轨保持垂直并接触良好,不计摩擦,两小棒的电阻相同,质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ ,且  $m_1 < m_2$ :开始时两根小棒均静止在导轨上,现将开关  $K$  先合向 1,然后合向 2。求:(1)两根小棒最终的速度大小;(2)在整个过程中的焦耳热损耗。(当回路中有电流时,该电流所产生的磁场可以忽略不计)

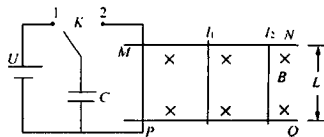


图 11-5-3

**分析** 开关  $K$  由 1 合向 2 之后,起初电容器通过导轨及两小棒构成的回路放电,

外磁场  $B$  对通有电流的两小棒施加向右的安培力,使两小棒从静止开始向右做加速运动,但加速度是逐渐变小的,最终状态两棒以相同的速度运动.注意到两棒匀速切割磁感线产生的感应电动势与电容器两端的电压相等,即上述过程中电容器电量的减少可求,猜想可以用动量定理处理本题(因安培力产生冲量  $BLiL\Delta t$  中  $iL\Delta t$  与电量有关).

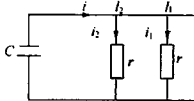


图 11-5-4

解 (1) 自电容器开始放电至小棒达到最终恒定速度的过程中任一时刻的电流如图 11-5-4 所示.此时作用于  $l_1$  与  $l_2$  上的安培力分别为  $f_1 = BLi_1, f_2 = BLi_2$

在  $t$  到  $t + \Delta t$  时间内,利用动量定理得

$$f_1 \Delta t = BLi_1 \Delta t = m_1 \Delta v_1$$

$$f_2 \Delta t = BLi_2 \Delta t = m_2 \Delta v_2$$

设最终两棒速度均为  $v$ ,由于开始时两棒均静止,则有

$$\sum BLi_1 \Delta t = m_1 v$$

$$\sum BLi_2 \Delta t = m_2 v$$

上两式相加得  $BL \sum (i_1 + i_2) \Delta t = (m_1 + m_2) v$

而  $i = i_1 + i_2$ ,即  $\sum (i_1 + i_2) \Delta t = \sum i \Delta t = Q - q$

其中  $Q = CU, q = CBLv$

$$\text{由此解得 } v = \frac{BLCU}{m_1 + m_2 + B^2 L^2 C}$$

(2) 电容器开始放电时,所具有的电能为  $W_0 = \frac{1}{2} CU^2$

$$\text{两棒达到最终速度时电容器的储能为 } W_1 = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{B^4 L^4 C^3 U^2}{(m_1 + m_2 + B^2 L^2 C)^2}$$

$$\text{两棒最终动能为 } W_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{B^2 L^2 C^2 U^2}{(m_1 + m_2 + B^2 L^2 C)^2}$$

$$\text{整个过程中的焦耳热损耗为 } \Delta W = W_0 - (W_1 + W_2) = \frac{(m_1 + m_2) CU^2}{2(m_1 + m_2 + B^2 L^2 C)}$$

例 3 两根长度相等,材料相同,电阻分别为  $R$  和  $2R$  的细导线,两者相接而围成一半径为  $a$  的圆环, $P, Q$  为其两个接点,如图 11-5-5 所示.在圆环所围成的区域内,存在垂直于图面、指向纸内的匀强磁场.磁感应强度的大小随时间增大的变化率为恒定值  $b$ .已知圆环中感应电动势是均匀分布的,设  $M, N$  为圆环上的两点, $M, N$  间的弧长为半圆弧  $\widehat{PMQ}$  的一半,试求这两点间的电压  $U_M - U_N$ .

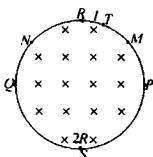


图 11-5-5



解 根据法拉第定律,整个圆环中的感应电动势的大小

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \pi r^2 b \quad (1)$$

按楞次定律判断其电流方向是逆时针的,其电流大小

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + 2R} = \frac{\mathcal{E}}{3R} \quad (2)$$

按题意, $\mathcal{E}$ 被均匀分布于整个圆环上,即 $\widehat{MN}$ 的电动势为 $\mathcal{E}/4$ , $\widehat{NQM}$ 的电动势为 $3\mathcal{E}/4$ .

4. 现考虑 $\widehat{NQM}$ ,在该段电路上由于欧姆电阻所产生电势降落为 $I(2R + R/2)$ ,故

$$U_M - U_N = \frac{3}{4}\mathcal{E} - \left(2R + \frac{R}{2}\right)I \quad (3)$$

由①,②,③式可得  $U_M - U_N = -\frac{1}{12}\pi r^2 b \quad (4)$

当然,也可采用另一条路径( $\widehat{MTN}$ 圆弧)求电势差

$$\begin{aligned} U_N - U_M &= \frac{\mathcal{E}}{4} - I \cdot \frac{R}{2} = \frac{\mathcal{E}}{4} - \frac{\mathcal{E}}{3R} \cdot \frac{R}{2} = \frac{\mathcal{E}}{12} \\ &= \frac{1}{12}\pi r^2 b = -(U_M - U_N) \end{aligned}$$

与④式相符.

### 【精选习题】

1. 一个质子在互相垂直的均匀电场  $E = 10\text{ kV/m}$  和均匀磁场  $B = 0.02\text{ T}$  的空间中,无初速度从  $O$  点开始运动,如图 11-5-6 所示.求质子在运动轨道顶点  $A$  处的加速度.顶点  $A$

到  $x$  轴的高度  $h = 0.5\text{ m}$ ,质子的荷质比  $\frac{e}{m} = 1 \times 10^8\text{ C/kg}$ .

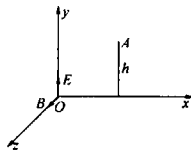


图 11-5-6

2. 质量为  $m$  的小带电体系在长  $l$  的轻绳上,可以在竖直面内作圆周运动.磁感应强度为  $B$  的均匀磁场垂直于该平面,其方向如图 11-5-7 所示.问必须使物体在最低点至少具有多大速度,才能使它转一整圈?物体带正电,电量为  $q$ .

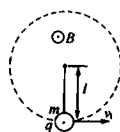


图 11-5-7

3. 在磁感应强度  $B = 1\text{ T}$  的均匀磁场中,带电粒子在回旋加速器内作加速运动;加速电压的频率  $f = 7.5\text{ MHz}$ .具有平均电流  $I = 1\text{ mA}$  的加速粒子束,从半径  $R = 1\text{ m}$  的轨道中飞出.问用于冷却“圈套”的水的温度将升高多少,粒子会在“圈套”里停下来?水的消耗量  $M_t = 1$  千克/秒.

4. 同一空间里有匀强电场  $E$  和匀强磁场  $B$ ,  $B$  沿  $x$  轴正向,磁感强度  $B = \pi \times 10^{-4}\text{ T}$ ,电场  $E = 10^{-4}\text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$ ,沿  $x$  轴负向.现让一质量  $m = 10^{-15}\text{ kg}$ ,  $q = 10^{-4}\text{ C}$  的正粒子以  $v_0 = 200\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  在  $xOy$  平面内与  $x$  轴正向夹  $60^\circ$  射入(从原点),如图 11-5-8 所示,不计

重力。(1)简要说明粒子进入电磁场后的运动情况；(2)粒子出发后第一次经过  $x$  轴的位置；(3)求第  $2 \times 10^{-5}$  s 末粒子在空间的位置，在这段时间内，粒子运动轨迹所占的空间范围的形状和大小。

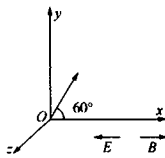


图 11-5-8

5. 一个质量  $m$ ，带有  $+q$  电量的小球，悬挂在长  $l$  的细线上，放在匀强磁场中，其最大摆角为  $\alpha$ ，如图 11-5-9 所示，为使摆的周期不受磁场影响，磁感强度  $B$  有何限制？

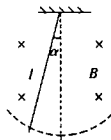


图 11-5-9

6. 两金属薄板水平浸在海水里，面积为  $S = 1 \text{ km}^2$ ，相距为  $L = 100 \text{ m}$ ，海水的电阻率为  $\rho = 0.25 \Omega \cdot \text{m}$ ，从东向西以速度  $v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  流过，所在地区的地磁场视为匀强磁场，方向由南指向北，磁感强度大小等于  $B = 10^{-4} \text{ T}$ 。在两板之间将出现电压，用导线把两板与外面的负载连接起来，试确定在负载上的最大功率的值是多少？

7. 质量为  $m$  的金属跨接杆，可以沿着与水平面倾斜成角  $\alpha$  的两根彼此相距为  $d$  的平行金属导轨无摩擦地滑动。两根导轨下部用容量为  $C$  的不带电的电容器的闭合，整个结构放置在磁场中，均匀磁场  $B$  的方向是竖直向上，开始跨接杆被维持在离“架子”底端距离为  $l$  处，见图 11-5-10。试问跨接杆在放下后，经过多少时间  $t$  到“架子”的底端？求杆在底端具有的速度  $v_*$ 。（导轨与跨接杆之间阻力不计）

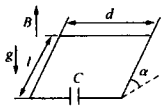


图 11-5-10

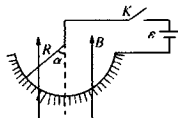


图 11-5-11

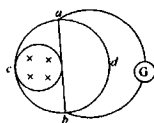


图 11-5-12

8. 在轻质导电杆的一端固定一个金属小球，球保持与半径为  $R = 1.0$  米的导电球面接触。杆的另一端固定在球心处，并且杆可以无摩擦地沿任何方向转动。整个装置放在均匀磁场中，磁场方向竖直向上，磁感应强度  $B = 1.0$  特。球面与杆的固定端通过导线、电键  $K$  与电源相连，如图 11-5-11 所示。试描述当电键  $K$  闭合后，杆如何运动？如果杆与竖直线之间的夹角稳定为  $\alpha = 60^\circ$ ，求电源的电动势  $\mathcal{E}$ 。

9. 一导线围成半径为  $D$  的圆环  $abcd$ ，在圆环所围区域内有一半径为  $\frac{D}{2}$  的磁场区，其周界与圆环内切于  $c$  点，该区域内是磁感强度为  $B$  的匀强磁场，方向如图 11-5-12 所示，均匀增大，且  $\frac{\Delta B}{\Delta t} = k$ ， $ab$  导线为圆环的一直径，与磁场区边界相切，设  $ab$  及两半圆环电阻都为  $r$ ，电流计的内阻也为  $r$ ，其他电阻不计，求下列情况下，通过电流计的电流。(1)  $acb$  与  $adb$  都位于纸面内，并分别位于  $ab$  两侧；(2)  $adb$  绕  $ab$  转  $90^\circ$  折成与纸面垂

直;(3) $adb$ 再绕 $ab$ 转 $90^\circ$ 折成与 $acb$ 重合。(电流计位于纸面之内)

10. 环形金属丝箍圈在很长的直螺线管的中部,箍的轴与螺线管的轴重合,如图 11-5-13 所示。箍由两部分组成,每部分的电阻  $R_1$ 、 $R_2$  不同且未知。三个有(纯电阻)内阻的伏特表接到两部分接头处  $A$  点和  $B$  点,并且导体  $A-V_3-B$  严格地沿箍的直径放置,而导体  $A-V_1-B$  和  $A-V_2-B$  沿螺线管任意两个不同方位放置。交变电流通过螺线管,发现这时伏特表  $V_3$  的读数  $U_0 = 5$  伏,伏特表  $V_1$  的读数  $U_1 = 10$  伏。问伏特表  $V_2$  的读数是多少?螺线管外的磁场以及回路电感不计。

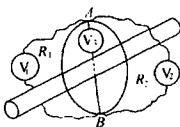


图 11-5-13

11. 一个边长为  $a$ , 质量为  $m$  的金属丝方框, 在水平方向具有某一初速度, 框在重力场中运动, 并且总是位于垂直于框面的磁场中, 如图 11-5-14 所示。磁感应强度按照规律  $B(z) = B_0 + kz$  变化, 式中  $k$  为恒定系数。框的电阻为  $R$ 。经过一段时间框开始以恒定速度  $v$  运动。试求框的水平初速度。自由落体加速度为  $g$ 。

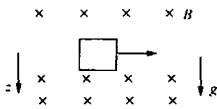


图 11-5-14

12. 如图 11-5-15 所示, 导体  $ab$  的  $a$  端可以在水平圆环的轨道上滑动, 滑动摩擦力为  $f$ ,  $b$  端可以绕  $O$  点无摩擦地转动。磁场平行于转动轴  $OO'$  方向向上, 磁感应强度为  $B$ , 导体  $ab$  跟磁场夹角为  $\theta$ , 长为  $L$ , 电阻为  $R$ 。电源电动势为  $\mathcal{E}$ , 内阻为  $r$ , 圆环导轨的电阻不计。求:(1)导体  $ab$  的转动方向;(2)导体  $ab$  匀速转动的角速度。

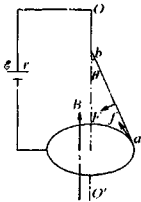


图 11-5-15

13. 两个同样的金属环半径为  $R$  质量为  $m$ , 放在均匀磁场中, 磁感应强度为  $B_0$ , 其方向垂直于环面, 如图 11-5-16 所示。两环接触点  $A$  和  $C$  有良好的电接触, 角  $\alpha = \pi/3$ 。求若消去磁场每个环具有的速度。构成环的这段导线的电阻为  $r$ , 环的电感不考虑, 在磁场消失时环的移动忽略不计, 没有摩擦。

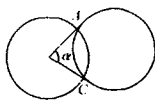


图 11-5-16

14. 一根永久的圆磁棒, 在它的磁极附近套上窄环形线圈。摆动线圈, 使线圈沿轴  $OO'$  作简谐振动, 如图 11-5-17 所示, 振幅  $A = 1$  毫米(这比磁铁和线圈小得多), 频率  $f = 1000\text{Hz}$ , 于是, 在线圈里产生感应电动势, 其最大值  $\mathcal{E}_m = 5\text{V}$ 。如果线圈不动, 通过线圈的电流  $I = 200\text{mA}$ 。求磁场对线圈的作用力。

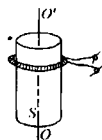


图 11-5-17

15. 两个半径分别为  $10\text{mm}$  和  $50\text{mm}$  的细齿轮互相啮合地装配在一起, 如图 11-5-18 所示。转轴半径都是  $1\text{mm}$ , 整个装置放在磁感强度  $B = 0.5\text{T}$  的均匀磁场中,  $B$  方向平行转轴, 两轴通过金属支架互相连通, 当两齿轮分

开时,量得齿轮边缘之间的电阻为  $10^{-2}\Omega$ ,现将一质量为  $10^{-2}\text{kg}$  的物体用轻绳绕在大齿轮轴上,忽略摩擦损耗,求悬挂物体在重力作用下匀速下落的速度.

16. 图 11-5-19 所示,一矩形管长为  $l$ ,宽为  $a$ ,高为  $b$ ,两个相距为  $a$  的两个侧面是导体,上下平面是绝缘体,现将两个导体平面用导线短路,使磁感强度为  $B$  的匀强磁场垂直于上下平面,有电阻率为  $\rho$  的水银通过矩形管,如果水银通过管子的速度  $v$  和加在管两端的压强差成正比.证明:当加在管上的压强差为  $p$  时,水银的流速为  $v = v_0(1 + \frac{v_0 l B^2}{\rho p})^{-1}$ ,  $v_0$  为无磁场时,在压强差为  $p$  时的速度.

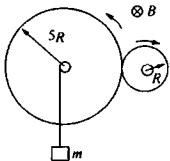


图 11-5-18

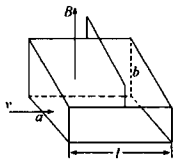


图 11-5-19

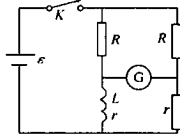


图 11-5-20

17. 图 11-5-20 所示的电路中,各元件的数据为已知,电源及电流计的内阻可忽略不计,若闭合电键  $K$ , (1)求电感为  $L$ 、电阻为  $r$  的线圈中的电流强度的稳定值; (2)闭合后,有多少电量通过电流计?

18. 如图 11-5-21 所示,在无限长的光滑导轨上有一辆载有磁铁的小车,质量为  $m$ ,磁极为  $N$  极在下,  $S$  极在上,磁铁的端面为边长为  $a$  的正方形(设磁场全部集中在端面且竖直向下,磁感强度为常量  $B$ ),两条导轨之间焊接有一系列短金属条,相邻金属条之间的距离等于金属条的长度,且都等于  $a$ ,每条金属条的电阻和每小段导轨的电阻均为  $r$ ,今要使磁铁沿导轨向下以速率为  $v$  作匀速运动,则导轨的倾角  $\theta$  应为多大?

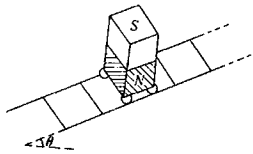


图 11-5-21

### 问题与讨论 独立作用原理

例 1 一带电量为  $+q$  的小球,质量为  $m$ ,从  $P$  点沿水平  $z$  轴负方向以  $v_0$  初速开始运动,如图 11-6-1 所示,已知  $OP = \frac{2\pi m v_0}{3qB}$ ,在  $xOy$  平面上有一无限大的荧光屏,整个空间充满磁感强度为  $B$ 、沿  $z$  轴负方向的匀强磁场.求小球打到屏上的位置.(用坐标表

示,已知重力加速度为  $g$ )

**解** 本题应用运动独立性原理

粒子运动可看作沿  $z$  轴方向作匀速直线运动和在垂直  $z$  轴的平面内作摆线运动. 带电粒子从  $P$  运动到屏的

$$\text{时间 } t = \frac{OP}{v_0} = \frac{2\pi m}{3qB}$$

而摆线运动,可看成匀速圆周运动和沿  $x$  轴负方向的匀速直线运动的合成.

$$\text{圆周运动的周期 } T = \frac{2\pi m}{qB}, \text{ 所以 } t = \frac{1}{3}T$$

在  $xOy$  平面上,把初始时粒子的零速度分解为反向、大小相等  $v_1, v_2$ ,且使  $v_1$  对应的洛伦兹力与重力平衡.

$$\text{即 } v_1 qB = mg, v_1 = \frac{mg}{qB}, r = \frac{mv_2}{qB} = \frac{m^2 g}{q^2 B^2}$$

由于  $t = T/3$ ,故粒子在匀速圆周运动的分运动中转过  $120^\circ$  角度

$$\text{所以 } y = -(r + r\cos 60^\circ) = -\frac{3}{2}r$$

$$\text{即 } y = -\frac{3m^2 g}{2q^2 B^2}$$

$$\begin{aligned} x &= -v_1 t + r\sin 60^\circ \\ &= -\frac{mg}{qB} \cdot \frac{2\pi m}{3qB} + \frac{m^2 g}{q^2 B^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{即 } x = -\frac{m^2 g}{q^2 B^2} \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

**例 2** 一带电粒子进入介质中受到与它的速度成正比的阻力作用,在粒子完全停下来之前通过的路程为  $10\text{cm}$ . 如果在介质中有跟粒子进入速度垂直的匀强磁场,而粒子仍以原来相同的初速度进入介质中,它则停止在与入射点距离为  $6\text{cm}$  处. 如果磁感强度减小一半,那么该粒子应该停在离开入射点多远处? (重力不计)

**解** 本题应用动量定理、运动独立性原理及微元法

$$\text{在无磁场情况下 } f = -kv$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \Delta p &= \Delta I \\ \Delta p &= -kv \cdot \Delta t \end{aligned}$$

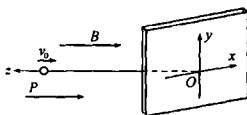


图 11-6-1

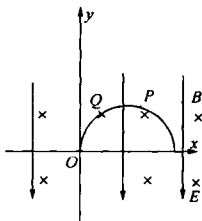



图 11-6-2

$$\begin{aligned} \sum \Delta p &= -k \sum v \cdot \Delta t \\ -mv_0 &= -ks_0 \end{aligned}$$

所以  $\frac{k}{mv_0} = \frac{1}{s_0}$  ①



有磁场  $B$  情况下(设带电粒子为正电荷)  
沿  $x$  轴方向带电粒子受力:

$$F_x = -qBv_y - kv_x$$

沿  $y$  轴方向带电粒子受力:  $F_y = qBv_x -$

$kv_y$

又因为  $\Delta p_x = F_x \cdot \Delta t$

$$\sum \Delta p_x = \sum F_x \cdot \Delta t$$

$$\sum \Delta p_x = -qB \sum v_y \cdot \Delta t - k \sum v_x \cdot \Delta t$$

$$-mv_0 = -qBs_y - ks_x$$

②

同理:  $\sum \Delta p_y = \sum F_y \cdot \Delta t$

$$\sum \Delta p_y = qB \sum v_x \cdot \Delta t - k \sum v_y \cdot \Delta t$$

$$0 = qBs_x - ks_y$$

③

由②,③可得  $s_x = \frac{kmv_0}{k^2 + (qB)^2}, s_y = \frac{qBmv_0^2}{k^2 + (qB)^2}$

因为  $d^2 = s_x^2 + s_y^2$ , 所以  $d^2 = \frac{1}{\left(\frac{k}{mv_0}\right)^2 + \left(\frac{qB}{mv_0}\right)^2}$

即  $\frac{1}{d^2} = \left(\frac{1}{s_0}\right)^2 + \left(\frac{qB}{mv_0}\right)^2$  ④

当磁感强度减半时  $B' = B/2$ , 则同理可推得  $\frac{1}{d'^2} = \left(\frac{1}{s_0}\right)^2 + \left(\frac{qB/2}{mv_0}\right)^2$  ⑤

由④、⑤可得  $d' = \frac{2s_0d}{\sqrt{s_0^2 + 3d^2}} \approx 8.3\text{cm}$

**例 3** 一线电阻为  $\rho$ , 半径为  $l$  的金属导体线圈, 从图 11-6-4 所示位置开始 ( $t=0$ ), 以  $v$  的速度匀速进入均匀磁场, 而磁场的磁感应强度以  $B = B_0 - kt$  规律变化 ( $k > 0$ ). 当线圈进入磁场一半时, 如图 11-6-5 所示, 求它的电流强度的大小.

**解** 本题应用动生电动势、感生电动势产生的独立性原理, 如果本题直接用法拉第电磁感应定律去求解, 数学运算

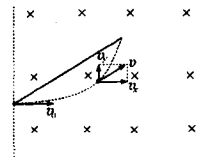


图 11-6-3

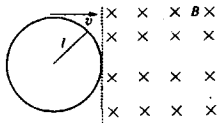


图 11-6-4

对中学生来讲是十分困难的. 动生电动势是因“动”(切割磁感线)而产生的, 感生电动势是因磁场变化而引起的. 总的电动势即是两者的和.

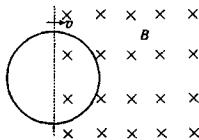


图 11-6-5

$$\text{因为 } \frac{\Delta B}{\Delta t} = -k, \quad t = \frac{l}{v}$$

线圈进入磁场一半时的动生电动势

$$\mathcal{E}_{\text{动}} = B \cdot 2l \cdot v (\text{逆时针}) = (B_0 - kt)2l \cdot v = 2B_0lv - 2kl^2v$$

进入磁场一半时的感生电动势

$$\mathcal{E}_{\text{感}} = S \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\pi l^2}{2} (-k) = -\frac{\pi}{2} l^2 k \quad (\text{顺时针方向})$$

$$\text{总电动势 } \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{动}} + \mathcal{E}_{\text{感}} = 2B_0lv - 2kl^2v - \pi l^2 k/2$$

$$\text{线圈的电阻 } R = 2\pi l \cdot \rho$$

$$\text{电流强度 } I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{4B_0lv - 4kl^2v - k\pi l^2}{4\pi\rho}$$

例 4 在螺绕环的平均半径  $R$  处有点源  $P$ , 由  $P$  点沿磁力线方向注入孔径角  $2\alpha_0$  很小 ( $\alpha_0 \ll 1$ ) 的一电子束, 束中的电子都是经电压  $U_0$  加速后从  $P$  点发出的. 假设磁场  $B$  的大小为常数, 电子束中各电子间的静电相互作用可以忽略. (1) 当电子束沿环形磁场运动时, 为了使电子束每绕一圈有四个聚焦点, 即如图每绕过  $\pi/2$  时就聚焦一次, 问  $B$  应为多大?

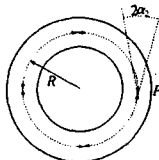


图 11-6-6

注: 考虑电子轨道时, 可忽略  $B_r$  (下述), 忽略  $B$  的弯曲.

(2) 为了使电子束沿环形磁场运动, 需要另加一个使电子束偏转的均匀磁场  $B_1$ , 对于在环内沿半径为  $R$  的圆形轨道运动的一个电子, 求所需  $B_1$  的大小;

(3) 如果没有偏转磁场  $B_1$ , 电子束便不可能维持在环平面附近, 它将沿着垂直于环平面的方向作总体的漂移运动而离开环平面. (i) 试证明相对于注入半径  $R$ , 电子的径向偏离是有限的; (ii) 试确定漂移速度的指向.

注: 电子束的孔径角可以忽略, 应用能量守恒定律和角动量守恒定律.

数据:  $e/m = 1.76 \times 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $U_0 = 3 \text{ kV}$ ,  $R = 50 \text{ mm}$

解 (1) 电子的速度  $v$  可分解成平行于  $B$  的分量  $v_{\parallel}$  和垂直于  $B$  的分量  $v_{\perp}$

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp}$$

那么, 洛伦兹力  $F = -ev \times B$  的大小为  $ev_{\perp} B = \frac{mv^2}{r}$

这里  $r$  为电子行进的圆轨道半径  $r = \frac{mv_{\perp}}{eB}$

$$\text{由此得电子旋转周期 } T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{eB} \quad (1)$$

$r$  和  $v_{\perp}$  随电子的行进而变, 但旋转周期不变. 由于洛伦兹力只影响  $v_{\perp}$ , 故  $v_{\parallel}$  是不变的

$$v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha_0 = v_0$$

$$\text{那么, 聚焦点之间的距离 } 2\pi R/4 \text{ 为 } \frac{2\pi R}{4} = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m v_0}{eB} \quad (2)$$

$$\text{考虑到电子的初动能与加速电压之间关系 } \frac{1}{2} m v_0^2 = eU_0 \quad (3)$$

$$\text{联立 } (2), (3) \text{ 式即得磁场大小 } B = \frac{4}{R\sqrt{e}} \sqrt{2mU_0}$$

$$\text{代入数据得 } B = \frac{4}{50 \times 10^{-3}\sqrt{e}} \sqrt{2 \times 3 \times 10^3} = 1.48 \times 10^2 (\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2})$$

$$(2) \text{ 电子沿半径为 } R \text{ 的圆形轨道运动的向心力为 } \frac{m v_0^2}{R} = e v_0 B_1$$

$$\text{由 } (3) \text{ 式即得 } B_1 = \frac{1}{R\sqrt{e}} \sqrt{2mU_0} = \frac{1}{50 \times 10^{-3}\sqrt{e}} \sqrt{2 \times 3 \times 10^3} = 0.37 \times 10^{-2} (\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2})$$

(3) 在磁场  $B$  中, 磁力线为圆, 其中心位于螺绕环的对称轴上, 见图 11-6-7 中  $z$  轴. 建立如图 11-6-7 的柱坐标系.

(i) 在静磁场中, 电子动能守恒, 电子速度大小不变.

$$v^2 = v_r^2 + v_{\varphi}^2 + v_z^2 = v_0^2$$

在电子的径向反演点处,

$$v_r = 0, \text{ 故 } v_0^2 = v_{\varphi}^2 + v_z^2 \quad (4)$$

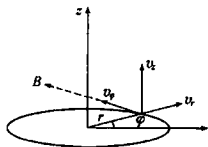


图 11-6-7

第一反演点是  $r = R$  ( $v_{\varphi} = v_0, v_r = 0, v_z = 0$ ). 现在要求出另一反演点, 从而求出电子的最大径向偏离. 需要做的是把条件式 (4) 中的速度分量用半径来表示.

洛伦兹力在  $\varphi$  方向上无分量, 因而没有  $z$  方向上的力矩. 由此得出角动量的  $z$  分量守恒  $L_z = m v_{\varphi} r = m v_0 R$ , 由此式得  $v_{\varphi} = v_0 \frac{R}{r}$  (5)

洛伦兹力的  $z$  分量为  $F_z = -e v B$ , 那么  $z$  方向的加速度为  $a_z = -\frac{eB}{m} v_r$ .

此式两边对时间积分, 即得  $\Delta v_z = -\frac{eB}{m} \Delta r$ .

这是已经假设  $B$  为常数. 由于

$$\Delta v_z = v_z, \Delta r = r - R, \text{ 故 } v_z = -\frac{eB}{m} (r - R) \quad (6)$$

$$\text{将 } (5), (6) \text{ 式代入 } (4) \text{ 式, 得 } 1 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \left(\frac{eBR}{m v_0}\right)^2 \left(\frac{r}{R} - 1\right)^2 \quad (7)$$



此方程的第一个解是  $r = R$ , 另一个解设为  $r = r_1$ . 把⑦式右边的函数画出曲线, 得到如图 11-6-8 所示的定性结果.

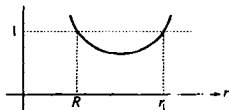


图 11-6-8

由图看出, 相对于  $R$  而言,  $r_1$  是有限的.

(ii) 由于  $R < r < r_1$ , 由⑥式知  $v_z < 0$ , 这意味着漂移是沿  $z$  轴负方向.

**例 5** (a) 一阴极射线管由一个电子枪和一个荧屏组成, 放在磁感强度为  $B$  的均匀恒定磁场中, 如图 11-6-9 所示, 磁场方向平行于电子枪的电子束的轴. 电子束从电子枪的阳极沿轴射出, 但与轴至多成  $5^\circ$  的发散角, 如图 11-6-10 所示. 通常电子束将在荧光屏上呈现一个弥散的斑点, 但对一定大小的磁场则可得到聚焦很好的光点. 考虑某个电子, 离开电子枪时以角度  $\beta$  ( $0 < \beta < 5^\circ$ ) 偏离轴运动, 并考虑其垂直于轴和平行于轴的两个分量, 用下列参量导出电子的荷质比  $e/m$  的表达式.

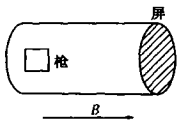


图 11-6-9

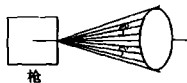


图 11-6-10

使电子束聚焦成一点的最小磁感强度为  $B$ ; 电子枪加速电势差  $U$  (注意  $U < 2\text{kV}$ ); 从阳极到荧屏的距离为  $D$ .

(b) 考虑另一种测量电子荷质比的方法. 图 11-6-11 为其实验装置的侧视图和俯视图, 图中还画出磁场  $B$  的方向. 在这一均匀磁场中放入二块相隔很小距离  $t$  的铜圆盘, 圆盘的半径为  $\rho$ . 两盘间保持电势差  $U$ . 两圆盘平行、同轴, 而且它们的轴垂直于磁场. 一照相底片同轴覆盖在半径为  $\rho + s$  的圆柱体的内侧面, 换句话说, 底片离圆盘边缘的径向距离为  $s$ . 整个装置放在真空中, 注意  $t$  远小于  $s$  和  $\rho$ .

一点状  $\beta$  粒子源放置于两圆盘的圆心之间, 沿各个方向均匀发射  $\beta$  粒子, 粒子的速率分布在一定的范围内. 同一底片在下列不同的实验条件下曝光:

情况 1  $B = 0, U = 0$ ;

情况 2  $B = B_0, U = U_0$ ;

情况 3  $B = -B_0, U = -U_0$ .

这里  $U_0$  和  $B_0$  为正的常数. 注意, 当  $U > 0$  时上面一块圆盘带正电 ( $U < 0$  时上盘带负电). 当  $B > 0$  时, 磁场方向规定为如图 11-6-11 所示的方向 (当  $B < 0$  时磁场沿相反的方向). 解这个小问题时, 两圆盘的间隔可以忽略不计.

在图 11-6-11 中, 底片的两个区域分别用  $A$  和  $B$  标出. 底片曝光并冲洗后, 两个区

域中的某个区域的底片展开后显示的  $\beta$  粒子曝光线条如图 11-6-12 所示。这部分底片是取自什么区域(A 还是 B)? 通过指出作用在电子上的力的方向论证你的答案。

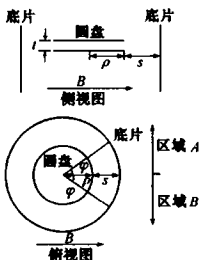


图 11-6-11

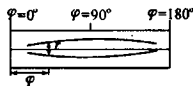


图 11-6-12

(c) 曝光并冲洗后,底片的展开图如图 11-6-12 所示,利用显微镜测量两条最外面的轨迹的间距[在某一特定角度下的间距( $\gamma$ )已在图 11-6-12 中标出].此测量结果由下表给出.角度  $\varphi$  定义为磁场方向与底片上某点和圆盘中心连线间的夹角,如图 11-6-11 所示.

与磁场夹角/度	$\varphi$	90	60	50	40	30	23
间隔/mm	$\gamma$	17.4	12.7	9.7	6.4	3.3	轨迹终端

测量系统参数的数值如下:

$$B_0 = 6.91 \text{ mT}, U_0 = 580 \text{ V}, t = 0.80 \text{ mm}, s = 41.0 \text{ mm}.$$

另外,真空中光速可取为  $3.00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,电子的静止质量为  $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ . 计算观测到的  $\beta$  粒子的最大动能.(以 eV 为单位)

(d) 利用上面(c)部分给出的信息,求出电子的电荷量与静质量的比值.这应通过在所给的坐标纸上画一合适的图求出.

写出所画图的横轴和纵轴所代表的量的代数表达式,并写出电子荷质比的量值.

注意:由于观察的系统误差,你所得到的答案可能与公认的标准值不同.

解 (a) 由题意,当电子回旋一周恰到达屏时,将在屏上清晰聚焦.

$$\text{回旋角速度 } \omega = eB/m, \text{ 回旋一周时间 } T = 2\pi m/(eB)$$

电子速率  $v = \sqrt{2eU/m}$  (因  $U < 2 \text{ kV}$ , 不难算得  $v < 2.65 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 不必考虑相对论效应).

$$\text{电子行进距离 } D = Tv \cos \beta \approx Tv = \frac{2\pi m}{eB} \sqrt{2eU/m}$$

$$\text{故电子荷质比 } e/m = 8\pi^2 U / (B^2 D^2)$$

(b)考虑情况 2,电子受电场力方向向上.

在区域 A,电子受磁场力的方向也向上,故电子打在盘上,不能到达底片.

在区域 B,电子受磁场力方向向下,若磁力与电力相等,电子将不受净力,而从盘间射出,使底片曝光.

情况 3 相仿.故底片取自区域 B.

(c)由盘间出射的电子受力平衡,电子受电场力  $eU/t$ ,受磁场力  $evB\sin\varphi$ ,由

$$eU/t = evB\sin\varphi \text{ 得电子速率}$$

$$v = U/(Bt\sin\varphi)$$

最大速率  $v_m$  对应于最小  $\varphi$  角为  $23^\circ$ ,由此得

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{U_0}{B_0 t \sin 23^\circ} = \frac{580}{6.91 \times 10^{-3} \times 0.80 \times 10^{-3} \times \sin 23^\circ} \\ &= 2.685 \times 10^8 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) = 0.895c \end{aligned}$$

为相对论性的,故电子最大动能  $E_m = (\gamma - 1)mc^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) mc^2$   
 $= 1.02 \times 10^{-13} (\text{J}) = 637 (\text{keV})$

(d)从盘间出射的电子仅受磁场力作用,此力近似在竖直方向,因为电子运动速度与水平方向夹角始终很小.

由磁力引起的加速度  $a = Bev\sin\varphi/(\gamma m)$ ,电子水平初速为  $v$ ,电子从盘间出射到达底片需时  $t = s/v$ ,在此时间内竖直方向的位移为  $y/2 = (1/2)at(s/v)^2$

$$\text{即 } y = \frac{Bev^2 \sin\varphi}{\gamma m v}$$

由(c),对从盘间出射的电子应有  $v = \frac{U}{Bt\sin\varphi}$ ,代入上式消去  $v$  [注意:  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ],得  $y^2 = \left( \frac{eBs\sin\varphi}{m} \right)^2 \left[ \left( \frac{Bts\sin\varphi}{U} \right)^2 - \left( \frac{s}{c} \right)^2 \right]$

以  $\left( \frac{y}{Bs\sin\varphi} \right)^2$  为纵轴,  $(Bts\sin\varphi/U)^2$  为横轴作图,所得直线的斜率为  $(e/m)^2$ ,在纵轴上截距为  $-\frac{es^2}{mc}$ .

从所作图上(图略)读得截距为  $-537.7(\text{Cs/kg})^2$ ,得

$$e/m = 1.70 \times 10^{11} (\text{C/kg})$$

读得斜率为  $2.826 \times 10^{22} (\text{C/kg})^2$ ,得

$$e/m = 1.68 \times 10^{11} (\text{C/kg})$$

## 第十二章 交流电和电磁波

## 第一节 交流电



## 【知识要点】

## 一、正弦交流电

大小和流向随时间变化的电流叫交流电. 随时间按正弦规律变化的交流电叫正弦交流电. 它可以表示为

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

式中:  $i$  为交流电的瞬时值;  $I_m$  为交流电的峰值(最大值);  $\omega$  为交流电的角频率, 它与交流电频率  $f$  的关系是  $\omega = 2\pi f$ , 频率的倒数叫交流电的周期;  $(\omega t + \varphi_0)$  为交流电的相位,

其中  $\varphi_0$  是交流电的初相位. 正弦交流电峰值  $I_m$  的  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  倍叫交流电的有效值  $I_r$ , 即

$$I_r = \frac{\sqrt{2}}{2} I_m.$$

## 二、三相交流电

三个构造完全相同的线圈共轴放置, 互成  $120^\circ$  角固定, 并让它们在垂直于转轴的匀强磁场中作匀角速转动. 这三个线圈上就产生了三个电动势. 这三个电动势的最大值和频率都相同, 相位差各为  $\frac{2\pi}{3}$ , 若从某一线圈经过中性面时开始计时, 它们的瞬时值可分

别写成  $e_1 = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ ,  $e_2 = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi)$ ,  $e_3 = \mathcal{E}_m \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi)$ .

三相电源的三个线圈的连接方法有星形(Y)和三角形( $\Delta$ )两种接法.

如图 12-1-1 为星形接法,  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  称为相线,  $OO'$  称为中性线. 图 12-1-2 为三角形接法.

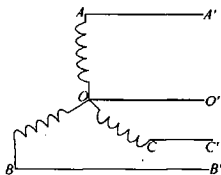


图 12-1-1

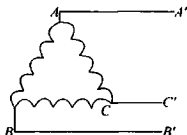


图 12-1-2

对星形接法有  $U_{AB} = U_{AO} - U_{BO} = \mathcal{E}_m \sin \omega t - \mathcal{E}_m \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi)$

$$= 2\mathcal{E}_m \cos(\omega t - \frac{1}{3}\pi) \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\mathcal{E}_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

同理可得:  $U_{BC} = \sqrt{3}\mathcal{E}_m \sin(\omega t + \frac{3\pi}{2})$ ,  $U_{CA} = \sqrt{3}\mathcal{E}_m \sin(\omega t + \frac{5\pi}{6})$

在三相交流电中,各相线与中线间的电压  $U_{AO}$ 、 $U_{BO}$ 、 $U_{CO}$  即三相发电机各相的路端电压叫做相电压,在发电机内阻忽略的情况下,相电压就等于各相中的电动势,因此它们的有效值相等,位相彼此相差  $2\pi/3$ 。相线与相线间的电压  $U_{AB}$ 、 $U_{BC}$ 、 $U_{CA}$  称为线电压,它们的位相彼此间相差  $2\pi/3$ 。线电压仍是三相交流电,并且线电压为相电压的  $\sqrt{3}$  倍。

在三相电路中,负载的连接有两种方式,即星形(Y)连接和三角形( $\Delta$ )连接。如图 12-1-3 和 12-1-4 所示

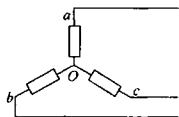


图 12-1-3

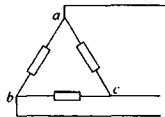


图 12-1-4

星形接法在负载对称的情况下,各相电流的有效值相等,位相彼此相差  $2\pi/3$ ,因此中线电流  $I_0 = I_m \sin \omega t + I_m \sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi) + I_m \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) = 0$ ,即中线上的电流始终为零。在这种情况下,中线变成多余的了,可以将它省去。在负载不对称的情况下,中线电流  $I_0$  将不等于零。然而平常在各相负载的差别不大时,中线电流比相线电流小得多,所以中线可用较细的导线来做,但绝对不能取消或让它断开,否则各相电压失去平衡,会产生严重后果。

### 三、交流电路

#### 1. 纯电阻电路

交流电路中仅有电阻元件  $R$  时,该电路叫纯电阻电路,纯电阻交流电路有以下特

点:(1)阻抗  $Z_R = R$ ; (2)电压和电流同相位; (3)电压和电流的关系服从欧姆定律,即

$$i = \frac{U_R}{R} = \frac{U_m \sin(\omega t + \varphi)}{R}$$

### 2. 纯电容电路

交流电路中只有电容元件的电路叫纯电容电路. 纯电容电路有以下特点: (1)阻抗(容抗)  $Z_C = X_C = \frac{1}{\omega C}$ ; (2)电容元件上的电流的相位比其上电压的相位超前  $\frac{\pi}{2}$ ; 如果  $U_L = U_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ , 那么

$$I_L = I_m \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$I_m = \frac{U_m}{X_C} = \omega C U_m$$

### 3. 纯电感电路

交流电路中只有电感元件的电路叫纯电感电路, 纯电感电路有以下特点: (1)阻抗(感抗)  $Z_L = X_L = \omega L$ ,  $L$  是电感元件的自感系数; (2)电感元件上的电流的相位比其上电压的相位落后  $\frac{\pi}{2}$ , 即如果  $U_C = U_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ , 那么

$$I_C = I_m \sin(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2})$$

$$I_m = \frac{U_m}{X_L} = \frac{U_m}{\omega L}$$

$$4. R, L, C \text{ 串联电路的阻抗为 } Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}.$$

## 四、交流电的功率

在纯电阻电路中, 交流电的功率仍等于电压和电流强度的乘积, 跟直流电的情形一样. 但是许多实际电路, 如日光灯电路、电动机电路, 都不仅有电阻, 还有电感. 如图 12-1-5 所示就是电阻和电感串联的电路. 接通电路后, 从仪表的读数可以知道, 仪表上测出的电灯实际消耗的功率  $P < UI$  ( $U$  是伏特表读数,  $I$  是安培表读数), 在电阻与电感串联的电路中, 交流电的功率小于电压和电流强度的乘积. 在功率问题上, 交流电也表现出与直流电不同的特点.

交流电在通过电阻器、电感线圈和电容器时, 电能的转化和对外做功的情况是不同的. 交流电通过电阻时, 使电阻发热, 电能转化为内能, 这时电流对外做了功. 交流电通过电感线圈时, 情况就不同了. 当电流增强时, 电流的磁场也增强, 这时电流的能转化为磁场能, 储存在线圈的磁场中; 当电流减弱时, 磁场也减弱, 这时磁场能又转化为电流的能. 可见, 交流电通过电感线圈时, 交流电的能与磁场能往复转化, 电流对外并不做功.

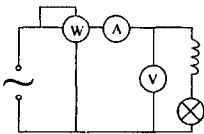


图 12-1-5

交流电通过电容器时,也有类似的情况.当电容器充电时,电容器两极板间的电场不断增强,电流的能转化为电场能,储存在电容器中;当电容器放电时,电容器两极板间的电场不断减弱,于是电场能又转化为电流的能.可见,交流电通过电容器时,也是能量在电路中往复转化,电流也不对外做功.

在一般交流电路中,电流的能包括两部分:一部分对外做功,即转化为内能、机械能、化学能等其他形式的能;另一部分只在电路内部进行往复转化,不对外做功.因此,交流电的功率也分为两部分:一部分对外做功;一部分不对外做功.我们把电流对外做功的功率(或者说电路实际消耗的功率)叫做有功功率,用  $P$  表示.把电路里电压和电流强度的乘积叫做视在功率,用  $S$  表示.把有功功率和视在功率的比值叫做功率因数.可以证明,功率因数等于  $\cos \varphi$ ,其中  $\varphi$  就是电压和电流之间的相差.所以

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}, P = S \cos \varphi \text{ 或 } P = UI \cos \varphi$$

功率因数的大小,决定于电路的性质.在白炽灯、电炉等纯电阻电路里,由于电流和电压同相,相差  $\varphi = 0$ ,功率因数  $\cos \varphi = 1$ ,有功功率等于视在功率,即全部电流的能转化为内能,用来对外做功.在常用的电动机、日光灯的电路里,都有感抗,电流落后于电压,相差  $\varphi \neq 0$ ,因此功率因数  $\cos \varphi < 1$ ,有功功率小于视在功率,即电路内有一部分能量往复转化而不对外做功.供电设备都有一定的额定电流和额定电压.在正常情况下,电流和电压都不允许超过额定值.由公式  $P = UI \cos \varphi$  可知,如果  $\cos \varphi$  很小,即使电流和电压都已达到额定值,有功功率  $P$  还是很小,供电设备的利用率很低.所以为了充分利用供电设备的容量,就必须提高电路的功率因数.

如何提高功率因数呢?我们可以利用电容元件的电流

的相位比其上电压的相位超前  $\frac{1}{2}\pi$ ,电感元件的电流的相位

比其上电压的相位落后  $\frac{1}{2}\pi$  这个特性,即在电容元件的电路

中适当并联一个电感元件,在电感元件的电路中适当并联一个电容元件.例如我们为了提高前面图 12-1-5 的功率

因数,可在电路中并联一个适当的电容器,如图 12-1-6 所

示.这是因为在有电感的电路中,电流落后于电压,并联上电容后,由于电容有使电流超前于电压的作用,这个作用跟电感使电流落后的作用抵消或部分抵消,所以电流和电压之间的相差减小,功率因数就提高了.

三相交流电的功率等于各相功率之和.在对称负载情况下,用  $U_{\varphi}$ ,  $I_{\varphi}$  代表每一相的相电压和相电流的有效值,则三相交流电路的平均功率为  $\bar{P} = 3 U_{\varphi} I_{\varphi} \cos \varphi$ .应当指出的是,单相交流电的瞬时功率是随时间周期性变化的,但三相交流电的瞬时功率是不随时间变化的恒量.这是因为各相瞬时功率的高峰彼此错开,相加的结果填平补齐了.

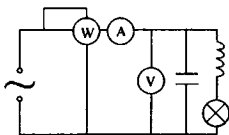


图 12-1-6

## 【例题分析】

例1 如图 12-1-7 所示的电路中,直流电源的电动势为 5V,正弦交流电源电动势为 3V,电源内阻均不计,二极管为理想二极管,则电阻  $R$  上的电压有效值为多少?



图 12-1-7

解 电源电动势  $\mathcal{E} = 5 + 3\sqrt{2}\sin\omega t$

则流经电阻  $R$  的电流强度瞬时值  $i = \frac{5 + 3\sqrt{2}\sin\omega t}{R}$

$$i^2 = \frac{25 + 30\sqrt{2}\sin\omega t + 18\sin^2\omega t}{R^2}$$

电流流经电阻  $R$ , 要求  $R$  上电压的有效值, 只要先求得流经电阻  $R$  的电流的有效值. 有效值是根据热效应获得的, 所以有效值可以理解为平方平均然后再开二次方根,

即  $I_{\text{有}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N i_i^2}$ . 再根据正弦交流电的有效值为最大值的  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  倍, 得  $\overline{\sin^2\omega t} = \frac{1}{2}$ .

而  $\overline{\sin\omega t} = 0$ , 故  $\overline{i^2} = \frac{25}{R^2} + \frac{0}{R^2} + \frac{9}{R^2} = \frac{34}{R^2}$ ,  $I_{\text{有}} = \frac{\sqrt{34}}{R}$ , 则  $U_{\text{有}} = \sqrt{34}V$

例2 一个用电设备, 在  $U = 1000V$  的电压下工作, 其功率为  $P = 50kW$ . 求功率因数分别为  $\cos\varphi_1 = 0.8$  和  $\cos\varphi_2 = 0.2$  时, 在连接发电机与该用电设备的导线上的功率损失. 设导线电阻  $r = 0.1\Omega$ .

解 通过用电设备的电流为:  $I = \frac{P}{U\cos\varphi}$

$$I_1 = \frac{P}{U\cos\varphi_1} = \frac{50000}{1000 \times 0.8} = 62.5 \text{ (A)}$$

$$I_2 = \frac{P}{U\cos\varphi_2} = \frac{50000}{1000 \times 0.2} = 250 \text{ (A)}$$

导线上的功率损失为

$$\Delta P_1 = I_1^2 \times r = 62.5^2 \times 0.1 = 391 \text{ (W)}$$

$$\Delta P_2 = I_2^2 \times r = 250^2 \times 0.1 = 6250 \text{ (W)}$$

功率损失的百分比为

$$\eta_1 = \frac{\Delta P_1}{P} = \frac{391}{50000} \times 100\% = 0.78\%$$

$$\eta_2 = \frac{\Delta P_2}{P} = \frac{6250}{50000} \times 100\% = 12.5\%$$

例3 如图 12-1-8 所示三相供电线路上, 接入三相电灯负载, 线电压为 380V, 每相负载电阻 500 $\Omega$ . 求:

(1) 正常工作时, 电灯两端的电压和通过电灯的电流; (2) 如果 A 相断开, 其他两相



电灯的电压和电流;(3)如果 A 相短路,而熔断器未熔断,求其他两相电灯的电压和电流.

解 (1)正常工作时加在每相电灯两端的电压均为

$$220\text{V}, \text{通过电灯的电流 } I = \frac{220}{500} = 0.44(\text{A})$$

(2)如果 A 相断开,另两相电灯串联后接入 380V 电路

$$\text{中,通过电灯的电流 } I = \frac{380}{500 + 500} = 0.38(\text{A})$$

(3)如果 A 相短路,另两相电灯均直接加在 380V 电压两端,通过电灯的电流

$$I = \frac{380}{500} = 0.76(\text{A})$$

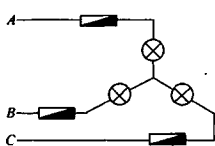


图 12-1-8

例 4 试证明纯电容电路的容抗  $X_C = \frac{1}{\omega C}$ , 且它的电流相位超前电压相位  $\frac{\pi}{2}$ .

证明 设  $U_1 = U_m \sin \omega t$ , 经过很短时间  $\Delta t$  后, 电压变到  $U_2 = U_m \sin \omega(t + \Delta t)$ , 则电压的增量为  $\Delta U = U_2 - U_1 = U_m \sin \omega(t + \Delta t) - U_m \sin \omega t$

和差化积, 得  $\Delta U = 2U_m \cos \omega(t + \frac{\Delta t}{2}) \sin \frac{\omega \Delta t}{2}$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $t + \frac{\Delta t}{2} \rightarrow t$ ,  $\sin \frac{\omega \Delta t}{2} \rightarrow \frac{\omega \Delta t}{2}$ , 故  $\Delta U = U_m \omega \Delta t \cos \omega t$

又知, 电流  $i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{C \Delta U}{\Delta t} = \omega C U_m \cos \omega t = \omega C U \sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

由此可得纯电容的电流相位超前电压相位  $\frac{\pi}{2}$ , 且可得  $I = \omega C U$

又因  $I = \frac{U}{X_C}$ , 故得  $X_C = \frac{1}{\omega C}$

例 5 已知交流电动势  $e = 311 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})\text{V}$ , 求(1)将它加在  $100\Omega$  电阻两端时, 每分钟发出的热量;(2)使它通过  $C = \frac{1}{\pi} \mu\text{F}$  的电容时, 电流瞬时值的表达式;(3)使它与  $L = \frac{1}{\pi} \text{H}$  的电感元件相连时, 流经电感元件电流瞬时值的表达式.

$$\text{解 (1)} Q = \frac{U^2}{R} t = \frac{(\frac{311}{\sqrt{2}})^2}{100} \times 60 = 2.9 \times 10^4 (\text{J})$$

$$(2) \text{该电容的容抗 } X_C = \frac{1}{\omega C} = 10^4 \Omega, \text{故 } I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{X_C} = \frac{311}{10^4} = 3.11 \times 10^{-2} (\text{A})$$

$$\text{因纯电容电路电流相位超前电压相位 } \frac{\pi}{2}, \text{故 } i = 3.11 \times 10^{-2} \sin(100\pi t + \frac{5}{6}\pi) (\text{A})$$

$$(3) \text{该电感元件的感抗为 } X_L = \omega L = 100 \Omega, \text{故 } I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{X_L} = \frac{311}{100} = 3.11 (\text{A})$$

因纯电感电路电流相位落后电压相位  $\frac{\pi}{2}$ , 故  $i = 3.11\sin(100\pi t - \frac{1}{6}\pi)(A)$



### 【巩固习题】

1. 试证明纯电感电路的感抗  $X_L = \omega L$ , 且它的电流相位落后电压相位  $\frac{\pi}{2}$ .
2. 从同一交流电路接出两个支路, 如图 12-1-9 所示, 一支路连接一个无泄露电阻的电容器  $C$ , 另一支路连接一个无电阻的电感线圈, 则导线  $AB$  和  $EF$  间( )

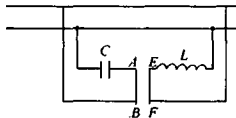


图 12-1-9

- A. 相吸
  - B. 相斥
  - C. 可能相吸也可能相斥
  - D. 无相互作用
3. 一个纯电感接在电压  $U = 220V$ , 频率  $f = 50Hz$  的交流电路中, 测得电流强度  $I = 2A$ , 试求该线圈的感抗和电流瞬时值等于  $2A$  时的电压.
  4. 一个电容器元件, 其电容  $C = 20\mu F$ , 在电压  $U = 20V$ , 频率  $f = 50Hz$  的交流电源的作用下, 电路中的电流多大? 将电源的频率改成  $f = 500Hz$ , 其他条件不变, 电流变为多少?
  5. 一个电感元件, 其自感  $L = 0.4H$ , 在电压  $U = 20V$ , 频率  $f = 50Hz$  的交流电源的作用下, 电路中的电流多大? 将电源的频率改成  $f = 500Hz$ , 其他条件不变, 电流变为多少?
  6. 一个电阻元件, 其电阻  $R = 15\Omega$ , 一个电容元件, 其容抗  $Z = 9\Omega$ . 将这两个元件串联, 加在电压  $U = 52.5V$  的交流电源上, 问电路的总阻抗是多少? 电流是多少? 这两个元件上分配的电压各是多少?
  7. 一个电阻元件, 其电阻为  $R$ , 一个电感元件, 其自感为  $L$ , 将这两个元件并联, 接在电压为  $U$ 、频率为  $f$  的交流电源上, 问电路的总阻抗  $Z$  为多少? 分配到电阻上的电流  $I_R$  是多少? 分配到电感上的电流  $I_L$  是多少?
  8. 正方形线圈的电阻为  $R$ , 每边长为  $a$ , 垂直穿过线圈平面的磁感应强度的变化规律为  $B = B_0 \cos \omega t$ . 求线圈的发热功率.
  9. 在真空中速度为  $v = 6.4 \times 10^7 m/s$  的电子束连续的射入平行极板之间, 极板长度为  $l = 8.0 \times 10^{-2} m$ , 间距  $d = 5.0 \times 10^{-3} m$ , 两极板不带电时, 电子束将沿两极板之间的中线通过, 在两极板上加一  $50Hz$  的交变电压  $U = U_0 \sin \omega t$ , 如果所加电压的最大值  $U_0$  超过某一值  $U_C$  时, 将开始出现以下现象: 电子束有时能通过两极板, 有时间断不能通过. 求:
    - (1)  $U_C$  的大小;
    - (2)  $U_0$  为何值才能使通过的时间  $\Delta t_{通}$  与间断的时间  $\Delta t_{断}$  之比  $\Delta t_{通} : \Delta t_{断} = 2 : 1$ .

## 第二节 整流、滤波和稳压

### 【知识要点】

#### 一、整流

整流就是将交流电变成直流电的过程,通常利用晶体二极管的单向导电性来达到整流的目的.理想的晶体二极管它的正向电阻为零,反向电阻无穷大.

##### 1. 半波整流

如图 12-2-1 是半波整流电路.  $B$  是电源变压器,  $D$  是二极管,  $R$  是用电器的电阻或叫负载.

当变压器的初级线圈有交流电输入时,变压器的次级线圈就有交流电压输出,设变压器输出的交变电压为  $u = u_m \sin \omega t$ , 它的波形如图 12-2-2 甲所示.

当变压器输出的交变电压处于正半周时,  $a$  正  $b$  负, 二极管因加正向电压而导通, 电流方向由  $a$  经二极管  $D$ 、负载电阻  $R$  流到  $b$ . 由于二极管导通时正向电阻很小, 与负载电阻相比可以忽略, 这时电压全部加在负载电阻上. 负载电阻上的电压波形与变压器输出的电压波形相同. 当变压器输出的交变电压处于负半周时,  $a$  负  $b$  正, 二极管因加反向电压而截止, 它的反向电阻可以看作无限大, 电路中的电流近似为零. 这时电压全部加在二极管上, 负载电阻上的电压为零.

图 12-2-2 乙是负载电阻的电压波形, 图 12-2-2 丙是负载电阻的电流波形. 可见, 整流后负载电阻获得的是强度随时间变化的直流电, 也叫脉动直流电. 半波整流电路简单, 使用元件少, 但只利用交流电的半个周期, 负载获得的直流电脉动性大, 变压器的利用率低.

##### 2. 全波整流

图 12-2-3 是全波整流电路, 两只二极管的负极都通过负载电阻  $R$  与变压器次级线圈中心抽头  $O$  连接. 当变压器输出的交变电压处于正半周时,  $a$  正  $b$  负,  $O$  点电势介于  $a$ 、 $b$  之间, 二极管  $D_1$  因加正向电压而导通,  $D_2$  因加反向电压而截止. 这时电流方向

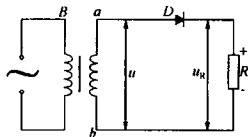


图 12-2-1

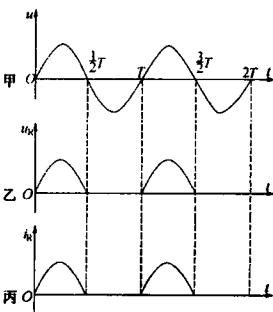


图 12-2-2

是由  $a$  经  $D_1$ 、 $R$  到  $O$ ，如图中实线箭头所示。当变压器输出的交变电压处于负半周时， $a$  负  $b$  正，二极管  $D_1$  截止， $D_2$  导通。这时电流方向是由  $b$  经  $D_2$ 、 $R$  到  $O$ ，如图中虚线箭头所示。可见，无论是正半周或负半周，通过负载电阻  $R$  的电流方向总是相同的。图 12-2-4 是全波整流波形。其中甲是变压器次级线圈  $a$ 、 $O$  间或  $O$ 、 $b$  间的交变电压波形，乙是负载电阻的电压波形，丙是负载电阻的电流波形。全波整流使交流电的两个半周期都得到了利用，负载获得的直流电脉动性比较小。但变压器次级线圈要有中心抽头，次级线圈的圈数是半波整流的二倍，变压器利用率也不高。二极管在截止状态时承受的反向电压是次级线圈上  $a$ 、 $b$  间的全部电压，因此要选用耐压性较高的二极管。

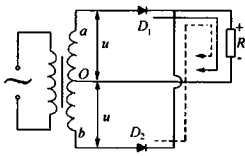


图 12-2-3

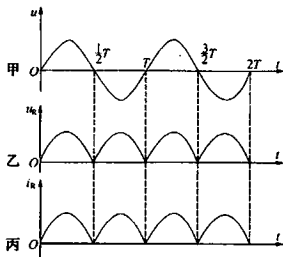


图 12-2-4

### 3. 桥式整流

图 12-2-5 是桥式整流电路，当变压器输出的交变电压处于正半周时， $a$  正  $b$  负，二极管  $D_1$ 、 $D_3$  因加正向电压而导通， $D_2$ 、 $D_4$  因加反向电压而截止。这时电流方向是由  $a$  经  $D_1$ 、 $R$ 、 $D_3$  到  $b$ 。当变压器输出的交变电压处于负半周时， $a$  负  $b$  正，二极管  $D_1$ 、 $D_3$  因加反向电压而截止， $D_2$ 、 $D_4$  因加正向电压而导通。这时电流方向是由  $b$  经  $D_2$ 、 $R$ 、 $D_4$  到  $a$ 。可见，无论正半周或负半周，通过负载电阻  $R$  的电流方向也是相同的。桥式整流的波形跟全波整流的波形相似。

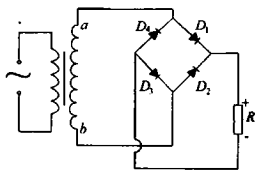


图 12-2-5

## 二、滤波

交流电经整流后变成脉动直流电。脉动直流电可以看作是由强度和方向都不随时间变化的直流成分与强度和方向都随时间变化的交流成分组成。其他的脉动直流电，也可以看作是由强度不变的直流成分和一个或几个交流成分叠加形成的。由于脉动直流电含有交流成分，往往不能适应实际需要，为了使脉动直流电变得比较平稳，需要把其中的交流成分滤掉，这叫滤波。常用的滤波电路有电容滤波、电感滤波和  $\pi$  型滤波。

电容器具有通交流隔直流的作用，可以做滤波元件。图 12-2-6 甲是带有电容滤波的半波整流电路。电解电容器  $C$  和负载电阻  $R$  并联。由于并联电路有分流作用，当电容器的电容比较大时，容抗比较小，脉动电流的交流成分大部分通过电容器而滤掉，直流成分和一小部分交流成分通过负载电阻。因此负载电阻的电压和电流就平稳多了，电容

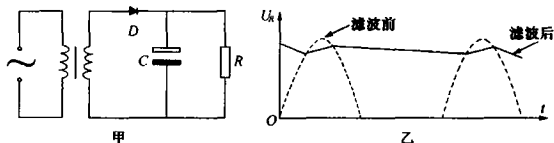


图 12-2-6

器的电容越大,负载电阻的电压和电流就越平稳.图 12-2-6 乙的粗实线是经过电容滤波的波形.这个波形可以用示波器观察到.

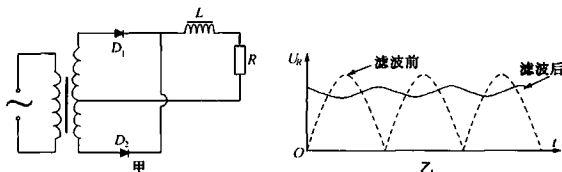


图 12-2-7

电感线圈具有阻碍电流变化的作用,也可以做滤波元件,图 12-2-7 甲是带有电感滤波的全波整流电路.低频扼流圈  $L$  和负载电阻  $R$  串联.由于串联电路有分压作用,当低频扼流圈的电感比较大时,感抗也比较大,电压的交流成分大部分降在低频扼流圈上.低频扼流圈的电阻一般比负载电阻小,电压的直流成分大部分降在负载电阻上.因此,负载电阻的电压和电流就平稳多了,电感线圈的电感越大,负载电阻的电压和电流就越平稳.图 12-2-7 乙的粗实线是经过电感滤波的波形.

把电容滤波和电感滤波组合起来,可以组成滤波效果更好的  $\pi$  型滤波,图 12-2-8 是带有  $\pi$  型滤波的桥式整流电路.如果负载需要的电流不大,电感线圈也可以用电阻来替代.

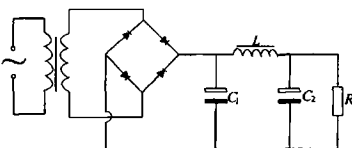


图 12-2-8

### 三、稳压

#### 1. 稳压管的伏安特性

稳压管能够稳压,是利用其反向击穿时的伏安特性,其伏安特性曲线如图 12-2-9 所示.从图中可以看到,在反向击穿区,当流过稳压管的电流在一个较大的范围内变化时(设变化量为图中的  $\Delta I$ ),稳压管两端的电压变化量  $\Delta V$  却很小.因此如果将稳压管和负载并联,就能在一定条件下保持输出电压基本稳定.

## 2. 硅稳压管的稳压电路及工作原理

图 12-2-10 表示一个硅稳压管稳压电路的原理图。整流、滤波后所得的直流电压作为稳压电路的输入电压  $\bar{V}_1$ ，稳压管  $D_Z$  与负载电阻  $R_L$  并联。为了保证工作在反向击穿区，稳压管作为一个二极管，要处于反向接法。限流电阻  $R$  也是稳压电路必不可少的组成元件，当网电压波动时，通过调节  $R$  上的压降来保持输出电压基本不变。

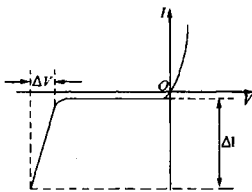


图 12-2-9

电路的稳压原理如下：

(1) 假设稳压电路的输入电压  $\bar{V}_1$  保持不变，当负载电阻  $R_L$  减小， $I_L$  增大时，由于电流在电阻  $R$  上的压降升高，输出电压  $\bar{V}_0$  将下降。而稳压管并联在输出端，由其伏安特性可见，当稳压管两端的电压略有下降时，电流  $I_Z$  将急剧减小，亦即用的  $I_Z$  的减小来补偿  $I_L$  的增大，最终使  $I_R$  基本保持不变，因而输出电压也维持基本稳定。上述过程可简明表示如下：

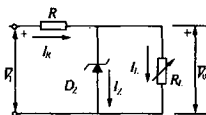


图 12-2-10

$$R_L \downarrow \rightarrow I_L \uparrow \rightarrow I_R \uparrow \rightarrow \bar{V}_0 \downarrow \rightarrow I_Z \downarrow \rightarrow I_R \downarrow \\ \bar{V}_0 \uparrow \leftarrow$$

(2) 假设负载电阻  $R_L$  保持不变，由于电网电压升高而使  $\bar{V}_1$  升高时，输出电压  $\bar{V}_0$  也随之上升，但此时稳压管的电流  $I_Z$  急剧增加，则电阻  $R$  上的压降增大，以此来抵消  $\bar{V}_1$  的升高，从而使输出电压基本保持不变。上述过程可简明表示如下：

$$\bar{V}_1 \uparrow \rightarrow \bar{V}_0 \uparrow \rightarrow I_Z \uparrow \rightarrow I_R \uparrow \rightarrow V_R \uparrow \\ \bar{V}_0 \downarrow \leftarrow$$

## 3. 串联型直流稳压电路

所谓串联型直流稳压电路，就是在输入直流电压和负载之间串联入一个三极管，当  $\bar{V}_1$  或  $R_L$  变化引起输出电压  $V_0$  变化时， $\bar{V}_0$  的变化将反映到三极管的输入电压  $V_{be}$ ，然后  $V_{ce}$  也随之变化，从而调整  $\bar{V}_0$ ，以保持输出电压基本稳定。根据三极管所起的作用，就称之为调整管。

基本的调整管稳压电路如图 12-2-11 所示。我们可以清楚的看出，它实质上是在图 12-2-10 所示稳压管稳压电路的基础上，再加上射极跟随器而组成的。由电路的特点可知， $\bar{V}_0$  与  $V_Z$  是“跟随”的关系，所以只要稳压管电压  $V_Z$  保持稳定，则当  $\bar{V}_1$  和  $I_L$  在一定范围内变化时， $\bar{V}_0$  也能基本稳定。但是，与原来的稳压管稳压电路相比，加了射极跟随器以后，一个突出的优点是带负载能力增强了。在图 12-2-10 的电路中，当负载电流  $I_L$  变化时，要求由稳压管来补偿负载电流的变化量  $\Delta I_L$ ；而在图 12-2-11 的电路中，稳压管

只需提供三极管的基极电流变化  $\Delta I_b$ , 由图 12-2-11 可见, 当  $I_R$  基本不变时,  $\Delta I_R = \Delta I_b + \Delta I_Z = 0$ , 即  $\Delta I_b = -\Delta I_Z$

而  $\Delta I_L = \Delta I_c = (1 + \beta)\Delta I_b$ , 所以  $\Delta I_L = -(1 + \beta)\Delta I_Z$

说明采用射极输出器以后, 负载电流的变化量可以比稳压管工作电流的变化量扩大  $(1 + \beta)$  倍. 例如一般小功率稳压管的工作电流范围是 30mA, 若三极管的  $\beta = 50$ , 则允许负载电流变化  $30 \times 51 = 1530\text{mA}$ .

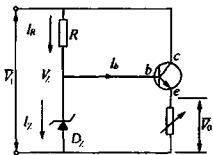


图 12-2-11

**【例题分析】**

**例 1** 图 12-2-12 所示, 电源电压  $U = 20\sin 314t \text{V}$ , 设二极管正向电阻为零, 反向电阻为无限大, 负载  $R = 20\Omega$ , 若其中一个二极管断路, 求  $R$  中消耗的功率.

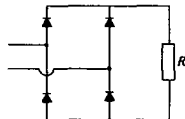


图 12-2-12

**解** 图示电路中其中的一个二极管断路相当于半波整流,

在导电的半周期的功率为  $P_1 = I^2 R = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \times 20 = 10 \text{(W)}$

而在截止的半周期内的功率为  $P_2 = 0$

故一个周期内, 电阻  $R$  中消耗的功率为  $\bar{P} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = 5 \text{(W)}$

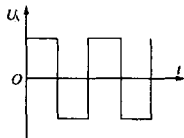


图 12-2-13

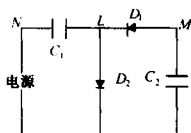


图 12-2-14

**例 2** 如图 12-2-14 所示电路中, 两电容器的电容相等, 即  $C_1 = C_2 = C$ , 两个二极管  $D_1$ 、 $D_2$  皆为理想二极管(正向电阻为零, 反向电阻为无限大), 当电源的输入电压为图示的稳定方波时, 如图 12-2-13 所示, 试分别画出达到稳定状态后  $L$  点的电压  $U_L$  和  $M$  点的电压  $U_M$  随时间变化的图像, 图中  $t = 0$  表示达到稳定状态后的某一时刻.

**解** 由于二极管的单向导电性, 图 12-2-13 所示的电压由开始通电到趋于稳定的过程中, 电容器  $C_1$  有多次充放电过程, 而电容器  $C_2$  则有多次充电过程.

设开始通电时  $N$  点电势为  $+V_0$ , 而电容器上均无电荷, 这时, 因  $D_1$  导通,  $D_2$  截止,  $C_1$  将充电至电压为  $V_0$  (左板带正电, 右板带负电). 当  $N$  点电压变为  $-V_0$  时,  $D_1$  截止,  $D_2$  导通, 电路成为  $C_1$ 、 $C_2$  与电源的串联电路,  $C_1$  右板上的负电荷将有一部分分到  $C_2$  的上板上(对于  $C_1$  来说, 这相当于它通过电源放电), 而  $C_2$  的下板将充入正电荷( $C_2$  第

一次充电)达到两电容器上电压之和等于  $-V_0$ 。当  $N$  点电压再次变成  $+V_0$  时,再次有  $D_1$  导通,  $D_2$  截止,  $C_1$  再次充电至电压为  $V_0$ ,  $C_2$  上则电压不变,电荷不变(下板正、上板负)。当  $N$  点电压再次变成  $-V_0$  时,再发生  $C_1$  右板上的一部分电荷向  $C_2$  上板的转移( $C_1$  放电,  $C_2$  第二次充电),以后在输入电压的每一周期变化中,都发生上述过程,只是  $C_1$  放电时电荷的转移依次变少,因而  $C_2$  充电时电荷的增加也依次变少,直到  $C_1$  上电压趋于一定值  $V_1$ (由左向右计),  $C_2$  上电压趋于一定值  $V_2$ (由上向下计)而达到稳定状态。这时,当  $N$  点电压为  $+V_0$  时( $D_1$  导通,  $D_2$  截止)有  $V_1 = V_0$

而当  $N$  点电压为  $-V_0$  时( $D_1$  截止,  $D_2$  导通),有  $V_1 + V_2 = -V_0$

故得

$$V_1 = V_0, V_2 = -2V_0$$

$L$  点的电压

$$U_L = U_N - V_1 = V_N - V_0$$

当  $U_N = +V_0$  时,  $U_L = 0$ , 当  $U_N = -V_0$  时,  $U_L = -2V_0$

$M$  点的电压

$$U_M = V_2 = -2V_0$$

故得到  $U_L$  和  $U_M$  的图像分别如图 12-2-15 和图 12-2-16 所示。

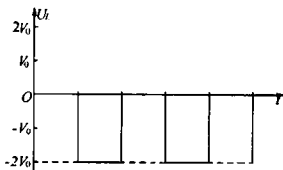


图 12-2-15

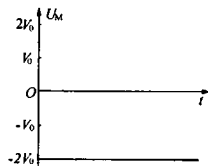


图 12-2-16



### 【巩固习题】

1. 图 12-2-3 所示的全波整流电路中,变压器次级两组电压均为  $10V$ ,整流二极管  $D_1$ 、 $D_2$  的耐压值至少应该是多少?

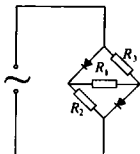


图 12-2-17

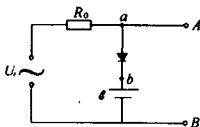


图 12-2-18

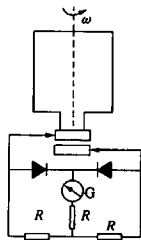


图 12-2-19



2. 如图 12-2-17 所示的交流电路中, 加在电路两端的电压  $U = 127\text{V}$ , 各电阻器的电阻  $R_1 = 10\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 5\text{k}\Omega$ , 两只二极管是理想的, 求电阻器  $R_1$  上消耗的功率.

3. 如图 12-2-18 所示的电路中, 输入电压  $U_1 = 5\sin\omega t\text{V}$ , 直流电源电动势  $E = 3\text{V}$ . 求: (1)  $U_{AB}$  的波形 (2) 将  $D$  反接后,  $U_{AB}$  又当如何?

4. 有一个宽为  $l$ , 长为  $\sqrt{2}l$  的矩形线圈, 在磁感应强度为  $B$  的匀强磁场中匀速转动, 线圈共  $n$  匝, 总电阻为  $0.5R$ , 图 12-2-19 为开始转动时, 三外电阻均为  $R$ , 二极管理想, 已知电流表的示数为  $I$ , 求 (1) 线圈转动的角速度  $\omega$ ; (2) 写出线圈中感生电动势的表达式; (3) 使线圈匀速转动的外力矩的大小.

### 第三节 电磁振荡和电磁波

#### 【知识要点】

#### 一、电磁振荡

电路中的电荷和电流及与它们相联系的电场和磁场作周期性变化的现象叫电磁振荡. 最简单的产生振荡电流的电路是  $LC$  回路, 如果忽略这个过程的能量损耗, 可以认为线圈贮有的磁场能和电容器贮有的电场能之间的转移就会周而复始的进行下去. 当电容器充电到电压  $U$  时, 电容器贮存的能量是  $W_C = \frac{1}{2}CU^2$ . 电感线圈的电流由零增加到  $I$ , 则线圈贮存的能量是  $W_L = \frac{1}{2}LI^2$ . 这种没有能量损失的振荡, 其振幅保持不变, 称为无阻尼振荡. 另一种有能量损失, 振荡电流的振幅逐渐减小, 这种振荡叫阻尼振荡. 实际上, 由于电磁辐射以及线路中有电阻产生焦耳热, 在振荡中总有能量损失, 得到的是阻尼振荡. 为了获得等幅振荡, 需用振荡器靠晶体管周期性地把电源的能量补充到振荡电路中.

#### 二、电磁场和电磁波

麦克斯韦在总结前人研究电磁现象成果的基础上, 建立了完整的电磁理论, 主要内容是: ①变化的磁场产生电场(即涡旋电场. 与静电场不同, 它的电场线是闭合的, 另外在涡旋电场中, 移动电荷时电场力做的功与路径有关); ②变化的电场会产生磁场, 即把变化的电场看作一种电流(称位移电流), 这个电流能产生磁场. 如果空间某处产生了振荡电场, 在周围空间就要产生振荡磁场, 这个振荡磁场又要在较远的空间产生新的振荡电场, 接着又要在更远的空间产生新的振荡磁场, 这样变化的电场和磁场总是相互联系着, 形成了一个不可分割的统一体, 这就是电磁场. 电磁场由近及远向外传播就形成电磁波. 在电磁波中, 每处的电场强度和磁感强度的方向总是互相垂直的, 并且都与那里

的电磁波传播方向垂直.因此,电磁波是横波.

### 三、电磁波的发射

#### 1. 开放电路

由普通的电容器和线圈组成的振荡电路如图 12-3-1. 这种振荡电路, 电场几乎完全包围在电容器两极板之间, 电场能也就几乎完全集中在这里; 同样的, 磁场能几乎完全集中在线圈内. 在振荡过程, 电场能和磁场能主要是在电路中相互转变, 辐射出去的能量很少, 这样的电路叫闭合电路. 为了使振荡电路有效地向空间辐射能量, 也就是能发射电磁波, 必须尽可能使电场和磁场分散开. 将图 12-3-1 电路改装为图 12-3-2 这种开放电路. 实际应用开放电路时, 把线圈下部用导线接地, 这条导线叫地线; 把线圈上部接到比较高的导线上, 这条导线叫天线. 天线和地线形成了一个敞开的电容器. 对于电磁波发射的进一步研究表明, 电磁振荡的频率越高, 向外辐射的能量就越大. 为了使开放电路里产生振荡电流, 通常使开放电路的线圈  $L_1$  跟振荡电路的线圈  $L$  接近. 这样振荡电路里有振荡电流时, 由于互感作用, 在开放电路里就产生了同样频率的振荡电流, 从而发射出电磁波. 这种办法叫感应耦合(图 12-3-3)

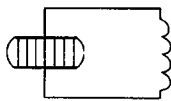


图 12-3-1

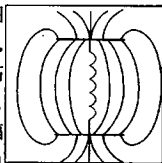


图 12-3-2

#### 2. 电磁波的调制

我们发射电磁波, 是为了利用它来传递某种信号. 无线电技术中发射信号的方法是, 先把要传递的信号转变为电信号. 这种电信号频率较低, 不能直接用来发射电磁波, 但是可以把这种信号“加”到高频等幅振荡电流上. 这种载有信号的高频振荡电流可以产生电磁波, 于是就载着要传递的信号一起发射出去. 把要传递的电信号“加”到高频等幅振荡电流上叫调制. 常用的调制方法有调幅和调频.

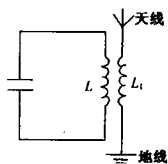


图 12-3-3

#### 3. 电磁波的接收

接收回路实际上是一个  $LC$  串联电路. 频率不同的无线电波都将在线圈  $L$  中产生振荡电流. 因接收电路产生的振荡电流受迫振荡, 当接收电路的固有频率跟收到的电磁波的频率相同时, 接收电路中产生的振荡电流最强. 这种现象叫电谐振. 使接收电路产生电谐振的过程叫调谐. 由调谐电路接收到的振荡电流, 是经过调制的高频振荡电流, 它还不是我们需要的信号. 因此还必须从高频振荡电流中取出发射时加上去的调制信号, 这个过程叫检波.

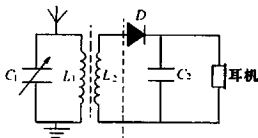


图 12-3-4

图 12-3-4 虚线的右边是晶体二极管的检波电路.  $L_1 C_1$  调谐电路由于电谐振而产生的是经过调幅的高频振荡电流.  $L_1$  和  $L_2$  绕在同一磁棒上, 由于互感作用, 在  $L_2$  上产生了高频交变电压. 由于晶体二极管的单向导电性, 通过它的是单向脉动电流. 这个单向脉动电流既含有高频成分, 又含有音频成分. 由于电容器有通高频, 阻低频的作用, 高频成分基本上从电容器  $C_2$  通过, 剩下的音频电流通过耳机, 使耳机的振动片随着信号而振动发声.

### 【例题分析】

**例 1** 用回旋加速器加速质量为  $m$ , 带电量为  $q$  的粒子, 加速器的磁感应强度为  $B$ . 用  $LC$  振荡器作为高频电源对粒子加速, 该振荡器的电感  $L$  和电容  $C$  的乘积是多少?

**解** 粒子在磁场中做匀速圆周运动的周期为  $T_1 = \frac{2\pi m}{Bq}$ , 应等于  $LC$  振荡电路的振荡周期  $T_2$ , 而  $T_2 = 2\pi\sqrt{LC}$ , 故  $LC = \frac{m^2}{B^2 q^2}$

**例 2** 一电感线圈中的电流在  $\Delta t = 0.6\text{s}$  内改变  $\Delta I = 1\text{A}$  时线圈中产生的自感电动势  $e = 0.2\text{mV}$ . 用该线圈和电容  $C = 1.2\mu\text{F}$  的电容器组成振荡电路时, 所辐射的无线电波波长是多少?

**解** 由  $e = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$  得  $L = 1.2 \times 10^{-4}\text{H}$

另由  $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ,  $\lambda = \frac{c}{f}$  得  $\lambda = 2.26 \times 10^4\text{m}$

**例 3** 两个电容均为  $C$  的完全相同的电容器  $A$  和  $B$ , 和一个电感为  $L$  的线圈相联, 如图 12-3-5 所示, 在开始的时候, 开关  $K$  断开, 电容器  $A$  充电至电压为  $U$ . 电容器  $B$  和线圈上的电荷为零. 试确定: 接通开关以后, 在线圈中通过的电流强度的最大值.

**解** 开关  $K$  接通前, 电容器  $A$  上带电量  $Q = CU$ .  $A$  对  $B$  充电结束的时刻, 每个电容器上分得的电量应相等, 设为  $Q'$ , 则  $Q' = \frac{Q}{2}$ , 则电容器贮有的电能为  $W' = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{Q'^2}{C} = \frac{1}{4} CU^2$

当两个电容器完全放电, 它们贮存的电能完全转变为线圈中的磁场能, 此时线圈中的电流最大, 设为  $I_{\max}$ . 根据能量守恒有  $\frac{1}{2} LI_{\max}^2 = \frac{1}{4} CU^2$ , 即  $I_{\max} = U \sqrt{\frac{C}{2L}}$

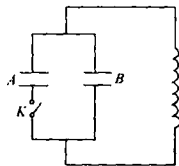


图 12-3-5

### 【巩固习题】

1. 如图 12-3-6 所示的电路中, 当电容器  $C_1$  上电压为零的各个时刻, 开关  $K$  交替

闭合断开,请画出电感线圈  $L$  上的电压随时间持续变化的图线,忽略电感线圈及导线中的电阻。

2. 某收音机调谐时,其可变电容器的动片完全旋入至完全旋出时,回路的总电容  $C_2 = 390\text{pF}$  变到  $C_1 = 39\text{pF}$ 。若要接收的无线电波的频率范围是  $f_1 = 535\text{kHz}$  至  $f_2 = 1605\text{kHz}$ , 试求需要配置的线圈电感的范围。

3. 如图 12-3-7 所示,初级线圈的电压是  $15\text{V}$ , 变压比为  $1:2$ , 电容器的击穿电压必须大于 \_\_\_\_\_  $\text{V}$ , 二极管的反向击穿电压必须大于 \_\_\_\_\_  $\text{V}$ 。若图中删除电阻  $R$ , 即该处断路, 为使元件不击穿, 二极管的耐压值至少应为 \_\_\_\_\_  $\text{V}$ , 电容器的耐压值至少应为 \_\_\_\_\_  $\text{V}$ 。

4. 我国规定的中波广播电台的频率范围是  $535\text{kHz} \sim 1605\text{kHz}$ 。若收音机调谐回路的电感线圈不变, 可变电容器的最小电容为  $30\text{pF}$ 。将这个可变电容器取下调到最大电容, 再接到交流电压  $U = 311\sin 100\pi t (\text{V})$  的电源上, 求通过电容器电流的瞬时值表达式。

5. 某雷达工作时, 发射电磁波波长  $\lambda = 20\text{cm}$ , 每秒钟脉冲数  $n = 5000$ , 每个脉冲持续时间  $t_1 = 0.02\mu\text{s}$ 。问每个脉冲的振荡频率为多少? 振荡数是多少?

6. 将两块平行的相距为  $d_0$  的同样大小和形状的金属板  $A$  和  $B$  组成平行板电容器, 和一个自感线圈组成  $LC$  电路。在  $A$ 、 $B$  板间插入一块具有均匀厚度、大小和  $A$ 、 $B$  相等的金属块  $M$ , 如图 12-3-8 所示, 使  $LC$  电路的固有频率减小为原来的  $\frac{3}{4}$ , 则插入的金属块厚度为多大?

7. 如图 12-3-9 所示, 在开关  $K$  断开时, 给电容量为  $C$  的电容器充上电量  $q$ , 闭合开关后, 问电感量为  $L_1$  和  $L_2$  的线圈中最大电流是多少?

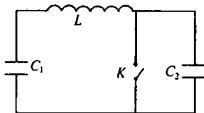


图 12-3-6

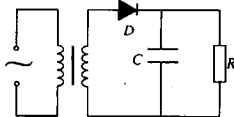


图 12-3-7

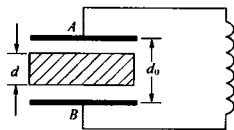


图 12-3-8

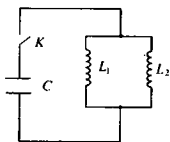


图 12-3-9

## 第四节 综合训练

### 【例题分析】

例 1 如图 12-4-1 所示, 电路由三个电容器和电感为  $L$  的电感线圈及电阻  $R$  构成。

起初,开关置于 A 点,电源对电容为  $C_1, C_2$  的两电容器充电.电源电动势为  $\mathcal{E}$ ,内阻不计.问:(1)足够长时间后,电容器极板上电压各为多少?(2)将开关扳至 B 处,则产生 LC 电磁振荡.如果振荡周期为  $T$ ,设扳过去时为  $t=0$  时刻,则线圈  $L$  中第一次电流达最大值是何时?此时  $C_1, C_2$  极板的电压各为多少?如线圈中储能为  $\frac{1}{2}LI^2$ ,则  $I_{\max}$  为多少?(3)在  $t$  为多少时,  $C_3$  极板上电压绝对值首次达到最大?此时流过线圈的电流多大?

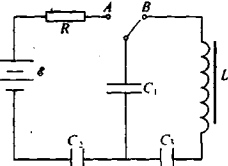


图 12-4-1

解 (1)电容器  $C_1, C_2$  串联,则  $U_{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}, U_{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\mathcal{E}$

(2)当  $t=0$  时,  $i=0$  知  $i$  满足  $i = I_m \sin(\frac{2\pi}{T}t)$

可见,当  $t = \frac{T}{4}$  时,  $i$  达最大值.在  $i$  达最大值时有  $\mathcal{E}_L = \frac{\Delta i}{\Delta t} = 0$

所以  $q + q' = C_1 U_{C_1}, \frac{q}{C_3} = \frac{q'}{C_1} = U'_{C_1}$ , 则  $U'_{C_1} = U_{C_3} = \frac{C_1}{C_1 + C_3} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}$

由能量守恒得  $\frac{1}{2}C_1 U_{C_1}^2 - \frac{1}{2}C_1 U'^2_{C_1} - \frac{1}{2}C_3 U_{C_3}^2 = \frac{1}{2}LI^2_{\max}$

得 
$$I_{\max} = \frac{C_2 \mathcal{E}}{C_1 + C_3} \sqrt{\frac{C_1 C_3}{L(C_1 + C_3)}}$$

(3)在  $t = \frac{1}{2}T$  时,  $C_3$  极板上电压绝对值首次达到最大.此时  $I=0$  由能量守恒可得

$$q_{3\max} = \sqrt{\frac{2C_1 C_2 C_3 \mathcal{E}}{(C_1 + C_3)(C_1 + C_2)}}$$

**例 2** 为了用一个电压为  $U=5V$  的大功率电源给电动势  $\mathcal{E}=12V$  的蓄电池充电,用一只电感为  $L=1H$  的电感线圈与一只二极管  $D$  和自动开关  $S$  组成的电路,如图 12-4-2 所示.  $S$  可周期性地自动接通和切断电路,接通和切断的时间  $\tau_1 = \tau_2 = 0.01s$ ,蓄电池和电源的内阻、开关  $S$  的接触电阻、二极管的正向电阻均可忽略,求蓄电池充电的平均电流.

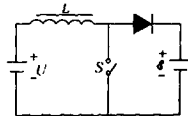


图 12-4-2

解 当自动开关闭合时,线圈直接接在电源上.按楞次定律在线圈中产生自感电动势  $\mathcal{E}_L$ ,而  $\mathcal{E}_L$  相当于电源  $U$  的反电动势,故  $U - \mathcal{E}_L = I \cdot R$  ①

其中  $I$  为线圈中的电流,  $R$  为回路中的电阻.由于忽略电源内阻及线圈、导线的电阻,故  $R=0$ ,即  $U = \mathcal{E}_L$  ②

按法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = L \frac{\Delta I}{\Delta t}, \text{ 可知 } \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{U}{L} = \text{常数} \quad (3)$$

说明通过线圈的电流是按线性规律变化的. 在  $\tau_1$  时间内达到的最大电流为

$$I_0 = \frac{U}{L} \tau_1 = 0.05 \text{ A} \quad (4)$$

开关断开后, 二极管接通, 这时自感电动势  $\mathcal{E}'_{\text{自}}$  改变符号, 整个回路相当于  $U$  与  $\mathcal{E}'_{\text{自}}$  正向串联后再与蓄电池  $\mathcal{E}$  反向串联.

$$\text{因而有 } U + \mathcal{E}'_{\text{自}} - \mathcal{E} = I' R' \quad (5)$$

$$\text{由于 } R' = 0, \text{ 故 } \mathcal{E}'_{\text{自}} = \mathcal{E} - U = \text{常数} \quad (6)$$

通过线圈的电流也将线性减少. 因为  $\mathcal{E} - U > U$ , 所以电流下降速度比电流增长速度大, 因此电流降到零比开关闭合要早. 设电流从  $I_0$  降为零需时  $t_2$ , 则

$$\mathcal{E}'_{\text{自}} = L \frac{I_0}{t_2} = \mathcal{E} - U \quad (7)$$

$$\text{利用(4)式可得 } t_2 = \frac{U}{\mathcal{E} - U} \tau_1 \quad (8)$$

电流一旦降为零, 二极管即断流, 故通过线圈的电流图线如图 12-4-3 所示. 很显然, 流经蓄电池的电荷为图 12-4-3 曲线中  $t_2$  时间内曲线下的面积, 故利用

$$\text{(4), (8)式可得 } \Delta q = \frac{1}{2} I_0 t_2 = \frac{U^2 \tau_1^2}{2L(\mathcal{E} - U)}$$

故充电平均电流为

$$I_{\text{平}} = \frac{\Delta q}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{U^2 \tau_1^2}{2L(\mathcal{E} - U)(\tau_1 + \tau_2)} \approx 8.9 (\mu\text{A})$$

**例 3** 一个普通的 220V (有效值)、100W 的市电 (50Hz) 的灯泡加上电压  $U$ , 其随时间  $t$  的变化关系分别如下式表示:

$$(a) \quad U(t) = (-1)^{k+1} \times 220 \quad (1)$$

其中  $k = 1, 2, 3, 4$ , 且  $(k-1)t_0 \leq t < kt_0$ .

$$(b) \quad U(t) = \sqrt{t - (k-1)t_0} \times 220 \quad (2)$$

其中  $k = 1, 2, 3, 4$ , 且  $(k-1)t_0 \leq t < kt_0$ .

试分别求出在这两种电压下该灯泡所消耗的功率. 设灯泡灯丝电阻随温度变化不明显.

$$\text{解 (1) 该灯泡的电阻 } R = \frac{U^2}{P} = 484 (\Omega)$$

又因(1)式所表示的电压图线如图 12-4-4(a)所示. 设电压的瞬时功率为  $P(t)$ , 则

$$P(t) = \frac{U^2(t)}{R} \quad (3)$$

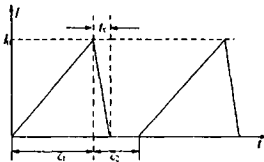


图 12-4-3

对于图 12-4-4(a)所示的方波,灯泡消耗的功率与 220V 直流电消耗的功率完全相同,故平均功率  $\bar{P} = P(t) = 100\text{W}$

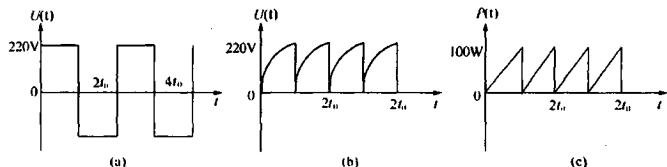


图 12-4-4

(2) 由②式所表示的图线如图 12-4-4(b)所示. 设瞬时功率为  $P'(t)$ , 由③式知  $P'(t)$  与  $t$  的变化关系如图 12-4-4(c)所示, 故其平均功率为  $\bar{P} = \frac{1}{2} \times 100\text{W} = 50\text{W}$

【精选习题】

1. 一扁平线框在竖直的均匀磁场中绕水平轴以角速度  $\omega$  旋转, 磁场的磁感应强度按  $B = B_0 \sin \omega t$  的规律变化, 求线框中产生的感应电动势的频率.

2. 将电容为  $C$  的未充电电容器与电感为  $L$  的线圈串联后通过一个双刀双掷倒向开关  $S$  与一电动势为  $U$  的电源相连接, 如图 12-4-5 所示. 当流过电感线圈的电流降为零时就立即将  $S$  掷向另一组触点, 使电源反向接入电路, 当通过电感线圈的电流再变为零时又如此操作, 使电源再反向接入电路, 如此等等. 问电容器被接通  $n$  次后的带电量最多是多少? 电路中的电阻和电源内阻均可不计.

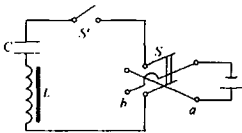


图 12-4-5

3. 两个容量为  $C_1 = 0.4\mu\text{F}$  及  $C_2 = 0.2\mu\text{F}$  的电容串联接入电压为 220V, 频率为 50Hz 的交流电路中, 试求电路中的电流强度和每个电容器上的压降.

4. 氖灯接入频率  $f = 50\text{Hz}$ , 电压的有效值  $U_{\text{有效}} = 120\text{V}$  的正弦交流电路中共 10 分钟. 若氖灯点燃和熄灭时的电压  $U_{\text{燃}} = U_{\text{熄}} = 120\text{V}$ , 试求氖灯亮的时间.

5. 在以角频率  $\omega_1$  变化的均匀磁场中, 将半径为  $a$  的圆形导体回路与磁场垂直放置, 并以回路之一直径为轴, 使之以角速度  $\omega_2$  旋转, 则在此回路上可

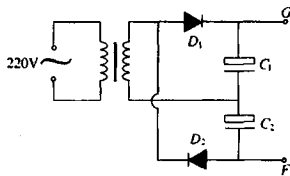


图 12-4-6

产生如何波形之电压？

6. 一边长为  $1.00\text{m}$ ，匝数为  $1000$  的正方形线圈通过其平面而与地磁场方向成  $60^\circ$  的倾斜角的轴以每分钟  $1000$  转的转速转动，求线圈两端产生的电压的有效值。（地磁场磁感强度  $B = 6.0 \times 10^{-5}\text{T}$ ）

7. 有人做了一个整流滤波电路如图 12-4-6 所示，其中变压器初级匝数为  $1400$  匝，次级匝数为  $70$  匝，问（1）这个电路能正常工作吗？为什么？（2）当负载开路时， $G$ 、 $F$  两端输出电压有多少？（3）如选用的二极管认为是理想二极管，二极管的反向耐压至少大于多少？（4）用这个电路去推动一台扩音机，你预计会发生什么严重的现象？

### 问题与讨论 交流电的叠加

在交流电路计算中，常常需要把几个同频率的正弦交流电进行叠加。在计算时可采用解析法，图线法，矢量法等。下面介绍利用这几种方法进行交流电的叠加。

#### 【例题分析】

例 1 有正弦交流电流  $i_1 = 3\sin(\omega t + 120^\circ)\text{A}$ ， $i_2 = 4\sin(\omega t + 30^\circ)\text{A}$ 。求  $i_1 + i_2$

解 绘出矢量图如图 12-5-1，因  $I_{m1} = 3\text{A}$ ， $I_{m2} = 4\text{A}$ ，两者相位差为  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ 。合成后电流的最大值

$$I_m = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{A})$$

电流的初相位  $\varphi = \alpha + 30^\circ$ ，而

$$\tan\alpha = \frac{I_{m1}}{I_{m2}} = \frac{3}{4}, \alpha = 37^\circ$$

故  $\varphi = 37^\circ + 30^\circ = 67^\circ$ 。得出

$$i = i_1 + i_2 = I_m \sin(\omega t + \varphi) = 5\sin(\omega t + 67^\circ)(\text{A})$$

例 2 图 12-5-2(a) 的电子滤波器由四个元件组成。输入阻抗可忽略不计，负载阻抗假定为无穷大。现要使滤波器的  $U_{\text{输出}}/U_{\text{输入}}$  与频率的依赖关系为如图 12-5-2(b) 所示。图中  $U_i$  是输入电压， $U_o$  是输出电压；对频率  $f_o$ ， $U_{\text{输出}}$  和  $U_{\text{输入}}$  间的相位差为零。

为组装这个滤波器，可在下列元件中选取元件：

- |       |     |    |
|-------|-----|----|
| 10kΩ  | 电阻器 | 2个 |
| 10μF  | 电容器 | 2个 |
| 160mH | 线圈  | 2个 |

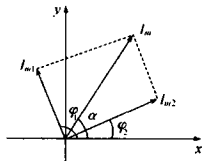


图 12-5-1



(线圈中不包含铁芯,电阻可忽略不计)

将上述元件中的四个组合起来,设计一个满足图 12-5-2(b)所示条件的滤波器.确定  $f_0$  及在此频率下的比值  $U_{\text{输出}}/U_{\text{输入}}$ ,尽可能找出更多的组合方式.

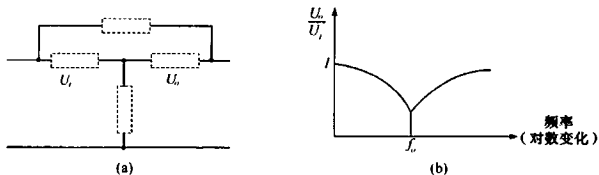


图 12-5-2

解 滤波器的条件包含在题图中,这里将利用矢量图来求解.

令  $A(\omega) = U_2(\omega)/U_1$ ,为考虑图 12-5-3 所示的电路,对直流电,  $A(0) = 1$ ,这是因为电容阻抗为无穷大,电容器对高频相当于短路,所以  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = 1$ ,而且  $0 \leq A \leq 1$

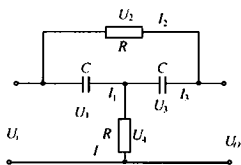


图 12-5-3

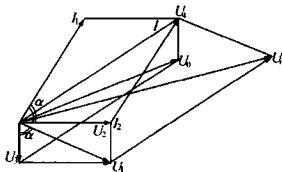


图 12-5-4

利用图中所示的符号,有

$$I_1 + I_2 = I, \quad U_2 + U_3 = U_1,$$

$$U_1 + U_4 = U_1, \quad U_3 + U_4 = U_0.$$

图 12-5-4 画出了这电路的相应矢量图,分别用  $x$  和  $y$  表示矢量的水平和垂直分量,从矢量图上找得如下关系:

$$U_{ox} = U_{4x} = RI_x = R(I_2 + I_{1x}) = U_2 + RI_1 \cos \alpha$$

$$U_{oy} = U_{4y} - U_3 = RI_1 \sin \alpha - U_2 \cot \alpha$$

$$U_{ix} = RI_2 + RI_1 \cos \alpha + U_1 \sin \alpha$$

$$U_{iy} = RI_1 \sin \alpha - U_2 \cot \alpha, \quad \tan \alpha = \frac{U_2}{U_3} = RC\omega$$

$$I_1 = U_1 C\omega = U_2 \sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2} / R$$

从以上方程,得  $U_{ox} = 2U_2$

$$U_{iy} = U_{oy} = U_2 \left( RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)$$

$$U_{ix} = 3U_2$$

所以 
$$A^2(\omega) = \frac{U_{ox}^2 + U_{oy}^2}{U_{ix}^2 + U_{iy}^2} = \frac{R^4 C^4 \omega^4 + 2R^2 C^2 \omega^2 + 1}{R^4 C^4 \omega^4 + 7R^2 C^2 \omega^2 + 1}$$

$A(\omega)$  是  $\omega$  的函数, 为得到它的极小值, 令其导数等于零, 得下述方程

$$\omega(\omega^4 R^4 C^4 - 1) = 0$$

解以上方程得 
$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = 10^4 \text{ s}^{-1}$$

所以 
$$f_0 = 1.6 \text{ kHz}, \quad A(\omega_0) = \frac{2}{3}$$

对上述频率,  $U_{iy} = U_{oy} = 0$ . 所以  $U_i$  和  $U_o$  同相位, 这正是题目所要求的. 图 12-5-5 画出了别的几种适用电路. 可用同样的方法计算  $f_0$  和  $A(\omega_0)$ .

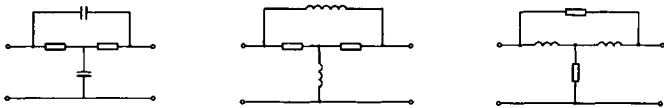


图 12-5-5

图 12-5-5 所示的电路对高、低频的条件也能满足, 分析处理后分别给出  $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$  和  $f_0 = \frac{R}{2\pi L}$ .

用复数法进行计算当然也可以.

**例 3** 某生活用电区的总功率的读数和总电流表读数常常是 16kW 和 90A 左右. 这种现象引起了某同学的警觉. 他察觉到这个地区的电路中无功损耗过大, 功率因数过低. 于是在它的输入端并了一组电容器, 结果使该电路的功率因数提高到了 0.9. 问(1)原电路的功率因数是多少? (2)所并的这组电容器的规格如何?

解 (1) 原功率因数  $\cos \varphi_1 = \frac{P}{S_1} = \frac{16 \times 10^3}{90 \times 220} = 0.81$

(2) 这种现象往往是因电风扇和电冰箱这些由感性负载增加后, 配电处没有对电路做及时的调整, 从而使总电流的相位比总电压的相位落后得更多而造成的.

为了减小感性负载造成的这种不良影响, 就需要用一电容性装置对电感性电路进行补偿或中和(不能要求用户撤除电感性用电器). 这种移相装置的接入, 首先不能破坏各用电器对额定电压的要求, 而且也希望装置的接入工序尽量简单, 用材尽量节省. 在此电路的输入端并联适当规格的电容器就可以很好地满足上述要求.

原电路可等效为电感器  $L$  和电阻器  $R$  的串联组合。设电流为  $I_1$ ；为提高功率因数而并联的电容为  $C$ 。并设改善后的功率因数为  $\cos\varphi_2$ 。相应的旋转矢量图如图 12-5-6 所示，由图 12-5-7 可得

$$I_1 \cos\varphi_1 = I_2 \cos\varphi_2, I_1 \sin\varphi_1 - I_2 \sin\varphi_2 = I_c$$

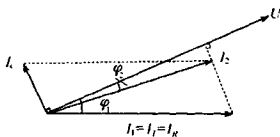


图 12-5-6

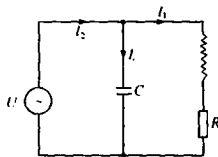


图 12-5-7

$$I_1 \sin\varphi_1 - I_1 \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} \sin\varphi_2 = I_c$$

$$I_c = I_1 \left[ \sqrt{1 - \cos^2\varphi_1} - \cos\varphi_1 \frac{\sqrt{1 - \cos^2\varphi_2}}{\cos\varphi_2} \right] = 90 \left[ \sqrt{1 - 0.81^2} - 0.81 \times \frac{\sqrt{1 - 0.9^2}}{0.9} \right]$$

$$= 18 \text{ A}$$

$$U = I_c X_C = I_c \cdot \frac{1}{2\pi f C}, \quad C = \frac{I_c}{2\pi f U} = \frac{18}{314 \times 220} = 260 \times 10^{-6} \text{ (F)}$$

$$U_m = \sqrt{2} U = \sqrt{2} \times 220 = 311 = U_{Cm}$$

取  $U_{C\text{耐}} = 350 \text{ V}$

所以应在输入端并联一组  $260 \mu\text{F}, 350 \text{ V}$  的电容器。

### 【巩固习题】

1. 如图 12-5-8(a) 所示，电阻  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ，电动势  $E = 6 \text{ V}$ ，两个相同的二极管  $D$  串联在电路中，二极管  $D$  的  $I_D - U_D$  特性曲线如图 12-5-8(b) 所示。试求：(1) 通过二极管  $D$  的电流；(2) 电阻  $R_1$  消耗的功率。

2. 如图 12-5-9 为一个电路图，称作“电子张弛振荡器”。图中  $SC$  是恒流源（其电流不因负载的变化而变化），电流值恒为  $I_0$ 。  $S$  为电子开关，它的开、关动作由一个正弦讯号发生器  $F$  产生的电压  $U_F(t) = U_1 + U_0 \sin \omega t$  控制，这里  $U_1$  为常电值， $U_0$  和  $\omega$  分别是正弦讯号的幅度和圆频率。 $U_0 < U_1$ ， $U_F$  只起控制  $S$  动作的作用，不对电容  $C$  充放电。当  $S$  两端电压（即电容器两端电压） $U(t)$  达到  $U_F(t)$  时， $S$  自动合上，使电容  $C$  放电， $U_F(t)$  迅速下降，直到  $U(t)$  降到  $U_{\min}$  时， $S$  才自动断开。这里  $U_{\min}$  是小于  $U_1 - U_0$  的常电值。

(1) 分析电容器两端电压  $U$  随时间  $t$  的变化规律，并在  $U-t$  图上画出  $U_F(t)$ 、 $U_{\min}$  和

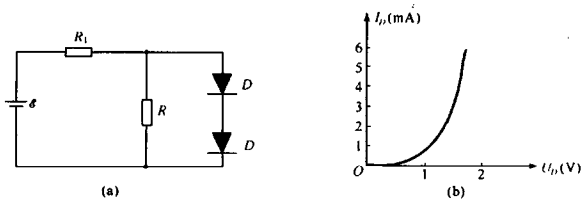


图 12-5-8

$U$  随  $t$  的变化曲线, 可以不考虑  $t=0$  时是如何情况; (2) 若在一定的  $I_0, U_1, \omega, U_{\min}$  的参数值下,  $U(t)$  每相邻两次达到  $U_F(t)$  的时间间隔都相等, 求每次  $U(t) = U_F(t)$  时,  $U_F(t)$  数值与各参数的关系。

3. 如图 12-5-10 所示的电路中,  $L_1 = 10\text{mH}, L_2 = 20\text{mH}, C_1 = 10\mu\text{F}, C_2 = 5\mu\text{F}, R = 100\text{k}\Omega$ 。

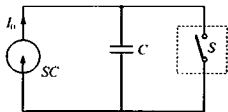


图 12-5-9

开关  $S$  长时间闭合, 电源的正弦式频率  $f$  可改变, 但其电流振幅保持恒定。

(1) 以  $f_m$  表示有功功率为极大值 ( $P_m$ ) 时的频率, 而分别以

$f_+$  和  $f_-$  表示有功功率为  $\frac{1}{2}P_m$  时的频率。试确定  $f_m$  与  $\Delta f = f_+ - f_-$  的比值。

打开开关  $S$ , 在打开开关  $t_0$  时间后, 通过  $L_1$  和  $L_2$  的电流为  $i_{01} = 0.1\text{A}$  和  $i_{02} = 0.2\text{A}$ , 电压为  $U_0 = 40\text{V}$ 。

(2) 计算电路  $L_1 C_1 C_2 L_2$  的固有振荡频率;

(3) 确定导线  $AB$  内的电流;

(4) 计算线圈  $L_1$  中电流振荡的振幅。

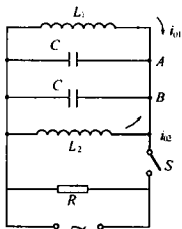


图 12-5-10

4. 已知电弧是气体自激放电的一种形式, 它具有下降的伏安特性曲线, 换句话说, 电流强度  $I$  越大, 电弧的两个电极之间的电压  $U_A$  越小 ( $U_A = (a + b)/I$ ) 如图 12-5-11 所示, 把“稳流”电阻  $R$  和弧光灯串联到电动势  $\mathcal{E} = 200\text{V}$  的电源两端, 电阻  $R$  的作用是使弧光灯发光稳定, 忽略内阻和导线电阻, 求能使弧光灯稳定发光且释放的功率不小于电源消耗功率一半的所有电阻  $R$  的值。设常数  $a = 55\text{V}, b = 50\text{V}$ 。

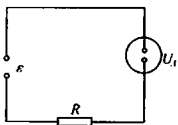


图 12-5-11

## 第十三章 光 学

## 第一节 光的反射



## 【知识要点】

## 一、光的直线传播

1. 光在均匀媒质中是直线传播的, 光在真空中的传播速度为  $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ , 在其他媒质中的传播速度都小于  $c$ .

## 2. 影

光射到不透明物体上, 在背光面的后方形形成一个光线照不到的黑暗区域, 就是物体的影. 在这黑暗区域中完全照不到的区域叫做本影, 只有一部分光照不到的区域叫做半影.

## 二、光的反射

1. 光的反射定律: 反射光线跟入射光线和法线在同一平面上, 反射光线和入射光线分别位于法线的两侧, 反射角等于入射角.

2. 在光的反射中, 光路是可逆的.



## 【例题分析】

**例 1** 正午时, 高  $h$  米的电杆的影长为 0. 此时, 杆顶的影点在水平地面的速率多大? 经一段时间后, 阳光与水平地面夹  $\theta$  角, 此时杆顶的影点的速度多大? 这段时间杆顶影点的平均速度是多大?

**分析** 如图 13-1-1, 在研究太阳光成影时, 由于太阳到地球的距离远大于地球的直径, 所以射到地球上的光线近似认为是平行光线, 且在成影区域内, 地面视为平面, 另一方面, 在讨论影长的变化时, 认为太阳以地球为参考物在绕地球运动, 由于日、地距离远大于地球直径, 地球可视为一点, 因而成影阳光的移动可以认为是太阳光绕杆顶点转动, 其转动周期与地球自转周期  $T = 24 \text{ 小时} = 8.64 \times 10^4 \text{ 秒}$  相同. 所以在影长为 0 时, 杆

顶影点的移动速率, 可视为半径为  $h$  的匀速圆周运动的线速率. 当阳光与地面成  $\theta$  角时, 杆顶影点的速度  $v_c$  可以分解为绕  $A$  作圆周运动的线速度  $v_{\perp}$  和沿光线方向的速度  $v_{//}$ . 由于  $\theta$ 、 $h$  和太阳光线绕杆顶  $A$  转动的角速度  $\omega = 2\pi/T$  为已知, 可求出  $v_B$  和  $v_c$  和影点移动时间内的平均速度  $\bar{v}$ .

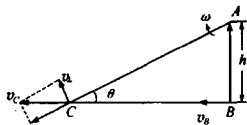


图 13-1-1

$$\text{解 } v_B = \omega h = \frac{2\pi}{T} h = \frac{2\pi}{8.64 \times 10^4} h \text{ (m/s)}$$

$$v_c = \frac{v_{\perp}}{\sin\theta} = \frac{\omega AC}{\sin\theta} = \frac{\omega \cdot h}{\sin^2\theta} = \frac{2\pi h}{8.64 \times 10^4 \times \sin^2\theta} \text{ (m/s)}$$

$$\bar{v} = \frac{BC}{t_{BC}} = \frac{h \cot\theta}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\omega h \cot\theta}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \frac{2\pi h \cot\theta}{8.64 \times 10^4 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \text{ (m/s)}$$

**例 2** 如图 13-1-2 两平面间夹角为  $\alpha = 15^\circ$ ,  $OA = 10$  厘米,  $A$  点发出的垂直于  $L_2$  的光线射向  $L_1$  后在两镜面间反复反射, 直到光线平行于某一镜面射出, 则从  $A$  点开始到最后一次反射点, 光线所走的路程为多少?

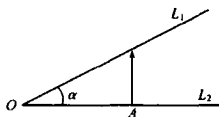


图 13-1-2

**解** 首先就一般的情况进行讨论. 如图 13-1-3 所示, 设光线经  $L_1$  第一次反射的反射线为  $BC$ , 根据平面反射的对称性,  $BC' = BC$ , 且  $\angle BOC' = \alpha$ . 同理, 光线  $BC$  经  $L_2$  第一次反射的反射线  $CD = C'D'$ , 且  $\angle C'OD' = \alpha$ . 上述  $A$ 、 $B$ 、 $C'$ 、 $D'$  均在同一直线上, 因此光线在  $L_1$ 、 $L_2$  之间的反复反射就跟光线沿  $ABC'$  直线传播等效.

根据上述分析, 设  $N'$  是光线第  $n$  次反射的人射点, 且该次反射线不再射到另一个镜面上, 则  $n$  值应满足的关系式是  $n\alpha < 90^\circ \leq (n+1)\alpha$

所以  $n < 90^\circ/\alpha = 6$

取  $n = 5$ , 则  $\angle N'OA = 75^\circ$ . 光线自  $A$  点出发经 5 次反射, 所经历的路程总长等于  $AN'$  的长度.

$$AN' = OA \cdot \tan 5\alpha = 10 \times 3.73 = 37.3 \text{ (cm)}$$

### 例 3 1. 影和日食、月食

由于光的直线传播, 当光线经过不透光的物体时, 就会在它的后面留下影子. 其中完全无光照的称本影, 部分光照的称半影.

图 13-1-4 表示阳光在月亮后面留下的影子,  $B$  区为本影,  $A$ 、 $C$ 、 $D$  区为半影. 如果

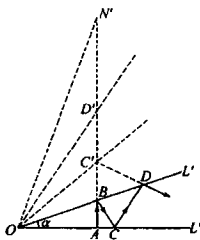


图 13-1-3

恰好有的地区位于影区,则会看到日食.当人在  $B$  区观察时,看到日全食;当人在  $A, D$  区观察时,看到日偏食;当人在  $C$  区观察时,看到日环食.

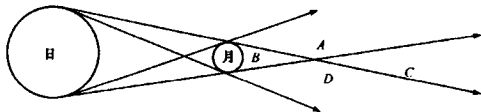


图 13-1-4

月食是月球位于地球阴影区而形成的.请思考:如果图 13-1-4 中月球的位置换成地球,则月球应当处在什么位置才能看到月食?

## 2. 光杠杆

平面反射有两个对称:反射光线与入射光线关于法线对称;反射光线与入射光线的延长线关于界面对称.因此,常用于进行光路控制.

例如,光杠杆是利用小镜转动来进行精确测量的一种仪器,图 13-1-5 是利用光杠杆来测量工件厚度的一种装置.工作台上放着已知厚度的标准工件  $B$  (块规)时,测杆  $R$  将小镜  $M$  支承在位置  $OM$ ,此时垂直射到镜面上的光线将沿原路返回,当工作台上换上待测厚度的工件时,如果此时工件比  $B$  厚些,它将通过  $R$  将小镜绕轴点  $O$  转过角度  $\theta$  到位置  $OM'$ .此时反射光在标尺上扫过一段距离  $l$ ,若小镜到标尺距离为  $f$ .根据光的反射定律,当镜面转过  $\theta$  角,则反射光线转过  $2\theta$ .由于  $\theta$  极小,所以  $2\theta$  约等于  $\frac{l}{f}$ ,平面镜则被抬高  $h$ .

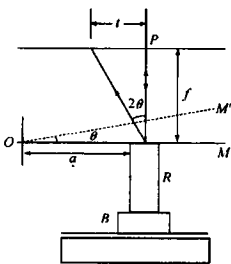


图 13-1-5

$$h = a \cdot \tan \theta \approx a \cdot \theta \approx \frac{a \cdot l}{2f}$$

$h$  就是待测工件与标准工件之间的厚度差.由于光杠杆能把微小的偏差放大,因此被广泛应用于微小量的测量.卡文迪许测定万有引力恒量就用它来测量悬丝的微小偏角.

### 【巩固习题】

1. 小石头  $A$  位于光源  $S$  和竖直墙壁之间,而且紧靠光源(如图 13-1-6 所示).若石头以水平初速抛出,则它在墙壁上的影子的运动是

- ( )
- (A) 自由落体运动      (B) 匀速直线运动  
(C) 初速为零,加速度为  $2g$  的匀加速运动

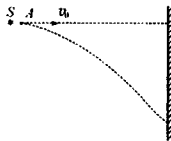


图 13-1-6

## (D) 变加速直线运动

2. 一平面镜  $M$  以  $\omega = \pi/3 \text{ rad/s}$  的角速度绕垂直于纸面且通过  $O$  的轴转动.  $PQ$  为一弧形屏幕, 它的圆心亦在  $O$  点, 圆心角为  $60^\circ$ , 如图 13-1-7 所示. 现在来自频闪光源的一细束平行光从一个固定方向射向平面镜  $M$  上的  $O$  点, 当光源每秒闪 12 次时,  $M$  转一周, 屏  $PQ$  上出现的光点数是 ( )

- (A) 48      (B) 12      (C) 24      (D) 6

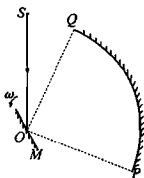


图 13-1-7

3. 一个绕地球赤道上空飞行的人造地球卫星, 在日落 2 小时后再能在正上方看到它, 求它飞行的最低高度. ( $R_{\text{地}} = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$ )

4. 赤道某地春分日中午, 一束阳光透过房顶的小孔竖直射到地面, 已知房顶离地 4m, 则该时刻地面光点的移动速度为 \_\_\_\_\_ m/h. 若在地面上放一块足够大的平面镜, 那么反射光的亮点在屋顶上的移动速度为 \_\_\_\_\_ m/h. 下午两点, 地面光点的移动速度为 \_\_\_\_\_ m/h.

5. 身高  $h \text{ m}$  的人以  $v \text{ m/s}$  的速度在水平地面上从路灯的正下方匀速走过, 在某一时刻, 人的影长为  $L_1 \text{ m}$ , 经过  $t \text{ s}$ , 人的影长为  $L_2 \text{ m}$ . 求路灯距地面的高度.

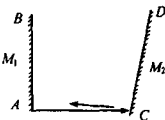


图 13-1-8

6. 两平面镜  $M_1$  和  $M_2$  夹一很小的角  $\theta$ , 当一根光线从  $M_1$  的  $A$  点以垂直于  $AB$  的方向射到  $M_2$  上, 如图 13-1-8 所示, 如果这根光线经过 100 次来回反射后仍然跑不出两镜面, 则  $\theta$  角不能超过多少? (其中  $AB = 1 \text{ mm}$ ,  $AC = 5 \text{ cm}$ )

7. 图 13-1-9 中的  $L$  是一水平放置点亮的 8W 日光灯管,  $T$  是一藤椅的竖直靠背, 横的藤条与日光灯管平行, 竖的与日光灯管垂直, 横竖藤条间都是透空方格.  $P$  是与藤椅背平行的很大的白屏, 现将白屏从紧贴椅背的地方慢慢向远处 (图中右方) 平移, 在屏上会陆续看到什么图像?

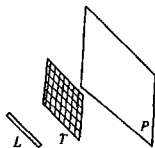


图 13-1-9

## 第二节 平面镜、球面镜成像

## 【知识要点】

## 一、平面镜

1. 平面镜只改变光的传播方向, 不改变光的会聚或发散程度.



## 2. 平面镜成像特点:

平面镜成像时,像和物关于镜面对称.因此,对应于“实物”,平面镜使之成一个等大小的正立虚像;对应于“虚物”,平面镜则使之成一个等大小的正立实像.图 13-2-1 表示平面镜使“虚物”成像的情形,其中,  $S$  为虚物,而  $S'$  则为其对应的实像.

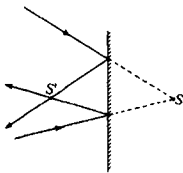


图 13-2-1

## 二、球面镜

1. 反射面是球面的一部分,这种镜叫球面镜.反射面如果是凹面的,叫做凹面镜,简称凹镜;反射面是凸面的,叫做凸面镜,简称凸镜.

2. 球面的球心叫曲率中心,镜面的中心叫镜的顶点,顶点与曲率中心的连线称为主光轴.

3. 凹镜对光线有会聚作用,凸镜对光线有发散作用.凹镜的焦点为实焦点,凸镜的焦点为虚焦点.

4. 由反射定律可证明,对近轴光线,球面镜焦距  $|f| = \frac{R}{2}$ ,  $R$  是球面的半径.

其中,凹镜焦距为正,凸镜焦距为负.

5. 球面镜成像作图中常用的三条特殊光线为:

(1) 跟主轴平行的入射光线,其反射光线通过焦点.

(2) 通过焦点的入射光线,其反射光线与主轴平行.

(3) 通过曲率中心的入射光线,其反射光线和入射光线重合但方向相反.

6. 球面镜成像公式为:  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$ . 符号法则为:实物  $u$  为正值,虚物  $u$  为负值;实像  $v$  为正值,虚像  $v$  为负值;凹镜的焦距  $f$  为正值,凸镜的焦距  $f$  为负值.

下面以凹镜为例,推导球面镜成像公式.如图 13-2-2 所示,物  $AB$  经凹面镜成像为  $A_1B_1$ ,图中  $u$  为物距, $v$  为像距.

由于  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , 故

$$\frac{u-2f}{2f-v} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

又由于  $\triangle ABF \sim \triangle DOF$  (近轴), 故

$$\frac{u-f}{f} = \frac{AB}{OD} \approx \frac{AB}{A_1B_1}$$

所以  $\frac{u-2f}{2f-v} = \frac{u-f}{f}$

整理后得  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} (= \frac{2}{R})$

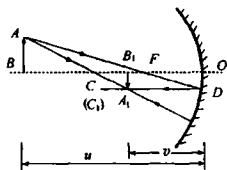


图 13-2-2

$$\text{像的长度放大率 } m = \frac{A_1 B_1}{AB} = \left| \frac{f}{u-f} \right| = \left| \frac{v}{u} \right|$$

上面所得到的成像公式只适用于近轴光线成像。

实际上,平面镜成像也可以看作是球面镜成像的特例,即曲率半径  $R \rightarrow \infty$ , 这样,由球面镜成像公式可得:  $v = -u, m = 1$ . 此即为平面镜成像的特点。

### 【例题分析】

**例 1** 在两相交平面镜  $a, b$  之间有一发光点  $S$ , 如图 13-2-3 所示. 试画出  $S$  发出的一条光线, 使它分别经  $a, b$  两镜面各反射一次后, 仍回到  $S$  点. 并说明你作图的依据。

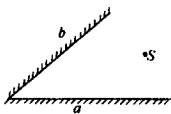


图 13-2-3

**解** 分别作出  $S$  点关于  $a$  镜面的对称点  $S_A$  和关于  $b$  镜面的对称点  $S_B$ , 连接  $S_A$  和  $S_B$ , 令其连线与镜面  $a$  和  $b$  分别交于  $A$  点和  $B$  点. 则图 13-2-4 中的光线  $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow S$  即为所求。

作图的依据是: 由作法可知,  $S_A$  和  $S_B$  分别为  $S$  在  $a$  镜和  $b$  镜中的像. 则  $S$  发出的所有经  $a$  反射的光线, 都好像是由  $S_A$  点发出的一样, 而这些光线中经  $b$  反射再射向  $S$  的光线则应该是一条朝着像点  $S_B$  入射的光线. 因此所求光线由镜面  $a$  射向镜面  $b$  时, 应该是在  $S_A$  和  $S_B$  两点的连线上。

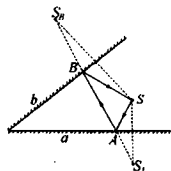


图 13-2-4

**例 2** 一凹镜所成的像, 像高为物高的  $\frac{1}{3}$ , 且已知物像间距离为 1 米. 求凹镜的曲率半径。

**解答** 由于成缩小像, 对于凹镜只有两种可能. 一种是实物成实像, 则物像同侧,

$$u - v = 1\text{m}$$

$$u = 3v$$

依据成像公式  $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$

$$\text{求得 } R = 2f = 0.75(\text{m})$$

另一种情况是虚物成实像, 则物像异侧,

$$|u| + v = 1(\text{m})$$

$$u = -3v$$

代入成像公式, 同样求得  $R = 2f = 0.75(\text{m})$ 。

**讨论** 例题中如果没有指明是凹镜, 则对于凸镜成缩小像也有两种情况。

① 实物虚像, 物像异侧,  $u = |v| = 1(\text{m})$ 。

$$v = -\frac{u}{3}$$

代入成像公式  $R' = 2f' = -0.75(\text{m})$

②虚物虚像,物像同侧,  $|u| - |v| = l(\text{m})$

$$v = 3u$$

同样可求得  $R' = 2f' = -0.75(\text{m})$

**例 3** 在半径  $R = 2\text{m}$ 、孔径  $d = 0.5\text{m}$  的凹面镜的焦点位置上,放置一块圆形屏幕,使平行于轴的所有入射光线,经凹面镜反射后都能到达该圆形屏幕,试求圆形屏幕直径.

**分析** 对凹面镜的所有近轴光线,经凹面镜反射后都会聚于凹面镜的焦点上,显然,本题中的平行于主轴的光线不能看成近轴光线.

**解** 如图 13-2-5 所示,  $O$  为凹面镜的曲率中心,  $F$  为其焦点,  $h$  表示凹面镜口径之半. 过  $P$  点的平行于主轴的光线反射后交主轴于  $F_1$  点, 则

$$FF_1 = OF_1 - OF = \frac{R}{2\cos\alpha} - \frac{R}{2}$$

在直角三角形  $F_1FQ$  中,应用小量近似,可得

$$\begin{aligned} x &= FF_1 \tan 2\alpha \approx FF_1 \sin 2\alpha = \left( \frac{R}{2\cos\alpha} - \frac{R}{2} \right) \sin 2\alpha \\ &= R \sin\alpha - \frac{R}{2} \sin 2\alpha = R \sin\alpha (1 - \cos\alpha) = R \sin\alpha \cdot \frac{\alpha^2}{2} \approx \frac{h^3}{2R^2} \end{aligned}$$

将数值代入后可得  $x = 1.95\text{mm}$ . 因此,圆形屏幕直径为  $3.9\text{mm}$ .

**例 4** 双平面镜成像个数的讨论

两个平面镜之间的物点经两平面镜成像的个数不但取决于  $\theta$  角的大小,还取决于物点所在的位置. 设两个平面镜之间的夹角为  $\theta$ :

当  $\theta = 180^\circ$  时,物点经两平面镜各成一个像,并且这两个像重合,实际上只有一个像.

当  $180^\circ > \theta > 120^\circ$  时,设  $\alpha = 180^\circ - \theta$ , 并如图 13-2-6(a) 所示,作  $\beta = \alpha$ , 则物点若在  $\angle AOB$  (含  $AO$ 、 $BO$ ) 内,可成两个像;物点若在  $\beta$  角内,可成三个像(设想物点在图示的圆周上,其像点也应在圆周上,且关于平面镜对称).

当  $\theta = 120^\circ$  时,  $AO$  和  $BO$  重合,成两个像的区域变成一条线( $\theta$  角的平分线);物点在其他位置时,均可成三个像.

当  $120^\circ > \theta > 90^\circ$  时,如图 13-2-6(b) 所示,用上述方法所作的两个  $\beta$  ( $\beta = \alpha = 180^\circ - \theta$ ) 角部分重合,物点在重合的  $\angle AOB$  区域内(不含  $AO$ 、 $BO$ ) 可成四个像;物点在其他位置,均只能成三个像.

当  $\theta = 90^\circ$  时,  $AO$  和  $BO$  与镜重合,即两个  $\beta$  角重合. 使得所成的四个像中,有两个像重合,故实际上只有三个像.

当  $90^\circ > \theta > 72^\circ$  时,设  $\alpha_1 = 90^\circ - \theta$ , 且作  $\beta_1 = 2\alpha_1$ , 如图 13-2-7(a) 所示. 物点在

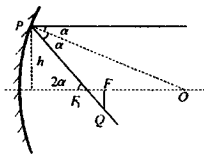


图 13-2-5

$\angle A_1OB_1$  (含  $A_1O, B_1O$ ) 内, 可成四个像;  
物点在  $\beta_1$  内可成五个像。

当  $\theta = 72^\circ (= 360^\circ/5)$  时,  $A_1O, B_1O$  重合, 成四个像的区域在  $\theta$  角的平分线上; 物点在其他区域内, 均可成五个像。

当  $72^\circ > \theta > 60^\circ$  时, 如图 13-2-7 所示。物点在两个  $\beta_1$  重合的区域内 (不含  $A_1O, B_1O$ ), 可成六个像; 在其他区域内, 物点只能成五个像。

当  $\theta = 60^\circ$  时, 又有两个像重合, 物点在任何位置上, 都只能成五个像。

.....

综上所述, 当  $2\pi/\theta$  为偶数时, 成像的个数  $n = \frac{2\pi}{\theta} - 1$ ; 当  $2\pi/\theta$  为奇数时, 在  $\theta$  角的平分线

上, 物点成像的个数  $n = \frac{2\pi}{\theta} - 1$ , 在其他区域, 可成像  $2\pi/\theta$  个; 若  $2\pi/\theta$  不是整数, 则成像个数为其整数部分与整数部分加 1 两种情况。

球面镜多次成像 虚物

球面镜多次成像原则: 只要多次运用球面镜成像公式即可, 但有时前一个球面镜反射的光线尚未成像便又遇上了后一个球面镜, 此时就要引进虚物的概念。

例 5 如图 13-2-8 所示, 半径为  $R$  的凸镜和凹镜主轴相互重合放置, 两镜顶点  $O_1, O_2$  相距  $2.6R$ , 现于主轴上距凹镜顶点  $O_1$  为  $0.6R$  处放一点光源  $S$ 。设点光源的像只能直接射到凹镜上, 问  $S$  经凹镜和凸镜各反射一次后所成的像在何处?

解  $S$  在凹镜中成像,  $u_1 = 0.6R, f_1 = \frac{1}{2}R$

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}, \text{ 即 } \frac{1}{0.6R} + \frac{1}{v_1} = \frac{2}{R}$$

可解得  $v_1 = 3R$

根据题意:  $O_1O_2 = 2.6R$ , 所以凹镜反射的光线尚未成像便已又被凸镜反射, 此时可将凹

镜原来要成的像  $S_1$  作为凸镜的虚物来处理,  $u_2 = (2.6R - 3R) = -0.4R, f_2 = -\frac{R}{2}$

$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2}, \text{ 即 } -\frac{1}{0.4R} + \frac{1}{v_2} = -\frac{2}{R}$$

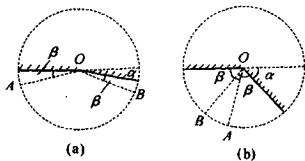


图 13-2-6

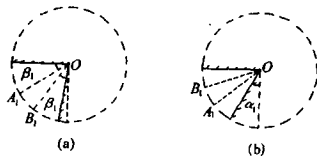


图 13-2-7

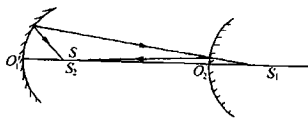


图 13-2-8

可解得  $v_2 = 2R$

说明凸镜所成的像  $S_2$  和  $S$  在同一位置上.

### 【巩固习题】

1. 如图 13-2-9 所示, 两平面镜间的夹角为  $70^\circ$ , 在两镜夹角的平分线上有一光点  $S$ , 则  $S$  在两平面镜中共能成 \_\_\_\_\_ 个像.

2. 万花筒的主要部分是排成正三角形的三面长条形平面镜(图 13-2-10 中的  $\triangle ABC$ , 即是三镜围成的), 由于光不断在三镜中反射, 可看到镜周围如图示的网络. 如果在某角(如图中  $C$  角)处有彩色小片, 经反射就会在网络的不同结点上得到图案相同的“花”. 请在图上根据  $C$  角上的“花瓣”形状, 画出“花”的形状, 且在图示网络中有“花”的结点上画一个“ $\bigcirc$ ”.

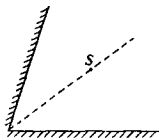


图 13-2-9

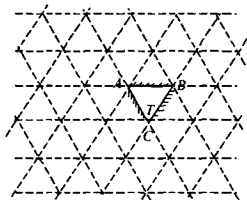


图 13-2-10

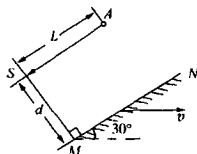


图 13-2-11

3. 如图 13-2-11, 平面镜  $MN$  与水平方向夹角  $30^\circ$ , 以水平速度  $v = 20\text{cm/s}$  运动. 点光源  $S$  与镜边沿  $M$  的连线垂直于镜面, 与镜距离  $d = 15\text{cm}$ . 人眼  $A$  与  $S$  的连线  $AS \parallel MN$ , 距离  $L = 30\text{cm}$ . 求: (1) 点光源的像的移动速度; (2) 从图示时刻起, 人眼能看到光源的像的时间.

4. 在离球面镜  $10\text{cm}$  远处放一个  $1\text{cm}$  高的物体, 若它所成的像在镜后  $6\text{cm}$  处, 则这个镜是 \_\_\_\_\_ 镜, 镜面曲率半径  $r =$  \_\_\_\_\_  $\text{cm}$ , 像高为 \_\_\_\_\_  $\text{cm}$ .

5. 两个焦距都是  $f$  的凸镜共主轴相对放置, 如图 13-2-12 所示,  $a$  为平行于主光轴的光线. 问两镜之间的距离  $L$  满足什么条件时, 光线  $a$  可形成循环光路? 画出光路图.

6. 一凸镜和一平面镜相距  $28\text{cm}$ , 相对而立, 在它们的中点放一点光源  $S$ , 利用遮光板使光线先由凸镜反射, 再经平面镜反射, 所成的像在平面镜后  $38\text{cm}$  处, 求凸镜的曲率半径.

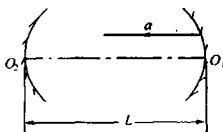


图 13-2-12

## 第三节 光的折射



### 【知识要点】

#### 一、光的折射

1. 折射定律: 折射光线在入射光线和法线所决定的平面内, 折射光线和入射光线分居法线两侧, 入射角和折射角的正弦之比对所给定的两种介质来说是一常量. 即

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{或} \quad n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

2. 折射率: 上式中的常数  $n_{21}$  称为介质 2 和介质 1 的相对折射率,  $n_1$  和  $n_2$  分别为介质 1 和介质 2 的绝对折射率, 简称折射率. 绝对折射率是指介质对真空的折射率, 它反映了介质的传光特性, 用公式表示为:  $n = \frac{c}{v}$

其中  $c$  为光在真空中的速度,  $v$  为光在该介质中的传播速度.

不同频率的光在同一介质中的折射率也略有不同, 紫光的折射率要大于红光的折射率.

3. 光的折射中, 光路是可逆的.

#### 二、棱镜及色散

棱镜是一种常用的光学仪器, 它有两个折射面. 光从一个面射入经过两次折射后从另一个面射出, 如图 13-3-1 所示, 使出射光线向底面方向偏折. 出射光线与入射光线 (延长线) 的夹角  $\delta$  称为偏折角, 由图可以看出

$$\delta = (i_1 - r_1) + (r_2 - i_2)$$

又因为  $r_1 + i_2 = \alpha$ , 所以  $\delta = i_1 + r_2 - \alpha$

$\delta$  的大小随  $i_1$  的变化而变化, 可以证明当  $i_1 = r_2$  时, 偏折角最小, 为  $\delta_0 = 2i_1 - \alpha$

如果棱镜相对于周围介质的折射率为  $n$ , 对应于最小偏折角的入射角  $i$  为

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \text{则} \quad i = \sin^{-1}\left[n \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

由于同一种介质对不同色光有不同的折射率, 各种色光的偏折角不同, 所以白光经过棱镜折射后产生色散现象.

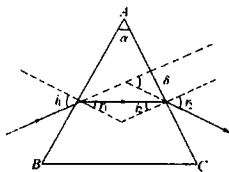


图 13-3-1

### 三、全反射

两介质相比较,光速小、绝对折射率大的叫光密介质,光速大、绝对折射率小的叫光疏介质.当光由光密介质射入光疏介质时,由折射定律可知,光折射角总大于入射角,折射角等于 $90^\circ$ 时的入射角,称为临界角,用 $c$ 表示  $\sin c = n_{\text{疏}}/n_{\text{密}}$

出现全反射的条件是:光必须从光密介质射向光疏介质,入射角大于临界角.利用全反射现象制成的全反射棱镜来代替反光膜的反射镜,能够减少光能的损失.

### 四、虹和霓

虹和霓是色散形成的自然现象.雨后,天空中悬浮着许多小水珠.虹的产生是由于阳光射入水珠,发生两次折射和一次反射的结果.如图 13-3-2 所示,白光发生色散后,从水珠射出的红光与地平线的夹角  $\alpha$  (约为  $42^\circ$ ) 略大于紫光与地平线的夹角  $\beta$  (约为  $40^\circ$ ).

天空中有大量小水珠,当平行射来的阳光进入不同的水珠发生色散后,不同色光的传播方向不同,但同一种色光仍为平行光线.如果天空中 A 处的水珠射出的红光与 C 处水珠射出的紫光恰好同时射入我们的眼睛,那么 A 处以下、C 处以上的水珠射出的其他色光也应同时射入我们的眼睛.看上去虹的红色在上,紫色在下,排列成彩色光带.如图 13-3-3 所示.又由于能够同时射入一个人眼中的同一种颜色的光是由一条弧线上的水珠发出的,所以虹是一条红色在外侧紫色在内侧的弧形彩带.

有时,阳光可以在水珠里经过两次反射和两次折射后,再射入人们的眼中,这时就形成了霓,如图 13-3-4 所示.由于增加了一次反射,使色散后的紫光与地平线的夹角  $\beta'$  略大于红光与地平线的夹角  $\alpha'$ ,形成外侧是紫色和内侧是红色的霓.正因为多了一次反射,所以能量损失较多,霓要比虹暗一些.有时在雨后的天空中可以同时看到虹和霓.

### 五、平面折射成像

从同一光点发出的光线射向平面折射面并进入另一种介质后,折射光线不再是同心光线,即折射线的反向延长线不再相交于同一点.因此,人眼在不同位置观察,光点的像将位于不同位置.

如果人眼位于光点正上方进行观察,如图 13-3-5 所示, $S'$  为观察到的 S 的像,由折射定律得

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

因为进入眼睛光线的张角很小,所以有

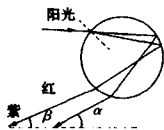


图 13-3-2

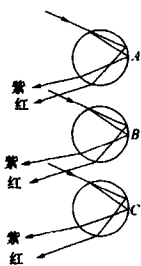


图 13-3-3

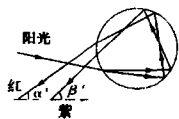


图 13-3-4

$$\sin i_1 \approx \tan i_1 \quad \sin i_2 \approx \tan i_2$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin i_2}{\sin i_1} \approx \frac{\tan i_2}{\tan i_1} = \frac{OS}{OS'}$$

称  $OS = u$  为物距,  $OS' = v$  为像距,  $n_1$  为物方折射率,  $n_2$

为像方折射率, 则  $\frac{u}{v} = \frac{n_1}{n_2}$

### 六、球面折射成像

如图 13-3-6 所示, 球形(一部分)折射面两侧的介质折射率分别为  $n_1$  和  $n_2$ ,  $C$  是球心,  $O$  为顶点, 球面曲率半径为  $r$ . 设  $S$  为主轴上的物点, 它发出的某一条光线  $SA$  的入射角为  $i_1$ , 折射线与主轴交  $S'$  即为像点, 折射角为  $i_2$ . 由折射定律得  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

当考虑到近轴光线的条件,  $i_1, i_2$  都很小, 则  $\sin i \approx i$ , 所以  $n_1 i_1 = n_2 i_2$ .

又由数学关系有  $i_1 = \alpha + \beta, i_2 = \beta - \theta$

$$\alpha \approx \frac{AO}{SO} = \frac{AO}{u}$$

$$\beta \approx \frac{AO}{CO} = \frac{AO}{r}$$

$$\theta \approx \frac{AO}{S'O} = \frac{AO}{v}$$

联立上列各式得  $\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{r}$ . 这是球面折射的成像公式.

式中  $u, v$  的符号同样遵从“实正、虚负”的法则. 对于  $r$ , 则当球心  $C$  在出射光的一侧(凸面朝入射光)时  $r$  为正, 当球心  $C$  在入射光一侧(凹面朝入射光)时  $r$  为负.

若引入焦点和焦距概念, 则当入射光为平行于主轴的平行光( $u = \infty$ )时, 出射光(或其反向延长线)的交点即为第二焦点(也称像方焦点), 此时像距即是第二焦距  $f_2$ , 有

$$f_2 = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}$$

当出射光为平行光时, 入射光(或其延长线)的交点即第一焦点(即物方焦点), 这时

物距即为第一焦距  $f_1$ , 有  $f_1 = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1}$

将上述焦距关系式代入, 可将成像公式写成  $\frac{f_1}{u} + \frac{f_2}{v} = 1$ .

### 七、光在不均匀介质中的传播

光在均匀介质中沿直线传播, 如果介质不均匀, 则光在不同位置折射率不同, 传播

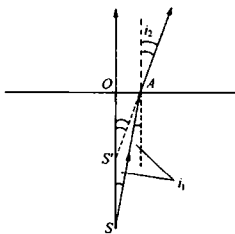


图 13-3-5

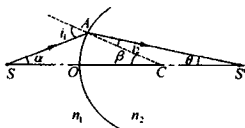


图 13-3-6



速度不同,光线将发生弯曲.比如,由于不同高度空气密度不同,导致其折射率随高度而变化,光线在传播时发生弯曲而出现“海市蜃楼”的现象.

如果不均匀介质的折射率随深度逐渐变化,而且同一深度折射率相同,则可将该介质分成许多平行的水平薄层,折射率依次为  $n_1, n_2, n_3, \dots$  如图 13-3-7 所示,根据折射定律可得  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3 = \dots$

我们可以根据折射率随高度变化的规律来确定光路的形状,或根据光路的形状来确定折射率随高度变化的规律.

声音在密度(或温度)不同的空气中传播速度不同,因此当地面上空气温度随高度变化时,也会出现“声路”弯曲现象.欧洲某次激烈战斗的战场附近没有听到枪炮声,距离战场较远的地方却听到激烈战斗的声音.

**例 1** 折射率为  $\sqrt{2}$  的半圆形透明体上方有一块平行于透明体平面的屏  $MN$ ,柱的半径为  $R$ ,一细束平行光垂直于柱的平面射到圆心  $O$  上,如图 13-3-8 所示.若柱体绕过  $O$  的轴线沿逆时针方向转  $90^\circ$ ,在此过程中,屏上光斑的移动方向和移动区间是怎样的?(屏无限大)

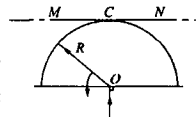


图 13-3-8

**解** 光线在直径面上会发生折射.设半圆柱透明体转过  $\alpha$  角时,折射角为  $\beta$ ,则

$$\sin \alpha = n \sin \beta = \sqrt{2} \sin \beta$$

随着  $\alpha$  的不断增大,  $\beta$  也不断增大.  $\alpha_1 = 45^\circ$  时,  $\beta_1 = 30^\circ$ ;  $\alpha_2 = 90^\circ$  时,  $\beta_2 = 45^\circ$ .故转角  $\alpha$  由  $0^\circ \rightarrow 45^\circ$ ,折射光斑从  $C$  点左移至距  $C$  点  $R \tan 15^\circ$  处,无反射光斑;  $\alpha$  由  $45^\circ \rightarrow 90^\circ$  时,折射光斑从  $C$  点左方  $R \tan 15^\circ$  处移至距  $C$  点  $R$  处,反射光斑从  $C$  点右方  $\infty$  处移至  $C$  处.

**例 2** 如图 13-3-9 所示,某三棱镜横截面为直角三角形,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 30^\circ$ ,棱镜材料折射率为  $n$ ,  $BC$  面涂黑,入射于  $AB$  面上的光线与  $BC$  平行,经  $AB$ 、 $AC$  折射后射出.问:(1)出射光线的偏折角  $\delta$  为多大?(2)为使光线能从  $AC$  面射出,  $n$  的最大值为多少?(3)如果射向  $AB$  面的光线方向可以改变,为使折射光线能直接从  $AC$  面射出,棱镜的折射率应当满足什么条件?

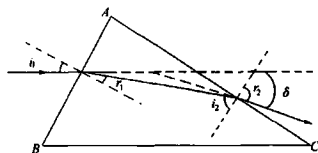


图 13-3-9

**解** (1) 根据折射定律  $\sin i_1 = n \sin r_1$ ,  $\sin r_2 = n \sin i_2$

由已知  $r_1 + i_2 = \angle A = 90^\circ$ , 得  $\sin i_2 = \cos r_1$ , 又因为  $i_1 = 60^\circ$ , 联立上述各式可求得偏

$$\text{折角 } \delta = \sin^{-1} \frac{\sqrt{4n^2 - 3}}{2} - 30^\circ.$$

(2) 折射入棱镜的光线射到 AC 面时入射角  $i_2$  必须小于临界角, 即

$$\sin i_2 < \sin c = \frac{1}{n}$$

$$\sin r_1 = \cos i_2 > \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$\sin i_1 = n \sin r_1 > \sqrt{n^2 - 1}$$

$$n < \sqrt{1 + \sin^2 i_1} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

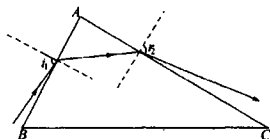


图 13-3-10

(3) 从图 13-3-9 可以看出, 当入射光线顺时针转动时, AC 面上的入射角  $i_2$  将会增大. 因此, 棱镜的折射率越大入射角  $i_1$  应当越大,  $i_2$  才可能小于临界角. 在极限的情况下, 如图 13-3-10 所示, 入射角  $i_1$  和出射角  $r_2$  接近  $90^\circ$ , 则  $i_2 = r_1 = \frac{\angle A}{2} = 45^\circ$

所以, 要使得光线能从 AC 面射出, 棱镜的折射率  $n$  应当小于  $\frac{1}{\sin 45^\circ} = 1.41$

**例 3** 有一只厚底玻璃缸, 底厚 6cm, 内盛 4cm 深的水 (图 13-3-11), 已知玻璃和水的折射率分别为 1.8 和 1.33. 如果竖直向下看, 看到缸底下表面离水面的距离是多少呢?

**解** 所谓的“竖直向下看”, 可以理解成小角度的折射, 这是一个重要的条件. 在图 13-3-12 中, 从缸底 A 点发出一根光线经过 F、E 向 J 方向射出, 人眼观察后感觉到 A 点在 D 处, 人看到缸底下表面离水面的距离就是  $CD = CK + KD$ . 过 F 作 JD 的平行线 FH, 有  $\triangle KLD \sim \triangle BFH$ ,  $KD = BH$ , 所以  $CD = IL + BH$  ①

因为当角  $\theta$  很小时, 有  $\tan \theta = \sin \theta$ , 而  $\alpha, \beta, \gamma$  都很小, 所以在  $\triangle ILE$  中, 有

$$IL = IE / \tan \alpha = IE / \sin \alpha \quad ②$$

$$\text{在 } \triangle IFE \text{ 中, 有 } IF = IE / \tan \beta = IE / \sin \beta \quad ③$$

$$\text{由 } ②, ③ \text{ 式可得 } IL = IF \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = IF / n_{\text{水}} \quad ④$$

$$\text{在 } \triangle BHF \text{ 中有 } BH = BF / \tan \alpha = BF / \sin \alpha \quad ⑤$$

$$\text{在 } \triangle BAF \text{ 中有 } BA = BF / \tan \gamma = BF / \sin \gamma \quad ⑥$$

$$\text{由 } ⑤, ⑥ \text{ 式可得 } BH = BA \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = BA / n_{\text{玻璃}} \quad ⑦$$

将 ④, ⑦ 式代入 ① 式, 可知  $CD = IF / n_{\text{水}} + BA / n_{\text{玻璃}} = 4 / 1.33 + 6 / 1.8 = 6.34$  (cm)

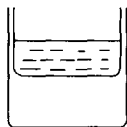


图 13-3-11

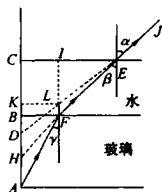


图 13-3-12

**例 4** 体温计横截面如图13-3-13所示,已知细水银柱A离圆柱面顶点O的距离为 $2R$ , $R$ 为该圆柱面半径, $C$ 为圆柱面中心轴的位置.玻璃的折射率 $n = \frac{3}{2}$ , $E$ 代表人眼,求图示横截面上人眼所见水银柱像的位置、虚实、正倒和放大倍数.

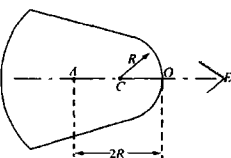


图 13-3-13

**解** 依题意,为球面折射问题,且 $n_1 = 1.5$ , $n_2 = 1$ , $u = 2R$ ,按符号规定凹面朝向入射光 $r = -R$ .将上述各值

代入球面折射公式 $\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{r}$ ,得 $v = -4R$

可见像位于距顶点O为 $4R$ 的与A同侧的位置,是正立的虚像.如图13-3-14中, $A'B'$ 就是AB的虚像.由于过C点的光线射出时不改变方向,依几何关系可得成像放大率

$$m = \frac{A'B'}{AB} = \frac{4R - R}{R} = 3$$

若本题不用成像公式,直接利用折射定律求解也十分方便.

如图13-3-15所示折射光路, $B'$ 就是B的虚像.有

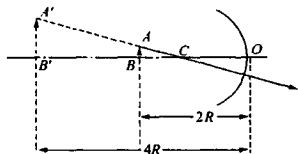


图 13-3-14

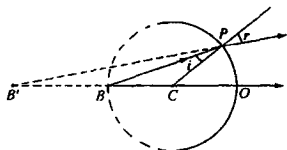


图 13-3-15

$$\angle CBP = \angle CPB = i, \quad \angle B'PB = r - i, \quad \angle B'BP = \pi - i$$

在近轴(小角)条件下有  $r = ni$ ,  $\sin r = r$ ,  $\sin i = i$ , 在  $\triangle BB'P$  中依正弦定理, 有

$$\frac{B'P}{B'B} = \frac{\sin(\pi - i)}{\sin(r - i)} = \frac{\sin i}{\sin(ni - i)} = \frac{i}{(n-1)i}$$

$$B'P = \frac{1}{n-1} B'B = 2B'B$$

在近轴条件下  $B'P \approx B'O$ , 因此  $B'O = 4R$

**例 5** 声音沿空气中传播, 由于空气温度不同, 结果沿着半径为 25 千米的圆弧, 从 A 地传到相距 14 千米的 B 地, 如图 13-3-16 所示. 若已知水平线 AB 的气温为  $18^\circ\text{C}$ , 声速为 342 米/秒, 声速随温度的变化为  $v = v_A + 0.6\Delta t$ . 已知这一地区空气的温度在同一高度是相同的. 试求出“声道”最高点的气温及气温随高度变化的规律(声波的折射规律与光波相同).

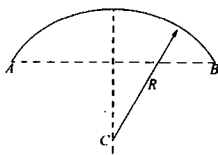


图 13-3-16

**解** 由于声波的传播规律与光波相同, 因此介质的折射率跟声波传播速度成反比, 即  $n_1 v_1 = n_2 v_2$ . 温度随高度变化的空气层, 可看成许多与地面平行的薄层, 如图 13-3-17 所示(图中 y 表示竖直方向).

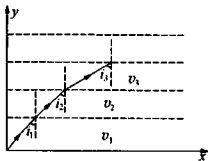


图 13-3-17

在声道的最高点, 如图 13-3-18,  $i_m = 90^\circ$ . 根据圆半径(R)跟

弦长(设  $AB = l$ )的关系可得  $\sin i_A = \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}}{R}$

因此, 最高点声速为  $v_M = \frac{\sin i_M}{\sin i_A} \cdot v_A$

代入数值可得,  $v_M = 356\text{m/s}$ . 由题给条件得

$$l_M = l_A + \frac{v_M - v_A}{0.6} = 41(^\circ\text{C})$$

要求气温随高度变化的规律, 可先求声速随高度变化的规律. 在声道上任取一点 D, 设其高度为 y, 由图 13-3-18 可看出  $i_D = \angle CDE$ , 根据几何知识可得

$$y = R(\sin i_D - \sin i_A), \text{ 即 } \sin i_D = \sin i_A + \frac{y}{R}$$

由折射定律得  $v_D = \frac{\sin i_D}{\sin i_A} \cdot v_A = \left(1 + \frac{y}{R \sin i_A}\right) v_A$

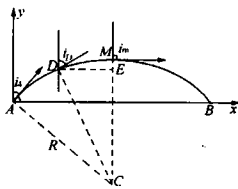


图 13-3-18

$$l_D = l_A + \frac{v_D - v_A}{0.6} = l_A + \frac{v_A}{0.6R \sin i_A}$$

### 【巩固习题】

1. 如图 13-3-19 所示, 光线以入射角  $i$  入射到两面平行的透明板表面. 试证明, 出射光束相对入射光束的位移距离(侧向位移)  $H$  由下列关系式给出:

$$H = d \frac{\sin(i - r)}{\cos r}$$

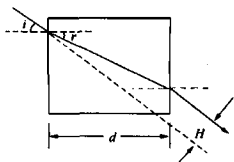


图 13-3-19

2. 玻璃立方体边长为  $a$ , 折射率为  $n$ , 中心有一个小气泡, 如图 13-3-20 所示. 为使从立方体外面都看不到小气泡, 必须在每个面上都贴一张纸片, 纸片的最小面积是\_\_\_\_\_.

3. 从地面上观察太阳, 太阳的直径与人眼所成的夹角(视角)约  $9.2 \times 10^{-3}$  rad. 在中午太阳当顶时, 人从水下观察太阳, 其视角将变为\_\_\_\_\_ rad. (水的折射率为  $4/3$ )

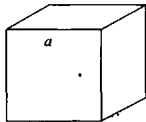


图 13-3-20

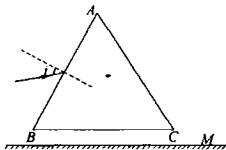


图 13-3-21

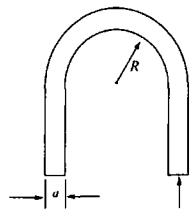


图 13-3-22

4. 棱镜的顶角  $A = 45^\circ$ , 截面是一个等腰三角形, 其下方有一个很大的屏  $M$ , 一束白光以较大的入射角  $i$  射到棱镜侧面  $AB$  的中点, 如图 13-3-21 所示. 光通过另一侧面  $AC$  射出, 在屏  $M$  上形成彩色光带, 则彩色光带从左到右的排列顺序是\_\_\_\_\_. 若各色光在该棱镜中最大的临界角为  $42^\circ$ , 当白光的入射角减小到使进入棱镜的各色光经  $AC$  面都发生全反射, 则这些色光再经  $BC$  面折射出时, 屏  $M$  上得到的彩色光带从左到右的排列顺序为\_\_\_\_\_.

5. 横截面为正方形(边长为  $a$ )的玻璃棒的折射率为  $n_1$ , 外表面涂有折射率为  $n_2$  ( $n_2 < n_1$ )的介质, 被弯成图 13-3-22 所示的形状. 垂直于棒端入射的光线要能全部沿棒行进, 内圆半径  $R$  不得小于多少?

6. 如图 13-3-23 所示, 宽度为  $h$  的平行光束射到等腰直角棱镜的一条直角边上, 棱镜高为  $h$ , 入射光与斜边平行, 棱镜的折射率为  $n = 3/2$ , (1) 计算透过棱镜的与入射光

平行的部分光束的宽度(光透过棱镜最多只有两次内反射);(2)若经过内反射,透过棱镜的光线中,有没有和原来垂直的光线?

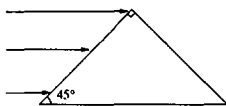


图 13-3-23

7. 如图 13-3-24 所示,矩形  $ABCD$  表示一折射率为  $n$  的透明长方体放在空气中,一单色细光束以  $\theta$  角入射到  $P$  点,  $AP = AD/2$ , (1)若要使光束进入长方体后能射至  $AD$  面上,角  $\theta$  的最小值为多少? (2)若要此光束在  $AD$  面上全反射,  $\theta$  范围如何?  $n$  又在什么范围内?

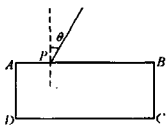


图 13-3-24

8. 图 13-3-25 为一凹球面镜,球心为  $C$ ,内盛透明液体,已知  $C$  至液面的高度  $CE$  为 40.0 厘米,主轴  $CO$  上有一物体  $A$ ,物离液面高度  $AE$  恰好为 30.0 厘米时,物  $A$  的实像和物处于相同的高度.实验时光圈直径很小,可以保证近轴光线成像.试求该透明液体的折射率  $n$ .

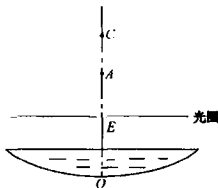


图 13-3-25

9. 一半球形玻璃球,半径为  $R$ ,它的曲面上镀有水银,使之成为反射面,今有一点光源放在主轴上距平面为  $d$  处,如果使曲面反射所成的像恰好与平面反射所成的像重合,求此玻璃的折射率.

10. 光导纤维是利用全反射传导光信号的装置.图 13-3-26 是一光导纤维,  $AB$  为其端面,纤维内芯材料的折射率  $n_1 = 1.3$ ,外层材料的折射率  $n_2 = 1.2$ .在图示情况下,试求入射角  $i$  在什么范围内的光线才可在纤维内传递.

11. 半径为  $R$  的实心玻璃球内有一小气泡,当观察者的眼、气泡和球心在同一直线上时,气泡似距球面  $R/2$ .玻璃的折射率为  $n$ ,求此气泡到此直线上的球面上的点的真实距离.

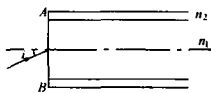


图 13-3-26

## 第四节 薄透镜成像

### 【知识要点】

#### 一、薄透镜

1. 折射面是两个球面,或者一个是球面、另一个是平面的透明体,叫做透镜.通常把

厚度比球面半径小得多的透镜,叫做薄透镜。

2. 透镜的中心称为光心;过光心的直线称为光轴,其中与透镜垂直的光轴称为主光轴,其余的称为副光轴。

3. 平行于主光轴(或副光轴)的近轴光线经透镜后将会聚(或反向延长后相交)于主光轴(或副光轴)上的一点,该点称为焦点(或副焦点)。由于只讨论近轴光线,所以所有副焦点都位于垂直于主光轴的平面内,称为焦平面。

4. 焦点到光心的距离称为焦距。如果透镜两侧介质相同,则两个焦距相等;如果透镜两侧介质不同,则两个焦距间的关系为

$$f_1 : f_2 = n_1 : n_2$$

式中  $f_1$  和  $f_2$  相应为物方和像方焦距,  $n_1$  和  $n_2$  相应为物方和像方介质的折射率。

以下所讨论的透镜问题,一般都限于两侧介质相同的薄透镜的近轴光线。

## 二、薄透镜成像作图

### 1. 三条特殊光线的作图

通过光心的光线,不改变方向。

平行于主光轴的光线,折射后通过焦点(或反向延长线过焦点)。

通过焦点(或对方焦点)的光线,折射后平行于主光轴。

如图 13-4-1 所示,图(a)为凸透镜的情形,图(b)为凹透镜的情形。

### 2. 一般光线的作图

对于任一光线 SA,过光心 O 作副轴  $OO'$  平行于 SA, SA 与焦平面  $MM'$  交于 P 点,连线 AP 或 AP 的反向延长线即为 SA 的折射光线,如图 13-4-2 所示。

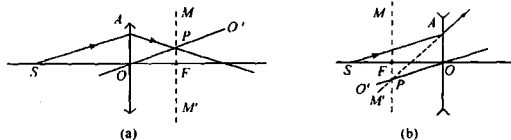


图 13-4-1

3. 通常由物点所发出的光线中选画出两条特殊光线,即可确定像点。应该注意物点

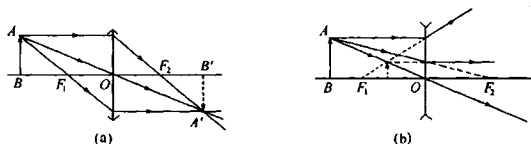


图 13-4-2

上所发出的任意一条光线,只要它经过此成像系统的作用后,必定会经过像点.作图中也常用到平行于副光轴的光线经过透镜作用后交于焦平面这一特点.

### 三、薄透镜成像公式

薄透镜成像公式是:  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$ . 成像公式是几何光学中的基本公式之一,应用时应该注意以下几点:

1. 在用于解决透镜成像问题时,透镜两侧的介质的折射率应该相等.
2. 成像光线都是近轴光线.
3.  $u, v, f$  均应按符号法则确定的正、负符号代入进行代数运算.符号法则可以简单地概括为“实取正,虚取负”的法则,例如,凸透镜的焦距取正值,凹透镜的焦距取负值;实像的像距取正值,虚像的像距取负值等.
4. 放大率  $m = \left| \frac{v}{u} \right|$ .

### 四、光具组成像、实物与虚物

由两个或两个以上的光学器具组成的光学系统,叫做光具组.光线在传播过程中经过多次折射或反射,可以依次成像.经第一镜反射或折射的光线,对于第二镜来说成为入射光线.因此,第一镜的像,对第二镜是物.

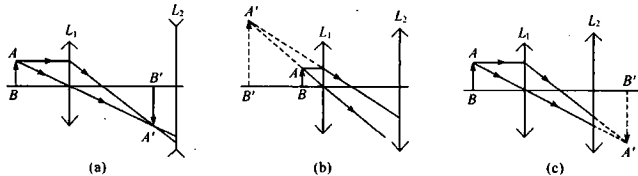


图 13-4-3

应该注意,若第一镜的像成在第二镜之前,不论是实像还是虚像,对于第二镜来说应看作实物;若第一镜的像成在第二镜的后面,则该像对第二镜来说应看作虚物.如图 13-4-3 所示,(a)图中实像  $A'B'$  对  $L_2$  来说是实物;(b)图中虚像对  $L_2$  来说是实物;(c)图中实像  $A'B'$  对  $L_2$  来说是虚物.

在对光具组中某一镜进行计算时, $u, v, f$  都应该从该镜的光心算起.

最后成像的虚实,由最后一次成像决定,最后一次成像的像距是正的为实像,像距为负的是虚像.总放大系数等于各次放大系数的乘积.

### 五、薄透镜成像公式的推导

薄透镜成像实质上是由两次球面折射成像的结果,用逐次成像的方法可以导出薄透镜的成像公式.



**例 1** 位于凸透镜主光轴上的物点  $S$  经透镜成实像, 试讨论  $S$  在什么范围内存在能同时看到物点和像点的区域, 并作图表示出这一区域。

**讨论** 若物点  $S$  位于距透镜二倍焦距处, 其像点  $S_1$  也在透镜另一侧二倍焦距处; 如图 13-4-4 所示, 在  $\beta$  角的范围内, 可以看到物点  $S$  的区域; 而在  $\alpha$  角的范围内, 可以看到像点  $S_1$  的区域。要想同时看到物点  $S$  和它的像点  $S_1$ , 就要求图中  $MA$  与  $ND$  相交,  $MC$  与  $NB$  相交。然而, 由于  $SMNS_1$  是菱形,  $MA \parallel ND$ ,  $MC \parallel NB$ , 因此, 这种情况不可能发生, 也就是说, 不存在同时看到物点  $S$  与像点  $S_1$  的区域。

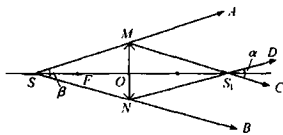


图 13-4-4

如果物点  $S$  位于距透镜一倍焦距与二倍焦距之间, 其像点  $S_1$  在透镜另一侧二倍焦距之外, 作光路图, 如图 13-4-5 所示, 显然, 能够看到物点  $S$  的区域与看到像点  $S_1$  的区域都变小了, 此时仍不存在同时看到  $S$  与  $S_1$  的区域。

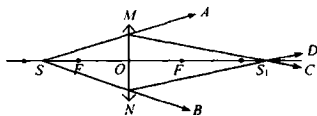


图 13-4-5

符合题意的应是物点  $S$  位于与光心距离大于二倍焦距处, 这时它的像点在透镜另一侧大于一倍焦距且小于二倍焦距的位置。其光路如图 13-4-6 所示, 图中画斜线的区域是可以同时看到物点  $S$  和它的像点  $S_1$  的区域。

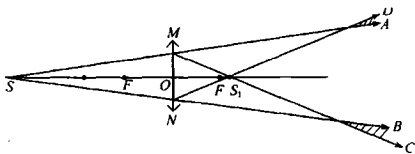


图 13-4-6

**例 2** 物与光屏相距  $L = 80$  厘米, 在其间放一个薄凸透镜, 透镜放在两个不同的位置, 都可以在光屏上获得物体的像。已知这两个像长之比为  $1/9$ , 求此透镜的焦距  $f$ 。

**说明** 本题涉及共轭法测凸透镜焦距的问题。如图 13-4-7 所示, 设物与屏之间的距离为  $L$ ,  $O_1$  和  $O_2$  为凸透镜的两个不同的位置, 设  $O_1O_2 = d$ , 透镜在两个位置成像的物距和像距分别为  $u_1$  和  $v_1$ ,  $u_2$  和  $v_2$ 。

由光路可逆性(物与像的共轭关系)可知

$$u_1 = v_2 = (L - d)/2$$

$$v_1 = u_2 = L - \frac{L-d}{2} = \frac{L+d}{2}$$

由透镜成像公式可得

$$\frac{2}{L-d} + \frac{2}{L+d} = \frac{1}{f}$$

故

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L}$$

设两次成像的放大率分别为  $m_1$  和  $m_2$ , 物长为  $a$ , 两次所成的像长分别为  $b_1$  和  $b_2$ , 则有  $m_1 = \frac{b_1}{a} = \frac{v_1}{u_1}$ ,  $m_2 = \frac{b_2}{a} = \frac{v_2}{u_2}$

因此  $m_1 m_2 = 1$ ,  $a = \sqrt{b_1 b_2}$

有了上述结论, 本题的具体解法如下.

解 两次成像的放大率分别为  $m_1 = \frac{b_1}{a} = \frac{v_1}{u_1}$ ,  $m_2 = \frac{b_2}{a} = \frac{v_2}{u_2}$ , 依题意有

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{u_1 v_2}{v_1 u_2} = \frac{1}{9}$$

由物与像的共轭关系可知,  $v_1 = u_2$ ,  $u_1 = v_2$ , 所以  $(\frac{u_1}{v_1})^2 = \frac{1}{9}$ ,  $\frac{u_1}{v_1} = \frac{1}{3}$

$$u_1 + v_1 = 80(\text{cm})$$

因此  $u_1 = 20\text{cm}$ ,  $v_1 = 60\text{cm}$ , 由透镜成像公式可得  $f = \frac{uv}{u+v} = 15(\text{cm})$

**例 3** 如图 13-4-8 所示, 位于凸透镜  $MN$  的焦点  $F$  处的点光源  $S$  射到透镜上的光, 经透镜折射后, 在距透镜 2 倍焦距处与主轴垂直的光屏上, 留下直径为  $d$  的亮斑. 现沿主轴移动  $S$  一段距离, 使在屏上留下亮斑的直径变为  $d/2$ . 已知此透镜的焦距为  $f$ . 求物点  $S$  移动的距离.

解 依题意可知, 此透镜的直径为  $d$ , 由图 13-4-9 可见, 物点  $S$  无论移至  $S_1$  或  $S_2$  都有可能 在屏上留下直径为  $d/2$  的亮斑. 图中  $S'_1$  和  $S'_2$  分别是两种情况下像点的位置.

当物点移至  $S_1$  时, 有  $\frac{v_1}{d} =$

$$\frac{v_1 - 2f}{d/2}, \text{故 } v_1 = 4f.$$

代入成像公式, 可得

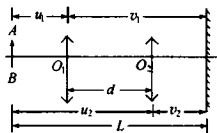


图 13-4-7

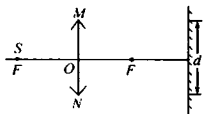


图 13-4-8

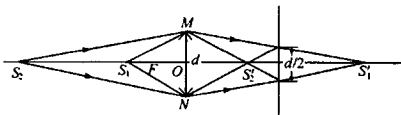


图 13-4-9

$$u_1 = \frac{v_1 f}{v_1 - f} = \frac{4}{3} f$$

所以物点移动的距离为

$$u_1 - f = f/3$$

当物点移至  $S_2$  时,有

$$\frac{v_2}{d} = \frac{2f - v_2}{d/2}, \text{ 由此可得 } v_2 = 4f/3, u_2 = 4f. \text{ 所以物点移动的距离为}$$

$$u_2 - f = 3f$$

**例 4** 如图 13-4-10 所示,全反射棱镜上方 6cm 处放置一物体  $AB$ ,棱镜直角边长为 6cm,棱镜右侧 10 厘米处放置一焦距  $f_1 = 10\text{cm}$  的凸透镜,凸透镜右侧 15cm 处再放置一焦距  $f_2 = 10\text{cm}$  的凹透镜,求该光学系统成像的位置和放大率(全反射棱镜的折射率  $n = 1.5$ ).

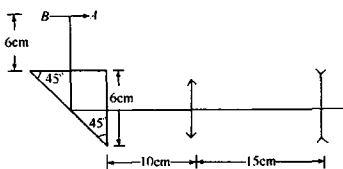


图 13-4-10

**分析** 物体  $AB$  经斜面全反射,在它的左侧成像,但像的位置却不能根据平面镜成像的特点确定,因光线经直角面时均要发生折射.

**解** 对斜面来说,它看到的物体  $AB$  离三棱镜上侧直角面的距离

$$h_1 = nh = \frac{3}{2} \times 6 = 9(\text{cm})$$

经棱镜斜面成的像在棱镜的左侧(垂直于图中主轴),离右侧直角面的距离应为  $l = (h_1 + 3 + 3) = 15\text{cm}$ ,但对棱镜右侧的凸透镜来说,它看到的像离棱镜右侧直角面的距离应为视深  $h_2$ ,即  $h_2 = l/n = 15/1.5 = 10(\text{cm})$

所以对凸透镜来说,  $u_1 = (10 + 10) = 20\text{cm}$ ,由凸透镜成像公式  $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}$  得  $v_1 = 20\text{cm}$ ,则对凹透镜来说,  $u_2 = d - v_1 = -5\text{cm}$ ,由成像公式

$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2}$$

得  $v_2 = 10\text{cm}$ .结果表明最后的像成在凹透镜右侧距离凹透镜 10cm 处,为倒立实像.最后像的放大率为  $m = \left| \frac{v_1}{u_1} \right| \cdot \left| \frac{v_2}{u_2} \right| = 2$ .

**例 5** 如图 13-4-11 所示,已知球面薄透镜的折射率为  $n$ ,透镜物方和像方的折射率分别为  $n_1$  和  $n_2$ ,薄透镜两球面的曲率半径分别为  $r_1$  和  $r_2$ .试用逐次成像法求出此薄透镜的焦距,并导出薄透镜成像公式.

**解** 设图中  $S_1$  为物点,它经球面 I 折射后成像于  $S'_1$ ,  $S'_1$  亦为球面 II 的物点  $S_2$ ,

经球面 II 成像于  $S'_2$ 。则  $S_1$  就是薄透镜的物点  $S$ ,  $S'_2$  就是薄透镜的像点  $S'$ 。因为透镜厚度略去不计, 两球面的顶点与光心重合, 有  $u_2 = -v_1$ 。

依据球面折射成像公式, 得  $\frac{n_1}{u_1} + \frac{n}{v_1} =$

$$\frac{n - n_1}{r_1}, \frac{n}{u_2} + \frac{n_2}{v_2} = \frac{n_2 - n}{r_2}$$

两式相加得  $\frac{n_1}{u_1} + \frac{n_2}{v_2} = \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}$ , 即  $\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}$  ①

当像距  $v = \infty$  时,  $u = f_1$  (物方焦距), 所以  $f_1 = \frac{n_1}{\frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}}$  ②

同理, 当  $u = \infty$  时,  $v = f_2$  (像方焦距), 所以  $f_2 = \frac{n_2}{\frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}}$  ③

当透镜两侧介质不相等时,  $f_1 \neq f_2$ , 而有  $\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2}$

将②或③代入①式得薄透镜成像公式  $\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2}$  ④

若  $n_1 = n_2 = n_0$ , 则  $f_1 = f_2 = f = \frac{n_0}{(n - n_0) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$

若透镜周围介质是空气,  $n_0 = 1$ , 则  $f = \frac{1}{(n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$

此时④式变为  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$  ⑤

⑤式就是常用薄透镜成像公式。

### 【巩固习题】

1. 如图 13-4-12 所示, 点光源  $S$  到屏的距离为  $L$ , 焦距为  $f$  的凸透镜位于  $S$  和  $M$  之间, 其主轴过  $S$  而垂直于  $M$ , 如  $L/4 < f < L$ , 则透镜距  $S$  为多远可使  $M$  上的光斑最小。

2. 取圆面直径为 2cm, 焦距为 4cm 的凸透镜  $P$ , 直立于光具座上, 与它平行地放置一块光屏  $M$ , 两者相距  $L = 20$ cm, 如图 13-4-13 所示, 现将一个点光源  $S$  安置于透镜主光轴上且离透镜 10cm, 当室内光线很弱时在屏  $M$  上看到了一个暗的圆环。(1) 作出形成暗环的光路示意图, 并在图上标出暗区位置; (2) 求出暗环的面积。

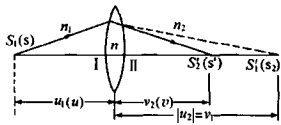


图 13-4-11

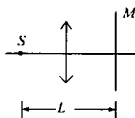


图 13-4-12

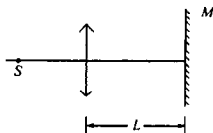


图 13-4-13

3. 如图 13-4-14, 在折射率为  $5/3$  的透明液体中有一会聚透镜  $L$ , 它在液体中的焦距为  $7\text{cm}$ , 主轴竖直, 有一遮光板紧贴镜面, 板上有一小孔  $P$  可以透光.  $P$  离光心  $O$  的距离为  $6\text{cm}$ , 如果在透镜的下方的主轴上放一点光源, 问点光源放在主轴的哪些位置上才有光线经过  $P$  孔射至液面并进入空气中.

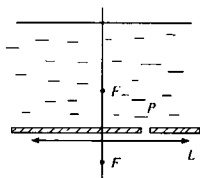


图 13-4-14

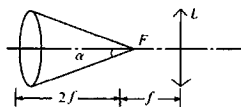


图 13-4-15

4. 在焦距为  $f$  的会聚透镜  $L$  的主光轴上放置一个发光圆锥面, 如图 13-4-15 所示, 圆锥的中心轴线与主光轴重合, 锥的顶点位于焦点  $F$ , 锥高等于  $2f$ , 锥的母线与其中轴线的夹角等于  $\alpha$ , 求圆锥面的像.

5. 如图 13-4-16 所示, 某人的眼睛在  $E$  处通过放大镜  $L$  观察标尺  $M$ ,  $F$  为  $L$  的焦点, 他既能通过  $L$  看到  $M$  上一部分刻度, 又能直接从镜外看到一部分刻度. 试在题图上用作图法求出他看不到的  $M$  上的刻度值的范围.

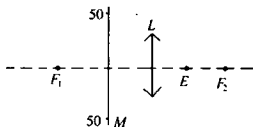


图 13-4-16

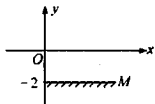


图 13-4-17

6. 图 13-4-17 所示, 凸透镜的主轴与  $x$  轴重合, 光心就是坐标原点, 凸透镜的焦距为  $10$  厘米, 有一平面镜  $M$  放在  $y = -2\text{cm}, x > 0$  的位置, 眼睛从平面镜反射的光中看到

发光点  $A$  的像位于  $A_2$  处,  $A_2$  的坐标为  $(-10, -12)$ . 求: (1) 发光点  $A$  的位置; (2) 用作图法确定  $A$  的位置的步骤并作出光路图.

7. 某同学按下面的方法测定凹透镜的焦距: 首先取一块凸透镜, 在其主轴上置一点光源  $S$ , 使其能成一实像  $S'$  且像距应大于凸透镜后的凹透镜的焦距. 测量出像距  $v$ . 再在像点  $S'$  处放一块与透镜主轴垂直的平面镜  $M$ , 经其反射和凸透镜折射后又在  $S$  所在处恰好成像. 将待测凹透镜置于凸透镜和平面镜之间并与凸透镜共轴, 沿主轴移动凹透镜, 直到该系统的最终所成的像仍然落在光点  $S$  的位置, 测出两透镜间的距离为  $d$ . (1) 画出最后成像的光路图; (2) 求出凹透镜的焦距.

8. 设有两凸透镜  $L_1$  和  $L_2$ , 它们的焦距各为  $20\text{cm}$  和  $30\text{cm}$ , 两者相距  $10\text{cm}$ , 在  $L_1$  前  $100\text{cm}$  处放一长  $4.5\text{cm}$  的物体, 求最后所成像的位置、大小和性质, 并作图.

9. 凸透镜焦距为  $20\text{cm}$ , 一点光源以速度  $40\text{cm/s}$  沿透镜主轴远离透镜, 求当点光源距透镜为  $60\text{cm}$  时, 像点的移动速度.

10. 船以  $5\text{m/s}$  的速度行驶, 船上的摄影者拍摄以  $10\text{m/s}$  速度逆向行驶来的快艇的像, 拍摄时, 船、艇相距  $150\text{m}$ , 船、艇的连线与行驶方向成  $\alpha = 45^\circ$  角, 要使底片上的像移动距离不超过  $0.03\text{mm}$ , 则曝光时间应不大于多少? (已知所用照相机镜头焦距为  $f = 5\text{cm}$ )

11. 一透明薄板既能反射光线又能透射光线, 它与一个曲率半径为  $8\text{cm}$  的凸面镜的主轴垂直放置, 两者相距  $1\text{cm}$ , 在板前  $3\text{cm}$  处平行于板面放一物体, 试证明薄板和凸面镜所成的物体的像重合在同一位置, 并求出两像的大小之比.

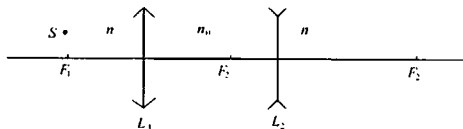


图 13-4-18

12. 凸透镜  $L_1$  与凹透镜  $L_2$  同轴放置,  $L_1$  左侧媒质的折射率为  $n$ ,  $L_2$  右侧媒质的折射率也为  $n$ , 两透镜之间媒质的折射率为  $n_0$ , 且  $n < n_0$ ,  $F_1$  是  $L_1$  的物方焦点,  $F_2$  是  $L_2$  的物方焦点. 有一物点  $S$  位于  $L_1$  的物方焦平面上, 如图 13-4-18 所示, (1) 画出成像光路图, 求出像点  $S'$  的位置; (2) 若  $L_1$  的物方焦距  $f_1 = 20\text{cm}$ ,  $L_2$  的像方焦距  $f_2 = 10\text{cm}$ , 物点  $S$  离光轴的距离为  $2\text{cm}$ , 问像点  $S_1$  离光轴的距离为多少?

## 第五节 简单光学仪器

### 【知识要点】

#### 一、简单光学仪器

##### 1. 眼睛

人眼中的角膜、水样液、晶状体和玻璃体构成一个变焦距系统,该系统可近似地视为一凸透镜,物体发出的光线经该系统折射后在视网膜上成像,看不同远近的物体靠改变焦距来保证在视网膜上成像。一般正常人眼睛的远点在无限远处,近点距离约为10cm处,明视距离为25cm。

##### 2. 放大镜、幻灯机、照相机

它们分别相当于单一凸透镜成像时的三种情况:放大镜使物体成放大正立虚像;幻灯机使幻灯片成放大倒立实像;照相机使物体成缩小倒立实像。

##### 3. 显微镜

由两共轴凸透镜组成,其中物镜焦距较短,目镜焦距较长,微小物体先由物镜生成放大实像,然后目镜对此像再一次放大,生成虚像。

##### 4. 望远镜

望远镜是用来观察远处大物体的助视光学仪器,它的作用就是放大视角,所以成的像仍比物体本身小。常见的有开普勒望远镜,伽利略望远镜和反射式望远镜三种。

#### 二、光学仪器的视角放大倍数

##### 1. 视角放大倍数

像的放大率( $m$ )是指像长与物长的比值,其定义式为  $m = \frac{\text{像长}}{\text{物长}}$

人们借助于光学仪器观察物体时,往往是要增大对物体的视角。视角放大倍数( $M$ )的定义式是  $M = \frac{\text{仪器所成虚像对人眼所张的角}(\alpha')}{\text{物体直接对人眼所张的角}(\alpha)}$

显然,像的放大率与视角放大倍数两者的物理意义是不同的,一般情况下两者的数值也不相等。

##### 2. 放大镜的视角放大倍数

设有小物体长为  $h$ ,人眼离物体  $L_0$  处直接观察时,由于物体较小,视角  $\alpha$  也就较小,故近似地有  $\alpha = \frac{h}{L_0}$

通常取物体位于明视距离处,即  $L_0 = 25\text{cm}$ ,如图 13-5-1 所示。

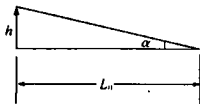


图 13-5-1

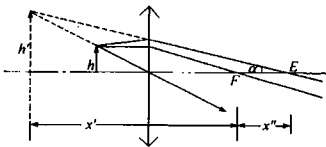


图 13-5-2

当通过放大镜观察物体时,如图 13-5-2,设透镜焦距为  $f$ ,物长为  $h$ ,像长为  $h'$ ,人眼位于  $E$  点观察, $E$  点到透镜同侧的焦点  $F$  的距离为  $x''$ ,此焦点到像的距离为  $x'$ ,则有

$$h' = \frac{x'}{f}h, \alpha' = \frac{h'}{x' + x''}$$

所以 
$$M = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{x' L_0}{f(x' + x'')}$$

可见此时的视角放大倍数与物体和透镜的距离(由此决定  $x'$ )、透镜的焦距及人眼所在的位置有关,若取人眼位于透镜焦点处观察,即  $x'' = 0$ ,则有  $M = \frac{L_0}{f}$

一般把上式所得的值称为放大镜的放大倍数.由于  $L_0$  为常数,故  $M$  由放大镜本身的焦距来决定.

### 3. 显微镜的视角放大倍数

显微镜成像情况的简单示意如图 13-5-3,其中物镜与目镜间的距离  $L$  即为其镜筒的长度,图中  $h$  为物长, $h'$  为物镜所生成的实像长, $h''$  为目镜所看到的虚像长.人眼对  $h''$  所张的角  $\alpha'$  可近似认为是自目镜光心对  $h''$  所张的角,也就是目镜光心对  $h'$  所张的角,设目镜焦距为  $f_2$ ,由于物镜所成实像在目镜焦点附近,故近似地有  $\alpha' = \frac{h'}{f_2}$

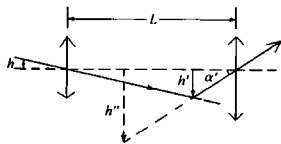


图 13-5-3

又由于物镜成像时物体位于物镜焦点附近,即可取其物距为  $f_1$ ,则由图可见

$$h' = \frac{L - f_2}{f_1} \cdot h$$

通常  $L$  比  $f_2$  大很多,故上式可近似为  $h' = \frac{L}{f_1} h$

所以 
$$M = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{Lh}{f_1 f_2} \cdot \frac{L_0}{h} = \frac{L}{f_1} \cdot \frac{L_0}{f_2}$$

上式得出:显微镜的视角放大倍数等于其目镜的放大倍数( $L_0/f_2$ )与物镜的放大倍数( $L/f_1$ )的乘积,通常显微镜的物镜和目镜上都标有放大倍数的字样其来历就是如此.

### 4. 望远镜的视角放大倍数



以开普勒望远镜为例,其成像情况的简单示意如图 13-5-4,由于被观察的都是较远的物体,故人眼直接观察物体时的视角和物体对望远镜物镜光心所张的角相等,即图中的  $\alpha$  角.而人通过望远镜观察所生成的虚像时,视角为图中的  $\alpha'$  角.由于望远镜中物镜和目镜的焦平面重合,且物镜所生成的实像就在此重合的焦

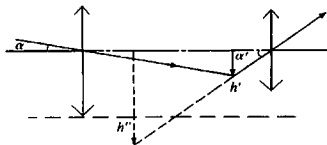


图 13-5-4

平面附近,故近似地有  $\alpha = \frac{h'}{f_1}$ ,  $\alpha' = \frac{h'}{f_2}$

所以,望远镜的视角放大倍数为  $M = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2}$

上式中  $f_1$  和  $f_2$  分别为望远镜物镜的焦距和目镜的焦距.

### 【例题分析】

**例 1** 显微镜的物镜的焦距为 1cm,目镜的焦距为 4cm,两者相距 16cm(即镜筒长),如果观察者的明视距离为 24cm,问观察物应放在物镜前多少 cm? 其总放大率为多少?

**分析** 本题中所求的放大率为长度放大率.

**解** 观察者看到的像为在明视距离处的虚像,故  $v_2 = -24\text{cm}$ ,由成像公式的变形

$$\text{得 } u_2 = \frac{v_2 f_2}{v_2 - f_2} = \frac{-24 \times 4}{-24 - 4} = \frac{24}{7} \text{ cm}$$

经物镜所成像的像距为  $v_1 = d - u_2 = 88/7\text{cm}$ ,  $u_1 = \frac{v_1 f_1}{v_1 - f_1} = 1.09\text{cm}$

$$\text{总放大率为 } k = \left| \frac{v_1}{u_1} \right| \cdot \left| \frac{v_2}{u_2} \right| = 81$$

**例 2** 某同学用一块直径 12.5cm,焦距 1m 的凸透镜  $L_1$  和一块直径 1cm,焦距 10cm 的凸透镜  $L_2$  自制一个开普勒望远镜.

(1)当用它沿水平方向观察 50m 远处的旗杆并使其最终成像于 10m 远处时,镜筒的长度应多大? 这时旗杆如果位于望远镜的轴线所在的竖直面上,它上面应有多长的一段被观察到?

(2)如果要使被观察到的旗杆长度增加一倍,且尽可能增加像的亮度,不改变镜筒的长度而在物镜和目镜之间放上一块适当的凸透镜就可以.则这个透镜应放在什么位置? 直径及焦距应多大?

**解** (1)望远镜物镜焦距长,故用  $L_1$ ,依据透镜成像公式  $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1}$

可得 
$$v_1 = \frac{f_1 u_1}{u_1 - f_1} = \frac{50 \times 1}{50 - 1} (\text{m}) = 102 (\text{cm})$$

对于目镜有 
$$u_2 = \frac{v_2 f_2}{v_2 - f_2} = \frac{(-10) \times 0.10}{-10 - 0.10} (\text{m}) = 9.9 (\text{cm})$$

由于物镜的像就是目镜的物,且  $v_1, u_2$  均大于零,因此镜筒长即两镜间距

$$L = v_1 + u_2 = 111.9 (\text{cm})$$

如图 13-5-5 所示,设  $P_1 Q_1$  是旗杆经物镜所成的像,  $P_1$  是杆上  $P$  点的像.从图中看出,由  $P$  点发出经物镜折射的光束中,惟有  $a$  恰好能到达目镜边缘,可见  $P$  是旗杆上能被观察到部分的下端,而与  $P_1$  对称的  $Q_1$  点所对应的杆上  $Q$  点则是可见部分的上端.

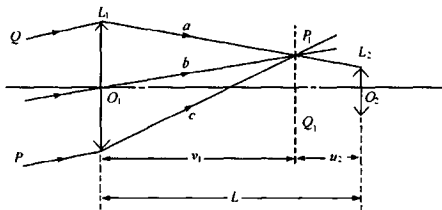


图 13-5-5

设  $L_1$  和  $L_2$  的直径分别为  $d_1, d_2$ ,  $P_1 Q_1 = h'$ ,则由几何关系得

$$h' = d_2 + (d_1 - d_2) \frac{u_2}{L} = \left[ 1 + (12.5 - 1) \times \frac{9.9}{112} \right] = 2 (\text{cm})$$

被观察到的旗杆长  $h = \frac{u_1}{v_1} h' = \frac{50}{1.02} \times 2 = 98 (\text{cm})$

(2) 放上第三块透镜  $L_3$  后成像情况不变,仅视野和亮度增大,则  $L_3$  应置于物镜生成的像  $P_1 Q_1$  的位置.由于  $L_3$  不改变  $P_1 Q_1$  的位置而仅使光线方向发生偏折,被观察到旗杆段长变为原来的 2 倍,则  $P_1 Q_1$  上相应长度也要变为原来的 2 倍.故  $L_3$  的直径  $d_3$  至少为  $d_3 = 2h' = 4 (\text{cm})$

如图 13-5-6 所示,从旗杆上  $S$  点射出光线经  $L_1$  折射后的会聚光束  $abc$  本不可能到达  $L_2$ .放上  $L_3$  后,若能射到  $L_2$ ,则至少应折射为  $a'b'c'$ ,其中  $a'$  恰好到达  $L_2$  的边缘.但如果考虑到提高像的亮度,即让更多的光线进入  $L_2$ ,则应取光束中轴线(即过  $L_1$  光心的光线)  $b$  经  $L_3$  折射后射向  $L_2$  的光心,即图中  $b'$  光线所示.根据成像原理,可认为  $L_1$  的光心  $O_1$  经  $L_3$  折射后成像于  $L_2$  的光心  $O_2$ .对于  $L_3$  的这一成像过程可以认为物距  $u_3 = v_1$ ,像距  $v_3 = u_2$ ,所以  $L_3$  的焦距

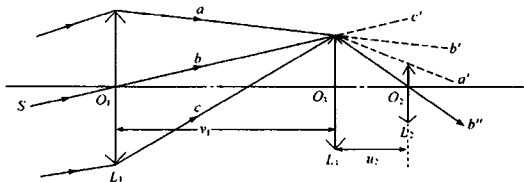


图 13-5-6

$$f_3 = \frac{u_3 v_3}{u_3 + v_3} = \frac{102 \times 9.9}{102 + 9.9} = 9.0(\text{cm})$$

### 例 3 门镜

装在门上的门镜(又称“猫眼”)是由一个凹透镜和一个凸透镜组成的,如图 13-5-7 所示。其功能是人人在室外看不清室内的情况,而在室内的人却能清楚地看见室外的情况。

有一种门镜的凹透镜焦距为 1.0cm,凸透镜焦距为 3.5cm,两透镜之间的距离为 2.1cm,我们以上述数据为例来分析门镜为什么具有这样的功能。

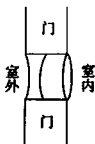


图 13-5-7

人能不能看清一个物体(或一个物体所成的像)取决于两个因素:一是该物体(或像)是否在人眼的明视距离内;二是有没有足够的光能进入人眼。

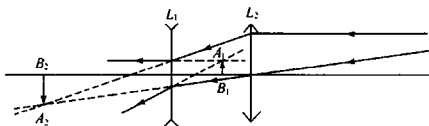


图 13-5-8

通过门镜在室外看室内景物的光路图如图 13-5-8 所示。AB(图中未画出)通过凸透镜  $L_2$  所成的像应是  $A_2B_2$ 。因为  $\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2}$ , 设  $u_2 = 100\text{cm}$

$$v_2 = u_2 f_2 / (u_2 - f_2) = \frac{100 \times 3.50}{100 - 3.50} = 3.63(\text{cm})(\text{实像})$$

把  $A_2B_2$  作为  $L_1$  的虚物,物距  $u_1 = -(v_2 - d) = -1.53(\text{cm})$

$$\text{因为 } \frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}, v_1 = \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1} = \frac{-1.53 \times (-1.00)}{-1.53 - (-1.00)} = -2.89(\text{cm})(\text{虚像})$$

如果室内景物到门的距离超过 100cm,则  $v_1$  将更小。人眼如靠近  $L_1$  观察,这样的距离比明视距离要小得多,是无法看清的,如果人眼退离  $L_1$  观察,则室内物体的成像光线

进入眼睛太少,而且视角也很小,同样无法看清.

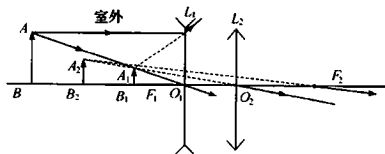


图 13-5-9

在室内通过门镜看室外景物的光路图如图 13-5-9 所示,仍设室外景物 AB 到  $L_1$  的距离为 100cm, AB 在  $L_1$  中成像  $A_1B_1$  应有  $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}$

$$v_1 = \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1} = \frac{100 \times (1.00)}{100 - (1.00)} = -0.99(\text{cm})(\text{虚像})$$

$A_1B_1$  在  $L_2$  中成像有  $\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2}$

$$u_2 = |v_1| + d = (0.99 + 2.1) = 3.09(\text{cm})$$

$$v_2 = \frac{u_2 f_2}{u_2 - f_2} = \frac{3.09 \times 3.50}{3.09 - 3.50} = -26.4(\text{cm})$$

可见  $A_2B_2$  到  $L_2$  的距离大于人眼的明视距离,故人眼完全可以贴在  $L_2$  上看清室外景物.

### 【巩固习题】

1. 一照相机的焦距  $f_0$  为 7.5 厘米,能调节到的最大像距为  $v_{\max} = 8$  厘米,今在相机镜头上安上一个焦距  $f_1$  为 60 厘米的薄凸透镜(它和原相机镜头的间距可视为零),求(1)按上薄凸透镜后的最近拍摄距离;(2)原相机上无穷远的那一档刻度现代表多远的拍摄距离.

2. 为了观察微小的物体,应采用长焦距的显微镜,它的物镜到观察物的距离应不小于  $d = 5$  厘米.若显微镜的放大率  $k = 180$ ,目镜的放大率  $k_1 = 20$ ,则物镜的焦距  $f$  多大?

3. 一台显微镜,两镜头焦距分别为 5cm 和 1cm,被观察物体放在物镜前 1.1cm 处,最终用目镜观察到的像位于明视距离,则镜筒应当多长?

4. 一观剧望远镜物镜焦距为 12 厘米,目镜焦距为 -4cm,当观察 7.2m 处的物体时,最后的像成于目镜前 20cm 处,求两镜间距.

5. 开普勒望远镜的目镜焦距为 1cm,用来观察天体时最后成像在极远处,这时镜筒长为 51cm,用来观察地面上某目标时,则需要将目镜拉出 0.5cm,像仍成在极远处;问目

标离观察者多远?

6. 开普勒望远镜的物镜焦距  $f_1$  与目镜焦距  $f_2$  之比为  $f_1:f_2 = 10:1$ , 今于物镜前距离物镜为  $a$  ( $a < f_1$ ) 处置一物体, 试求此物体通过此望远镜所成的像的放大率为多少? 并确定像的性质. 已知此时望远镜的远点被调节在无限远处.

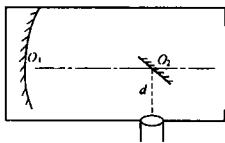


图 13-5-10

7. 图 13-5-10 是一种反射式望远镜的示意图. 已知凹面镜焦距  $f_1 = 100\text{cm}$ , 平面镜与镜筒轴线成  $45^\circ$  角, 凹面镜主轴与平面镜交于  $O_2$ ,  $O_1O_2 = 0.95\text{m}$ , 目镜 (凸透镜) 光心到凹面镜主轴的距离  $d = 0.15\text{m}$ , 两镜主轴互相垂直. 目镜焦距为  $f_3 = 10.2\text{cm}$ . 求: (1) 通过目镜看到的物体的像的位置; (2) 此望远镜的放大率.

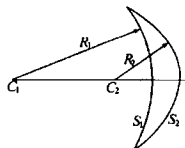


图 13-5-11

8. 显微镜的物镜组中常配有一个图 13-5-11 所示的透镜, 它的表面是球面, 左表面  $S_1$  的球心为  $C_1$ , 半径为  $R_1$ ; 右表面  $S_2$  的球心是  $C_2$ , 半径是  $R_2$ . 透镜的折射率为  $n$ , 两球心间的距离

$\overline{C_1C_2} = \frac{R_2}{n}$ . 在使用时被观察物体被置于  $C_1$  处, 试证明: ① 从物体射向此透镜的光线, 经透镜折射后, 所有光线均交于一点  $Q$ ; ②  $QC_2 = nR_2$ .

## 第六节 光的本性

### 【知识要点】

#### 一、光的干涉

具有相同频率、相同振动方向和恒定相位差的两束光, 在空间相遇, 交叠区域中有的地方亮度增强, 有的地方亮度减弱的现象叫做光的干涉.

两束光发生干涉必须具备如下条件: 两束光波频率相同, 在相遇点的振动方向在同一直线上, 相位差恒定. 要观察到两束光的干涉现象, 除上述条件外, 还需满足: 两束光波在相遇点所产生振动的振幅 (实为强度) 不能相差太悬殊, 两束光波在相遇点的光程差不能太大.

从光的相干条件看, 一般的两束光是很难满足的. 托马斯·杨的成功之处就在于巧妙而简单地解决了相干光源的问题, 成功地观察到了光的干涉现象, 为光的波动说的立足和发展提供了有力的证据.

## 1. 双缝干涉

由两条靠近的狭缝中射出的光作为相干光源的干涉叫双缝干涉。

如图 13-6-1 所示,  $A$ 、 $B$  为双缝, 相距为  $d$ ,  $M$  为白屏, 与双缝相距为  $l$ ,  $DO$  为  $AB$  的中垂线。屏上距离  $O$  为  $x$  的一点  $P$  到双缝的距离, 可以用勾股定理

$$\text{求得 } PA^2 = l^2 + \left(\frac{x-d}{2}\right)^2$$

$$PB^2 = l^2 + \left(\frac{x+d}{2}\right)^2$$

两式相减得  $(PB - PA)(PB + PA) = 2dx$

由于  $d$ 、 $x$  均远小于  $l$ , 因此  $PB + PA = 2l$

所以  $P$  点到  $A$ 、 $B$  的光程差  $\delta = PB - PA = \frac{dx}{l}$

若  $A$ 、 $B$  是同位相光源, 当  $\delta$  为波长的整数倍时, 两列波波峰与波峰或波谷与波谷相遇,  $P$  为加强点(即亮点); 当  $\delta$  为半波长的奇数倍时, 两列波波峰与波谷相遇,  $P$  为减弱点(即暗点)。因此, 白屏上干涉明条纹对应位置为  $x = \pm k \frac{l}{d} \lambda$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ )

暗条纹对应位置为  $x = \pm \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ )

其中  $k=0$  的明条纹为中央明条纹, 称为零级明条纹;  $k=1, 2, \dots$  时, 分别为中央明条纹两侧的第 1 条、第 2 条... 明(或暗)条纹, 称为一级、二级... 明(或暗)条纹。

由以上可以看出, 相邻两明(或暗)条纹间的距离  $\Delta x = \frac{l}{d} \lambda$

分析上式可知:

(1) 相邻亮条纹(或相邻暗条纹)的间距相等, 且与干涉级  $k$  无关;

(2) 当一定波长  $\lambda$  的单色光入射时, 条纹宽度  $\Delta x$  的大小与  $l$  成正比, 与  $d$  成反比。所以, 为了观察到清晰的干涉条纹, 对于一定的波长而言, 必须使  $d$  小至可与波长相比拟, 且使  $l$  远大于  $d$ ;

(3) 随着光源的宽度增加, 条纹的可见度将会降低, 这是由于宽光源总可以看作是许多线光源的总和, 它们分别给出一系列同样的干涉图样, 且彼此互相重叠, 因此使条纹可见度降低;

(4) 将上式变形可以得到:  $\lambda = \frac{d}{l} \Delta x$ , 利用该式可以测定光波的波长;

(5) 若用白光作为光源时, 除  $k=0$  的中央亮条纹外, 其余各级亮条纹都带有彩色, 当  $k$  较大时, 各级亮条纹因相互重叠而得到均匀强度。

## 2. 类双缝干涉

双缝干涉实验是将一个光源“一分为二”成两个光源, 这分出来的两个光源就是相

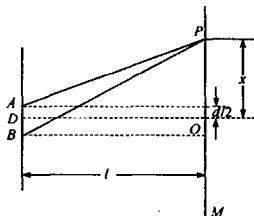


图 13-6-1

干光源,可以实现光的干涉.据此,物理学家设计了各种类似双缝干涉的装置,我们称之为类双缝干涉,例如:

**双面镜** 如图 13-6-2 所示,夹角  $\theta$  很小的两个平面镜  $L_1$ 、 $L_2$  构成一个双面镜(图中  $\theta$  已经夸大了).点光源  $S$  经双面镜生成的像  $S_1$  和  $S_2$  就是两个相干光源.

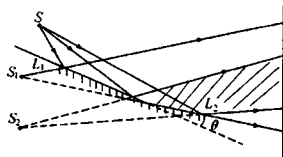


图 13-6-2

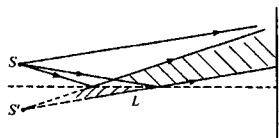


图 13-6-3

**洛埃镜** 如图 13-6-3 所示,一个与平面镜  $L$  距离  $d$  很小(数量级  $0.1\text{mm}$ )的点光源  $S$ ,它的一部分光线掠入射到平面镜,其反射光线与未经过反射的光线叠加在屏上产生干涉条纹.因此,  $S$  和它在平面镜中的像  $S'$ , 就是相干光源.但应当注意,光线从光疏介质射到光密介质,反射光与人射光相位差  $180^\circ$ ,即发生“半波损失”,因此  $S$  与  $S'$ , 是反位相光源,计算光程差时应当注意.

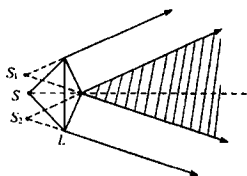


图 13-6-4

**双棱镜** 如图 13-6-4 所示,底角很小的等腰棱镜  $L$ ,点光源  $S$  的光线经过  $L$  的折射后形成距离很近的两个像  $S_1$  和  $S_2$ , 就是两个相干光源.

**对切双透镜** 如图 13-6-5 所示,过光心将透镜对切,拉开一小段距离,中间加挡光板(图 a);或错开一段距离(图 b);或两片切口各磨去一些再胶合(图 c).置于透镜原主轴上的点光源或平行于原主轴的平行光线,经过对切双透镜折射后,在叠加区也可以发生干涉.

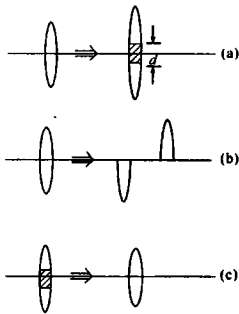


图 13-6-5

### 3. 薄膜干涉

#### (1) 光程和半波损失

光在介质中传播的路程  $l$  与该介质的折射率  $n$  的乘积  $nl$  称为光程.在真空或空气中,  $n=1$ ,光传播的路程就等于光程.

光由光疏介质射向光密介质在两介质的分界面上发生反射时,光的相位要发生  $180^\circ$  的变化,相当于有半个波长的光程差,称为半波损失.反之,当光由光密介质

射向光疏介质在两介质的分界面上发生反射时,其相位不发生变化,因此这时没有半波损失.

## (2) 薄膜干涉

当光射到一透明薄膜上时,薄膜的第一表面和第二表面都会对光产生反射,由第一表面和第二表面反射的光返回原介质中时互相干涉,就是薄膜干涉.

设有在空气中波长为  $\lambda$  的光线自空气中垂直射到折射率为  $n$  厚度为  $d$  的薄膜上,这时,入射角和反射角都等于 0,如图 13-6-6 所示,经由上表面反射(有半波损失)后的光线与经由下表面反射(无半波损失)后的光线的光程

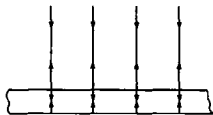


图 13-6-6

差为  $\delta = 2nd - \frac{\lambda}{2}$

由此可得到干涉加强的条件是  $d = \frac{1}{2n}(k + \frac{1}{2})\lambda$

干涉削弱的条件是  $d = \frac{k}{2n}\lambda$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ )

由透明介质形成的薄膜均可产生薄膜干涉效应,如肥皂膜、水面上的油膜、两玻璃板间的空气膜等.

## 二、光的衍射

光在传播过程中,偏离了直线传播方向而绕到障碍物的后面的现象称为光的衍射现象.只有当障碍物的尺寸比波长小或相差不多时,才能观察到明显的衍射现象.可见光波长的数量级是  $10^{-7}$  米,比一般的障碍物或孔要小得多,所以难以观察到明显的光的衍射现象.

法国物理学家菲涅耳在详细研究光的干涉、衍射现象的基础上,总结出惠更斯—菲涅耳原理:由光源发出的光波,在同一时刻  $t$  时它所达到的各点的集合所构成的面,叫做此时刻的波阵面(又称为波前),在同一波阵面上各点的相位都相同,且波阵面上的各点又都作为新的波源向外发射子波,子波相遇时可以互相叠加,历时  $\Delta t$  后,这些子波的包络面就是  $t + \Delta t$  时刻的新的波阵面.波的传播方向与波阵面垂直,波阵面是一个平面的波叫做平面波,其传播方向与此平面垂直;波阵面是一个球面(或球面的一部分)的波叫做球面波,其传播方向为沿球面的半径方向,如图 13-6-7 所示.

当时法国著名的数学家泊松在阅读了菲涅耳的报告后指出:按照菲涅耳的理论,如果让平行光垂直射不透光的圆盘,那么在圆盘后面的光屏上所留下的黑影中央将会出现一个亮斑.因为垂直于圆盘的平行光照到时,圆盘边缘将位于同一波阵面上,各点的相位相同,它们所发出的子波到达黑影中央的光程差为零,应当出现增强干涉.泊松原想以不能观察到这一亮斑来否定波动说,但菲涅耳勇敢地面对挑战,用实验得到了这个亮斑.



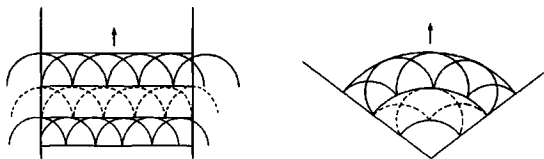


图 13-6-7

### 三、光子说

#### 1. 光电效应

某些物质在光(包括不可见光)的照射下,有电子发射出来,这种现象叫光电效应. 发射出来的电子叫光电子.

研究光电效应的规律可用图 13-6-8 所示的装置,其中  $K$  为光电管的阴极,它在光照下发出光电子,  $N$  为光电管的阳极,它可接收由  $K$  发出的光电子. 图示电路中形成的通过光电管的电流,称为光电流.

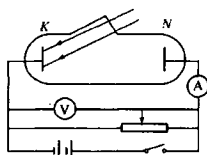


图 13-6-8

实验发现光电效应有如下规律:

(1)产生光电效应的过程非常快,一般不超过  $10^{-9}$ s,停止用光照射,光电效应也就立即停止.

(2)光电流有一个饱和值.在一定强度的人射光照射下,若逐渐增加阳极  $N$  与阴极  $K$  间的正向电压( $N$  的电势高于  $K$  的电势),电路中的光电流也随之增大,当正向电压增大至某一值后继续再增大时,光电流维持一个固定值不变,即此时光电流已达到饱和.只有增加入射光的强度,才能使光电流继续增加.单位时间里从阴极  $K$  上发射的光电子数跟入射光的强度成正比.

(3)逸出的光电子的初动能有一个最大值.光电子的最大初动能  $E_{k_{max}}$  与入射光的强度无关,只随入射光的频率增大而增大,它们之间呈线性函数关系.如果将图 13-6-8 中的电源极性反接,使光电管中出现反向电压( $K$  的电势高于  $N$  的电势),并逐渐增大这一反向电压,直至光电流刚好截止(为零),此时的反向电压  $U_{KN}$  称为反向截止电压,它与光电子的最大初动能的关系是:

$$eU_{KN} = \frac{1}{2}mv_m^2$$

(4)各种材料都有一个能产生光电效应的极限频率  $\nu_0$ ,对于任何一种金属,入射光的频率必须大于某一极限频率  $\nu_0$  才能产生光电效应.低于这个频率的光,无论其强度多大,照射时间多久,都不能产生光电效应.

#### 2. 光子说

爱因斯坦提出的光子说,较好地解释了光电效应现象.

光子说指出:空间传播的光(以及其他电磁波)都是不连续的,是一份一份的,每一份叫做一个光子.光子的能量跟它的频率成正比,即  $E = h\nu$ ,

式中  $h$  为普朗克恒量.光子也是物质,它具有质量,其质量等于  $m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$

光子也具有动量,其动量等于  $p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

根据能量守恒定律得出  $\frac{mv^2}{2} = h\nu - W$ ,

上式称为爱因斯坦光电效应方程.式中  $W$  称为材料的逸出功,表示电子从物质中逸出所需要的最小能量.某种物质产生光电效应的极限频率由逸出功决定  $\nu_0 = \frac{W}{h}$

不同物质电子的逸出功不同,所对应的极限频率也不同.

在图 13-6-9 中,图线与  $\nu$  轴的交点就是  $\nu_0$ ,将图线反向延长与  $E_{k\max}$  轴的交点对应的数值的绝对值就是  $W$ .图线的斜率表示普朗克恒量的数值,因此,图示电路还可以用来测定普朗克恒量.

#### 四、光的波粒二象性

光的本性是波动性和粒子性的统一,称为波粒二象性.

光在传播中主要表现出波动性,光在与物质相互作用时,主要表现为粒子性;单个光子的行为表现出粒子性,大量光子的行为表现出波动性;频率越高的光,粒子性越明显,频率越低的光,波动性越显著.

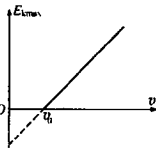


图 13-6-9

#### 【例题分析】

**例 1** 在双缝干涉装置中,双缝间距为  $0.2\text{mm}$ ,单缝位于双缝的中垂线上,屏与双缝的距离为  $1.0\text{m}$ .如果用某单色光源照射,从光屏上测得第 4 级明条纹到中央明条纹的距离为  $1\text{cm}$ .(1)求该单色光的波长;(2)如果把其中的一条缝用厚度为  $4.5\mu\text{m}$  的透明板挡住,结果发现第 4 级暗条纹移到中央明条纹的位置,则该透明板的折射率多大?

**解** (1)该单色光的波长为  $\lambda = \frac{d}{l}\Delta x = \frac{0.2 \times 10^{-3} \times 1 \times 10^{-2}}{1.0 \times 4} = 5 \times 10^{-7}(\text{m})$

(2)设透明板的折射率为  $n$ ,厚度为  $y$ ,则由于穿过透明板而增加的光程为

$$\Delta s = (n-1)y$$

依题意第 4 级暗条纹移到中央,说明穿过透明板的光线的光程增加了 4.5 个波长,

所以  $\Delta s = (n-1)y = 4.5\lambda$ ,即  $n = 1 + \frac{4.5\lambda}{y}$

**例 2** 如图 13-6-10 所示的洛埃镜镜长  $l = 7.5\text{cm}$ ,点光源  $S$  到镜面的距离  $d = 0.15\text{mm}$ ,到镜面左端的距离  $b = 4.5\text{cm}$ ,光屏  $M$  垂直于平面镜且与点光源  $S$  相距  $L = 1.$

2m. 如果光源发出波长  $\lambda = 6.0 \times 10^{-7} \text{m}$  的单色光, 讨论:  
 (1) 在光屏上什么范围内有干涉条纹? (2) 相邻的明条纹之间距离多大? (3) 在该范围内第一条暗条纹位于何处?

解 (1) 如图 13-6-10 所示, 经平面镜反射的光线好像从像点  $S'$  发出的, 该光束与光屏的相交范围  $AB$  就是干涉条纹的范围. 由图中几何关系可以得出

$$\frac{b}{L} = \frac{d}{AD}, \quad \frac{b+l}{L} = \frac{d}{BD}$$

解得  $AD = \frac{Ld}{b} = 4 \times 10^{-2} (\text{m})$

$$BD = \frac{Ld}{b+l} = 1.5 \times 10^{-2} (\text{m})$$

$$AC = AD - d = 3.85 \times 10^{-2} (\text{m})$$

$$BC = BD - d = 1.35 \times 10^{-2} (\text{m})$$

即在距离光屏与平面镜延长线交点  $C$  相距  $1.35 \sim 3.85 \text{cm}$  之间出现干涉条纹.

(2) 相邻干涉条纹之间的距离为

$$\Delta x = \frac{L}{2d} \lambda = \frac{1.2}{2 \times 1.5 \times 10^{-3}} \times 6 \times 10^{-7} = 2.4 \times 10^{-4} (\text{m})$$

(3) 由于从平面镜反射的光线出现半波损失, 暗条纹所在位置到  $S$  和  $S'$  的光程差应当满足

$$\delta = \frac{2dx}{l} + \frac{\lambda}{2} = \left( \frac{k+1}{2} \right) \lambda, \quad x = \frac{k\lambda l}{2d}$$

又因为条纹必须出现在叠加区, 从(1)的解可以知道, 第一条暗纹还应当满足

$$x \geq BC = 1.35 (\text{cm})$$

解得  $k = 6, x = 1.44 \text{cm}$ .

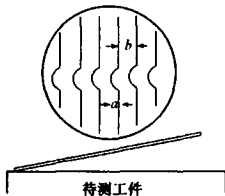


图 13-6-11

例 3 利用劈尖状空气隙的薄膜干涉可以检测精密加工工件表面质量, 并能测量

表面纹路的深度. 测量的方法是: 把待测工件放在测微显微镜的工作台上, 使待测表面向上, 在工件表面放一块具有标准光学平面的玻璃, 使其光学平面向下, 将一条细薄片垫在工件和玻璃板之间, 形成劈尖状空气隙, 如图 13-6-11 所示. 用单色平行光垂直照射到玻璃板上, 通过显微镜可以看到干涉条纹. 如果由于工件表面不平, 观测中看到如图上部所示弯曲的干涉条纹. (1) 请根据条纹的弯曲方向, 说明工件表面的纹路是凸起还是下凹; (2) 证明纹路凸起的高度 (或下凹的深度) 可以表示为:  $h = \frac{\alpha\lambda}{2b}$

式中  $\lambda$  为入射单色光的波长,  $a$ 、 $b$  的意义如图.

解 (1) 单色光在空气隙薄膜的上下表面反射, 在厚度  $x$  满足  $2x + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$

时出现明条纹, 相邻明条纹所对应的空气隙的厚度差  $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$

可见, 对应于空气隙相等厚度的地方同是明条纹, 或同是暗条纹. 因此如果工件表面十分平整, 则一定观察到平行的干涉条纹. 从图中看出, 越向右方的条纹, 所对应的空气隙厚度越大. 由于观察到的条纹向左弯曲, 说明工件表面的纹路向下凹, 才导致相应位置空气隙厚度增大.

(2) 由图中看出, 干涉条纹间距为  $b$ , 对应的空气隙厚度差为  $\frac{\lambda}{2}$ . 又因为条纹最大弯曲程度为  $a$ , 因此它所对应的纹路最大深度  $h$  应当满足  $h : a = \frac{\lambda}{2} : b$ , 所以  $h = \frac{\alpha\lambda}{2b}$

例 4 用光的干涉原理, 可以精确地测量出金属丝的直径. 测量装置如图 13-6-12 所示, 待测金属丝置于两块平晶的一端, 金属丝与平晶交界线距离为  $L$ . 测量时用波长为  $\lambda$  的单色光垂直于平晶入射, 并测量两条亮纹的间距  $l$ , 求金属丝的直径  $D$ .

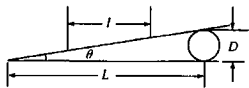


图 13-6-12

解 由薄膜干涉的结果可知, 当空气劈尖的角度很小时, 两条相邻亮纹的间距为  $l = \frac{\lambda}{2\theta}$ .

由几何关系可知角度很小时  $\frac{D}{L} = \tan\theta \approx \theta$ , 所以  $D = \theta \cdot L = \frac{L\lambda}{2l}$ . 将  $L$ ,  $\lambda$  和  $l$  的数值代入, 即可求出金属丝的直径.

因为光的干涉条纹间距可达  $10^{-4}$  m,  $L$  可达  $10^{-1}$  m, 可见光的波长的数量级为  $10^{-7}$  m, 所以用光学仪器可以很精确地测量出金属丝的直径,  $D$  可达  $10^{-4}$  m.

#### 例 5 牛顿环

牛顿环是薄膜干涉的典型例子, 在一块光平的玻璃片  $B$  上, 放一曲率半径为  $R$  的平凸透镜  $A$ , 如图 13-6-13 所示. 如果用波长为  $\lambda$  的单色光照射,  $A$  下表面某处离  $B$  上表面之间的距离为  $e$ , 那么有

$$\left. \begin{aligned} 2e + \frac{\lambda}{2} &= k\lambda & k &= 1, 2, 3 \cdots \text{亮环} \\ 2e + \frac{\lambda}{2} &= (2k+1)\frac{\lambda}{2} & k &= 0, 1, 2 \cdots \text{暗环} \end{aligned} \right\} \text{①}$$

式中加一项  $\lambda/2$  是由于光在  $B$  上表面反射时的半波损失. 从图 13-6-13 中的三角形可得  $r^2 = R^2 - (R-e)^2 = 2Re - e^2$  因为  $e \ll R$ , 因此略去  $e^2$  项  $e = r^2/2R$

$$\text{②式代入①式 } r = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}} \quad (k = 1, 2, 3 \cdots \text{亮环})$$

$$r = \sqrt{kR\lambda} \quad (k = 0, 1, 2 \cdots \text{暗环})$$

因此, 在垂直上表面的平行光照射下, 产生的干涉条纹为同心圆, 这种现象是牛顿首先发现的, 所以叫做牛顿环. 遗憾的是, 在这样典型的干涉现象面前, 牛顿却与光的波动性失之交臂, 而把这一现象仅仅看成是光粒子与物质相互作用所激发的波.

牛顿环可以用来精确地检验光学球面加工的质量.

#### 例 6 增反膜和增透膜

现代光学仪器都是由多个透镜、棱镜等光学元件组合而成的, 由于各个元件表面都存在反射和折射, 因此将大大地减少进入光学仪器的能量. 为了增加反射光或透射光的强度, 可以在光学元件表面镀一层很薄的透明介质膜. 根据光的干涉可知, 当透明介质的前后表面反射光的干涉最强时, 为增反膜; 当两个表面反射光的干涉最弱时, 为增透膜.

光学透镜为了增加透射光, 必须尽量减少反射光. 在透镜表面镀一层“增透膜”, 利用薄膜干涉, 使反射光发生削弱干涉. 如果照相机镜头所镀的增透膜的折射率为 1.38, 要求对可见光谱中心波长为  $5 \times 10^{-7} \text{m}$  的色光有最好的增透效果, 薄膜层至少要多厚?

解 如图 13-6-14 所示, 空气的折射率  $n_1 = 1.0$ , 薄膜的折射率  $n_2 = 1.38$ , 镜头是用光学玻璃制成的, 可以设其折射率  $n_3 = 1.5$ . 由于  $n_1 < n_2 < n_3$ , 所以对于反射光的光程差不需要增加  $\frac{\lambda}{2}$ , 在接近垂直入射的情况下, 光程差必

须满足  $\delta = 2n_2h = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (k = 0, 1, 2 \cdots)$

$$h = \frac{(2k+1)\lambda}{(4n_2)}$$

当取  $k=0$  时, 薄膜厚度最小, 为  $h = \frac{\lambda}{(4n_2)} = 1.0 \times 10^{-7} (\text{m})$

由于薄膜的厚度是使波长  $5.5 \times 10^{-7}$  米附近的黄绿色光增透, 所以反射光中可见光谱边缘的红色光和紫色光所占的比重增大, 因此镀有增透膜的照相机镜头呈紫红色.

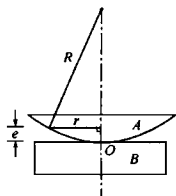


图 13-6-13

	$n_1 = 1.0$
	$n_2 = 1.38$
	$n_3 = 1.5$

图 13-6-14

## 例7 康普顿效应

当用可见光或紫外线作为光电效应的光源时,入射的光子将整个被电子吸收.但如果用 X 射线照射物质,由于它的频率高,能量大,不会被电子整个吸收,只需交出部分能量,就可以打出光电子,光子本身频率降低,波长变长.这种光电效应现象称为康普顿效应.

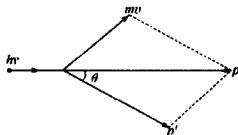


图 13-6-15

当 X 射线光子与静止的电子发生碰撞时,可以用  $p$  代表入射光子的动量,  $p'$  代表散射光子的动量,  $mv$  代表光电子的动量.则依据动量守恒定律,可以用图 13-6-15 表示三者的矢量关系.由于  $p = \frac{hv}{c}$ , 所以

$$(mv)^2 = \left(\frac{hv}{c}\right)^2 + \left(\frac{hv'}{c}\right)^2 - \frac{2h^2}{c^2} \nu\nu' \cos\theta$$

由能量守恒定律得出  $mc^2 + hv' = m_0c^2 + hv$ ,

式中  $m_0$  表示电子的静止质量,  $m$  表示运动电子的质量, 有  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

联立上述各式,并将  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  代入整理得  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$ .

## 【巩固习题】

1. 在杨氏双缝干涉装置发生下列某一种变化时,屏幕上的干涉条纹会发生什么变化(双缝用单色光源照射)?

- (1) 将双缝间距增大 1 倍;
- (2) 将光源的频率适当增大;
- (3) 将屏幕到双缝的距离增大 1 倍;
- (4) 将光源向某一侧平移一些;
- (5) 将双缝中的一条缝遮住;
- (6) 将单色光源改为白光;
- (7) 改用两个独立的同色光源分别照射一条缝.

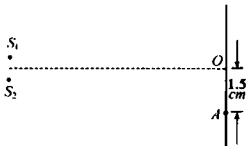


图 13-6-16

2. 如图 13-6-16 所示,两个反位相干光源  $S_1$ 、 $S_2$  发射出波长为  $5 \times 10^{-7} \text{m}$  的单色光,两个光源相距  $0.3 \text{mm}$ ,到屏幕的距离为  $6 \text{m}$ .在图示的 A 点处,出现的是亮纹还是暗纹?

3. 在半导体元件的生产中,为了测定 Si 片上的  $\text{SiO}_2$  薄膜厚度,将  $\text{SiO}_2$  薄膜磨成劈尖形状,如图 13-6-17 所示.用波长  $\lambda = 5461 \text{\AA}$  的绿光照射,已知  $\text{SiO}_2$  的折射率为 1.46, Si 的折射率为 3.42,若观察到劈尖上出现了 7 个条纹间距,问  $\text{SiO}_2$  薄膜的厚度是多少?

4. 用白光垂直照射两个相距为 0.5 毫米的双缝上, 已知缝与屏幕的距离为 1.00 米, 试求第一级彩色条纹中, 红色条纹( $\lambda = 7600 \text{ \AA}$ ) 和紫色条纹( $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ ) 间的距离。

5. 用白光垂直照射在厚度为  $4.0 \times 10^{-5} \text{ cm}$  的透明薄膜( $n = 1.50$ ) 表面上, 试问在可见光范围内, 什么波长的光在反射干涉时将加强?

6. 光学仪器中使用的是涂膜镜头, 若薄膜的折射率  $n = 4/3$ , 小于玻璃的折射率, 在入射光包含波长  $\lambda_1 = 7 \times 10^{-7} \text{ m}$  和  $\lambda_2 = 4.2 \times 10^{-7} \text{ m}$  两种成分的情况下, 为使两种波长的反射光被最大限度减弱, 试求这种薄膜的厚度。

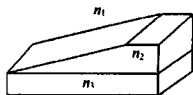


图 13-6-17

7. 干涉膨胀仪结构示意图如图 13-6-18 所示。AB, CD 是玻璃平板, MN 是膨胀系数极小的石英圆环。W 是被测样品, 当  $0^\circ\text{C}$  时其高度为  $h$ , 它的上表面与平板 AB 之间形成一劈尖状空气隙。以波长为  $\lambda$  的单色光垂直照射可以观察到平行的干涉条纹。如果让样品的温度逐渐升高(此时石英圆环的高度可以认为是不变的), 并在升温的过程中观察干涉条纹的变化。假定在温度上升到  $t^\circ\text{C}$  的过程中, 观察到移过某一点的干涉条纹数为  $n$ 。试证明, 被测样

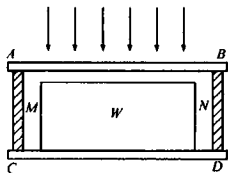


图 13-6-18

品的线胀系数为  $\alpha = \frac{n\lambda}{(2ht)}$

8. 平凸透镜的曲率半径为  $1 \text{ m}$ , 凸面向下放在平板玻璃上, 用波长为  $6 \times 10^{-7} \text{ m}$  的单色光垂直照射形成牛顿环, 从上方观察到第 10 条暗纹的空气隙的厚度为 \_\_\_\_\_ mm, 暗纹(圆环)的半径为 \_\_\_\_\_ mm。

9. 某激光器可以发射波长为  $6.0 \times 10^{-7} \text{ m}$  的平行激光脉冲。假定每一个脉冲的持续时间为  $0.1 \text{ ms}$ , 具有的总能量为  $0.3 \text{ J}$ , 光束的截面直径为  $5 \text{ mm}$ , 在真空中传播。(1) 每一个脉冲中所包含的光子数是多少? (2) 每一个脉冲单位体积内的能量多大? (3) 将脉冲垂直入射到黑屏(假定它对激光完全吸收)上, 脉冲对屏产生的压强多大?

10. 在光电效应实验中, 用波长为  $\lambda_1$  ( $\lambda_2 < \lambda_1$ ) 的单色光照射光电管时, 测得反向截止电压为  $U_1$ , 改用波长为  $\lambda_2$  的单色光照射光电管时, 测得反向截止电压为  $U_2$ , 则该光电管阴极材料的逸出功为 \_\_\_\_\_ (电子电量为  $e$ )。

11. 用波长为  $0.710 \times 10^{-10} \text{ m}$  的射线照射金箔, 使金箔发射光电子, 打出的电子在磁感应强度为  $B$  的磁场中作半径为  $R$  的圆运动, 实验测得  $BR = 1.88 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}$ , 试求: (1) 光电子的最大速度; (2) 从金箔打出电子所需做的功。

## 第七节 综合训练

## 【例题分析】

**例 1** 如图 13-7-1 所示,长方形台球桌的四条光滑边框分别为  $a, b, c, d$ , 在光滑桌面上有两个球  $A$  和  $B$ , 如果要使  $A$  球依次和  $a, b, c, d$  四条边框各发生一次弹性碰撞后恰好击中  $B$  球, 问  $A$  球在边框  $a$  上的入射点应为何处?

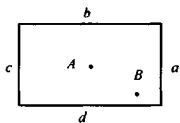


图 13-7-1

**分析** 台球与边框间的碰撞是弹性碰撞, 根据弹性碰撞中的动量守恒和机械能守恒的条件, 可得球的运动轨迹与光线在平面镜上的反射轨迹是相同的. 由此, 球在某一边框上的反射轨迹, 若在以此边框为平面镜的“镜像”中来看, 则此轨迹的像是沿着原来前进方向的直线前进的. 这样, 设球依次与  $a, b, c, d$  四边框各相碰一次, 则我们可将原图依次以  $a, b, c, d$  为假想的平面镜而各作出其对应的镜像, 则在最后所得到的镜像中, 球的运动轨迹的像是一条直线.

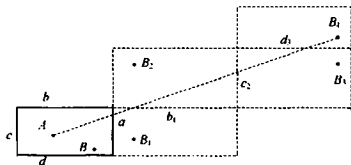


图 13-7-2

**解** 依次作出台球桌面关于  $a$  边的对称像, 以像 1 称之; 再作此像关于  $b$  边的对称像, 以像 2 称之; 再作像 2 关于  $c$  边的对称像, 以像 3 称之; 最后作像 3 关于  $d$  边的对称像, 以像 4 称之. 如图 13-7-2, 其中  $b_1$  为  $b$  边在像 1 中的像,  $c_2$  为  $c$  边在像 2 中的像,  $d_3$  为  $d$  边在像 3 中的像,  $B_4$  为  $B$  点在像 4 中的像. 连接  $AB_4$ , 若  $AB_4$  依次与  $a, b_1, c_2, d_3$  相交, 则直线  $AB_4$  与边框  $a$  的交点就是所求的入射点; 若  $AB_4$  不能与  $a, b_1, c_2, d_3$  依次相交, 则此题无解.

**例 2** 通常的平面镜有两个反射面, 一个是玻璃表面, 其反射率较低; 另一个是背面的镀银层, 有很高的反射率, 通常照镜子都是靠镀银层反射成的像. 在一定的条件下能够看到两个反射面成的像(其中一个亮度很低). 若人离镜子距离为  $l$ , 玻璃折射率为  $n$ , 厚度为  $d$ , 求两个像间的距离.



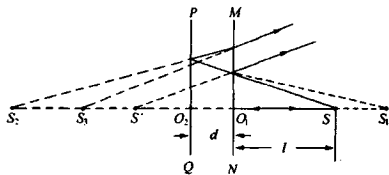


图 13-7-3

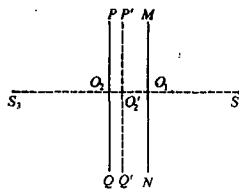


图 13-7-4

解 设图 13-7-3 中  $S$  表示物点,  $S'$  是经  $MN$  反射的像, 则  $O_1S' = O_1S = l$

若  $S_1, S_2, S_3$  依次表示  $MN$  面折射,  $PQ$  面反射和  $MN$  面再折射所成的像, 依“近轴成像”的规律, 有

$$\frac{O_1S_1}{O_1S} = \frac{n}{1} \quad (1)$$

$$O_2S_2 = O_2S_1 = O_1S_1 + d \quad (2)$$

$$\frac{O_1S_3}{O_1S_2} = \frac{O_1S_3}{O_2S_2 + d} = \frac{1}{n} \quad (3)$$

联立①, ②, ③解得  $O_1S_3 = l + \frac{2d}{n}$

两像间距  $\delta = O_1S_3 - O_1S' = \frac{2d}{n}$

本题求  $O_1S_3$  还有另一种方法.

如图 13-7-4 所示, 设  $P'Q'$  是反射面  $PQ$  经  $MN$  折射所成的像, 则

$$\frac{O'_2O_1}{O_2O_1} = \frac{1}{n}, O'_2O_1 = \frac{1}{n}d$$

$S_3$  就是  $S$  经  $P'Q'$  所成的像, 因此有  $O'_2S_3 = O'_2S = \frac{1}{n}d + l$

$$O_1S_3 = O'_2S_3 + O_1O'_2 = \frac{2}{n}d + l$$

**例 3** 半径均为  $R$  的凹凸两个面镜, 顶点  $O_1O_2$  相距  $2R$ , 在两镜间放一点光源, 如图 13-7-5 所示, (1) 若点光源发出的光经凸面镜反射, 再经凹面镜反射成像在光源处, 则光源应在什么地方? (2) 若点光源发出的光经凹面镜反射再经凸面镜反射, 成像在何处?

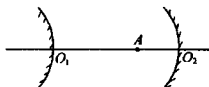


图 13-7-5

解 (1) 设点光源离  $O_2$  为  $x$ , 则对凸面镜的物距  $u = 2R - x$ , 焦距  $f = -R/2$ , 由面镜成像公式得  $\frac{1}{2R-x} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} = -\frac{2}{R}$

设像为凹面镜的物,  $u' = 2R - v$ ,  $v' = x$ ,  $f' = R/2$ , 即  $\frac{1}{2R-v} + \frac{1}{x} = \frac{2}{R}$

解联立方程得  $x = 0.28R$ .

(2) 由光路可逆, 在(1)中最后像可看作(2)中的物, 而(1)中的物(点光源)可看作(2)中最后的像, 所以经凹面镜反射再经凸面镜反射将成像在光源处.

**例 4** 有一薄平凸透镜, 凸面曲率半径  $R = 30$  厘米, 已知在利用近轴光线成像时: (A) 若将此透镜的平面镀银, 其作用等同于一个焦距是 30 厘米的凹面镜; (B) 若将此透镜的凸面镀银, 其作用也等同于一个凹面镜. 求在(B)情况下的等效凹面镜的焦距.

**分析** 特殊光线(特例的一种)不仅在作图问题中十分有用, 而且在计算题中也大有作为, 本题要简便求解, 关键之处即在于是否能恰当使用特殊光线.

**解** 根据凹面镜成像特点, 当物点置于等效曲率中心  $C_A$  处时, 任一近轴光线经凸镜折射  $\rightarrow$  平面反射  $\rightarrow$  沿原路返回  $C_A$  点, 物、像重合, 从而可知光线在透镜内的方向必垂直于平面, 即平行于主光轴, 光路如图 13-7-6. 根据近轴条件下的折射定律和几何关系有

$$i = ni' \quad \text{和} \quad i = r + i'$$

$$\text{且} \quad h = 60r + 30i'$$

$$\text{解得} \quad n = 1.5$$

在(B)的情形下, 若凸面镀银, 按上面的思路, 可作出光路如图 13-7-7 所示, 即通过凸面上任一点  $A$  作一垂直于球面指向曲率中心  $C$  的光线, 此光线经平面折射后交主光轴于  $C_B$ , 令  $C_B O = r$ , 根据近轴条件下的折射定律和图中几何关系有

$$ni = i'$$

$$i = h/R, \quad i' = h'/r$$

对于薄透镜可认为  $h = h'$ , 这样得

$$r = R/n = 20(\text{cm})$$

根据光路可逆性, 图 13-7-7 中由  $C_B$  发出的光线经平面折射  $\rightarrow$  球面反射  $\rightarrow$  沿原路返回  $C_B$ , 物、像重合. 因此  $C_B$  是等效凹面镜的曲率中心, 故等效凹面镜的焦距为

$$f = r/2 = 10(\text{cm})$$

**例 5** 如图 13-7-8 所示, 一束会聚同心光束穿过遮光板的圆孔投射到与遮光板平行的光屏上, 形成一个亮圆. 已知会聚光束的中轴线与遮光板垂直且穿过圆孔的中心, 遮光板与光屏间距离  $l = 10\text{cm}$ , 孔的直径  $D = 6\text{cm}$ , 亮圆直径  $d = 2\text{cm}$ . 若在孔中嵌入大小

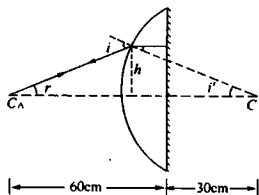


图 13-7-6

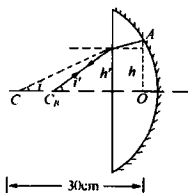


图 13-7-7

与孔相同的透镜,结果光屏上亮圆的直径变为  $d' = 4\text{cm}$ .

求透镜的焦距.

解 如图 13-7-9,同心会聚光束的交点  $S$  为虚物点.经透镜折射后要使亮圆直径变为  $d'$  有两种可能,所成的实像点分别为  $S_1$  和  $S_2$ .

从图中的几何关系可得出物距  $u$ ,实像距  $v_1$  和  $v_2$ ,

步骤如下  $\frac{|u| - l}{|u|} = \frac{d}{D}$

求得  $|u| = 15\text{cm}$ ,  $u = -15\text{cm}$ .

$$\frac{v_1 - l}{v_1} = \frac{d'}{D}, \frac{v_2}{l - v_2} = \frac{d'}{D}$$

求得  $v_1 = 30\text{cm}$ ,  $v_2 = 6\text{cm}$ .

将上述数据代入透镜公式

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$$

求得  $f_1 = -30\text{cm}$ , 为凹透镜;  $f_2 = 10\text{cm}$ ,

为凸透镜.

例 6 想用两个凸透镜,最后在物体所在处形成一个与物体大小相等的倒立虚像.已知靠近物体的那个透镜的焦距为  $f_1$ ,物体与此透镜的距离为  $u_1$ .试求第二个透镜的焦距  $f_2$  及两个透镜之间的距离  $L$ .

解 根据凸透镜的成像规律,如果第一次所成的像为虚像,此虚像必为放大正立的.若再经第二次成虚像,还要进一步放大,显然与题意不符.如果第一次成放大的实像,此像作为第二次成像的物,再成虚像,还要继续放大,仍不符合题意.因此,物体经第一个透镜后必须成缩小倒立的实像,如图 13-7-10 所示.

由透镜的成像公式,可得第一次成像的像距和放大率分别为

$$v_1 = \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1} \quad \text{和} \quad m_1 = \frac{v_1}{u_1} = \frac{f_1}{u_1 - f_1}$$

第二次成像的物距为  $u_2 = L - v_1 = L - \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1}$ , 像距为  $v_2 = -(u_1 + L)$ , 故放大率

$$\text{为 } m_2 = \frac{|v_2|}{u_2} = \frac{u_1 + L}{L - \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1}}$$

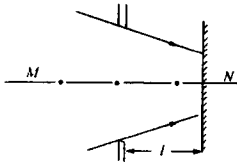


图 13-7-8

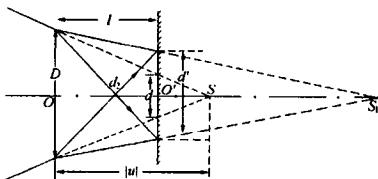


图 13-7-9

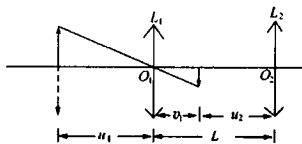


图 13-7-10

依题意需有  $m_1 \cdot m_2 = 1$ , 即  $\frac{f_1}{u_1 - f_1} \cdot \frac{u_1 + L}{L - \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1}} = 1$ . 故  $L = \frac{2f_1 u_1}{u_1 - 2f_1}$

又  $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{L - \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1}} - \frac{1}{u_1 + L}$ , 因此  $f_2 = \left(\frac{u_1}{u_1 - 2f_1}\right)^2 f_1$ .

**例 7** 用凸透镜和平面镜辅助, 可以测凹透镜的焦距. 方法是: 如图 13-7-11 所示, 先让点光源  $P$  经凸透镜成像于  $P'$  点, 测得像距为  $v$ . 在凸透镜和  $P'$  点之间安放待测凹透镜, 使它与凸透镜共主轴, 并在凹透镜右侧, 垂直于主光轴放一平面镜, 然后移动凹透镜到一个合适的位置, 使光源  $P$  通过整个光学系统所成的像恰在  $P$  处重合. 这时测得两透镜之间的距离为  $s$ . (1) 画出成像光路图; (2) 求凹透镜的焦距.

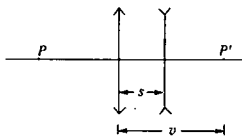


图 13-7-11

**解** 由于凹透镜置于凸透镜与像点  $P'$  之间, 它将把经凸透镜射来的会聚光束发散. 若利用公式计算,  $P'$  为凹透镜成像的虚物, 物距应取负值, 即  $u_2 = -(v-s)$ , 但本题缺乏进一步计算的条件. 由于题目要求最后的像点与物点  $P$  重合, 所以可由可逆光路来考虑. 这时可能出现下面两种情况.

(1) 平面镜置于  $P'$  点的左侧, 那么经凹透镜射出的光, 只有为平行光, 才能形成可逆光路, 如图 13-7-12 所示.  $P'$  点为凹透镜的焦点, 其焦距  $f = -(v-s)$ .

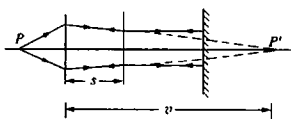


图 13-7-12

(2) 平面镜置于  $P'$  点的右侧, 则构成可逆光路的可能性有二, 分别如图 13-7-13(a), (b) 所示.

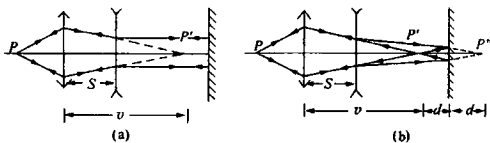


图 13-7-13

在图(a)中,  $P'$  仍是凹透镜的焦点, 其焦距为  $f = -(v-s)$ .

在图(b)中,  $P'$  是凹透镜的虚物,  $P''$  是它所成实像的位置. 对平面镜,  $P''$  是它的虚物,  $P'$  是平面镜所成实像的位置. 因此  $P'$  与  $P''$  关于平面镜对称. 若  $P'$  及  $P''$  到平面镜的距离都是  $d$ , 那么凹透镜成像的物距  $u_2$  和像距  $v_2$  分别为  $u_2 = -(v-s)$  和  $v_2 = v-s +$

$2d$ , 由成像公式可得  $f = \frac{u_2 v_2}{u_2 + v_2} = \frac{-(v-s+2d)(v-s)}{2d}$ . 如果是这种情况, 则需要测出  $d$ , 再通过上式算出  $f$ .

**例 8** 一点光源以  $V = 0.2 \text{ m/s}$  的速度沿着焦距  $f = 20 \text{ cm}$  的凸透镜主轴朝向光心运动, 当它经过距光心  $u_1 = 30 \text{ cm}$  和  $u_2 = 15 \text{ cm}$  的两点时, 求像所在的位置及速度.

**解** 本题练习用牛顿公式解答.

依题意  $x_1 = u_1 - f = 10 \text{ cm}$ ,  $x_2 = u_2 - f = -5 \text{ cm}$ . 代入牛顿公式  $f^2 = xx'$ , 得

$$x'_1 = \frac{f^2}{x_1} = \frac{20^2}{10} = 40 \text{ cm}, x'_2 = \frac{f^2}{x_2} = \frac{20^2}{-5} = -80 \text{ cm}$$

$$v_1 = x'_1 + f = 60 \text{ cm}, v_2 = x'_2 + f = -60 \text{ cm}$$

上述  $x_1, x_2, x'_1, x'_2$  的意义如图 13-7-14 所示.

为了求得像点的移动速度, 设在  $\Delta t$  时间内, 点光源的位移为  $\Delta x$ , 像点的位移为  $\Delta x'$ , 则有

$$x' + \Delta x' = \frac{f^2}{x - \Delta x} = \frac{f^2(x + \Delta x)}{x^2 - \Delta x^2}$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $\Delta x \rightarrow 0$ , 略去  $\Delta x$  的二阶小量, 则有

$$x' + \Delta x' = \frac{f^2}{x} + \frac{f^2 \Delta x}{x^2} = x' + \frac{f^2 \Delta x}{x^2}$$

$$\Delta x' = \frac{f^2 \Delta x}{x^2} = \frac{f^2}{x} \cdot \Delta x$$

$$V' = \frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{x'}{x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x'}{x} V$$

将  $x_1, x_2, x'_1, x'_2$  的值代入, 求得  $V'_1 = 0.8 \text{ m/s}$ ,  $V'_2 = 3.2 \text{ m/s}$ .

像移动方向与物移动方向相同.

**说明** 有的同学认为  $v_1 = 2u_1$ , 所以  $V'_1 = 2V_1$ ,  $|v_2| = 2u_2$ , 则  $V'_2 = 2V_2$ . 这种求法对于光点沿垂直于主轴方向的运动是正确的, 但对于沿主轴方向的运动则是错误的.

**例 9** 将焦距  $f = 50 \text{ cm}$  的凸透镜对切, 再将每边切口磨去  $a$  ( $a \ll f$ ) 后粘合, 而后在粘合透镜中央对称轴线上放置波长为  $\lambda = 6.0 \times 10^{-7} \text{ m}$  的点光源, 在透镜的另一侧放置垂直于对称轴线的屏来观察干涉条纹. 已知观察到的条纹间距  $\Delta x = 0.5 \text{ mm}$ , 而且当沿对称轴线移动光屏时, 条纹间距不变, 那么点光源应当放置何处? 每边切口被磨去  $a$  为多少?

**解** 粘合的透镜相当于两个透镜, 它们的焦距相等, 但主轴分别在对称轴线的上、下, 与轴线的距离均为  $a$ , 如图 13-7-15 所示. 设点光源在对称轴线上距离透镜为  $u$ . 当  $u > f$  或  $u < f$  时, 点光源都会通过透镜分别在对称轴线两侧对称位置得到两个像(同为

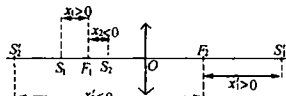


图 13-7-14

实像或同为虚像),它们就相当于相干光源.若以光屏接收,则可以得到明暗相间的干涉条纹.此时如果移动光屏,由于光屏到光源的距离发生变化,依据双缝干涉条件,干涉条纹间距也会发生变化,这与题给条件不符.

如果  $u = f$ ,则点光源经粘合透镜折射后形成两束平行光,如图 13-7-16 所示.这两束光在叠加区内发生干涉,其干涉条纹间距是不会随着光屏与透镜之间的距离而变化的,因此符合题给条件.

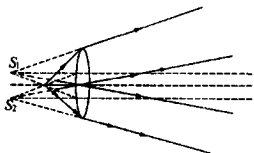


图 13-7-15

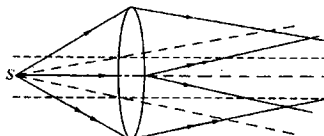


图 13-7-16

设图 13-7-16 中两平行光束的夹角为  $2\theta$ ,由图中几何关系不难得出  $\tan\theta = \frac{a}{f}$

如要用图 13-7-17 来表示两束平行光某一时刻叠加的情况,图中两个箭头分别表示两束光的传播方向,与光束传播方向垂直的实线和虚线分别表示波峰与波谷,则两个相邻的波峰(或波谷)之间的距离就是一个波长(图中波长被夸大了).该时刻实线与实线以及虚线与虚线的交点即为干涉的加强点,实线与虚线的交点即为干涉的减弱点.考虑到光束在不断向前传播,加强点和减弱点分别连接成相间的、而且与中央对称轴线平行的干涉条纹.可见图中叠加区内每一个小菱形的长对角线(如图 13-7-18 中的 AC 所示)的长度,就是相邻明条纹的间距  $\Delta x$ .在图 13-7-18 中,  $AC = \Delta x$ ,  $AE = \frac{\lambda}{2}$ ,从图中

几何关系得出  $\Delta x = AC = \frac{AE}{\sin\theta} = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$

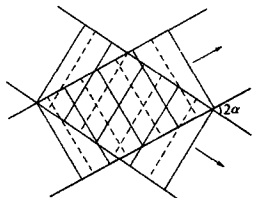


图 13-7-17

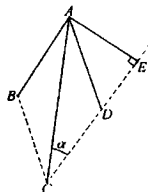


图 13-7-18

由题给条件  $a \ll f$  可以得到近似关系

$$\sin\theta = \tan\theta = \frac{a}{f}$$

$$\text{代入上式得到 } a = \frac{\lambda f}{(2\Delta x)} = \frac{6.0 \times 10^{-7} \times 0.5}{(2 \times 0.5 \times 10^{-3})} (\text{m}) = 0.3 (\text{mm})$$

### 【精选习题】

1. 如图 13-7-19 所示光学系统, 光点  $S$  发出的光经棱镜偏折, 然后被焦距为  $f$  的薄透镜聚焦, 棱镜的折射率为  $n$ , 顶角  $\alpha$  极小 (即  $\sin\alpha = \alpha$ ). (1) 求近于正入射的光线的偏向角; (2) 求  $S$  所成像的位置.

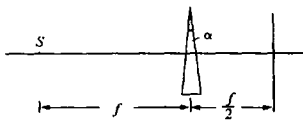


图 13-7-19

2. 如图 13-7-20 所示, 外形一样, 折射率均为  $n$  的两个薄平凸透镜, 一个透镜的平面镀银, 另一个的凸面镀银. 如果光线从未镀银的一面入射, 它们的焦距之比为多少?

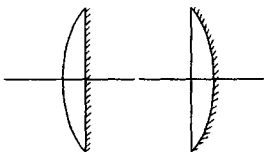


图 13-7-20

3. 凸透镜的直径 5cm, 焦距为 20cm, 点光源  $S$  位于该透镜的主轴上且与透镜相距 30cm, 在透镜的另一侧有一与主轴垂直的光屏, 移动光屏得到光点的清晰的像后固定光屏. 若在  $S$  与透镜间插入一块厚 36cm 的玻璃砖, 这时屏上得到一个直径为 1cm 的亮圆. 求插入的玻璃砖的折射率.

4. 在水平放置的凹面镜中盛少许水, 其折射率为  $\frac{4}{3}$ , 深度不计, 如图 13-7-21 所示. 一物点  $P$  置于凹镜正上方主轴上, 在与镜相距 54cm 和 36cm 处可分别得到实像, 求: (1) 凹镜球面的曲率半径  $r$  及物点与镜的距离  $u$ ; (2) 如在凹镜内注满水 (水深为 2cm), 将  $P$  点沿主轴上下移动到某处时, 它的实像和物点恰好重合, 则此时  $P$  点离水面高度是多少?

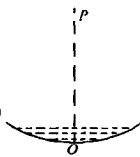


图 13-7-21

### 问题与讨论 费马原理的应用

1657 年数学家费马提出: 光沿着所需时间为极值的路径传播.

设光在 1, 2, ...,  $k$  等均匀介质中传播, 传播路径依次为  $s_1, s_2, \dots, s_k$ , 光传播的总时间为

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \dots + \frac{s_k}{v_k} = \sum_{i=1}^k \frac{s_i}{v_i}$$

由于  $v = \frac{c}{n}$ , 所以  $t = \sum_{i=1}^k \frac{n_i s_i}{c}$ . 其中乘积  $n_i s_i$  称为光在第  $i$  个介质中的光程, 在数值上等于光以真空中的速度在时间  $t$  内所能走的路程的长度. 运用光程概念, 费马定理也可以表述为: 光沿着光程为极值的路径传播.

可以认为费马定理是光学基本定律的推论, 亦可认为后者是前者的必然结果.

如图 13-8-1 中  $AOB$  是光在两种介质折射的光路, 我们可以证明光沿该路径传播所需的时间最短. 为此只要证明光沿其他任意路径传播时, 所需时间都比该路径长.

设任意路径  $AEB$ , 过点  $E$  作  $AO$ 、 $BO$  的平行线  $CE$ 、 $DE$  以及  $AO$  的垂线  $EF$ , 过点  $O$  作  $DE$  的垂线  $OH$ , 过点  $A$  和  $B$  分别作  $CE$  和  $ED$  的垂线  $AC$  和  $BD$ . 由数学知识可得  $\angle OEF = i_1$ ,  $\angle EOH = i_2$ . 因此,  $\frac{OF}{EH} = \frac{\sin \angle OEF}{\sin \angle EOH} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$ . 所以光在  $OF$  段和  $EH$  段的传播时间相等.

因为  $AF = CE$ ,  $OB = HD$ . 光沿  $AOB$  路径传播所需的时间跟光沿  $CED$  传播所需的时间相等.

由于  $CE < AE$ ,  $ED < EB$ , 光沿  $CED$  路径传播的时间比沿  $AEB$  路径的时间短, 即光沿  $AOB$  路径传播的时间比沿  $AEB$  路径的时间短.

光经平面镜反射的时间极短, 同学们可以自己证明.

费马定理还可以用来解决一些运动学问题.

**例 1** 图 13-8-2 中  $AC$  是东西走向的马车道, 它的北面是一片砂砾地带, 人在上面疾行速度也只有 6 千米/小时, 而车道上马车速度为 10km/h. 已知  $BD = 12\text{km}$ ,  $AD = 16\text{km}$ . 则一人要从  $A$  地走到  $B$  地所需要的最短时间是多少?

**解** 本题是运动求极值的问题, 但用类比法把  $AC$  看成两种介质的分界面, 沿  $AC$  方向运动就是入射角为  $90^\circ$ , 当按光的折射定律运动时, 所用时间最短.

如图 13-8-3, 设  $AEB$  为所求的路径, 则

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \angle BEF} = \frac{v_1}{v_2}$$

式中  $v_1 = 10\text{km/h}$ ,  $v_2 = 6\text{km/h}$  分别为马车和步行的速度, 由式可得  $\sin \angle BEF = \frac{v_2}{v_1} = 0.6$

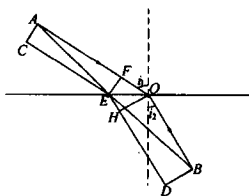


图 13-8-1

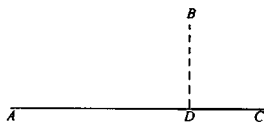


图 13-8-2



$$\tan \angle BEF = 0.75$$

因此  $DE = 0.75 BD = 9.0 \text{ (km)}$ ,  $AE = AD - DE = 7 \text{ (km)}$ ,  $BE = 1.25 BD = 15 \text{ (km)}$ .

$$t = \frac{AE}{v_1} + \frac{BE}{v_2} = 3.2 \text{ (h)}$$

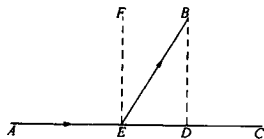


图 13-8-3

## 第十四章 原子物理

### 第一节 原子结构



#### 【知识要点】

#### 一、原子的核式结构

人们认识原子有复杂结构是从 1897 年汤姆生发现电子开始的. 汤姆生通过研究对阴极射线的分析发现了电子, 从而知道, 电子是原子的组成部分, 为了保持原子的电中性, 除了带负电的电子外, 还必须要有等量的正电荷. 因此汤姆生提出了“葡萄干面包”模型: 正电荷部分连续分布于整个原子, 电子镶在其中.

1909 年卢瑟福在  $\alpha$  粒子散射实验中, 以  $\alpha$  粒子轰击重金属箔发现: 大多数  $\alpha$  粒子穿过薄膜后的散射角很小, 但还有  $\frac{1}{8000}$  的  $\alpha$  粒子, 散射角超过了  $90^\circ$ , 有些甚至被弹回来, 散射角几乎达到  $180^\circ$ . 1911 年卢瑟福提出了原子核式结构模型: 在原子的中心有一个很小的核称为原子核, 原子的全部正电荷和几乎全部质量都集中在原子核里, 带负电的电子在核外空间绕核高速旋转. 从  $\alpha$  粒子散射实验的数据可以估计出原子核的大小约为  $10^{-15} \sim 10^{-14} \text{m}$ , 原子半径大约为  $10^{-10} \text{m}$ . 原子核式结构模型较好地解释了  $\alpha$  粒子散射实验现象, 也说明了汤姆生的“葡萄干面包”模型是错误的.

#### 二、玻尔的氢原子理论

##### 1. 巴耳末公式

1885 年, 瑞士物理学家巴耳末首先发现氢原子光谱中可见光区的四条谱线的波长, 可用一经验公式来表示:  $\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$  ( $n = 3, 4, 5 \dots$ ),

式中  $\lambda$  为波长,  $R = 1.0967758 \times 10^7 \text{m}^{-1}$  称为里德伯恒量, 上式称为巴耳末公式.

##### 2. 里德伯公式

1889 年, 里德伯发现氢原子光谱的所有谱线波长可用一个普通的经验公式表示出

$$\text{来: } \frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

式中  $n = m + 1, m + 2, m + 3 \dots$ , 上式称为里德伯公式. 对于每一个  $m$ , 上式可构成一个

光谱系:  $m = 1, n = 2, 3, 4 \dots$  赖曼系 (紫外区)

$m = 2, n = 3, 4, 5 \dots$  巴尔末系 (可见光区)

$m = 3, n = 4, 5, 6 \dots$  帕邢系 (红外区)

$m = 4, n = 5, 6, 7 \dots$  布喇开系 (远红外区)

### 3. 玻尔的氢原子理论

卢瑟福的原子核式结构模型能成功地解释  $\alpha$  粒子散射实验, 但无法解释原子的稳定性和原子光谱是明线光谱等问题. 为此, 1913 年玻尔提出了开创性的三个假设:

(1) 定态假设: 原子只能处于一系列不连续的能量状态中, 在这些状态中原子是稳定, 电子虽然绕原子核做圆周运动, 但并不向外辐射能量, 这些状态叫定态.

(2) 跃迁假设: 电子从一个定态轨道跃迁到另一个定态轨道上时, 会辐射或吸收一定频率的光子, 能量由这两种定态的能量差来决定, 即  $h\nu = |E_{\text{初}} - E_{\text{末}}|$

(3) 角动量量子化假设: 电子绕核运动, 其轨道半径不是任意的, 只有电子的轨道角动量 (轨道半径  $r$  和电子动量  $mv$  的乘积) 满足下列条件的轨道才是可能的:

$$mv_n r_n = n \cdot \frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

式中的  $n$  是正整数, 称为量子数.

### 4. 玻尔理论在氢原子中的应用

#### (1) 氢原子核外电子轨道的半径

设电子处于第  $n$  条轨道, 轨道半径为  $r$ , 根据玻尔理论的角动量量子化假设得

$$mv_n r_n = n \cdot \frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad \text{①}$$

电子绕原子核作圆周运动时, 由电子和原子核之间的库仑力来提供向心力, 所以有

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n^2} \quad \text{②}$$

由①、②式可得  $r_n = \frac{\epsilon_0 h^2 n^2}{\pi m e^2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$

当  $n = 1$  时, 第一条轨道的半径为  $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 5.3 \times 10^{-11} \text{ (m)}$ , 其他可能的轨道半径为  $r_n = r_1, 4r_1, 9r_1, 16r_1, 25r_1 \dots$

#### (2) 氢原子的能级

当电子在第  $n$  条轨道上运动时, 原子系统的总能量  $E$  叫做第  $n$  条轨道的能级, 其数值等于电子绕核转动时的动能和电子与原子核的电势能的代数和

$$E_n = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \quad (3)$$

$$\text{由(2)式得 } \frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} \quad (4)$$

$$\text{将(4)式代入(3)式得 } E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} \quad (5)$$

这就是氢原子的能级公式。

当  $n=1$  时,第一条轨道的能级为  $E_1 = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -13.6\text{eV}$ 。其他可能轨道的能级

$$\text{为 } E_n = \frac{E_1}{n^2} = -\frac{13.6}{n^2} \text{eV} \quad (n=2,3,4,\dots)$$

由轨道的半径表达式可以看出,量子数  $n$  越大,轨道的半径越大,能级越高。 $n=1$  时能级最低,这时原子所处的状态称为基态, $n=2,3,4,5,\dots$  时原子所处的状态称为激发态。

### (3) 玻尔理论对氢光谱的解释

由玻尔理论可知,氢原子中的电子从较高能级(设其量子数为  $n$ )向较低能级(设其

量子数为  $m$ )跃迁时,它向外辐射的光子能量为  $h\nu = E_n - E_m = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$

辐射的光子频率为  $\nu = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$

将上式改写为  $\frac{\nu}{c} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{\lambda}$

将上式和里德伯公式作比较得  $R = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 1.097373 \times 10^7 \text{m}^{-1}$ 。

这个数据和实验所得的数据  $1.0967758 \times 10^7 \text{m}^{-1}$  基本一致。因此用玻尔理论能较好地解释氢原子的光谱规律,包括氢光谱的各种线系。例如:赖曼系、巴尔末系、帕邢系、布喇开系等的规律。当然,玻尔理论也有局限性,它在解释两个以上电子的比较复杂原子光谱时遇到困难。后来诞生了量子理论——量子力学,在量子力学中,玻尔理论中的电子轨道,只不过是电子出现机会最多的地方。

### 三、原子的受激辐射——激光

原子辐射有两种情形:(1)自发辐射:处于激发态  $E_2$  的原子,由于不稳定自发地跃迁到低能的  $E_1$  上,同时辐射光子。光子的能量为  $h\nu = E_2 - E_1$ ,普通的光源发光就属于这种辐射。它辐射的光子彼此能独立,发射的方向和初相位都不相同,所以我们可以从各个方向看到它发出的光。(2)受激辐射:当原子处于激发态  $E_2$  时恰好有能量为  $h\nu = E_2 - E_1$  的光子趋近它,原子就可能受到此外来光子的激励而跃迁到低能态  $E_1$  上,同时发射出一个和外来光子完全一样的光子。

激光就是由受激辐射产生的,一个入射光子由于引起受激辐射可以得到两个同样

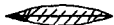
的光子,如果这两个光子在媒质中传播时再引起其他原子发生受激辐射,就会产生越来越多的相同的光子,使光得到加强,这就是激光,激光具有高单色性、高相干性、高亮度、而且方向性好。

### 【巩固习题】

1. 动能为  $E_0 = 0.1 \text{ MeV}$  的质子在  ${}^4_2\text{He}$  核上散射,散射角(指出射方向与入射方向间的夹角)  $\theta = 90^\circ$ ,求散射后质子和  $\alpha$  粒子的动能各多大?

2. 一个动能为  $0.1$  兆电子伏的质子与一个静止的氦 4 核发生正面碰撞,则它们间的最小距离多大?

3. 一根两端固定的弦线在被激起振动之后,如果频率符合一定的条件,则会出现驻波,其振动的样子如图 14-1-1 所示. 根据波长和弦长的



关系可出现不同形式,但都满足  $n \cdot \frac{\lambda}{2} = L$  这一条件,其中  $\lambda$  是波长,  $L$  是弦长,  $n$  为正整数.

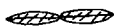


图 14-1-1

如果把电子封闭在相距为  $a$  的平行板之间往复碰撞,且除碰撞外无

其他力的作用. 由于电子也具有波动性,其波长  $\lambda = \frac{h}{mv}$ ,如果符合适当条件,它在平行板间也可形成驻波. 按照量子力学的观点,只有能在两板间形成驻波的电子的能量状态才是可以存在的,因此在两平行板间往复碰撞的电子的能量也是“量子化”的. 如果平行板间距为  $a$ ,电子质量为  $m$ ,试求:(1)在平行板间往复运动电子的基态能量;(2)在该平行板间运动的电子从第 1 激发态跃迁到基态时所释放出的光子的质量(不考虑电子的相对论效应).

4. 氢原子基态电子能量为  $-13.6 \text{ eV}$ ,普朗克恒量  $h = 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$ . 求:(1)基态氢原子的电离能;(2)氢原子在发出  $\lambda_1 = 4.87 \times 10^{-7} \text{ m}$  和  $\lambda_2 = 1.03 \times 10^{-7} \text{ m}$  的光子时,氢原子分别实现哪两个能级之间的跃迁?

5. 一个原来静止的原子,质量为  $M$ ,当它由高能级  $E_2$  跃迁到低能级  $E_1$  时放出一个光子,试就下列两种情况求此光子的波长.(1)不考虑原子的反冲;(2)考虑原子的反冲.

## 第二节 原子核

### 【知识要点】

#### 一、放射性元素的衰变

一些不稳定的原子核会自发地转变成另一种原子核同时放出射线,通常有  $\alpha$  射线、

$\beta$ 射线和 $\gamma$ 射线。 $\alpha$ 射线是氦原子核组成的粒子流， $\beta$ 射线是高速的电子流， $\gamma$ 射线是波长很短的电磁波。原子核由于放出某种粒子而转变成新核的过程叫衰变。

原子核是一个量子体系，核衰变是原子核自发产生的变化，是一个量子跃迁的过程，它服从量子力学的统计规律。对任何一个放射性元素，它发生衰变的时刻是不可预告的，但对足够多的同一种放射性元素的集合，作为一个集体，它的衰变规律则是十分精确的。用 $N_0$ 表示初始时的原子核数，经 $t$ 时间后衰变的原子核数为 $N$ ，则有

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{①}$$

这就是放射性衰变服从的指数衰减规律，式中 $\lambda$ 代表一个原子核在单位时间内发生衰变的几率，称为衰变常数。

放射性元素衰变有一定的速率，我们把放射性元素的原子核有半数发生衰变需要的时间叫半衰期 $T$ 。即当 $t = T$ 时，有 $N = \frac{N_0}{2}$ ，由①式可得 $T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$

或者写为  $N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

对某种确定的放射性元素，原子核发生衰变的时间有早有晚，它们存在的时间不一样。理论上常用平均寿命 $\tau$ 来表示放射性元素在衰变前的平均生存时间，放射性元素的平均寿命可表示为 $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{0.693} = 1.44 T$

原子核放出射线后自身就发生衰变，在衰变过程中，质量数、电荷数、能量、动能是守恒的。根据质量数和电荷数的守恒定律，可以判定衰变的产物；根据能量守恒定律，结合衰变前后粒子的质量，可以求出衰变过程中所放出的能量。

## 二、原子核的结合能与质能方程

核子在结合成原子核时，由于有强大的核力作用，必须释放一定的能量。反之，将原子核分解成核子时，则要吸收同样多的能量，这个能量叫原子核的结合能。由于核子结合成原子核时放出了结合能，因此核的质量跟组成它的核子的质量比较起来就要小一些，设由 $Z$ 个质子、 $N$ 个中子组成的原子核，其质量为 $M$ ，如果这 $Z$ 个质子， $N$ 个中子是分散的，总质量应为 $Zm_p + Nm_n$ ，则由分散到结合在一起质量相差

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - M$$

这叫做原子核结合过程的质量亏损。

由爱因斯坦的相对论的质能方程有 $\Delta E = \Delta mc^2$

这个方程表示物体的能量增加 $\Delta E$ ，那么它的质量也相应地增加，反之亦然。式中 $c$ 为真空中的光速。

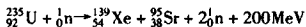
所以在原子核结合过程中，质量亏损与能量变化的关系为 $\Delta E = \Delta mc^2$

这就是原子核的结合能。原子核的结合能与其核子数之比叫每个核子的平均结合能。不同原子核的平均结合能不同，轻核和重核的平均结合能都较小，中等质量数的原子核，

平均结合能较大,质量数为 50 + 60 的原子核平均结合能最大。

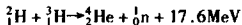
### 三、核的裂变和聚变

1. 重核的核子平均结合能比中等质量的核的核子平均结合能小,因此重核分裂成中等质量的核时,会有一部分原子核结合能释放出来,这种核反应叫裂变,如铀核裂变。当中子打击铀 235 后,应形成处于激发状态的复核,复核裂变为质量差不多相等的碎片,同时放出 2~3 个中子和原子核结合能



这些中子如能再引起其他铀核裂变,就可使裂变反应不断地进行下去,这种反应叫链式反应,释出大量的能量。原子弹、原子反应堆等装置就是利用 U 核裂变的原理制成的。链式反应要不断进行下去的一个重要条件是每个核裂变时产生的中子数要在一个以上。

2. 轻的原子核变成较重的原子核时,也会释放出更多的原子核结合能,这种轻核结合成质量较大的核叫做聚变。如:



使核发生聚变,必须使它们接近到  $10^{-15}\text{m}$ 。一种办法是把核加热到很高温度,使核的热运动动能足够大,能够克服相互间的库仑斥力,在互相碰撞中接近到可以发生聚变的程度,因此,这种反应又叫做热核反应。氢弹是根据聚变的原理制成的。

### 【巩固习题】

1. 取某放射性同位素的盐溶液 10 毫升,测得它的放射性强度为  $N_1 = 2 \times 10^5$  粒子/s。将该  $1\text{m}^3$  的盐溶液倒入某小水库。经过半个月它与库水充分均匀混合后取库水 10ml,测得每 2s 放射一个粒子。已知该放射性同位素的半衰期为 5 天,试估算库水容积。

2. 在一个密闭的容器中装有放射性同位素氪( ${}_{36}^{86}\text{Kr}$ )气,在  $20^\circ\text{C}$  时其压强为 1 大气压。将容器埋入地下深处经过 22 年后取出,在此期间有些氪 85 经  $\beta$  衰变成为铷( ${}_{37}^{85}\text{Rb}$ ),而铷最后呈固体状态,并测得固体物为  $7.5 \times 10^{-2}\text{mol}$ 。现在,在温度仍是  $20^\circ\text{C}$  测得容器中压强为 0.25 大气压,试计算埋入时氪的质量及其半衰期。

3. 利用云室观察  $\alpha$  粒子轰击  ${}_{7}^{14}\text{N}$  核的核反应,可以确定  $\alpha$  粒子轰击氦核后形成一个复核,然后复核发生衰变放出一个质子,生成一个新核。若将云室水平放置在自上而下的匀强磁场中,磁场的磁感应强度  $B = 6.0 \times 10^{-1}\text{T}$ ,当复核衰变时,可以看到两个圆径迹,设复核放出的质子运动方向跟  $\alpha$  粒子入射方向相反,测得质子径迹半径  $R_1 = 6.0 \times 10^{-2}\text{m}$ ,新核半径  $R_2 = 3.0 \times 10^{-2}\text{m}$ 。已知质子质量  $1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$ 。(不考虑相对论效应)求:(1)整个变化过程的核反应方程;(2)入射  $\alpha$  粒子的动能。

4. 静止的原子核衰变成质量分别为  $m_1, m_2, m_3$  的三个裂片,它们的质量亏损  $\Delta m$ 。

若三裂片中每两片之间速度方向的夹角都是  $120^\circ$ , 求每个裂片的能量.

5. 动能各为 1 兆电子伏的一对正负电子相撞湮灭, 产生一对相同的  $\gamma$  光子, 已知电子静止质量为  $9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$ , 求  $\gamma$  光子波长.

6. 两个氘核产生的聚变反应中放出一个中子. 如果两个氘核的动能均为  $0.35 \text{MeV}$  电子伏对心正碰. 问核反应后产生的中子和氦核的动能各为多少? 已知氘核、氦核及中子的原子质量分别为  $2.0136 \text{u}$ ,  $3.0150 \text{u}$ ,  $1.0087 \text{u}$ , 且  $1 \text{u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{kg}$ . (假设释放的反应能全部变成动能)

### 第三节 综合训练

#### 【例题分析】

例 1 某金属受到频率为  $11.8 \times 10^{14} \text{Hz}$  的紫外线照射时, 测得其反向截止电压为  $2.96 \text{V}$ . 如果用氢气照射该金属, 则在氢的发射光谱中哪些能级的跃迁可能使该金属释放光电子? 释放出的电子的最大速率是多少?

分析 根据玻尔理论和光电效应规律, 只要氢原子辐射跃迁所对应的能级差大于或等于该金属的逸出功, 即该氢光谱线的频率大于或等于该金属的极限频率, 就会产生光电子.

解 由爱因斯坦光电效应方程得  $h\nu = W + \frac{1}{2}mv_m^2 = W + eU$ , 代入数据得逸出功  $W = 1.93 \text{eV}$ .

设氢原子从能级  $m$  跃迁到能级  $n$ , 则  $\Delta E = \frac{E_1}{m^2} - \frac{E_1}{n^2} = 13.6 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \text{eV}$ .

当  $n=1$  时, 由  $\Delta E \geq 1.93 \text{eV}$ , 得  $m \geq 1.08$ , 取  $m=2, 3, 4, \dots$ , 即赖曼系中所有跃迁辐射的光都能使该金属发生光电效应.

当  $n=2$  时, 同理可得,  $m > 3.04$ , 取  $m=4, 5, 6, \dots$ , 即巴尔末系中(除  $m=3$  时)所有的辐射跃迁所发出的光都可以使该金属产生光电效应.

当  $n \geq 3$  时,  $m$  无理解, 故其他线系的任何辐射跃迁所对应的能量差都小于该金属的逸出功, 不能使其释放光电子.

在所有的辐射跃迁中, 对应的最大能量差为从  $m \rightarrow \infty$  到  $n=1$  的跃迁, 即  $\Delta E = 13.6 \text{eV}$ . 根据爱因斯坦光电效应方程有  $\Delta E = W + \frac{1}{2}mv_m^2$ . 代入数据得  $v_m = 2.0 \times 10^6 \text{m/s}$ .

例 2 用能量为  $12.5 \text{eV}$  的电子去激发基态氢原子, 受激发的氢原子向其他定态轨



道跃迁时,会出现哪些波长的光谱线?

解 氢原子核外电子在从基态轨道跃迁到另一个定态轨道上的问题,关键是抓住在各轨道间跃迁时,会辐射或吸收一定频率的光子,所需能量由这两种定态轨道的能量差来决定.

$$\text{氢原子在基态的能级为 } E_1 = -\frac{me^4}{8E_0^2h^2} = -13.6\text{eV} \quad (1)$$

把氢原子由基态激发到  $n=2,3,4\cdots$  等定态上所需的能量是

$$\Delta E_{1n} = E_n - E_1 = -\frac{me^4}{8E_0^2h^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{1^2} \right) \quad (2)$$

$$\text{由(1),(2)式得 } \Delta E_{1n} = E_n - E_1 = 13.6 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (3)$$

由③式可得

基态氢原子向  $n=2$  定态轨道跃迁时有

$$\Delta E_{12} = E_2 - E_1 = 13.6 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 10.2\text{eV} \quad (4)$$

基态氢原子向  $n=3$  定态轨道跃迁时有

$$\Delta E_{13} = E_3 - E_1 = 13.6 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 12.1\text{eV} \quad (5)$$

基态氢原子向  $n=4$  定态轨道跃迁时有

$$\Delta E_{14} = E_4 - E_1 = 13.6 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right) = 12.8\text{eV} \quad (6)$$

由⑥式可知,能量为 12.5eV 的电子去激发基态氢原子,基态氢原子只能在  $n \leq 3$  的定态轨道间跃迁.即可能的跃迁有:由  $n=1$  跃迁到  $n=2$ 、由  $n=1$  跃迁到  $n=3$ 、由  $n=2$  跃迁到  $n=3$ .

$$\text{由里德伯公式得,跃迁时能发出的光谱线的波长为 } \lambda = \frac{1}{R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)} \quad (7)$$

将可能发生的定态轨道跃迁的量子数  $n, m$  和里德伯恒量  $R = 1.0967758 \times 10^7 \text{m}^{-1}$  代入⑦式得,跃迁时发出光谱线的波长分别为

$$\lambda_{12} = \frac{1}{R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)} = 1.215 \times 10^{-7} (\text{m})$$

$$\lambda_{13} = \frac{1}{R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right)} = 1.025 \times 10^{-7} (\text{m})$$

$$\lambda_{23} = \frac{1}{R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)} = 6.565 \times 10^{-7} (\text{m})$$

**例3** 一个处于基态的氢原子与另一个基态氢原子碰撞,求可能发生非弹性碰撞的最小速度为多少?已知氢原子的质量是  $1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$ ,氢原子基态的能量为  $E = -13.6 \text{eV}$ .

**解** 两个基态氢原子发生碰撞,如果损失的能量大于氢原子由基态跃迁到第一激发态所需的能量,则氢原子会被另一个氢原子吸收,则该碰撞为非弹性碰撞.由玻尔的氢原子理论得氢原子基态和第一激发态的能量分别为

$$E_1 = E \quad (1)$$

$$E_2 = \frac{1}{4} E \quad (2)$$

由①,②式得氢原子只有获得能量  $\Delta E \geq E_2 - E_1 = \frac{-3}{4} E$  ③

才会从基态跃迁到激发态,两个基态氢原子才能发生非弹性碰撞.在同样条件下,两个原子发生迎面对心碰撞时能量损失最大,设两原子相向速率为  $v$ ,碰撞后两原子静止,其能量损失为  $\Delta E' = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} mv\right)^2 - 0 = mv^2$  ④

发生非弹性碰撞的最小速度,即该能量刚好使一个氢原子激发,有  $\Delta E' = \Delta E$ ,由③,④

式可得  $mv^2 = \frac{-3}{4} E$  ⑤

将⑤代入数据并整理得

$$v = \sqrt{\frac{-3E}{4m}} = 3.16 \times 10^4 \text{m/s} \quad (6)$$

由⑥式可知两氢原子以大于  $3.16 \times 10^4 \text{m/s}$  的相对速率碰撞,有可能引起氢原子的激发,产生非弹性碰撞.

**例4** 将  $6 \times 10^4 \text{kg}$  铁放在很深的矿井中,以完全隔断宇宙射线的影响,在铁旁有很多探测器,只要铁核中有核子(质子和中子)发生衰变,这个事件总能被记录下来.这个实验从1980年冬开始到1982年夏结束,历时1.5年,一共记录了3个核子衰变的事例.已知  $N_0$  个平均寿命为  $\tau$  的粒子经过  $t$  时间后的数目为  $N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ ,根据以上事实,试估算出核子的平均寿命和半衰期.已知核子的质量为  $1.66 \times 10^{-27} \text{kg}$ ,  $\ln 2 = 0.693$ ,当  $0 < x \ll 1$  时,  $e^{-x} \approx 1 - x$ .

**解** 设从  $t=0$  开始做实验,总核子数为  $N_0$ ,到  $t=1.5$  年时刻核子数为  $N$ ,核子的平均寿命为  $\tau$ ,则  $N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$  ①

由于实验1.5年,只有3个铁核发生衰变,所以  $\frac{t}{\tau} \ll 1$ ,所以有  $N \approx N_0(1 - \frac{t}{\tau})$  ②

在  $t=0$  时,铁核的总数为  $N_0 = \frac{6 \times 10^4}{1.66 \times 10^{-27}} = 3.6 \times 10^{31}$  ③

在  $t=1.5$  年时,铁核的总数为  $N = N_0 - 3$  ④

$$\text{改写②式得 } \tau = \frac{N_0}{N_0 - N} t \quad (5)$$

将③、④和  $t = 1.5$  年代入⑤式得

$$\tau = \frac{N_0}{N_0 - N} t = \frac{3.6 \times 10^{31}}{3} \times 1.5 = 1.8 \times 10^{31} (\text{年}) \quad (6)$$

$$\text{设半衰期为 } T, \text{ 则当 } t = T \text{ 时, 有 } N = \frac{N_0}{2}, \text{ 则由①式得 } \frac{1}{2} = e^{-\frac{T}{\tau}} \quad (7)$$

$$\text{对⑦式两边取自然对数并整理得 } T = \tau \ln 2 \quad (8)$$

把⑥式和  $\ln 2 = 0.693$  代入⑧式得铁核的半衰期为

$$T = 1.8 \times 10^{31} \times 0.693 = 1.25 \times 10^{31} (\text{年})$$

**例 5** 已知 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 的原子质量为  $235.0439\text{u}$ , 中子的质量为  $m_n = 1.008665\text{u}$ , 质子的质量为  $m_p = 1.007277\text{u}$ , 问 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 原子核的结合能为多少兆电子伏特? 若中等质量原子核的平均结合能为  $8.50\text{MeV}$ . 当一个 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 核分裂成两个中等质量原子核时, 放出的能量为多少?

**解** (1) 先计算出由 92 个质子和 143 个中子结合成 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 原子核过程中的质量亏损, 再由爱因斯坦的质能方程求出 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 原子核的结合能.

将  $Z = 92, N = 143$ , 质子质量  $m_p = 1.007277\text{u}$ , 中子的质量  $m_n = 1.008665\text{u}$  和 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 原子质量  $235.0439\text{u}$  代入  $\Delta m = Zm_p + Nm_n - M$  解得质量亏损为

$$\Delta m = 92 \times 1.007277\text{u} + 143 \times 1.008665\text{u} - 235.0439\text{u} = 1.865\text{u}$$

由爱因斯坦的质能方程  $\Delta E = \Delta mc^2$  得 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 原子核的结合能为

$$\Delta E_1 = 1.865\text{u} \times c^2 = 1.865 \times 931.5\text{MeV} = 1737.2\text{MeV}$$

(2) 中等质量原子核的平均结合能为  $\overline{\Delta E} = 8.5\text{MeV}$ , 由平均结合能的定义得由一个 ${}_{92}^{235}\text{U}$ 核分裂成的两个中等质量原子核的结合能为  $\Delta E_2 = 8.50 \times 235 = 1997.5\text{MeV}$

所以有  $\Delta E_2 - \Delta E_1 = 1997.5 - 1737.2 = 260.3\text{MeV}$

由上述结果可知, 一个铀 235 核裂变成两个中等质量原子核时要释放出  $260.3\text{MeV}$  的能量.

**例 6** 用放射源钋( $\text{Po}$ )发射的  $\alpha$  粒子打在铍核( ${}^9_4\text{Be}$ )上, 产生一种新的粒子和另一生成物, 这些新粒子组成的粒子流有以下特点:

(1) 在任意方向的磁场中都不偏转;

(2) 让它与含氢物质中的静止氢核相碰撞, 可把氢核击出, 被击出氢核的能量为  $E_H = 4.7\text{MeV}$ , 让它与含氮物质中的静止氮核相碰撞, 也可把氮核击出, 被击出的氮核的能量为  $E_N = 1.2\text{MeV}$ , 碰撞可视为对心完全弹性碰撞, 且已知氢核与氮核的质量比为 1:

14.

试根据以上数据求出新粒子质量与氢核质量之比, 对此新粒子是什么粒子作出判断, 并写出  $\alpha$  粒子轰击铍核( ${}^9_4\text{Be}$ )的核反应方程式.

解 设  $m_H, m_N$  分别表示氢核与氮核的质量,  $v_H, v_N$  分别表示氢核、氮核被未知粒子碰撞后的速度,  $m$  表示未知粒子的质量,  $v$  表示未知粒子碰撞前的速度,  $v_1, v_2$  分别表示未知粒子与氢核、氮核完全碰撞后的速度.

在未知粒子与氮核完全弹性碰撞过程中有  $mv = mv_1 + m_H v_H$  ①

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m_H v_H^2 \quad ②$$

将①、②式改写为  $m(v - v_1) = m_H v_H$  ③

$$m(v^2 - v_1^2) = m_H v_H^2 \quad ④$$

由③、④式得  $v_H = v + v_1$  ⑤

由①、⑤式得  $v_H = \frac{2m}{m + m_H}v$  ⑥

在未知粒子与氢核完全弹性碰撞过程中有

$$mv = mv_2 + m_N v_N \quad ⑦$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}m_N v_N^2 \quad ⑧$$

同样也可求得  $v_N = \frac{2m}{m + m_N}v$  ⑨

氢核和氮核的能量是因为未知粒子碰撞而获得的, 所以有  $E_H = \frac{1}{2}m_H v_H^2$  和  $E_N = \frac{1}{2}$

$m_N v_N^2$ , 将⑧、⑨两式代入整理得  $\frac{E_H}{E_N} = \frac{m_H(m + m_H)^2}{m_N(m + m_N)^2}$  ⑩

将数据代入得  $\frac{m}{m_H} = 1.03$  ⑪

由⑪式可知未知粒子的质量和氢核的质量十分接近, 另外由于未知粒子在任意方向的磁场中都不偏转, 说明未知粒子不带电, 所以由此可判断未知粒子为中子.

$\alpha$  粒子轰击铍核( ${}^9_4\text{Be}$ )的核反应方程式为  ${}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^1_0\text{n}$ .



### 【精选习题】

1. 一个电子, 远离质子时速度为  $1.9 \times 10^6 \text{ m/s}$ , 为质子所捕获, 放出一个光子而形成氢原子, 若氢原子处于基态, 问放出光子的频率为多少赫兹?

2. 在  $\alpha$  粒子的散射实验中, 设一个射在铜箔上的  $\alpha$  粒子具有动能为  $7.68 \text{ MeV}$ . 如果有一铜原子核 ( $Z=29$ ) 的位置恰好在  $\alpha$  粒子的前进方向上, 求  $\alpha$  粒子所能到达的高铜原子核的最短距离.

3. 铀 238 的半衰期为  $4.2 \times 10^9$  年, 铀 235 的半衰期为  $7 \times 10^8$  年, 目前矿石中两种元素的含量之比为  $150:1$ , 如果地球形成时两种元素的含量相等, 求地球的年龄.

4. 已知氢原子核外电子轨道半径等于  $0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ , 试求电子沿这轨道作匀速圆周

运动的线速度.如果电子从这一轨道跃迁到某一较高能级的轨道需要能量 $10.2\text{eV}$ ,如果此能量是光供给的,问这种光的频率为多少赫兹?

5.用 $\alpha$ 粒子打击 ${}^9\text{Be}$ 产生 ${}^{12}\text{C}$ 并放出一个新粒子.(1)写出核反应式;(2)如果 $\alpha$ 粒子的速度为 $1.5 \times 10^7\text{m/s}$ ,放出新粒子以 $4 \times 10^7\text{m/s}$ 的速率并垂直于 $\alpha$ 粒子前进方向飞进,求 ${}^{12}\text{C}$ 的速率;(3)若此反应是放热反应,放出能量为 $5.7\text{MeV}$ ,问此反应前后的质量差是多少?

6.在原子反应堆中,用石墨作减速剂,铀核裂变所产生的快中子,通过和碳核不断碰撞而被减速,假设中子与碳核的碰撞是完全弹性碰撞,并且碰撞前碳核是静止的,碰撞后中子和碳核的速度跟碰撞前中子的速度沿同一直线.已知碳核的质量近似为中子质量的12倍,中子原来的能量为 $E_0$ .(1)经过一次碰撞后,中子的能量变为多少?(2)若 $E_0 = 1.75\text{MeV}$ ,试问经过多少次碰撞后,中子的能量才能减少到 $0.025\text{eV}$ ?

7.已知氦核的平均结合能为 $1.1\text{MeV}$ ,氘核的平均结合能为 $7.1\text{MeV}$ ,求两个氘核结合成一个氦核时,是放出还是吸收能量?为多少兆电子伏特?

8.若原子能发电站的效率为 $21\%$ ,试计算功率为 $30$ 万千瓦的原子能发电站,一昼夜所消耗的 ${}^{235}\text{U}$ 的质量.如果用煤来代替,则需多少吨?(煤的燃烧值约为 $33 \times 10^6\text{J/kg}$ )

9.原子核俘获一个 $\mu^-$ 子( $m_\mu = 207m_e$ ,  $m_e$ 为电子质量,而电荷量与电子相同)形成 $\mu$ 原子,假设原子核静止,已知原子核的质量数为 $A$ ,且中子数 $N$ 等于质子数 $Z$ .(1)已知氢原子的第一轨道半径为 $0.529 \times 10^{-10}\text{m}$ ,试求 $\mu^-$ 子的第一轨道半径.(2)已知核半径公式为 $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{\frac{1}{3}}\text{m}$ ,当 $A$ 大于什么值时, $\mu^-$ 子轨道将进入原子核内.

### 问题与讨论 夸克模型

自1897年发现第一个基本粒子——电子起,到20世纪20年代发现了质子、中子等以后,人们曾认为,已经找到物质的不可能再分割的基元了.可是进入20世纪60年代,随着现代大型粒子加速器的建成,各种探测和分析仪器的出现,自动处理数据的大型电子计算机的使用,人们发现了大量的新粒子.尤其是发现了一系列寿命极短的共振态粒子.到1964年,人们发现的基本粒子数已达到了100余种.

随着粒子数目的增加,人们不禁提出这个问题:基本粒子世界究竟有多少成员?科学家们对此做了深入研究,按照每个基本粒子的质量差异,把它们分为三大类:光子类、轻子类和强子类.

在众多基本粒子的分类研究中,由于强子类基本数目最多,质量最大,因而取材较为容易,观测较为方便,所以人们对强子类基本粒子研究最多,认识最深.

“夸克模型”就是在对强子的研究中,由美国物理学家盖尔曼首先提出来的。

盖尔曼在1964年想到各种不同的基本粒子会不会是由很少几种更为简单的、更基本粒子结合而成的。如果真是这样,就会把我们对宇宙的看法大为简化。在他看来,只要假定存在着三种不同的,具有特定性质的更基本粒子就可以按不同的方式把它们组合起来,得出已知的所有各种基本粒子。

盖尔曼想用三个假设的更基本粒子组合成一个已知原粒子,这使他考虑起自己的名声,为了不至于错下结论落人笑话,他在表述自己的观点时,采用了美国作家乔伊斯在《芬尼根斯·韦克》一书中,为耍弄文字游戏而写的一句话:“三个夸克才顶得上一个马克。”因此,他就把这些假设中的更基本粒子半开玩笑地命名为“夸克”,只是在一封信中说:“现在的所有强子,都可以用这三种夸克像搭积木一样拼凑起来。”从而提出了基本粒子结构的“夸克模型”。

“夸克模型”认为,强子都是由更基本的粒子夸克组成的,夸克有三种,每种都有它的反夸克。为了数学处理上的方便,“夸克模型”认为三个夸克分别带有分数单位电荷。据此,“夸克模型”较好地解释了强子的规律性及其构成。1969年,在美国斯坦福实验室的一台直线加速器上,物理学家们用一群电子轰击质子、中了一类的强子,希望看到这个微小世界中的名堂,结果证实了盖尔曼预言的夸克。由于“夸克模型”的成功,盖尔曼获得了1969年诺贝尔物理学奖。

今天,人们发现的基本粒子已达300余种,“夸克模型”中的夸克也由3种发展到了6种,它们的名字是上夸克、下夸克、奇夸克、粲夸克、顶夸克和底夸克,而且每种夸克还有3种颜色。令人遗憾的是自从“夸克模型”问世后,捕捉夸克的兴趣虽然使不少人为之日夜操劳,奋斗不息,但迄今为止还没有一个夸克被直接从强子内部捕获到。

是夸克不存在吗?物理学家们没有做出如此回答,他们说,夸克比单个质子的质量还要大得多,因此,形成质子时要付出很大的结合能。夸克之间靠一种“粘胶”物质使其强烈地相互束缚在一起,当它们越是“想”跑出质子时,受到的牵制力就越大;越是不“想”跑时,受到的牵制力就越小;一点也不“想”跑时,则“享”有更多的自由,夸克似乎终身被“幽禁”在质子内部。由于当前人们还不能有足够高的能量把重子打碎,所以无法把“幽禁”中的夸克“解放”出来。即使是“解放”出来了,也会由于它在极短的瞬间又会与别的夸克结合在一起,而难以探测出来。因此,夸克和胶子之谜,还没有最后揭开。

在探索微观世界的征途上,人们虽然已经取得了辉煌的成果,但还只不过是初步探讨了强子的结构和可分问题而已,连所谓基本粒子中的轻子和光子两类粒子的结构问题,都还没有顾得上研究,像宏观世界不可穷尽一样,微观世界也是不可穷尽的。

## 第十五章 狭义相对论

### 第一节 洛伦兹变换

#### 【知识要点】

#### 一、狭义相对论的两个基本假设

狭义相对论是在光速不变性的实验基础上建立起来的,它否定了绝对参照系的存在,发展了经典力学中的相对性原理。

爱因斯坦提出了相对论的两个基本原理(基本假设):

##### 1. 相对性原理

所有惯性参照系都是等价的,物理规律对于所有惯性参照系都可以表示为相同形式。

无论通过什么物理现象,都不能觉察出参考系的任何“绝对运动”。

##### 2. 光速不变原理

真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向都为  $c$ ,并与光源运动无关。若光速在所有惯性系中数值都相同,那么电磁学和光学定律在所有惯性系也都相同,利用电学、光学实验不可能测出地球相对于绝对参照系的速度。

#### 二、洛伦兹变换

下面根据狭义相对论的两个基本假设来推导洛伦兹变换式。作为一条公设,我们认为时间和空间都是均匀的,因此时空坐标间的变换必须是线性的。

对于任意事件  $P$  在  $S$  系和  $S'$  系中的时空坐标  $(x, y, z, t)$ 、 $(x', y', z', t')$ ,因  $S'$  相对于  $S$  以平行于  $x$  轴的速度  $u$  作匀速运动,显然有  $y' = y, z' = z$ 。在  $S$  系中观察  $S$  系的原点,  $x = 0$ ; 在  $S'$  系中观察该点,  $x' = -ut'$ , 即  $x' + ut' = 0$ 。因此

$$x = x' + ut'$$

在任意的一个空间点上,可以设  $x = k(x' + ut')$ ,  $k$  是一比例常数。

同样地可得到

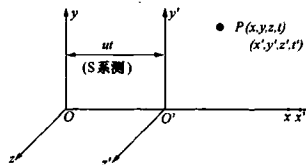


图 15-1-1

$$x' = k'(x - ut) = k'[x + (-u)t]$$

根据相对性原理, 惯性系  $S$  系和  $S'$  系等价, 上面两个等式的形式就应该相同(除正、负号), 所以  $k = k'$ . 由光速不变原理可求出常数  $k$ .

设光信号在  $S$  系和  $S'$  系的原点重合的瞬时从重合点沿  $x$  轴前进, 那么在任一瞬时  $t$ (或  $t'$ ), 光信号到达点在  $S$  系和  $S'$  系中的坐标分别是  $x = ct, x' = ct'$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad xx' &= k^2(x - ut)(x' + ut') = k^2(ct - ut)(ct' + ut') \\ &= k^2u'(c - u)(c + u) = c^2u' \end{aligned}$$

$$\text{由此得到} \quad k = \frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma$$

式中  $\beta = \frac{u}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  (其中  $\beta$  是相对速度;  $\gamma$  是膨胀因子), 这样, 就得到

$$x = \gamma(x' + ut'), \quad x' = \gamma(x - ut)$$

$$\text{由上面两式, 消去 } x' \text{ 得到 } t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

若消去  $x$  得到

$$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$

综合以上结果, 就得到洛伦兹变换

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{cases}$$

或洛伦兹反变换

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right) \end{cases}$$

洛伦兹变换是两条基本原理的直接结果.

可以证明, 在洛伦兹变换下, 麦克斯韦方程组是不变的, 而牛顿力学定律则要改变.



故麦克斯韦方程组能够用来描述高速运动的电磁现象,而牛顿力学不适用描述高速现象,故它有一定的适用范围。

当  $\beta = \frac{u}{c}$  很小时,洛伦兹变换就成为伽利略变换,亦即后者是前者在低速下的极限情形。故牛顿力学仅是相对论力学的特殊情形——低速极限。

洛伦兹变换是事件的时空坐标在不同惯性系之间的关系,根据洛伦兹变换可以得到狭义相对论的速度变换公式。

### 三、速度变换公式

设物体在  $S$ 、 $S'$  系中的速度分别为  $(v_x, v_y, v_z)$ ,  $(v'_x, v'_y, v'_z)$ , 根据洛伦兹变换因此得相对论的速度变换公式

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$\text{其逆变换为 } v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}, v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}, v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}$$

当速度  $u$ 、 $v$  远小于光速  $c$  时,即在非相对论极限下,相对论的速度变换公式即转化为伽利略速度变换式

$$v'_x = v_x - u$$

利用速度变换公式,可证明光速在任何惯性系中都是  $c$ 。设  $S'$  系中观察者测得沿  $x'$  方向传播的一光信号的光速为  $c$ , 在  $S$  系中的观察者测得该光信号的速度为

$$v = \frac{c + u}{1 + \frac{uc}{c^2}} = c$$

即光信号在  $S$  系和  $S'$  系中都相同。

### 【巩固习题】

1. 一列火车以速度  $v$  相对地面运动。如果地面上的人测得,某光源发出的闪光同时到达车厢的前壁和后壁,那么按照火车上人的测量,闪光先到达前壁还是后壁? 火车上的人怎样解释自己的测量结果?

2.  $A, B, C$  是三个完全相同的时钟,  $A$  放在地面上,  $B, C$  分别放在两个火箭上,以速度  $v_B, v_C$  朝同一方向飞行,  $v_B < v_C$ 。地面上的观察者认为哪个时钟走得最慢? 哪个走得最快?

3. 以  $8\text{km/s}$  的速度运行的人造卫星上一只完好的手表走过了  $1\text{min}$ , 地面上的人认为它走过这  $1\text{min}$ “实际”上花了多少时间? 通过这个题目我们可以看到,即使对于人造

卫星这样飞快的速度,相对论效应也是微不足道的。

4. 一枚静止时长 30m 的火箭以 3km/s 的速度从观察者的身边掠过,观察者测得火箭的长度应为多少?火箭上的人测得火箭的长度应为多少?如果火箭的速度为光速的 1/2 呢?

## 第二节 时间和长度的相对论效应



### 【知识要点】

狭义相对论向人们展开了一种不同于经典力学的时空观.在这种新的时空观中,同时性,时空的度量不再是绝对的,而是相对的.

#### 一、同时的相对性

设参照系  $S'$  中的观察者在  $t'$  时刻观察到两个事件同时发生在不同地点  $x'_1$  和  $x'_2$ . 在  $S$  系中观察这两个同样的事件,结果又如何呢?

由洛伦兹变换可求出  $S$  系中的观察者测得的这两个事件发生时刻

$$t_1 = \gamma \left( t' + \frac{ux'_1}{c^2} \right), t_2 = \gamma \left( t' + \frac{ux'_2}{c^2} \right)$$

两者之差  $t_2 - t_1 = \gamma \frac{u}{c^2} (x'_2 - x'_1)$

因  $x'_1 \neq x'_2$ , 故  $t_2 - t_1 \neq 0$ . 这表明  $S'$  系中同时发生的两个事件在  $S$  系中观察者看来是先后发生的,它们并不同时! 其时间间隔为  $\gamma \frac{u}{c^2} (x'_2 - x'_1)$  (2.1)

若  $x'_1 = x'_2$ , 则  $t_1 = t_2$ , 即同地一定同时.

一般地,同时性是相对的.

下面以一个假想实验来说明同时的相对性.有一列爱因斯坦火车( $S'$ 系)相对于地面( $S$ 系)匀速向右运动,在爱因斯坦火车上  $A$ 、 $B$  两点分别放置信号接收器,在它们的中点  $M$  放置一光信号发生器.设在某时刻,  $M$  发出一光信号.我们将  $A$  接收到光信号称为事件 1,将  $B$  接收到光信号称为事件 2.

在  $S'$  系观察,由于  $MA = MB$ ,各个方向光信号的传播速度都是  $c$ ,所以光信号必定同时传到两个接受器,即事件 1 和事件 2 是同时发生的.

在  $S$  系观察这两个同样的事件,由于  $A$ 、 $B$  随着  $S'$  系一起移动,在光信号从  $M$  发出到达  $A$  的这段时间内,  $A$  已迎着光走了一段距离;而在光信号从  $M$  发出到达  $B$  的这段时间内,  $B$  却背着光走了一段距离.光信号传播速度在各个方向上还是  $c$ ,因此事件 1 先发生,事件 2 后发生.

## 二、时间膨胀

既然同时性是相对的,那么两个事件的时间间隔或一个事件持续时间的量度也是随参照系而改变的。

设在  $S'$  系中观察一事件发生在  $x'$  处,事件开始于  $t' = t'_1$ ,结束于  $t' = t'_2$ ,经历的时间间隔是  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ 。在某一参照系中同一地点先后发生的两个事件之间的时间间隔称为固有时,用  $\tau_0$  表示,它是静止于此参照系中的一只钟测出的。因此在  $S'$  中测出的时间间隔  $\Delta t'$  就是固有时  $\tau_0$ 。

若在  $S$  系中观察该事件过程,事件开始于  $t = t_1$ ,结束于  $t = t_2$ ,经历的时间间隔是  $\Delta t = t_2 - t_1$ 。 $\Delta t$  称为运动时,用  $\tau$  表示,  $\gamma = t_2 - t_1$ 。由洛伦兹变换

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 + \frac{ux'_2}{c^2}) - \gamma(t'_1 + \frac{ux'_1}{c^2}) = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma \Delta t'$$

$$\text{即} \quad \tau = \gamma \tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.2)$$

因此,从相对于发生事件的地点作相对运动的参照系中所测得的时间间隔要比从相对静止的参照系中所测得的时间间隔长,即运动时大于固有时,固有时最短。这就是狭义相对论中的时间膨胀。

固有时与在其他参照系测出的运动时的关系,还可以用时钟走的快慢来说明。 $S$  系中的观察者将相对于他运动的  $S'$  系中的那只记录固有时的钟同自己的许多同步的钟对比,发现  $S'$  系中的那只钟慢了。这个效应叫做运动的钟时间延缓。

时间延缓是一种相对效应,同样地,  $S'$  系中的观察者也会发现静止于  $S$  系而相对于他运动的任一钟比自己参照系中的一系列同步的钟走得慢。

$S'$  系中,  $A$  处有闪光光源,  $M$  为反射镜。我们将光信号从  $A$  发出记作事件 1,光信号经  $M$  反射返回  $A$  记作事件 2。

我们可以对以上假想实验进行定量分析。在  $S'$  系观察,  $\Delta x' = 0$ ,  $\Delta t' = \frac{2d}{c}$ 。在  $S$  系观察,  $\Delta x \neq 0$ ,  $\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{d^2 + (\frac{u \Delta t}{2})^2}$ 。由上式解出  $\Delta t = \frac{2d/c}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , 即  $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 。

## 三、洛伦兹收缩

假定有一个固定在参照系  $S$  中的物体,即物体相对于  $S$  系静止,物体沿  $x$  轴的静止



图 15-2-1

长度(原长)由  $S$  系测出:  $l_0 = x_2 - x_1$ . 现在由  $S'$  系中的观察者在时刻  $t'$  进行测量, 测得该物体长度是  $l = x'_2 - x'_1$ ,  $x_1, x_2$  及  $x'_1, x'_2$  分别代表测量时刻物体沿  $x$  轴和  $x'$  轴方向长度的始末两点坐标. 由洛伦兹逆变换  $x_1 = \gamma(x'_1 + ut')$ ,  $x_2 = \gamma(x'_2 + ut')$ , 故

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} < l_0 \quad (2.3)$$

因此在  $S'$  系中观测, 物体的长度缩短了. 物体的原长最长.

若物体相对于  $S'$  系静止, 静止长度  $l_0 = x'_2 - x'_1$ . 设  $S$  系在时刻  $t$  测量到物体的长度是  $l = x_2 - x_1$ . 由洛伦兹变换  $x'_1 = \gamma(x_1 - ut)$ ,  $x'_2 = \gamma(x_2 - ut)$ , 得

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

即  $l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ . 因此在  $S$  系中观察相对于  $S'$  系静止的物体, 其长度也缩短了.

综上所述, 可以得到如下结论: 在相对于物体有相对速度的参照系中测得的沿速度方向的物体长度  $l'$ , 总比在与物体相对静止的参照系中测得的物体长度  $l$  (原长) 短. 这个效应称为洛伦兹收缩, 也称为运动长度收缩. 长度缩短纯粹是一种相对论效应, 与物体内部结构无关.

在垂直于相对速度方向的长度不变. 若在静止参照系  $S$  中测得物体的体积为  $V$ , 在相对于  $S$  系作匀速度  $u$  运动的参照系  $S'$  观测到物体的体积

$$V' = V \sqrt{1 - \beta^2}$$

#### 四、相对论质量

动量的定义是  $p = mv$ , 在牛顿力学中, 质量与速度无关.

在相对论力学中, 质量与速度有关, 否则动量守恒定律不能在洛伦兹变换下保持形式不变.

由动量守恒定律及相对论速度变换式, 从理论上可证明运动粒子的质量与运动粒子的速率  $v$  有如下关系  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ .

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \quad (2.4)$$

式中  $m_0$  是物体在相对于参照系静止时的质量, 称为静质量;  $m$  是物体相对于参照系以速率  $v$  的运动时的质量, 又称为相对论质量.

注意: (2.4) 式中的  $v$  不是两个参照系间的相对速率, 而是某一粒子相对于某一参照系的速率. 运动粒子的质量与运动粒子的速率  $v$  的关系, 使我们认识到物质与运动是相互关联的.

下面我们从一个特例来说明相对论质量(2.4)式.

设在  $S'$  系中, 有一质量为  $M$  的粒子静止于  $O'$ , 在某一时刻该粒子分裂为完全相等

的两半 A 和 B, 分别沿  $x'$  轴的正负方向运动. 根据动量守恒定律, 这两半的速率应相等, 我们将它们设为  $S'$  系相对于  $S$  系的运动速度  $u$ . 因此在  $S'$  系中看来, A 以速率  $u$  向左运动, B 以速率  $u$  向右运动 (如下图所示); 在  $S$  系中看来, A 静止而 B 运动, B 运动速度根据相对论速度逆变换公式求出

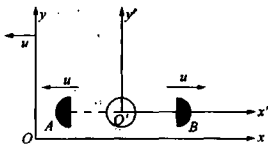


图 15-2-2

$$v_B = \frac{v'_B + u}{1 + \frac{uv'_B}{c^2}} = \frac{2u}{1 + \beta^2} \quad (2.5)$$

在  $S$  系中观察, 粒子分裂前粒子速度为  $u$ , 动量为  $Mu$ ; 分裂后 A、B 的总动量为  $m_B v_B$ . 质量守恒和动量守恒要求  $m_A + m_B = M$   $m_B v_B = Mu$

$$\text{由以上两式得 } (m_A + m_B)u = \frac{2m_B u}{1 + \beta^2} \quad (2.6)$$

如果沿用牛顿力学的质量概念, 即  $m_A = m_B = m$ , 显然上式不能成立. 为了使动量守恒定律在任何惯性系中均成立, 且动量定义保持不变, 就不能再认为质量与运动无关. 由

$$(2.6) \text{ 式解出 } m_B = m_A \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \quad (2.7)$$

$$\text{从 } (2.5) \text{ 式得到 } u = \frac{c^2}{v_B} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}} \right)$$

$$\text{将代入 } (2.7) \text{ 式, 得 } m_B = \frac{m_A}{\sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}}}$$

因此, 在  $S$  系中观察, 静止的 A 粒子质量  $m_A$  和运动的 B 粒子质量  $m_B$  是不同的. 如果将上式中  $m_A$  写成  $m_0$ ,  $m_B$  写成  $m$ ,  $v_B$  写成  $v$ , 上式就变成 (2.4) 式.

如果  $\frac{v}{c} \ll 1$ , 则  $m \approx m_0$ , 这时可认为物体的质量与它的速率无关, 等于其静止质量, 这就是牛顿力学讨论的情况. 牛顿力学是相对论力学在低速情况下的近似.

例如, 当一火箭以  $v = 11.2 \text{ km/s}$  的速率运动时,  $m = 1.000000009 m_0$ . 而当微观粒子以接近光速的速率  $v = 0.98c$  运动时,  $m = 5.03 m_0$ .

当  $v = c$  时, 若  $m_0 \neq 0$ , 则  $m = \infty$ , 这是无意义的; 若  $m_0 = 0$ , 则  $m$  可有一定量值.

### 五、相对论动量

根据动量的定义和 (2.4) 式, 可得相对论动量的表示式为

$$p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} v \quad (2.8)$$

## 六、相对论能量 质能关系

我们将  $mc^2$  称为粒子以速率  $v$  运动时的总能量  $E$ ,  $m_0c^2$  称为粒子的静止能量  $E_0$

$$E = mc^2 \quad (2.9)$$

$$E_0 = m_0c^2 \quad (2.10)$$

因此,一定的质量相应于一定的能量,两者的数值只相差一个恒定的因子  $c^2$ . (2.9)式是相对论的质能关系式.

上两式可写成  $E_k = E - E_0$ , 即动能为总能量和静止能量之差. (2.11)

放射性蜕变、原子核反应均证明了相对论的质能关系. 例如在核反应中,反应前所有反应物的静质量为  $m_{01}$ , 总动能  $E_{k1}$ , 所有生成物的静质量为  $m_{02}$ , 总动能  $E_{k2}$ . 则由能量守恒  $m_{01}c^2 + E_{k1} = m_{02}c^2 + E_{k2}$ , 得到

$$E_{k2} - E_{k1} = (m_{01} - m_{02})c^2$$

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2 \quad (2.12)$$

式中  $\Delta E = E_{k2} - E_{k1}$  为总能量的增量,  $\Delta m = m_{01} - m_{02}$  为总静止质量的减少. 因此核反应中释放的能量相应于一定的质量亏损.

## 七、相对论的动量和能量关系

经典力学中动量和能量关系为  $E_k = \frac{p^2}{2m}$ , 它对洛伦兹变换不协变.

根据相对论的质能关系可推出相对论的动量和能量关系

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} c^2$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 &= \frac{m_0^2 c^2}{1 - (v/c)^2} - p^2 = \frac{m_0^2 c^2}{1 - (v/c)^2} - m^2 v^2 \\ &= \frac{m_0^2 c^2}{1 - (v/c)^2} - \frac{m_0^2 v^2}{1 - (v/c)^2} = m_0^2 c^2 \end{aligned}$$

$$\text{即 } E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \quad (2.13)$$

上式即为相对论动量能量关系式. 它不仅揭示了能量和动量的相互关系, 而且反映了能量和动量的不可分割性和统一性. 对于光子 ( $m_0 = 0$ ), 可以更清楚地显示出这一点

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (2.14)$$

以  $E, pc, m_0c^2$  表示三角形的三边; 它们间的关系可用直角三角形形象地表示:

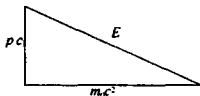


图 15-2-3

### 【巩固习题】

1. 一辆车轮半径为  $R$  的“汽车”以接近光速的恒定速度  $v$  相对于地面沿直线运动。一个相对于地面静止的观察者所看到的汽车车轮形状是什么样的？并加以证明。

2. 一艘宇宙飞船以  $0.8c$  的速度于中午飞经地球，此时飞船上和地球上的观察者都把自己的时钟拨到 12 点。(1)按飞船上的时钟于午后 12 点 30 分飞经一星际宇航站，该站相对于地球固定，且该宇航站上的时钟指示的是地球时间。试问飞船到达该站时宇航站的时钟所指的时刻？(2)试问按地球上的坐标测量，宇航站离地球多远？(3)于飞船时间午后 12 点 30 分从飞船向地球发送无线电信号，试问地球上的观察者何时(按地球时间)接收到该信号？(4)若地球上的观察者在接收到信号后立即发出回答信号，试问飞船何时(按飞船时间)接收到回答信号？

3. 设有一  $\pi^+$  介子，在静止下来后，衰变成  $\mu^+$  子和中微子  $\nu$ ，三者的静止质量分别为  $m_\pi$ 、 $m_\mu$  和零。求  $\mu^+$  子和中微子的动能。

4. 太空火箭(包括燃料)的初始质量为  $M_0$ 。从静止起飞，向后喷出的气体相对火箭的速度  $u$  为常量。任意时刻火箭速度(相对地球)为  $v$  时火箭的静止质量为  $m_0$ 。忽略引力影响，试求比值  $\frac{m_0}{M_0}$  与速度  $v$  之间的关系。

5. 如图 15-2-4 所示，有一均匀带负电的正方形绝缘线框  $ABCD$ ，每边边长为  $L$ ，线框上串有许多带正电的小球(看成质点)，每个小球的带电量为  $q$ ，每边的总带电量为零(即线框的带电量和各小球的带电量互相抵消)。今各小球相对线框以速率  $u$  沿绝缘线做匀速运动，在线框参考系中测得相邻两小球的间距为  $a$  ( $a \ll L$ )，线框又沿  $AB$  边以速率  $v$  在自身平面内相对  $S$  系做匀速运动。在线框范围内存在一均匀电场  $E$ ，其方向与线框平面的倾角为  $\theta$ 。考虑相对论效应，试在  $S$  系中计算以下各量。

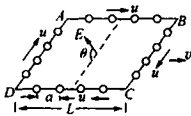


图 15-2-4

- (1) 线框各边上相邻两小球的间距  $a_{AB}$ 、 $a_{BC}$ 、 $a_{CD}$ 、 $a_{DA}$ ；
- (2) 线框各边的净电量  $Q_{AB}$ 、 $Q_{BC}$ 、 $Q_{CD}$ 、 $Q_{DA}$ ；
- (3) 线框和小球系统所受的电力矩大小；(4) 线框和小球系统的电势能。

### 第三节 对宇宙的初步认识



#### 【知识要点】

#### 一、太阳系

##### 1. 太阳系概况

太阳系是四十六亿年前伴随着太阳的形成而形成的. 太阳星云由于自身引力的作用而逐渐凝聚, 渐渐形成了一个由多个天体按一定规律排列组成的天体系统. 太阳系的成员包括一颗恒星、九大行星、至少六十三颗卫星、约一百万颗小行星、无数的彗星和星际物质等.

太阳是银河系中一颗普通的恒星. 根据恒星演化理论, 太阳与其他大多数恒星一样, 是从一团星际气体云中诞生的. 这团气体云存在于约 46 亿年前, 位于银河系的盘状结构中, 离中心约 25 亿公里. 其体积约为现在太阳的 500 万倍, 主要成分是氢分子. 这就是“太阳星云”. 经历 40 多万年的收缩凝聚, 星云中心诞生了一颗恒星, 它就是太阳.

在太阳形成以后不久, 残存在太阳周围的一些气体和尘埃, 形成了围绕太阳旋转的行星和诸多小行星和彗星等其他太阳系天体, 包括的地球和月亮.

太阳系据目前所知有九大行星, 它们可以分为两大类. 一类是与地球类似的, 有着坚硬石质外壳的“类地行星”, 从里向外分别包括水星、金星、地球和火星. 火星轨道外侧是小行星带, 因此类地行星又叫“带内行星”. 类地行星的卫星非常少, 像水星和金星就根本没有卫星. 另一类是“类木行星”, 也叫“巨行星”或“带外行星”. 类木行星的体积都非常大, 而且没有固态的外壳, 主要是由气体组成的. 包括行星之王木星、土星、天王星和海王星. 类木行星的另一特点是它们都有环, 其中尤以土星的环最为显著. 类木行星的卫星众多. 冥王星是一类特殊的行星, 它的体积非常小, 离太阳非常遥远, 是九大行星中离太阳最为遥远的, 而且冥王星的轨道是严重倾斜的. 以致于有的天文学家认为冥王星根本不是行星而是一颗较大的小行星. 冥王星拥有一个卫星. 在火星和木星的轨道间横亘着小行星带, 带内分布着数不清的小行星. 小行星和行星都诞生自太阳星云, 但它们的体积过于微小.

在太阳系的周围还包裹着一个庞大的“奥特星云”. 星云内分布着不计其数的冰块、雪团和碎石. 其中的某些会受太阳引力影响飞入太阳系, 这就是彗星. 这些冰块、雪团和碎石进入太阳系内部, 其表面因受太阳风的吹拂而开始挥发. 所以彗星都拖着一条长长的尾巴, 而且越靠近太阳尾巴越长、越明显. 太阳系内的星际空间并不是真空的, 而是充满了各种粒子、射线、气体和尘埃.



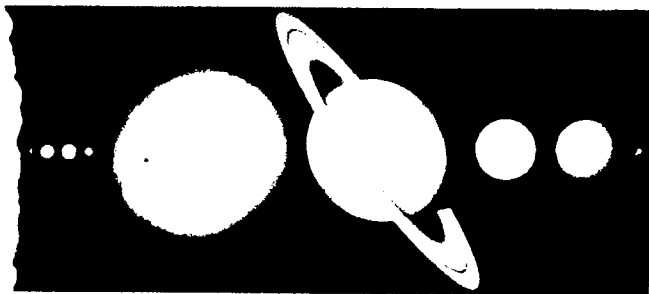


图 15-3-1

## 2. 太阳

太阳对太阳系而言是一个有着巨大影响并占支配地位的天体。它的直径达 140 多万公里，是地球直径的 100 多倍；质量占整个太阳系的 99.8。要用 100 多个地球才能填满太阳的圆面，而它的内部则能容纳大约 130 万个地球。

太阳内核的温度高达摄氏 1500 万度，在那儿发生着氢-氢核聚变反应。核聚变反应每秒钟要消耗掉约 500 万吨的物质，并转换成能量以光子的形式释放出来。这些光子从太阳中心到达太阳表面要花 100 多万年。光子从太阳中心出发后先要经过辐射带，沿途在与原子微粒的碰撞中丢失能量。随后要经过对流带，光子的能量被炽热的气体吸收，气体在对流中向表面传递能量。到达对流带边缘后，光子已经冷却到 5500 摄氏度的了。

我们所能直接看到的是位于太阳表面的光球层。光球层比较活跃，温度约为摄氏 6000 多度，属于比较“凉爽”部分。光球层上有一个个起伏的对流单元“米粒”。每个米粒的直径在 1600 公里左右，它们是一个个从太阳内部升上来的热气流的顶端。就是在不断的对流活动中，太阳每秒钟向宇宙空间释放着相当于 1000 亿个百万吨级核弹的能量。

在光球层的某些局部温度比较低，在可见光范围内这些部位就显得比其他地方黑暗，所以人们称之为“黑子”。光球层外包裹着色球层，太阳将能量通过色球层向外传递。这一层中有太阳耀斑，所谓耀斑是黑子形成前产生的灼热氢云。色球层之外是太阳大气的最外层日冕。日冕非常庞大，可以向太空绵延数百万公里，但只有在日全食时才可看到它。人们可以在日冕中看到从色球层顶端产生的巨大火焰“日珥”。

在辐射光和热的同时，太阳也产生一种低密度的粒子流——太阳风。太阳风以每秒 450 公里的速度向宇宙空间辐射。地球和其他某些行星的极光也是太阳风带来的。如果

一段时间内太阳风异常强大,便形成了太阳风暴.太阳的磁场极其强大复杂,其范围甚至超过了冥王星轨道.

太阳已经近 50 亿岁了,它还可以继续平静地燃烧约 50 亿年.50 亿年后,太阳内部的氢将转变成更重的元素,亮度会增加到现在的一倍,体积也将不断膨胀,水星、金星和地球都将进入它的大气.在经历 1 亿年的红巨星阶段后,太阳将耗尽所有能源而坍缩成一颗白矮星,并通过向宇宙空间抛射物质而形成一颗行星状星云.

质量	$(1.989E+30)$ kg
赤道半径	695000 km
平均密度	$1.410 \text{ g}\cdot\text{m}/\text{cm}^3$
自转周期	25 ~ 36 天
逃逸速度	618.02 km/s
平均表面温度	6000 $^{\circ}\text{C}$
年龄	45 亿年
主要化学成分	氢 92.1%
	氦 7.8%
	其他 0.1%

## 二、银河系

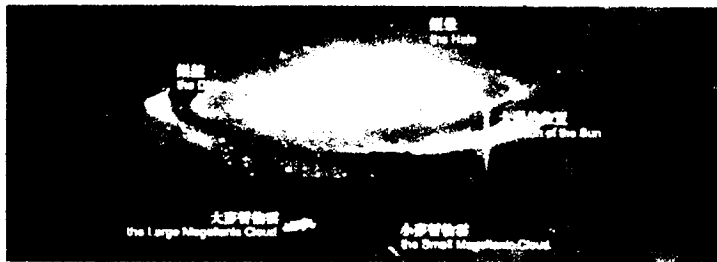


图 15-3-2

在没有灯光干扰的晴朗夜晚,如果天空足够黑,你可以看到在天空中有一条弥漫的光带.这条光带就是我们置身其内而侧视银河系时所看到的它布满恒星的圆面——银盘.银河系内有约两千多亿颗恒星,只是由于距离太远而无法用肉眼辨认出来.由于星光与星际尘埃气体混合在一起,因此看起来就像一条烟雾笼罩着的光带.银河系的中心

位于人马座附近。

银河系是一个中型恒星系，它的银盘直径约为十二万光年。它的银盘内含有大量的星际尘埃和气体云，聚集成了颜色偏红的恒星形成区域，从而不断地给星系的旋臂补充炽热的年轻蓝星，组成了许多疏散星团或称银河星团。已知的这类疏散星团约有一千两百多个。银盘四周包围着很大的银晕，银晕中散布着恒星和主要由老年恒星组成的球状星团。

从我们所处的角度很难确切地知道银河系的形状。但随着近代科技的发展，探测手段的进步在某种程度上克服了这些障碍，揭示出银河系具有的某些出人意料特征。长期以来人们一直以为银河系是一个典型的旋涡星系，与仙女座星系类似。但最近的观测却发现，它的中央核球稍带棒形。这意味着银河系很可能是一种棒旋星系。另外，银河系是一个比较活跃的星系，银核有强烈的宇宙射线辐射，在那里恒星以高速围绕着一个不可见的中心旋转。这表明在银河系的核心有一个超大质量的黑洞。

### 三、宇宙的初步知识

宇宙是广漠空间和其中存在的各种天体以及弥漫物质的总称。

宇宙是物质世界，它处于不断的运动和发展中。

《淮南子·原道训》注：“四方上下曰宇，古往今来曰宙，以喻天地。”即宇宙是天地万物的总称。

千百年来，科学家们一直在探寻宇宙是什么时候、如何形成的。直到今天，科学家们才确信，宇宙是由大约 150 亿年前发生的一次大爆炸形成的。

在爆炸发生之前，宇宙内的所存物质和能量都聚集到了一起，并浓缩成很小的体积，温度极高，密度极大，之后发生了大爆炸。

大爆炸使物质四散出击，宇宙空间不断膨胀，温度也相应下降，后来相继出现在宇宙中的所有星系、恒星、行星乃至生命，都是在这种不断膨胀冷却的过程中逐渐形成的。

然而，大爆炸而产生宇宙的理论尚不能确切地解释，“在所存物质和能量聚集在一点上”之前到底存在着什么东西？

“大爆炸理论”是伽莫夫于 1946 年创建的。它是现代宇宙系中最有影响的一种学说，又称大爆炸宇宙学。与其他宇宙模型相比，它能说明较多的观测事实。它的主要观点是认为我们的宇宙曾有一段从热到冷的演化史。在这个时期里，宇宙体系并不是静止的，而是在不断地膨胀，使物质密度从密到稀地演化。这一从热到冷、从密到稀的过程如同一次规模巨大的爆发。

根据大爆炸宇宙学的观点，大爆炸的整个过程是：在宇宙的早期，温度极高，在 100 亿度以上，物质密度也相当大，整个宇宙体系达到平衡。宇宙间只有中子、质子、电子、光子和中微子等一些基本粒子形态的物质。但是因为整个体系在不断膨胀，结果温度很快下降。当温度降到 10 亿度左右时，中子开始失去自由存在的条件，它要么发生衰变，要

么与质子结合成重氢、氦等元素；化学元素就是从这一时期开始形成的。温度进一步下降到 100 万度后，早期形成化学元素的过程结束。

宇宙间的物质主要是质子、电子、光子和一些比较轻的原子核。当温度降到几百度时，辐射减退，宇宙间主要是气态物质，气体逐渐凝聚成气云，再进一步形成各种各样的恒星体系，成为我们今天看到的宇宙。

如果星系目前正在彼此远离，那它们过去必定靠得更近，也就是说：较早时代的宇宙，物质密度会更高。继续这一推理就意味着过去必定存在一个有限的时刻，那时宇宙中的物质被压缩为极其高密的状态。按照哈勃定律将星系的距离除以各自的速度，就可估计出那一时刻距今约 100 ~ 200 亿年。这段时间对所有星系来说是共同的，那一时刻通常被称为“大爆炸”，也就是我们宇宙的开端。如果这一推论不错，那么宇宙中一切天体的年龄都不应超出这个“宇宙龄”所界定的上限。借助卢瑟福所开创的利用物质中放射性同位素含量测定其形成年代的方法，人们测量了地球上最古老的岩石、“阿波罗号”宇航员从月球上带回的岩石以及从行星际空间掉到地球上的陨石样本，发现它们的年龄均不超过 47 亿年。恒星的年龄可以从它们的发射功率和拥有的燃料储备来估计。根据热核反应提供恒星能源的理论，人们估计出银河系中最老恒星的年龄为 100 ~ 150 亿年。用这两种完全不同的方法得到的天体年龄竟与“宇宙龄”协调一致，这对大爆炸宇宙模型当然是十分有力的支持。

为什么宇宙会是我们观测到的这副样子？为什么它具有目前已测知的那些基本常数？20 世纪 80 年代初，在宇宙创生大爆炸框架下发展了目前最流行的暴胀宇宙模型：宇宙在大爆炸后不到 1 秒的时间里膨胀了大约 10 ~ 30 倍，大约和橘子一般大小，然后开始以较稳定的速率膨胀，直到现在，大约 150 亿年，成为目前的样子。

在这个过程中，物质“疙瘩”逐步形成了星系、恒星以及生命。这个模型暴胀期的长短是个关键。若稍短，物质为充分散开，原生宇宙就有重新坍缩为起点；若稍长，原生宇宙的物质则过于分散，形不成星系和恒星，自然也就不会出现生命和人类。

因此出现了暴胀为何如此精确的问题，按照现行的物理学基本定律，大爆炸产生的宇宙其“自然尺寸”应该只有亚原子大小，即普朗克长度  $10^{-35}$  量级，而这样的宇宙是短命的。苏联科学家林德提出“自我增殖的宇宙”概念——“最有可能的是，我们正在研究的宇宙是由早期的若干宇宙所形成的”。

1987 年霍金进一步提出了“婴儿宇宙”模型，两个大宇宙通过一个细“管子”连接起来，这个细管子称为“虫洞”，大宇宙为母宇宙，可能存在着从母宇宙分岔出去的另一端是自由的虫洞，这样的管子成为子宇宙、婴儿宇宙。就是说除了我们生存的宇宙之外还可能存在着众多的由虫洞连接起来的其他宇宙。

1992 年，萨莫林在前人的基础上提出了宇宙自然选择学说。母宇宙是空间闭合的，犹如一个黑洞，该黑洞在生存了一段时间后坍缩为一个奇点，奇点又会反弹爆炸膨胀为

新的下一代宇宙。

## 第四节 综合训练

### 【例题分析】

**例 1** 一飞船以  $u = 9 \times 10^3 \text{ m/s}$  的速率相对与地面匀速飞行。飞船上的钟走了 5s, 地面上的钟经过了多少时间?

**解** 飞船上的钟测量的时间间隔 5s 是固有时  $\tau_0$ , 所以飞船上的这段时间用地面上的钟测量, 得到

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-(9 \times 10^3/3 \times 10^8)^2}} \\ &= 5.000000002(\text{s}) \end{aligned}$$

这表明, 对于飞船这样大的速率, 其时间膨胀效应在实际上也很难测出。

**例 2** 带正电的  $p$  介子是一种不稳定的粒子, 当它静止时, 平均寿命为  $\tau_0 = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ , 之后即衰变成一个  $m$  介子和一个中微子。有一束  $p$  介子经高能加速器加速后, 在实验室测得它的速率为  $u = 0.75c$ , 并测得它在衰变前通过的平均距离为  $8.5 \pm 0.6 \text{ m}$ , 这些测量结果是否一致?

**解** 若用平均寿命  $\tau_0 = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$  和  $u$  相乘, 得  $5.85 \text{ m}$ , 与实验结果不符。考虑相对论的时间膨胀效应,  $\tau_0$  是静止  $p$  介子的平均寿命, 是固有时, 当  $p$  介子运动时, 在实验室测得的平均寿命应是

$$\tau_{\text{实验室}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = 3.9 \times 10^{-8}(\text{s})$$

故以实验室为参照系时,  $\pi$  介子通过的距离应为

$$l = u\tau_{\text{实验室}} = 0.75 \times 3 \times 10^8 \times 3.9 \times 10^{-8} = 8.8(\text{m})$$

这与实验结果符合得极好。

**例 3** 一宇宙飞船以速度  $0.8c$  相对于地球匀速前进, 在相对速度方向上宇航员测得飞船的长度为  $20 \text{ m}$ , 而地球上的观察者观察到的长度是

$$20 \times \sqrt{1-0.8^2} = 12(\text{m})$$

反之, 地球上测得到的一个  $20 \text{ m}$  长的一个地上物体, 在宇宙飞船上看来也只有  $12 \text{ m}$ 。

**例 4** 原长为  $5 \text{ m}$  的飞船以  $u = 9 \times 10^3 \text{ m/s}$  的速率相对于地面匀速飞行时, 从地面上测量, 它的长度是多少?

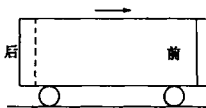


图 15-4-1

解 根据(2.3)式,在地面上测量的飞船长度

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} = 5 \sqrt{1 - (9 \times 10^3 / 3 \times 10^8)^2} \approx 4.999999998 \text{ (m)}$$

这表明,对于飞船这样大的速率,其洛伦兹收缩效应在实际上也很难测出。

例5 在一种热核反应 ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$ 中,各种粒子的静止质量为:氘核  $m_1 = 3.3437 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ,氚核  $m_2 = 5.0049 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ;氦核  $m_3 = 6.6425 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ,中子  $m_4 = 1.6750 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .求这一热核反应释放的能量是多少?

解 质量亏损为  $\Delta m_0 = (m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)$   
 $= [(3.3437 + 5.0049) - (6.6425 + 1.6750)] \times 10^{-27}$   
 $= 0.0311 \times 10^{-27} \text{ (kg)}$

相应释放的能量为

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2 = 0.0311 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} = 2.799 \times 10^{-12} \text{ (J)}$$

1kg 这种核燃料所释放的能量为

$$\frac{\Delta E}{m_1 + m_2} = \frac{2.799 \times 10^{-12}}{8.3486 \times 10^{-27}} = 3.35 \times 10^{14} \text{ (J/kg)}$$

这相当于同质量的优质煤燃烧所释放热量的 1000 多万倍!



### 【精选习题】

1. 已知隧道  $A_1 B_1$  的长度为  $L_1$ , 火车  $A_2 B_2$  的静长为  $L_2$ ,  $L_2 > L_1$ . (1) 如图 15-4-2 所示, 设火车  $A_2 B_2$  以匀速率  $v$  驶进隧道, 使得地面  $S_1$

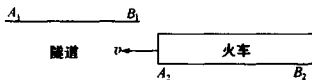


图 15-4-2

系中的观察者发现  $A_2$  与  $A_1$  相遇时,  $B_2$  与  $B_1$  也相遇. 试求  $v$  值; (2) 引入随火车一起运动的惯性系  $S_2$ , 在  $S_2$  系中的观察者必定认为  $A_2$  与  $A_1$  先相遇, 而后  $B_2$  与  $B_1$  相遇. 试求其间的時間间隔  $\Delta t_2$ .

2. 一矩形平行平板电容器充电后与电源断开, 沿矩形的一边相对于地面以恒定速度  $v$  (接近光速) 运动. 确定相对于地面上静止的观察者而言, 电容器二极板间的电场是多少? 已知电容器在地面上静止时二极板间的电场为  $E_0$ .

3. 如图所示, 在某恒星参照系  $S$  中, 飞船  $A$  和飞船  $B$  以相同速率  $\beta c$  ( $c$  为真空中光速) 做匀速直线运动. 飞船  $A$  的运动方向与  $+x$  方向一致, 而飞船  $B$  的运动方向与  $-x$  方向一致. 两飞船轨迹之间的垂直距离为  $d$ . 当  $A$  和  $B$  靠得最近时, 从  $A$  向  $B$  发出一细束无线电信号. 试问:

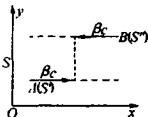


图 15-4-3

(1) 为使  $B$  能接收到信号,  $A$  中的宇航员认为发射信号的方向应与自己的运动方向成什么角?

(2) 飞船  $B$  接收信号时,  $B$  中宇航员认为自己与  $A$  飞船相距多少?

4. 如图所示, 平面反射镜  $M$  固定在  $S'$  系的  $x'y'$  平面内, 其法线方向与  $x'$  轴一致, 反射镜相对  $S$  系以速度  $v$  沿法线做平移运动. 试求光在反射镜上反射时, 入射角与反射角所遵从的关系.

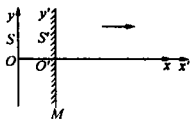


图 15-4-4

5. 如图 15-4-5(a) 所示, 波长为  $\lambda_0$  的光子与一运动的自由电子相碰, 碰后电子静止, 原光子消失, 产生一个波长为  $\lambda_1$  的光子, 后者的运动方向与原光子的运动方向成  $\theta = 60^\circ$  角. 之后, 此光子又与一个静止的自由电子相碰, 碰后此光子消失, 同时产生一个波长为  $\lambda_2 = 0.125\text{nm}$  的光子. 后者的运动方向又与碰前光子的运动方向成  $\theta = 60^\circ$  角, 如图 15-4-5(b) 所示. 试求第一个运动电子的德布罗意波长.

6. 波长为  $\lambda$  的 X 射线与静止的自由电子碰撞后, 在与入射光束成  $\theta$  角的方向上, 可以探测到波长为  $\lambda'$  的散射光的现象叫康普顿效应, 亦称康普顿散射, 康普顿散射与光电效应现象均表明电磁波的粒子性. 在康普顿散射中, X 光子与电子在碰撞前后总动量与总能量均守恒, 散射光与入射光的波长差  $\Delta\lambda$  与康普顿波长  $\lambda_c$  的关系是  $\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$ . (1) 试证明, 在康普顿散射中光子的散射角  $\theta$  与电子的散射角  $\varphi$  之间的关系是  $\cot \frac{\theta}{2} = (1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}) \tan \varphi$ ; (2) 在某康普顿散射实验中, 散射光线与入射光线的夹角为  $60^\circ$ , 散射光波长为  $0.0254\text{nm}$ . 试求反冲电子的动能和动量.

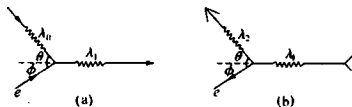


图 15-4-5

7. 原长(即在相对静止的坐标系量得的长度)  $600\text{m}$  的火箭, 垂直从地球表面起飞. 一光脉冲由火箭的发射点发出, 并分别在火箭的尾部和头部的镜上反射. 如果第一个回波光脉冲在发射后  $200\text{s}$  由基地收到, 第二个回波光脉冲延迟了  $17.4\mu\text{s}$  才收到, 试计算: (1) 火箭接收到光脉冲时离基地的距离; (2) 火箭相对地球的速度; (3) 火箭上的观察者测量火箭头尾两镜收到光脉冲的时间差是多少?

8. 光子火箭从地球起程时初始静止质量(包括燃料)为  $M_0$ , 向相距为  $R = 1.8 \times 10^6$  (1. y)(光年)的远方仙女座星云飞行. 要求火箭在  $25$  年(火箭时间)后到达目的地, 引力影响不计. (1) 忽略火箭加速和减速所需时间, 试问火箭的速度应为多大? (2) 设到达目的地时火箭静止质量为  $M'_0$ , 试问  $\frac{M'_0}{M_0}$  的最小值是多少?

## 问题与讨论 黑洞问题的简单分析

黑洞是宇宙中密度和引力最强大的颇具神秘感的天体.它是宇宙中的死亡陷阱和无边深渊,没有物质能摆脱它的强大引力,包括光线.在它附近,今天的所有物理定律都显得不适用了.

## 1. 三种可能形成黑洞的现实机制:

(1) 在宇宙诞生初期可能曾经形成过很多微型黑洞(太初黑洞),这些黑洞的体积很小,质量约为  $10^{12}$  kg.

(2) 超新星爆发后,如果星核的质量超过了太阳质量的两至三倍,那它将继续坍缩,最后成为恒星级黑洞.

(3) 在许多恒星系的中心也有一个因引力坍缩而形成的质量为  $10^4 \sim 10^9 m$  的巨型黑洞,比如在类星体星系的中心.

## 2. 黑洞的引力半径:

当粒子的动能  $mc^2/2$  等于和小于星体对粒子的引力势能  $GMm/r$  时,粒子被束缚在该星体上.从中可知黑洞的引力半径为

$$r_s = 2GM/c^2 \quad (1)$$

若星体的质量全部分布在半径为  $r_s$  的球内,则不可能有从  $r_s$  传出的任何信息.因此质量完全分布在引力半径  $r_s$  之内的星体称为黑洞.

太阳的引力半径是 3km,地球的引力半径是 8.9mm.

## 3. 引力场中的时空 黑洞的视界

在引力场中自由下落的实验室  $S'$  是一个局部惯性系, $S'$  系中观测者测得:引力场( $S$ 系)中的钟变慢,径向尺变短.引力场越强,钟越慢,径向尺越短.

考虑球对称分布质量  $M$  的引力场,引入的时空规(时空坐标的一组四个系数)称为施瓦里度规.

在弱引力场中( $R$  足够大时),引力势能转化为动能  $\frac{1}{2}mv^2 = G \frac{Mm}{r}$

即  $v^2 = 2G \frac{M}{r}$ , 根据  $T = \gamma T_0$ ,  $T_0 = (1 - 2GM/c^2 r)^{1/2} T$

$$\nu = \nu_0 (1 - 2GM/c^2 r)^{1/2} \quad (2)$$

$\nu_0$ —原子钟固有频率; $T_0$ —原子发光的固有周期; $\nu$ —在  $R \rightarrow \infty$  处时测得的频率.

在  $r \rightarrow r_s$  处,由于引力场足够的强,使得落向黑洞的钟慢到停止不走,径向尺缩小到长度为零.若令  $r = r_s$ ,将①式代入②式,则原子钟的频率  $\nu = 0$ .这是在远离黑洞  $r \rightarrow \infty$  处的  $S$  参照系中的观测者看到的现象.在  $S$  系的观测者看来,落向黑洞者永远不会



穿过  $r = r_s$  界面,  $r = r_s$  称为黑洞的视界。

而在向黑洞运动的  $S'$  系的观测者看来, 在  $r = r_s$  处没有发现反常的物理现象, 它们仍然在有限的时间内落入到  $r = r_s$  界面之内。

虽然黑洞本身不可见, 但可以用至少两种方法检测出它的存在。当一个黑洞吸引尘埃、气体或恒星时, 它的强大引力会把把这些物质撕碎成原子微粒, 原子微粒会从黑洞的边缘沿螺旋线坠向中心, 速度会越来越快, 直至达到每秒九百多公里。当物体被黑洞吞没时, 会因为互相碰撞而使温度上升到几百万度, 并发出 X 射线和  $\gamma$  射线。在宇宙中, 只有黑洞能使物体在密集的轨道上加速到如此高的速度; 也只有黑洞才会以这种方式发射 X 射线和  $\gamma$  射线。

任何物质或辐射到达黑洞边缘, 越过它的视界就永远消失了。在黑洞的奇点附近, 现有的任何物理定律都是不适用的。黑洞的奇点和我们现已认识的宇宙中的所有物质状态截然不同。到目前为止, 还没有任何科学方法能用来测量黑洞。现在我们说找到了一个黑洞都是通过间接途径推算出来的。

例 1997 年 8 月 26 日在日本举行的国际天文学大会上, 德国 Max Planck 学会的一个研究组宣布了他们的研究成果: 银河系的中心可能存在一个大黑洞, 他们的根据是用口径为 3.5m 的天文望远镜对猎户座中位于银河系中心附近的星体进行近六年的观测所得的数据。他们发现, 距离银河系中心约 60 亿公里的星体正以 2000km/s 的速度围绕银河系中心旋转。根据上面的数据, 试在经典力学的范围内(见提示 2), 通过计算确认如果银河系中心确实存在黑洞的话, 其最大半径是多少? (引力常数  $G = 6.67 \times 10^{-20} \text{ km}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ )

提示: 1. 黑洞是一种密度极大的天体, 其表面的引力是如此之强, 以至于包括光在内的所有物质都逃脱不了其引力作用。

2. 计算中可以采用拉普拉斯经典黑洞模型, 在这种模型中, 在黑洞表面上的所有物质, 即使用初速度等于光速  $c$  也逃脱不了其引力的作用。

解 首先求出一定质量的引力源成为黑洞应满足的条件。按照黑洞的定义, 包括以光速运动的光子也不能脱离黑洞的吸引, 即不能逃离黑洞的吸引, 即不能逃离黑洞的表面。而拉普拉斯经典黑洞则把光看作是以光速  $c$  运动的某种粒子。我们知道, 物体在引力作用下的势能是负的, 物体恰能逃离引力作用, 表示物体运动到无限远处时, 动能和势能都等于零。这意味着该物体处在引力源表面处时, 其动能与势能之和亦等于零。物体不能逃离引力作用, 表示该物体沿尚未到达无限远处, 其动能已全部用于克服引力做功, 但引力势能仍是负的。这意味着它在引力源表面处时, 其动能与势能之和小于零。若某引力源的质量为  $M$ , 半径为  $r_B$ , 质量为  $m$  的粒子在引力源表面的速度等于光速, 但它仍不能逃离引力作用, 则按牛顿力学的观点应有下列关系

$$\frac{1}{2}mc^2 - G \frac{Mm}{r_B} < 0 \quad ①$$

或 
$$r_B < \frac{2GM}{c^2} \quad ②$$

这就是说,对于质量为  $M$  的引力源,只有其半径  $r_B$ (叫做黑洞的引力半径)小于  $\frac{2GM}{c^2}$  时才会在其表面产生足够强的引力,使得包括光在内的所有物质都不能脱离其引力作用.对光而言,人们将无法通过光学测量看到它,这就是把它叫做黑洞的原因.

现在再来根据观测数据确定存在于银河系中心的大黑洞的半径.设位于银河系中心的引力源的质量为  $M$ ,绕银河系中心旋转的星体的质量为  $m$ ,该星体作圆周运动时,有下列关系  $m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$ ,即

$$M = \frac{rv^2}{G} \quad ③$$

$r$  为轨道半径.若该引力源为黑洞,则其质量分布球的半径应满足②式,即

$$r_B < \frac{2G}{c^2} \frac{v^2}{G} r = 2 \frac{v^2}{c^2} r \quad ④$$

根据观测数据,得  $r_B < 5.3 \times 10^8 \text{ m} = 5.3 \times 10^5 \text{ km}$ .

这说明,对质量由③式决定的引力源来说,半径小于  $5.3 \times 10^5 \text{ km}$  时才是黑洞,大于这个数值则不是黑洞.所以如果银河系中心存在黑洞的话,该黑洞的半径小于  $5.3 \times 10^5 \text{ km}$ .

## 参考答案

### 第一章 运动学

#### 第一节

1. 168 张/秒;  $\frac{1}{7}$     2.  $v_B = \sqrt{as\left(3 - \frac{1}{n}\right)}$     3.  $\frac{\sqrt{3}}{2}v_0$     4.  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}l_1$     5. 5min  
 6. (1)略 (2)30m; 18s    7.  $\frac{v}{1 + \cos\alpha}$     8.  $v_0 \leq \sqrt{6}ad$     9. 20m  
 10.  $2.5\text{m/s}^2$ , 方向与 BA 夹角  $\theta = 37^\circ$

#### 第二节

1. 30    2.  $\frac{v}{\cos\theta}$     3.  $v = \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}v'$     4. 11.8km/h, 东偏南  $63.4^\circ$   
 5. 12min    6.  $\omega h \sin\alpha$     7.  $\frac{c(a^2 + b^2)}{abn}$   
 8. 交点速度  $v_0 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\theta} / \sin\theta$   
 相对于  $l_1$  速度  $v'_1 = \frac{v_1\cos\theta + v_2}{\sin\theta}$   
 相对于  $l_2$  速度  $v'_2 = \frac{v_1 + v_2\cos\theta}{\sin\theta}$   
 9.  $r_{\min} = \frac{lv_2\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}}$     10.  $\frac{1}{2}v; \frac{5}{6}v; \frac{\sqrt{17}}{6}v$

#### 第三节

1.  $\frac{v_0^2}{2g}\tan\theta \cdot \sin\theta$     2.  $\frac{v_c(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gR})}{g}$   
 3.  $\alpha = \arcsin \frac{v_0}{\sqrt{2v_0^2 + 2gh}}$ ;  $x_{\max} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$   
 4. 证明  $\left(y - \frac{v_0^2}{g}\right)^2 + Z^2 = \left[\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 - \frac{2v_0^2h}{g} - d^2\right]$   
 5.  $\arcsin \frac{h}{l}$     6.  $\arcsin 3$     7.  $v = 2\text{m/s}$ ;  $\varphi_1 = 45^\circ$ ;  $\varphi_2 = \arcsin \frac{1}{3}$   
 8. (1)  $10\sqrt{3}\text{m}$ ;  $(x + v_0t)^2 + y^2 = v_0^2t^2$   
 9.  $v_p = \sqrt{\frac{13}{12}gh}$ ;  $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}$ ;  $t = \frac{1}{4g}(\sqrt{v^2 + 16gh} - v)$   
 10.  $\alpha \geq \frac{\pi}{4}$ ,  $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin^2\left(\alpha + \arcsin \frac{\sqrt{g\sin 2d}}{v_0}\right)$ ;  $\alpha < \frac{\pi}{4}$ ,  $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$

第四节

1.  $\frac{dv}{\pi - \varphi}$     2.  $\pi \sqrt{1 + 16\pi^2} \text{ m/s}^2$ , 方向与速度方向夹角  $\theta = \arctan 4\pi$

3.  $x = R \arccos \left( 1 - \frac{y}{R} \right) - \sqrt{2Ry - y^2}$     4.  $\frac{4\pi^2 R^2 + h^2}{4\pi^2 R}$

5.  $\rho = \frac{(1 + 4A^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{2A}$     6.  $\frac{\pi g D}{h}$     7.  $v = \frac{v_0 R}{r + R \cos \alpha}$     8.  $\frac{(v_1 + v_2)^2}{4R}$

9.  $\omega \leq \sqrt{\frac{g}{2}(L^2 - a^2)} - \frac{1}{4} \cos^{-1} \frac{a}{L}$  或  $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{2}(L^2 - a^2)} - \frac{1}{4} (2\pi + \cos^{-1} \frac{a}{L})$

10.  $v = \frac{Rv_0}{\sqrt{4R^2 - v_0^2 t^2}}$ ;  $a_n = \frac{Rv_0^2}{\sqrt{4R^2 - v_0^2 t^2}}$

第五节

1.  $r \omega \tan \alpha$     2.  $8\pi \text{ m/s}$     3.  $v = v_0 \tan \theta = \frac{y_A}{x_B} v_0$     4.  $\frac{2\pi l}{\omega(r_2 - r_1)}$

5.  $\frac{v}{\sin \varphi}; \frac{v_0^2}{r \sin^3 \varphi}$     6.  $1.89 \text{ rad/s}$     7.  $a_r = a_n = \frac{\sqrt{2} v_0^2}{2R}$     8.  $5 \text{ m/s}$     9.  $\frac{v_1 - v_2}{2r}$

10. 到  $ab$  直线距离为  $\sqrt{2}l$  的点

第六节

1.  $a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}$

2. (1) 椭圆  $\frac{x^2}{(al)^2} + \frac{y^2}{[(1-a)l]^2} = 1$ ; (2)  $v_{px} = av_A \cot \theta$ ,  $v_{py} = (1-a)v_A$

3. 轴与竖直方向成  $\alpha = \arccot \frac{v_0}{\omega r}$  朝木马运动, 方向倾斜并垂直于木马所在的半径.

4.  $d_{\min} = \frac{lv_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$ ;  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$     5.  $\frac{v_0}{R \cos \alpha} \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{1}{n}$ , 其中  $n = 1, 2, 3, \dots$

6.  $v \tan \theta; \alpha \tan \theta - \frac{v^2}{R \cos^3 \theta}$

7. (1) 以最大速度  $5 \text{ m/s}$  沿着与公路夹角为  $\varphi = \arctan \frac{1}{4} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{17}}$  方向奔跑

(2)  $\frac{10}{\sqrt{17}} \text{ m/s}$

8.  $\frac{v}{a} \sqrt{2 \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{a^2 H^2}{v^2}} \right)}$     9.  $v = R \sqrt{\frac{g}{2h} + \omega^2}$ , 与  $R$  的夹角  $\varphi = \arctan \left( \omega \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)$

10.  $\frac{2\sqrt{3}}{3} \omega l; \frac{4\sqrt{3}}{3} \omega^2 l$     11. (1)  $x_n = 8nh \sin \theta$ ; (2)  $x_1 = 4(u + \sqrt{2gh})^2 \sin \theta / g$

12. 当  $l \leq d \cot \theta_0 = \frac{v_1 d}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}$  时, 人应选择由  $A$  直接游到  $B$  的路径;

当  $l > d \cot \theta_0 = \frac{v_1 d}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}$  时, 人应先沿与湖岸成角  $\theta_0 = \arccos \frac{v_1}{v_2}$  的方向游至岸边, 上岸后再由岸上行走至  $B$ .

13.  $\frac{l}{2u} \frac{u^2 - v^2}{\sqrt{u^2 - v^2 \sin^2(\beta - \alpha)}}$     14.  $\frac{2v_0}{g} \sin\theta(1 - \tan^2\theta)$     15. 7:5    16. 200m, 30°

17. (1) ∞次; (2) 60km    18. 30°

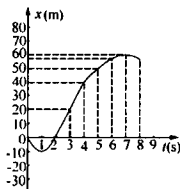
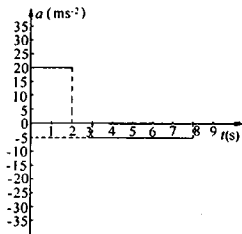
19. 如果  $l_1 \geq \frac{v^4}{4g\sqrt{v^2 + gl_2}}$ , 那么  $R_{\max} = \frac{v}{g} \sqrt{v^2 + 2gl_2}$ ; 如果  $l_1 < \frac{v^4}{4g\sqrt{v^2 + gl_2}}$ , 那么  $R_{\max} = \frac{\sqrt{v^2 + 2gl_1} [\sqrt{2gl_1} + \sqrt{2g(l_1 + l_2)}]}{g}$

20.  $x_d = \sqrt{mgl \left( \frac{l-h}{T_d} \right) - (l-h)^2}$ ;  $y_d = l \left( 1 - \frac{mg}{2T_d} \right)$ ;  $V_d = \sqrt{2gl \left( 1 - \frac{mg}{2T_d} \right)}$

问题与讨论

1. C    2. -560a

3.



4. 25次; 21次    5. 24.375s    6.  $4800\pi + 28800\sqrt{3}m^2$

第二章 静力学

第一节

1.  $10\sqrt{3}N$ , 方向与大小为 40N 的力的夹角为 30°  
 2.  $F = \frac{2}{9} G \pi^2 \rho^2 R^6 \left[ \frac{8}{d^2} - \frac{2}{(d-R/2)^2} + \frac{1}{8(d-R)^2} \right]$     3. 略  
 4.  $h = \frac{\sqrt{m^2 + 2\pi r^2 \rho m H} - m}{\rho \pi r^2}$     5. 3k    6.  $k = \frac{4k_1 k_2}{k_1 + k_2}$   
 7.  $mg \sqrt{\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ ,  $\arccos\left(\frac{\tan \alpha}{\mu}\right)$     8. 50N

第二节

1. C    2. 离左边杆的垂直距离为  $d_1 = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_1 + \tan \theta_2} d$   
 3. 当  $\mu = \frac{1}{2}$  时,  $\Delta\theta = \arctan \frac{4}{3}$ ; 当  $\mu < \frac{1}{2}$  时,  $\Delta\theta = \arctan \frac{2\mu+1}{2-\mu} - \arctan \frac{1-2\mu}{2+\mu}$ ; 当  $\mu > \frac{1}{2}$  时,  $\Delta\theta =$

$$\arctan \frac{2\mu + 1}{2 - \mu} + \arctan \mu - \arcsin \frac{1}{2\sqrt{1 + \mu^2}}$$

4. 二个力, 重力  $G$  和阻力  $f, G = f$   
 5. 当  $m \leq 2\sqrt{3} \text{kg}$  和  $m \geq 6 \text{kg}$ , 二物体不可能平衡  
 6.  $20N, \alpha < \arctan \mu$     7.  $R < (2\sqrt{11} + 1)r = 7.633r$

### 第三节

1. 略    2.  $G$     3. 略    4. 略    5.  $\arctan \frac{41}{24}$     6.  $\mu \geq 0.84, \varphi = 46^\circ 30'$   
 7.  $\frac{W}{P} > \frac{2(a-r)}{a}$     8. (1) 385N, (2) 对  $F$  的大小无限制  
 9.  $\mu < \frac{a}{h}$ , 滑动不转动;  $\mu > \frac{a}{h}$ , 转动不滑动;  $\mu = \frac{a}{h}$ , 可转可滑  
 10. 208N    11.  $\tan^2 \theta \tan(\theta - \varphi) + \tan \theta = 1; \tan^2 \theta \tan(\theta + \varphi) + \tan \theta = 1$   
 12.  $\mu \geq \tan \theta, PA = \frac{L}{1 + \mu \cot \theta}$     13. 188N, 608N 向下偏墙内  $\arctan 0.473$  度角  
 14.  $\alpha = 2 \arcsin \frac{\rho P b^2 c}{2mga}$   
 15.  $a = \frac{ar_1^2}{r} \sqrt{\frac{1}{\mu^2 r^2 (l^2 - r_1^2) + a^2 r_1^2}}$ , 其中  $r_1 = \sqrt{l^2 - \frac{(l^2 + a^2 - r^2)}{4a^2}}$

### 第四节

1.  $r > a$   
 2. 当  $R = \frac{m_1 h + m_2 l}{2(m_1 + m_2)}$  时, 随遇平衡; 当  $R > \frac{m_1 h + m_2 l}{2(m_1 + m_2)}$  时, 稳定平衡; 当  $R < \frac{m_1 h + m_2 l}{2(m_1 + m_2)}$  时, 不稳定平衡  
 3.  $\sqrt{1 - \rho/\rho_0} l < x < l, \alpha = 0; 0 < x < \sqrt{1 - \rho/\rho_0} l, \alpha = \arccos \frac{x}{l\sqrt{1 - \rho/\rho_0}}, x = 0$ , 杆处于水平位置;  
 $x < -\sqrt{\rho/\rho_0} l$  时,  $\alpha = \pi; 0 > x > -\sqrt{\rho/\rho_0} l$  时,  $\alpha = \arccos \sqrt{\rho_0/\rho} \cdot \frac{x}{l}$

### 第五节

1. E    2.  $\pi \rho_2 g H r^2 + \frac{2}{3} \pi g r^3 (\rho_1 - \rho_2)$     3.  $\frac{2}{3} \pi g r^3 (\rho_1 + \rho_2)$   
 4.  $(\rho_2 - \rho_1) g h \pi r^2 + \frac{2}{3} \pi g r^3 (\rho_1 + \rho_2)$   
 5. 水面下降; 水面不变; 水面可能不变也可能下降  
 6. A    7.  $(n-1)P_1$     8. 10cm    9.  $\frac{m_0(S - S_0)}{\rho S S_0}$

10.  $h < 2m$  时, 吸盘脱落

### 第六节

1. 15kg    2.  $\frac{1}{42} mg$ , 方向向下  
 3. (1) 当  $\mu < 1$  且  $\mu < x$  时, 首先发生立方体滑动, (2) 当  $\mu > 1$  且  $x > 1$  时, 首先立方体绕其右下棱转动, (3) 当  $x < 1$  且  $x < \mu$  时, 首先发生板偏转. 图略

$$4. h \leq \frac{l}{2k_1} \cdot \frac{l(k_1 + k_2)}{2[1 - (k_1 - k_2)h]} mg$$

$$5. 45^\circ > \theta_1 > 28^\circ, f = \frac{\sin\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} mg \quad 6. N_k = \frac{\sin \frac{k\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

$$7. (1) \mu_1 = 0 \text{ 或 } \mu_2 \leq \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - 1} \text{ 时, } 0 \leq AB \leq \sqrt{l_2^2 - l_1^2} \quad (2) \mu_1 \neq 0, \frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_1^2} > \frac{l_2^2}{l_1^2} \text{ 时, } AB \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} (\mu_1 l_1 + \sqrt{l_2^2 + \mu_1^2 l_1^2 - l_1^2})$$

$$(3) \mu_1 \neq 0, 1 + \mu_2^2 > \frac{l_2^2}{l_1^2} \text{ 且 } \frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_1^2} < \frac{l_2^2}{l_1^2} \text{ 时, } AB \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_2^2}} (\mu_2 l_2 + \sqrt{l_1^2 + \mu_2^2 l_2^2 - l_2^2})$$

若  $\frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_1^2} = \frac{l_2^2}{l_1^2}$  时,  $AB = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\sqrt{1 + \mu_2^2}} l_1$ ,  $AB$  数值满足条件为  $AB \leq \frac{\mu_1 + \mu_2}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} l_1$  8.

略 9.  $T = 4mg + Mg$

### 问题与讨论

1. 随着  $\theta$  的增大, 挡板对球的压力先减小后增大; 斜面对球的支持力减小

2.  $F_{DA}$  先变小后变大;  $F_{DB}$  一直变大 3. B 4. 2.8m 5. 略

6.  $T_{\min} = \frac{\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} mg$  7. 5.8N, 21N 8. 略 9.  $a \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{13}} \right)$

10. 125N 11. 50N, 越大 12.  $\theta_{\min} = \alpha - 2\varphi, \theta_{\max} = \alpha + 2\varphi$

## 第三章 牛顿运动定律

### 第一节

1.  $N = \frac{(\mu_1 - \mu_2) m_1 m_2 g \cos\alpha}{m_1 + m_2}, \alpha_{\min} = \arctan \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}$

2.  $0.81m/s^2, 1.18m/s^2, 0.45m/s^2, 36.8N$  3.  $1.4s$

4.  $R = \frac{r\mu g}{\sqrt{\mu^2 g^2 - r^2 \omega^4}}; \omega < \sqrt{\frac{\mu g}{r}}$  5.  $m \left( g - \frac{\sqrt{2}v^2}{2l} \right)$

6.  $0.52mg$  7.  $N = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \tan\alpha$

8.  $a_1 = \frac{(F \cos\alpha - mg \sin\alpha) \cos\alpha}{m \sin^2\alpha + M \cos^2\alpha}, a_2 = \frac{(F \cos\alpha - mg \sin\alpha) \sin\alpha}{m \sin^2\alpha + M \cos^2\alpha}$

$N = \frac{(F \sin\alpha + Mg \cos\alpha) m}{m \sin^2\alpha + M \cos^2\alpha}$

9. (1)  $f_{B \max} = (m_1 + m_2)(a \cos\theta + g \sin\theta), \frac{f_A}{f_{A \max}} = \frac{a}{\mu_A g}, \frac{f_B}{f_{B \max}} = \frac{1}{\mu_B} \left[ \frac{\frac{a}{g} + \tan\theta}{1 - \left(\frac{a}{g}\right) \tan\theta} \right]$

(2)  $\mu_A < \frac{\mu_B - \tan\theta}{1 + \mu_B \tan\theta}$  时分界面 A 先滑动,  $\mu_A > \frac{\mu_B - \tan\theta}{1 + \mu_B \tan\theta}$  时分界面 B 先滑动.

(3)  $\mu_A < \frac{\mu_B + \tan\theta}{1 - \mu_B \tan\theta}$  分界面 A 先滑动 (4)  $12.1^\circ \leq \theta \leq 38.7^\circ$

$$10. a_1 = \frac{P_g B}{BC - AD}, a_2 = \frac{P_g A}{AD - BC}. \text{ 其中 } A = \frac{P \cos \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - P - Q_1; B = \frac{P \cos \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} + Q_2; C = \frac{P \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} + Q_1 \tan \alpha; D = \frac{P \cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} + Q_2 \tan \beta$$

$$11. 0.27g, 0.05g, 0.04m$$

### 第二节

$$1. a_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}, T_1 = \frac{8m_1m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} = 2T_2$$

$$2. \text{ 相对加速度 } a = \frac{(m_1 - m_2)(g + a_0)}{m_1 + m_2}; F = 2T = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}(g + a_0)$$

$$3. 2R/3, 2R/3, 0.81R$$

$$4. \text{ 当 } a_0 < \frac{L}{3Hg} \text{ 时 } a = \frac{a_0}{1 - \frac{2a_0H}{gL}}; \text{ 当 } a_0 > \frac{L}{3Hg} \text{ 时, 那么当火车刹车足够剧烈情况下, 集装箱将发生}$$

翻转而不是滑下

$$5. \text{ 当 } \mu < L/h \text{ 时, } a < \mu g \text{ 不滑动也不翻倒; } \mu g < a < Lg/h \text{ 滑动但不翻倒; } a > Lg/h \text{ 既滑又翻倒.}$$

当  $\mu > L/h$  时,  $a < Lg/h$  不滑动也不翻倒;  $\mu g > a > Lg/h$  不滑动但翻倒;  $a > \mu g$  既滑又翻倒.

$$6. \sqrt{2gh - h^2 \tan^2 \theta \omega^2} \quad 7. \theta' = \arctan[\tan \theta (2 + \tan^2 \theta)] - \theta$$

$$8. a_0 = \frac{(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)(m_2 \sin \alpha_2 - m_1 \sin \alpha_1)}{(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2 g}$$

$$a = \frac{(M + m_1 + m_2)(m_2 \sin \alpha_2 - m_1 \sin \alpha_1)}{(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2 g}$$

$$9. \sqrt{2}mg, 2m \quad 10. 1.01m/s^2$$

### 第三节

$$1. t = \frac{T}{4\sqrt{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{R_0}{R}\right)^3} \quad 2. h_1 = \frac{v_0 h - v_r R}{v_0 + v_r}, h_2 = \frac{v_0 h + v_r R}{v_0 - v_r}$$

$$3. V = \sqrt{\frac{GM}{r_{地}}} \left( \sqrt{\frac{2r_k}{r_{地} + r_k}} - 1 \right); t = \frac{1}{2} \left( \frac{r_k + r_{地}}{2r_{地}} \right)^{3/2} \text{ 年}$$

$$4. T_{11} = \pi L \sqrt{\frac{2L}{GM}} \cdot \rho = \frac{3(N-1)M}{2\pi L^3} \quad 5. \text{ 示数不变}$$

### 第四节

$$1. 2g \sqrt{\frac{z}{4z+k}}; z \leq \frac{k^2}{4}; \text{ 小物体在任何位置都能保持静止; } z \geq \frac{k}{4} \text{ 或 } 0 \leq z \leq \frac{k}{36}$$

$$2. x = \frac{m \cos \alpha}{M+m}, t = \sqrt{\frac{2l(M+m \sin^2 \alpha)}{g(M+m) \sin \alpha}} \quad 3. \sqrt{N}, 0.414, 2.414$$

$$4. a_{1z} = \frac{-M \sin \theta \cos \theta}{M+m \sin^2 \theta} g; a_{2z} = \frac{m \sin \theta \cos \theta}{M+m \sin^2 \theta} g; a_{1r} = \frac{(M+m) \sin^2 \theta}{M+m \sin^2 \theta} g;$$

$$F = \frac{M(m+M)}{M+m \sin^2 \theta} g \quad 5. \text{ 大于 } 3/2 \quad 6. \text{ 最后停在第十块上面}$$

$$7. \text{ 若赛道参数 } L, h, \theta \text{ 满足: } L > \left( \frac{v_0}{\sqrt{gh}} \right) \cdot 2h \csc \theta, \text{ 则运动员采用 } AMA' \text{ 折线有利, 若不满足上式,}$$



运动员应选行 AA' 直线

8. 应选外道行驶; 当  $v > \frac{\sqrt{\mu g R_0} + \sqrt{\mu g R_1}}{\pi - 2}$  时, 选内道, 当  $\sqrt{\mu g R_0} < v < \frac{\sqrt{\mu g R_0} + \sqrt{\mu g R_1}}{\pi - 2}$  时, 外道;

$$v = \frac{\sqrt{\mu g R_0} + \sqrt{\mu g R_1}}{\pi - 2}, \text{内外一样}$$

9.  $r_N < 5.3 \times 10^4 \text{ km}$

10.  $x > \frac{m_B}{m_A + m_B} l, \omega \leq \sqrt{\mu m_A g / [(m_A + m_B)x - m_B l]}$ ;  $x < \frac{m_B}{m_A + m_B} l, \omega \leq \sqrt{\mu m_A g / [m_B l - (m_A + m_B)x]}$ ;  $x = \frac{m_B}{m_A + m_B} l, \omega$  可取任意值

### 问题与讨论

1.  $a_3 = g(1 - \mu_2)/2, T = mg(1 + \mu_2)/2; a_3 = g(1 - \mu_1)/3, T = mg(2 + \mu_1)/3$

2.  $T = (m_A + m_B)g/4$ , 若  $m_A < m_B, \mu_0 \geq \frac{1}{4} \left( \frac{m_B}{m_A} - 1 \right)$ ; 若  $m_A > m_B, \mu_0 \geq \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{m_B}{m_A} \right)$

3. (1)  $\mu_0 \geq 0.2259$ ; (2)  $\mu_0 \geq 0.2259$ ; (3) 当  $\omega = 5 \text{ rad/s}$  时, 如果木块向上有微小位移时, 它将滑回原处, 如果木块向下有微小位移时, 不会回到原处; 若  $\omega$  变大, 木块将仍在原处, 若  $\omega$  变小, 木块将下滑. 当  $\omega = 8 \text{ rad/s}$  时, 如果木块向上有微小位移时, 它将停留在该处, 如果木块向下有微小位移时, 它将返回; 若  $\omega$  变大, 木块将向上移动, 若  $\omega$  变小, 木块将停留在该处.

4.  $2R/3, 2R/3, 0.81R$

5. (1)  $\mu_1 < \tan\theta$ . ① 如果  $\mu_2 < \frac{\sin\theta - \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}$ , 则三物体无法保持相对静止. ② 如果  $\mu_2 \geq$

$$\frac{\sin\theta + \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta - \mu_1 \sin\theta}, \text{则 } \frac{\sin\theta - \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta} (M_1 + M_2 + M_3) g \leq F \leq \frac{\sin\theta + \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta - \mu_1 \sin\theta} (M_1 + M_2 + M_3) g. \text{ ③ 如果}$$

$$\frac{\sin\theta - \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta} \leq \mu_2 \leq \frac{\sin\theta + \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta - \mu_1 \sin\theta}, \text{则 } \frac{\sin\theta - \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta} (M_1 + M_2 + M_3) g \leq F \leq \mu_2 (M_1 + M_2 + M_3) g.$$

g. (2)  $\mu_1 > \tan\theta$ . ①  $\mu_2 < \frac{\sin\theta + \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta - \mu_1 \sin\theta}$ , 则  $F \leq \mu_2 (M_1 + M_2 + M_3) g$ . ②  $\mu_2 \geq \frac{\sin\theta + \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta - \mu_1 \sin\theta}$ , 则  $F \leq$

$$\frac{\sin\theta + \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta - \mu_1 \sin\theta} (M_1 + M_2 + M_3) g.$$

6. 若  $\mu < \frac{2m_1 \tan\alpha}{m_1 + m_2}$  时,  $a_1 = g \sin\alpha \left( 1 - \frac{\mu m_2}{m_1} \cot\alpha \right), a_2 = g \sin\alpha (1 - \mu \cot\alpha)$ ; 若  $\mu \geq \frac{2m_1 \tan\alpha}{m_1 + m_2}$  时,  $a_1 =$

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \sin\alpha, a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \sin\alpha$$

7.  $0.414 \text{ rad/s}, 2.414 \text{ rad/s}$

8. (1) C 不动. (2) 为  $\frac{1}{2} \mu_0 mg \cos\theta - mg \sin\theta$  (3) C 与 A 共同沿斜面向下移动.

9. 用  $\Delta\theta$  表示圆柱体转过的角度, 则  $\mu = \frac{1}{2}$  时,  $\Delta\theta = \tan^{-1} 4/3, \mu < \frac{1}{2}$  时  $\Delta\theta = \tan^{-1} \frac{2\mu + 1}{2 - \mu} + \tan^{-1}$

$$\frac{\mu + 2}{1 - 2\mu} - 90^\circ, \mu > \frac{1}{2} \text{ 时, } \Delta\theta = \tan^{-1} \frac{2\mu + 1}{2 - \mu} + \tan^{-1} \mu - \sin^{-1} \frac{1}{2\sqrt{1 + \mu^2}}$$

## 第四章 能量与动量

### 第一节

1. (1) 1.4W; (2) 2.67m/s    2.  $1:(\sqrt{2}-1):(\sqrt{3}-\sqrt{2}): \dots :(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

3.  $60^\circ$ 的轨道    4. 131W    5.  $mg\sqrt{\frac{mg}{DS\cos^3\theta}}$

6. C    7.  $\frac{\sqrt{2}}{4}F \cdot v$     8.  $4 \times 10^4$ W

### 第二节

1.  $h = s \cdot \sin\theta = (v_0^2 + v_j^2)/4g = 4.2$ m    2.  $W = -\frac{Mv^2}{2}$

3.  $h = 0.81$ R    4.  $W_j = 108$ J    5. (1)  $h = 100$ m; (2)  $W_A = 1232$ J

6.  $W = Th \left( \frac{1}{\sin\theta_1} - \frac{1}{\sin\theta_2} \right)$     7.  $v = \sqrt{2gl}$ ,  $t_j$  水平方向夹角  $\theta = \arctan \frac{\sqrt{23}}{2}$

8.  $\theta = \arccos \frac{2}{3}$     9.  $E_k = \frac{1}{6} ml^2 \omega^2$

### 第三节

1.  $E_k = \frac{W}{2}$     2.  $H' = 9.7$ m    3.  $F = (m_1 + m_2)g$

4.  $v = 11.2$ km/s    5.  $v = 7.24$ m/s    6.  $W = 4.5$ J

### 第四节

1.  $\frac{R_2 - R_1}{2R_3} \cdot G$     2. 略

3.  $T_0 \geq 3mg$  时,  $h = \frac{l}{4} \left( \frac{T_0}{mg} - 3 \right)$ ;  $T_0 < 3mg$  时,  $h$  为任意值

4.  $h_{\min} = 4.9$ m    5.  $\frac{m}{M} < \frac{1}{3}$     6.  $\frac{11}{16} \rho l^2 gh$     7.  $\frac{M}{m} = 2.43$

### 第五节

1.  $v_0/3$     2.  $\rho S v_0^2 / Mg \cos\theta$     3. 225N, 46.8N    4.  $\frac{\pi}{l} mg + \frac{m}{l} v^2$

5. 准确    6.  $\frac{mg}{\omega} \sqrt{\pi^2 + 4 \tan^2 \theta}$  方向与竖直方向夹角为  $\arctan \left( \frac{2 \tan \theta}{\pi} \right)$

### 第六节

1.  $\Delta s = \frac{mu v_0 \sin\theta}{(m+M)g}$     2.  $v_0 = \sqrt{\frac{MgL}{m+M}}$     3.  $2v_1 + v_0$     4.  $h = \frac{M-m}{2M} v^2$

5. (1)  $\frac{Nmu}{Nm+M}$ ; (2)  $\sum_{i=1}^v \frac{mu}{M+im}$     6.  $I_{\text{质}} = \frac{2\sqrt{3}}{7} mv$ ,  $I_{\text{质}} = \frac{\sqrt{3}}{7} mv$

7.  $t = \frac{n(n-1)}{2v} s$     8. (1)  $\sqrt{\frac{2MgL}{M+m}}$ ; (2)  $F = \frac{2m}{\Delta t} \sqrt{\frac{2MgL}{M+m}}$ ; (3)  $T = \frac{2m+3M}{M} mg$

### 第七节

1.  $\frac{m}{M+m} l$     2.  $3v$  或  $\frac{v}{3}$     3. 20s

4. (1)  $v_A = 0.433v_0$  沿  $x$  轴,  $v_B = 0.661v_0 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{v_{By}}{v_{Ax}}\right)$ ,  $v_C = 0$ ; (2) 37.5%
5. (1)  $h_1 = \frac{25}{81}h$ ,  $h_2 = \frac{4}{9}h$ ,  $h_3 = \frac{121}{81}h$ ; (2)  $h'_1 = \frac{144}{625}h$ ,  $h'_2 = h'_3 = \frac{529}{625}h$
6. 略 7.  $T = \frac{mM^2v_0^2}{l(M+2m)^2}$ ,  $s_M = \frac{Mv_0t+2ml}{M+2m}$
8.  $v_A = \frac{13}{64}v$ ,  $v_B = \frac{15}{64}v$ ,  $v_C = \frac{9}{16}v$  9: 9
10. (1)  $1.58 \times 10^7 \text{J}$ ; (2)  $1.44 \times 10^7 \text{J}$ ; (3)  $1.44 \times 10^8 \text{J}$ ; (4)  $3.0 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{s}$ ,  $-3.0 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{s}$
11.  $v_1 = v + \sqrt{\frac{2E}{kM}}$ ,  $v_2 = v - \sqrt{\frac{2kE}{M}}$

### 第八节

1.  $12.85^\circ$  2.  $\frac{4mv}{1+2\sin^2\alpha}$  沿  $CA$  方向,  $\frac{2mv^2}{1+2\sin^2\alpha}$
3.  $2(3H-4) \cdot \frac{m}{m'}$  3.  $\frac{1}{3}$  4.  $\arctan\left(\frac{1}{\mu}\right)$
5.  $\cot\alpha \cot\theta = k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  6.  $\frac{2Mmg}{m+M}$
7. (1) 在  $DAH$  内瞄准  $p_A$ , 可按次序击中  $D(25, 4)$ 、 $H(20, 0)$ ; (2) 在直线  $y = \frac{24x}{25}$  上侧的三角形中
8. (1)  $x_1 = 0.50\text{m}$ ,  $x_3 = 0.42\text{m}$ ,  $x_5 = 0.37\text{m}$ ,  $x_4 = x_6 = 0$ ;  $T_1 = 0.05\pi(\text{s})$ ;  
 $T_3 = 0.06\pi(\text{s})$ ,  $T_5 = 0.067\pi(\text{s})$ ,  $T_2 = T_4 = T_6 = 0$ ; (2) 17
9. (1) 3; (2)  $4h$
10. (1)  $v > \frac{T}{\sqrt{mk}}$ ; (2)  $u = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{m(kMv_0^2 + T^2)}{m+M}}$ ; (3)  $v = \frac{T}{\sqrt{k(m-M)}}$ ;  $m > M$
11. (1)  $\frac{v^2}{2g}$ ; (2)  $m(4rg + v^2)/4r^2$
12. (1)  $mMg^2t^2/8(M+m)$ ; (2)  $Mgt^2/8(M+m)$
13. (1)  $\frac{1}{3}\sqrt{3gR}$ ; (2)  $h - \frac{R}{4}$ ; (3) 左,  $\sqrt{32}/\sqrt{Rg}$
14.  $PO$  方向,  $v = \frac{2mv}{m+M} \cdot \sin \frac{\pi}{n+1}$  15.  $\frac{u}{13}$
16. (1)  $v = \sqrt{2gl}$ ; (2)  $\sqrt{3gl(2-\sqrt{2})}/\sqrt{20}$ ; (3)  $\frac{3l}{2\sqrt{2}}$
17. (1) 1.13m; (2) 反复碰撞后,  $x$  方向分速度为 0,  $B$ 、 $C$  在  $Oyz$  平面摆动, 最低点速度 2.20m/s, 最高点  $z = 0.24\text{m}$ ,  $y = \pm \sqrt{(2L-z)z} = \pm 0.95\text{m}$

### 问题与讨论

1.  $\frac{m^2g}{2k}$  2.  $mgh + m^2g^2/2k$  3. (1)  $\frac{kl_0}{4mg} < \mu < \frac{kl_0}{2mg}$ ; (2)  $l_0/3$
4. (1)  $\sqrt{\frac{k}{2m_2} \frac{m_2 - m_1}{m_2}} v_0$ ; (2)  $\frac{m_2 - m_1}{m_2} v_0$  5. (1)  $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2m_2gh}{k}}$ ; (2)  $\frac{1}{9}h$

## 第五章 角动量

第一节

1. (1)  $M_1 = 0, L_1 = 2m\sqrt{GMR}$ ; (2)  $M_2 = \frac{GMm}{R}, L_2 = m\sqrt{GMR}$   
 2.  $4.13 \times 10^{16} \text{ rad/s}$  3. (1)  $\frac{m_1 m_2 l}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$ ; (2)  $\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)l} (v_1 - v_2)^2$   
 4. (1)  $\omega = \sqrt{3g(\cos\theta + \sin\theta - 1)/2l}, \beta = \frac{3g}{4l}(\cos\theta - \sin\theta)$ ; (2)  $F_x = 0, F_y = \frac{14-3\sqrt{2}}{4}mg$ , 竖直向下  
 5.  $2.65 \times 10^{30} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$   
 6. (1)  $\vec{r} = mgx_1 \cdot \vec{j}$ ; (2)  $\vec{L} = mgx_1 t \cdot \vec{j}$  7. (1)  $6t(\text{N}\cdot\text{m})$ ; (2)  $0.06t^2 \text{ rad/s}$

第二节

1.  $\left(\frac{L_0^2}{J^2} - 1\right)mv_0^2$  2.  $\omega = \frac{3mv_0 \sin\theta}{2MI}$  3. (1)  $v_f = 0.55v_0$ ; (2)  $\omega = \frac{0.32v_0}{l}$   
 4.  $r_{\min} = r_0, r_{\max} = 3r_0$  5. 略  
 6.  $r_1 = r_0 \left[1 - \sqrt{\frac{J^2 r_0}{Mm^2}}\right]$   $r_2 = r_0 \left[1 + \sqrt{\frac{J^2 r_0}{Mm^2}}\right]$

第三节

1. 12 倍 2. (1)  $\omega_1 = 0$ ; (2)  $\omega_2 = \frac{v_0}{5R}$   
 3. (1)  $\omega_1 = \frac{v_0}{6R}$ ; (2)  $\omega_2 = \frac{v_0}{10R}$ ; (3)  $\omega_3 = 0$   
 4.  $\theta_{\max} = \cos^{-1} \left[1 - \frac{m^2 v_0^2}{2(2M+m)(6M+m)gl}\right]$   
 5.  $\omega = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2 t^2}, \beta = -\frac{2\omega_0^3 t}{(1 + \omega_0^2 t^2)^2}, r = a\sqrt{1 + \omega_0^2 t^2}$   
 6.  $\omega_a = \omega_0, \omega_b = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{kt}{kt + M_b} \cdot \omega_0$  7. 8 倍

第四节

1. 质点组  $A, B$  相对  $S$  系可能静止, 也可能作匀速直线运动, 为使  $A, B$  间距  $r$  不变, 应让  $A, B$  同时以  $\omega = \sqrt{\frac{G(m_A + m_B)}{r^3}}$  的角速度在同一平面内绕质心作匀速圆周运动. 2.  $t = \sqrt{\frac{2(m_1 h_1 - m_2 h_2)}{g(m_2 - m_1)}}$   
 3. (1)  $3.9 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ ; (2)  $13 \text{ m/s}$ ; (3)  $4056 \text{ N}$ ; (4)  $3.8 \times 10^3 \text{ J}$   
 4.  $r_{\max} = 3R$  5. (1)  $E = \frac{-GMm}{2r_0}$ ; (2)  $\Delta r = \frac{-4\pi r^2 f}{GMm}, \Delta E_A = 2\pi f$   
 6.  $R \cos \alpha$  7. (1)  $h_1 = \frac{H - aR}{1 + \alpha}, h_2 = \frac{H + aR}{1 - \alpha}$ ; (2)  $\sqrt{\frac{1}{1 - \alpha^2}} \times \frac{2\pi(R + H)}{(1 - \alpha^2)} v_0$   
 8. (1) 椭圆运动,  $T = 50$  年; (2)  $M_A = 2.43 M_\odot, M_B = 0.97 M_\odot$  9. 1.653  
 10. (1) 第一个国家不能, 第二个国家能; (2)  $\theta_0 = 2^\circ = 0.0349 \text{ rad}$ ,  $e$  的最大可取值  $e = \frac{\theta_0}{4} = 8.7 \times 10^{-3}$

问题与讨论

1. 略    2.  $\theta = \sin^{-1} \sqrt{\frac{8GM + 5R_0^2}{125R_0^2}}$   
 3.  $\frac{m}{m_1} \frac{GM_m}{R} \left[ \frac{m_1}{m} + 1 - \sqrt{\frac{2R_m}{R + R_m}} \right]$     4. 略

第六章 振动和波

第一节

1.  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2G}{ml}}$     2.  $2\pi \sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$     3.  $2\pi \sqrt{\frac{l \cos(\theta/2)}{g \cos \alpha}}$   
 4.  $2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g \sin \theta}}$     5.  $2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg + kL}}$     6.  $2\pi \sqrt{\frac{l}{g(\sin \alpha + \sin \beta)}}$   
 7. (1) 两物在 O 点分离,  $v = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot s$ ; (2)  $x = \frac{\sqrt{2}}{4} n \pi s_0 (n \in \mathbb{N})$

第二节

1.  $v_0 = \frac{2L}{(2n+1)\pi} \sqrt{\frac{g}{R}} (n=0, 1, 2, \dots)$     2. (1)  $E_{\text{max}} = 0.05\text{J}$ ; (2) 0.314s  
 3.  $4.63 \times 10^5 \text{N}$     4.  $\frac{1}{3} r$     5.  $\sqrt{2}$     6. (1) 略; (2) 否; (3)  $221^\circ, 82.5^\circ$

第三节

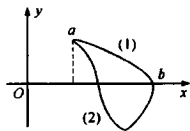
1. B, D    2. 0.25s, 0.75s    3. B、F 为疏部, D、H 为密部  
 4. 0.4s, 5m/s    5. (1) 向下; (2) 1.9s

第四节

1. A、B、C    2. 从 B 到 A; 2m    3.  $\lambda = 32\text{m}, v = 80\text{m/s}$   
 4. 8 次    5. 43m

第五节

1. B    2. B    3. A, C    4. C    5. D    6.  $2\pi^2 R \left( \frac{1}{4} + \frac{n}{2} \right)^2$   
 7. 波沿 x 轴正方向传播时,  $v = 20 \left( n + \frac{1}{4} \right) \text{m/s}, n = 0, 1, 2, \dots$   
 波沿 x 轴负方向传播时,  $v = 20 \left( n + \frac{3}{4} \right) \text{m/s}, n = 0, 1, 2, \dots$   
 8. 如右图  
 9. (1) 振幅 = 0.2m, 波长 = 8m;  
 (2)  $v_{ti} = 400\text{m/s}, v_{\text{左}} = 1200\text{m/s}$ ;  
 (3) 波向左传播  
 10.  $2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$



11. (1)  $T = 0.628s$ ; (2)  $A = 0.091m$

12. (1)  $T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$ ; (2)  $\Delta h = L$ ; (3)  $\frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{2l}{g}}$

13.  $\sum F = \frac{m_1}{4m_1 + m_2} kx$ ,  $\frac{m_1}{4m_1 + m_2} k$  为一常数, 即  $\sum F$  与  $x$  成正比, 且方向相反. 所以  $m_1$  做简谐

振动.  $T = 2\pi\sqrt{\frac{4m_1 + m_2}{k}}$

14.  $T = \pi\sqrt{ma^3/\sqrt{2}kQq}$     15.  $\omega = \sqrt{\frac{2ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}}$

16. C 相对 B 作简谐振动.  $x = l\sin(\sqrt{\frac{4g}{3l}} \cdot t - \frac{\pi}{2})$

## 第七章 分子运动论和热力学第一定律

### 第一节

1. (1)  $2.45 \times 10^{25}$  个/ $m^3$ ; (2)  $1.3kg/m^3$ ; (3)  $5.3 \times 10^{-26}kg$ ;

(4)  $3.4 \times 10^{-9}m$ ; (5)  $6.21 \times 10^{-21}J$

2. 略    3. 8500 年    4. 6.4K    5.  $2 \times 10^5 Pa$

6.  $\frac{\rho}{\rho} \sqrt{\frac{\mu}{2E_k N_A}}$     7. 1.5Pa

### 第二节

1.  $\rho = \frac{p}{gV} \frac{G_1 - G_2}{p_1 - p_2}$     2. 3cm    3. 0.76atm    4. 24cm

5.  $\frac{\lg(p_0 - p)/\rho}{\lg V_0/(V_0 + V)}$     6.  $\frac{I \Delta n}{12(m + M)}$     7. 315K, 280K    8. 13g/12

9. (1)  $T = 2\pi\sqrt{\frac{mV_1 V_2}{\rho S^2 (V_1 + V_2)}}$ ; (2) 0.95    10. 左移, 22cm

### 第三节

1. 623.7J    2.  $\frac{1}{2} \rho g S_1 H^2$     3.  $T = \frac{2MgV_0}{5\gamma R_A} + \frac{3}{5} T_0$ ,  $V = \frac{3\gamma R_A T_0}{5Mg} + \frac{2}{5} V_0$

4. 6J    5. 270K, 27L    6. (1)  $2.50 \times 10^4 Pa$     (2) 0.96m<sup>3</sup>

7.  $\frac{3}{8} Q_0$     8. (1)  $T_2 = T_1 + \frac{P_0}{2A} - \sqrt{\frac{P_0}{A} T_1 + \frac{P_0^2}{4A^2}}$ ; (2) 38.3°C; (3) 1.7°C

### 第四节

1.  $T = 289K$     2. 10.9°C    3. 94.4°C    4. 9:2

5.  $5 \times 10^6 km$     6. 60°C

### 第五节

1. (1)  $V_B = V_0, \Delta T_B = 0$ ; (2)  $V_A = 2V_0, \Delta T_A = \frac{p_0 V_B}{R}$ ; (3)  $\Delta Q = \frac{5}{2} p_0 V_0$

2.  $\frac{WT}{2(T-T_0)}$

3. (1)内能减少  $8.203 \times 10^3 \text{J}$ ; (2)气体内能减少  $9349 \text{J}$ ; (3)密度增加  $0.236 \text{kg/m}^3$

4. (1)最低温度  $200 \text{K}$ , 最高  $625 \text{K}$ ; (2)  $B \rightarrow C$  吸热  $2.5 \times 10^3 \text{J}$ ,  $C \rightarrow D$  放热  $7.5 \times 10^3 \text{J}$ ,  $D \rightarrow A$  放热  $1.5 \times 10^3 \text{J}$

5.  $327 \text{K}$     6.  $16.7 \text{cm}$     7.  $127^\circ \text{C}$     8.  $d = \text{arc cos } \frac{\pi \sigma d_1}{Mg} \left( \frac{d_1}{d_2} - 1 \right)$

9. 左室  $T_1 = 1220 \text{K}$ ,  $p_1 = 2.03 \times 10^5 \text{Pa}$ ; 右室  $T_2 = 367 \text{K}$ ,  $p_2 = 1.65 \times 10^5 \text{Pa}$

10.  $0 < \Delta h < 1 \text{cm}$  时, 水银柱绕初始平衡位置振动, 但不是简谐振动;  $\Delta h > 1 \text{cm}$  时, 水银将偏离  $\Delta h = 1 \text{cm}$  的平衡位置, 从  $B$  管流出, 但又不能无止境地流出;  $\Delta h = 1 \text{cm}$  时, 系统处于不稳定平衡, 向上偏属“ $\Delta h > 1 \text{cm}$ ”的结论, 向下偏属“ $0 < \Delta h < 1 \text{cm}$ ”的结论.

11. (1)  $341.3 \text{K}$ ; (2)  $1.2 \text{N}$ ; (3)  $843 \text{m}$ ; (4) 气球受空气阻力作用作振幅逐渐衰减的简谐运动    12.  $10.7 \text{J}$

### 问题与讨论

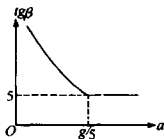
1. 与封闭的空气柱相接触的水银面最后的平衡位置距短管的封闭端为  $16.7 \text{cm}$ .

2.  $h > P_0$     3.  $10.7 \text{J}$     4.  $\tan \beta = \begin{cases} g/a & \text{当 } a < g/5 \\ 5 & \text{当 } a \geq g/5 \end{cases}$

5. 偏转角  $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{n_2}{n_1}$  最大偏移距离

$$d_{\max} = R \cdot \tan \varphi_{\max} \left( \frac{n_2}{n_1} > \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

当  $\frac{n_2}{n_1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  时, 光线“无限远离”.



## 第八章 固体、液体和物态变化

### 第一节

1.  $2 \times 10^{-4} \text{m}$     2. ~ 4. 略    5.  $r = 20.03 \text{cm}$

6.  $1.003 \times 10^{-3} \text{m}^3$     7.  $\frac{\alpha_1 \rho_1 - \alpha_2 \rho_2}{\alpha(\rho_1 + \rho_2)} l$

### 第二节

1.  $7.64 \times 10^{-2} \text{N/m}$     2. 略

3.  $T_1 = 0$ ,  $T_2 = T_3 = 1.67 \times 10^{-4} \text{N}$ ;  $T_1 = T_2 = 2 \times 10^{-4} \text{N}$ ,  $T_3 = 0$

4.  $0.16 \text{cm}$     5.  $0.174 \text{m}$     6.  $25.4 \text{N}$     7.  $6 \times 10^{-2} \text{J}$

### 第三节

1.  $x = H + \sqrt{H^2 + \frac{373}{273} \left( \frac{p_0}{\rho g} + H \right)}$     2.  $\frac{4\rho_2 R c t_1 - 2R\rho_1 L_m}{3\rho_1 L_m}$

3.  $-5.4^\circ \text{C}$     4.  $50\%$     5. (1)  $2 \text{g}$ ; (2)  $3.1 \text{g}$

6. 373.3K, 2290J    7. (1) 1.08mol; (2)  $1.7 \times 10^{-2}$  atm

第四节

1.  $2 \times 10^{-5}$  / °C    2. A 丝断, B 丝不断  
 3. (1) 0.71m; (2)  $9.6 \times 10^4$  Pa; (3)  $d \geq 2.06$  cm  
 4.  $3.07 \times 10^{-3}$  kg    5. 1013mm, 902.1mmHg  
 6. (1)  $T_1 = 549$  K,  $T_2 = 125$  K; (2) 放热  $1.74 \times 10^3$  J  
 7. (1)  $\frac{1}{2} nR(5T_C - 7T_A)$ ; (2)  $\frac{1}{4} nR(T_C - 2T_A)$   
 8. (1)  $T_A = 349.95$  K,  $T_B = 372.89$  K; (2)  $t_1 = 67$  °C,  $t_2 = 100$  °C.  $\tau$ : 温度时, 容器中有 95.5g 的 B 液体, 无液体 A  
 9. (1) 711.8mmHg; (2) 23.0°C, 2.84%  
 10.  $2.1 \times 10^3$  m     $11.6 \times 10^{-8}$  kg    12. (2420  $\pm$  150) J/g  
 13. 空气  $2.9 \times 10^{-2}$  mol, 水  $4.4 \times 10^{-7}$  mol    14. 114.5°C

第九章 静电场

第一节

1.  $F = k \frac{qQh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$ , 力的方向沿轴线方向     $2.3 \times 10^{-3}$  C    3.  $\frac{l_1^3}{l_2^2}$   
 4. 略    5. 平衡位置  $x_0 = (1 + \sqrt{2})l$ , 稳定平衡; 图略  
 6.  $F = kq_1 \left( \frac{q_2}{a^2} + \frac{q_3}{(a+b)^2} \right)$     7.  $(2\sqrt{2} - 1) \frac{kq^2}{8a^2}$

第二节

1.  $E = \frac{3kQ}{a^2}$ , 方向由 O 指向 A  
 2.  $E = k \frac{Qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$ , 其中  $x$  为场点与圆心 O 的距离  
 3.  $E = \frac{kQ}{7r^2} \left[ 8 - \frac{4r^2}{(2r-R)^2} \right]$     4. 0    5.  $2kl/r$ ,  $r$  为场点离导线的距离  
 6.  $(\sqrt{2} + \pi - 2 \arctan \sqrt{2}) \sqrt{\frac{m}{4\pi k q}}$

第三节

1.  $\frac{2kQ^2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 v^2}$     2.  $N^{2/3} U$     3.  $\frac{R_2 - R_1}{R_2} U_1$   
 4. 最低点的位置; 最低点与 A 连线和 AB 的夹角为  $\arctan \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}$   
 5.  $-\frac{abU_0}{k\sqrt{a^2 + b^2}}$     6.  $E_A = \frac{kQ}{a^2}$ ,  $E_B = \frac{-kQ}{b^2}$ ,  $U_A = \frac{kQ}{a} - \frac{kQ}{R_1} + \frac{kQ}{R_2}$ ,  $U_B = \frac{kQ}{b}$   
 7.  $2k\pi \left( R_1 \sigma_1 + \frac{R_2^2 \sigma_2}{r} \right) r > R_2; 2k\pi (R_1 \sigma_1 + R_2 \sigma_2) r < R_2$



8.  $k \frac{2q}{R} - U_p$     9.  $Q[1 + a(4 + 3\sqrt{2}/2)/r]/8$

10.  $-Q, Q, k \frac{Q}{r_2}; -Q, 0; \frac{r_1}{r_2} Q$     11. (1)  $-\frac{R}{d} Q; (2) \frac{kQ}{d}$     12. 24.46  $\frac{kQ}{R}$

第四节

1.  $\frac{Q'q}{Q' - q}$     2. 减小原来的 1/3 或增为原来的 5/3    3.  $2C_0, 3C_0$     4. 225V

5. (1)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} C; (2) \frac{\sqrt{5}-1}{2} C$     6. (1)  $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{24-2} CU^2, (2) \frac{1}{63} CU^2$

7.  $\frac{1}{2k(r_1 + r_2)} [r_1 r_2 (U_1 - U_2)^2];$     8.  $6\mu F$     9.  $A - \frac{1}{4} C \neq$

第五节

1.  $E_A > E_C > E_D > E_B$     2. (1)  $U/d; (2) E_0, E_0/\epsilon; (3) \frac{2\epsilon_1}{1+\epsilon_1} E_0, \frac{2}{1+\epsilon_1} E_0$

3.  $\frac{1+3\epsilon}{2(1+\epsilon)} C_0$

第六节

1. (1) 外力做功为零, 电场垂直于  $xOy$  平面, (2) 外力做功为  $-W$ , 由电势叠加可得

2.  $\sqrt{\frac{8\pi R}{k} (R^3 - R_0^3) P}$

3. (1)  $\frac{2}{3} \left[ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] \epsilon; \frac{1}{3} \left[ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] \epsilon; (2) \frac{C\epsilon^2}{3}$

4.  $2\pi k \frac{Q_1 + Q_2}{S}; 2\pi k \frac{Q_1 - Q_2}{S}; 2\pi k \frac{Q_1 + Q_2}{S}; 2\pi kd \frac{Q_1 - Q_2}{S}$

5.  $Q(t) = C_0 V_0 \left( 1 + \frac{gt^2}{2(p-1)L} \right); 0 < t \leq \sqrt{\frac{2L}{g}}$

$Q(t) = C_0 V_0 \left( 1 + \frac{L'}{(p-1)L} \right); \sqrt{\frac{2L'}{g}} < t \leq \sqrt{\frac{2L}{g}}$

$Q(t) = C_0 V_0 \left( 1 + \frac{L+L'}{(p-1)L} - \frac{gt^2}{2(p-1)L} \right); \sqrt{\frac{2L'}{g}} \leq t \leq \sqrt{\frac{2(L+L')}{g}}$

$Q(t) = C_0 V_0; t > \sqrt{\frac{2(L+L')}{g}}$

其中  $C_0 = \frac{L^2}{4\pi kd}$

6. (1) 1683  $\frac{1}{3} q_1; 3366 \frac{2}{3} q_1; (2)$  第 58 块板的电势最高, 63441  $\frac{4\pi kdq_1}{L_2}$

7. (1)  $9 \times 10^{-8} C; (2) 450V$     8.  $C_{AB} = 2.9\mu F$     9.  $\frac{(U_0 - U)\epsilon}{d_1 + \epsilon d_2}$

问题与探讨

1. 略    2. 14.1m/s, 10m/s    3.  $-Rq/l$     4.  $\frac{2\sqrt{3}kQ}{9R^2}, \frac{\sqrt{2}}{2} R$

5.  $2kq/R$     6.  $\frac{4kq}{\pi R^2}$     7.  $\frac{kQ^2}{16\pi R^3}$     8.  $k\pi\sigma$

9.  $\frac{\rho ab}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{d}\right)$     10.  $\frac{Q}{4R} \sin\theta$     11.  $\sigma = 3E \cos\alpha / 4k\pi$   
 12.  $\frac{kQ^2}{8R^2}$     13.  $\frac{kQ}{a(a+l)}$

## 第十章 稳恒电流

### 第一节

1. (1) 1.5C (2) 0.36C    2.  $R = \frac{3\rho l}{2S}$     3. 200km    4. 4R  
 5. 73.5°C    6. 5V, 0.3A    7.  $R_{\text{eff}} = 2r$     8.  $\frac{5}{48}R$     9. 4W  
 10. 100V,  $10^4\text{W}$     11.  $R_d = \frac{7}{12}R$ ,  $R_w = \frac{3}{4}R$ ,  $R_x = \frac{5}{6}R$

### 第二节

1. -3.5V    2. (1) 10V; (2) 0    3. -0.3V    4. (1) R (2)  $\frac{1}{6}I$   
 5. 3A    6.  $\frac{15}{8}R$     7. 0.07V  
 8.  $Q_1 = \frac{C_1[\zeta_1(C_2 + C_3) - \zeta_2 C_2]}{C_1 + C_2 + C_3}$ ,  $Q_2 = \frac{C_2[\zeta_2(C_1 + C_3) - \zeta_1 C_1]}{C_1 + C_2 + C_3}$ ,  
 $Q_3 = \frac{C_3[\zeta_3(C_1 + C_2) - \zeta_3 C_3]}{C_1 + C_2 + C_3}$   
 9.  $R_{AB} = \frac{1}{2} \left( \frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} \right)$     10.  $I = 1\text{A}$ ,  $I_1 = 0.6\text{A}$ ,  $I_2 = I_4 = 0.5\text{A}$ ,  $I_3 = 0.4\text{A}$

### 第三节

1. 最少需 120 个, 把 6 组 20 个串联电池组并联即可    2.  $\zeta_2$  减小 0.375V  
 3.  $v_2 = \zeta \sqrt{\frac{v_1}{mgR}} - v_1$   
 4.  $\zeta = \left( \frac{\zeta_1}{r_1} + \frac{\zeta_2}{r_2} \right) / \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ ,  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ ;  
 $\zeta = \left( \frac{\zeta_1}{r_1} + \frac{\zeta_2}{r_2} + \dots + \frac{\zeta_n}{r_n} \right) / \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} \right)$ ,  $\frac{1}{r} = \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} \right)$   
 5.  $r > 10\sqrt{10}\Omega$ ,  $\zeta = \left( 10 + \frac{r}{5} \right) \text{V}$   
 6.  $\zeta_{\text{测}} = \frac{R_V}{R_V + r_{\text{内}}} \cdot \zeta_{\text{内}}$ ,  $r_{\text{测}} = \frac{R_V \cdot r_{\text{内}}}{R_V + r_{\text{内}}}$   
 7. (1) 2Ω, 2.88W    (2) 0.6Ω, 9W  
 8. 有,  $E \rightarrow D$ ,  $8 \times 10^{-4}\text{C}$ ,  $2 \times 10^{-4}\text{C}$ ,  $6 \times 10^{-4}\text{C}$   
 9. (1) 45V; (2) 31W; (3) 23W; (4) 22.5W    10. (1) 10A; (2) 52.5W

### 第四节

1. 4.97Ω    2. (1) 499kΩ, 2000kΩ, 2500kΩ; (2) 5000kΩ    3. 偏大  
 4. ∞, 0.4, 8kΩ, 14, 4kΩ, 33, 6kΩ, 1, 6kΩ    5. 267Ω

6.  $\frac{mn-1}{m+n-2}$  7.  $25\Omega$  8.  $\frac{n_2 n_1'}{n_1 n_2'} R_1$  9.  $304V$  10.  $2.97\mu A$

第五节

1. 略 2.  $160\Omega$  3.  $1.5025V$  4.  $0.4A$  5.  $0.25A, 0$

6.  $48.94\Omega$  7.  $\frac{2n\epsilon^2}{(n+2)^2 r}$

8. (1)  $R_x = 28.72\Omega$ ; (2)  $1.00A < I < 1.04A$ ; (3) a 点断路

9.  $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2} = \frac{R_3}{r_3} = \dots = \frac{R_{100}}{r_{100}}, U = 0$ , 10. 略

第六节

1.  $0.04g$  2. (1)  $5.83 \times 10^{28} m^{-1}$ ; (2)  $4.29 \times 10^{-4} m/s$ ; (3)  $7.62 \times 10^{-14} s$ ;

(4)  $1.08 \times 10^5 m/s$ ; (5)  $6.4 \times 10^{-2} V/m$ ; (6)  $8.23 \times 10^{-9} m$

3.  $0.24A$  4. (1)  $4.825 \times 10^5 C$ ; (2)  $5.58A$ ; (3)  $1.5 \times 10^{24}$ ; (4)  $3.294 \times 10^{-7} kg/C$ ;

(5)  $5.79 \times 10^6 J$  5.  $5.0 \times 10^{-7} A/m^2$  6.  $1.3 \times 10^5$  个

7.  $3.6 \times 10^{-3} W, 3.6 \times 10^{-3} W$  8. 80 9. 微安表读数变大, 电压表读数变小

10. (1)  $2mA$ ; (2)  $16mW$

第七节

1. 19.5 2. (1)  $3U_0$ ; (2)  $\frac{2U_0}{R}$  3.  $400\Omega, 100\Omega$

4. (1)  $7V, 26V$ ; (2)  $-1.24 \times 10^{-4} C, 2.56 \times 10^{-4} C, -1.32 \times 10^{-4} C$  5.  $4\Omega$

6. (1)  $350V$ ; (2)  $17K$

7. (1)  $\frac{V}{R}, \frac{3V}{R}, \frac{3V}{R}$ ; (2)  $\frac{2V}{R}, 0, \frac{3V}{R}$  8.  $4.17\Omega \cdot m$

9. (1)  $24W, 18W, 75\%$ ; (2)  $10.5V, 7A, 73.5W$  10.  $I = 8.44A$

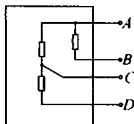
11. (1)  $I = \frac{SU_0}{(\rho_1 + \rho_2)d}$ ; (2)  $\Delta Q = \frac{\rho_1 SU_0 (\rho_2 - \rho_1)}{4\pi kd(\rho_1 + \rho_2)}$ ; (3)  $E_1 = \frac{\rho_1 U_0}{(\rho_1 + \rho_2)d}$ .

$E_2 = \frac{\rho_2 U_0}{(\rho_1 + \rho_2)d}$

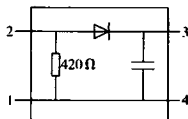
12. (1)  $40^\circ C$ ; (2)  $1.12 \times 10^3 \Omega$  13. (1)  $\frac{2}{7} I_0 E^2$ ; (2)  $\frac{E}{2R}$

14. (1)  $\frac{3}{5} I_0$ ; (2)  $\frac{3}{5} I_0 RC$

15.

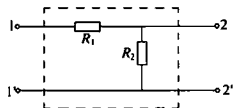


16.



17.2A. 由上至下 18.(1)略;(2) $\frac{388}{627}R$

19.(1) $R_1 = 3\Omega, R_2 = 6\Omega$ ;(2)1.5W 电路图:



20. 连接控制电路的基本思路如图 a 所示,其关键在于:

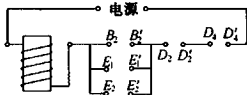


图 a

1. 利用电磁开关的辅助接点  $B_2$  与  $B'_2$  作自接点,使电磁铁通电时,辅助接点同时接通。
  2. 将两个开机按钮的  $E_1, E'_1$  和  $E_2, E'_2$  接点分别都与自接点并联。
  3. 将两个停机按钮的  $D_2, D'_2$  和  $D'_4, D'_4$  接点相串联并和自接点串联。
- 一种参考接法如图 b 所示。

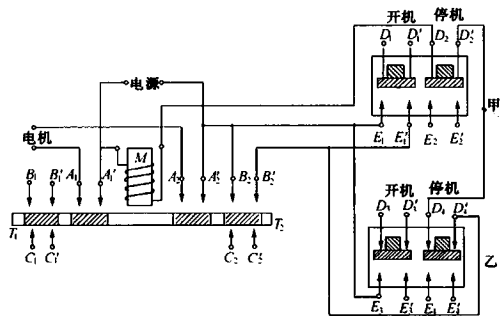
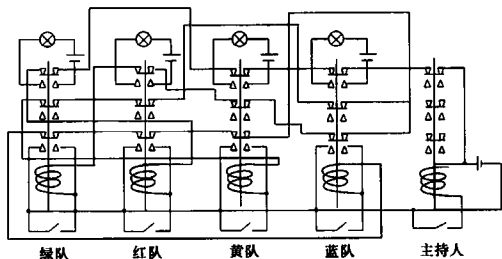


图 b

21. 需补添的连线如图中粗线所示。



问题与讨论

1.  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}R$     2.  $R_{AB} = \frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}R, R_{AC} = \frac{6-\sqrt{3}}{6}R$   
 3.  $\frac{9}{20}R$     4.  $\frac{3+\sqrt{7}}{4}R$     5. (1)  $\frac{1}{2}[R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}]$ ;  
 (2)  $\frac{U_D}{U_{CD}} = \frac{U_{ED}}{U_{EF}} = \dots = \frac{\sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2} - R_1}{\sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2} + R_1}$ ; (3)  $\frac{1}{2}$   
 6. (1)  $R_i = 5(\sqrt{5} - 1)\Omega, P = 13.85W$ ; (2)  $(\sqrt{5} + 1)/8\Omega$   
 7. 都为  $(\sqrt{3} - 1)R$     8.  $R_{AC} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}R_0, R_{BC} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}R_0$   
 9.  $\frac{10}{7}R$     10.  $\frac{7}{6}R$     11. (1)  $(1+\sqrt{3})r$ ; (2)  $I_{n1} = I_{nF} = (2-\sqrt{3})^n \frac{I}{r}$ ,  
 $I_{nL} = (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^{n-1} \frac{I}{r}, I_{nA} = (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^n \frac{I}{r}$   
 12. (1)  $\frac{9}{16}R$ ; (2)  $\frac{3}{8}R$     13.  $\frac{1}{15}(5+2\sqrt{55})r$

第十一章 磁场与电磁感应

第一节

1.  $a_{max} = 2\arcsin\left(\frac{I_0IBr}{2m\sqrt{gh}}\right)$     2.  $\frac{\sqrt{5}}{2}T$     3.  $2\pi BIR\sin\theta$   
 4.  $0.35m/s$     5. (1)  $10^{-4}A$ ; (2)  $4.4 \times 10^{-5}A$     6.  $\frac{mg}{\pi BR}$     7.  $1.96A$

第二节

1.  $\frac{2m}{eB} \arctan\left(\frac{eBR}{mv}\right)$     2.  $\sqrt{\frac{l^2 - (T/2\pi)^2}{[2\pi/(gT) \pm qB/(mg)]^2}}$     3. (1)  $0.61 \times 10^{-6}s$ ; (2)  $1.22 \times 10^{-6}s$   
 4.  $r = \frac{qBl}{2m\omega}$     5.  $0.003J$     6.  $v = \frac{Mg}{BQ} \cdot \sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2 \cos^2\alpha}$ , 矢量  $v$  与  $F_f$  之间的夹角为  $\beta =$

- $\arcsin\left(\frac{\mu}{\tan\alpha}\right)$     7. 15m/s    8.  $\frac{\pi m \ell}{Bq^2 U}$   
 9. (1) 0.47T; (2)  $1.39 \times 10^{-5}$  s; (3)  $1.45 \times 10^{-7}$  s

### 第三节

1.  $\frac{m(v_0 - v)}{B^2 l^2 r}$     2. (1) 38; (2) 1s    3.  $\frac{B^2 v d^2 \tan\alpha}{2r}$   
 4.  $\frac{aa^2(2c-b)}{2(a+b)}$     5.  $-Blv\sin\alpha$     6. (1) 314mV; (2)  $5 \times 10^{-3}$  V/m;  
 (3) 1.57mA; (4) 3.14mV    7.  $Q'_1 = \frac{\pi R^2 B_0 C_1}{2T} \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}$      $Q'_2 = \frac{\pi R^2 B_0 C_2}{2T} \cdot \frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2}$     8.  $P = \frac{\pi k^2 l^4}{16(\pi + 1)^3 R}$   
 9.  $t = \sqrt{\frac{2h(m + CB^2 l^2)}{mg}}$   
 10.  $s = mRv_0/B^2 d^2$     11. (1) 当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时,  $P_{\max} = \frac{B^2 l^2 v^2}{R(l+1)^2}$ ; (2)  $l \leq 1$  米时,  
 $\theta = \arcsin l$  时  $P$  最大,  $l > 1$  米时,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时  $P$  最大

### 第四节

1.  $5.6 \times 10^{-6} \Omega$     2.  $-\frac{L\ell}{Rr}$     3.  $I_1 = \frac{L_2 \ell / r + L_1 I_0}{L_1 + L_2}$ ,  
 $I_2 = \frac{L_1 \ell / r - L_1 I_0}{L_1 + L_2}$     4.  $(4 - \sqrt{7})/\sqrt{7} \approx \frac{1}{2}$

### 第五节

1.  $1 \times 10^{12}$  m/s<sup>2</sup>    2.  $v_{\min} = \left[ 5gl + \frac{q^2 B^2 l^2}{2m^2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 g}{q^2 B^2 l}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$     3. 5.6K  
 4. (1) 开始时沿  $x$  轴正向作螺旋距变小的螺旋线, 后沿  $x$  轴负向作螺旋距变大的螺旋线运动; (2)  $1.98 \times 10^{-5}$  m; (3) 粒子运动的范围最远为  $5 \times 10^{-4}$  m, 在这段时间内轨迹所占据的空间范围的形状为一圆柱形, 其体积为  $4.75 \times 10^{-18}$  m<sup>3</sup>  
 5.  $B \leq \frac{m}{q} \sqrt{\frac{6g \cos\alpha}{l}}$     6. 约为  $10^{-3}$  W  
 7.  $t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{mg \sin\alpha} (m + Cd^2 B^2 \cos^2\alpha)}$      $v_k = at = \sqrt{\frac{2lmg \sin\alpha}{m + Cd^2 B^2 \cos^2\alpha}}$   
 8.  $\ell = \frac{1}{2} BR \sqrt{\frac{gR}{\cos\alpha}} \sin^2\alpha \approx 1.66$  伏    9. (1)  $\frac{\pi k D^2}{16r}$ ; (2)  $\frac{\pi k D^2}{16r}$ ; (3)  $\frac{\pi k D^2}{8r}$   
 10. (1)  $U_2 = 20$  V; (2)  $U_2 = 0$  V    11.  $v_0 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{mgR}{k^2 a^4}\right)^2}$   
 12. (1) 绕  $OO'$  轴沿顺时针转动; (2)  $\omega = \frac{2v}{L \sin\theta} = \frac{2\ell B \sin\theta - 4f(R+r)}{B^2 l^3 \sin^3\theta}$   
 13.  $\frac{9\sqrt{3}}{10mr} B_0^2$     14.  $\frac{\ell a I}{2\pi f A} \approx 0.16$  牛    15.  $1.75 \times 10^{-3}$  m/s    16. 略  
 17. (1)  $I = \frac{\ell}{R+r}$ ; (2)  $Q = \frac{L\ell}{2r(R+r)}$     18.  $\arcsin \frac{2B^2 a^2 v}{m g r (3 + \sqrt{3})}$

## 第十二章 交流电和电磁波

### 第一节

1. 略 2. B 3. 220V 4. 126mA, 1.26A 5. 159m, 15.9mA

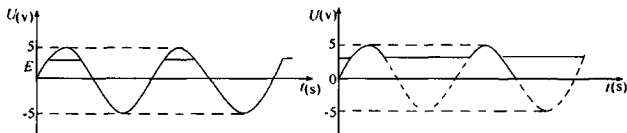
6. 17.5Ω, 3A, 45V, 27V 7.  $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{2\pi fL})^2}} \cdot \frac{U}{R} \cdot \frac{U}{2\pi fL}$  8.  $\frac{B_0^2 \omega^2 a^4}{2R}$

9. (1)91V; (2)105V

### 第二节

1.  $20\sqrt{2}, 20\sqrt{2}$  2. 1W

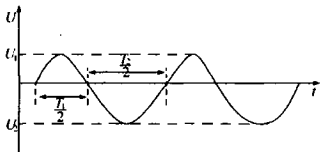
3.



4. (1)  $\frac{4IR}{nBl^2}$ ; (2)  $e = 4\sqrt{2}IR \sin \frac{4IR}{nBl^2} t$ ; (3)  $M = 4InBl^2 \sin^2 \frac{4IR}{nBl^2} t$

### 第三节

1.



2.  $2.27 \times 10^{-4} \text{H} \leq L \leq 2.52 \times 10^{-4} \text{H}$  3.  $30\sqrt{2} \text{V}, 30\sqrt{2} \text{V}, 60\sqrt{2} \text{V}, 30\sqrt{2} \text{V}$

4.  $i = 2.64 \times 10^5 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{A}$  5.  $1.5 \times 10^9 \text{Hz}, 30$

6.  $\frac{7}{16} d_n$  7.  $q \sqrt{\frac{L_2}{L_1(L_1 + L_2)C}} \cdot q \sqrt{\frac{L_1}{L_2(L_1 + L_2)C}}$

### 第四节

1.  $2\omega$  2.  $2CU_n$  3. 0.009A, 146.7V 4. 300s

5. 它是具有角频率  $(\omega_1 + \omega_2)$  及  $(\omega_1 - \omega_2)$  的两种交流电压的叠加, 这两种交流电的振幅比则为

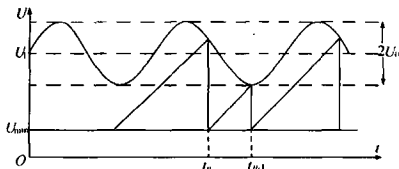
$\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2}$  6. 3.84V 7. (1)可正常工作; (2)31.1V; (3)31.1V; (4)①造成失真, ②在扬声器中

听到明显的交流声

问题与讨论

1. (1) 2mA; (2) 16mW

2. (1)



$$(2) U_n = U(t_{n+1}) - U(t_n) = U_{\max} + I_n(t_{n+1} - t_n) / C = U_{\min} + k \frac{2\pi I_0}{\omega C} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

3. (1)  $\frac{f_n}{\Delta f} = 150$ ; (2)  $f = 15.9 \text{ kHz}$ ; (3)  $i_{\text{eff}} = -0.1 \text{ A}$ ; (4)  $i_{\text{max}} = 0.204 \text{ A}$

4.  $90\Omega \leq R \leq 105.1\Omega$

### 第十三章 光 学

#### 第一节

1. B    2. D    3.  $9.87 \times 10^5 \text{ m}$     4.  $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$

5.  $\frac{h(L_1 + n - L_2)}{L_1 - L_2}$      $6.1 \times 10^{-6} \text{ rad}$

7. 近时, 水平<sup>1</sup>与竖直藤条的暗影, 形成方格图像; 远时只看到水平藤条的暗影, 形成水平直条图像; 白屏移到足够远后, 屏上光亮接近均匀, 看不出暗影。

#### 第二节

1. 6    2. 略    3. (1) 20cm/s; (2) 0.866s

4. 凸面, 30, 0.6    5.  $L = f$  或  $L = 2f$  或  $L = 3f$     6. 70cm

#### 第三节

1. 略    2.  $\frac{\pi a^2}{4(n^2 - 1)}$     3.  $6.9 \times 10^{-3}$     4. 紫靛蓝绿黄橙红, 红橙黄绿蓝靛紫

5.  $R \geq \frac{n_2 a}{n_1 - n_2}$     6. (1)  $(1 - \sqrt{\frac{2}{7}})h$ ; (2) 没有

7. (1)  $\theta_{\min} = \sin^{-1} \frac{\sqrt{5}}{5} n$ ; (2)  $\sin^{-1} \frac{\sqrt{5}}{5} n < \theta \leq \sin^{-1} \sqrt{n^2 - 1}$ ,  $\frac{\sqrt{5}}{2} \leq n \leq \sqrt{2}$

8. 1.33    9.  $\frac{R}{R - 2d}$     10.  $i \leq 30^\circ$     11.  $\frac{nR}{n + 1}$



第四节

1.  $u = \sqrt{lf}$  2. (1) 图略; (2)  $5\pi$  3.  $3.73\text{cm} < u < 56\text{cm}$   
 4. 一半径为  $f \tan \alpha$  的圆柱面, 其一端在透镜右方  $\frac{3f}{2}$  处, 另一端位于无限远处。  
 5. 看不到的范围是  $22.5 \sim 30$  6. A 的位置为  $(-5, 4)$  7.  $f = v - d$   
 8. 倒立实像, 距  $L_1$  为  $10\text{cm}$ , 像高  $0.75\text{cm}$  9.  $10\text{cm/s}$   
 10.  $8.5 \times 10^{-3}\text{s}$  11.  $2:1$  12. (1) 图略; (2)  $1\text{cm}$

第五节

1. (1)  $40\text{cm}$ ; (2)  $60\text{cm}$  2.  $f \geq 4.5\text{cm}$  3.  $15.2\text{cm}$   
 4.  $7.2\text{cm}$  5.  $50.5\text{m}$  6.  $\frac{1}{10}$ , 倒立实像  
 7. (1) 像距目镜  $5.1\text{m}$ ; (2) 视角放大率为  $10$ 倍 8. 略

第六节

1. (1) 干涉条纹间距缩小一半; (2) 条纹间距减小; (3) 条纹间距增大一倍; (4) 条纹向相反方向移动; (5) 变成单缝衍射条纹; (6) 除中央零级亮纹为白色外, 其余为彩色条纹; (7) 没有干涉条纹  
 2. 亮纹 3.  $1.36 \times 10^{-6}\text{m}$  4.  $0.72\text{mm}$  5.  $4800\text{\AA}$  的蓝光 6.  $3.94 \times 10^{-7}\text{m}$  7. 略  
 8.  $3.0 \times 10^{-3} \cdot \sqrt{6}$  9. (1)  $9.05 \times 10^{17}$  个; (2)  $0.51\text{J/m}^3$ ; (3)  $0.51\text{Pa}$  10.  $\frac{e(\lambda_2 U_2 - \lambda_1 U_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}$   
 11. (1)  $3.31 \times 10^7\text{m/s}$ ; (2)  $1.44 \times 10^6\text{eV}$

第七节

1. (1)  $(n-1)a$ ; (2)  $v = 3f$ , 像在主轴下方距主轴  $2f(n-1)a$   
 2.  $n; (n-1)$  3.  $1.5$  4. (1)  $r = 72\text{cm}$ ,  $u = 108\text{cm}$ ; (2)  $52.5\text{cm}$

第十四章 原子物理

第一节

1.  $E_p = 0.06\text{MeV}$ ,  $E_\alpha = 0.04\text{MeV}$  2.  $3.6 \times 10^{14}\text{m}$  3. (1)  $h^2/8ma^2$ ; (2)  $3h^2/8a^2mc^2$  4. (1)  $13.6\text{eV}$ ; (2) 由  $n=4$  跃迁到  $n=2$  及由  $n=3$  跃迁到  $n=1$   
 5. (1)  $hc/(E_2 - E_1)$ ; (2)  $h/\sqrt{M^2c^2 + 2M(E_2 - E_1) - Mc^2}$

第二节

1.  $5.0 \times 10^{-4}\text{m}^3$  2.  $8.5 \times 10^{-3}\text{kg}$ , 11 年  
 3. (1)  ${}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{18}_8\text{F}^+ \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$ ; (2)  $2.25 \times 10^{-14}\text{J}$   
 4.  $\frac{m_2 m_3 \Delta mc^2}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1}$ ,  $\frac{m_1 m_3 \Delta mc^2}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1}$ ,  
 $\frac{m_1 m_2 \Delta mc^2}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1}$   
 5.  $8.22 \times 10^{-13}\text{m}$  6. 中子、氦核动能分别约为  $3\text{MeV}$  和  $1\text{MeV}$

第三节

1.  $2.46 \times 10^{13}$  Hz    2.  $1.1 \times 10^{-14}$  m    3.  $6.07 \times 10^9$  年    4.  $2.2 \times 10^6$  m/s,  $2.46 \times 10^{13}$  Hz    5.  
 (1)  ${}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^1_0\text{n}$ ; (2)  $6 \times 10^5$  m/s; (3)  $1.69 \times 10^{-23}$  kg  
 6. (1)  $0.72 E_0$ ; (2) 54 次    7. 放出能量, 24.0 MeV    8. 1.5 kg,  $3.7 \times 10^3$   
 9. (1)  $\frac{5.11}{A} \times 10^{-13}$  m; (2)  $A > 94$

第十五章 狭义相对论

第一节

1. 前壁. 火车上的人认为两闪光非同时发出, 或发光点并不在火车中央.  
 2. C, A    3.  $(1 + 3.56 \times 10^{-10})$  min    4.  $(30 - 1.5 \times 10^{-9})$  m,  $15\sqrt{3}$  m

第二节

1. 椭圆    2. (1) 12:50; (2)  $7.2 \times 10^8$  km; (3) 11:30; (4) 4:30

$$3. E_{\nu} = \frac{(m_x^2 + m_y^2)c^2}{2m_x} \quad E_{\nu} = \frac{(m_x^2 - m_y^2)c^2}{2m_x}$$

$$4. \frac{m_0}{M_0} = \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{v}{c} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad 5. (1) a_{AB} = \frac{a \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv}{c^2}}, \quad a_{CB} = \frac{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

$$a_{BC} = a_{DA} = a; (2) Q_{AB} = \frac{uvL}{ac^2} q, Q_{CB} = -\frac{uvL}{ac^2} q, \quad Q_{BC} = Q_{DA} = 0;$$

$$(3) M = \frac{uvL^2 q}{ac^2} E \sin \theta; (4) \gamma = \frac{uvL^2}{ac^2} E \cos \theta$$

第三节

(略)

第四节

$$1. (1) l_1 = l_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad v = c \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2}}; (2) \Delta t_2 = \frac{\Delta l}{v} = \sqrt{\frac{l_2^2 - l_1^2}{c}}$$

$$2. E = E_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad 3. (1) \theta = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{2\beta}{1 - \beta^2};$$

$$(2) L'' = \sqrt{d^2 + (v_{A'} \cdot t'')^2} = \sqrt{\frac{(1 + \beta^2)^2 + 4\beta^2}{1 + \beta^2}} \cdot d^2$$

$$4. \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1 + \beta} = \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2 - \beta} \quad 5. \text{略}$$

$$6. (1) \text{略}; (2) E_{\nu} = 2475 \text{ eV}; p = 2.68 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$7. (1) s = c \cdot \frac{1}{2} t = 3.0 \times 10^{10} \text{ m}; (2) v = 0.9c; (3) 2 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$8. (1) c(1 - 0.96 \times 10^{-10}); (2) 4 \times 10^{10}$$

根据最新物理奥赛大纲编写

国际物理奥赛·中国队总教练、领队担纲

专题讲述 面面俱到

\* 高中物理竞赛培优教程

\* 高中物理竞赛题典

ISBN 7-308-03363-5



9 787308 033633 >

ISBN 7-308-03363-5/G · 610

定价：39.00 元

数字资源  
PDG

[ G e n e r a l I n f o r m a t i o n ]

书名 = 高中物理竞赛培优教程

作者 = 舒幼生

页数 = 5 1 4

出版社 = 浙江大学出版社

出版日期 = 2 0 0 3 年 7 月 第 1 版

中图分类号 = G 6 3 4 . 7 3

价格 = ¥ 3 9 . 0 0

主题 = 物理课 - 高中 - 教学参考资料

参考文献格式 = 舒幼生 . 高中物理竞赛培优教

程 . 杭州 : 浙江大学出版社 , 2 0 0 3 .

u r l =

封面  
扉页  
版权  
前言  
目录

第一章	运动学
	第一节 质点运动的基本概念
	第二节 运动的合成
	第三节 抛体运动
	第四节 圆周运动
	第五节 刚体绕定轴的转动
	第六节 综合训练
	问题与讨论 图线的应用 ( 1 )
第二章	静力学
	第一节 常见的几种力
	第二节 共点力作用下物体的平衡
	第三节 一般物体的平衡
	第四节 平衡种类
	第五节 流体静力学
	第六节 综合训练
	问题与讨论 矢量三角解题
第三章	牛顿运动定律
	第一节 牛顿运动定律
	第二节 非惯性参照系
	第三节 万有引力定律与天体运动
	第四节 综合训练

	问题与讨论 分情况讨论解题
第四章	能量与动量
	第一节 功和功率
	第二节 动能定理
	第三节 势能
	第四节 机械能守恒定律
	第五节 冲量、动量、动量定理
	第六节 动量守恒定律
	第七节 碰撞和质心运动
	第八节 综合训练
	问题与讨论 极值问题
第五章	角动量
	第一节 力矩和角动量
	第二节 质点和质点组的角动量
	第三节 角动量守恒定律
	第四节 综合训练
	问题与讨论 宇宙中的角动量
第六章	振动和波
	第一节 简谐运动
	第二节 振动能量
	第三节 机械波
	第四节 驻波和多普勒效应
	第五节 综合训练
	问题与讨论 等效方法
第七章	分子运动论和热力学第一定律
	第一节 分子运动论

	第二节	理想气体的状态方程
	第三节	热力学第一定律和热力学第二定律
第八章	第四节	热传递方式
	第五节	综合训练
	问题与讨论	临界情况解题
第九章	第一节	固体、液体和物态变化
	第二节	固体性质
	第三节	液体性质
	第四节	物态变化
	第五节	综合训练
	问题与讨论	热学图线的应用 ( 2 )
第十章	第一节	静电场
	第二节	库仑定律和电荷守恒定律
	第三节	电场和电场强度
	第四节	电势
	第五节	电容和静电场的能量
	第六节	电场中的导体和电介质极化
	第七节	综合训练
	问题与讨论	微元法
第十一章	第一节	稳恒电流
	第二节	欧姆定律
	第三节	含源电路的欧姆定律
	第四节	电动势
	第五节	电表改装
	第六节	惠斯通电桥与补偿电路

第六节 物质的导电性

第七节 综合训练

问题与讨论 根据自相似性求其电阻

## 第十一章 磁场与电磁感应

第一节 磁场和电流的关系

第二节 电荷在磁场中的运动

第三节 法拉第电磁感应定律

第四节 自感和互感

第五节 综合训练

问题与讨论 独立作用原理

## 第十二章 交电流和电磁波

第一节 交流电

第二节 整流、滤波和稳压

第三节 电磁振荡和电磁波

第四节 综合训练

问题与讨论 交流电的叠加

## 第十三章 光学

第一节 光的反射

第二节 平面镜、球面镜成像

第三节 光的折射

第四节 薄透镜成像

第五节 简单光学仪器

第六节 光的本性

第七节 综合训练

问题与讨论 费马原理的应用

## 第十四章 原子物理



第一节 原子结构

第二节 原子核

第三节 综合训练

问题与讨论 夸克模型

## 第十五章 狭义相对论

第一节 洛仑兹变换

第二节 时间和长度的相对论效应

第三节 对宇宙的初步认识

第四节 综合训练

问题与讨论 黑洞问题的简单分析

参考答案

封底