南京大学 1998 年硕士研究生考试试题——量子力学

（一）20 分 有半壁无限高势垒的一维阱 $V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ 0 & 0<x<a\\ V_0 & x>a\end{cases}$

在 $E<V_0$ 的情形下，该系统是否总存在一个束缚态？如果回答是否定的，那么系统中至少有一个束缚态的存在的充要条件是什么？

（二）20 分 一个取向用角坐标 θ 和 φ 确定的转子，作受碍转动，用下述哈密顿量描述：

$\hat{H}=A\hat{L}^2+B\hbar^2\cos(2\varphi)$，式中 A 和 B 均为常数，且 $A>>B$，$\hat{L}^2$ 是角动量平方算符，试用一级微扰论计算系统的 p 能级（$l=1$）的分裂，并标出微扰后的零级近似波函数。

（三）20 分求在一维无限深势阱中，处于 $\Psi_n(x)$ 态时的粒子的动量分布几率 $\left|\phi_n(p)\right|^2$ 。

（四）20 分 试判断下列诸等式的正误，如果等式不能成立，试写出正确的结果：

（1）$e^{\hat{p}\cdot\hat{i}}\cdot e^{\hat{x}\cdot\hat{j}}=e^{\hat{p}\cdot\hat{i}+\hat{x}\cdot\hat{j}-\frac{1}{2}i\hbar}$ ？式中 $\hat{i}$ 和 $\hat{j}$ 分别是 x 和 y 方向的单位矢量。

（2）$[\hat{p}_x,\hat{p}_x f(\hat{x})\hat{p}_x]=\frac{\hbar}{i}\hat{p}_x f'(x)$ ？式中 $\hat{p}_x=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ ，

（3）系统的哈密顿算符为 $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2\mu}+V(\bar{r})$ ，设 $\varphi_n(\bar{r})$ 是归一化的束缚态波函数，则有：

$\langle\varphi_n|\frac{\hat{p}^2}{2\mu}|\varphi_n\rangle=\frac{1}{2}\langle\varphi_n|\bar{r}\cdot\nabla V(\bar{r})|\varphi_n\rangle$ ？

（五）20 分碱金属原子处在 z 方向的外磁场 B 中，微扰哈密顿为 $\hat{H}_1=\hat{H}_{ls}+\hat{H}_B$ ，其中

$\hat{H}_{ls}=\frac{1}{2\mu^2c^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right)\bar{L}\cdot\bar{S}$ ，$\vec{H}_B=\frac{eB}{2\mu c}\left(\vec{L}_Z+2\vec{S}_Z\right)$ ，

当外磁场很弱时，那些力学量算符是运动积分（守恒量），应取什么样的零级近似波函数，能使微扰计算比较简单，为什么？

注： $Y_{lm}=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$

$P_1^0(x)=x$；$P_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2}$；$P_2^1(x)=3(1-x^2)^{1/2}x$ $P_2^2(x)=3(1-x^2)$

南京大学1999年硕士研究生考试试题——量子力学

专业：理论物理、粒子物理与原子核物理

（20分）一、 t＝0时，粒子的状态为$\phi(x)=A[\sin^2 kx]$，求此时动量的可能测值和相应的几率，并计算动量的平均值。

二、粒子被约束在半径为 r 的圆周上运动

（20分） (a) 设立“路障”进一步限制粒子在$0<\phi<\phi_0$的一段圆弧上运动：

$$V(\phi)=\begin{cases}0 & (0<\phi<\phi_0)\\ \infty & (\phi_0<\phi<2\pi)\end{cases}$$

求解粒子的能量本征值和本征函数。

（10分） (b) 设粒子处在情形(a)的基态，求突然撤去“路障”后，粒子仍然处于最低能量态的几率是多少?

（20分） 三、边长为 a 的刚性立方势箱中的电子，具有能量$\dfrac{3\pi^2\hbar^2}{ma^2}$，如微扰哈密顿$H_1=bxy$，试求对能量的一级修正(式中$b$为常数)。

（15分） **四、** 对自旋为1／2的粒子，S_y和 S_z是自旋角动量算符，求 AS_y+BS_z的本征函数和本征值(A和B是实常数)。

（15分） **五、**已知 t=0时，一维自由粒子波函数在坐标表象和动量表象的表示分别是

$\varphi(x)=Nx\exp(-\alpha x^2)\exp(ip_0x/h)$； $\phi(p)=c(p-p_0)\exp[-b(p-p_0)^2]$

式中N、α、c、b和p_0都是已知实常数. 试求 t=0 和 t>0 时粒子坐标和动量的平均值, $<x>_{t>0}=?$ $<p>_{t>0}=?$，（$<\hat{A}>$表示力学量算符$\hat{A}$的平均值）。

* $$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}dx=\frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

南京大学 2000 年硕士研究生入学考试试题——量子力学

专业:理论物理,凝聚态物理,光学等

一. 一维谐振子处在 $\Psi(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi^{1/2}}}e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}$ 状态, $\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ ，求:

(1) 势能的平均值 (7 分)

(2) 动能的几率分布函数 (7 分)

(3) 动能的平均值 (7 分)

提示: $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-i\beta)^2}dx=\sqrt{\pi}$

二. 质量为 m 的粒子在一维势场 $V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ 0 & 0<x<a\\ V_0 & x>a\end{cases}$ 中运动, 求,

(1) 决定束缚态能级的方程式 (15 分)

(2) 至少存在一个束缚态的条件 (5 分)

三. 质量为 m 的粒子在一维势场 $V(x)=\begin{cases}\infty & x<0,\quad x>a\\ cx & 0<x<a\end{cases}$ 中运动, 其中 c 是小的实常数，试用微扰论求准到 c 一次方的基态能量. (20 分)

四. 两个自旋 $\frac{1}{2}$ 的非全同粒子系的哈密顿量

$$\hat{H}_s=-J[\hat{\vec{S}}(1)\cdot\hat{\vec{S}}(2)]\qquad J>0$$

求 $\hat{H}_s$ 的能量本征值和相应的简并度. (20 分)

五. (1) 设氢原子处于沿 z 方向的均匀静磁场 $\vec{B}$ 中，不考虑自旋, 在弱磁场情形下求 n=2 能级的分裂情况. (10 分)

(2) 如果沿 z 方向不仅有均匀静磁场 $\vec{B}$, 还有均匀静电场 $\vec{E}$，再用微扰论求 n=2 能级的分裂情况. (9 分)

提示: $\langle 200|z|210\rangle=-3a$

南京大学 2001 年硕士研究生入学考试试题———量子力学

专业： 理论物理、、凝聚态物理、光学等

一、有一质量为 μ 的粒子处于长度为 a 的一维无限深势阱中 $V(x)=\begin{cases}\infty, x<0; x>a \\ 0, 0<x<a\end{cases}$，在 t=0 时刻，粒子的状态由波函数 $\psi(x)=\begin{cases}0, x<0; x>a \\ Ax(a-x), 0<x<a\end{cases}$ 描述。求：（20 分）

1. 归一化常数 A;
2. 粒子能量的平均值；
3. t=0 时刻，粒子能量的几率分布；
4. 人艺 t>0 时刻的波函数的级数表达式。

提示：$\sum_{n=1,3,5\cdots} \frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}$

二、考虑势能为 $V(x)=\begin{cases}V_0, x>0 \\ 0, x<0\end{cases}$ 的一维系统，其中 V_0 为正常数。若一能量为 E 的粒子从 $x=-\infty$ 处入射，其透射系数和反射系数各为多少？考虑 E 的所有可能值。（20 分）

三、有一质量为 μ 的粒子，在一维谐振子势场 $V(x)=\frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ 中运动。在动能 $T=\frac{p^2}{2\mu}$ 的非相对论极限下，基态能 $E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$，基态波函数为 $\Psi_0(x)=\left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2\right)$。考虑 T 与 p 的关系的相对论修正，计算基态能级的移动 ΔE 至 $\frac{1}{c^2}$ 阶。（c 为光速）（20 分）

四、氯化钠晶体中有些负离子空穴，每个空穴束缚一个电子。可将这些电子看成束缚在一个尺度为晶格常数的三维无限深势阱中。晶体处于室温，试粗略地估计被这些电子强烈吸收的电磁波的最长的波长。（20 分）

提示：电子质量 $mc^2=0.511MeV, \hbar c\approx 197MeV\cdot fm$，晶格常数 $a\approx 1\overset{0}{A}$

五、考虑自旋 $S=\frac{1}{2}\hbar$ 的系统，

1．求算符 $\hat{T}=A\hat{S}_y+B\hat{S}_z$ 的本征值和归一化本征波函数；（A、B 为实常数）

2．若此时系统正处在 $\hat{T}$ 的某一个本征态上，求此时测量 $\hat{S}_y$ 结果为 $\left(+\frac{\hbar}{2}\right)$ 的几率。（20 分）

南京大学2002年硕士研究生入学考试试题———量子力学

一、一维自由粒子的状态由波函数$\Psi(x)=\sin^2 kx+\frac{1}{2}\cos kx$描述。求粒子的动量平均值和动能平均值。（20分）

二、粒子被约束在半径为r的圆周上运动

1）设立“路障”进一步限制粒子在$0<\varphi<\varphi_0$的一段圆弧上运动，即$V(\varphi)=\begin{cases}0,0<\varphi<\varphi_0\\ \infty,\varphi_0<\varphi<2\pi\end{cases}$，求解粒子的能量本征值和本征函数；

2）设粒子处在上述情形的基态，现突然撤去“路障”，问撤去“路障”后，粒子仍然处在最低能量态的几率是多少？

（20分）

提示：在柱坐标系下$\nabla^2 u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

三、设算符$\hat{N}=\hat{a}^+\hat{a}$且$\left[\hat{a},\hat{a}^+\right]=1$，证明：如果$\Psi$是$\hat{N}$的本征函数，对应的本征值为$\lambda$，那么，波函数$\Psi_1=\hat{a}\Psi$也是$\hat{N}$的本征函数，对应的本征值为$\lambda-1$，而波函数$\Psi_2=\hat{a}^+\Psi$也是$\hat{N}$的本征函数，对应的本征值为$\lambda+1$。（20分）

四、一个粒子在二维无限深势阱$V(x)=\begin{cases}0,0<x,y<a\\ \infty,elsewhere\end{cases}$中运动，设加上微扰$H_1=\lambda xy$ $(0<x,y<a)$，求基态和第一激发态的一阶能量修正（20分）

五、若电子处于$\hat{S}_z$的本征态，试证在此态中，$\hat{S}_y$取值为$-\frac{\hbar}{2}$或$\frac{\hbar}{2}$的几率各为$\frac{1}{2}$。（20分）

南京大学2003年硕士研究生入学考试试题——量子力学

专　　业: 理论物理,凝聚态物理

一、一个质量为μ的粒子处于一维谐振子势$V(x)=\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$中运动，$\omega$为谐振子的本征振动频率。如果$t=0$时，该粒子处于态$\psi(x,0)=\sqrt{\frac{1}{3}}\psi_0(x)+c\psi_2(x)$，其中$\psi_0(x)$和$\psi_2(x)$分别为一维谐振子的基态和第二激发态的能量本征波函数，c为待定常数且$c>0$。

1） 根据归一化条件，求待定常数c；（5分）

2） 求t时刻粒子所处的状态$\psi(x,t)$；（5分）

3） 求测量粒子的能量所能得到的可能值和测到这些值的几率；　　（10分）

4） 求粒子能量的平均值；　　（5分）

5） 若在$t=\tau$时刻，粒子所处的势场突然变为$V'(x)=\frac{1}{3}\mu\omega^2x^2$，求粒子在$\tau$时刻处于新的势场$V'(x)$的第一激发态的几率。　（5分）

二、一根长为l的无质量的绳子一端固定，另一端系质点m。在重力作用下，质点在竖直平面内摆动，

1） 写出质点运动的哈密顿量；（10分）

2） 在小角近似下求系统的能级；　（10分）

3） 求由于小角近似的误差而产生的基态能量的最低阶修正。　（10分）

提示：质量为m，本征频率为ω的一维谐振子的基态波函数为$\psi_0(x)=C\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right)$，其中$C$是归一化常数，$\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$；$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)dx=\sqrt{\pi}$。

三、质量为μ的粒子从左向右作一维运动，穿越了一个宽度为a，高度为V_0的一维势垒$V(x)=\begin{cases}0 & |x|>a/2\\ V_0 & |x|<a/2\end{cases}$。设粒子的能量$E>V_0$。试求发生共振透射（即透射系数为1）的条件。（30分）

四、两个自旋为1/2的粒子组成的系统由哈密顿量$H=A(S_{1z}+S_{2z})+B\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$描述，其中$\vec{S}_1$和分别是两个粒子的自旋，而$S_{1z}$和$S_{2z}$则分别是这两个粒子自旋的$z$分量，$A$和$B$是实常数。求该哈密顿量的所有能级。　（30分）

五、一个质量为μ，带电荷为q的粒子，束缚在宽度为a的一维无限深势阱$V(x)=\begin{cases}0 & |x|<a/2\\ \infty & |x|>a/2\end{cases}$中运动。如果在入射光的照射下，该粒子能在不同能级间发生偶极辐射跃迁，求跃迁的选择规则。

（30 分）

六、两个粒子被束缚在一个边长为 $a>b>c$ 的长方体盒子中运动，粒子间的相互作用势能为 $V\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)=A\delta\left(\vec{x}_1-\vec{x}_2\right)$ 可以作为微扰，其中 $\vec{x}_1$ 和 $\vec{x}_2$ 分别为两个粒子的坐标，A 为实常数。分别就以下两种情形求体系的最低能量态的能量，要求准至 A 的一次方。

1） 两个粒子为自旋为零的全同玻色子；（15 分）

2） 两个粒子为自旋为 1/2 的全同费米子，且这两个粒子的自旋平行(即总自旋为 1)。（15 分）

南京大学 2004 年硕士研究生入学考试试题——量子力学

一、已知电子质量为 μ，电子电量为(-e)，回答以下问题：

1) 一个电子被限制在宽度为 a 的一维无限深势阱中运动，请写出该体系的能级公式；（5 分）
2) 五个电子被限制在宽度为 a 的一维无限深势阱中运动，不考虑电子和电子之间的库仑相互作用，请写出该体系的基态和第一激发态的能级公式。（10 分）
3) 一个电子处于一维谐振子势场 $\frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ 中运动，其中 ω 是谐振子的本征园频率，x 是电子的坐标，请写出该体系的能级公式。（5 分）
4) 如果电子在上题中的一维谐振子势场中运动，并且假定电子恰好处在某个能量本征态上，求电子的坐标和动量的平均值，这些平均值随时间变化么？（10 分）
5) 请写出氢原子体系的能级公式和电子的基态波函数，这里假定原子核是不动的；（10 分）
6) 假定氢原子处于基态，求电子势能 $-\frac{e^2}{r}$ 的平均值，其中 r 是电子的径向坐标。（10 分）

二、假定电子的波函数在球坐标体系下写为：$\psi(r,\theta,\varphi)=(e^{i\varphi}\sin\theta+\cos\theta)g(r)$，其中 $g(r)$ 仅是径向坐标 r 的函数。1）求角动量平方 $\hat{L}^2$ 的可能测量值和相应的几率；（10 分）2）求角动量的 z 分量 $\hat{L}_z$ 的可能测量值和平均值。（10 分）

三、$\vec{S}$ 代表电子的自旋算符，$\vec{n}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ 为从原点指向单位球面上 (θ,φ) 方向上的单位向量，其中 θ 是纬度，φ 是经度。

1) 在 (S^2,S_z) 表象下求自旋 $\vec{S}$ 在 $\vec{n}$ 方向上的投影 $S_n=\vec{n}\cdot\vec{S}$ 的本征值和相应的本征波函数。（10 分）
2) 假定电子处于 S_n 的某个本征态，那么测量 S_z 会得到哪些数值，相应的几率是多少，测量 S_z 的平均值又是多少？（10 分）

四、一个质量为 m，无电荷但自旋为 1/2，磁矩为 $\vec{\mu}=-\frac{2\mu_0}{\hbar}\vec{s}$ 的粒子在一维无限深势阱 $V(x)=\begin{cases}0; & |x|<L \\ +\infty; & |x|>L\end{cases}$ 中运动，其中 μ_0 和 L 是正常数，x 是粒子的坐标，$\vec{s}$ 是粒子的自旋算符。现在考虑在 $x<0$ 的半空间中有一沿 z 方向的均匀磁场，其大小为 B，而在 $x>0$ 的半空间有一同样大小但沿 x 方向的均匀磁场。在弱磁场极限下用微扰论找出体系基态的能级和波函数，并指出 B 能作为弱磁场处理的具体条件。（微扰只须计算到最低阶，自选空间的波函数在 Pauli 表象下写出。）（30 分）

五、一个质量为 m 的无自旋的粒子在三维情形下与一个球对称势 $V(r)=-C\delta(r-a)$ 作用，其中 C，a 为正常数，r 是径向坐标，为了保证该体系至少有一个束缚态存在，试问 C 的值最小可以取多少？（30 分）

六、一个质量为 m 的无自旋的粒子受到中心势 $V(r)=-\frac{\hbar^2}{ma^2}\frac{1}{\cosh^2(r/a)}$ 的散射，其中 a 是常数。已知方

程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+k^2y+\dfrac{2}{\cosh^2 x}y=0$有解$y=e^{\pm ikx}(\tanh x\mp ik)$，在低能极限下，求粒子能量为 E 时，s 分波的散射截面及其角分布。（30 分）

南京大学 2005 年硕士研究生入学考试试题——量子力学

专　　业: 理论物理,凝聚态物理

一、问答题

1、试述量子态的叠加原理。（5 分）

讨论自由粒子的波函数是否一定是平面波？问什么？（5 分）

2、为什么波函数$\psi(\vec{x},t)$必定是复数？（5 分）

一维定态薛定谔方程的解$\psi(x)$是否也必定是复数？（5 分）

3、以下的波函数是否代表同一个量子态，并说明为什么：

（1）、$\psi(\vec{x},t)$和$e^{i\varphi}\psi(\vec{x},t)$，其中$\varphi$是实常数;（5 分）

（2）、$\psi(\vec{x},t)$和$e^{i\varphi(\vec{z})}\psi(\vec{x},t)$，其中$\varphi(\vec{x})$是实函数。（5 分）

4、为什么力学量算符$\hat{A}$应是线性厄米算符？（10 分）

5、为什么全同粒子的波函数对于粒子的交换应是对称或反对称的？（10 分）

二、质量为μ的粒子在一维无穷深势阱中运动，$V(x)=\begin{cases}0; & |x|<a\\ 1; & |x|>a\end{cases}$

其中a是正实数，求解定态薛定谔方程。（20 分）

三、质量为μ的粒子在一维势场中运动，势能为：$V(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2; & x>0\\ \infty\ ; & x<0\end{cases}$，

其中 x>0 区$V(x)$为谐振子势能，求解基态的能量和归一化的波函数。（20 分）

四、设质子是半径为 R 的薄球壳，其电荷 e 均匀分布在球壳表面上。对于氢原子，以电子所受势能偏离质子为点粒子模型时的值为微扰，求氢原子第一激发态能量的一级修正$E_2^{(1)}$（积分公式列出后不必计算）。（20 分）

五、中子有内禀磁矩：$\vec{\hat{M}}=-g\dfrac{e}{Mc}\hat{\vec{S}}$，其中 g=1.9，M 为中子质量。当自旋在 z 方向向上极化的中子束，沿 x 轴作一维运动时，在 x<0 区没有磁场而在 x>0 区域存在恒定磁场$\vec{B}$，其方向沿 z 方向。若能量

$E > g\dfrac{e\hbar B}{2Mc}$，求解中子的一维散射运动。（20 分）

六、求两个关在一维无穷深势阱$V(x)=\begin{cases}0; & 0<x<a\\ \infty; & \mathrm{x}<0,\ x>a\end{cases}$（$a$ 为正常数）中，并以接触势$U(x_1,x_2)=d\delta(x_1-x_2)\,(d<<1)$相互作用的全同中子系统的零级近似归一化波函数（考虑自旋态），并以接触势为微扰，求准到一次方的基态能量。（20 分）

南京大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 量子力学 328

适 用 专 业：理论物理，凝聚态物理等

注意：

1.所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上，写在试卷和其他纸上无效；

2.本科目[redacted]不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

可能有用的数学公式：

1、球谐函数 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$

$$Y_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\quad Y_{1,0}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\quad Y_{1,\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\exp(\pm i\varphi),$$

$$Y_{2,0}=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right),\quad Y_{2,\pm1}=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\exp(\pm i\varphi),$$

$$Y_{2,\pm2}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\exp(\pm 2i\varphi)。$$

2、质量为 μ，圆频率为 ω 的一维谐振子的能量本征波函数：

$$\psi_n(x)=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right)H_n(\alpha x),$$

$$H_n(\xi)=(-1)^n\exp\left(\xi^2\right)\frac{d^n}{d\xi^n}\exp\left(-\xi^2\right),\text{其中 }\alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}。$$

3、球坐标系下的拉普拉斯算符：

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

一、质量为 μ 的粒子在势场 $V(x)=\begin{cases}+\infty, & x<0\\ -V_0 a\delta(x-a), & x>0\end{cases}$ 中运动，其中 V_0 和 a 都是正常数。回答以下问题：

1) 求确定束缚能的表达式；（20 分）

2) 要形成束缚态，所须要的最小 V_0 值是多少？（10 分）

二、已知一个自旋 $\frac{1}{2}$ 的系统，处于 $S_n=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}$ 的本征值为 $\frac{\hbar}{2}$ 的本征态，其中 $\boldsymbol{S}$ 是自旋算符，$\boldsymbol{n}$ 是 x-z 平面内与正 z 轴成 β 角的单位矢量。回答以下问题：

1) S_x 取值 $\frac{\hbar}{2}$ 的几率是多少？（15 分）

2) S_x 的均方涨落 $\Delta S_x=\sqrt{\left\langle\left(S_x-\langle S_x\rangle\right)^2\right\rangle}$ 是多少？（其中 $\langle\cdots\rangle$ 表示求平均）（15 分）

三、质量为 μ 的粒子在三维中心势场 $V(r)$ 中运动。该势场在无穷远处趋于零。已知该粒子的一个能量本征波函数为 $\psi=Cr^{\sqrt{7}}\exp(-\beta r)\cos\theta$，其中 C 和 β 是实常数。回答以下问题：

1) 在此状态下，粒子的角动量 L^2 和 L_z 可以有哪些取值，相应的几率是多少？（10 分）

2) 试确定 $V(r)$ 的具体形式。（20 分）

南京大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 量子力学 328

适 用 专 业: 理论物理、凝聚态物理

注意:

1.所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上,写在试卷和其他纸上无效;

2.本科目[redacted]不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

四、当$t<0$时,质量为μ,圆频率为ω,沿x方向振动的一维谐振子处于基态。从$t>0$时起,该谐振子受到沿x方向的力(不是势)$F(t)=F_0\exp(-t/\tau)$的作用,其中F_0和τ是正常数。假设F_0很小,利用含时微扰论,准至一阶,求出该谐振子在充分长时间后,处于各激发态上的几率。

(30 分)

五、考虑两个自旋$\frac{1}{2}$,质量为μ的全同粒子在三维空间的运动。假定两个粒子的总动量是零,两粒子间的相互作用势为$V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\frac{g}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2$,其中$g$是一个正常数,$\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2$是两个粒子的空间坐标,$\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2$是两个粒子的泡利自旋矩阵($\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2$都是矢量)。求出两粒子能形成的所有束缚态的能级和相应的简并度。

(30 分)

南京大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 量子力学 代码 628

适 用 专 业：理论物理，凝聚态物理等

注意：

1.所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上，写在试卷和其他纸上无效；

2.本科目[redacted]不允许使用~~无字典存储和编程功能的~~计算器。

3、 本试卷共计有5题，每题30分。

一、 简答题(只须写清最终结果，不需要中间过程)

1) 写出薛定谔方程和定态薛定谔方程；

2) 写出一维谐振子的能级公式；

3) 写出氢原子的能级公式；

4) 写出关于坐标和动量的海森堡不确定关系；

5) 写出电子在外加电磁场中运动时的哈密顿量；

6) 两个电子分别处于一维无限深势阱的基态(用 ψ_1 表示)和第一激发态(用 ψ_2 表示)，试就两个电子的自旋平行和反平行两种情况，分别写出两电子的空间波函数；

二、 质量为 μ 的粒子在宽度为 a 的一维无限深势阱

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a \\ +\infty, & \text{elsewhere}\end{cases}$$

中运动，回答以下问题：

1) 写出粒子的能量本征值和归一化能量本征波函数；

2) 假定 $t=0$ 时粒子的波函数为

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{1}{a}}\left(\sin\frac{\pi x}{a}+\sin\frac{2\pi x}{a}\right),\quad (0<x<a)$$

，求 $t>0$ 时，粒子的波函数和动量的平均值；

3) 假定 $t<0$ 时粒子处于基态，$t=0$ 时势阱宽度突然扩大一倍，即势阱变为 $V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<2a \\ +\infty, & \text{elsewhere}\end{cases}$，此时测量粒子的能量可能得到什么结果，相应的概率是多少？

三、 质量为 μ 的粒子作一维运动，穿过一个 δ 势垒 $V(x)=g\delta(x)$，

$(g>0)$，求透射系数。

四、 质量为 μ 的粒子处于三维各向同性谐振子势 $V(r)=\frac{1}{2}\mu\omega^2r^2$

中，回答下列问题：

1）求粒子的能量本征值和相应的简并度；

2）如果再加上微扰 $H'=bxz$ 的作用，b 为小的正常数。求该粒子基态和第一激发态能量的一级修正；

3）如果在以上势阱（含微扰）中，放入 5 个全同的无相互作用的无自旋粒子，求体系的基态能；

4）如果在以上势阱（含微扰）中，放入 5 个全同的无相互作用的自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子，求体系的基态能。

已知积分公式：$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x)x\varphi_1(x)dx=\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}$，其中 $\varphi_0(x)$ 和

$\varphi_1(x)$ 分别为一维谐振子基态和第一激发态的能量本征波函数。

另外如果您不能解答本题的第二问，但能在不含微扰的情形下正确解答本题的第三和第四问，那么也能得到一些分数。

五、 有两个自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子，其中一个处于 $S_z=+\frac{\hbar}{2}$ 的本征态，还有一个处于 $S_z=-\frac{\hbar}{2}$ 的本征态。

1）求这两个粒子处于自旋三重态的几率；

2）研究这两个粒子间的碰撞，假定这两个粒子是非全同的，入射粒子和靶粒子的质量都是 μ，散射势为 $V(r)=\begin{cases}-V_0, & 0<r<a\\ 0, & r>a\end{cases}$，其中 r 是两个粒子间的距离，V_0 和 a 是两个正常数。入射粒子的能量很低可以近似为零(因而只有 s 波须要考虑)，求散射总截面(不要求讨论共振散射)。

3）假定这两个粒子是中子，散射势与自旋有关，表示为 $V(r)=\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2V_0, & 0<r<a\\ 0, & r>a\end{cases}$，其中矢量 $\boldsymbol{\sigma}_1$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_2$ 是两个中子的泡利矩阵。其他条件和要求与上一问相同，求散射总截面。

8

南京大学 2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 量子力学 628

适 用 专 业: 理论物理、凝聚态物理

注意：

1.所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上，写在试卷和其他纸上无效；

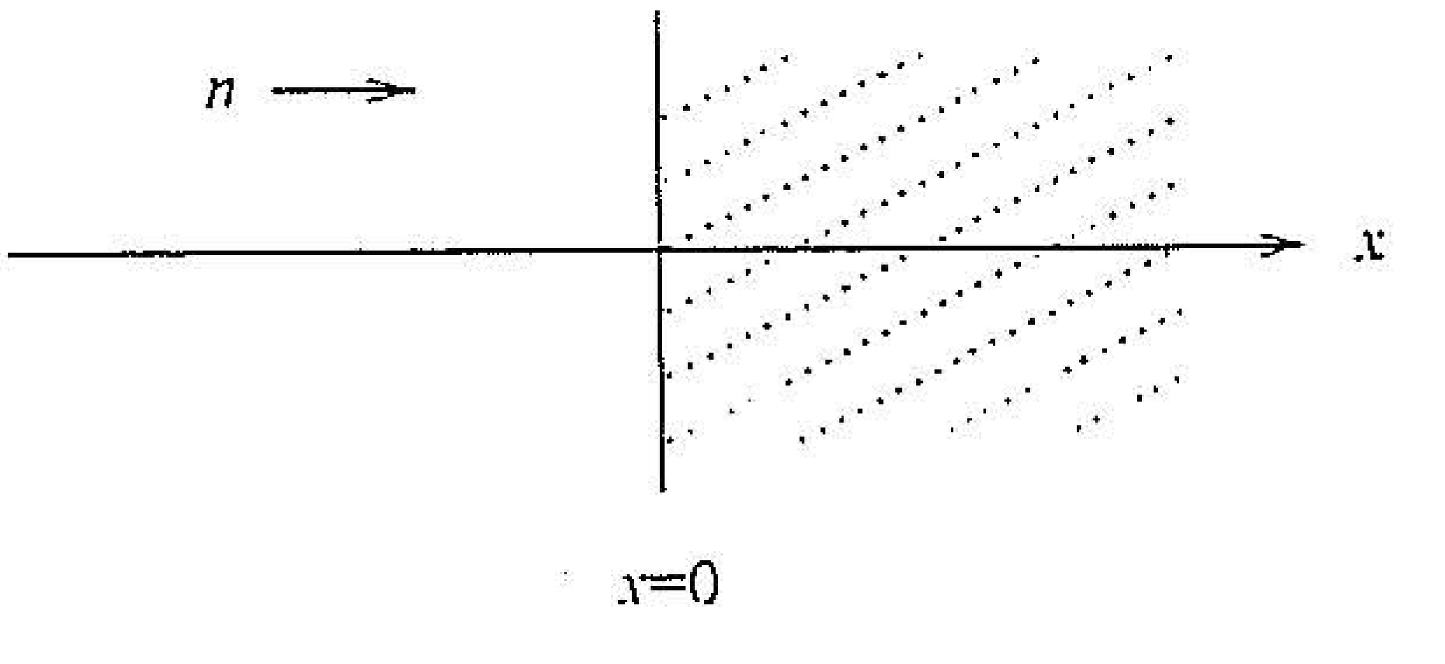
2.本科目~~允许~~/不允许使用~~无字典存储和编程功能的~~计算器。

一、 (20分) 质量为 μ 的粒子被限制在半径为 $r=a$ 和 $r=b$ 的两个不可穿透的同心球面之间运动。求粒子的基态能量和归一化波函数。

二、 (20分) 利用不确定关系估计氢原子基态能量。

三、 (20分) 在电子的某个自旋态 $|\chi\rangle$ 中，测量 $\hat{S}_z$ 得 $\frac{\hbar}{2}$ 的几率为 $\frac{1}{6}$，测量 $\hat{S}_y$ 得 $\frac{\hbar}{2}$ 的几率为 $\frac{1}{3}$. 求该自旋态 $|\chi\rangle$ 和 $\hat{S}_x$ 的平均值。

四、 (30分) 能量为 E 的中子束沿 x 轴垂直入射到充满 $x>0$ 半空间的铁磁体，如图所示。



在 $x>0$ 区域，中子与铁磁体的相互作用势 $V(x)=V_0+\omega_0\hat{S}_z$，$\hat{S}_z$ 是中子自旋的 z 分量，V_0 和 ω_0 都是常数，且满足 $0<\frac{1}{2}\hbar\omega_0<V_0$. 其他地方 $V(x)=0$.

(1) 设入射中子束中自旋 z 分量朝上和朝下的中子各占一半，求反射中子的极化度 A. (25分)

(极化度定义为 $A\equiv\frac{\text{自旋朝上的中子数}-\text{自旋朝下的中子数}}{\text{中子总数}}$)

(2) 入射中子能量为何值时，极化度最大? (5分)

五、 (30分) 质量为 μ 的粒子在势场 $V(x,y,z)=\frac{1}{2}\mu\omega_0^2(x^2+y^2+z^2)$ 中做本征频率为 ω_0 的简谐振动。

(1) 求三个最低能级，对它们及一般情形的能级讨论简并度。(8分)

(2) 设粒子受周期性微扰势作用

$$\hat{H}'=A\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}\cos\frac{2\pi z}{a}\cos\omega t$$

式中 A,a,ω 是常数。以 $|n_x n_y n_z\rangle$ 表示粒子的能量本征态。其中 $n_x,n_y,n_z=0,1,2,\cdots$ 各自对应三个一维谐振子的量子数。设 $t=0$ 时粒子处在 $|000\rangle$ 态，求 t 时刻粒子处于 $|110\rangle$ 态的几率，略去等于或高于 A^2 的贡献。 (22分)

下列关系式可能有用

积分公式: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2x^2}e^{ikx}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{k^2}{4\alpha^2}}$

一维谐振子归一化波函数: $\displaystyle\psi_n=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}\mathrm{H}_n(\xi)$,

其中 $\alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega_0}{\hbar}}$, $\xi=\alpha x$, $\mathrm{H}_0(\xi)=1$, $\mathrm{H}_1(\xi)=2\xi,\cdots$

六、 (30分) 考虑两个质量为 μ、自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子的散射，相互作用势为

$$V=\xi\hat{\vec{S}}_1\cdot\hat{\vec{S}}_2\delta(\vec{r})$$

式中 ξ 是常数，$\vec{S}_1$ 和 $\vec{S}_2$ 是两个粒子的自旋，δ 是 Dirac 的 δ 函数。

(1) 如果两个粒子是可分辨的，用一级 Born 近似分别求自旋单态和自旋三重态的微分散射截面。 (16分)

(2) 设粒子是非极化的，求总的微分散射截面。 (6分)

(3) 如果两个粒子是全同的，且处于自旋三重态，则微分散射截面为零，请给予物理解释。 (8分)

南京大学 2009 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 量子力学 628

适 用 专 业: 理论物理，凝聚态物理

注意：

1.所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上，写在试卷和其他纸上无效；

2.本科目[redacted]/不允许使用~~无字典存储和编程功能~~的计算器。

3. 本试卷共计五大题15小题，每大题30分，每小题10分。

一. 基本概念问答题

1) 试表述量子态的叠加原理并说明叠加系数是否依赖于时空变量及其理由。

2) 量子力学中的力学量算符有哪些性质？为什么需要这些性质？

3) 试给出本征波函数的正交归一关系并说明它们在分立本征谱和连续本征谱的差别。

二. 设一维简谐振子的初始 ($t = 0$) 波函数为

$$\phi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_0(x) + \frac{1}{2}\phi_1(x) + A\phi_2(x),$$

其中 $\phi_n(x)$ 为简谐振子的三个($n = 0, 1, 2$)最低能量的定态波函数。试求

1) 系数 $A = ?$

2) t 时刻的波函数 $\phi(x,t)$

3) t 时刻的能量平均值。

三. 设无外势场时，质量为 μ 能量为 $E > 0$ 的粒子的状态用球面波描写。试

1) 导出决定 S 波($l = 0$)波函数的常微分方程
2) 求出所有 S 波的球面波波函数
3) 计算对应于 S 波解的速度流矢量并作出图示。

四. 设粒子从 $x = -\infty$ 入射，进入一维阶跃势场：
当 $x < 0$ 时，$V(x) = 0$；
而当 $x > 0$ 时，$V(x) = V_0$　$(V_0 > 0)$。
如果粒子能量 $E > V_0$，试

1) 写出波动方程式并求解
2) 求透射系数
3) 求反射系数并求与透射系数之和

五. 设有三个 $\frac{1}{2}$ 自旋算符 $\mathbf{S}_1$，$\mathbf{S}_2$，$\mathbf{S}_3$ 组成的系统，其哈密顿量为

$$H = A\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + B\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + B\mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_1 ,$$

试

1) 给出系统的力学量完全集
2) 求解能级
3) 给出每一个能级的简并度

为书写简单计，可令约化普朗克常数 $\hbar = 1$。

8

南京大学 2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 量子力学 628

适 用 专 业: 理论物理，凝聚态物理

注意:

1. 所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上，写在试卷和其他纸上无效;
2. 本科目不允许使用计算器。
3. 本试卷共计五大题15小题，每大题30分，每小题10分。

一. 基本概念题

1) 试表述坐标与动量这两个力学量之间的海森堡不确定关系。

2) 写出波函数 $\psi(x) = e^{ikx}$ 上的相应海森堡不确定关系。

3) 写出波函数 $\psi(x) = \delta(x - x_0)$ 上的相应海森堡不确定关系。

二. 设有一个质量为 m 粒子在一维无限深势阱

$V(x) = +\infty$ 当 $x < 0$ 及 $x > a$ 时,
$V(x) = 0$ 当 $0 < x < a$ 时

中运动， a 为势阱宽度，试求

1) 能量本征态(即定态)波函数 $\psi_n(x)$。

2) 如初态波函数为 $\psi(x, t=0) = C(1 - \cos\frac{\pi x}{a})\sin\frac{\pi x}{a}$，求常数 C 并说明该波函数的含义。

3) 求 t 时刻对应的波函数 $\psi(x, t)$ 和粒子平均能量。

三. 在一维坐标表象中，$\phi_{x'}(x) = \delta(x - x')$ 为坐标算符本征波函数，而动量算符可以写成 $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$，试求

1) 坐标算符的矩阵元 $\int dx\ \phi^*_{x'}(x)\hat{x}\phi_{x''}(x)$。
2) 动量算符的矩阵元 $\int dx\ \phi^*_{x'}(x)\hat{p}\phi_{x''}(x)$。。
3) 哈密顿算符$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$的矩阵元 $\int dx\ \phi^*_{x'}(x)\hat{H}\phi_{x''}(x)$。

四. 在一维坐标表象中，试解决下列问题：

1) 对于可以进行多项式展开的 $f(\hat{p})$，有 $[x, f(\hat{p})] = i\hbar\frac{df(\hat{p})}{d\hat{p}}$。

2) 对于算符的 $D(\hat{p}) = e^{-ia\hat{p}/\hbar}$ (a 为常数)，求波函数 $D(\hat{p})\delta(x - x')$。

3) 如果 $u(x)$ 与 $D(\hat{p})$ 对易，给出 $u(x)$ 的主要性质。

五. $\frac{1}{2}$自旋算符可用Pauli矩阵 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 表达为 $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$，

其中 σ_3 的两个本征态为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，试求

1) $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ 的本征态，其中 $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$。

2) 用 $\hat{U} = e^{-i\sigma_3\varphi/2}e^{-i\sigma_2\theta/2}$ 作用到 σ_3 的两个本征态上的结果。

3) 说明题 1）和题 2）结果的关系及 $\hat{U}$ 的物理意义。

南京大学2011年硕士研究生入学考试初试试题

（ A 卷）（三小时）

考目代码：628 科目名称：量子力学 满分：150 分

适用专业：理论物理，凝聚态物理

注意：①所有答案必须写在答题纸或答题卡上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；

②本科目不允许使用计算器；

③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

本试卷共计五大题15小题，每大题30分，每小题10分。

一、试用中文解释以下量子力学术语、指出原创者中外文名字并给出相关数学公式：

1) matrix mechanics
2) wave mechanics
3) uncertainty relation

二、设初始时刻一维自由粒子的波函数为

$$\phi(x,0) = Ae^{ikx-\alpha x^2}$$

其中 k, α 为常数，试求解以下问题：

1) 先计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdye^{-(x^2+y^2)}$，

从而找到所需积分公式以求出归一化系数 A；

2) 动量平均值 $\langle p \rangle$ 与动量分布函数 $c(p)$；

3) t 时刻的波函数 $\phi(x,t)$。

三、设氢原子处于基态，波函数为

$$\psi_{100}(r,\theta,\varphi) = Ae^{-r/a},$$

a 为玻尔半径，A 为归一化系数。不得直接使用积分公式，自行计算：

1) 归一化系数与电子径向坐标的平均值；

2) 电子动能、势能平均值并运用玻尔氢原子能级公式求出玻尔半径；

3) 电子分布几率的最可几半径。

四、设有两个算子 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 满足交换关系式

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{1},$$

试求解以下问题：

1) n为正整数，$[\hat{A},\hat{B}^n]$；

2) $f(x)$ 为解析函数，$[\hat{A},f(\hat{B})]$；

3) 如果 ψ_a 为 $\hat{A}$ 的本征态，本征值为 a，对任意常数 b，$e^{b\hat{B}}\psi_a$ 是谁的本征态？本征值等于什么？

南京大学 2011 年硕士研究生入学考试初试试题

（ A 卷）（三小时）

考目代码：628　科目名称：量子力学　满分：150 分

适用专业：理论物理，凝聚态物理

注意：①所有答案必须写在答题纸或答题卡上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；

②本科目不允许使用计算器；

③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

五、2010年诺贝尔物理奖成就为"有关二维材料石墨烯的开创性实验"，石墨烯的二维蜂窝结构碳原子层上的传导电子遵守二维二分量狄拉克方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\hbar}{i}v\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{\mathbf{r}},t),$$

其中 $\vec{\mathbf{r}} = x\vec{\mathbf{e}}_x + y\vec{\mathbf{e}}_y$ 为二维位置矢量，v 为常数，其他为量子力学的标准符号。求

1) 狄拉克电子的定态方程式与力学量完全集；
2) 狄拉克电子的能谱并说明物理意义；
3) 狄拉克电子的本征波函数。

南京大学2012年硕士研究生入学考试初试试题

（A卷）（三小时）

科目代码：628 科目名称：量子力学 满分：150 分

适用专业：理论物理，凝聚态物理

注意：①所有答案必须写在答题纸或答题卡上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；

②本科目不允许使用计算器；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

本试卷共计五大题15小题，每大题30分，每小题10分。

一、试指出以下量子力学原创者的中文名字与贡献并给出相关数学公式：

1) Heisenberg
2) Dirac
3) Schrödinger

二、粒子处于宽度为$2a$的一维对称无限深方势阱中，试求解以下问题：

1) 能量本征值与定态波函数；

2) 粒子在任意本征态上的动量平均值；

3) 粒子在基态上的动量分布概率。

三、设质量为μ的粒子处于三维球对称势场

$$V(r) = 0, \quad a < r < b;$$
$$V(r) = +\infty, \quad r \le a, r \ge b$$

中，试求解轨道角动量量子数$l=0$的如下问题：

1) 定态方程式与本征能量；
2) 定态波函数；
3) 基态粒子径向分布的最可几半径。

四、设静止质量为 m_0 的粒子的一维哈密顿量为

$$\hat{H} = \sqrt{c^2\hat{p}^2 + m_0^2c^4}$$

其中 c 为光速，动量算子 $\hat{p}$ 与坐标算子 $\hat{x}$ 满足正则量子化条件 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, 试求解以下问题:

1）能量本征值与本征波函数;

2）$[\hat{x}, \hat{H}] = \hat{x}\hat{H} - \hat{H}\hat{x}$;

3）海森堡影像（**Heisenberg Picture**）中的坐标算子 $\hat{x}(t)$ 并说明物理意义。

五、量子力学中的韦尔（Weyl）波动方程式为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\hbar}{i}c\vec{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \vec{\nabla}\psi(\vec{\mathbf{r}}, t),$$

其中 $\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_x\vec{\mathbf{e}}_x + \sigma_y\vec{\mathbf{e}}_y + \sigma_z\vec{\mathbf{e}}_z$ 为泡利矩阵所组成的矢量，$\psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ 为泡利二分量波函数，其他为量子力学的标准符号。求

1) 该系统的韦尔定态方程式与力学量完全集;
2) 该系统的能量本征值并说明其物理意义;
3) 该系统的本征波函数。

南京大学 2013 年硕士研究生入学考试初试试题

（A 卷）（三小时）

科目代码：628 科目名称：量子力学 满分：150 分

适用专业：理论物理，凝聚态物理

注意：①所有答案必须写在答题纸或答题卡上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；

②本科目不允许使用计算器；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

本试卷共计五大题，每大题30分。

一、(30分) 试给出以下量子力学基本概念的中文翻译、定义与相关公式：

1) (10分) Eigenfunction
2) (10分) Stationary state
3) (10分) Superposition principle

二、(30分) 对于一维无势场单粒子系统，试求解以下问题：

1) (10分) 利用定积分公式 $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

给出狄拉克黛儿塔函数的傅里叶展开公式；

2) (10分) 设初始时刻波函数等于狄拉克黛儿塔函数，求任意时刻的波函数；

3) (10分) 求任意时刻的粒子空间分布几率。

三、(30分) 设处于沿z方向的均匀外磁场中的电子初始时刻的自旋状态为x分量自旋算子的向上本征态，试求任意时刻的电子自旋状态(15分)以及出现如下本征态的几率：

1) x分量自旋算子的本征态(5分)；
2) z分量自旋算子的本征态(10分)。

四、(30分) 对于处于保守力(conservative force)作用下的单粒子系统而言，量子力学与古典力学之间存在很多相似之处，试回答以下问题:

1)(10分) 给出量子力学中的力学量守恒定律;
2)(10分) 证明薛定谔影像(Schrödinger Picture)中的厄伦费斯特定理(Ehrenfest Theorem);
3)(10分) 证明海森堡影像(Heisenberg Picture)中的厄伦费斯特定理。

五、(30分) 真空中的麦克斯维尔方程组为(取自然单位)

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

克莱默斯(Kramers)矩阵的定义为 $F = \begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \end{pmatrix}$

试求解以下问题:

1)(10分) 利用量子力学的动量算子 $\hat{\mathbf{p}} = -i\vec{\nabla}$ 证明

$$\left(\hat{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{S}}\right)F = i\frac{\partial F}{\partial t};$$

2)(10分) 给出上一问题中的未知矢量;
3)(10分) 由上面结果导出光子的自旋量子数。