

Graduate Texts in Mathematics

听雨尘心@含藏识

GTM 系列电子书下载



Springer 版权所有

仅供学习，请支持正版书籍

<http://realking1980.bokee.com>

目 录

序.....	(i)
§0. 預备知識.....	(1)
第一章 集与类.....	(9)
§1. 集的包含关系.....	(9)
§2. 併集与交集.....	(11)
§3. 極限, 余集, 差集.....	(15)
§4. 环与代数.....	(19)
§5. 由集类产生的环和 σ -环.....	(22)
§6. 单調类.....	(27)
第二章 測度和外測度	(30)
§7. 环上的測度.....	(30)
§8. 区間上的測度.....	(32)
§9. 測度的性質.....	(38)
§10. 外測度.....	(42)
§11. 可測集.....	(46)
第三章 測度的扩張.....	(52)
§12. 引出的測度的性質.....	(52)
§13. 測度的扩張和增补.....	(57)
§14. 內測度.....	(61)
§15. 勒貝格測度.....	(66)
§16. 不可測集.....	(71)
第四章 可測函数.....	(77)
§17. 測度空間.....	(77)
§18. 可測函数.....	(80)
§19. 可測函数的运算.....	(84)
§20. 可測函数列.....	(88)
§21. 几乎处处收斂性.....	(90)

§22. 依測度收斂性·····	(94)
第五章 积分 ·····	(99)
§23. 可积簡單函数·····	(99)
§24. 可积簡單函数列·····	(102)
§25. 可积函数·····	(105)
§26. 可积函数列·····	(110)
§27. 积分的性質·····	(115)
第六章 一般的集函数 ·····	(121)
§28. 广义測度·····	(121)
§29. 哈恩分解和若当分解·····	(125)
§30. 絕對連續性·····	(129)
§31. 拉东-尼古丁定理·····	(133)
§32. 广义測度的导数·····	(138)
第七章 乘积空間 ·····	(143)
§33. 笛卡兒乘积空間·····	(143)
§34. 截口·····	(146)
§35. 乘积測度·····	(149)
§36. 富比尼定理·····	(151)
§37. 有限維乘积空間·····	(156)
§38. 無限維乘积空間·····	(160)
第八章 变换与函数 ·····	(168)
§39. 可測变换·····	(168)
§40. 測度环·····	(172)
§41. 关于同构的定理·····	(179)
§42. 函数空間·····	(183)
§43. 集函数与点函数·····	(187)
第九章 概率 ·····	(194)
§44. 引言·····	(194)
§45. 独立性·····	(200)
§46. 独立函数級数·····	(205)

§47. 大数定律.....	(213)
§48. 条件概率和条件数学期望.....	(218)
§49. 乘积空间上的测度.....	(223)
第十章 局部紧空间	(229)
§50. 一些拓扑学方面的定理.....	(229)
§51. 波雷耳集和贝尔集.....	(232)
§52. 正则测度.....	(237)
§53. 波雷耳测度的生成.....	(245)
§54. 正则容度.....	(251)
§55. 某些连续函数类.....	(253)
§56. 线性汎函数.....	(256)
第十一章 哈尔测度	(263)
§57. 开子群.....	(263)
§58. 哈尔测度的存在性.....	(264)
§59. 可测群.....	(270)
§60. 哈尔测度的唯一性.....	(275)
第十二章 群里的测度和拓扑	(281)
§61. 以测度表拓扑.....	(281)
§62. 魏尔拓扑.....	(285)
§63. 因子群.....	(292)
§64. 哈尔测度的正则性.....	(297)
参考文献索引	(304)
参考文献	(306)
常用记号表	(310)
索引	(312)

§0. 預備知識

要理解本書前面七章，只須具備初等代數和數學分析的基礎知識就夠了。特別是，我們假定讀者熟知下面(1)至(7)中所列出的概念和結果。

(1) 數學歸納法；代數運算的交換律和結合律；綫性組合；等價關係以及將集分解成等價類。

(2) 可列集；可列個可列集的併集是可列集。

(3) 實數；數直綫的初等度量性質和拓撲性質(例如：有理數集是處處稠密的，每一個開集可以表為可列個不相交開區間的併集)；海尼-波雷耳定理。

(4) 函數的一般概念；特別是數列(就是以正整數集為定義域的函數)的概念；函數的和，積；函數與常數的乘積；函數的絕對值。

(5) 實數集與實值函數的上確界和下確界；實數列和實值函數列的極限，上極限，下極限。

(6) 符號 $+\infty$ 和 $-\infty$ ；它們和實數 x 間的代數關係：

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty;$$

$$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty, & \text{若 } x > 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \\ \mp\infty, & \text{若 } x < 0; \end{cases}$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty,$$

$$(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty;$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0;$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

广义实数这个术语指的是实数或符号 $+\infty$ 与 $-\infty$ 二者之一。在数直线上补入 $+\infty$ 和 $-\infty$ 两个符号,称为扩张的数直线。

(7) 如果 x 和 y 是实数,则

$$x \cup y = \max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|),$$

$$x \cap y = \min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

类似地,如果 f 和 g 是实值函数,则 $f \cup g$ 和 $f \cap g$ 分别是由等式

$$(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x)$$

和

$$(f \cap g)(x) = f(x) \cap g(x)$$

确定的函数。实数列 $\{x_n\}$ 的上确界和下确界分别记为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{和} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} x_n.$$

按照这种记法,有

$$\limsup_n x_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} x_m$$

和

$$\liminf_n x_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} x_m.$$

在第八章中要用到度量空间的概念,度量空间的完备性,可分性,以及定义在度量空间上的函数的一致连续性概念。此外,在第八章中还要用到分析中稍微复杂一些的概念,例如单侧连续性概念。

第九章最后一节需要用到齐霍诺夫关于乘积空间的紧性的定理(对于可列个因子,其中每一个因子是一个区间)。

一般说来,在每章中都将自由地运用以前各章的结论;唯一的例外是最后三章中并不需要用到第九章的内容。

在第十、十一和十二章里,我们将系统地运用点集拓扑和拓扑群论中的概念和结论。我们在下面列举出全部有关的定义和定理。这一篇附录不能作为拓扑学的教科书,乃是为了达到下面四个目的:(1)为专家指出,对于有关的概念和结论,我们需要那一种

表达的方式；(2)为初学者指出，在进入最后三章的閱讀以前，應該熟悉那些概念和結論；(3)說明某些未經普遍采用的術語的意義；(4)使讀者能够很快地查到他所需要的東西。

拓 扑 空 間

拓扑空间是指一个集 X 和它的某些子集所組成的一個類，這個類包含 0 和 X ，並且封閉于有限交与任意併（不一定是有限或可列）两种运算；上述集類中的集称为 X 中的**开集**。設 E 是 X 的子集，如果存在开集的叙列 $\{U_n\}$ 使得 $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ ，則称 E 是一个 G_δ -集。由全体 G_δ -集組成的類对于有限併与可列交两种运算是封閉的。拓扑空間称为**离散的**，如果 X 的每一个子集都是开集，換一句話說，如果 X 的每一个单点子集是开集。集 E 称为**閉集**，如果 $X - E$ 是开集。由全体閉集組成的類包含 0 和 X ，並且封閉于有限併与任意交的运算。 X 的子集 E 的**內部** E^0 是指被 E 所包的最大开集； E 的**閉包** \bar{E} 是指包含 E 的最小閉集。集的內部是开集，閉包是閉集。如果 E 是开集，則 $E^0 = E$ ；如果 E 是閉集，則 $\bar{E} = E$ 。集 E 的閉包是由一切具有下列性質的点 x 組成的：对于包含 x 的每一个开集 U ， $E \cap U \neq 0$ 。如果 $\bar{E} = X$ ，則称集 E 在 X 中**稠密**。設 Y 是拓扑空間 X 的子集，如果 Y 中被称为开集的子集可由 X 中的一个开集与 Y 相交而得，則 Y 本身形成一个拓扑空間（ X 的**子空間**）； Y 中的拓扑結構称为**相对拓扑**。包含 X 中的点 x [或 X 的子集 E] 的开集称为 x [或 E] 的**邻域**。設 \mathbf{B} 是由开集組成的一個類，如果对于 X 中每一个 x ，并对于 x 的每一个邻域 U ，存在 \mathbf{B} 中的集 B ，使得 $x \in B \subset U$ ，則称 \mathbf{B} 是一个**基**。数直綫的拓扑由下列条件确定：由全体开区間組成的類构成一个基。設有一个开集類，如果由它的元素的一切有限交所組成的類构成一个基，則称开集類为**子基**。如果空間 X 具有可列的基，則称 X 是**可分的**。可分空間的子空間是可分的。

設 E 是拓撲空間 X 的子集, 如果開集類 \mathbf{K} 能使 $E \subset \bigcup \mathbf{K}$, 則稱 \mathbf{K} 是 E 的開復蓋。如果 \mathbf{K} 是 X 的子集 E 的開復蓋, 而 X 是可分的, 則存在 \mathbf{K} 的可列子类 $\{K_1, K_2, \dots\}$ 使得这个子类也是 E 的開復蓋。如果對於 X 的子集 E 的每一個開復蓋 \mathbf{K} , 存在 \mathbf{K} 的有限子类 $\{K_1, \dots, K_n\}$ 使得这个子类成為 E 的開復蓋, 則稱 E 是緊的。設 \mathbf{K} 是一個集類, 如果 \mathbf{K} 的任何有限子类具有非空的交集, 則稱 \mathbf{K} 具有有限交的性質。空間 X 為緊的必要和充分條件是: 每一個具有有限交性質的閉集類有一個非空的交集。設 E 是 X 中的集, 若存在緊集叙列 $\{C_n\}$ 使得 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, 則稱 E 是 σ -緊的。如果空間 X 中的每一個點具有閉包為緊集的鄰域, 則稱 X 是局部緊的。設 E 是局部緊空間的子集, 若存在緊集 C 使得 $E \subset C$, 則稱 E 是有界的。局部緊空間中全體有界開集組成的類是一個基。有界集的閉子集是緊集。設 E 是局部緊空間的子集, 若存在緊集的叙列 $\{C_n\}$ 使得 $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, 則稱 E 是 σ -有界的。對於每一個局部緊但並非緊的拓撲空間 X , 存在緊空間 X^* , X^* 包含 X , 並包含 X 以外的恰好一個點 x^* ; 我們說: X 由於點 x^* 而緊化成為 X^* 。 X 中的開子集以及 X 中緊閉子集的余集 (對於 X^*) 構成 X^* 中的開集。

設 $\{X_i; i \in I\}$ 是一個拓撲空間類, 這個類的笛卡兒乘積空間 $X = \prod \{X_i; i \in I\}$ 指的是定義在 I 上並具有下列性質的一切函數 x 所組成的集: 對於 I 中每一個 i , $x(i) \in X_i$ 。對於 I 中任意固定的 i_0 , 以 E_{i_0} 表示 X_{i_0} 中任意一個開子集, 而當 $i \neq i_0$ 時, 則令 $E_i = X_i$; X 中的開集是由下列條件確定的: 由一切形如 $\prod \{E_i; i \in I\}$ 的集組成的類構成一個子基。定義在 X 上由等式 $\xi_i(x) = x(i)$ 確定的函數 ξ_i 是連續的。任何緊空間類的笛卡兒乘積空間是緊空間。

如果拓撲空間中任意兩個不相同的點具有不相交的鄰域, 則稱這個拓撲空間為豪司道夫空間。豪司道夫空間的任意兩個不相交的緊子集具有不相交的鄰域。豪司道夫空間的緊子集是閉集。

如果局部紧空間是豪司道夫空間或可分空間，則它的紧化空間也分別是豪司道夫空間或可分空間。定义在紧集上的实值連續函数是有界的。

設 X 是拓扑空間，我們用記号 \mathcal{F} (或 $\mathcal{F}(X)$) 表示定义在 X 上并滿足下列条件的一切实值連續函数 f 所組成的类：对于 X 中任意的 x , $0 \leq f(x) \leq 1$ 。設 X 是豪司道夫空間，如果对于 X 中每一个点 y 并对于每一个不包含 y 的閉集 F , 存在 \mathcal{F} 中的函数 f , 使得 $f(y) = 0$ 并使得当 $x \in F$ 时 $f(x) = 1$, 則称 X 是**完全正則的**。局部紧豪司道夫空間是完全正則的。

設 X 是一个集, 在 $X \times X$ 上定义一个实值函数 d (称为**距离**), 滿足下列性質:

$$d(x, y) \geq 0,$$

$$d(x, y) = 0, \quad \text{当而且只当 } x = y \text{ 时,}$$

$$d(x, y) = d(y, x),$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

則称 X 是一个**度量空間**。設 E 和 F 是度量空間 X 的非空子集, 則称 $d(E, F) = \inf \{d(x, y) : x \in E, y \in F\}$ 为 E 和 F 之間的距离。如果 $F = \{x_0\}$ 是一个单点集, 則将 $d(E, \{x_0\})$ 簡記为 $d(E, x_0)$ 。在度量空間 X 中子集 $E = \{x : d(x_0, x) < r_0\}$ 称为以 x_0 为中心, 以 r_0 为半徑的球体, 其中 x_0 是一个点, r_0 是一个正数。**度量空間的拓扑**由下列条件确定: 由一切球体組成的类构成一个基。度量空間是**完全正則的**。度量空間中的閉集是 G_δ -集。要使得度量空間是可分的, 必須而且只須, 它包含一个稠密可列集。設 E 是度量空間的一个子集, 并令 $f(x) = d(E, x)$, 則 f 是一个連續函数, 并且 $\bar{E} = \{x : f(x) = 0\}$ 。如果 X 是数直綫, 或有限条数直綫的笛卡兒乘积空間, 則 X 是局部紧的可分豪司道夫空間; 如果定义 $x = (x_1, \dots, x_n)$

与 $y = (y_1, \dots, y_n)$ 間的距离为 $d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, 則 X

是一个度量空間。数直綫上的閉区間是紧集。

从拓扑空間 X 映入拓扑空間 Y 的变换 T 称为連續的, 如果每一个开集的逆映像仍为开集, 換一句話說, 如果每一个閉集的逆映像仍为閉集。如果变换 T 将 X 中的任意开集映为 Y 中的开集, 則称 T 是一个开变换。設 \mathbf{B} 是 Y 中一个子基, 則 T 为連續的必要和充分条件是: 对于每一个 $B \in \mathbf{B}$, $T^{-1}(B)$ 是开集。設 T 是 X 在 Y 上的連續变换, 并且 X 是紧的, 則 Y 也是紧的。設 T 是 X 在 Y 上的一个一一連續变换, 并且它的逆变换也是連續的, 則称 T 是一个同胚。

实值連續函数項的一致收斂級数之和是連續的。如果 f 和 g 是实值連續函数, 則 $f \cup g$ 和 $f \cap g$ 都是連續的。

拓 扑 群

在非空集 X 中定义一种滿足結合律的乘法如下: 对于 X 中任意两个元素 a 和 b , 方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 都可解, 則称 X 是一个群。在每一个群 X 中, 存在唯一的一个单位元素 e , 滿足下述关系: 对于 X 中每一个 x , $ex=xe=x$ 。 X 中每一个元素 x 有唯一的一个逆元素 x^{-1} , 滿足关系 $xx^{-1}=x^{-1}x=e$ 。設 Y 是 X 的非空子集, 若对于 Y 中任意两个元素 x 和 y , 有 $x^{-1}y \in Y$, 則称 Y 是 X 的子群。若 E 是群 X 的任意子集, 我們以 E^{-1} 表示由一切形如 x^{-1} 的元素組成的集, 其中 $x \in E$; 若 E 和 F 是群 X 的任意两个子集, 以 EF 表示由一切形如 xy 的元素組成的集, 其中 $x \in E, y \in F$ 。要使得群 X 的非空子集 Y 是一个子群, 必須而且只須 $Y^{-1}Y \subset Y$ 。如果 $x \in X$, 則將 $\{x\}E$ 和 $E\{x\}$ 分別簡記为 xE 和 Ex ; xE 和 Ex 分別称为 E 的左轉移和右轉移。如果 Y 是群 X 的子群, 則集 xY 和 Yx 分別称为 Y 的左和右陪集。設 Y 是群 X 的子群, 如果对于 X 中每一个 x 有 $xY=Yx$, 則称 Y 是 X 的不變子群 (或正規子群)。設 Y 是 X 的不變子群, \hat{X} 是由 Y 的一切陪集組成的类, 在 \hat{X}

中定义一种乘法如下：对于 \hat{X} 中任意两个元素 Y_1 和 Y_2 ，它们的乘积是集 $Y_1 Y_2$ ，则 \hat{X} 是一个群；这个群称为 X 对于 Y 的因子群，记为 X/Y 。 \hat{X} 的单位元素 \hat{e} 就是 Y 。设 Y 是群 X 的不变子群，对于 X 中每一个 x ，令 $\pi(x)$ 为包含 x 的 Y 的陪集，则称变换 π 是 X 在 \hat{X} 上的射影。设 T 是群 X 在群 Y 内的一个变换，如果对于 X 中任意两个元素 x 和 y ，有 $T(xy) = T(x) T(y)$ ，则称 T 是一个同态。群 X 在一个因子群 \hat{X} 上的射影是一个同态。

设群 X 是一个豪司道夫空间，如果将 (x, y) 变为 $x^{-1}y$ 的变换 ($X \times X$ 在 X 上) 是连续的，则称 X 是一个拓扑群。设 \mathbf{N} 是由拓扑群中包含单位元素 e 的开集组成的一个类，如果：

- (1) 对于每一个异于 e 的 x ，存在 \mathbf{N} 中的集 U 使得 $x \in U$ ，
- (2) 对于 \mathbf{N} 中任意两个集 U 和 V ，存在 \mathbf{N} 中的集 W 使得 $W \subset U \cap V$ ，
- (3) 对于 \mathbf{N} 中任意的集 U ，存在 \mathbf{N} 中的集 V 使得 $V^{-1}V \subset U$ ，
- (4) 对于 \mathbf{N} 中任意的集 U ，并对于 X 中任意的元素 x ，存在 \mathbf{N} 中的集 V 使得 $V \subset xUx^{-1}$ ，
- (5) 对于 \mathbf{N} 中任意的集 U ，并对于 U 中任意的元素 x ，存在 \mathbf{N} 中的集 V 使得 $Vx \subset U$ ，

则称 \mathbf{N} 是一个在点 e 处的基。由 e 的一切邻域组成的类是一个在 e 处的基；反之，如果在任意一个群 X 中， \mathbf{N} 是满足上述五个条件的集类，若取由 \mathbf{N} 中之集的一切转移组成的类作为一个基，则对于如此定义的拓扑结构而言， X 成为一个拓扑群。设 V 是 e 的一个邻域，如果 $V = V^{-1}$ ，则称 V 是对称的；由 e 的一切对称邻域组成的类是一个在 e 处的基。如果 \mathbf{N} 是一个在 e 处的基， F 是 X 中任意一个闭集，则 $F = \bigcap \{UF : U \in \mathbf{N}\}$ 。

拓扑群 X 的子群[或不变子群]的闭包是 X 的子群[或不变子群]。设 Y 是拓扑群 X 的一个闭的不变子群，如果将群 $\hat{X} = X/Y$ 中具有下述性质的子集称为开集：它在变换 π 之下的逆映像是 X

中的开集, 則 \widehat{X} 是一个拓扑群, 并且 X 在 \widehat{X} 上的射影 π 是一个开的連續变换。

設 C 是一个紧集, U 是拓扑群 X 中的一个开集, 并且 $C \subset U$, 則存在 e 的邻域 V 使得 $VCV \subset U$. 設 C 和 D 是两个不相交的紧集, 則存在 e 的邻域 U 使得 UCU 和 UDU 不相交. 設 C 和 D 是任意两个紧集, 則 C^{-1} 和 CD 都是紧集。

設 E 是拓扑群 X 的子集, 如果对于 e 的每一个邻域 U , 存在有限集 $\{x_1, \dots, x_n\}$ (当 $E \neq 0$ 时可以假定这个集是 E 的一个子集) 使得 $E \subset \bigcup_{i=1}^n x_i U$, 則称 E 是有界的; 在 X 为局部紧的場合, 这个定义与前面所述的局部紧空間中有界集的定义相符合. 如果定义在 X 上的实值連續函数 f 能使 $N(f) = \{x: f(x) \neq 0\}$ 为有界集, 則按照下述意义称 f 为一致連續的: 对于每一个正数 ε , 存在 e 的邻域 U 使当 $x_1 x_2^{-1} \in U$ 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

如果在拓扑群中, 单位元素 e 具有有界邻域, 則称拓扑群是局部有界的. 对于每一个局部有界的拓扑群 X , 存在一个局部紧的拓扑群 X^* , 使得 X 成为 X^* 的一个稠密子群; X^* 称为 X 的增补, 它在精确到一个同构的程度內是唯一确定的. 局部紧群的任何閉子群和因子群是局部紧群。

第一章

集 与 类

§1. 集 的 包 含 关 系

在这本书里面，集这一个名词总是了解为给定的集的一个子集。除了特别指出用不同记号的地方以外，我们总是以 X 表示这个给定的集。 X 的元素称为点；集 X 有时指的是空间，或整个空间。本章的目的是要对有关集论的一些基本概念加以解释，并叙述一些在以后的章节里经常要用到的主要结论。

如果 x 是 X 中的一个点， E 是 X 的一个子集，我们用下面的记号表示 x 属于 E (也就是说， x 是 E 中之点的一个)：

$$x \in E;$$

如果 x 不属于 E ，我们就用下面的记号来表示：

$$x \notin E.$$

因此，对于 X 中的每一个点 x ，我们有

$$x \in X,$$

而对于 X 中任何一个点 x 都不能有

$$x \notin X.$$

如果 E 和 F 都是 X 的子集，则记号

$$E \subset F \quad \text{或} \quad F \supset E$$

表示 E 是 F 的一个子集，也就是说， E 里面的每一个点都属于 F 。

因此，对于每一个集 E ，我们有

$$E \subset E.$$

設有二集 E 和 F , 当它們恰好含有相同的点的时候, 而且只在这时候, 它們才是相等的; 換一句話說, 当而且只当

$$E \subset F \quad \text{和} \quad F \subset E$$

时, E 和 F 称为相等。这一个定义为我們指出了—个重要的原則: 要証明两个集相等, 唯一的方法就是分別証明每一个集里面的任意一点屬于另一个集。

为了便利起見, 引进一个不含任何点的集, 称为**空集**, 我們用 0 这个記号来表示它。对于每一个集 E , 我們有

$$0 \subset E \subset X;$$

对于每一个点 x , 有

$$x \in 0.$$

除了点集以外, 我們常常会遇到以集为元素的集。例如, 設 X 为实数軸, 則一个区間就是一个集, 也就是 X 的一个子集, 但一切区間所成的集則是一个以集为元素的集。为了明确起見, 以集为元素的集称为**类**。关于集的記号和术语, 可以同样地用之于类。例如, 設 E 是一个集, 而 \mathbf{E} 是一个类, 則記号

$$E \in \mathbf{E}$$

表示集 E 屬于类 \mathbf{E} (或者說, E 是 \mathbf{E} 的一个成員, E 是 \mathbf{E} 的一个元素); 又如 \mathbf{E} 和 \mathbf{F} 是两个类, 則記号

$$\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$$

表示 \mathbf{E} 是 \mathbf{F} 的一个子类, 也就是說, \mathbf{E} 里面的每一个集都屬于 \mathbf{F} 。

在極其个别的場合下, 我們也会遇到以类为元素的集, 我們用**总类**这个名詞来称呼它。例如, 設 X 是欧几里得平面, \mathbf{E}_y 是由至原点距离为 y 的水平直綫上一切区間組成的集, 則每一个 \mathbf{E}_y 是一个类, 一切这样的类所成的集就是一个总类。

(1) 在集与集之間, 关系 \subset 具有自反性和推移性; 当而且只当 X 是空集时, 对称性質成立。

(2) 設 \mathbf{X} 是由 X 的一切子集組成的类, 当然也包含空集 0 和整个空間

X 在內; 設 x 是 X 的一个点, E 是 X 的一个子集 (也就是 X 的一个成員), E 是由 X 的某些子集組成的类 (也就是 X 的一个子类). 如果 u 和 v 互不相关地各代表記号 x, E, X, E, X 中之一, 則形如

$$u \in v \quad \text{或} \quad u \subset v$$

的五十个关系式中, 有些关系式一定成立, 有些可能成立, 有些一定不成立, 有些無意义. 例如 $u \in v$ 只有当左端是 x , 右端是 E 或 X , 或者左端是 E 或 X 而右端是 E 或 X 时才有意义.

§2. 併集与交集

設 E 是由 X 的子集組成的任意一个类, 一切至少屬於 E 中一个集的点組成一个集, 这个集称为 E 中之集的併集; 我們用下面的記号来表示它:

$$\bigcup E \quad \text{或} \quad \bigcup \{E: E \in E\}.$$

第二个記号是一种常用的重要記法的应用. 設有一个集, 以 x 表示这个集的一般元素; 如果对于每一个 x , $\pi(x)$ 是有关 x 的一个命題, 則記号

$$\{x: \pi(x)\}$$

表示能使命題 $\pi(x)$ 成立的一切点 x 組成的集. 如果 $\{\pi_n(x)\}$ 是有关 x 的命題的一个叙列, 則記号

$$\{x: \pi_1(x), \pi_2(x), \dots\}$$

表示能使命題

$$\pi_n(x), \quad n=1, 2, \dots$$

全部成立的一切点 x 組成的集. 更一般的, 如果对于某一个指标集 Γ 的每一个元素 γ , 有一个有关 x 的命題 $\pi_\gamma(x)$, 我們用記号

$$\{x: \pi_\gamma(x), \gamma \in \Gamma\}$$

表示对于 Γ 中每一个 γ 命題 $\pi_\gamma(x)$ 成立的一切点 x 組成的集. 由此有

$$\{x: x \in E\} = E$$

和

$$\{E: E \in \mathbf{E}\} = \mathbf{E}.$$

更富于啓發性的例子是

$$\{t: 0 \leq t \leq 1\}$$

(= 单位閉区間),

$$\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$$

(= 平面上单位圓的周界上的点集), 和

$$\{n^2: n = 1, 2, \dots\}$$

(= 本身为平方的正整数集)。根据这种記法, 一个实数集的上确界和下确界可以分別記为

$$\sup\{x: x \in E\} \quad \text{和} \quad \inf\{x: x \in E\}.$$

記号 $\{\dots\}$ 一般用来表示集的构成。例如 $\{x, y\}$ 表示以 x 和 y 两个点为其全体元素的集。必須分清点 x 和集 $\{x\}$ 的不同意义, 后者表示以 x 为唯一元素的集。同样, 也应该分清集 E 和类 $\{E\}$ 的不同意义, 后者表示以 E 为唯一元素的类。例如空集 \emptyset 不包含任何点, 但类 $\{\emptyset\}$ 却包含唯一的一个集, 即空集。

对于不同类型的集类的併集, 我們用不同的記号来表示它們。例如, 若

$$\mathbf{E} = \{E_1, E_2\},$$

則

$$\bigcup \mathbf{E} = \bigcup \{E_i: i = 1, 2\}$$

可表为

$$E_1 \cup E_2;$$

若

$$\mathbf{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$$

是一个有限类, 則

$$\bigcup \mathbf{E} = \bigcup \{E_i: i = 1, 2, \dots, n\}$$

可表为

$$E_1 \cup \dots \cup E_n \quad \text{或} \quad \bigcup_{i=1}^n E_i.$$

类似地, 如果 $\{E_n\}$ 是集的一个無穷叙列, 則这个叙列的各項的併集可表为

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \quad \text{或} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

更一般的, 如果对于某一个指标集 I 的每一个元素 γ , 有一个对应的集 E_γ , 則这个集类

$$\{E_\gamma : \gamma \in I\}$$

的併集可表为

$$\bigcup_{\gamma \in I} E_\gamma \quad \text{或} \quad \bigcup_{\gamma} E_\gamma.$$

如果指标集 I 是一个空集, 我們作如下的約定:

$$\bigcup_{\gamma} E_\gamma = 0.$$

空集 0 与整个空間 X 对于併的运算关系由下面的恒等式給出:

$$E \cup 0 = E, \quad E \cup X = X.$$

一般的, 关系式

$$E \subset F$$

成立的必要和充分条件是

$$E \cup F = F.$$

設 \mathbf{E} 是由 X 的子集組成的任意一个类, 屬于 \mathbf{E} 中每一个集的点的全体是一个集, 这个集称为 \mathbf{E} 中之集的交集; 我們用下面的記号来表示它:

$$\bigcap \mathbf{E} \quad \text{或} \quad \bigcap \{E : E \in \mathbf{E}\}.$$

我們用完全类似于用在併集上的記号来表示两个集的交集, 有限个或可列無限多个集叙列的交集, 以及对应于某一指标集的集类的交集, 只要將記号 \cup 和 \bigcup 分別換成 \cap 和 \bigcap 就行了。如果指标集 I 是一个空集, 我們作如下看来似乎令人感到惊奇的約定:

$$\bigcap_{\gamma \in I} E_\gamma = X.$$

作出这样一个約定的想法之一是: 如果 I_1 和 I_2 是两个 (非空的)

指标集, 并且 $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, 則显然有

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_1} E_\gamma \supset \bigcap_{\gamma \in \Gamma_2} E_\gamma,$$

因此对于最小的 Γ 即空的 Γ , 我們应以交集的最大者和它对应. 另一个想法乃是由于等式

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} E_\gamma = \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma_1} E_\gamma \right) \cap \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma_2} E_\gamma \right)$$

对于一切非空的指标集 Γ_1, Γ_2 都成立. 如果我們企圖将这个等式推广, 使它对于任何 Γ_1 和 Γ_2 都成立, 則必須假定对于每一个 Γ 有

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \cup \emptyset} E_\gamma = \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma \right) \cap \left(\bigcap_{\gamma \in \emptyset} E_\gamma \right);$$

对于 Γ 中的每一个 γ , 令 $E_\gamma = X$, 我們得到

$$\bigcap_{\gamma \in \emptyset} E_\gamma = X.$$

0 与 X 对于交的运算关系由下面的恒等式給出:

$$E \cap 0 = 0, \quad E \cap X = E.$$

一般的, 关系式

$$E \subset F$$

成立的必要和充分条件是

$$E \cap F = E.$$

如果两个集 E 和 F 沒有公共点, 即

$$E \cap F = 0,$$

則 E 和 F 称为不相交. 如果在一个类 \mathbf{E} 里面, 任意两个不相同的集不相交, 則称 \mathbf{E} 为不相交类; 并称 \mathbf{E} 中之集的併集为不相交併集.

在本节之末我們引进一个很有用的概念, 就是特征函数的概念. 設 E 是 X 的任意子集, 在 X 上定义一个函数如下:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in E, \\ 0, & \text{当 } x \notin E. \end{cases}$$

这个函数 χ_E 称为集 E 的特征函数. 集和它們的特征函数之間存在一一对应的关系, 并且集的一切性質和运算都可以借助于集的特征函数表达出来. 作为以大括号表示集的另一个例子, 我

們指出:

$$E = \{x: \chi_E(x) = 1\}.$$

(1) 併的运算滿足交換律和結合律, 即

$$E \cup F = F \cup E, \quad E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G;$$

交的运算也滿足交換律和結合律.

(2) 併与交两种运算中的任意一种滿足对于另一种的分配律, 即

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$$

和

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G).$$

并且分配律对于更一般的場合也成立, 即

$$F \cap \bigcup \{E: E \in \mathbf{E}\} = \bigcup \{E \cap F: E \in \mathbf{E}\}$$

和

$$F \cup \bigcap \{E: E \in \mathbf{E}\} = \bigcap \{E \cup F: E \in \mathbf{E}\}.$$

(3) X 的一切子集所成的类对于运算 \cup 或 \cap 是否形成一个群?

(4) $\chi_0(x) \equiv 0, \chi_X(x) \equiv 1$. 关系式

$$\chi_E(x) \leq \chi_F(x)$$

对于 X 中一切 x 都成立的必要和充分条件是 $E \subset F$. 如果 $E \cap F = A$, 并且 $E \cup F = B$, 則有

$$\chi_A = \chi_E \chi_F = \chi_E \cap \chi_F$$

和

$$\chi_B = \chi_E + \chi_F - \chi_A = \chi_E \cup \chi_F.$$

(5) 在(4)里面的两个关于併集与交集的特征函数的等式, 能否推广到有限个, 可列無限多个, 以及任意个集的併集与交集的場合?

§3. 極限, 余集, 差集

設 $\{E_n\}$ 是一个集叙列. 如果 E^* 是由具有下列性質的一切点 x 組成的集: x 屬于無限多个 E_n , 我們称 E^* 为集叙列的上極限, 記为

$$E^* = \limsup_n E_n.$$

如果 E_* 是由具有下列性質的一切点 x 組成的集: 只有有限个 E_n

不含有 x , 我們稱 E_* 為集叙列的下極限, 記為

$$E_* = \liminf_n E_n.$$

如果

$$E^* = E_*,$$

則稱這個集為集叙列的極限, 用下面的記號表示它:

$$\lim_n E_n.$$

如果

$$E_n \subset E_{n+1}, \quad n=1, 2, \dots,$$

則稱 $\{E_n\}$ 為增叙列; 若

$$E_n \supset E_{n+1}, \quad n=1, 2, \dots,$$

則稱 $\{E_n\}$ 為減叙列。增叙列和減叙列都叫做單調叙列。如果 $\{E_n\}$ 是一個單調叙列, 容易驗證, $\lim_n E_n$ 存在, 且若 $\{E_n\}$ 是增叙列, 則

$$\lim_n E_n = \bigcup_n E_n;$$

若 $\{E_n\}$ 是減叙列, 則

$$\lim_n E_n = \bigcap_n E_n.$$

設 E 是 X 的子集, 由一切屬於 X 但不屬於 E 的點組成的集稱為 E 的余集, 記為 E' 。關於余集的運算, 有下面這些恒等式:

$$\begin{aligned} E \cap E' &= \emptyset, & E \cup E' &= X, \\ \emptyset' &= X, & (E')' &= E, & X' &= \emptyset, \end{aligned}$$

又

$$\text{若 } E \subset F, \quad \text{則 } E' \supset F'.$$

余集對於併集與交集還有一個非常有趣而且十分重要的關係, 由下面的兩個等式表出:

$$\begin{aligned} (\bigcup \{E: E \in \mathbf{E}\})' &= \bigcap \{E': E \in \mathbf{E}\}, \\ (\bigcap \{E: E \in \mathbf{E}\})' &= \bigcup \{E': E \in \mathbf{E}\}. \end{aligned}$$

用話來說, 就是: 併集的余集等於余集的交集; 交集的余集等於余集的併集。利用這個事實, 再加上關於余集的基本公式, 就可以

推出下列極其重要的对偶原理:

若有关集的併、交及余集运算的某一关系式成立, 如果将式中的記号

$$\cup, \cap, \subset \text{ 和 } \supset$$

分別換成

$$\cap, \cup, \supset \text{ 和 } \subset,$$

等号保持不变, 并将式中每一个集換成它的余集, 由此所得到的新的关系式一定也成立.

設 E 和 F 是 X 的两个子集, 由一切屬於 E 但不屬於 F 的点組成的集称为 E 和 F 的差集, 記为

$$E - F.$$

因为

$$X - F = F',$$

并且

$$E - F = E \cap F',$$

所以我們常称差集 $E - F$ 为 F 在 E 中的相对余集. 对于一些集的併集或交集取相对余集时, 正如同对之取普通的余集一样, 应将各个集換成与其对应的相对余集, 并将記号 \cup 与 \cap 互換, \subset 与 \supset 互換. 例如,

$$E - (F \cup G) = (E - F) \cap (E - G).$$

如果 $E \supset F$, 則差集 $E - F$ 叫做正常的.

最后, 我們引进一种十分重要的关于集的运算, 就是二集 E 和 F 的对称差, 記为

$$E \Delta F,$$

它的定义是:

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E) = (E \cap F') \cup (E' \cap F).$$

要想很好地掌握关于集的極限、余集与差集的运算, 需要一定的練習. 在下面的習題里列出了有关这类运算的一些最主要的性

質, 希望讀者能全部加以證明。

(1) 對於一切非空的指標集 I , 等式

$$\bigcap_{\gamma \in I} E_\gamma = (\bigcup_{\gamma \in I} E'_\gamma)'$$

成立。我們假定

$$\bigcap_{\gamma \in I} E_\gamma = X$$

的另一個想法就是要使得上面指出的這個等式對於 $I=0$ 也成立。

(2) 如果 $E_* = \liminf_n E_n$, $E^* = \limsup_n E_n$, 則有

$$E_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m = E^*.$$

(3) 改變一個集叙列的有限個項, 不影響這個集叙列的上極限, 下極限和極限(如果它存在的話)。

(4) 如果

$$E_n = \begin{cases} A, & \text{當 } n \text{ 為偶數,} \\ B, & \text{當 } n \text{ 為奇數,} \end{cases}$$

則有

$$\liminf_n E_n = A \cap B,$$

$$\limsup_n E_n = A \cup B.$$

(5) 設 $\{E_n\}$ 是不相交集的叙列, 則

$$\lim_n E_n = 0.$$

(6) 設 $E_* = \liminf_n E_n$, $E^* = \limsup_n E_n$, 則

$$(E_*)' = \limsup_n E_n',$$

$$(E^*)' = \liminf_n E_n'.$$

更一般的, 有

$$F - E_* = \limsup_n (F - E_n),$$

$$F - E^* = \liminf_n (F - E_n).$$

$$(7) \quad E - F = E - (E \cap F) = (E \cup F) - F,$$

$$E \cap (F - G) = (E \cap F) - (E \cap G),$$

$$(E \cup F) - G = (E - G) \cup (F - G).$$

$$(8) \quad (E - G) \cap (F - G) = (E \cap F) - G,$$

$$(E - F) - G = E - (F \cup G),$$

$$E - (F - G) = (E - F) \cup (E \cap G),$$

$$(E - F) \cap (G - H) = (E \cap G) - (F \cup H).$$

$$\begin{aligned}
 (9) \quad E \Delta F &= F \Delta E, \quad E \Delta (F \Delta G) = (E \Delta F) \Delta G, \\
 E \cap (F \Delta G) &= (E \cap F) \Delta (E \cap G), \\
 E \Delta 0 &= E, \quad E \Delta X = E', \\
 E \Delta E &= 0, \quad E \Delta E' = X, \\
 E \Delta F &= (E \cup F) - (E \cap F).
 \end{aligned}$$

(10) X 的一切子集所成的类对于运算 Δ 是否形成一个群?

(11) 如果 $E_* = \liminf_n E_n$, $E^* = \limsup_n E_n$, 则有

$$\begin{aligned}
 \chi_{E_*}(x) &= \liminf_n \chi_{E_n}(x), \\
 \chi_{E^*}(x) &= \limsup_n \chi_{E_n}(x)
 \end{aligned}$$

(这两个等式的右端就是普通数列的下极限和上极限).

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \chi_{E'} &= 1 - \chi_E, \\
 \chi_{E-F} &= \chi_E(1 - \chi_F), \\
 \chi_{E \Delta F} &= |\chi_E - \chi_F| \equiv \chi_E + \chi_F \pmod{2}.
 \end{aligned}$$

(13) 设 $\{E_n\}$ 是一个集叙列. 令

$$D_1 = E_1, \quad D_2 = D_1 \Delta E_2, \quad D_3 = D_2 \Delta E_3,$$

一般, 令

$$D_{n+1} = D_n \Delta E_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

则集叙列 $\{D_n\}$ 的极限存在的必要和充分条件是 $\lim_n E_n = 0$. 如果我们姑且称 Δ 这个运算为“加法”(参看(12)), 则上述结果可以用话表达如下: 无穷集级数收敛的必要和充分条件是, 它的一般项趋近于 0.

§4. 环 与 代 数

设有一个以集为元素的非空类 R , 如果它能满足下面的条件:

$$\begin{aligned}
 &\text{若 } E \in R, \quad F \in R, \\
 &\text{则 } E \cup F \in R, \quad E - F \in R,
 \end{aligned}$$

则称 R 为环 (或布尔环). 换一句话说, 如果一个非空类对于并、差两种运算是封闭的, 它就是一个环. ~~集叙列~~

空集属于每一个环 R , 因若

$$E \in R,$$

则有

$$0 = E - E \in \mathbf{R}.$$

因之

$$E - F = (E \cup F) - F,$$

所以，如果一个非空类对于并与正常差两种运算是封闭的，它也是一个环。由于

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E)$$

和

$$E \cap F = (E \cup F) - (E \Delta F),$$

因此环对于对称差与交的运算都是封闭的。利用数学归纳法以及并与交两种运算的结合律，我们可以证明，若 \mathbf{R} 是一个环，并且

$$E_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则有

$$\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathbf{R} \quad \text{及} \quad \bigcap_{i=1}^n E_i \in \mathbf{R}.$$

只包含一个空集的单元素类 $\{0\}$ 以及由 X 的一切子集组成的类是环的两个极端但有用的例子。设 X 是一个任意的集， X 的一切有限子集组成一个环。下面是一个更富于启发性的例子：设 X 是实数轴：

$$X = \{x: -\infty < x < +\infty\},$$

并设 \mathbf{R} 是由左闭右开的有界区间的一切有限并所组成的类，即由一切形如

$$\bigcup_{i=1}^n \{x: -\infty < a_i \leq x < b_i < +\infty\}$$

的集组成的类，则 \mathbf{R} 是一个环。

应该指出，在环的定义里，并与交两种运算所占的地位是不对称的。虽然环对于交的运算是封闭的，但是封闭于交与差两种运算的类却不一定封闭于并的运算。不过，如果一个非空类对于交，正常差，以及不相交的并三种运算是封闭的，则这个类是一个环。证明如下：

$$E \cup F = [E - (E \cap F)] \cup [F - (E \cap F)] \cup (E \cap F).$$

为使并与交两种运算在环的定义里所占的地位比较对称起见，不难给出环的另一个定义：我们可以将封闭于交与对称差两种运算的非空类定义为环。证明如下：

$$E \cup F = (E \Delta F) \Delta (E \cap F), \quad E - F = E \Delta (E \cap F).$$

如果在这个定义里面，将交的运算换为并的运算，就得到了环的另一个定义：环是封闭于并与对称差两种运算的非空类。

设有一个以集为元素的非空类 R ，如果它能满足下面两个条件：

(a) 若 $E \in R, F \in R$ ，则 $E \cup F \in R$ ，

(b) 若 $E \in R$ ，则 $E' \in R$ ，

则称 R 为代数(或布尔代数)。

因为

$$E - F = E \cap F' = (E' \cup F)'$$

所以代数一定是环。环和代数两个概念之间的关系是很简单的：代数就是包含 X 的一个环。证明如下：因为

$$E' = X - E,$$

所以包含 X 的环一定是代数；另一方面，设 R 是一个代数，并设

$$E \in R$$

(我们记得 R 是非空的)，则有

$$X = E \cup E' \in R.$$

(1) 下面的一些类是环或代数的几个例子：

(1a) X 是 n 维欧几里得空间； E 是由形如

$$\{(x_1, \dots, x_n) : -\infty < a_i \leq x_i < b_i < +\infty, \quad i=1, \dots, n\}$$

的半闭“区间”的一切有限并组成的类。

(1b) X 是不可列集； E 是由 X 的一切有限或可列子集组成的类。

(1c) X 是不可列集； E 是一个类，它的元素或是有限或可列集，或是以有限或可列集为余集的集。

(2) 在哪几种拓扑空间里面，由一切开集组成的类 E 是一个环？

(3) 任意多个环[代数]的交仍是一个环[代数]。

(4) 設 R 是一个环, 如果对于 R 的元素 E 和 F , 我們定义

$$E \odot F = E \cap F \text{ 和 } E \oplus F = E \Delta F,$$

則对于“加法”(\oplus)和“乘法”(\odot)两种运算, R 形成一个在代数学意义下的环. 如果代数环的每一个元素 E 满足关系式 $E \odot E = E$, 則这种代数环也叫做布尔环. 正是由于集的布尔环与一般的布尔环之間存在着十分密切的关系, 才使我們在集論里面采用环这一个名詞.

(5) 設 R 是一个环; 如果 A 是由一切这样的集 E 組成的类:

$$\text{或是 } E \in R, \text{ 或是 } E' \in R,$$

則 A 是一个代数.

(6) 設有一个以集为元素的非空类 P , 如果它能滿足下面两个条件:

(6a) 若 $E \in P, F \in P$, 則 $E \cap F \in P$,

(6b) 若 $E \in P, F \in P$, 且 $E \subset F$, 則必存在 P 中之集的一个有限类 $\{C_0, C_1, \dots, C_n\}$ 使得

$$E = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_n = F,$$

并且

$$D_i = C_i - C_{i-1} \in P, \quad i = 1, \dots, n,$$

則称 P 为半环. 空集属于每一个半环. 如果 X 是任意的一个集, 則由空集以及一切只含一个点的集(即形如 $\{x\}$ 的集, 其中 $x \in X$)組成的类 P 是一个半环. 如果 X 是实数軸, 則由一切左閉右开的有界区間組成的类是一个半环.

§5. 由集类产生的环和 σ -环

定理 1. 設 E 是任意的集类, 則必存在唯一的一个环 R_0 使得 $R_0 \supset E$, 并且对于任何其他包含 E 的环 R 都有 $R_0 \subset R$.

环 R_0 是包含 E 的最小的环, 称为由 E 产生的环; 我們用記号 $R(E)$ 来表示它.

証明. 因为由 X 的一切子集組成的类是一个环, 这就說明了至少有一个包含 E 的环存在. 此外, 任意多个环的交仍是一个环(見4.3), 容易看出, 包含 E 的一切环之交就是我們所求的环 R_0 . \square

定理 2. 設 E 是任意的集类, 則 $R(E)$ 中每一个集可以被 E 中有限个集的併集所遮盖。

証明。能被 E 中集的有限併所遮盖的一切集組成的类是一个环; 因为这个环包含 E , 所以它也包含 $R(E)$ 。 |

定理 3. 設 E 是以集为元素的可列类, 則 $R(E)$ 也是可列的。

証明。对于任意一个集类 C , 令 C^* 为由 C 中之集的差集的一切有限併組成的类。显然, 如果 C 是可列的, 則 C^* 也是可列的; 且若

$$0 \in C,$$

則有

$$C \subset C^*.$$

为了証明这个定理, 不丧失任何普遍性, 我們可以假定

$$0 \in E.$$

令

$$E_0 = E, \quad E_n = E_{n-1}^*, \quad n = 1, 2, \dots.$$

显然有

$$E \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \subset R(E),$$

并且类

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \text{ 为可列个可列集之并.}$$

是可列的。如果我們能够說明 $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ 是一个环, 那末定理的証明就完成了。

因为

$$E = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots,$$

所以如果 A 和 B 是 $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ 中任意两个集, 則必存在正整数 n 使得 A 和 B 都屬於 E_n 。我們有

$$A - B \in E_{n+1};$$

并且由于

$$0 \in E_0 \subset E_n,$$

因此

$$A \cup B = (A - 0) \cup (B - 0) \in E_{n+1}.$$

我們已經證明了 $A - B$ 和 $A \cup B$ 都屬於 $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$, 即 $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ 對於併與差兩種運算的確是封閉的。 |

設有一個以集為元素的非空類 S , 如果它能滿足下面兩個條件:

(a) 若 $E \in S, F \in S$, 則 $E - F \in S$,

(b) 若 $E_i \in S, i=1, 2, \dots$, 則 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S$,

則稱 S 為 σ -環。 σ -環也可以定義為封閉於可列併的運算的環。如果 S 是一個 σ -環, 並設

$$E_i \in S, \quad i=1, 2, \dots, \quad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

則等式

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = E - \bigcup_{i=1}^{\infty} (E - E_i)$$

說明了

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in S,$$

也就是說, σ -環對於可列交的運算是封閉的。由此可知(參看 3.2), 如果 S 是一個 σ -環, 並且

$$E_i \in S, \quad i=1, 2, \dots,$$

則 $\liminf_i E_i$ 和 $\limsup_i E_i$ 都屬於 S 。

在定理 1 和它的證明里, 如果將“環”都改成“ σ -環”, 定理仍然成立。因此, 我們可以稱包含類 E 的最小 σ -環為由 E 產生的 σ -環, 記為 $S(E)$ 。

定理 4. 設 E 是任意的集類, E 是 $S = S(E)$ 里的集, 則必存在 E 的可列子类 D , 使得 $E \in S(D)$ 。

證明。由 E 的可列子类產生的、 S 的 σ -子環的全体, 它們的併是一個 σ -環。這個 σ -環包含 E , 但被 S 所包, 因此它就是 S 。 |

設 E 是由 X 的子集組成的任意一個類, A 是 X 的一個固定

子集, 則記号

$$E \cap A$$

表示由一切形如 $E \cap A$ 的集組成的类, 其中 $E \in \mathbf{E}$.

定理 5. 設 \mathbf{E} 是任意的集类, A 是 X 的任意子集, 則

$$S(\mathbf{E}) \cap A = S(\mathbf{E} \cap A).$$

証明. 設 \mathbf{C} 是由一切形如 $B \cup (C - A)$ 的集組成的类, 其中

$$B \in S(\mathbf{E} \cap A), \quad C \in S(\mathbf{E});$$

不难驗証: \mathbf{C} 是一个 σ -环. 設 $E \in \mathbf{E}$, 則关系式

$$E = (E \cap A) \cup (E - A)$$

和

$$E \cap A \in \mathbf{E} \cap A \subset S(\mathbf{E} \cap A)$$

說明了 $E \in \mathbf{C}$, 因此

$$\mathbf{E} \subset \mathbf{C}.$$

由此有

$$S(\mathbf{E}) \subset \mathbf{C},$$

因而

$$S(\mathbf{E}) \cap A \subset \mathbf{C} \cap A.$$

但因等式

$$\mathbf{C} \cap A = S(\mathbf{E} \cap A)$$

显然成立, 所以

$$S(\mathbf{E}) \cap A \subset S(\mathbf{E} \cap A).$$

另一方面, 由于 $S(\mathbf{E}) \cap A$ 是一个 σ -环, 并且

$$\mathbf{E} \cap A \subset S(\mathbf{E}) \cap A,$$

所以

$$S(\mathbf{E} \cap A) \subset S(\mathbf{E}) \cap A. \quad \blacksquare$$

(1) 在下面的例子里, 指出由类 \mathbf{E} 产生的环:

(1a) E 是 X 的一个固定子集, $\mathbf{E} = \{E\}$ 是只包含一个元素 E 的类.

(1b) E 是 X 的一个固定子集, \mathbf{E} 是由包含 E 的一切集組成的类, 即

$E = \{F: E \subset F\}$.

(1c) E 是由恰好包含两个不同点的一切集組成的类.

(2) 設有一个以集为元素的类 L , 如果它能滿足下面两个条件:

$$0 \in L,$$

$$\text{若 } E \in L, F \in L, \text{ 則 } E \cup F \in L, E \cap F \in L,$$

則称 L 为絡. 若 $P = P(L)$ 是由一切形如 $F - E$ 的集組成的类, 其中 $E \in L, F \in L$, 并且 $E \subset F$; 則 P 是一个半环(參看 4.6). (提示: 設有 P 里面的两个集 D_1, D_2 , 它們可以表为 L 中之集的正常差的形式:

$$D_i = F_i - E_i, \quad i=1, 2,$$

并設 $D_1 \supset D_2$. 則 $F_2 - E_2 \subset C \subset F_1 - E_1$, 其中

$$C = (F_1 \cap F_2) - (E_1 \cap F_2)$$

或

$$C = F_1 - [E_1 \cup (F_1 \cap E_2)].$$

P 是不是一个环?

(3) 設 P 是一个半环, R 是由一切形如 $\bigcup_{i=1}^n E_i$ 的集組成的类, 其中 $\{E_1, \dots, E_n\}$ 是 P 中不相交集的任意一个有限类.

(3a) R 对于有限交与不相交的併两种运算是封閉的.

(3b) 若 $E \in P, F \in P$, 并且 $E \subset F$, 則 $F - E \in R$.

(3c) 若 $E \in P, F \in R$, 并且 $E \subset F$, 則 $F - E \in R$.

(3d) 若 $E \in R, F \in R$, 并且 $E \subset F$, 則 $F - E \in R$.

(3e) $R = R(P)$. 由此可知, 如果一个半环对于併的运算是封閉的, 它就是一个环.

(4) 和定理 1 完全相仿的关于代数的定理也成立. 这一个事实可以从下面的方式得出: 在定理 1 的証明里, 将“环”都改成“代数”; 也可以利用 4.5 推出.

(5) 設 P 是一个半环, 并且 $R = R(P)$, 則 $S(R) = S(P)$.

(6) 如果一个非空类对于对称差与可列交两种运算是封閉的, 这个类是不是一个 σ -环?

(7) 設 E 是一个非空类, 則 $S(E)$ 中每一个集可以被 E 中可列个集的併集所遮盖(參看定理 2).

(8) 設 E 是一个以集为元素的無限类, 則 E 和 $R(E)$ 具有同样的势 (参看定理 3).

(9) 用下面的办法可以得出和定理 3 相仿的关于 σ -环的定理 (参看 (8)). 設 E 是包含 0 的任意一个集类, 令 $E_0 = E$, 并且对于任意的一个序数 $\alpha > 0$, 令

$$E_\alpha = (\bigcup \{E_\beta : \beta < \alpha\})^*,$$

其中 C^* 表示由 C 中之集的差集的一切有限併組成的类.

(9a) 若 $0 < \alpha < \beta$, 則 $E \subset E_\alpha \subset E_\beta \subset S(E)$.

(9b) 若 ω 是第一个不可列的序数, 則 $S(E) = \bigcup \{E_\alpha : \alpha < \omega\}$.

(9c) 若 E 的势不超过連續統的势, 則 $S(E)$ 的势也不超过連續統的势.

(10) 关于环有甚么样的和定理 4, 5 相仿的定理?

§6. 单 調 类

要想求得由一个已知集类产生的 σ -环, 我們并没有任何一种构造性的方法. 但是对于另外一种比 σ -环所受限制較少的集类加以研究, 我們可以得到有关由某一集类产生的 σ -环之构造的定理, 它在技术上是很有用的.

設有一个以集为元素的类 M , 如果对于 M 中之集的每一个单調叙列 $\{E_n\}$ 都有

$$\lim_n E_n \in M,$$

則称 M 是单調的.

正如同在討論环和 σ -环的場合一样, 因为由 X 的一切子集組成的类是一个单調类, 并且任意多个单調类的交仍是一个单調类, 所以我們可以称包含类 E 的最小单調类为由 E 产生的单調类, 記为 $M(E)$.

定理 1. σ -环是单調类; 单調环是 σ -环.

証明. 定理前半部分的正确性是很显然的. 要証明定理的后半部分, 我們必須說明, 一个单調环对于可列併的运算是封閉的. 設 M 是一个单調环, 并設

$$E_i \in M, \quad i=1, 2, \dots,$$

則因 M 是一个环, 所以有

$$\bigcup_{i=1}^n E_i \in M, \quad n=1, 2, \dots.$$

由于 $\{\bigcup_{i=1}^n E_i\}$ 是一个单調增叙列, 它的併是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, 根据 M 是单調类的假設, 就有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M. \quad |$$

定理 2. 設 R 是一个环, 則 $M(R) = S(R)$. 由此可知: 包含环 R 的单調类一定也包含 $S(R)$.

証明. 由于 σ -环是单調类, 并且 $S(R) \supset R$, 因此

$$S(R) \supset M = M(R).$$

如果我們能够証明 M 是一个 σ -环, 再根据 $M(R) \supset R$, 就可以推出 $M(R) \supset S(R)$, 那末定理的証明就完成了.

对于任意一个集 F , 令 $K(F)$ 为由滿足下列条件的一切集 E 組成的类: $E-F$, $F-E$, 以及 $E \cup F$ 都屬於 M . 容易看出, 由于在 $K(F)$ 的定义中, E 和 F 所占的地位是对称的, 所以关系式

$$E \in K(F) \text{ 和 } F \in K(E)$$

是等价的. 設 $\{E_n\}$ 是 $K(F)$ 中集的单調叙列, 則有

$$\lim_n E_n - F = \lim_n (E_n - F) \in M,$$

$$F - \lim_n E_n = \lim_n (F - E_n) \in M,$$

$$F \cup \lim_n E_n = \lim_n (F \cup E_n) \in M,$$

因此, 若 $K(F)$ 是非空的, 則它是一个单調类.

若 $E \in R$, $F \in R$, 則根据环的定义, $E \in K(F)$. 这个关系式对于 R 中每一个 E 都成立, 因此, $R \subset K(F)$. 因为 M 是包含 R 的最小单調类, 所以

$$M \subset K(F).$$

由此可見, 若 $E \in M$, $F \in R$, 則 $E \in K(F)$; 从而 $F \in K(E)$. 这个关系式对于 R 中每一个 F 都成立, 根据和上面相同的理由, 我們有

$$M \subset K(E).$$

上面这个关系式对于 M 中每一个 E 都成立, 这就是說, M 是一个环. 由定理 1 可知, M 是一个 σ -环. |

虽然这一条定理并没有告訴我們, 如何去建立由已知环 R 产生的 σ -环; 但是它告訴了我們, 要想研究由 R 产生的 σ -环, 只要研究由 R 产生的单調类就行了. 在許多应用的場合下, 这是不难做到的.

(1) 定理 2 对于半环是否成立?

(2) 設 N 是一个集类, 如果它对于单調遞減的可列交以及不相交的可列并两种运算是封閉的, 則称 N 是正規的. σ -环是正規类; 正規环是 σ -环.

(3) 如果用記号 $N(E)$ 表示包含类 E 的最小正規类, 則对于任意一个半环 P , 有 $N(P) = S(P)$.

(4) 設有一个以集为元素的非空类, 如果它对于余集与可列并两种运算是封閉的, 我們称这个类为 σ -代数. σ -代数是包含 X 的 σ -环. 如果 R 是一个代数, 則 $M(R)$ 与包含 R 的最小 σ -代数相等. 若 R 是一个环, 这个結論是否正确?

(5) 在下面的每一个例子里, 指出由 E 产生的 σ -代数、 σ -环以及单調类:

(5a) X 是一个任意的集, P 是 X 中之点的一个任意的排列, 即 P 是 X 在它自身之上的一个一一变换. 如果 E 是 X 的一个子集, 若对于 $x \in E$, 有 $P(x) \in E$ 和 $P^{-1}(x) \in E$, 我們称 E 对于 P 是不变的. E 代表由一切不变集組成的类.

(5b) X 和 Y 是两个任意的集, T 是 X 在 Y 內的任意一个变换 (不一定是一一变换). 如果 E 是 Y 的子集, 我們用記号 $T^{-1}(E)$ 表示能使 $T(x) \in E$ 的 X 中一切点 x 組成的集. E 代表由一切形如 $T^{-1}(E)$ 的集組成的类, 其中 E 是 Y 的任意子集.

(5c) X 是一个拓扑空間; E 是由一切屬於第一种范疇的集組成的类.

(5d) X 是三維欧几里得空間. 設 E 是 X 的子集, 如果它能滿足下面的条件:

$$\text{若 } (x, y, z) \in E, \quad \text{則 } (x, y, \hat{z}) \in E,$$

其中 \hat{z} 是任意实数, 我們称 E 为柱面. E 代表由一切柱面組成的类.

(5e) X 是欧几里得平面; E 是由这样的集組成的类: 每一个集能被有限条或可列無限多条水平直綫所遮盖.

第二章

測度和外測度

§7. 环上的測度

以集类为定义域的函数称为集函数。設 μ 是定义在集类 \mathbf{E} 上的广义实值集函数(即可以取得有限或無限值的函数), 如果它能滿足下面的条件:

若 $E \in \mathbf{E}$, $F \in \mathbf{E}$, $E \cup F \in \mathbf{E}$, 且 $E \cap F = 0$,
則 $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$,

則称 μ 具有可加性。設 μ 是定义在集类 \mathbf{E} 上的广义实值集函数, 如果对于 \mathbf{E} 的任何不相交有限子类 $\{E_1, \dots, E_n\}$, 若它的併集也在 \mathbf{E} 中, 有

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i),$$

則称 μ 具有有限可加性。設 μ 是定义在集类 \mathbf{E} 上的广义实值集函数, 如果对于 \mathbf{E} 中之集的任何不相交叙列 $\{E_n\}$, 若它的併集也在 \mathbf{E} 中, 有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

則称 μ 具有可列可加性。

設 μ 是定义在环 \mathbf{R} 上的非負广义实值集函数, 如果它具有可列可加性, 并且 $\mu(0) = 0$, 則称 μ 为測度。

由于等式

$$\bigcup_{i=1}^n E_i = E_1 \cup \dots \cup E_n \cup 0 \cup 0 \cup \dots,$$

可知測度具有有限可加性。下面是測度的一个十分简单的例子。設 f 是某集 X 中之点的一个非負广义实值函数； \mathbf{R} 是由 X 的一切有限子集組成的环；測度 μ 由下面的式子确定：

$$\mu(\{x_1, \dots, x_n\}) = \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad \text{且} \quad \mu(0) = 0.$$

比較重要的例子将在以下几节中出现。

設 μ 是环 \mathbf{R} 上的測度， E 是 \mathbf{R} 中的一个集，若有 $\mu(E) < \infty$ ，則称 E 具有有限測度；如果存在 \mathbf{R} 的一个集叙列 $\{E_n\}$ 使

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \text{且} \quad \mu(E_n) < \infty, \quad n=1, 2, \dots,$$

則称 E 的測度是 σ -有限的。如果 \mathbf{R} 中每一个集 E 的測度都是有限[或 σ -有限]的，則称測度 μ 在 \mathbf{R} 上是有限[或 σ -有限]的。如果 $X \in \mathbf{R}$ (即 \mathbf{R} 是一个代数)，并且 $\mu(X)$ 是有限或 σ -有限的，則分別称 μ 是全有限或全 σ -有限的。設 μ 是一个測度，如果它能滿足下列条件：

$$\begin{aligned} \text{若 } E \in \mathbf{R}, \quad F \subset E, \quad \text{且} \quad \mu(E) = 0, \\ \text{則 } F \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

則称 μ 为完全測度。

(1) 設 μ 是定义在环 \mathbf{R} 上的非負广义实值集函数，如果它具有可加性，并且 \mathbf{R} 中至少有一个集 E 能使 $\mu(E) < \infty$ ，則 $\mu(0) = 0$ 。

(2) 設 \mathbf{E} 是一个非空类， μ 是 $\mathbf{R}(\mathbf{E})$ 上的一个測度。如果对于任何 $E \in \mathbf{E}$ 都有 $\mu(E) < \infty$ ，則 μ 在 $\mathbf{R}(\mathbf{E})$ 上是有限的(參看 §5 定理 2)。

(3) 設 μ 是 σ -环上的一个測度，則具有有限測度的一切集的一类是一个环，具有 σ -有限測度的一切集的一类是一个 σ -环。如果我們再假設 μ 是 σ -有限的，則具有有限測度的一切集的一类是 σ -环的必要和充分条件是， μ 为有限的。如果 μ 不是 σ -有限的，上述結論是否成立？

(4) 設 μ 是 σ -环 \mathbf{S} 上的一个測度， E 是 \mathbf{S} 中具有 σ -有限測度的一个

集。若 \mathbf{D} 是 \mathbf{S} 中之集的一个不相交类, 則 \mathbf{D} 中最多有可列無限多个集 D 滿足关系式 $\mu(E \cap D) \neq 0$. (提示: 首先假定 $\mu(E) < \infty$; 对于每一个正整数 n , 考虑类 $\{D: D \in \mathbf{D}, \mu(E \cap D) \geq \frac{1}{n}\}$.)

(5) 設 μ 是定义在环 \mathbf{R} 上的非負广义实值集函数, 如果它具有可加性, 并且 $\mu(0) = 0$, 則 μ 具有有限可加性. 同样的叙述对于半环 \mathbf{P} 也成立, 但証明却不很简单, 可由下列步驟得到. 設有一个 \mathbf{P} 中不相交集的有限类 $\{E_1, \dots, E_n\}$, 如果它的并集 E 也在 \mathbf{P} 中, 則称这个类是 E 的一个分割. 設 $\{E_i\}$ 是 E 的一个分割, 若对于 \mathbf{P} 中每一个集 F 都有

$$\mu(E \cap F) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i \cap F),$$

則称 $\{E_i\}$ 是一个 μ -分割. 設 $\{E_i\}$ 和 $\{F_j\}$ 是 E 的两个分割, 如果每一个 E_i 被 F_j 之一所包, 則称 $\{E_i\}$ 是 $\{F_j\}$ 的一个子分割.

(5a) 若 $\{E_i\}$ 和 $\{F_j\}$ 是 E 的两个分割, 称一切形如 $E_i \cap F_j$ 的集組成的类为 $\{E_i\}$ 和 $\{F_j\}$ 的乘积, 則这个乘积也是 E 的一个分割.

(5b) 若分割 $\{E_i\}$ 有一个子分割是 μ -分割, 則 $\{E_i\}$ 是一个 μ -分割.

(5c) 两个 μ -分割的乘积还是一个 μ -分割.

(5d) 若 $E = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_n = F$, 其中 $C_i \in \mathbf{P}, i = 0, 1, \dots, n$, 并且

$$D_i = C_i - C_{i-1} \in \mathbf{P}, \quad i = 1, \dots, n,$$

則 $\{E, D_1, \dots, D_n\}$ 是 F 的一个 μ -分割.

(5e) 若 $E \in \mathbf{P}$, 則 E 的每一个分割都是 μ -分割.

§8. 区間上的測度

为了闡明測度論的基本概念, 我們現在来討論一个十分重要的典型的測度問題. 在本节內, 空間 X 总是代表实数軸. 我們以 \mathbf{P} 表示由左閉右开的一切有界区間所組成的类, 即由一切形如

$$\{x: -\infty < a \leq x < b < +\infty\}$$

的集組成的类; 并以 \mathbf{R} 表示由 \mathbf{P} 中之集的一切不相交的有限併所組成的类, 即由一切形如

$$\bigcup_{i=1}^n \{x: -\infty < a_i \leq x < b_i < +\infty\}$$

的集組成的類。(容易驗證,任何具有這種形式的併集,可以寫成具有同樣形式的不相交的併集。)

為了說話簡便起見,我們用“半閉區間”這個名詞來代替“左閉右開的有界區間”。我們採用半閉區間,而不採用开区間或閉區間,這只是為了技術上的方便。例如,設 a, b, c 和 d 是四個實數, $-\infty < a < b < c < d < +\infty$, 則开区間

$$\{x: a < x < d\} \text{ 和 } \{x: b < x < c\}$$

的差集既不是一個开区間,也不是开区間的有限併。對於閉區間,也會遇到類似的現象。但對於半閉區間卻不會發生這樣的問題,我們採用半閉區間也正是由於它的這個優點。

和平常一樣,我們以 $[a, b]$ 表示閉區間:

$$[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\},$$

以 $[a, b)$ 表示半閉區間:

$$[a, b) = \{x: a \leq x < b\},$$

以 (a, b) 表示开区間:

$$(a, b) = \{x: a < x < b\}.$$

在這些記號里面,我們總是假定 $a \leq b$ 。

在半閉區間類 \mathbf{P} 上定義一個集函數 μ 如下:

$$\mu([a, b)) = b - a.$$

容易看出,當 $a = b$ 時,區間 $[a, b)$ 成為空集,因此

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

現在我們來探討集函數 μ 對於 \mathbf{P} 中之集的一些關係。

定理 1. 設 $\{E_1, \dots, E_n\}$ 是 \mathbf{P} 中不相交集的有限類,並且 $E_i \subset E_0$, $i = 1, \dots, n$, 其中 $E_0 \in \mathbf{P}$, 則

$$\sum_{i=1}^n \mu(E_i) \leq \mu(E_0).$$

證明. 令 $E_i = [a_i, b_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. 不喪失普遍性,我們可以假定

$$a_1 \leq \cdots \leq a_n.$$

根据定理中关于 $\{E_1, \dots, E_n\}$ 的假设, 就有

$$a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b_0,$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu(E_i) &= \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - b_i) = \\ &= b_n - a_1 \leq b_0 - a_0 = \mu(E_0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

定理 2. 设闭区间 $F_0 = [a_0, b_0]$ 被有限个有界开区间

$$U_i = (a_i, b_i), \quad i = 1, \dots, n$$

的并集所包, 则

$$b_0 - a_0 < \sum_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

证明. 设 k_1 是一个自然数使 $a_0 \in U_{k_1}$. 若 $b_{k_1} \leq b_0$, 则令 k_2 是自然数使 $b_{k_1} \in U_{k_2}$; 若 $b_{k_2} \leq b_0$, 则令 k_3 是自然数使 $b_{k_2} \in U_{k_3}$; 依此类推, 直到 k_m 能使 $b_{k_m} > b_0$ 为止. 不丧失普遍性, 我们可以假定 $m = n$, 且 $U_{k_i} = U_i, i = 1, \dots, n$; 这是因为我们只需略去那些多余的 U_i , 并改变一下号码就行了. 换一句话说, 我们可以假定

$$\begin{aligned} a_1 < a_0 < b_1, & \quad a_n < b_0 < b_n, \\ a_{i+1} < b_i < b_{i+1}, & \quad i = 1, \dots, n-1; \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} b_0 - a_0 < b_n - a_1 &= (b_1 - a_1) + \sum_{1 \leq i \leq n-1} (b_{i+1} - b_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n (b_i - a_i). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

定理 3. 设 $\{E_0, E_1, E_2, \dots\}$ 是 \mathbf{P} 中之集的叙列, 其中

$$E_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

則

$$\mu(E_0) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

證明。令 $E_i = [a_i, b_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ 。若 $a_0 = b_0$, 定理显然成立。若 $a_0 < b_0$, 取任意正数 ε 使 $\varepsilon < b_0 - a_0$ 。对于任意正数 δ , 令

$$F_0 = [a_0, b_0 - \varepsilon],$$

且

$$U_i = \left(a_i - \frac{\delta}{2^i}, b_i \right), \quad i = 1, 2, \dots,$$

則

$$F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,$$

因此, 根据海尼-波雷耳定理, 存在正整数 n 使得 $F_0 \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ 。根据定理 2, 我們得到

$$\begin{aligned} \mu(E_0) - \varepsilon &= (b_0 - a_0) - \varepsilon < \\ &< \sum_{i=1}^n \left(b_i - a_i + \frac{\delta}{2^i} \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \delta. \end{aligned}$$

因为 ε 和 δ 是任意的, 由此即得定理的結論。 |

定理 4. 集函数 μ 在 \mathbf{P} 上具有可列可加性。

證明。設 $\{E_i\}$ 是 \mathbf{P} 中之集的一个不相交叙列, 它的併集 E 也在 \mathbf{P} 中, 則由定理 1 有

$$\sum_{i=1}^n \mu(E_i) \leq \mu(E), \quad n = 1, 2, \dots.$$

因此,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leq \mu(E);$$

再利用定理 3 就得到所要的結論。 |

定理 5. 在 \mathbf{R} 上存在唯一的一个有限測度 $\bar{\mu}$, 使当 $E \in \mathbf{P}$ 时有 $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ 。

証明。我們知道， \mathbf{R} 中每一个集 E 可以表为 \mathbf{P} 中有限个不相交集的併集。設

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i \quad \text{和} \quad E = \bigcup_{j=1}^m F_j$$

是同一个集 E 的两个这样的表示式。于是，对于任意的 $i, i=1, \dots, n$ ， \mathbf{P} 中的集 E_i 可以表为 \mathbf{P} 中有限个不相交集的併集如下：

$$E_i = \bigcup_{j=1}^m (E_i \cap F_j),$$

由于 μ 具有有限可加性，所以

$$\sum_{i=1}^n \mu(E_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(E_i \cap F_j).$$

同理有

$$\sum_{j=1}^m \mu(F_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu(E_i \cap F_j).$$

由此可見，若 $E \in \mathbf{R}$ ，且 $\{E_1, \dots, E_n\}$ 是 \mathbf{P} 中不相交集的有限类，它的併集是 E ，則等式

$$\bar{\mu}(E) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$$

无歧义地定出了在 \mathbf{R} 上的一个集函数 $\bar{\mu}$ 。

由 $\bar{\mu}$ 的定义可以看出， $\bar{\mu}$ 在 \mathbf{P} 上与 μ 相合，并且具有有限可加性。根据这两个性質，显然可見 $\bar{\mu}$ 是唯一的。剩下需要証明的就是 $\bar{\mu}$ 的可列可加性了。

設 $\{E_i\}$ 是 \mathbf{R} 中不相交集的叙列，它的併集 E 也在 \mathbf{R} 中；于是每一个 E_i 可以表为 \mathbf{P} 中有限个不相交集的併集：

$$E_i = \bigcup_j E_{ij},$$

且

$$\bar{\mu}(E_i) = \sum_j \mu(E_{ij}).$$

先設 $E \in \mathbf{P}$ ，則因 E_{ij} 的全体組成一个不相交的可列类，根据 μ 的可

列可加性就有

$$\bar{\mu}(E) = \mu(E) = \sum_i \sum_j \mu(E_{ij}) = \sum_i \bar{\mu}(E_i).$$

在一般的場合,若 E 是 \mathbf{P} 中有限个不相交集的併集:

$$E = \bigcup_k F_k,$$

則利用剛才得到的結果,我們有

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(E) &= \sum_k \bar{\mu}(F_k) = \sum_k \sum_i \bar{\mu}(E_i \cap F_k) = \\ &= \sum_i \sum_k \bar{\mu}(E_i \cap F_k) = \sum_i \bar{\mu}(E_i). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

由于定理 5,即使对于在 \mathbf{R} 中而不在 \mathbf{P} 中之集 E ,我們也可以用 $\mu(E)$ 来代替 $\bar{\mu}(E)$,而不致引起混乱。

(1) 在定理 4 的証明里,叙列 $\{E_i\}$ 中左端点与 E 的左端点重合的那一項記作 E_{n_1} ; 左端点与 E_{n_1} 的右端点重合的那一項記作 E_{n_2} ; 依此类推. 不利用定理 1, 2 和 3 也可以証明

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i} \in \mathbf{P} \quad \text{和} \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_{n_i}).$$

(2) 定理 4 不依赖于定理 1, 2 和 3 的另一种証法如下: 将叙列 $\{E_i\}$ 中各項按照其左端点的值由小到大重新排列,然后应用超限归纳法; 參看(1)。

(3) 設 g 是单实变数的連續有限增函数,并令

$$\mu_g([a, b]) = g(b) - g(a),$$

則在定理 4 和 5 中,将 μ 換为 μ_g , 定理仍成立。

(4) 定理 4 和 5 可以推广到 n 維欧几里得空間中, 只要将“区間”了解为下列形式的集:

$$E = \{(x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i < b_i, \quad i = 1, \dots, n\},$$

并由下式定义 μ :

$$\mu(E) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

(5) 設 μ 是定义在一个半环 \mathbf{P} 上的非負广义实值集函数, 如果它具有可列可加性, 并且 $\mu(0) = 0$, 則在环 $\mathbf{R}(\mathbf{P})$ 上存在唯一的一个測度 $\bar{\mu}$, 使当

$E \in \mathcal{P}$, 有 $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$. 若 μ 是[全]有限或 σ -有限的, 則 $\bar{\mu}$ 也一样 (參看 5.3 和定理 5 的證明).

§9. 測度的性質

設 μ 是定义在集类 \mathbf{E} 上的广义实值集函数, 如果它能滿足下面的条件:

$$\begin{aligned} \text{若 } E \in \mathbf{E}, \quad F \in \mathbf{E} \quad \text{且} \quad E \subset F, \\ \text{則} \quad \mu(E) \leq \mu(F), \end{aligned}$$

則稱 μ 是單調的. 設 μ 是定义在集类 \mathbf{E} 上的广义实值集函数, 如果它能滿足下面的条件:

$$\begin{aligned} \text{若 } E \in \mathbf{E}, \quad F \in \mathbf{E}, \quad E \subset F, \quad F - E \in \mathbf{E} \quad \text{且} \quad |\mu(E)| < \infty, \\ \text{則} \quad \mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E), \end{aligned}$$

則稱 μ 具有可減性.

定理 1. 設 μ 是环 \mathbf{R} 上的測度, 則 μ 具有單調性和可減性.

證明. 如果 $E \in \mathbf{R}, F \in \mathbf{R}$ 且 $E \subset F$, 則 $F - E \in \mathbf{R}$, 并且

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E).$$

因为 μ 是非負的, 由此推出 μ 是單調的; 如果 $\mu(E)$ 是有限的, 則可从上式两端各減去 $\mu(E)$, 由此即得 μ 的可減性. \blacksquare

定理 2. 設 μ 是环 \mathbf{R} 上的測度, $E \in \mathbf{R}$, $\{E_i\}$ 是 \mathbf{R} 中之集的有限或可列类, 并且 $E \subset \bigcup_i E_i$, 則

$$\mu(E) \leq \sum_i \mu(E_i).$$

證明. 我們引用下述簡單然而重要的事实: 若 $\{F_i\}$ 是环 \mathbf{R} 中之集的任意叙列, 則存在 \mathbf{R} 中不相交集的叙列 $\{G_i\}$ 使得

$$G_i \subset F_i \quad \text{且} \quad \bigcup_i G_i = \bigcup_i F_i$$

(令 $G_i = F_i - \bigcup_{j < i} F_j$). 对叙列 $\{E \cap E_i\}$ 应用这个事实, 再根据 μ 的可列可加性和單調性, 就得到定理的結論. \blacksquare

定理 3. 設 μ 是环 \mathbf{R} 上的測度, $E \in \mathbf{R}$, $\{E_i\}$ 是 \mathbf{R} 中不相交集

的有限或可列类, 并且 $\bigcup_i E_i \subset E$, 則

$$\sum_i \mu(E_i) \leq \mu(E).$$

証明。若 $\{E_i\}$ 是有限类, 則 $\bigcup_i E_i \in \mathbf{R}$, 于是

$$\sum_i \mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \mu(E).$$

如果 $\{E_i\}$ 是可列类, 則因上式对于 $\{E_i\}$ 的任何有限子类都成立, 所以上式对于 $\{E_i\}$ 也成立。 |

定理 4. 設 μ 是环 \mathbf{R} 上的測度, 如果 $\{E_n\}$ 是 \mathbf{R} 中之集的增叙列, 并且 $\lim_n E_n \in \mathbf{R}$, 則

$$\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n).$$

証明。令 $E_0 = 0$, 則

$$\begin{aligned} \mu(\lim_n E_n) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i - E_{i-1})\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i - E_{i-1}) = \lim_n \sum_{i=1}^n \mu(E_i - E_{i-1}) = \\ &= \lim_n \mu\left(\bigcup_{i=1}^n (E_i - E_{i-1})\right) = \lim_n \mu(E_n). \quad | \end{aligned}$$

定理 5. 設 μ 是环 \mathbf{R} 上的測度, 如果 $\{E_n\}$ 是 \mathbf{R} 中之集的减叙列, 这个叙列中至少有一項具有有限測度, 并且 $\lim_n E_n \in \mathbf{R}$, 則

$$\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n).$$

証明。設 $\mu(E_m) < \infty$, 則当 $n \geq m$ 时有 $\mu(E_n) \leq \mu(E_m) < \infty$, 因此 $\mu(\lim_n E_n) < \infty$ 。由于 $\{E_m - E_n\}$ 是一个增叙列, 根据定理 1 和定理 4, 我們有

$$\begin{aligned} \mu(E_m) - \mu(\lim_n E_n) &= \mu(E_m - \lim_n E_n) = \\ &= \mu(\lim_n (E_m - E_n)) = \\ &= \lim_n \mu(E_m - E_n) = \\ &= \lim_n (\mu(E_m) - \mu(E_n)) = \\ &= \mu(E_m) - \lim_n \mu(E_n). \end{aligned}$$

因为 $\mu(E_m) < \infty$, 定理証明完畢。 |

設 μ 是定义在集类 \mathbf{E} 上的广义实值集函数, 如果对于 \mathbf{E} 中之集的每一个增叙列 $\{E_n\}$ 有 $\lim_n \mu(E_n) = \mu(E)$, 其中 $\lim_n E_n = E$, 我們就說 μ 在 $E (E \in \mathbf{R})$ 是下連續的. 类似地, 如果对于 \mathbf{E} 中之集的每一个减叙列 $\{E_n\}$ 有 $\lim_n \mu(E_n) = \mu(E)$, 其中假定 $\{E_n\}$ 中至少有一項 E_m 使 $|\mu(E_m)| < \infty$, 且 $\lim_n E_n = E$, 我們就說 μ 在 E 是上連續的. 定理 4 和 5 断言: 如果 μ 是一个測度, 則 μ (在使得 μ 有定义的环中的每一个集) 是上連續同时也是下連續的; 下面是反面的定理.

定理 6. 設 μ 是定义在环 \mathbf{R} 上的非負有限实值集函数, 并具有可加性. 如果 μ 在 \mathbf{R} 中每一个集 E 是下連續的, 或者在 0 是上連續的, 則 μ 是 \mathbf{R} 上的一个測度.

証明. 首先, 由于 μ 具有可加性, 并且 \mathbf{R} 是一个环, 利用数学归纳法可証 μ 具有有限可加性. 設 $\{E_n\}$ 是 \mathbf{R} 中不相交集的一个叙列, 它的併集 E 也在 \mathbf{R} 中. 令

$$F_n = \bigcup_{i=1}^n E_i, \quad G_n = E - F_n.$$

如果 μ 是下連續的, 則因 $\{F_n\}$ 是 \mathbf{R} 中之集的一个增叙列, 并且 $\lim_n F_n = E$, 我們有

$$\mu(E) = \lim_n \mu(F_n) = \lim_n \sum_{i=1}^n \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

如果 μ 在 0 是上連續的, 則因 $\{G_n\}$ 是 \mathbf{R} 中之集的一个减叙列, 并且 $\lim_n G_n = 0$, 同时由于 μ 是有限的, 我們有

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \mu(G_n) = \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \lim_n \mu(G_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(1) 定理 1, 2, 3, 4 和 5 对于半环也成立, 可以直接加以証明, 也可以借助于 8.5 將它們化为对应的关于环的定理而得証.

(2) 設 μ 是环 \mathbf{R} 上的測度, 若 E 和 F 是 \mathbf{R} 中任意二集, 則

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

若 E, F 和 G 是 \mathbf{R} 中任意三集, 則

$$\begin{aligned} & \mu(E) + \mu(F) + \mu(G) + \mu(E \cap F \cap G) = \\ & = \mu(E \cup F \cup G) + \mu(E \cap F) + \mu(F \cap G) + \mu(G \cap E). \end{aligned}$$

上述結論可以推广到任意有限多个集的場合.

(3) 設 μ 是环 \mathbf{R} 上的測度, E 和 F 是 \mathbf{R} 中二集, 我們用記号 $E \sim F$ 表示 $\mu(E \Delta F) = 0$ 这个性質, 則关系“ \sim ”具有自反性、对称性和推移性. 如果 $E \sim F$, 則 $\mu(E) = \mu(F) = \mu(E \cap F)$. \mathbf{R} 中具有性質 $E \sim 0$ 之集 E 的全体是否形成一个环?

(4) 沿用 (3) 中的記号, 并令 $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$, 則 $\rho(E, F) \geq 0$, $\rho(E, F) = \rho(F, E)$, 且 $\rho(E, F) \leq \rho(E, G) + \rho(G, F)$. 如果 $E_1 \sim E_2$, $F_1 \sim F_2$, 則 $\rho(E_1, F_1) = \rho(E_2, F_2)$.

(5) 定理 4 和 5 可以推广如下. 設 μ 是环 \mathbf{R} 上的測度, 如果 $\{E_n\}$ 是 \mathbf{R} 中之集的一个叙列, 并且

$\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathbf{R}$, $n=1, 2, \dots$, $\liminf_n E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathbf{R}$,
則 $\mu(\liminf_n E_n) \leq \liminf_n \mu(E_n)$. 类似地, 如果

$\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathbf{R}$, $n=1, 2, \dots$, $\limsup_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathbf{R}$,
并且至少存在 n 的一个值使 $\mu(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i) < \infty$, 則

$$\mu(\limsup_n E_n) \geq \limsup_n \mu(E_n).$$

(6) 在 (5) 的后半部里, 如果再假定 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, 則

$$\mu(\limsup_n E_n) = 0.$$

(7) 設 X 是区間 $0 \leq x \leq 1$ 中一切有理数的集, 并設 \mathbf{P} 是由形如 $\{x: x \in X, a \leq x < b\}$ 的一切“半閉区間”組成的类, 其中 $0 \leq a \leq b \leq 1$, a 和 b 是有理数. 在 \mathbf{P} 上定义集函数 μ 如下:

$$\mu(\{x: a \leq x < b\}) = b - a,$$

則 μ 具有有限可加性, 并且是上連續和下連續的, 但 μ 不具有可列可加性, 因此定理 6 对于半环不成立.

(8) 設 X 是一切正整数的集, 并設 \mathbf{R} 是由 X 中一切有限集及其余集組成的类. 对于 \mathbf{R} 中的 E , 若 E 是有限集, 令 $\mu(E) = 0$, 若 E 是無限集, 令

$\mu(E)=\infty$. 則集函數 μ 在 0 是上連續的, 但 μ 不具有可列可加性, 因此定理 6 的后半部當 μ 可以取得無限值時不成立.

(9) 在定理 5 中, 如果將“至少有一項具有有限測度”的條件取消, 定理是否仍成立?

(10) 設 X 是一個可分的完全度量空間, μ 是定義在 X 中全體波雷耳集類上的測度, 且 $\mu(X)=1$, 則存在 X 的子集 E , 使 E 為可列個緊集的併集並且 $\mu(E)=1$. (提示: 設 $\{x_n\}$ 是在 X 中稠密的點列, 令 U_n^k 為以 x_n 為中心, 以 $\frac{1}{k}$ 為半徑的閉球體. 對於 $0 < \varepsilon < 1$ 及 $F^k = \bigcup_{n=1}^m U_n^k$, 令 m_k 為滿足下列關係的最小正整數:

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^k F_{m_i}^i\right) > 1 - \varepsilon.$$

若 $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_{m_i}^i$, 則 C 是緊集, 並且 $\mu(C) \geq 1 - \varepsilon$).

§10. 外 測 度

設 \mathbf{E} 是一個非空類, 如果它能滿足下面的條件:

若 $E \in \mathbf{E}, F \subset E$, 則 $F \in \mathbf{E}$,

則稱 \mathbf{E} 是可傳的.

由 X 中某一子集 E 的一切子集組成的類是可傳類的一個典型例子. 我們需要用到關於可傳類的代數方面的理論, 是一些很簡單的理論, 並且與我們已經用過的關於環, σ -環以及其他集類的理論完全類似. 首先, 任意多個可傳類的交仍是一個可傳類, 因此, 對於任一個集類, 存在包含這個類的最小可傳類. 我們所特別注意的將是那些本身是 σ -環的可傳類; 容易看出, 要使得一個可傳類是 σ -環, 必須而且只須這個可傳類封閉於可列併的運算. 設 \mathbf{E} 是任意的集類, 我們以 $H(\mathbf{E})$ 表示由 \mathbf{E} 產生的可傳 σ -環, 即, 包含 \mathbf{E} 的最小可傳 σ -環. 事實上, 由 \mathbf{E} 產生的可傳 σ -環就是能被 \mathbf{E} 中之集的可列併所遮蓋的一切集組成的類; 若 \mathbf{E} 是封閉於可列併運算的非空類 (例如 \mathbf{E} 是一個 σ -環), 則 $H(\mathbf{E})$ 是由 \mathbf{E} 中之集的一切子集組成的類.

設 μ^* 是定义在集类 \mathbf{E} 上的广义实值集函数, 如果它能滿足下面的条件:

$$\begin{aligned} & \text{若 } E \in \mathbf{E}, \quad F \in \mathbf{E}, \quad \text{且 } E \cup F \in \mathbf{E}, \\ & \text{則 } \mu^*(E \cup F) \leq \mu^*(E) + \mu^*(F), \end{aligned}$$

則称 μ^* 具有部分可加性. 設 μ^* 是定义在集类 \mathbf{E} 上的广义实值集函数, 如果对于 \mathbf{E} 的任何有限子类 $\{E_1, \dots, E_n\}$, 若它的併集也在 \mathbf{E} 中, 有

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu^*(E_i),$$

則称 μ^* 具有有限部分可加性. 設 μ^* 是定义在集类 \mathbf{E} 上的广义实值集函数, 如果对于 \mathbf{E} 中之集的任何叙列 $\{E_n\}$, 若它的併集也在 \mathbf{E} 中, 我們有

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i),$$

則称 μ^* 具有可列部分可加性.

設 μ^* 是定义在可傳 σ -环 \mathbf{H} 上的非負广义实值单調集函数, 如果它具有可列部分可加性, 并且 $\mu^*(0) = 0$, 則称 μ^* 为外測度. 容易看出, 外測度必定具有有限部分可加性. 关于測度的[全]有限或 σ -有限这些术语, 可以同样用之于外測度.

当我们試圖将測度的概念从环扩張到較广泛的集类上时, 很自然地就产生了外測度的概念. 下面的定理包含着关于这方面的某些細节的精确陈述.

定理 1. 設 μ 是环 \mathbf{R} 上的測度, 如果对于 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中每一个集 E , 定义

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) : E_n \in \mathbf{R}, \quad n=1, 2, \dots; \quad E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\},$$

則 μ^* 是 μ 扩張到 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 上的一个外測度; 如果 μ 是[全] σ -有限的, 則 μ^* 也一样.

外測度 μ^* 称为由測度 μ 引出的外測度. $\mu^*(E)$ 在口头上可以描述为形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ 的和数的下确界, 其中 $\{E_n\}$ 是 \mathbf{R} 中之集的叙列, 它的併集包含 E .

証明. 若 $E \in \mathbf{R}$, 則 $E \subset E \cup 0 \cup 0 \cup \dots$, 因此 $\mu^*(E) \leq \mu(E) + \mu(0) + \mu(0) + \dots = \mu(E)$. 另一方面, 若 $E \in \mathbf{R}$, $E_n \in \mathbf{R}$, $n=1, 2, \dots$, 且 $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 則由 §9 定理 2, $\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, 因此 $\mu(E) \leq \mu^*(E)$. 这就証明了 μ^* 是 μ 的擴張, 即当 $E \in \mathbf{R}$ 时 $\mu^*(E) = \mu(E)$; 由此并有 $\mu^*(0) = 0$.

若 $E \in \mathbf{H}(\mathbf{R})$, $F \in \mathbf{H}(\mathbf{R})$, $E \subset F$, 則 \mathbf{R} 中之集的任何叙列如果遮盖 F , 一定也遮盖 E , 因此 $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.

为了証明 μ^* 具有可列部分可加性, 設 E 和 E_i 是 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中的集, 并且 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$; 令 ε 为任意正数, 并对于每一个 $i=1, 2, \dots$, 选取 \mathbf{R} 中之集的一个叙列 $\{E_{ij}\}$ 使

$$E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij} \quad \text{且} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_{ij}) \leq \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

(根据 $\mu^*(E_i)$ 的定义, 这样的叙列是存在的.) 因为 E_{ij} 的全体是 \mathbf{R} 中之集的一个可列类, 并且这个类遮盖 E , 所以

$$\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 我們有

$$\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

最后, 設 μ 是 σ -有限的, 并設 E 是 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中的任意集. 根据 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 的定义, 存在 \mathbf{R} 中之集的叙列 $\{E_i\}$, 使得 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. 因为 μ 是 σ -有限的, 所以对于每一个 $i=1, 2, \dots$, 存在 \mathbf{R} 中之集的叙列 $\{E_{ij}\}$, 使得

$$E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij} \quad \text{且} \quad \mu(E_{ij}) < \infty.$$

因此

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij} \quad \text{且} \quad \mu^*(E_{ij}) = \mu(E_{ij}) < \infty. \quad \blacksquare$$

(1) 在定理 1 的假設条件下, 若 μ 是有限的, μ^* 是否一定也是有限的?

(2) 对于任意集类 \mathbf{E} , 我們以 $\mathbf{J}(\mathbf{E})$ 表示包含 \mathbf{E} 的最小可傳环. 設 μ 是定义在环 \mathbf{R} 上的非負有限实值集函数, 并具有有限可加性. 如果对于 $\mathbf{J}(\mathbf{R})$ 中每一个集 E , 定义

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(F) : E \subset F \in \mathbf{R}\},$$

則 μ^* 是定义在 $\mathbf{J}(\mathbf{R})$ 上的非負有限实值集函数, 并具有有限部分可加性. 对于 $E \in \mathbf{R}$, 是否有 $\mu^*(E) = \mu(E)$?

(3) 設 \mathbf{H} 是 X 的一些子集組成的类. 要使得 \mathbf{H} 形成由 X 的一切子集組成的布尔环中的理想子环, 必須而且只須 \mathbf{H} 是一个可傳环; 參看 4.4.

(4) 下面是定义在可傳 σ -环上的集函数的几个例子; 其中有的是外測度, 有的則恰好違反了定义外測度的条件之一.

(4a) X 是任意的一个集, \mathbf{H} 是由 X 的一切子集組成的类. 对于 X 中任意一个固定的点 x_0 , 令 $\mu^*(E) = \chi_E(x_0)$.

(4b) X 和 \mathbf{H} 同(4a); 对于 \mathbf{H} 中每一个 E , $\mu^*(E) = 1$.

(4c) $X = \{x, y\}$ 是包含恰好两个不同点 x 和 y 的集, \mathbf{H} 是由 X 的一切子集組成的类, μ^* 由下式确定:

$$\mu^*(\emptyset) = 0, \quad \mu^*(\{x\}) = \mu^*(\{y\}) = 0, \quad \mu^*(X) = 1.$$

(4d) X 是由 100 个点組成的集, 这 100 个点排成每列 10 个点共計 10 列的方陣; \mathbf{H} 是由 X 的一切子集組成的类; $\mu^*(E)$ 是含有 E 中至少一个点的列的数目.

(4e) X 是全体正整数集, \mathbf{H} 是由 X 的一切子集組成的类. 对于 X 的每一个有限子集 E , 以 $\nu(E)$ 表 E 中之点的数目;

$$\mu^*(E) = \limsup_n \frac{1}{n} \nu(E \cap \{1, \dots, n\}). \quad \neq 0$$

(4f) X 是任意的一个集, \mathbf{H} 是由 X 的一切有限或可列子集組成的类, $\mu^*(E)$ 是 E 中之点的个数 ($=\infty$, 若 E 为無限集).

(5) 設 μ^* 是定义在可傳 σ -环 \mathbf{H} 上的外測度, E_0 是 \mathbf{H} 中任意一个固

定的集, 則由等式 $\mu_0^*(E) = \mu^*(E \cap E_0)$ 确定的集函数 μ_0^* 是 H 上的一个外测度.

(6) 設 λ^* 和 μ^* 是定义在可傳 σ -环 H 上的两个外测度, 則由等式 $\nu^*(E) = \lambda^*(E) \cup \mu^*(E)$ 确定的集函数 ν^* 是 H 上的一个外测度.

(7) 設 $\{\mu_n^*\}$ 是定义在可傳 σ -环 H 上的外测度叙列, $\{a_n\}$ 是一个正数列, 則由等式

$$\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n^*(E)$$

确定的集函数 μ^* 是 H 上的一个外测度.

§11. 可 測 集

設 μ^* 是定义在可傳 σ -环上的外测度. H 中的集 E 称为 μ^* -可測的, 如果对于 H 中每一个集 A , 有

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E').$$

μ^* -可測性是外测度理論中極為重要的一个概念. 以下我們就要闡明 μ^* -可測性的含义; 在沒有熟知它的含义前, 要对 μ^* -可測性有一个直觀的理解是相当困难的. 首先我們指出: 外测度不一定是具有可列可加性, 甚至有限可加性的集函数 (參看 10.4d). 为了試圖滿足可加性的要求, 我們选出那些集, 它們能够可加地分割任何其他集—— μ^* -可測集的定义就是这种很模糊的說法的精确表达. 这个初看起来相当复杂的概念的引进, 在 §13 中証明有关测度的擴張的重要定理时, 被証实是十分有成效的.

定理 1. 設 μ^* 是可傳 σ -环 H 上的外测度, 則由全体 μ^* -可測集組成的类 \bar{S} 是一个环.

証明. 若 E 和 F 是 \bar{S} 中的集, 并且 $A \in H$, 則

- (a) $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$,
- (b) $\mu^*(A \cap E) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F')$,
- (c) $\mu^*(A \cap E') = \mu^*(A \cap E' \cap F) + \mu^*(A \cap E' \cap F')$.

將(b), (c)代入(a), 得到

$$(d) \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F') + \\ + \mu^*(A \cap E' \cap F) + \mu^*(A \cap E' \cap F').$$

在等式(d)中, 將 A 換為 $A \cap (E \cup F)$, 則右端的前三項保持不變, 而第四項為零; 因此

$$(e) \quad \mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \\ + \mu^*(A \cap E \cap F') + \mu^*(A \cap E' \cap F).$$

又因 $E' \cap F' = (E \cup F)'$, 將(e)代入(d), 就有

$$(f) \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)'),$$

這就證明了 $E \cup F \in \bar{S}$.

類似地, 如果在等式(d)中將 A 換為

$$A \cap (E - F)' = A \cap (E' \cup F), \text{ 則得}$$

$$(g) \quad \mu^*(A \cap (E - F)') = \mu^*(A \cap E \cap F) + \\ + \mu^*(A \cap E' \cap F) + \mu^*(A \cap E' \cap F').$$

由於 $E \cap F' = E - F$, 將(g)代入(d), 我們得到

$$(h) \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E - F)) + \mu^*(A \cap (E - F)'),$$

這就證明了 $E - F \in \bar{S}$. 此外, $E = 0$ 顯然滿足等式(a), 由此可見 \bar{S} 是一個環。 |

在進入 μ^* -可測性的較深性質的研究前, 我們先指出下述簡單然而有用的事實。

設 μ^* 是可傳 σ -環 H 上的外測度, E 是 H 中的集。如果對於 H 中每一個集 A , 有

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'),$$

則 E 是 μ^* -可測集。

這個事實的證明非常簡單: 因為 μ^* 具有部分可加性, 由此立即得到反方向的不等式 $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$ 。

定理 2. 設 μ^* 是可傳 σ -環 H 上的外測度, 則由全體 μ^* -可測集組成的類 \bar{S} 是一個 σ -環。如果 $A \in H$, $\{E_n\}$ 是 \bar{S} 中不相交集

的叙列, 并且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, 則

$$\mu^*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n).$$

証明. 在等式(e)中, 将 E 和 F 分別換为 E_1 和 E_2 , 我們有:

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2).$$

应用数学归纳法可証, 对于任何正整数 n , 下式成立:

$$\mu^*(A \cap \bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i).$$

令

$$F_n = \bigcup_{i=1}^n E_i, \quad i=1, 2, \dots,$$

則由定理 1,

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n') \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E'). \end{aligned}$$

由于上式对于每一个 n 都成立, 我們得到:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mu^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E') \geq \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'). \end{aligned}$$

因此 $E \in \bar{\mathcal{S}}$ (这也就說明了 $\bar{\mathcal{S}}$ 封閉于不相交可列併的运算), 从而

$$\text{(j)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E') = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E').$$

在(j)中将 A 換为 $A \cap E$, 就証明了定理的第二部分。(不能从等式(j)的两端各减去 $\mu^*(A \cap E')$, 因为它不一定是有限数.) 因为环中之集的任何可列并可以表为该环中集的不相交可列併, 所以 $\bar{\mathcal{S}}$ 是一个 σ -环. |

定理 3. 設 μ^* 是可傳 σ -环 \mathbf{H} 上的外測度, $\bar{\mathcal{S}}$ 是由全体 μ^* -

可測集組成的類，則外測度為零的集都在 \bar{S} 中。如果對於 \bar{S} 中的集 E ，定義 $\bar{\mu}(E) = \mu^*(E)$ ，則 $\bar{\mu}$ 是 \bar{S} 上的一個完全測度。

測度 $\bar{\mu}$ 稱為由外測度 μ^* 引出的測度。

證明。若 $E \in \mathbf{H}$ ，並且 $\mu^*(E) = 0$ ，則對於 \mathbf{H} 中每一個集 A ，我們有：

$$\mu^*(A) = \mu^*(E) + \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'),$$

因此 $E \in \bar{S}$ 。在等式 (j) 中將 A 換為 E ，就得到 $\bar{\mu}$ 在 \bar{S} 上的可列可加性。如果

$$E \in \bar{S}, \quad F \subset E, \quad \text{且} \quad \bar{\mu}(E) = \mu^*(E) = 0,$$

則 $\mu^*(F) = 0$ ，因此 $F \in \bar{S}$ ，這就證明了 $\bar{\mu}$ 是一個完全測度。 |

(1) 在 10.4d 中，集 E 是 μ^* -可測集的必要和充分條件是：對於 E 中每一個點 x ， x 所在的那一列點全部都在 E 中。在 10.4f 中，哪些集是 μ^* -可測集？

(2) 設 μ^* 是可傳 σ -環 \mathbf{H} 上的外測度。在甚么附加條件之下， μ^* -可測集的全体形成一個代數？

(3) 在定理 1 的證明里，將等式 (d) 中的 A 換為 $A \cap (E' \cup F')$ ，可以直接證明 \bar{S} 對於交的運算是封閉的。如果將 A 換為 $A \cap (F - E)' = A \cap (E \cup F')$ ，可以得出甚么結論？

(4) 設 μ^* 是定義在可傳環 \mathbf{J} 上的非負有限實值單調集函數，並具有有限部分可加性；參看 10.2。 μ^* -可測集的全体形成一個環，並且集函數 μ^* 在這個環上具有可加性。

(5) 設 μ^* 是可傳 σ -環 \mathbf{H} 上的外測度， \bar{S} 是由全体 μ^* -可測集組成的類。如果 $A \in \mathbf{H}$ ， $\{E_n\}$ 是 \bar{S} 中之集的增叙列，則

$$\mu^*(\lim_n(A \cap E_n)) = \lim_n \mu^*(A \cap E_n).$$

類似地，如果 $A \in \mathbf{H}$ ， $\{E_n\}$ 是 \bar{S} 中之集的減叙列，並且至少存在 m 的一個值使 $\mu^*(A \cap E_m) < \infty$ ，則 $\mu^*(\lim_n(A \cap E_n)) = \lim_n \mu^*(A \cap E_n)$ 。

(6) 設 μ^* 是可傳 σ -環 \mathbf{H} 上的外測度， E 和 F 是 \mathbf{H} 中的兩個集，其中至少有一個是 μ^* -可測集，則（參看 9.2）

$$\mu^*(E) + \mu^*(F) = \mu^*(E \cup F) + \mu^*(E \cap F).$$

(7) 本节中的結論也可以利用分割 (參看 7.5) 得出. 設 $\{E_i\}$ 是有限个或可列个不相交集的叙列, 并且 $\bigcup_i E_i = X$, 則称 $\{E_i\}$ 是一个分割. 設 μ^* 是可傳 σ -环 H 上的外測度, $\{E_i\}$ 是一个分割, 如果对于 H 中每一个集 A 都有

$$\mu^*(A) = \sum_i \mu^*(A \cap E_i),$$

則称 $\{E_i\}$ 是一个 μ^* -分割; 如果分割 $\{E, E'\}$ 是一个 μ^* -分割, 則称 E 是一个 μ^* -集. 設 $\{E_i\}$ 和 $\{F_j\}$ 是两个分割, 如果每一个 E_i 被 F_j 之一所包, 則称 $\{E_i\}$ 是 $\{F_j\}$ 的一个子分割; 并稱由一切形如 $E_i \cap F_j$ 的集組成的分割为 $\{E_i\}$ 和 $\{F_j\}$ 的乘积. 我們注意到, 要使得 H 中的集是 μ^* -集, 必須而且只須它是在本节意义下的 μ^* -可測集.

(7a) 两个 μ^* -分割的乘积还是一个 μ^* -分割.

(7b) 若 μ^* -分割 $\{E_i\}$ 有一个子分割是 μ^* -分割, 則 $\{E_i\}$ 是一个 μ^* -分割.

(7c) 分割 $\{E_i\}$ 是 μ^* -分割的必要和充分条件是: 每一个 E_i 是 μ^* -集.

(7d) 由全体 μ^* -集組成的类是一个 σ -环. (提示: 由全体 μ^* -集組成的类是一个封閉于不相交可列併运算的环.)

(8a) 設 H 是由度量空間 X 的一切子集組成的类, μ^* 是定义在 H 上的外測度, 如果当 $\rho(E, F) > 0$ 时有

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F),$$

其中 ρ 是 X 上的度量, 則称 μ^* 是一个度量外測度. 設 μ^* 是一个度量外測度, 如果 E 是 X 中一个开集 U 的子集, 并且

$$E_n = E \cap \left\{ x: \rho(x, U^c) \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad n=1, 2, \dots,$$

則 $\lim_n \mu^*(E_n) = \mu^*(E)$. (提示: $\{E_n\}$ 是以 E 为其併集的一个增叙列. 令 $E_0 = 0, D_n = E_{n+1} - E_n$, 如果 D_{n+1} 和 E_n 都是非空的, 則 $\rho(D_{n+1}, E_n) > 0$, 于是有

$$\mu^*(E_{2n+1}) \geq \sum_{i=1}^n \mu^*(D_{2i}) \quad \text{和} \quad \mu^*(E_{2n}) \geq \sum_{i=1}^n \mu^*(D_{2i-1}).$$

当級数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(D_{2i}) \quad \text{和} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(D_{2i-1})$$

中的任何一个發散时, 結論显然成立; 如果两个級数都收斂, 則結論可由下面的关系式得出:

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E_{2n}) + \sum_{i=n}^{\infty} \mu^*(D_{2i}) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(D_{2i-1}).)$$

(8b) 設 μ^* 是度量外測度, 則每一个开集(因此, 每一个波雷耳集)是 μ^* -可測集.(提示: 設 U 是开集, A 是 X 的任意子集, 对 $E = A \cap U$ 应用 (8a). 因为 $\rho(E_n, A \cap U') > 0$, 于是有

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(E_n \cup (A \cap U')) = \mu^*(E_n) + \mu^*(A \cap U').)$$

(8c) 設 μ^* 是定义在度量空間 X 的全体子集类上的外測度, 并且使得每一个开集是 μ^* -可測集, 則 μ^* 是一个度量外測度.(提示: 若 $\rho(E, F) > 0$, 令 U 是滿足关系式 $E \subset U$ 和 $F \cap U = 0$ 的一个开集, 然后以 $A = E \cup F$ 来試驗 U 的 μ^* -可測性.)

第三章

測度的擴張

§12. 引出的測度的性質

我們已經知道,由一个測度可以引出一个外測度,由一个外測度也可以引出一个測度.如果我們由一个測度 μ 出發,先建立由它引出的外測度 μ^* ,再建立由 μ^* 引出的測度 $\bar{\mu}$,我們要問: μ 和 $\bar{\mu}$ 之間存在甚么关系? 本節的目的就在回答這一個問題.在本節內,我們假定:

μ 是環 \mathbf{R} 上的測度, μ^* 是 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 上由 μ 引出的外測度, $\bar{\mu}$ 是 $\bar{\mathbf{S}}$ 上由 μ^* 引出的測度,其中 $\bar{\mathbf{S}}$ 是由全体 μ^* -可測集組成的 σ -環.

定理 1. $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中每一個集是 μ^* -可測集.

證明. 設 $E \in \mathbf{R}, A \in \mathbf{H}(\mathbf{R}), \varepsilon > 0$, 則由 μ^* 的定義, 存在 \mathbf{R} 中之集的敘列 $\{E_n\}$, 使得 $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 并且

$$\begin{aligned} \mu^*(A) + \varepsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(E_n \cap E) + \mu(E_n \cap E')) \geq \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'). \end{aligned}$$

由于上式對於任意的 ε 成立, 因此 E 是 μ^* -可測的. 換一句話說, 我們已經証明了 $\mathbf{R} \subset \bar{\mathbf{S}}$; 又因 $\bar{\mathbf{S}}$ 是一個 σ -環, 所以 $\mathbf{S}(\mathbf{R}) \subset \bar{\mathbf{S}}$. |

定理 2. 設 $E \in \mathbf{H}(\mathbf{R})$, 則

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \inf \{ \bar{\mu}(F) : E \subset F \in \bar{\mathbf{S}} \} = \\ &= \inf \{ \bar{\mu}(F) : E \subset F \in \mathbf{S}(\mathbf{R}) \}. \end{aligned}$$

這個定理也可以敘述如下: 由 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 上的 $\bar{\mu}$ 引出的外測度以及

由 \bar{S} 上的 $\bar{\mu}$ 引出的外測度都与 μ^* 重合。

証明。因为对于 R 中的 F , 有 $\mu(F) = \bar{\mu}(F)$ (根据 $\bar{\mu}$ 的定义和 §10 定理 1), 因此

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, E_n \in R, n=1, 2, \dots \right\} \geq \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, E_n \in S(R), n=1, 2, \dots \right\}. \end{aligned}$$

因为 $S(R)$ 中集的任何叙列 $\{E_n\}$ 如果滿足关系式

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = F,$$

則可以換为具有同样性質的一个不相交叙列, 而不致增加叙列各項的測度之和; 又由 $\bar{\mu}$ 的定义, 对于 \bar{S} 中的 F , 有 $\bar{\mu}(F) = \mu^*(F)$, 因此

$$\begin{aligned} \mu^*(F) &\geq \inf \{ \bar{\mu}(F) : E \subset F \in S(R) \} \geq \\ &\geq \inf \{ \bar{\mu}(F) : E \subset F \in \bar{S} \} \geq \mu^*(E). \quad \dashv \end{aligned}$$

設 $E \in H(R)$, $F \in S(R)$, $E \subset F$, 如果对于 $S(R)$ 中滿足关系式 $G \subset F - E$ 的每一个集 G , 有 $\bar{\mu}(G) = 0$, 則称 F 是 E 的一个可測复盖。不严格地說, $H(R)$ 中之集 E 的可測复盖是 $S(R)$ 中遮盖 E 的最小集。

定理 3. 設 E 是 $H(R)$ 中具有 σ -有限外測度的集, 則存在 $S(R)$ 中的集 F , 使 $\mu^*(E) = \bar{\mu}(F)$, 并使 F 为 E 的一个可測复盖。

証明。首先假定 $\mu^*(E) < \infty$ 。

由定理 2, 对于每一个 $n=1, 2, \dots$, 存在 $S(R)$ 中的一个集 F_n , 使得

$$E \subset F_n \quad \text{且} \quad \bar{\mu}(F_n) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{n}.$$

令 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 則

$$E \subset F \in S(R) \quad \text{且} \quad \mu^*(E) \leq \bar{\mu}(F) \leq \bar{\mu}(F_n) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{n}.$$

由于 n 是任意的, 因此 $\mu^*(E) = \bar{\mu}(F)$. 如果 $G \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$, 并且 $G \subset F - E$, 于是 $E \subset F - G$, 我們有

$$\bar{\mu}(F) = \mu^*(E) \leq \bar{\mu}(F - G) = \bar{\mu}(F) - \bar{\mu}(G) \leq \bar{\mu}(F);$$

因为 $\bar{\mu}(F) < \infty$, 所以 $\bar{\mu}(G) = 0$, 这就說明了 F 是 E 的一个可測复盖.

若 $\mu^*(E) = \infty$, 則因 E 是具有 σ -有限外測度的集, 它可以表为可列个具有有限外測度不相交集的併集:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \mu^*(E_n) < \infty.$$

設 F_n 是 E_n 的可測复盖, 并令 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 則显然有 $F \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$ 和 $E \subset F$. 如果 $G \subset F - E$, 則 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, 其中 $G_n = G \cap F_n$. 由于 $G_n \subset F_n - E_n$, 因此 $\bar{\mu}(G_n) = 0$, 所以 $\bar{\mu}(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(G_n) = 0$. 由此

可知, F 是 E 的一个可測复盖. 等式 $\mu^*(E) = \bar{\mu}(F)$ 在 $\mu^*(E) = \infty$ 的場合下显然成立, 因为此时 $\bar{\mu}(F) = \infty$. \blacksquare

定理 4. 設 $E \in \mathbf{H}(\mathbf{R})$, F 是 E 的可測复盖, 則 $\mu^*(E) = \bar{\mu}(F)$; 如果 F_1 和 F_2 都是 E 的可測复盖, 則 $\bar{\mu}(F_1 \Delta F_2) = 0$.

証明. 由关系式 $E \subset F_1 \cap F_2 \subset F_1$ 可以推出 $F_1 - (F_1 \cap F_2) \subset F_1 - E$, 由于 F_1 是 E 的可測复盖, 因此有

$$\bar{\mu}(F_1 - (F_1 \cap F_2)) = 0.$$

类似地, 有

$$\bar{\mu}(F_2 - (F_1 \cap F_2)) = 0.$$

因此

$$\bar{\mu}(F_1 \Delta F_2) = 0.$$

若 $\mu^*(E) = \infty$, 等式 $\mu^*(E) = \bar{\mu}(F)$ 显然成立; 若 $\mu^*(E) < \infty$, 則由定理 3, 存在 E 的可測复盖 F_0 使

$$\bar{\mu}(F_0) = \mu^*(E).$$

根据前面所述可知, 任意两个可測复盖具有相同的測度, 因此定理

証明完畢。 |

定理 5. 設 μ 在 \mathbf{R} 上是 σ -有限的, 則 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 上的測度 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\mathbf{S}}$ 上的測度 $\bar{\mu}$ 都是 σ -有限的。

証明。根据 §10 定理 1, 如果 μ 是 σ -有限的, 則 μ^* 也是 σ -有限的。因此, 对于 $\bar{\mathbf{S}}$ 中每一个集 E , 存在 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中之集的一个叙列 $\{E_i\}$ 使得

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \mu^*(E_i) < \infty, \quad i=1, 2, \dots.$$

对于每一个 E_i 应用定理 3, 就得到定理的結論。 |

在本节开头所提出来的問題也可以从另外一个方向提出。如果我们由一个外測度 μ^* 出發, 先建立由它引出的測度 $\bar{\mu}$, 再建立由 $\bar{\mu}$ 引出的外測度 $\bar{\mu}^*$, 則 μ^* 和 $\bar{\mu}^*$ 之間存在甚么关系? 一般說来, 这两个集函数是不相同的; 但当引出的外測度 $\bar{\mu}^*$ 与原来的外測度 μ^* 重合时, 我們称 μ^* 是正則的。定理 2 說明了由环上的測度引出的外測度总是正則的。反面的命題也成立: 如果 μ^* 是正則外測度, 則 $\mu^* = \bar{\mu}^*$ 是由环上的一个測度引出的外測度, 即由 μ^* -可測集类上的測度 $\bar{\mu}$ 引出的外測度。由此可見, 引出的外測度与正則外測度这两个概念是同等寬广的。

(1) 定理 4 断言: 可測复盖若存在, 則如将測度为零的差集略去不計, 可測复盖是唯一确定的; 定理 3 断言: 具有 σ -有限外測度的集必有可測复盖。下面的例子說明, 在定理 3 中, σ -有限性的假設条件是不可少的。

設 X 是欧氏平面。 \mathbf{R}_0 是由一切这样的集 E 組成的类: E 能被可列条水平直綫所遮盖, 而在每一条水平直綫 L 上, 或者 E 是可列的, 或者 $L-E$ 是可列的。設 \mathbf{R} 是由 \mathbf{R}_0 产生的代数 (參看 4.5)。如果对于 \mathbf{R} 中每一个 E , 按照 E 为可列或不可列, 定义 $\mu(E) = 0$ 或 ∞ , 則 μ 是 \mathbf{R} 上的測度。容易驗証, 在这个場合下 $\mathbf{R} = \mathbf{S}(\mathbf{R})$, 并且 $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{H}(\mathbf{R})$ 是 X 的一切子集所成的类。如果 E 是 y -軸并且 $E \subset F \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$, 則存在 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中的集 G 使得 $G \subset F - E$ 和 $\mu(G) \neq 0$ 。

(2) 設 E 是实数軸 X 的一个子集, 如果在每一个有限区間之外有 E 的不可列無限多个点, 則称 E 具有無限凝聚点。設 X 是实数軸, E 是 X 的子集。定义集函数 μ^* 如下: 若 E 为有限或可列, 則 $\mu^*(E) = 0$; 若 E 为不可

列但沒有無限凝聚点, 則 $\mu^*(E)=1$; 若 E 具有無限凝聚点, 則 $\mu^*(E)=\infty$. μ^* 是一个全 σ -有限外測度; 但因只有可列集及其余集是 μ^* -可測集, 因此引出的測度 $\bar{\mu}$ 并非 σ -有限的. μ^* 是否正則的? 如果对于具有無限凝聚点的集 E , 定义 $\mu^*(E)=1$, 我們可以得到怎樣的結論?

(3) 設 n 是一个固定的正整数; $\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_n$ 是無限集的最初 $n+1$ 个勢, 按照由小到大的順序排列. 設 X 是勢为 \aleph_n 之集, E 是 X 的子集, 定义集函数 μ^* 如下: 若 E 为有限集, 則 $\mu^*(E)=0$; 若 E 具有勢 $\aleph_k, 0 \leq k \leq n$, 則 $\mu^*(E)=k$. μ^* 是一个外測度. μ^* 是否正則的?

(4) 設 μ^* 是可傳 σ -环 H 上的正則外測度, 如果 $\{E_n\}$ 是 H 中之集的一个增叙列并且 $\lim_n E_n = E$, 則 $\mu^*(E) = \lim_n \mu^*(E_n)$. (提示: 若 $\lim_n \mu^*(E_n) = \infty$, 結論显然成立. 若 $\lim_n \mu^*(E_n) < \infty$, 令 F_n 为 E_n 的 μ^* -可測复盖, $n=1, 2, \dots$, 于是 $\{F_n\}$ 是一个增叙列, 設 $\lim_n F_n = F$. 因为 $\mu^*(F_n) = \mu^*(E_n) \leq \mu^*(E)$, 我們有 $\lim_n \mu^*(F_n) = \mu^*(F) \leq \mu^*(E)$; 另一方面, 由于 $E \subset F$, 所以有 $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$. 因此 F 是 E 的可測复盖.) 上述結論对于非正則外測度不成立; 可以根据(2)建立一个反例.

(5) 設 X 是任意集, E 是 X 的子集. 按照 E 为空集或非空集定义 $\mu(E) = 0$ 或 1 ; 則集函数 μ^* 是 X 的一切子集所成的类上的正則外測度. 如果 $\{E_n\}$ 是各項为非空集的减叙列, 但其交集为空集(当 X 为無限集时这样的叙列是存在的), 則

$$\lim_n \mu^*(E_n) = 1, \quad \mu^*(\lim_n E_n) = 0;$$

換一句話說, 与(4)类似的关于减叙列的命題, 即使对于全有限正則外測度也是不成立的.

(6) 設 μ_1^* 和 μ_2^* 是 X 的一切子集所成的类上的两个有限外測度; 并設 \bar{S}_i 是 μ_i^* -可測集的全体所成的类, $i=1, 2$. 如果对于 X 的一切子集 E , 定义

$$\mu^*(E) = \mu_1^*(E) + \mu_2^*(E),$$

則 μ^* -可測集的全体所成的类 \bar{S} 是 \bar{S}_1 与 \bar{S}_2 之交. (提示: 如果 $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') = \mu^*(A)$, 則 $\mu_i^*(A \cap E) + \mu_i^*(A \cap E') = \mu_i^*(A), i=1, 2$.) 如果 μ_1^* 和 μ_2^* 不一定是有限的, 我們可以得到怎樣的結論?

(7) 設 μ_1^* 是 X 的一切子集所成的类上的一个有限正則外測度, 并按照

E 为空集或非空集, 定义 $\mu_2^*(E) = 0$ 或 1 , 则 μ_2^* 也是一个有限正则外测度; 但若 μ_1^* 取两个以上的不同值时, $\mu_1^* + \mu_2^*$ 不是正则的.

(8) 设 X 是一个度量空间, p 是一个正的实数, E 是 X 的一个子集, 则由下式定义的数称为 E 的 p -维豪斯道夫(外)测度:

$$\mu_p^*(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\delta(E_i))^p : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \delta(E_i) < \varepsilon, i=1, 2, \dots \right\},$$

其中 $\delta(E)$ 表示 E 的直径.

(8a) 集函数 μ_p^* 是一个度量外测度; 参看 11.8a.

(8b) 外测度 μ_p^* 是正则的; 事实上, 对于 X 的每一个子集 E , 存在开集的递减列 $\{U_n\}$, 使得

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, \quad \mu_p^*(E) = \mu_p^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right).$$

§13. 测度的扩张和增补

环上的测度是不是一定可以扩张到由这个环产生的 σ -环上? 这个问题实质上已经在前面几节里有了解答; 现在我们将它正式地由下面的定理加以总结.

定理 1. 设 μ 是环 \mathbf{R} 上的 σ -有限测度, 则在 σ -环 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 上存在唯一的一个测度 $\bar{\mu}$ 使当 $E \in \mathbf{R}$, 有 $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$; 测度 $\bar{\mu}$ 是 σ -有限的.

测度 $\bar{\mu}$ 称为 μ 的扩张. 以后在不致引起混淆的情况下, 对于 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中的集 E , 我们也将以 $\mu(E)$ 来代替 $\bar{\mu}(E)$.

证明. $\bar{\mu}$ 的存在已在 §11 定理 3 和 §12 定理 1 中证明 (即使没有 σ -有限性的限制, $\bar{\mu}$ 也是存在的). 为了证明唯一性, 假定 μ_1 和 μ_2 是 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 上的两个测度使当 $E \in \mathbf{R}$, 有 $\mu_1(E) = \mu_2(E)$. 设 \mathbf{M} 是 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中具有性质 $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ 的一切集 E 所成的类. 如果两个测度中有一个是有限的, 并若 $\{E_n\}$ 是 \mathbf{M} 中之集的一个单调叙

列, 則因

$$\mu_i(\lim_n E_n) = \lim_n \mu_i(E_n), \quad i=1, 2,$$

我們有 $\lim_n E_n \in \mathbf{M}$. (这里需要用到下述条件: 对于每一个 n , $\mu_1(E_n)$ 和 $\mu_2(E_n)$ 二数之一必須是有限的, 从而另一数也必須是有限的; 参看 §9 定理4和5.) 这就是說, \mathbf{M} 是一个单調类. 由于 $\mathbf{M} \supset \mathbf{R}$, 根据 §6 定理2, $\mathbf{M} \supset \mathbf{S}(\mathbf{R})$.

在一般的場合下, 就是当 μ_1 和 μ_2 不一定是有限时, 我們可以証明如下. 設 A 是 \mathbf{R} 中任意一个固定的集, $\mu_1(A)$ 和 $\mu_2(A)$ 之一是有限的. 因为 $\mathbf{R} \cap A$ 是一个环, 而 $\mathbf{S}(\mathbf{R}) \cap A$ 是由这个环产生的 σ -环(参看 §5 定理5), 将上段所述的結論应用到 $\mathbf{R} \cap A$ 和 $\mathbf{S}(\mathbf{R}) \cap A$ 上, 就可以証明若 $E \in \mathbf{S}(\mathbf{R}) \cap A$, 則 $\mu_1(E) = \mu_2(E)$. 由于 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中任一个集 E 能被 \mathbf{R} 中具有有限測度(对于 μ_1 或 μ_2) 之集的一个不相交可列併所遮盖, 于是定理証明完畢. \blacksquare

在 §12 定理的証明里, 从我們所采用的使測度擴張的过程中, 可以得出比定理1所述稍多的結論; 环 \mathbf{R} 上的測度 μ 事实上可以擴張到一个类上(由一切 μ^* -可測集組成的类), 这个类一般說来要比由 \mathbf{R} 产生的 σ -环为大. 下面的定理說明, 为了获得 μ 的定义域的这种微小的扩大, 我們并不必要用到外測度的理論.

定理2. 設 μ 是 σ -环 \mathbf{S} 上的測度, 則由一切形如 $E \Delta N$ 之集組成的类 $\bar{\mathbf{S}}$ 是一个 σ -环, 其中 $E \in \mathbf{S}$, N 是 \mathbf{S} 中測度为零之集的子集. 由等式 $\bar{\mu}(E \Delta N) = \mu(E)$ 确定的集函数 $\bar{\mu}$ 是 $\bar{\mathbf{S}}$ 上的一个完全測度.

測度 $\bar{\mu}$ 称为 μ 的增补.

証明. 若 $E \in \mathbf{S}, N \subset A \in \mathbf{S}, \mu(A) = 0$, 則等式

$$E \cup N = (E - A) \Delta [A \cap (E \cup N)]$$

和

$$E \Delta N = (E - A) \cup [A \cap (E \Delta N)]$$

說明, $\bar{\mathbf{S}}$ 也可以描述为由一切形如 $E \cup N$ 之集組成的类, 其中 $E \in \mathbf{S}$,

N 是 S 中測度為零之集的子集。由此可見，既然類 \bar{S} 對於對稱差的運算顯然是封閉的，對於可列併的運算也是封閉的，因此 \bar{S} 是一個 σ -環。若

$$E_1 \Delta N_1 = E_2 \Delta N_2,$$

其中 $E_i \in S, N_i$ 是 S 中測度為零之集的子集, $i=1, 2$, 則

$$E_1 \Delta E_2 = N_1 \Delta N_2,$$

因此 $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$ 。由此得出 $\mu(E_1) = \mu(E_2)$, 可見等式

$$\bar{\mu}(E \Delta N) = \bar{\mu}(E \cup N) = \mu(E)$$

無歧義地定出了集函數 $\bar{\mu}$ 。將 \bar{S} 中的集表為 $E \cup N$ 的形式，不難驗證 $\bar{\mu}$ 是一個測度；又因 \bar{S} 包含 S 中測度為零之集的一切子集，所以 $\bar{\mu}$ 是一個完全測度。‡

下面的定理指出了測度的增補和利用外測度而得出的完全測度兩者間的聯系。

定理 3. 設 μ 是環 R 上的 σ -有限測度, μ^* 是由 μ 引出的外測度, 則 μ 在 $S(R)$ 上的擴張測度的增補與 μ^* -可測集類上的 μ^* 恒等。

證明。我們以 S^* 表示 μ^* -可測集的全体所成的類, 以 \bar{S} 表示 μ 的增補 $\bar{\mu}$ 的定義域。因為 μ^* 是 S^* 上的完全測度, 所以 $\bar{S} \subset S^*$, 並且在 \bar{S} 上 $\bar{\mu}$ 與 μ^* 重合。剩下需要證明的只是 $S^* \subset \bar{S}$; 由於 μ^* 在 S^* 上是 σ -有限的(參看 §12 定理 5), 因此只需證明當 $E \in S^*$ 並且 $\mu^*(E) < \infty$ 時必有 $E \in \bar{S}$ 。

根據 §12 定理 3, E 有一個可測復蓋 F 。因為 $\mu^*(F) = \mu(F) = \mu^*(E), \mu^*(E) < \infty$, 並且 μ^* 是 S^* 上的測度, 所以 $\mu^*(F - E) = 0$ 。 $F - E$ 也有一個可測復蓋 G , 並且

$$\mu(G) = \mu^*(F - E) = 0,$$

因此等式

$$E = (F - G) \cup (E \cap G)$$

將 E 表為兩個集的併集: 一個是 $S(R)$ 中的集, 一個是 $S(R)$ 中測

度为零之集的子集。这就說明了 $E \in \bar{S}$ 。 |

不严格地說，定理 3 說明在 σ -有限的場合下，由全体 μ^* -可測集組成的 σ -环与由 \mathbf{R} 产生的 σ -环 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 相差不很大：每一个 μ^* -可測集适当地以一个测度为零的集加以修改，就成为 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中的集了。

在本节之末，我們引出一条極為有用的定理，这条定理是說明环上的测度和它在由环产生的 σ -环上的擴張两者間的关系的。

定理 4. 設 μ 是环 \mathbf{R} 上的 σ -有限测度，則对于 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中具有有限测度的任意集 E ，并对于任意正数 ε ，存在 \mathbf{R} 中的一个集 E_0 使得 $\mu(E \Delta E_0) \leq \varepsilon$ 。

証明。利用 §§10—12 的結論和本节定理 1 可知：

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathbf{R}, i=1, 2, \dots \right\}.$$

因此，存在 \mathbf{R} 中之集的一个叙列 $\{E_i\}$ 使

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为

$$\lim_n \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right),$$

存在正整数 n 使

$$E_0 = \bigcup_{i=1}^n E_i, \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \mu(E_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

显然， $E_0 \in \mathbf{R}$ 。我們有

$$\mu(E - E_0) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i - E_0\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) - \mu(E_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

和

$$\mu(E_0 - E) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i - E\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) - \mu(E) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

定理于是証畢， |

(1) 設 μ 是定义在环 \mathbf{R} 上的非負有限实值集函数, 并具有有限可加性. 則按照 §10 确定的 μ^* 仍是一个外測度, 因而 §11 定理 3 中的 $\bar{\mu}$ 仍旧可以形成, 但 $\bar{\mu}$ 不一定是 μ 的擴張 (參看 10.2, 10.4e 和 11.4).

(2) 設 \mathbf{R} 是 §8 中所述的环, $\bar{\mu}$ 是 \mathbf{R} 上的測度 μ 的擴張, 則对于任何可列集 E , 有 $E \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$ 和 $\bar{\mu}(E) = 0$.

(3) 若类 \mathbf{R} 不是一个环, 則定理 1 中关于唯一性的結論不成立. (提示: 令 $X = \{a, b, c, d\}$ 为由四个点构成的空間, 在由 X 的一切子集組成的类上定义測度 μ_1 和 μ_2 如下:

$$\begin{aligned} \mu_1(\{a\}) = \mu_1(\{d\}) = \mu_2(\{b\}) = \mu_2(\{c\}) = 1, \\ \mu_1(\{b\}) = \mu_1(\{c\}) = \mu_2(\{a\}) = \mu_2(\{d\}) = 2. \end{aligned}$$

(4) 在定理 1 中, 如将环改成半环, 定理是否成立?

(5) 設 X 是一个可列集, \mathbf{R} 是由 X 的子集組成的环, 具有下述性質: \mathbf{R} 中的每一个非空集是無限集, 并且 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 是由 X 的一切子集組成的类 (參看 9.7). 对于 X 的每一个子集 E , 定义 $\mu_1(E)$ 为 E 中之点的个数, $\mu_2(E) = 2\mu_1(E)$, 則 μ_1 和 μ_2 在 \mathbf{R} 上重合, 但在 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 上則不相等. 因此, 在定理 1 中, 如果測度在 \mathbf{R} 上不是 σ -有限的, 則即使对于 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 上全 σ -有限的測度而言, 唯一性的結論也是不成立的.

(6) 設 μ 是 σ -环 \mathbf{S} 上的測度, $\bar{\mu}$ 是它在 $\bar{\mathbf{S}}$ 上的增补. 如果 $A \in \mathbf{S}, B \in \mathbf{S}, A \subset E \subset B$, 并且 $\mu(B - A) = 0$, 則 $E \in \bar{\mathbf{S}}$.

(7) 設 X 是一个不可列集, \mathbf{S} 是由一切可列集及其余集組成的类. 对于 \mathbf{S} 中每一个集 E , 定义 $\mu(E)$ 为 E 中之点的个数. 則 μ 是 \mathbf{S} 上的一个完全測度, 但 X 的每一个子集是 μ^* -可測集. 因此, 如果没有 σ -有限性的假設, 定理 3 不成立.

(8) 設 μ 和 ν 是环 \mathbf{R} 上的 σ -有限測度, 則对于 $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ 中滿足关系 $\mu(E) < \infty$ 和 $\nu(E) < \infty$ 的每一个集 E , 并对于任意正数 ε , 存在 \mathbf{R} 中的集 E_0 使得

$$\mu(E \Delta E_0) \leq \varepsilon \quad \text{和} \quad \nu(E \Delta E_0) \leq \varepsilon.$$

§14. 內 測 度

我們現在回到关于測度、外測度及其关系的一般的討論, 目

的在于闡明測度論中十分有趣并且具有历史性重要意义的一部分理論。

我們已經証明,如果 μ 是 σ -环 \mathbf{S} 上的測度,則集函数 μ^* (对于可傳 σ -环 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中每一个集 E ,

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(F) : E \subset F \in \mathbf{S}\}$$

是一个外測度;并且如果 $\bar{\mathbf{S}}$ 是由全体 μ^* -可測集組成的 σ -环,則在 σ -有限的場合下, $\bar{\mathbf{S}}$ 上由 μ^* 引出的測度 $\bar{\mu}$ 就是 μ 的增补。現在我們定义由 μ 引出的內測度 μ_* 如下:对于 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中每一个集 E ,令

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(F) : E \supset F \in \mathbf{S}\}.$$

在本节中,我們將研究 μ_* 以及它和 μ^* 的关系;我們將要說明, μ_* 的性質在某种意义下都是 μ^* 的性質的对偶。容易看出,集函数 μ_* 是非負的,單調的,并且 $\mu_*(0) = 0$; 在下文中我們就要应用这些基本的性質,而不再加以任何解釋。在本节中,我們假定:

μ 是 σ -环 \mathbf{S} 上的 σ -有限測度, μ^* 和 μ_* 分别是由 μ 引出的外測度和內測度, $\bar{\mathbf{S}}$ 上的測度 $\bar{\mu}$ 是 μ 的增补。

并且我們記得, $\bar{\mathbf{S}}$ 上的 $\bar{\mu}$ 与 μ^* -可測集类上的 μ^* 恒等 (§13 定理 3)。

定理 1. 設 $E \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$, 則

$$\mu_*(E) = \sup\{\bar{\mu}(F) : E \supset F \in \bar{\mathbf{S}}\}.$$

証明. 因为 $\mathbf{S} \subset \bar{\mathbf{S}}$, 由 μ_* 的定义显然有

$$\mu_*(E) \leq \sup\{\bar{\mu}(F) : E \supset F \in \bar{\mathbf{S}}\}.$$

另一方面, §13 定理 2 說明, 对于 $\bar{\mathbf{S}}$ 中每一个 F , 存在 \mathbf{S} 中之集 G 使得 $G \subset F$ 并且 $\bar{\mu}(F) = \mu(G)$ 。这就是說, μ 在 \mathbf{S} 上可以取得 $\bar{\mu}$ 在 $\bar{\mathbf{S}}$ 上的每一个值, 于是定理証明完畢。 |

設 $E \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$, $F \in \mathbf{S}$, $F \subset E$, 如果对于 \mathbf{S} 中滿足关系式 $G \subset E - F$ 的每一个集 G , 有 $\mu(G) = 0$, 則称 F 是 E 的一个可測核心。不严格地說, $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中之集 E 的可測核心是 \mathbf{S} 中被 E 所包的最大集。

定理 2. $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中每一个集 E 有一个可測核心。

證明。設 \hat{E} 是 E 的可測復蓋, N 是 $\hat{E}-E$ 的可測復蓋, 令 $F = \hat{E} - N$ 。于是

$$F = \hat{E} - N \subset \hat{E} - (\hat{E} - E) = E;$$

又若 $G \subset E - F$, 則有

$$G \subset E - (\hat{E} - N) = E \cap N \subset N - (\hat{E} - E).$$

由此可見(因 N 是 $\hat{E} - E$ 的可測復蓋) F 是 E 的一個可測核心。 ▮

定理 3. 設 $E \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$, F 是 E 的可測核心, 則 $\mu(F) = \mu_*(E)$; 如果 F_1 和 F_2 都是 E 的可測核心, 則 $\mu(F_1 \Delta F_2) = 0$ 。

證明。因為 $F \subset E$, 顯然有 $\mu(F) \leq \mu_*(E)$ 。假定 $\mu(F) < \mu_*(E)$, 則 $\mu(F)$ 為有限, 根據 $\mu_*(E)$ 的定義, 存在 \mathbf{S} 中的集 F_0 使得 $F_0 \subset E, \mu(F_0) > \mu(F)$ 。于是

$$F_0 - F \subset E - F,$$

并且

$$\mu(F_0 - F) = \mu(F_0) - \mu(F) > 0,$$

這與集 F 的性質矛盾。因此 $\mu(F) = \mu_*(E)$ 。

由關係式 $F_1 \subset F_1 \cup F_2 \subset E$ 可以推出 $(F_1 \cup F_2) - F_1 \subset E - F_1$, 由於 F_1 是 E 的可測核心, 因此有

$$\mu((F_1 \cup F_2) - F_1) = 0.$$

類似地, 有

$$\mu((F_1 \cup F_2) - F_2) = 0.$$

因此

$$\mu(F_1 \Delta F_2) = 0. \quad \text{▮}$$

定理 4. 設 $\{E_n\}$ 是 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中之集的不相交敘列, 則

$$\mu_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(E_n).$$

證明。設 F_n 是 E_n 的可測核心, $n=1, 2, \dots$, 則由 μ 的可列可加性得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \leq \mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n). \quad \blacksquare$$

定理 5. 設 $A \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$, $\{E_n\}$ 是 $\bar{\mathbf{S}}$ 中之集的不相交叙列. $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, 則

$$\mu_*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A \cap E_n).$$

證明. 設 F 是 $A \cap E$ 的可測核心, 則

$$\mu_*(A \cap E) = \mu(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(F \cap E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A \cap E_n);$$

反方向的不等式可以利用定理 4 得出. \blacksquare

定理 6. 若 $E \in \bar{\mathbf{S}}$, 則

$$\mu^*(E) = \mu_*(E) = \bar{\mu}(E);$$

反之, 如果 $E \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$, 并且

$$\mu^*(E) = \mu_*(E) < \infty,$$

則 $E \in \bar{\mathbf{S}}$.

證明. 若 $E \in \bar{\mathbf{S}}$, 則集函数 $\bar{\mu}$ 在 E 上取得定理 1 中的上确界和 §12 定理 2 中的下确界值. 为了証明逆命題, 設 A 是 E 的可測核心, B 是 E 的可測复盖. 因为 $\mu(A) = \mu_*(E) < \infty$, 所以

$$\mu(B-A) = \mu(B) - \mu(A) = \mu^*(E) - \mu_*(E) = 0,$$

又因 $\bar{\mu}$ 是 $\bar{\mathbf{S}}$ 上的完全測度, 由此即得定理的結論 (參看 §11 定理 3 和 13.6). \blacksquare

定理 7. 設 E 和 F 是 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中的不相交集, 則

$$\mu_*(E \cup F) \leq \mu_*(E) + \mu_*(F) \leq \mu^*(E \cup F).$$

證明. 令 A 为 F 的可測复盖, B 为 $E \cup F$ 的可測核心. 由于 $B-A \subset E$, 因此

$$\mu_*(E \cup F) = \mu(B) \leq \mu(B-A) + \mu(A) \leq \mu_*(E) + \mu_*(F).$$

現在, 令 A 为 E 的可測核心, B 为 $E \cup F$ 的可測复盖. 由于 $B-A \supset F$, 因此

$$\mu^*(E \cup F) = \mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu_*(E) + \mu^*(F). \quad \blacksquare$$

定理 8. 設 $E \in \bar{\mathcal{S}}$, 則對於 X 的每一個子集 A , 有

$$\mu_*(A \cap E) + \mu^*(A' \cap E) = \bar{\mu}(E).$$

證明. 對於 $A \cap E$ 和 $A' \cap E$ 應用定理 7, 我們得到

$$\mu_*(E) \leq \mu_*(A \cap E) + \mu^*(A' \cap E) \leq \mu^*(E).$$

但 $E \in \bar{\mathcal{S}}$, 因此, 根據定理 6, $\mu_*(E) = \mu^*(E) = \bar{\mu}(E)$. \blacksquare

本書所得到的結果為我們指出了測度擴張定理的另一種接近方式——一種我們時常採用的接近方式. 設 μ 是環 \mathbf{R} 上的 σ -有限測度, μ^* 是 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 上由 μ 引出的外測度, 則對於 \mathbf{R} 中具有有限測度的任何集 E , 並對於 $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中的任何集 A , 我們有

$$(a) \quad \mu_*(A \cap E) = \mu(E) - \mu^*(A' \cap E).$$

如果我們能夠證明下列命題: “若 E 和 F 是 \mathbf{R} 中具有有限測度的兩個集使得 $A \cap E = A \cap F$, 則 $\mu(E) - \mu^*(A' \cap E) = \mu(F) - \mu^*(A' \cap F)$ ”, 我們就可以用等式 (a) 作為內測度的定義; 並且可以證明, $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ 中具有有限外測度的集 E 是一個 μ^* -可測集, 其必要和充分條件為: $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. 讀者可以利用我們在本章中建立測度擴張定理所用的一些方法, 將上述接近過程的細節補出.

(1) 在 12.4 中, 如果將 μ^* 換為 μ_* , 命題是否成立?

(2) 如果對於內測度加以適當的有限性的補充條件, 則與 12.4 對偶的命題成立; 但 12.4 中原來的命題對於內測度不成立 (參看 12.5).

(3) 設 E 是 $\bar{\mathcal{S}}$ 中具有有限測度的一個集, $F \subset E$, 並且 $\bar{\mu}(E) = \mu^*(F) + \mu^*(E - F)$, 則 $F \in \bar{\mathcal{S}}$. 換一句話說, F 的 μ^* -可測性可以用 $\bar{\mathcal{S}}$ 中一個固定的集 E (包含 F) 測出, 而不必採用 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中一切可能的集 A . (提示: 利用定理 8.)

(4) 類似於 11.6 的命題對於內測度是否成立?

(5) 設 $E \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$, F 是 E 的可測復蓋, 則對於每一個 μ^* -可測集 M , 有 $\bar{\mu}(F \cap M) = \mu^*(E \cap M)$. (提示: 對 $E = F \cap M$ 和 $A = E'$ 應用定理 8). 反之, 任何集 F 如果具有這個性質, 並且 $E \subset F \in \mathcal{S}$, 則 F 是 E 的可測復蓋. 類似地, F 是 E 的可測核心, 其必要和充分條件是: $E \supset F \in \mathcal{S}$, 並且對於 $\bar{\mathcal{S}}$ 中每一個集 M , 有 $\bar{\mu}(F \cap M) = \mu_*(E \cap M)$.

§15. 勒貝格測度

本节的目的是要将一般的測度擴張定理应用到 §8 中所討論的測度上, 从而导出一些經典性的結論, 并介紹一些与之有关的術語。在本节內, 我們假定:

X 是实数軸, \mathbf{P} 是由一切形如 $[a, b)$ 的有界半閉区間組成的类, \mathbf{S} 是由 \mathbf{P} 产生的 σ -环, μ 是定义在 \mathbf{P} 上的集函数, 由等式 $\mu([a, b)) = b - a$ 确定。

σ -环 \mathbf{S} 中的集称为直綫上的波雷耳集; 根据 §8 定理 5 和 §13 定理 1, 可設 μ 对于一切波雷耳集都有定义。設定义在 $\bar{\mathbf{S}}$ 上的 $\bar{\mu}$ 是 \mathbf{S} 上 μ 的增补, 則 $\bar{\mathbf{S}}$ 中的集称为直綫上的勒貝格可測集; 測度 $\bar{\mu}$ 称为勒貝格測度。(\mathbf{S} 上的不完全測度 μ 通常也称为勒貝格測度。)

因为整个数直綫 X 是 \mathbf{P} 中可列無限多个集的併集, 可見 $X \in \mathbf{S}$, 因此 σ -环 \mathbf{S} 和 $\bar{\mathbf{S}}$ 都是 σ -代数。由于 $\mu(X) = \infty$, 因此 μ 在 \mathbf{S} 上不是有限的, 但因 μ 在 \mathbf{P} 上是有限的, 所以 μ 在 \mathbf{S} 上以及 $\bar{\mu}$ 在 $\bar{\mathbf{S}}$ 上都是全 σ -有限的。 μ 和 $\bar{\mu}$ 的其他性質将在以下一些定理中列举出来。

定理 1. 每一个可列集是波雷耳集, 其測度为零。

証明. 对于任意的 $a, -\infty < a < \infty$, 我們有

$$\{a\} = \{x: x = a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x: a \leq x < a + \frac{1}{n} \right\},$$

因此

$$\mu(\{a\}) = \lim_n \mu\left(\left[a, a + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_n \frac{1}{n} = 0,$$

由此可見, 每一个单点集是測度为零的波雷耳集。但因波雷耳集的全體形成一个 σ -环, 并且 μ 具有可列可加性, 由此即得定理的結論。 **┆**

定理 2. 設 \mathbf{U} 是由一切开集組成的类, 則波雷耳集类 \mathbf{S} 与由

\mathbf{U} 产生的 σ -环重合。

証明。因为对于每一个实数 a , 集 $\{a\}$ 是一个波雷耳集, 由关系式 $(a, b) = [a, b) - \{a\}$ 可知, 每一个有界开区間是波雷耳集。又因数直綫上的每一个开集可以表为有界开区間的可列併, 因此 $\mathbf{S} \supset \mathbf{U}$, 从而有 $\mathbf{S} \supset \mathbf{S}(\mathbf{U})$ 。另一方面, 对于每一个实数 a , 我們有

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right),$$

因此 $\{a\} \in \mathbf{S}(\mathbf{U})$ 。由关系式 $[a, b) = (a, b) \cup \{a\}$ 可知 $\mathbf{P} \subset \mathbf{S}(\mathbf{U})$, 从而有

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{P}) \subset \mathbf{S}(\mathbf{U}). \quad |$$

定理 3. 設 \mathbf{U} 是由一切开集組成的类, 則对于 X 的任意子集 E , 有

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}.$$

証明。由于 $\mu^*(E) = \inf\{\mu(F) : E \subset F \in \mathbf{S}\}$, 并且 $\mathbf{U} \subset \mathbf{S}$, 我們有

$$\mu^*(E) \leq \inf\{\mu(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}.$$

另一方面, 根据 μ^* 的定义, 对于任意正数 ε , 存在 \mathbf{P} 中之集的叙列 $\{[a_n, b_n)\}$ 使

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \leq \mu^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此有

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n \right) = U \in \mathbf{U}$$

和

$$\mu(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 于是得到定理的結論。 |

定理 4. 設 T 是整个数直綫在其自身上的一一变换, 由等式

$T(x) = \alpha x + \beta$ 确定, 其中 α 和 β 是实数, 并且 $\alpha \neq 0$. 如果对于 X 的任意子集 E , 令 $T(E)$ 表一切形如 $T(x)$ 之点的集, 其中 $x \in E$, 即 $T(E) = \{\alpha x + \beta : x \in E\}$, 则有

$$\mu^*(T(E)) = |\alpha| \mu^*(E) \quad \text{和} \quad \mu_*(T(E)) = |\alpha| \mu_*(E).$$

集 $T(E)$ 是波雷耳集或勒貝格可測集, 当而且只当 E 分别是波雷耳集或勒貝格可測集时.

証明. 只須在 $\alpha > 0$ 的場合下証明定理. 因若 $\alpha < 0$, 則變換 T 是由两个變換 T_1 和 T_2 合成的: $T(x) = T_1(T_2(x))$, 其中 $T_1(x) = |\alpha|x + \beta$, $T_2(x) = -x$. 我們留給讀者驗證下述事实: 變換 T_2 將波雷耳集和勒貝格可測集分別變為波雷耳集和勒貝格可測集, 并且每一个集的内測度和外測度都保持不變.

現在我們假定 $\alpha > 0$, 并設 $T(S)$ 是由一切形如 $T(E)$ 之集組成的类, 其中 $E \in S$. 容易看出, $T(S)$ 是一个 σ -环; 我們現在証明 $T(S) = S$. 設 $E = [a, b] \in P$, 令

$$F = \left[\frac{a-\beta}{\alpha}, \frac{b-\beta}{\alpha} \right] \in P,$$

則 $E = T(F) \in T(S)$, 因此 $S \subset T(S)$. 設 T^{-1} 是 T 的逆變換, $T^{-1}(x) = \frac{x-\beta}{\alpha}$, 對於 T^{-1} 施行同样的推理, 我們有 $S \subset T^{-1}(S)$. 再对这个关系式的两端施行變換 T , 我們得到 $T(S) \subset S$. 因此 $T(S) = S$.

若對於每一个波雷耳集 E , 令

$$\mu_1(E) = \mu(T(E)), \quad \mu_2(E) = \alpha \mu(E),$$

則 μ_1 和 μ_2 都是 S 上的測度. 如果 $E = [a, b] \in P$, 則有 $T(E) = [\alpha a + \beta, \alpha b + \beta]$, 并且

$$\begin{aligned} \mu_1(E) &= \mu(T(E)) = (\alpha b + \beta) - (\alpha a + \beta) = \\ &= \alpha(b - a) = \alpha \mu(E) = \mu_2(E). \end{aligned}$$

因此, 根据 §8 定理 5 和 §13 定理 1, 對於 S 中的每一个集 E , 有 $\mu(T(E)) = \alpha \mu(E)$.

將以上兩段中導出的結論運用在逆變換 T^{-1} 上, 我們得到

$$\begin{aligned}\mu^*(T(E)) &= \inf\{\mu(F) : T(E) \subset F \in \mathbf{S}\} = \\ &= \inf\{\alpha\mu(T^{-1}(F)) : E \subset T^{-1}(F) \in \mathbf{S}\} = \\ &= \alpha \inf\{\mu(G) : E \subset G \in \mathbf{S}\} = \\ &= \alpha\mu^*(E).\end{aligned}$$

在這些等式中, 將 \inf 都換為 \sup , μ^* 都換為 μ_* , \subset 都換為 \supset , 就有

$$\mu_*(T(E)) = \alpha\mu_*(E),$$

其中 E 是任意的集。

如果 E 是一個勒貝格可測集, A 是任意的集, 則

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap T(E)) + \mu^*(A \cap (T(E))') &= \\ = \mu^*(T(T^{-1}(A) \cap E)) + \mu^*(T(T^{-1}(A) \cap E')) &= \\ = \alpha[\mu^*(T^{-1}(A) \cap E) + \mu^*(T^{-1}(A) \cap E')] &= \\ = \alpha\mu^*(T^{-1}(A)) = \mu^*(A),\end{aligned}$$

因此 $T(E)$ 是勒貝格可測集。將此結論運用在 T^{-1} 上, 就完成了定理的證明。■

(1) 設 \mathbf{C} 是由一切閉集組成的類, 則波雷耳集類 \mathbf{S} 與由 \mathbf{C} 產生的 σ -環重合, 並且對於 X 的任意子集 E , 有

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(C) : E \supset C \in \mathbf{C}\}.$$

(2) 對於每一個勒貝格可測集 E , 存在兩個波雷耳集 A 和 B 使得

$$A \subset E \subset B, \quad \mu(B-A) = 0,$$

其中 A 是一個 F_σ 集, B 是一個 G_δ 集。

(3) 有界集必具有有限外測度。逆命題是否成立?

(4) 設 M 是單位閉區間 X 中全體有理數的集, 枚舉如下: $M = \{x_1, x_2, \dots\}$. 對於任意的 $\varepsilon > 0$, 令 $F_i(\varepsilon)$ 為中心在 x_i , 長度為 $\frac{\varepsilon}{2^i}$ 的开区間, $i = 1, 2, \dots$, 並令

$$F(\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i(\varepsilon), \quad F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{n}\right),$$

則下列命題成立。

(4a) 存在 $\varepsilon > 0$ 並存在 X 中的一點 x 使得 $x \in F(\varepsilon)$ 。

(4b) $F(\varepsilon)$ 是开集, 并且 $\mu(F(\varepsilon)) \leq \varepsilon$.

(4c) $X - F(\varepsilon)$ 是無处稠密集.

(4d) $X - F$ 是屬於第一种范疇的集. 由此可見, 由于 X 是一个完备度量空間, 所以 F 是不可列集 (从而有 $F \neq M$).

(4e) F 的測度为零.

因为 $F \supset M$, 命題(4e)对于可列集 M (有如任何可列集) 的測度为零这一事实給出了一个新的証明. 更有趣的是, 測度为零的不可列集是存在的; 参看(5).

(5) 設 X 是单位閉区間, 將 X 中的每一个数 x 展为無限三进位小数, 即

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}, \quad \alpha_n = 0, 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

并設 C 是由一切这样的数 x 組成的集: 在 x 的展开式中, 可以不必用到数字 1. (如果我們沿用十进位小数的記号, 以 $0.\alpha_1\alpha_2\dots$ 来表示

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n},$$

例如 $\frac{1}{3} = 0.1000\dots = 0.0222\dots$, 則有 $\frac{1}{3} \in C$; 但 $\frac{1}{2} = 0.111\dots$ 是 $\frac{1}{2}$ 的唯一的三进位小数展开式, 所以 $\frac{1}{2} \notin C$.) 將 X 等分为三段, 設 X_1 是中間一段所成的开区間, 即 $X_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; 剩下的两个閉区間, 其併集为 $X - X_1$, 將这两个閉区間

各等分为三段, 設 X_2 和 X_3 分別是它們中間一段所成的开区間, 即 $X_2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $X_3 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$; 剩下的四个閉区間, 其併集为 $X - (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$, 將这四个閉区間又各等分为三段, 取中間的四个开区間为 X_4, X_5, X_6 和 X_7 , 依此类推, 以至無穷. 則下列命題成立.

(5a) $C = X - \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. (提示: 將 X 中每一个 x 表为 $x = 0.\alpha_1\alpha_2\dots$, $\alpha_n = 0, 1, 2, n = 1, 2, \dots$, 使当 $x \in C$, 必有 $\alpha_n = 0$ 或 $2, n = 1, 2, \dots$. x 的这样的表示方式是唯一的, 并且 (i) $x \in X_1$ 当而且只当 $\alpha_1 = 1$; (ii) 若 $\alpha_1 \neq 1$, 則 $x \in X_2 \cup X_3$ 当而且只当 $\alpha_2 = 1$; (iii) 若 $\alpha_1 \neq 1, \alpha_2 \neq 1$, 則 $x \in X_4 \cup X_5 \cup X_6 \cup X_7$ 当而且只当 $\alpha_3 = 1$; \dots .)

(5b) $\mu(C) = 0$.

(5c) C 是无处稠密集。(提示:可假设 X 包含一个开区间,并且这个开区间与 $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ 的交集是空集.)

(5d) C 是完备集。(提示:区间 X_1, X_2, \dots 中的任何两个没有公共点.)

(5e) C 具有连续统的势。(提示:考虑下列对应关系:对于 C 中每一个 $x, x=0.a_1a_2\dots, a_n=0$ 或 $2, n=1, 2, \dots$, 以数 y 与之对应, y 的无限二进制小数展开式是 $y=0.\beta_1\beta_2\dots, \beta_n=\frac{a_n}{2}, n=1, 2, \dots$, 即

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}.$$

在 C 和 X 之间,这个对应并非一对一的,但在 C 中的无理数与 X 中的无理数之间,它是一个一一对应.命题也可以借助于(5d)获得证明.)

C 称为康脱集.

(6) 由于波雷耳集类具有连续统的势(参看 5.9c),并且康脱集的每一个子集是勒贝格可测集(参看(5b)),因此存在非波雷耳集的勒贝格可测集.

(7) 单位闭区间中一切这样的点组成一个集:在每一点的无限二进制小数展开式中,一切偶数位的数字都是 0.则这个集是勒贝格可测集,其测度为零.

(8) 设 X 是欧几里得平面上一个圆的周界.在 X 中的波雷耳集类上,存在唯一的一个测度 μ 使得 $\mu(X)=1$,并使得 μ 对于 X 的一切旋转是不变的.(圆周上的子集若属于由圆上全体开弧组成的类所产生的 σ -环,则称为波雷耳集.)

(9) 设 g 是单实变数的连续有限增函数, \bar{S}_g 是包含全体波雷耳集的某个 σ -环,则在 \bar{S}_g 上存在唯一的一个完全测度 $\bar{\mu}_g$ 使得 $\bar{\mu}_g([a, b])=g(b)-g(a)$,并使得对于 \bar{S}_g 中每一个 E , 存在一个波雷耳集 F 满足 $\bar{\mu}_g(E \Delta F)=0$ (参看 8.3). $\bar{\mu}_g$ 称为由 g 引出的勒贝格-史蒂尔杰测度.

§16. 不可测集

为了显示直线上勒贝格可测集的全部结构,上节的讨论还不够细致.特别是,确定是否有不可测集存在,就绝不是一个不重要的问题.本节的目的是在回答这一个问题,以及与之有关的一些

問題。我們即將看到，借以獲得結論所用的方法，其中有一些與我們過去用過的方法完全不同。但因在測度論中，我們常常要用到這些方法，特別是在建立富有啓發性的例子時；因此我們將詳細地加以解釋。在本節中，我們採用與 §15 中相同的記號。

設 E 是數直線 X 的任意子集， a 是任意實數，我們以 $E+a$ 表示一切形如 $x+a$ 之數的集，其中 $x \in E$ ；一般地，若 E 和 F 都是 X 的子集，我們以 $E+F$ 表示一切形如 $x+y$ 之數的集，其中 $x \in E$ ， $y \in F$ 。以 $D(E)$ 表示一切形如 $x-y$ 之數的集，其中 $x \in E$ ， $y \in E$ ； $D(E)$ 稱為 E 的差集。

定理 1. 設 E 是一個勒貝格可測集，具有正的有限測度，如果 $0 \leq \alpha < 1$ ，則存在開區間 U 使得 $\bar{\mu}(E \cap U) \geq \alpha \mu(U)$ 。

證明。設 \mathbf{U} 是由一切開集組成的類。根據 §15 定理 3， $\bar{\mu}(E) = \inf \{ \mu(U) : E \subset U \in \mathbf{U} \}$ ，因此我們可以選取一個開集 U_0 ，使得 $E \subset U_0$ 並且 $\alpha \mu(U_0) \leq \bar{\mu}(E)$ 。如果 $\{U_n\}$ 是各項為開區間的不相交序列，它的併集是 U_0 ，則有

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E \cap U_n).$$

由此可見，至少有 n 的一個值能使 $\alpha \mu(U_n) \leq \bar{\mu}(E \cap U_n)$ ；我們就取這個 U_n 作為 U 。 ▮

定理 2. 設 E 是一個勒貝格可測集，具有正的有限測度，則存在包含原點的一個開區間，這個開區間被 $D(E)$ 所包。

證明。如果 E 本身就是一個開區間，或者 E 包含一個開區間，則結論顯然成立。對於一般的場合，我們應用定理 1，選取一個有界開區間 U ，使得

$$\bar{\mu}(E \cap U) \geq \frac{3}{4} \mu(U).$$

如果 $-\frac{1}{2} \mu(U) < x < \frac{1}{2} \mu(U)$ ，則集

$$(E \cap U) \cup ((E \cap U) + x)$$

被一个长度小于 $\frac{3}{2}\mu(U)$ 的区間(即 $U \cup (U+x)$)所包。假定 $E \cap U$ 和 $(E \cap U) + x$ 不相交, 則因它們具有相等的測度, 我們將有

$$\bar{\mu}((E \cap U) \cup [(E \cap U) + x]) = 2\bar{\mu}(E \cap U) \geq \frac{3}{2}\mu(U),$$

由此得出矛盾。因此, $E \cap U$ 中至少有一个点屬於 $(E \cap U) + x$, 这就証明了 $x \in D(E)$ 。換一句話說, 区間 $(-\frac{1}{2}\mu(U), \frac{1}{2}\mu(U))$ 滿足定理中所述的條件。 |

定理 3. 設 ξ 是一个無理数, n 和 m 是任意整数, 則一切形如 $n+m\xi$ 之数的集 A 在数直綫上是处处稠密的; 設 B 是一切形如 $n+m\xi$ 之数的集, 其中 n 是偶数, C 是一切形如 $n+m\xi$ 之数的集, 其中 n 是奇数, 則 B 和 C 在数直綫上也是处处稠密的。

証明。对于每一个正整数 i , 存在唯一的整数 n_i (n_i 可为正、为負或为零) 使得 $0 \leq n_i + i\xi < 1$; 令 $x_i = n_i + i\xi$ 。設 U 是任意一个开区間, 則存在正整数 k 使得 $\mu(U) > \frac{1}{k}$ 。在单位区間中的 $k+1$ 个数 x_1, \dots, x_{k+1} , 其中至少有两个数, 例如 x_i 和 x_j , 能够滿足关系式 $|x_i - x_j| < \frac{1}{k}$ 。由此可見, $x_i - x_j$ 的某个整数倍屬於区間 U , 也就是說, A 的某个元素屬於 U , 这就証明了定理中关于 A 的部分。类似地, 只要将单位区間換为 $[0, 2)$, 就可以証明关于 B 的部分。关于 C 的証明可由等式 $C = B + 1$ 得出。 |

定理 4. 至少有一个勒貝格不可測集 E_0 存在。

証明。对于任意两个实数 x 和 y , 我們以記号 $x \sim y$ 表示(只用在這個証明里) $x - y \in A$, 其中 A 是定理 3 中所述的集。容易驗証, 关系“ \sim ”具有自反性, 对称性和推移性; 从而可知, 全体实数集可以看作是一些不相交集的併集, 其中每一个集包含与某一个給定的数成立关系“ \sim ”的一切数。根据選擇公理, 存在集 E_0 包含上述每一个集中恰好一个点; 以下我們証明 E_0 是不可測的。

設 F 是一个波雷耳集使得 $F \subset E_0$ 。由于差集 $D(F)$ 不可能包含

稠密集 A 中的任何非零元素, 根据定理 2, F 的测度必为零, 因此 $\mu_*(E_0) = 0$ 。換一句話說, 如果 E_0 是勒貝格可測集, 它的测度必为零。

現在, 設 a_1 和 a_2 是 A 中两个不相同的元素, 則集 $E_0 + a_1$ 和 $E_0 + a_2$ 是不相交的 (若 $x_1 + a_1 = x_2 + a_2$, 其中 $x_1 \in E_0, x_2 \in E_0$, 則 $x_1 - x_2 = a_2 - a_1 \in A$, 即 $x_1 \sim x_2$, 与 E_0 的定义相矛盾)。此外, 由于整个数直綫被一切形如 $E_0 + a$ 之集組成的可列类所遮盖, 其中 $a \in A$, 即 $E_0 + A = X$, 因此, 如果 E_0 是勒貝格可測的, 則可推出每一个 $E_0 + a$ 是勒貝格可測集并且具有与 E_0 相同的测度。由此可見, E_0 是勒貝格可測集这一假定将导出 $\mu(X) = 0$ 的結論, 然而这是不可能的。 ▮

定理 4 的証明是熟知的。但对于以后要用到的一些反例的建立, 下面的定理更为有力。

定理 5. 在数直綫上存在子集 M , 使得对于任何勒貝格可測集 E , 有

$$\mu_*(M \cap E) = 0 \quad \text{和} \quad \mu^*(M \cap E) = \bar{\mu}(E).$$

証明。設 A, B 和 C 是定理 3 中所述的集, 則 $A = B \cup C$ 。令

$$M = E_0 + B,$$

其中 E_0 是在定理 4 的証明中所建立起来的集。設 F 是一个波雷耳集使得 $F \subset M$, 則差集 $D(F)$ 不可能包含稠密集 C 中的任何元素, 因此根据定理 2 有 $\mu_*(M) = 0$ 。由关系式

$$M' = E_0 + C = E_0 + (B + 1) = M + 1$$

可証 $\mu_*(M') = 0$ (参看 §15 定理 4)。如果 E 是任意勒貝格可測集, 則由 μ_* 的单調性可得 $\mu_*(M \cap E) = \mu_*(M' \cap E) = 0$ 。根据 §14 定理 8, 就有 $\mu^*(M \cap E) = \bar{\mu}(E)$ 。 ▮

从本节所得到的結果中, 还可以获得下述結論: 不可能将勒貝格测度扩張到由数直綫的一切子集組成的类上, 使得扩張出来的集函数仍是一个对于平移是不变的测度。

(1) 設 E 是一個勒貝格可測集, 如果對於處處稠密集中的每一個數 x 有

$$\bar{\mu}(E \Delta (E+x))=0,$$

則或是 $\bar{\mu}(E)=0$, 或是 $\bar{\mu}(E')=0$, 二者必居其一。

(2) 設 \mathbf{S} 是由集 X 的子集組成的某個 σ -環, μ 是 \mathbf{S} 上的 σ -有限測度, μ^* 和 μ_* 分別是 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 上由 μ 引出的外測度和內測度. 設 M 是 $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ 中任意一個集, $\tilde{\mathbf{S}}$ 是由 M 以及 \mathbf{S} 中全體集組成的類產生的 σ -環. 下列一系列命題的目的在於說明, μ 可以擴張成為 $\tilde{\mathbf{S}}$ 上的一個測度 $\tilde{\mu}$.

(2a) σ -環 $\tilde{\mathbf{S}}$ 是由形如 $(E \cap M) \Delta (F \cap M')$ 的一切集組成的類, 其中 $E \in \mathbf{S}, F \in \mathbf{S}$. (提示: 只須證明一切具有上述形式的集形成一個 σ -環. 我們指出:

$$(E \cap M) \Delta (F \cap M') = (E \cap M) \cup (F \cap M').)$$

(2b) 設 $\mu^*(M) < \infty$, 如果 G 和 H 分別是 M 的可測核心和可測復蓋, 並令 $D = H - G$, 則 $\tilde{\mathbf{S}}$ 中任何集與 D' 的交集屬於 \mathbf{S} .

(2c) 在 \mathbf{S} 中存在集 G 和 H 使得 $G \subset M \subset H$, $\mu_*(M - G) = \mu_*(H - M) = 0$, 並使得 $\tilde{\mathbf{S}}$ 中任何集與 D' 的交集屬於 \mathbf{S} , 其中 $D = H - G$. (提示: 存在 \mathbf{S} 中之集的不相交序列 $\{X_n\}$ 使得 $\mu(X_n) < \infty, M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M \cap X_n)$.)

(2d) 沿用(2c)中的記號, 則有 $\mu_*(M \cap D) = \mu_*(M' \cap D) = 0$, 從而有 $\mu^*(M \cap D) = \mu^*(M' \cap D) = \mu(D)$.

(2e) 沿用(2c)中的記號, 如果

$$[(E_1 \cap M) \Delta (F_1 \cap M')] \cap D = [(E_2 \cap M) \Delta (F_2 \cap M')] \cap D,$$

其中 E_1, F_1, E_2 和 F_2 都是 \mathbf{S} 中的集, 則有

$$\mu(E_1 \cap D) = \mu(E_2 \cap D) \quad \text{和} \quad \mu(F_1 \cap D) = \mu(F_2 \cap D).$$

(提示: 利用下述事實: 從等式

$$[(E_1 \Delta E_2) \cap M \cap D] \Delta [(F_1 \Delta F_2) \cap M' \cap D] = 0$$

可以導出

$$(E_1 \cap D) \Delta (E_2 \cap D) \subset M \cap D \quad \text{和} \quad (F_1 \cap D) \Delta (F_2 \cap D) \subset M \cap D.)$$

(2f) 設 α 和 β 是非負實數滿足 $\alpha + \beta = 1$. 沿用(2c)中的記號, 並令

$$\tilde{\mu}((E \cap M) \Delta (F \cap M')) =$$

$$= \mu([(E \cap M) \Delta (F \cap M')] \cap D) + \alpha \mu(E \cap D) + \beta \mu(F \cap D),$$

則 $\tilde{\mu}$ 是 $\tilde{\mathbf{S}}$ 上的一個測度, 它在 \mathbf{S} 上與 μ 重合.

(3) 設 μ 是 σ -環 \mathcal{S} 上的 σ -有限測度, $\{M_1, \dots, M_n\}$ 是可傳 σ -環 $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ 中之集的有限類, $\tilde{\mathcal{S}}$ 是由類 $\mathcal{S} \cup \{M_1, \dots, M_n\}$ 產生的 σ -環, 則在 $\tilde{\mathcal{S}}$ 上可以定義一個測度 $\tilde{\mu}$ 它在 \mathcal{S} 上與 μ 重合. 對於 $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ 中之集的無限敘列 $\{M_n\}$, 類似的命題是否成立?

(4) 下面的例子可以幫助我們從直觀上理解不可測集; 事實上, 不可測集的一般性質都可以從這個例子里獲得說明. 設

$$X = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

是單位正方形. 對於區間 $[0, 1]$ 的每一個子集 E , 令

$$\hat{E} = \{(x, y) : x \in E, 0 \leq y \leq 1\} \subset X.$$

設 \mathcal{S} 是由一切形如 \hat{E} 的集組成的類, 其中 E 是勒貝格可測集. 定義 $\mu(\hat{E})$ 等於 E 的勒貝格測度. 集 $M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = \frac{1}{2}\}$ 就是一個不可測集: $\mu_*(M) = 0, \mu^*(M) = 1$.

(5) 設 μ^* 是定義在 X 的一切子集所成的類上的正則外測度, 使得 $\mu^*(X) = 1$. 並設 M 是 X 的一個子集使得 $\mu_*(M) = 0, \mu^*(M) = 1$ (參看定理 5 和 (4)). 如果令 $\nu^*(E) = \mu^*(E) + \mu^*(E \cap M)$, 則 ν^* 是一個外測度 (參看 10.5 和 10.7).

(5a) 集 E 是 ν^* -可測集的必要和充分條件是: 它是 μ^* -可測集 (參看 12.6).

(5b) 設 A 是一個給定的集, 則對於包含 A 的一切 ν^* -可測集 E , $\inf \nu^*(E) = 2\mu^*(A)$. (提示: 如果 E 是 ν^* -可測集, 則 $\mu^*(E \cap M) = \mu^*(E)$.)

(5c) 外測度 ν^* 並非正則的. (提示: 以 M 測驗正則性.)

第四章

可測函數

§17. 測度空間

設 X 是一個集， S 是由 X 的子集組成的一個 σ -環，滿足條件 $\bigcup S = X$ ，我們稱 X 和 S 是一個可測空間。通常可以用 X 表示可測空間，不致引起混淆；但有時對於可測空間中的 σ -環需要着重指出時，我們用記號 (X, S) 代替 X 。習慣上我們稱 X 的子集 E 為可測集當而且只當它屬於 σ -環 S 時。這樣的說法並不意味着，對於某一個外測度 μ^* 而言， S 是由全體 μ^* -可測集組成的 σ -環，甚至也並不表示在 S 上定義了一個測度或可以定義一個測度。

利用“可測集”這個術語，可測空間定義中的條件可以表達如下：全體可測集的併集就是整個空間；或者說，任意一個點必屬於某一個可測集。這一項限制的目的，就是要從空間中除去那些對於測度論無關緊要的点（或点集），從而可以免除無數次毫無必要的附加條件。

設 (X, S) 是一個可測空間， μ 是 S 上的一個測度，我們稱 (X, S) 和 μ 是一個測度空間；正如同對待可測空間一樣，我們也常以 X 表示測度空間。如果對於測度空間中的 σ -環及其上的測度需要着重指出時，我們用記號 (X, S, μ) 代替 X 。如果測度 μ 是[全]有限、 σ -有限或完全的，則分別稱測度空間 X 是[全]有限、 σ -有限或完全的。對於測度空間，此後我們將不加解釋地引用定義在可傳 σ -環 $H(S)$ 上由 μ 引出的外測度 μ^* 和（在 σ -有限的場合下）內

測度 μ_* .

上一章大部分的結果說明了如何可以使一个可測空間成为測度空間。在本节中，我們將指出关于可測空間和測度空間的一些一般的性質；在本章的其他各节以及以后的章节中，轉而討論定义在測度空間上的函数，从原来的測度空間形成新的測度空間的有用的方法，以及一些重要的特殊情形的理論。

首先，我們看出，測度空間 (X, \mathbf{S}, μ) 的可測子集 X_0 本身就可以看作一个測度空間 $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$ ，其中 \mathbf{S}_0 是 X_0 的一切可測子集所成的类，并且对于 $E \in \mathbf{S}_0, \mu_0(E) = \mu(E)$ 。反之，如果 X 的某个子集 X_0 是一个測度空間 $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$ ，則 X 可以作成一個測度空間 (X, \mathbf{S}, μ) ，其中 \mathbf{S} 是由 X 的一切这样的子集組成的类：每一个集与 X_0 的交集屬於 \mathbf{S}_0 ，并且，对于 $E \in \mathbf{S}, \mu(E) = \mu_0(E \cap X_0)$ 。（对于可測空間，完全類似的論点也成立。）即使当 X 本身已是一个測度空間时，上述的結構方式只要稍加修改也是很有用的。設 X_0 是 X 的一个可測子集，則在 X 的一切可測子集 E 所成的类上可以定义一个新的測度 $\mu_0: \mu_0(E) = \mu(E \cap X_0)$ ；容易驗証， (X, \mathbf{S}, μ_0) 是一个測度空間。

在上段的討論中，如果子集 X_0 不是一个可測集，我們可以得到甚么样的結論呢？为了回答这一个问题，我們引进一个新的概念。設 X_0 是測度空間 (X, \mathbf{S}, μ) 的子集，若对于每一个可測集 E 有 $\mu_*(E - X_0) = 0$ ，則称 X_0 是一个濃厚集。如果 X 本身是可測集，則 X_0 是濃厚集当而且只当 $\mu_*(X - X_0) = 0$ ；如果 μ 是全有限的，則 X_0 为濃厚集的必要和充分条件是： $\mu^*(X_0) = \mu(X)$ 。（濃厚集的例子可參看 §16 定理 5 和 16.4.）下面的定理是比前面的一些注解更为深刻的結論，它說明了測度空間的濃厚子集可以看作一个測度空間。

定理 1. 設 X_0 是測度空間 (X, \mathbf{S}, μ) 的濃厚子集。如果 $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S} \cap X_0$ ，并且对于 $E \in \mathbf{S}, \mu_0(E \cap X_0) = \mu(E)$ ，則 $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$ 是一个測

度空間。

證明。如果 E_1 和 E_2 是 S 中二集使得 $E_1 \cap X_0 = E_2 \cap X_0$, 則 $(E_1 \Delta E_2) \cap X_0 = 0$, 于是 $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$, 从而 $\mu(E_1) = \mu(E_2)$ 。換一句話說, μ_0 在 S_0 上的确是無歧义地确定的。

設 $\{F_n\}$ 是 S_0 中之集的不相交叙列, 并設 E_n 是 S 中的一个集使得

$$F_n = E_n \cap X_0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

如果令 $\tilde{E}_n = E_n - \bigcup \{E_i : 1 \leq i < n\}$, $n = 1, 2, \dots$, 則

$$(\tilde{E}_n \Delta E_n) \cap X_0 = (F_n - \bigcup \{F_i : 1 \leq i < n\}) \Delta F_n = F_n \Delta F_n = 0,$$

因此 $\mu(\tilde{E}_n \Delta E_n) = 0$, 从而

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(F_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tilde{E}_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n\right) = \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right). \end{aligned}$$

換一句話說, μ_0 是一个測度。 |

(1) 定理 1 的下述逆命題成立: 設 (X, S, μ) 是一个測度空間, X_0 是 X 的子集使当 $E_1 \cap X_0 = E_2 \cap X_0$ 有 $\mu(E_1) = \mu(E_2)$, 其中 E_1 和 E_2 是任意两个可測集, 則 X_0 是濃厚集。(提示: 若 $F \subset E - X_0$, 則

$$(E - F) \cap X_0 = E \cap X_0.)$$

(2) 在 σ -有限的場合下, 定理 1 可以借助于 16.2 中的結果获得証明。

(3) 下面的命題說明有限測度空間与全有限測度空間二者差別很小, 虽然初看起来后者是比較更为特殊的一种空間。在任意有限測度空間 (X, S, μ) 中存在濃厚可測集 X_0 。(提示: 令 $c = \sup\{\mu(E) : E \in S\}$ 。如果 $\{E_n\}$ 是可測集的一个叙列使得 $\lim_n \mu(E_n) = c$, 則可令 $X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 。容易看出: $\mu(X_0) = c$ 。) 这个結果使我們在許多应用的場合下, 可以假設一个有限測度空間是全有限的, 因为我們可以将 X 換为 X_0 , 而不致十分喪失普遍性。下面是一个例子, 說明有限測度空間可以不是全有限的。設 X 是数直綫, S 是由一切形如 $E \cup C$ 之集組成的类, 其中 E 是 $[0, 1]$ 的一个勒貝格可測子集, C 是可列集, 并設 μ 是 S 上的勒貝格測度。上述証明 X_0 存在的方法在測度論中常常会用到; 这种方法称为穷举法。

(4) 設 (X, \mathbf{S}, μ) 是完全, σ -有限測度空間, 則每一个 μ^* -可測集是可測的. 因此, 对于完全, σ -有限測度空間來說, 关于可測性的两个概念是等价的.

§18. 可測函数

設 f 是定义在集 X 上的实值函数, M 是数直綫的一个子集.

令

$$f^{-1}(M) = \{x: f(x) \in M\},$$

也就是說, $f^{-1}(M)$ 是 X 中一切这样的点所成的集: 这些点被 f 映入集 M 內. 我們称 $f^{-1}(M)$ 为集 M 对于 f 的原像. 例如, 設 f 是 X 的某个子集 E 的特征函数, 則 $f^{-1}(\{1\}) = E, f^{-1}(\{0\}) = E'$; 一般地, 如果 M 既不包含 0 也不包含 1, 包含 1 但不包含 0, 包含 0 但不包含 1, 或同时包含 0 和 1, 則分別有

$$f^{-1}(M) = \emptyset, E, E' \text{ 或 } X.$$

容易驗証, 对于任意的函数 f , 有

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(M_n), \\ f^{-1}(M - N) &= f^{-1}(M) - f^{-1}(N); \end{aligned}$$

換一句話說, 从数直綫的子集到 X 的子集間的映像 f^{-1} , 保持集的运算不变. 因此, 如果 \mathbf{E} 是数直綫上的一个集类 (例如一个环或 σ -环), 具有某种代数上的性質, 則 $f^{-1}(\mathbf{E})$ (即一切形如 $f^{-1}(M)$ 之集所成的类, 其中 $M \in \mathbf{E}$) 是具有同样代数性質的一个类. 在以下我們所特別感兴趣的将是这一种情形: 就是当 \mathbf{E} 是直綫上波雷耳集类的情形.

設 X 是一个集, 此外并假設有一个由 X 的子集組成的 σ -环 \mathbf{S} , 使得 (X, \mathbf{S}) 是一个可測空間. 对于 X 上的任意实值函数 f (并对于任意广义实值函数), 令

$$N(f) = \{x: f(x) \neq 0\}.$$

如果对于直綫上的任何波雷耳集 M , 实值函数 f 能使

$N(f) \cap f^{-1}(M)$ 为可測集, 則称 f 是一个可測函数.

和这个定义有关的, 我們必須作如下的一些說明. 首先, 必須着重指出, 实数值 0 在这个定义里所扮演的特殊角色. 我們选取 0 的理由, 乃是由于它在实数的加法群里是单位元素. 在下一章里, 我們將引进关于某些可測函数的积分的概念; 如果将积分法 (它在測度論中無疑地是最重要的一个概念) 看作加法的推广, 就必須以不同于其他实数的态度来对待 0 这个数.

設 f 是 X 上的可測函数, 如果令 M 为整个数直綫, 則 $N(f)$ 是一个可測集. 因此, 若 E 是 X 的可測子集, 而 M 是直綫上的一个波雷耳集, 則由等式

$$E \cap f^{-1}(M) = [E \cap N(f) \cap f^{-1}(M)] \cup [(E - N(f)) \cap f^{-1}(M)]$$

可知, $E \cap f^{-1}(M)$ 是可測集. (我們注意到, 在上式右端中, $(E - N(f)) \cap f^{-1}(M)$ 或者是空集, 或者等于 $E - N(f)$.) 換一句話說, 如果将“对于任何波雷耳集 M , 定义在可測集 E 上的实值函数 f 能使 $E \cap f^{-1}(M)$ 为可測集”作为“ f 在 E 上可測”的定义, 則我們已經証明了可測函数在任何可測集上是可測的. 特別, 如果空間 X 本身是一个可測集, 則 f 的可測性定义变为: 对于直綫上的任何波雷耳集 M , $f^{-1}(M)$ 是可測集. 換一句話說, 当 X 为可測集时, 可測函数就是这样一个函数: 它的逆映像将預先給定的一个 σ -环 (即直綫上波雷耳集的全体) 中的集映成預先給定的另一个 σ -环 (即 S) 中的集.

可測函数的概念显然与 σ -环 S 有关, 因此如果在同时要考虑到不止一个 σ -环的时候, 我們就說函数 f 对于 S 是可測的, 或者更簡單地說, f 是 (S) 可測的. 特別, 如果 X 是数直綫, S 是波雷耳集类, \bar{S} 是勒貝格可測集类, 則对于 S 是可測的函数称为波雷耳可測函数, 而对于 \bar{S} 是可測的函数則称为勒貝格可測函数.

下面的事实也必須着重地加以指出: 正如同在 §17 中所用到的关于集的可測性概念一样, 函数的可測性概念仅与預先給定的

σ -环 \mathbf{S} 有关, 而与預先給定的測度 μ 的数值無关。根据这样一个論点, 一个集或一个函数被命名为可測的, 这純粹只是集論里的概念, 而与測度論完全無关。

这种情况与近世拓扑空間理論中的情况有其类似之处。在拓扑空間論中, 某种集被称为开集, 某种函数被称为連續函数, 而与度量無关。度量之是否存在, 是一个有趣的問題, 但通常总是一个無关紧要的問題; 虽然度量这个术语可以用来定义开集和連續性。上述的类似性實質上比初看起来更为深刻: 讀者如果熟悉拓扑空間上連續函数的理論, 就会記得, 函数 f 是連續的, 必須而且只須, 对于变程(在我們現在的情形就是数直綫)中的任何开集 $M, f^{-1}(M)$ 属于預先給定的集类, 而这个集类中的集是被称为开集的。

对于广义实值函数, 我們也必須引进可測性的概念。为此目的, 我們只需約定, 将擴張的数直綫上的单点集 $\{-\infty\}$ 和 $\{\infty\}$ 列入波雷耳集类, 然后将实值函数的可測性定义逐字逐句地加以重复就行了。于是, 如果对于直綫上的任何波雷耳集 M , 广义实值函数 f 能使下列三个集

$$f^{-1}(\{-\infty\}), \quad f^{-1}(\{\infty\}) \quad \text{和} \quad N(f) \cap f^{-1}(M)$$

都是可測集, 則称 f 是一个可測函数。我們看出, 擴張的波雷耳集类不再是由半閉区間类产生的 σ -环了。

以下我們將極其詳尽地研究并試圖闡明可測函数的結構。首先我們有下面这个相当有用的定理。

定理 1. 可測空間 (X, \mathbf{S}) 上的实值函数 f 为可測函数的必要和充分条件是: 对于任何实数 $c, N(f) \cap \{x: f(x) < c\}$ 是可測集。

証明。設 $M = \{t: t < c\}$, 則 M 是一个波雷耳集, 并且 $f^{-1}(M) = \{x: f(x) < c\}$ 。因此, 条件显然是必要的。

現在我們証明条件是充分的。設对于任何实数 $c, N(f) \cap \{x: f(x) < c\}$ 是可測集。如果 c_1 和 c_2 是两个实数, $c_1 \leq c_2$, 則

$$\{x: f(x) < c_2\} - \{x: f(x) < c_1\} = \{x: c_1 \leq f(x) < c_2\}.$$

換一句話說, 对于任何半閉区間 $M=[c_1, c_2)$, $N(f) \cap f^{-1}(M)$ 可以表为两个可測集的差集, 因此它是可測的. 設 \mathbf{E} 是擴張的数直綫上一切这样的子集 M 組成的类; M 能使 $N(f) \cap f^{-1}(M)$ 为可測集. 因为 \mathbf{E} 是一个 σ -环, 并且它包含一切半閉区間, 因此它也包含一切波雷耳集. 定理于是証明完畢. **■**

(1) 在定理 1 中, 如果將 $<$ 換为 \leq 或 $>$ 或 \geq , 定理仍成立. (提示: 如果 $-\infty < c < \infty$, 則

$$\{x: f(x) \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) < c + \frac{1}{n}\}.)$$

(2) 在定理 1 中, 如果我們限制 c 属于处处稠密的一个实数集, 定理仍成立.

(3) 設 f 是一个可測函数, c 是一个实数, 則 cf 是可測函数.

(4) 設 E 是一个可測集, 則它的特征函数是一个可測函数. 逆命題是否成立?

(5) 非零的常数是可測函数, 必須而且只須 $X \in \mathbf{S}$.

(6) 設 X 是数直綫, f 是一个增函数, 則 f 是波雷耳可測的. 是否每一个連續函数都是波雷耳可測的?

(7) 設 X 是数直綫, E 是一个勒貝格不可測集; 并設

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \in E, \\ -x, & \text{当 } x \in E^c. \end{cases}$$

f 是不是勒貝格可測函数?

(8) 設 f 是可測函数, 則对于任何实数 c , $N(f) \cap \{x: f(x)=c\}$ 是可測集. 逆命題是否成立?

(9) 如果复值函数的实部与虚部都是可測的, 則称这个复值函数是可測函数. 复值函数 f 为可測的必要和充分条件是: 对于复平面上的任何开集 M , $N(f) \cap f^{-1}(M)$ 是可測集.

(10) 設 f 是可測空間 (X, \mathbf{S}) 上的实值函数. 对于任意的实数 t , 令 $B(t) = \{x: f(x) \leq t\}$. 則

$$(10a) \quad \text{当 } s < t \text{ 时, 必有 } B(s) \subset B(t),$$

$$(10b) \quad \bigcup_t B(t) = X, \quad \bigcap_t B(t) = \emptyset,$$

$$(10c) \quad \bigcap_{s < t} B(t) = B(s).$$

反之,如果 $\{B(t)\}$ 是由具有性質(10a), (10b)和(10c)之集組成的一個類,則存在唯一的有限實值函數 f 使得 $\{x: f(x) \leq t\} = B(t)$. (提示:令 $f(x) = \inf \{t: x \in B(t)\}$.)

(11) 設 (X, \mathbf{S}, μ) 是一個全有限測度空間, f 是 (X, \mathbf{S}, μ) 上的一個可測函數. 如果對於擴張的數直綫上的任何波雷耳集 M , 令 $\nu(M) = \mu(f^{-1}(M))$, 則 ν 是波雷耳集類上的一個測度. 設 g 是由等式 $g(t) = \mu(\{x: f(x) < t\})$ 確定的單實變量函數. 如果 f 是有限的, 則 g 具有下列性質: 它是單調增加的, 左連續的, 並且 $g(-\infty) = 0, g(\infty) = \mu(X)$; 我們稱 g 為 f 的分布函數. 如果 g 是連續的, 則由 g 引出的勒貝格-史蒂爾杰測度 μ_g (參看 15.9) 是 ν 的增補. 設 f 是可測集 E 的特征函數, 則 $\nu(M) = \chi_M(1)\mu(E) + \chi_M(0)\mu(E')$.

§19. 可測函數的運算

定理 1. 設 f 和 g 是可測空間 (X, \mathbf{S}) 上的廣義實值可測函數, c 是任意實數, 並設

$$A = \{x: f(x) < g(x) + c\},$$

$$B = \{x: f(x) \leq g(x) + c\},$$

$$C = \{x: f(x) = g(x) + c\}.$$

則 A, B, C 三者中的每一個與任何可測集的交集是可測集.

證明. 設 M 是全体有理數的集. 定理中關於 A 的結論可由等式

$$A = \bigcup_{r \in M} [\{x: f(x) < r\} \cap \{x: r - c < g(x)\}]$$

推出; 而關於 B 和 C 的結論則分別由等式

$$B = X - \{x: g(x) < f(x) - c\} \quad \text{和} \quad C = B - A$$

推出. |

定理 2. 設 ϕ 是定義在擴張的數直綫上的廣義實值波雷耳可測函數, 具有性質 $\phi(0) = 0$. 如果 X 是一個可測空間, f 是定義在 X 上的一個廣義實值可測函數, 則由等式 $\tilde{f}(x) = \phi(f(x))$ 確定的

函数 \tilde{f} 是定义在 X 上的可測函数。

証明。在这里直接运用可測函数的定义比利用 §18 中的必要充分条件更为方便。設 M 是扩張的数直綫上的任意波雷耳集, 則

$$\begin{aligned} N(\tilde{f}) \cap \tilde{f}^{-1}(M) &= \{x: \phi(f(x)) \in M - \{0\}\} = \\ &= \{x: f(x) \in \phi^{-1}(M - \{0\})\}. \end{aligned}$$

由于 $\phi(0) = 0$, 我們有

$$\phi^{-1}(M - \{0\}) = \phi^{-1}(M) - \{0\}.$$

因为 ϕ 是波雷耳可測的, 所以 $\phi^{-1}(M - \{0\})$ 是一个波雷耳集; 根据 f 的可測性就得到集

$$N(\tilde{f}) \cap \tilde{f}^{-1}(M) = N(f) \cap f^{-1}(\phi^{-1}(M - \{0\}))$$

的可測性。 |

容易驗証, 对于任意的实数 $\alpha > 0$, 由等式 $\phi(t) = |t|^\alpha$ 确定的, 定义在整个数直綫上的函数 ϕ 是波雷耳可測函数。因此, 如果函数 f 是可測的, 則 $|f|^\alpha$ 也是可測的。类似地, 可測函数的正整数乘幂以及(实)常数与可測函数的乘积都是可測函数。如果我們考虑两个或多个实变数的波雷耳可測函数, 則运用类似的論点可以証明, 两个可測函数的和与积都是可測函数。但是我們現在还没有建立多变数函数的波雷耳可測性概念, 所以我們暂时中止这方面的討論, 轉而直接証明和与积的可測性。

定理 3. 設 f 和 g 是可測空間 X 上的广义实值可測函数, 則 $f+g$ 和 fg 都是可測函数。

証明。如果在点 x 处, $f(x)$ 和 $g(x)$ 二数中至少有一为無限, 則只要考察几种可能的情形, 就可以知道, $f(x) + g(x)$ 和 $f(x)g(x)$ 的意义是很容易了解的。因此, 我們可以只考虑有限值的函数(順便提醒一下, 如果 $f(x) = \pm\infty$ 而 $g(x) = \mp\infty$, 則 $f(x) + g(x)$ 沒有意义)。

当 f 和 g 为有限时, 对于任意的实数 c , 我們有

$$\{x: f(x) + g(x) < c\} = \{x: f(x) < c - g(x)\}.$$

在定理 1 中以 $-g$ 代 g , 即得 $f+g$ 的可測性. fg 的可測性可由恒等式

$$fg = \frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2]$$

得出.

当 f 和 g 为有限时, 我們有

$$f \cup g = \frac{1}{2} (f+g + |f-g|)$$

和

$$f \cap g = \frac{1}{2} (f+g - |f-g|);$$

因此, 根据定理 2 和定理 3, 由 f 和 g 的可測性可以推出 $f \cup g$ 和 $f \cap g$ 的可測性. 如果对于任意的广义实值函数 f , 令

$$f^+ = f \cup 0 \quad \text{和} \quad f^- = -(f \cap 0),$$

則有

$$f = f^+ - f^- \quad \text{和} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

函数 f^+ 和 f^- 分别称为函数 f 的**正部**和**負部**. 根据上面的討論可知, 可測函数的正部和負部都是可測的; 反之, 如果一个函数的正部和負部都是可測的, 則这个函数本身也是可測的.

(1) 設 f 是一个函数, 如果 $|f|$ 是可測的, 則 f 是否一定可測?

(2) 如果 X 是可測集, 則在定理 2 中即使將 $\phi(0)=0$ 这个条件除去, 定理仍成立; 換一句話說, 在这种場合下, 可測函数的波雷耳可測函数是一个可測函数.

(3) 即使当 X 是可測集时, 可測函数的勒貝格可測函数也不一定是可測函数. 下面一系列叙述的目的, 就在于証明上述的命題. 我們將給出一个勒貝格可測的实变数函数 $\phi(y)$, 以及一个連續并且遞增(在严格意义下)的函数 $f(x)$, 其中 x 是实变数, $0 \leq x \leq 1$, 使得 $\tilde{f}(x) = \phi(f(x))$ 是勒貝格不可測的.

設 $X = [0, 1]$. 对于每一个 $x \in X$, 令

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i} = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots,$$

其中 $\alpha_i = 0, 1$ 或 $2, i = 1, 2, \dots$. 如果 C 是在 15.5 中所定义的康脫集, 則当 $x \in C$, 有 $\alpha_i = 0$ 或 $2, i = 1, 2, \dots$. 設 $n = n(x)$ 是使得 $\alpha_n = 1$ 的第一个指标; 如果这样的 n 不存在, 也就是說, 如果 $x \in C$, 則令 $n(x) = \infty$. 現在定义函数 ψ 如下:

$$\psi(x) = \sum_{1 \leq i < n} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^n}.$$

(函数 ψ 有时称为康脫函数.)

(3a) 如果 $0 \leq x \leq y \leq 1$, 則

$$0 = \psi(0) \leq \psi(x) \leq \psi(y) \leq \psi(1) = 1.$$

(提示: 如果 $x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots \leq y = 0.\beta_1\beta_2\beta_3\cdots$, 并設对于 $1 \leq i < j$ 有 $\alpha_i = \beta_i$, 則 $\alpha_j \leq \beta_j$.)

(3b) 函数 ψ 是連續的. (提示: 如果 $x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots, y = 0.\beta_1\beta_2\beta_3\cdots$, 并設对于 $1 \leq i < j$ 有 $\alpha_i = \beta_i$, 則

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq \frac{1}{2^{j-1}}.)$$

(3c) 对于每一个 $x \in X$, 存在唯一的一个数 $y, 0 \leq y \leq 1$, 使得 $x = \frac{1}{2}(y + \psi(y))$; 这个方程确定了 y 是 x 的一个函数, 記为 $y = f(x)$. f 是定义在 X 上的連續函数, 并且它是在严格意义下遞增的. (提示: $\frac{1}{2}(y + \psi(y))$ 是連續的, 并且是在严格意义下遞增的.)

(3d) 集 $f^{-1}(C)$ 是勒貝格可測集, 并具有正的測度. (提示: 集

$$\psi(X - C) = \{\psi(y) : y \in X - C\}$$

是可列集, 因此它的測度为零; 由此可知

$$\mu(f^{-1}(X - C)) = \frac{1}{2}.)$$

(3e) 存在勒貝格可測集 $M, M \subset \{y : 0 \leq y \leq 1\}$, 使得 $f^{-1}(M)$ 是勒貝格不可測集. (提示: 根据 §16 定理 5, $f^{-1}(C)$ 包含一个不可測子集. 我們記得, 如果一个集的勒貝格測度是零, 則它的每一个子集都是勒貝格可測集.)

(3f) 設 M 是 (3e) 中所述的集, ϕ 是 M 的特征函数. 如果

$\tilde{f}(x) = \phi(f(x))$, 則 ϕ 是勒貝格可測的, 而 \tilde{f} 則不是.

(4) 在 (3e) 中所述的集 M 是一个非波雷耳集的勒貝格可測集的例子 (參看 15.6).

§20. 可測函数列

定理 1. 設 $\{f_n\}$ 是可測空間 X 上的广义实值可測函数列, 則由等式

$$h(x) = \sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \dots\},$$

$$g(x) = \inf\{f_n(x) : n = 1, 2, \dots\},$$

$$f^*(x) = \limsup_n f_n(x),$$

$$f_*(x) = \liminf_n f_n(x)$$

确定的函数 h, g, f^* 和 f_* 都是可測函数.

証明. 很容易将一般情形化为有限值函数的情形. g 的可測性可由等式

$$\{x : g(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) < c\}$$

推出. h 的可測性則可由关系式

$$h(x) = -\inf\{-f_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$$

推出. 由关系式

$$f^*(x) = \inf_{n \geq 1} \sup_{m \geq n} f_m(x)$$

和

$$f_*(x) = \sup_{n \geq 1} \inf_{m \geq n} f_m(x)$$

分別得出 f^* 和 f_* 的可測性. \blacksquare

由定理 1 可知, 可測函数列 $\{f_n\}$ 的收斂点集, 即集

$$\{x : \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x)\},$$

与任何可測集的交集是可測集. 从而可知, 由等式 $f(x) = \lim_n f_n(x)$ 确定的, 定义在使 $\lim_n f_n(x)$ 存在的一切点 x 之集上的函数 f 是一个可測函数.

下述简单函数的概念是可測函数論中極為有用的概念。設 X 是一个可測空間, 如果 f 是定义在 X 上具有下列性質的函数: 存在可測集的不相交有限类 $\{E_1, \dots, E_n\}$ 以及实数有限集 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 使得

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{当 } x \in E_i, \quad i=1, \dots, n, \\ 0, & \text{当 } x \in E_1 \cup \dots \cup E_n, \end{cases}$$

則称 f 为简单函数(我們着重指出, 简单函数所取的值只限于有限实数, 这个事实在以下的討論中是很重要的)。換一句話說, 简单函数是这样的一个函数: 它只取得有限个异于零的值, 每一个值是在一个可測集上取得的。

可測集 E 的特征函数 χ_E 是简单函数最简单的例子。不难驗証, 每一个简单函数是可測的; 事实上, 对于上述的简单函数 f , 我們有

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}(x).$$

两个简单函数的乘积以及有限个简单函数的綫性組合仍为简单函数。

定理 2. 每一个广义实值可測函数 f 可以表为一个简单函数列 $\{f_n\}$ 的極限; 如果 f 是非負的, 則每一个 f_n 可以取为非負的, 并且可取 $\{f_n\}$ 为增叙列。

証明。首先假定 $f \geq 0$ 。对于每一个 $n=1, 2, \dots$, 并对于每一个 $x \in X$, 令

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n}, & \text{若 } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}, \quad i=1, 2, \dots, 2^n, \\ n, & \text{若 } f(x) \geq n. \end{cases}$$

显然, f_n 是非負的简单函数, 并且函数列 $\{f_n\}$ 是遞增的。如果 $f(x) < \infty$, 則对于任意的 n , 有

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n};$$

如果 $f(x) = \infty$, 則对于任意的 n , 有 $f_n(x) = n$. 这就证明了定理的后半部. 将这个結果分別运用到函数 f^+ 和 f^- 上 (并由于两个简单函数的差仍为简单函数), 就得到定理前半部的証明. ▮

(1) 在本节和上节中引进的全部概念以及由此获得的全部結論 (当然要除去有关实数次序性質的一些命題) 都可以推广到复值函数的場合.

(2) 在定理 2 中, 如果函数 f 是有界的, 則可以选择 $\{f_n\}$ 使它一致收敛到 f .

(3) 在简单函数的定义中, 如果允許有可列無限多个集 E_i 以及可列無限多个对应的实数 a_i , 我們就得到初等函数的概念. 每一个实值可測函数 f 可以表为一个一致收敛的初等函数列的極限.

§21. 几乎处处收敛性

在以上三节中, 我們建立了可測函数的一些理論, 这些理論的建立, 尽可能地避免用到測度的概念. 从現在起, 我們將假定所考虑的空間 X 是一个測度空間 (X, S, μ) .

設有一个命題, 如果在測度空間中除去一个測度为零的可測集外, 命題对于任何其他的点都成立, 則称命題在几乎所有的点成立, 或称命題几乎处处成立. 例如, 若存在实数 c 使得 $\{x: f(x) \neq c\}$ 是一个測度为零的集, 我們就說函数 f 几乎处处是常数. 如果函数 f 几乎处处是有界的, 也就是說, 如果存在正的常数 c 使得 $\{x: |f(x)| > c\}$ 是一个測度为零的集, 則称 f 是本性有界的. 滿足上述条件的数 c , 它們的下确界称为 $|f|$ 的本性上确界, 記为

$$\text{ess sup } |f|.$$

設 $\{f_n\}$ 是一个广义实值函数列, 它在測度空間 X 上几乎处处收敛到一个極限函数 f . 这就是說, 存在測度为零的集 E_0 (E_0 也可能是空集), 对于每一个 $x \in E_0$ 并对于每一个 $\varepsilon > 0$, 可以找到一个整数 $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$, 使当 $n \geq n_0$, 有

$$f_n(x) < -\frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{若 } f(x) = -\infty,$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{若 } -\infty < f(x) < \infty,$$

$$f_n(x) > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{若 } f(x) = \infty.$$

設 $\{f_n\}$ 是一個實值函數列，如果存在測度為零的集 E_0 ，對於每一個 $x \in E_0$ 並對於每一個 $\varepsilon > 0$ ，可以找到一個整數 $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$ 使當 $n \geq n_0, m \geq n_0$ ，有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

則稱 $\{f_n\}$ 是幾乎處處基本的。

顯然，如果一個函數列幾乎處處收斂到一個有限值極限函數，則這個函數列是幾乎處處基本的；反之，每一個幾乎處處基本的函數列必定幾乎處處收斂到一個有限值極限函數。如果函數列幾乎處處收斂到 f ，同時也幾乎處處收斂到 g ，則幾乎處處有 $f(x) = g(x)$ ；也就是說，在精確到一個測度為零的集的程度內，極限函數是唯一確定的。

今後我們將涉及幾個不同種類的收斂性概念，在每一種情形我們總是採用與上面所述完全類似的術語。因此，如果我們對於 $\{f_n\}$ 趨向極限 f 引進一種新的收斂性定義：“對於大的 n ， f_n 按照某種指定的意義接近於 f ”，則今後我們將不加解釋地引用下述概念：在這種新的意義下， $\{f_n\}$ 是基本的，即“對於大的 n 和 m ，差 $f_n - f_m$ 按照指定的意義接近於 0”。

作為實值函數列新的收斂性概念的一個例子，我們首先引進幾乎處處一致收斂的概念。設 $\{f_n\}$ 是一個實值函數列，如果存在測度為零的集 E_0 ，對於每一個 $\varepsilon > 0$ ，可以找到一個整數 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ，使當 $n \geq n_0, x \in E_0$ ，有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

則稱 $\{f_n\}$ 幾乎處處一致收斂到 f ；換一句話說，就是函數列在集 $X - E_0$ 上一致收斂到 f （在通常的意義下）。不難驗證，一個敘列幾乎處處一致收斂到一個極限函數當而且只當這個敘列是幾乎處處

一致基本的。

下面的定理称为叶果洛夫定理。这个定理建立了几乎处处收敛性与一致收敛性之間極為有趣并且有用的联系。

定理 1. 設 E 是具有有限测度的可测集, $\{f_n\}$ 是几乎处处有限的可测函数列, $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛到有限值可测函数 f , 則对于每一个 $\varepsilon > 0$, 存在 E 的可测子集 F 使得 $\mu(F) < \varepsilon$ 并使得 $\{f_n\}$ 在 $E - F$ 上一致收敛到 f 。

証明。如果有必要, 可以从 E 中除去一个测度为零的集, 因此我們可以假定 $\{f_n\}$ 在 E 上处处收敛到 f 。令

$$E_n^m = \bigcap_{i=n}^{\infty} \left\{ x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\},$$

則

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \dots,$$

又因 $\{f_n\}$ 在 E 上收敛到 f , 所以对于每一个 $m = 1, 2, \dots$, 有

$$\lim_n E_n^m \supset E.$$

于是 $\lim_n \mu(E - E_n^m) = 0$, 从而存在正整数 $n_0 = n_0(m)$ 使得

$$\mu(E - E_{n_0(m)}^m) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

(n_0 当然与 ε 有关, 但在整个証明过程中 ε 保持不变。) 如果

$$F = \bigcup_{m=1}^{\infty} (E - E_{n_0(m)}^m),$$

則 F 是一个可测集, $F \subset E$, 并且

$$\mu(F) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E - E_{n_0(m)}^m)\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E - E_{n_0(m)}^m) < \varepsilon.$$

如果 $x \in E - F = E \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m$, 則 $x \in E_n^m$, 其中 $n \geq n_0(m)$ 。因此, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$ 。这就証明了 $\{f_n\}$ 在 $E - F$ 上是一致收敛的。 |

由于叶果洛夫定理的啓發, 我們現在引进下述概念。設 $\{f_n\}$ 是一个几乎处处有限的可测函数列, 如果对于每一个 $\varepsilon > 0$, 存在一

个可測集 F 使得 $\mu(F) < \varepsilon$ 并使得 $\{f_n\}$ 在 F' 上一致收斂到一个有限值可測函數 f , 則称 $\{f_n\}$ 几乎一致收斂到 f . 按照这种說法, 叶果洛夫定理可以表述如下: 在一个具有有限測度的集上, 由几乎处处收斂性可以推出几乎一致收斂性. 下面是逆方向的定理.

定理 2. 設可測函數列 $\{f_n\}$ 几乎一致收斂到 f , 則 $\{f_n\}$ 几乎处处收斂到 f .

証明. 設 F_n 是一个可測集使得 $\mu(F_n) < \frac{1}{n}$ 并使得 $\{f_n\}$ 在 F_n' 上一致收斂到 f , $n=1, 2, \dots$. 令 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 則有

$$\mu(F) \leq \mu(F_n) < \frac{1}{n},$$

从而有 $\mu(F) = 0$; 于是, 对于 $x \in F'$, $\{f_n(x)\}$ 显然收斂到 $f(x)$. ■

我們注意到, “几乎一致收斂”是一个不很正确的(但可惜却是标准的)名称, 因为它很容易和“几乎处处一致收斂”相混. 也許类似“近于一致收斂”的名称比較更能表达出事实的真相; 然而事已如此, 我們必須对几乎一致收斂与几乎处处一致收斂这两个名称留心加以区别.

(1) 設 f 是直綫上的实值勒貝格可測函數, 則存在波雷耳可測函數 g 使得几乎处处有 $f(x) = g(x)$. (提示: 对于每一个有理数 r , 令 $E_r = \{x: f(x) < r\}$, 然后利用 §13 定理 2 将 E_r 表为 $F_r \Delta N_r$ 的形状, 其中 F_r 是一个波雷耳集, N_r 是測度为零的集. 設 N 是測度为零的波雷耳集, $N \supset \bigcup_r N_r$, 定义 g 如下:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \in N, \\ f(x), & \text{当 } x \in N'. \end{cases}$$

参看 18.2.)

(2) 設 E 是具有正的有限測度的可測集, $\{f_n\}$ 是一个几乎处处有限的可測函數列, 并且它是几乎处处基本的, 則存在正的常数 c , 并存在 E 的可測子集 F , 具有正的測度, 使得对于每一个 $n=1, 2, \dots$, 并对于每一个 $x \in F$, 有 $|f_n(x)| \leq c$.

(3) 設 E 是具有 σ -有限測度的可測集, $\{f_n\}$ 是一个几乎处处有限的可

測函数列, 并且它在 E 上几乎处处收敛到一个实值可测函数 f , 则存在可测集的叙列 $\{E_i\}$ 使得 $\mu(E - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0$, 并使得 $\{f_n\}$ 在每一个 E_i 上是一致收敛的, $i=1, 2, \dots$. (提示: 只须在 $\mu(E) < \infty$ 的场合下证明这个命题. 应用叶果洛夫定理, 选取 E 使得

$$\mu(E - \bigcup_{i=1}^n E_i) < \frac{1}{n}$$

并使得 $\{f_n\}$ 在 E_i 上一致收敛.)

(4) 设 X 是正整数集, S 是 X 的一切子集所成的类. 对于 $E \in S$, 令 $\mu(E)$ 为 E 中之点的个数. 如果 χ_n 是集 $\{1, \dots, n\}$ 的特征函数, 则 $\{\chi_n\}$ 处处收敛到 1, 但它不是几乎一致基本的. 由此可见, 如果 E 的测度不是有限的, 则叶果洛夫定理不成立.

(5) 对于每一个本性有界函数 f , 令 $\|f\| = \text{ess sup}|f|$. 设 $\{f_n\}$ 是一个本性有界可测函数列, 则 $\{f_n\}$ 几乎处处一致收敛到 f 当而且只当 $\lim_n \|f_n - f\| = 0$.

(6) 对于(5)中所述的范数 $\|f\|$ 来说, 由一切本性有界可测函数组成的集 \mathfrak{M} 是不是一个巴拿赫空间?

§22. 依测度收敛性

和上节一样, 在本节中, 我们假定所考虑的是一个固定的测度空间 (X, S, μ) .

定理 1. 设 E 是具有有限测度的集, f 和 f_n 是 E 上的实值可测函数, $n=1, 2, \dots$. 对于每一个 $\varepsilon > 0$, 令

$$E_n(\varepsilon) = \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, \quad n=1, 2, \dots.$$

$\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛到 f 的必要和充分条件是: 对于每一个 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_n \mu(E \cap \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)) = 0.$$

证明. 根据收敛的定义, 实数列 $\{f_n(x)\}$ 不收敛到 $f(x)$ 的必要和充分条件是: 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于 n 的无限多个值有 $x \in E_n(\varepsilon)$. 换一句话说, 如果 D 是使得 $\{f_n(x)\}$ 不收敛到 $f(x)$ 的点 x 所成的集, 则

$$D = \bigcup_{\varepsilon > 0} \limsup_n E_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \limsup_n E_n\left(\frac{1}{k}\right).$$

因此, $\mu(E \cap D) = 0$ (即 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛到 f) 的必要和充分条件是: 对于每一个 $\varepsilon > 0$, $\mu(E \cap \limsup_n E_n(\varepsilon)) = 0$. 由关系式

$$\begin{aligned} \mu(E \cap \limsup_n E_n(\varepsilon)) &= \mu(E \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)) = \\ &= \lim_n \mu(E \cap \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)) \end{aligned}$$

即得定理的結論。 |

为了研究定理 1 中条件变弱时所产生的結果, 現在我們再引进一种很有用的收敛性定义. 設 $\{f_n\}$ 是一个几乎处处有限的可測函数列, f 是一个可測函数, 如果对于每一个 $\varepsilon > 0$, 有 $\lim_n \mu(\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$, 則称 $\{f_n\}$ 依测度收敛到 f . 按照我們在 §21 中所作的关于术语的注解, 一个几乎处处有限的可測函数列 $\{f_n\}$ 称为依测度基本的, 如果对于每一个 $\varepsilon > 0$, 当 n 和 $m \rightarrow \infty$, 有

$$\mu(\{x: |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0.$$

由定理 1 可知, 如果有限值可測函数列在一个具有有限测度的集 E 上几乎处处收敛到一个有限值極限函数 [或几乎处处基本], 則这个函数列在 E 上是依测度收敛的 [或依测度基本]. 現在証明下面的定理, 其中我們对于集 E 并不要求它具有有限测度.

定理 2. 由几乎一致收敛性可以推出依测度收敛性.

証明. 如果 $\{f_n\}$ 几乎一致收敛到 f , 則对于任意正数 ε 和 δ , 存在可測集 F 使得 $\mu(F) < \delta$, 并使得当 $x \in F'$ 而 n 充分大时有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. |

定理 3. 如果 $\{f_n\}$ 依测度收敛到 f , 則 $\{f_n\}$ 是依测度基本的. 如果 $\{f_n\}$ 同时也依测度收敛到 g , 則几乎处处有 $f = g$.

証明. 定理的前半部可由关系式

$$\begin{aligned} &\{x: |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} \subset \\ &\subset \left\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x: |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \end{aligned}$$

推出。現在證明定理的后半部。我們看出，

$$\begin{aligned} & \{x: |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subset \\ & \subset \left\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x: |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \end{aligned}$$

只要适当地選擇 n ，上式右端两个集的測度都可以为任意小，因此，对于每一个 $\varepsilon > 0$ ，我們有

$$\mu(\{x: |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

由此可見， $f = g$ 几乎处处成立。 ▮

除了上述比較簡單的性質外，我們再介紹关于依測度收斂性的两个稍为深刻的性質。

定理 4. 如果可測函数列 $\{f_n\}$ 是依測度基本的，則 $\{f_n\}$ 包含一个几乎一致收斂的子叙列 $\{f_{n_k}\}$ 。

證明。对于任意正整数 k ，我們可以找到一個整数 $\bar{n}(k)$ 使当 $n \geq \bar{n}(k), m \geq \bar{n}(k)$ ，有

$$\mu\left(\left\{x: |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k}.$$

令

$$n_1 = \bar{n}(1), n_2 = (n_1 + 1) \cup \bar{n}(2), n_3 = (n_2 + 1) \cup \bar{n}(3), \dots;$$

則 $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ，因此 $\{f_{n_k}\}$ 是 $\{f_n\}$ 的一个無限子叙列。如果

$$E_k = \left\{x: |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\},$$

并且 $k \leq i \leq j$ ，則对于每一个 $x \in E_k \cup E_{k+1} \cup E_{k+2} \cup \dots$ ，我們有

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \sum_{m=i}^{\infty} |f_{n_m}(x) - f_{n_{m+1}}(x)| < \frac{1}{2^{i-1}}.$$

因此， $\{f_{n_i}\}$ 在 $X - (E_k \cup E_{k+1} \cup \dots)$ 上是一致基本的。又因

$$\mu(E_k \cup E_{k+1} \cup \dots) \leq \sum_{m=k}^{\infty} \mu(E_m) < \frac{1}{2^{k-1}},$$

定理于是證明完畢。

定理 5. 如果可測函数列 $\{f_n\}$ 是依測度基本的, 則存在可測函数 f 使得 $\{f_n\}$ 依測度收斂到 f .

証明. 根据定理 4, 存在几乎一致基本的子叙列 $\{f_{n_k}\}$, 因而 $\{f_{n_k}\}$ 也是几乎处处基本的. 对于每一个使 $\lim_k f_{n_k}(x)$ 存在的 x , 令 $f(x) = \lim_k f_{n_k}(x)$. 对于每一个 $\varepsilon > 0$, 我們有

$$\begin{aligned} & \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \\ & \subset \left\{x: |f_n(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \end{aligned}$$

按照假定, 当 n 和 n_k 充分大时, 上式右端第一个集的測度可以为任意小; 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 第二个集的測度也趋向 0, 因为由几乎一致收斂性可以推出依測度收斂性. \blacksquare

(1) 設測度空間 (X, \mathcal{S}, μ) 是全有限的, 并設有限值可測函数列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 分別依測度收斂到 f 和 g .

(1a) 如果 α 和 β 是实的常数, 則 $\{\alpha f_n + \beta g_n\}$ 依測度收斂到 $\alpha f + \beta g$; $\{|f_n|\}$ 依測度收斂到 $|f|$.

(1b) 如果 $f=0$ 几乎处处成立, 則 $\{f_n^2\}$ 依測度收斂到 f^2 .

(1c) 函数列 $\{f_n g\}$ 依測度收斂到 $f g$. (提示: 对于給定的正数 δ , 存在常数 c 使得 $\mu(X-E) < \delta$, 其中 $E = \{x: |g(x)| \leq c\}$; 在 E 和 $X-E$ 上分別考察 $\{f_n g\}$ 的依測度收斂性.)

(1d) 函数列 $\{f_n^2\}$ 依測度收斂到 f^2 . (提示: 对 $\{f_n - f\}$ 应用 (1b).)

(1e) 函数列 $\{f_n g_n\}$ 依測度收斂到 $f g$. (提示: 用和与平方表出乘积.)

(1f) 如果測度空間不是全有限的, 命題 (1a) - (1e) 是否成立?

(2) 依測度基本叙列的每一个子叙列是依測度基本的.

(3) 設可測函数列 $\{f_n\}$ 是依測度基本的, $\{f_{n_i}\}$ 和 $\{f_{m_j}\}$ 是兩個子叙列, $\{f_{n_i}\}$ 几乎处处收斂到極限函数 f , $\{f_{m_j}\}$ 几乎处处收斂到極限函数 g , 則几乎处处有 $f=g$.

(4) 設 X 是正整数集, \mathcal{S} 是 X 的一切子集所成的类. 对于 $E \in \mathcal{S}$, 令 $\mu(E)$ 为 E 中之点的个数. 則对于測度空間 (X, \mathcal{S}, μ) 来說, 依測度收斂性与处处一致收斂性是等价的.

(5) 在一个測度为無限的集上, 由几乎处处收斂性是否可以推出依測度

收斂性? (參看 21.4 和(4).)

(6) 設測度空間 X 是具有勒貝格測度的單位閉區間. 設

$$E_n^i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right], \quad n=1, 2, \dots, \quad i=1, \dots, n,$$

并設 χ_n^i 是 E_n^i 的特征函數, 則叙列 $\{\chi_1^1, \chi_2^1, \chi_2^2, \chi_3^1, \chi_3^2, \chi_3^3, \dots\}$ 依測度收斂到 0, 但它在 X 中任何點都不是收斂的.

(7) 設 $\{E_n\}$ 是一個可測集叙列, χ_n 是 E_n 的特征函數, $n=1, 2, \dots$. 叙列 $\{\chi_n\}$ 為依測度基本的必要和充分條件是: 當 n 和 $m \rightarrow \infty$ 時, $\rho(E_n, E_m) \rightarrow 0$. (ρ 的定義見 9.4.)

第五章 积 分

§23. 可积简单函数

設 $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ 是定义在测度空间 (X, \mathbf{S}, μ) 上的简单函数, 如果对于使 $\alpha_i \neq 0$ 的每一个指标 i 有 $\mu(E_i) < \infty$, 則称 f 是可积的. 我們称和数¹⁾

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i)$$

为 f 的积分, 用記号

$$\int f(x) d\mu(x) \quad \text{或} \quad \int f d\mu$$

表示. 如果 f 同时也等于 $\sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{F_j}$, 則由 μ 的可加性, $\int f d\mu =$

$\sum_{j=1}^m \beta_j \mu(F_j)$; 这就是說, 积分的值与 f 的表示方式無关, 因而是唯一确定的. 我們看出, 可积简单函数的绝对值, 任意常数与可积简单函数的乘积, 以及两个可积简单函数的和都是可积简单函数.

設 E 是一个可測集, f 是一个可积简单函数, 則很容易看出, 函数 $\chi_E f$ 也是一个可积简单函数; 我們定义 f 在 E 上的积分如下:

$$\int_E f d\mu = \int \chi_E f d\mu.$$

1) 如果 $\alpha_{i_0} = 0$ 而 $\mu(E_{i_0}) = \infty$, 則按照 §0 中所作的約定, $\alpha_{i_0} \mu(E_{i_0}) = 0$.

可积简单函数最简单的例子就是测度为有限的可测集 E 的特征函数；我們有 $\int \chi_E d\mu = \int_E d\mu = \mu(E)$ 。

以后我們将在比可积简单函数类更为广泛的函数类上定义可积性与积分的概念。一些有用的定义以及許多重要定理的叙述（但不是証明），都仅只依赖于我們已經提到的积分学最简单的性质。为了避免不必要的重复，我們在本节中将“简单函数”一概簡称为“函数”。这样一来，对于以后我們將要考虑的更为广泛的函数类，本节中所有的定理都将有意义。当然，在本节中，定理的証明都是对简单函数而言；对于較广泛的函数类，定理的証明将在以后补出。

下述定理 1 和定理 2 我們不加証明；这两个定理都可以直接由定义得出，而在定理 1 的情形，则需要一些十分简单的計算。

定理 1. 設 f 和 g 是可积函数， α 和 β 是实数，則

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

定理 2. 設 f 是几乎处处非負的可积函数，則

$$\int f d\mu \geq 0.$$

定理 3. 設 f 和 g 是可积函数，并且几乎处处有 $f \geq g$ ，則

$$\int f d\mu \geq \int g d\mu.$$

証明。对 $f-g$ 应用定理 2，并在定理 1 中令 $\alpha=1, \beta=-1$ 。 |

定理 4. 設 f 和 g 是可积函数，則

$$\int |f+g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu.$$

証明。在定理 3 中，将 f 換为 $|f|+|g|$ ， g 換为 $|f+g|$ 。 |

定理 5. 設 f 是可积函数，則

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

証明。首先对 $|f|$ 和 f ，然后对 $|f|$ 和 $-f$ 应用定理 3。 |

定理 6. 設 f 是可积函数, α 和 β 是实数, E 是一个可测集, 并且对于 E 中每一个 x 有 $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, 則

$$\alpha \mu(E) \leq \int_E f du \leq \beta \mu(E).$$

証明. 定理中主要的假設条件可以表为 $\alpha \chi_E \leq f \chi_E \leq \beta \chi_E$, 因此在 $\mu(E) < \infty$ 的場合下定理的結論可由定理 3 得出. 如果 $\mu(E) = \infty$, 可以直接应用可积性的定义. |

設 f 是一个可积函数, 对于每一个可测集 E , 令

$$v(E) = \int_E f du.$$

則集函数 v 称为 f 的**不定积分**.

定理 7. 設 f 是几乎处处非負的可积函数, 則 f 的不定积分是單調的.

証明. 如果 E 和 F 是两个可测集并且 $E \subset F$, 則几乎处处有 $\chi_E f \leq \chi_F f$, 利用定理 3 就得到本定理的結論. |

設 v 是定义在测度空間 (X, S, μ) 中全体可测集类上的有限值集函数. 如果对于每一个正数 ε , 存在正数 δ , 使得对于每一个滿足关系式 $\mu(E) < \delta$ 的可测集 E 有 $|v(E)| < \varepsilon$, 則称 v 是**絕對連續**的.

定理 8. 可积函数的不定积分是絕對連續的.

証明. 如果 c 是大于 $|f|$ 的一切值的任意正数, 則对于每一个可测集 E , 我們有

$$\left| \int_E f du \right| \leq c \mu(E). \quad |$$

定理 9. 可积函数的不定积分具有可列可加性.

証明. 如果 f 是测度为有限的可测集 E 的特征函数, 則 f 的不定积分的可列可加性問題就是 μ 在 E 的全体可测子集类上的可列可加性問題. 如果 f 是任意的可积简单函数, 則 f 可以表为有限个特征函数的綫性組合, 定理于是得証. |

設 f 和 g 是可积函数，我們定义 f 和 g 之間的距离 $\rho(f, g)$ 如下：

$$\rho(f, g) = \int |f - g| d\mu.$$

“距离”这个名称对于函数 ρ 來說，除去一个性質以外，在其他各方面都是名符其实的。下面这些性質显然成立：

$$\rho(f, f) = 0, \quad \rho(f, g) = \rho(g, f), \quad \rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g).$$

但当 $\rho(f, g) = 0$ 时却不一定有 $f = g$ 。例如，当两个可积函数几乎处处相等时，它們之間的距离就可以为零。这种現象我們在下面还要詳細地加以討論。

(1) 如果两个簡單函数中有一个是可积的，則它們的乘积也是可积的。

(2) 設 E 和 F 是具有有限測度的可測集，則 $\rho(\chi_E, \chi_F) = \mu(E \Delta F)$ (參看 9.4 和 22.7)。

(3) 設 (X, S, μ) 是具有勒貝格測度的单位閉区間。对于 X 中任意一个固定的点 x_0 ，令 $\nu(E) = \chi_E(x_0)$ 。集函数 ν 是不是絕對連續的？

(4) 設 ν 是定义在測度空間 (X, S, μ) 中全体可測集类上的絕對連續集函数，則对于每一个滿足关系式 $\mu(E) = 0$ 的可測集 E ，有 $\nu(E) = 0$ 。

(5) 設 X 是由有限个点組成的全有限測度空間，則定义在 X 上的任何实值可測函数是可积簡單函数；对于这种函数來說，积分的一切性質都化为有限和的性質。

§24. 可积簡單函数列

在本节中，我們仍假定所考虑的是一个固定的測度空間 (X, S, μ) ，并且繼續將“簡單函数”簡称为“函数”。因为在本节中所用的全部方法（只有一个例外，就是定理 4 的証明中最后一部分）都建立在上节的結論上，所以当我们以后轉入一般可积函数的討論时，本节的几个定理，不論是定理本身的叙述或是它們的証明，都保持不变。

設 $\{f_n\}$ 是一个可积函数列，如果当 n 和 $m \rightarrow \infty$ 时，

$$\rho(f_n, f_m) \longrightarrow 0,$$

則称 $\{f_n\}$ 是平均基本的。

定理 1. 平均基本的可积函数列 $\{f_n\}$ 是依测度基本的。

証明. 对于任意固定的正数 ε , 令

$$E_{nm} = \{x: |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\},$$

則

$$\rho(f_n, f_m) = \int |f_n - f_m| d\mu \geq \int_{E_{nm}} |f_n - f_m| d\mu \geq \varepsilon \mu(E_{nm}),$$

因此, 当 n 和 $m \rightarrow \infty$ 时, $\mu(E_{nm}) \rightarrow 0$. \blacksquare

定理 2. 設 $\{f_n\}$ 是平均基本的可积函数列, 并設 v_n 是 f_n 的不定积分, $n=1, 2, \dots$, 則对于每一个可测集 E ,

$$v(E) = \lim_n v_n(E)$$

存在, 并且 v 是具有可列可加性的有限值集函数。

証明. 当 n 和 $m \rightarrow \infty$ 时,

$$|v_n(E) - v_m(E)| \leq \int |f_n - f_m| d\mu \longrightarrow 0,$$

因此, 極限 $v(E)$ 的存在性, 有限性和一致性都是很明显的; 同时也可以看出, v 具有有限可加性。現在設 $\{E_n\}$ 是不相交可测集的一个叙列, 它的和集是 E , 則对于任意一对正整数 n 和 k , 我們有

$$\begin{aligned} |v(E) - \sum_{i=1}^k v(E_i)| &\leq |v(E) - v_n(E)| + \\ &+ |v_n(E) - \sum_{i=1}^k v_n(E_i)| + |v_n(\bigcup_{i=1}^k E_i) - v(\bigcup_{i=1}^k E_i)|. \end{aligned}$$

当 n 充分大时, 上式右端第一項和第三項可以为任意小。对于充分大的固定的 n , 当 k 充分大时, 第二項也可以为任意小。这就說明了

$$v(E) = \lim_k \sum_{i=1}^k v(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} v(E_i), \quad \blacksquare$$

設 $\{v_n\}$ 是定义在全体可測集类上的有限值集函数列。如果对于每一个正数 ε , 存在正数 δ , 使得对于每一个滿足关系式 $\mu(E) < \delta$ 的可測集 E 并对于每一个正整数 n , 有 $|v_n(E)| < \varepsilon$, 則称 $\{v_n\}$ 的各项是一致绝对連續的。

定理 3. 設 $\{f_n\}$ 是平均基本的可积函数列, 并設 f_n 的不定积分是 $v_n, n=1, 2, \dots$, 則集函数 v_n 是一致绝对連續的。

証明。設 $\varepsilon > 0$; 选取正整数 n_0 使当 $n \geq n_0, m \geq n_0$, 有

$$\int |f_n - f_m| d\mu < \frac{\varepsilon}{2};$$

并設 δ 是一个正数使得对于每一个滿足关系式 $\mu(E) < \delta$ 的可測集 E 有

$$\int_E |f_n| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n=1, 2, \dots, n_0$$

(參看 §23 定理 8)。如果 E 是滿足关系式 $\mu(E) < \delta$ 的一个可測集并且 $n \leq n_0$, 則

$$|v_n(E)| \leq \int_E |f_n| d\mu < \varepsilon;$$

对于同一个 E , 如果 $n > n_0$, 則

$$|v_n(E)| \leq \int_E |f_n - f_{n_0}| d\mu + \int_E |f_{n_0}| d\mu < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

下面这个定理对于一般的可积函数并不是特別重要的, 因此定理的敘述和証明都只限于簡單函数的情形。

定理 4. 設 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 是两个平均基本的可积簡單函数列, 它們依测度收斂到同一个可測函数 f 。如果 v_n 和 λ_n 分別是 f_n 和 g_n 的不定积分, $n=1, 2, \dots$, 并且对于每一个可測集 E 令

$$v(E) = \lim_n v_n(E), \quad \lambda(E) = \lim_n \lambda_n(E),$$

則集函数 v 与 λ 恒等。

証明。因为, 对于每一个 $\varepsilon > 0$,

$$E_n = \{x: |f_n(x) - g_n(x)| \geq \varepsilon\} \subset$$

$$\subset \left\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x: |f(x) - g_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

所以 $\lim_n \mu(E_n) = 0$ 。因此, 如果 E 是一个测度为有限的可测集, 则在关系式

$$\begin{aligned} \int_E |f_n - g_n| d\mu &\leq \int_{E-E_n} |f_n - g_n| d\mu + \int_{E \cap E_n} |f_n| d\mu + \\ &\quad + \int_{E \cap E_n} |g_n| d\mu \end{aligned}$$

中, 右端第一项不超过 $\varepsilon \mu(E)$; 而根据定理 3 中证明的一致绝对连续性, 当 n 充分大时, 上式右端的另外两项都可以为任意小。于是

$$\lim_n |\nu_n(E) - \lambda_n(E)| = 0,$$

从而 $\nu(E) = \lambda(E)$ 。又因 ν 和 λ 都具有可列可加性, 因此对于每一个具有 σ -有限测度的可测集 E , 我们有 $\nu(E) = \lambda(E)$ 。

f_n 和 g_n 都是简单函数, 它们之中的每一个是借助于某一个集类而获得定义的; 这个集类是具有有限测度的可测集的有限类。如果 E_0 是这些集类中一切集的并集, 则 E_0 是一个具有 σ -有限测度的可测集。因此, 对于每一个可测集 E , 我们有

$$\nu_n(E - E_0) = \lambda_n(E - E_0) = 0,$$

从而有 $\nu(E - E_0) = \lambda(E - E_0) = 0$ 。由此即得 $\nu(E) = \nu(E \cap E_0)$ 和 $\lambda(E) = \lambda(E \cap E_0)$, 定理于是得证。 ▮

(1) 全体可积简单函数所成的集对于距离 ρ 而言是否形成一个完备度量空间?

(2) 沿用定理 2 的记号, 如果 $\{E_n\}$ 是不相交可测集的一个叙列, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ 是绝对收敛的。(提示: 这个级数是无条件收敛的.)

§25. 可积函数

设 f 是定义在测度空间 (X, \mathcal{S}, μ) 上几乎处处有限的可测函数, 如果存在平均基本的可积简单函数列 $\{f_n\}$, 这个函数列依测度收

敛到 f , 则称 f 是可积的。我們称

$$\lim_n \int f_n d\mu$$

为 f 的积分, 用記号

$$\int f(x) d\mu(x) \quad \text{或} \quad \int f d\mu$$

表示。由 §24 定理 4 (令 $E = \bigcup_n N(f_n)$) 可知, f 的积分的值是唯一确定的, 与定义中 $\{f_n\}$ 的选择无关。又由 §24 定理 2 可以看出, 积分的值总是有限的; 这一点是应该特别加以注意的。根据平均基本和依测度收敛的简单性质, 不难验证, 可积函数的绝对值, 任意常数与可积函数的乘积, 以及两个可积函数的和都是可积函数。关系式

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \quad \text{和} \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

说明, 如果 f 是可积的, 则 f^+ 和 f^- 都是可积的。

設 E 是一个可测集, $\{f_n\}$ 是一个平均基本的可积简单函数列, 并且 $\{f_n\}$ 依测度收敛到可积函数 f , 则很容易看出, 函数列 $\{\chi_E f_n\}$ 也是平均基本的, 并且它依测度收敛到 $\chi_E f$ 。我們定义 f 在 E 上的积分如下:

$$\int_E f d\mu = \int \chi_E f d\mu.$$

我們曾經提及, §§23 和 24 中諸定理 (除去 §24 定理 4 以外) 对于一般的可积函数都成立; 但我們只在可积简单函数的情形下证明了这些定理。現在将这些定理的证明补出。

§23 定理 1 和 2 可以直接从極限的简单性质得出。§23 定理 3 至 7 由 §23 定理 2 推出, 它们的证明逐字逐句地保持不变。

下面证明 §23 定理 8 关于不定积分的绝对连续性。設 $\{f_n\}$ 是一个平均基本的可积简单函数列, 并設 $\{f_n\}$ 依测度收敛到可积函数 f 。对于每一个可测集 E , 我們有

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \left| \int_E f_n d\mu \right| + \left| \int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu \right|.$$

因为 f_n 是简单函数, §24 定理 3 中关于一致绝对连续性的结论可以用来证明, 当 E 的测度充分小时, 上式右端的第一项可以为任意小. 由 $\int_E f d\mu$ 的定义, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上式右端第 2 项趋向 0; 于是 §23 定理 8 证明完毕.

不定积分的可列可加性的证明更为简单. 沿用上一段的记号, 因为 f_n 是简单函数, 所以直接应用 §24 定理 2 就得到 §23 定理 9 的结论.

§24 定理 1 至 3 的证明建立在 §23 中诸定理的结论上, 而不依赖于这些结论的证明. 因此, 对于一般的可积函数, §24 定理 1 至 3 成立. §§23 和 24 中诸定理的证明至此全部完成.

设 $\{f_n\}$ 是一个可积函数列, f 是一个可积函数, 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\rho(f_n, f) = \int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0,$$

则称 $\{f_n\}$ 平均收敛到 f . 下面是有关这个概念的第一个定理, 这个定理本身的叙述以及它的证明都和 §24 定理 1 十分类似.

定理 1. 设可积函数列 $\{f_n\}$ 平均收敛到 f , 则 $\{f_n\}$ 依测度收敛到 f .

证明. 对于任意固定的正数 ε , 令

$$E_n = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

则

$$\int |f_n - f| d\mu \geq \int_{E_n} |f_n - f| d\mu \geq \varepsilon \mu(E_n),$$

因此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\mu(E_n) \rightarrow 0$. \blacksquare

定理 2. 设 f 是一个几乎处处非负的可积函数, 则 $\int f d\mu = 0$ 的必要和充分条件是: $f=0$ 几乎处处成立.

证明. 如果 $f=0$ 几乎处处成立, 则每项恒等于零的函数列就

是一个平均基本的可积简单函数列, 并且这个函数列依测度收敛到 f ; 因此, $\int f d\mu = 0$. 现在证明逆命题. 我们看出, 如果 $\{f_n\}$ 是一个平均基本的可积简单函数列, 并且 $\{f_n\}$ 依测度收敛到 f , 则我们可以假定 $f_n \geq 0$, 因为我们可以将 f_n 换为 $|f_n|$. 由假设条件 $\int f d\mu = 0$ 得到 $\lim_n \int f_n d\mu = 0$, 这就是说, $\{f_n\}$ 平均收敛到 0. 根据定理 1, $\{f_n\}$ 依测度收敛到 0; 因此, 由 §22 定理 3, $f = 0$ 几乎处处成立. |

定理 3. 设 f 是一个可积函数, E 是一个测度为零的集, 则

$$\int_E f d\mu = 0.$$

证明. 因为 $\int_E f d\mu = \int \chi_E f d\mu$, 又因为具有零测度之集的特征函数几乎处处为零, 根据定理 2, $\int_E f d\mu = 0$. |

定理 4. 设 f 是一个可积函数, 它在可测集 E 上几乎处处为正, 并设 $\int_E f d\mu = 0$, 则 $\mu(E) = 0$.

证明. 令 $F_0 = \{x: f(x) > 0\}$, $F_n = \left\{x: f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$, $n = 1, 2, \dots$.

按照定理的假设条件, $E - F_0$ 是一个测度为零的集, 因此只须证明 $E \cap F_0$ 也是一个测度为零的集. 因为

$$0 = \int_{E \cap F_n} f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E \cap F_n) \geq 0,$$

并且

$$F_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

由关系式

$$\mu(E \cap F_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap F_n)$$

即得定理的结论. |

定理 5. 设 f 是一个可积函数, 如果对于每一个可测集 F 有 $\int_F f d\mu = 0$, 则几乎处处有 $f = 0$.

证明. 令 $E = \{x: f(x) > 0\}$, 则由定理的假设条件, $\int_E f d\mu = 0$;

因此, 根据定理 4, E 是一个测度为零的集. 对于函数 $-f$ 进行同样的讨论, 就可以说明, $\{x: f(x) < 0\}$ 也是一个测度为零的集. \blacksquare

定理 6. 设 f 是一个可积函数, 则集 $N(f) = \{x: f(x) \neq 0\}$ 具有 σ -有限测度.

证明. 设 $\{f_n\}$ 是一个平均基本的可积简单函数列, 并且这个函数列依测度收敛到 f . 对于每一个 $n=1, 2, \dots$, $N(f_n)$ 是具有有限测度的可测集. 令

$$E = N(f) - \bigcup_{n=1}^{\infty} N(f_n),$$

并设 F 是 E 的任意可测子集, 则由关系式

$$\int_F f d\mu = \lim_n \int_F f_n d\mu = 0$$

和定理 5 可知, 在 E 上几乎处处有 $f=0$. 根据 $N(f)$ 的定义, 在 E 上 $f \neq 0$, 因此 $\mu(E) = 0$. 由关系式

$$N(f) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N(f_n) \cup E$$

即得定理的结论. \blacksquare

有的时候对于某种不可积的函数 f 采用记号 $\int f d\mu$ 是很有用的. 例如, 若 f 是一个广义实值可测函数使得 $f \geq 0$ 几乎处处成立, 并且 f 是不可积的, 则我们可以定义

$$\int f d\mu = \infty.$$

宜于采用记号 $\int f d\mu$ 的最一般的函数类, 就是由全体具有下列性质的广义实值可测函数 f 组成的类: 函数 f^+ 和 f^- 中至少有一个是可积的. 在这种情形下我们定义

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

因为 $\int f^+ d\mu$ 和 $\int f^- d\mu$ 二数中最多只有一个为无限, 所以 $\int f d\mu$ 的值只可能是 $+\infty$, $-\infty$, 或有限的实数, 而不会出现没有意义的不定式 $\infty - \infty$. 今后我们将用到这种广义的积分概念, 但是“可积函数”这个术语仍然保持它原来的意义.

(1) 設 X 是由全体正整数组成的空間 (例如, 在 22.4 中所述的), 則定义在 X 上的函数 f 为可积函数的必要和充分条件是: 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 绝对收敛. 如果滿足这个条件, 則 $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

(2) 設 f 是一个非負的可积函数, 則它的不定积分是定义在全体可測集类上的一个有限測度.

(3) 設 f 是一个可积函数, 則对于每一个正数 ε ,

$$\mu(\{x: |f(x)| \geq \varepsilon\}) < \infty.$$

(4) 設 g 是单实变数的連續有限增函数, $\bar{\mu}_g$ 是由 g 引出的勒貝格-史蒂尔杰測度 (参看 15.9), 并設 f 是对于这个測度为可积的函数, 則积分 $\int f(x) d\bar{\mu}_g(x)$ 称为 f 对于 g 的勒貝格-史蒂尔杰积分, 記为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dg(x)$. 特別, 如果 $g(x) \equiv x$, 我們就得到勒貝格积分, 記为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. 如果 $f(x)$ 是一个連續函数使得 $N(f)$ 为有界集, 則 f 是勒貝格可积函数.

§26. 可积函数列

定理 1. 設平均基本的可积簡單函数列 $\{f_n\}$ 依測度收敛到可积函数 f , 則当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\rho(f, f_n) = \int |f - f_n| d\mu \rightarrow 0.$$

由此可見, 对于每一个可积函数 f 并对于每一个正数 ε , 存在一个可积簡單函数 g 使得 $\rho(f, g) < \varepsilon$.

証明. 对于任意固定的正整数 m , $\{|f_n - f_m|\}$ 是一个平均基本的可积簡單函数列, 并且它依測度收敛到 $|f - f_m|$. 因此

$$\int |f - f_m| d\mu = \lim_n \int |f_n - f_m| d\mu.$$

由函数列 $\{f_n\}$ 的平均基本性就得到定理的結論. \blacksquare

定理 2. 設 $\{f_n\}$ 是平均基本的可积函数列, 則存在可积函数 f 使当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ (从而有 $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$).

証明。根据定理 1, 对于每一个正整数 n , 存在一个可积简单函数 g_n 使得 $\rho(f_n, g_n) < \frac{1}{n}$. 因此, 可积简单函数列 $\{g_n\}$ 是平均基本的. 設 $\{g_n\}$ 依测度收敛到一个可测 (因而也是可积的) 函数 f . 我們有

$$0 \leq \left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| \leq \int |f_n - f| d\mu = \rho(f_n, f) \leq \\ \leq \rho(f_n, g_n) + \rho(g_n, f),$$

由定理 1 即得本定理的結論。 |

为了将下面的定理用较为簡潔和直觀的形式表述出来, 首先我們回忆一下在 §9 中引进的集函数的上連續性概念. 設 ν 是定义在集类 \mathbf{E} 上的有限值集函数, 如果对于 \mathbf{E} 中之集的每一个减叙列 $\{E_n\}$ 有 $\lim_n \nu(E_n) = 0$, 其中 $\lim_n E_n = 0$, 則称 ν 在 0 是上連續的. 現在設 $\{\nu_n\}$ 是定义在 \mathbf{E} 上的有限值集函数叙列, 如果对于 \mathbf{E} 中之集的每一个减叙列 $\{E_n\}$, 其中 $\lim_n E_n = 0$, 并对于每一个正数 ε , 存在正整数 m_0 使当 $m \geq m_0$ 有 $|\nu_n(E_m)| < \varepsilon$, $n = 1, 2, \dots$, 則称 $\{\nu_n\}$ 的各项在 0 是从上同等連續的.

定理 3. 可积函数列 $\{f_n\}$ 平均收敛到可积函数 f 的必要和充分条件是: $\{f_n\}$ 依测度收敛到 f , $|\int f_n|$ ($n = 1, 2, \dots$) 的不定积分一致绝对連續并在 0 是从上同等連續的.

証明. 首先証明条件的必要性. 因为 $\{f_n\}$ 的依测度收敛性和不定积分的一致绝对連續性已分別在 §25 定理 1 和 §24 定理 3 中得出, 所以只須証明不定积分的同等連續性.

$\{f_n\}$ 的平均收敛性說明: 对于每一个正数 ε , 存在正整数 n_0 使当 $n \geq n_0$ 有

$$\int |f_n - f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

根据 §23 定理 9, 非負可积函数的不定积分是一个有限的测度, 由 §9 定理 5 可知, 这个不定积分在 0 是上連續的. 設 $\{E_m\}$ 是可測集

的減叙列, 具有空的交集, 則存在正整數 m_0 使當 $m \geq m_0$ 有

$$\int_{E_m} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

和

$$\int_{E_m} |f_n - f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n=1, \dots, n_0.$$

由此可見, 如果 $m \geq m_0$, 則對於每一個正整數 n , 我們有

$$\int_{E_m} |f_n| d\mu \leq \int_{E_m} |f_n - f| d\mu + \int_{E_m} |f| d\mu < \varepsilon;$$

這就是我們要證明的同等連續性。

現在證明條件的充分性。因為可列個具有 σ -有限測度的可測集的併集是具有 σ -有限測度的可測集, 根據 §25 定理 6,

$$E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) \neq 0\}$$

就是一個具有 σ -有限測度的可測集。設 $\{E_n\}$ 是具有有限測度的可測集增叙列, $\lim_n E_n = E_0$, 並設 $F_n = E_0 - E_n, n=1, 2, \dots$, 則 $\{F_n\}$ 是一個減叙列並且 $\lim_n F_n = 0$ 。按照同等連續性的假設, 對於每一個正數 δ , 存在正整數 k 使得

$$\int_{F_k} |f_n| d\mu < \frac{\delta}{2},$$

從而有

$$\int_{F_k} |f_m - f_n| d\mu \leq \int_{F_k} |f_m| d\mu + \int_{F_k} |f_n| d\mu < \delta.$$

如果對於任意固定的 $\varepsilon > 0$, 令

$$G_{mn} = \{x: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\},$$

則

$$\begin{aligned} \int_{E_k} |f_m - f_n| d\mu &\leq \int_{E_k - G_{mn}} |f_m - f_n| d\mu + \int_{E_k \cap G_{mn}} |f_m - f_n| d\mu \leq \\ &\leq \varepsilon \mu(E_k) + \int_{E_k \supset G_{mn}} |f_m - f_n| d\mu. \end{aligned}$$

根據 $\{f_n\}$ 的依測度收斂性和不定積分的一致絕對連續性的假設,

当 m 和 n 充分大时, 上式最右端的第二项可以为任意小, 因此

$$\limsup_{m,n} \int_{E_k} |f_m - f_n| d\mu \leq \varepsilon \mu(E_k).$$

因为 ε 是任意的, 于是有

$$\lim_{m,n} \int_{E_k} |f_m - f_n| d\mu = 0.$$

由关系式

$$\begin{aligned} \int |f_m - f_n| d\mu &= \int_{E_0} |f_m - f_n| d\mu = \\ &= \int_{E_k} |f_m - f_n| d\mu + \int_{F_k} |f_m - f_n| d\mu \end{aligned}$$

可以看出,

$$\limsup_{m,n} \int |f_m - f_n| d\mu < \delta,$$

而 δ 是任意的, 所以

$$\lim_{m,n} \int |f_m - f_n| d\mu = 0.$$

換一句話說, 我們已經證明了 $\{f_n\}$ 是平均基本的; 根据定理 2, 存在可积函数 g 使得 $\{f_n\}$ 平均收斂到 g . 又因为由平均收斂性可以推出依测度收斂性, 所以几乎处处有 $f=g$. \blacksquare

下面这个定理称为勒貝格的有界收斂定理.

定理 4. 設可积函数列 $\{f_n\}$ 依测度收斂到 f [或几乎处处收斂到 f], 并設 g 是一个可积函数使得 $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ 几乎处处成立, $n=1, 2, \dots$, 則函数 f 是可积的, 并且函数列 $\{f_n\}$ 平均收斂到 f .

証明. 在 $\{f_n\}$ 依测度收斂到 f 的場合下, 这个定理是定理 3 的直接推論, 因为由不等式

$$\int_E |f_n| d\mu \leq \int_E |g| d\mu$$

可以看出, 定理 3 中所要求的关于不定积分的全部条件都是滿足的.

$\{f_n\}$ 几乎处处收敛的场合, 利用 g 的存在性, 可以化为依测度收敛的场合 (甚至于积分可以取在一个测度为无限的集上, 参看 22.4 和 22.5). 事实上, 不丧失普遍性, 我们可以假定, 对于每一个 $x \in X$, 不等式 $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ 和 $|f(x)| \leq |g(x)|$ 成立. 于是, 对于每一个固定的正数 ε , 我们有

$$E_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x: |f_i(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{x: |g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

从而有 $\mu(E_n) < \infty$, $n=1, 2, \dots$. 按照几乎处处收敛的假设, $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$; 根据 §9 定理 5, 我们得到

$$\begin{aligned} \limsup_n \mu(\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) &\leq \\ &\leq \lim_n \mu(E_n) = \mu(\lim_n E_n) = 0. \end{aligned}$$

换一句话说, 局限于一个可积函数并且几乎处处收敛的可积函数列是依测度收敛的, 这就证明了我们的定理. |

(1) 对于范数 $\|f\| = \int |f| d\mu$ 而言, 由一切可积函数组成的集是否形成一个巴拿赫空间?

(2) 设一致基本的函数列 $\{f_n\}$ 在一个测度为有限的可测集 E 上是可积的, 则由等式 $f(x) = \lim_n f_n(x)$ 确定的函数 f 在 E 上是可积的, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\int_E |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.

(3) 如果测度空间 (X, \mathcal{S}, μ) 是有限的, 则在定理 3 中将不定积分同等连续性的条件除去, 定理仍成立.

(4) 设 (X, \mathcal{S}, μ) 是在 22.4 中所述的全体正整数组成的空间.

(4a) 令

$$f_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{若 } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{若 } k > n. \end{cases}$$

函数列 $\{f_n\}$ 可以用来说明: 在定理 3 中, 不定积分同等连续性的条件一般说来是不能除去的.

(4b) 上面这个例子也可以用来说明: 如果 $\{f_n\}$ 是一个一致收敛的可积函数列, 并且它的极限函数 f 也是可积的, 我们不一定有 $\lim_n \int f_n d\mu =$

$$= \int f d\mu \text{ (参看(2)).}$$

(4c) 令

$$f_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{若 } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{若 } k > n. \end{cases}$$

函数列 $\{f_n\}$ 可以用来说明: 可积函数列如果是一致收敛的, 它的極限函数不一定是可积的.

(5) 設 X 是具有勒貝格測度的单位閉区間, $\{E_n\}$ 是开区間的一个減叙列使得 $\mu(E_n) = \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots$. 函数列 $\{n\chi_{E_n}\}$ 可以用来说明: 在定理 4 中, 有界的条件一般說来是不能除去的.

(6) 設可积函数列 $\{f_n\}$ 平均收敛到可积函数 f , 并設 g 是一个本性有界的可測函数, 則函数列 $\{f_n g\}$ 平均收敛到 fg .

(7) 設非負的可积函数列 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛到一个可积函数 f , 并設

$$\int f_n d\mu = \int f d\mu, \quad n=1, 2, \dots,$$

則 $\{f_n\}$ 平均收敛到 f . (提示: 令 $g_n = f_n - f$, 則由不等式 $|f_n - f| \leq f_n + f$ 不难看出, $0 \leq g_n^- \leq f$. 对函数列 $\{g_n^-\}$ 应用有界收敛定理, 由关系式

$$\int g_n^+ d\mu - \int g_n^- d\mu = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

即得命題的結論.)

§27. 积分的性質

定理 1. 設 f 是一个可測函数, g 是一个可积函数, 并且几乎处处有 $|f| \leq |g|$, 則 f 是可积的.

証明. 分別考虑 f 的正部和負部, 我們只須对非負的函数 f 証明本定理. 如果 f 是簡單函数, 定理显然成立. 在一般的場合下, 对于 X 中一切的 x , 存在非負簡單函数的增叙列 $\{f_n\}$ 使得 $\lim_n f_n(x) = f(x)$. 因为 $0 \leq f_n \leq |g|$, 所以每一个 f_n 是可积的, 应用有界收敛定理就得到本定理的結論. \blacksquare

定理 2. 設 $\{f_n\}$ 是非負广义实值可測函数的增叙列, 并且

$\lim_n f_n(x) = f(x)$ 几乎处处成立, 則

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

証明。如果 f 是可积的, 則結論可由有界收斂定理和定理 1 得出。因此, 剩下的只是要在 f 是不可积的場合下証明这个定理; 我們需要証明的就是: 当 $\int f d\mu = \infty$ 时必有 $\lim_n \int f_n d\mu = \infty$; 也就是說, 如果 $\lim_n \int f_n d\mu < \infty$, 則 f 一定是可积的。由于極限是有限的, 因此

$$\lim_{m,n} \left| \int f_m d\mu - \int f_n d\mu \right| = 0.$$

因为对于任意固定的 m 和 n , 函数 $f_m - f_n$ 不变号, 于是有

$$\left| \int f_m d\mu - \int f_n d\mu \right| = \int |f_m - f_n| d\mu;$$

由此可見, 函数列 $\{f_n\}$ 是平均基本的。根据 §26 定理 2, $\{f_n\}$ 平均收斂到一个可积函数 g 。又因为平均收斂的函数列是依测度收斂的, 因而存在一个几乎处处收斂到 g 的子叙列, 所以 $f = g$ 几乎处处成立。 ─

定理 3. 可测函数 f 为可积的必要和充分条件是: $|f|$ 是可积的。

証明。这个定理中需要証明的部分是: 若 $|f|$ 是可积的, 則 f 也是可积的。在定理 1 中将 g 換为 $|f|$, 就証明了这个事实。 ─

定理 4. 設 f 是一个可积函数, g 是一个本性有界的可测函数, 則 fg 是可积的。

証明。設 $|g| \leq c$ 几乎处处成立, 則 $|fg| \leq c|f|$ 几乎处处成立, 由定理 3 即得本定理的結論。 ─

定理 5. 設 f 是一个本性有界的可测函数, 并且 E 是一个具有有限测度的可测集, 則 f 在 E 上是可积的。

証明。因为测度为有限的可测集的特征函数是可积函数, 在定理 4 中将 f 和 g 分別換为 χ_E 和 f , 就得到本定理的結論。

下面这个定理称为**法都辅助定理**。

定理 6. 設 $\{f_n\}$ 是一个非負可积函数列使得

$$\liminf_n \int f_n d\mu < \infty,$$

則由等式

$$f(x) = \liminf_n f_n(x)$$

确定的函数 f 是可积的, 并且

$$\int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

証明. 令 $g_n(x) = \inf\{f_i(x) : n \leq i < \infty\}$, 則 $g_n \leq f_n$, 并且函数列 $\{g_n\}$ 是遞增的. 由于

$$\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu,$$

我們有

$$\lim_n \int g_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu < \infty.$$

又因为 $\lim_n g_n(x) = \liminf_n f_n(x) = f(x)$, 由定理 2 可知, f 是可积的, 并且

$$\int f d\mu = \lim_n \int g_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu. \quad \blacksquare$$

(1) 設 f 是一个可測函数, g 是一个可积函数, α 和 β 是两个实数使得 $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ 几乎处处成立, 則存在实数 γ , $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, 使得

$$\int f |g| d\mu = \gamma \int |g| d\mu.$$

(提示:

$$\alpha \int |g| d\mu \leq \int f |g| d\mu \leq \beta \int |g| d\mu.)$$

这个結果称为积分的**中值定理**。

(2) 設 $\{f_n\}$ 是一个可积函数列使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty,$$

則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 几乎处处收敛到一个可积函数 f , 并且

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

(提示: 对于級數 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 的部分和所成的函数列应用定理 2, 并利用下述事实: 收敛性是绝对收敛性的必要条件.)

(3) 設 f 和 f_n 是可积函数, $n=1, 2, \dots$, 并且 $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ 几乎处处成立, 則由等式

$$f^*(x) = \limsup_n f_n(x) \quad \text{和} \quad f_*(x) = \liminf_n f_n(x)$$

确定的函数 f^* 和 f_* 都是可积的, 并且

$$\int f^* d\mu \geq \limsup_n \int f_n d\mu \geq \liminf_n \int f_n d\mu \geq \int f_* d\mu.$$

(提示: 分别考虑 f_n 的正部和负部, 首先将一般的情况化为 f_n 为非负的情况; 然后对 $\{f+f_n\}$ 和 $\{f-f_n\}$ 应用法都辅助定理.)

(4) 要使得可测函数 f 在一个测度为有限的可测集 E 上是可积的, 必须而且只须級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap \{x: |f(x)| \geq n\})$$

收敛. (提示: 应用阿倍尔的求部分和的方法.) 如果 $\mu(E) = \infty$ 或在上式中从 $n=0$ 开始取和数, 我們可以得到甚么結論?

(5) 設 $\{E_n\}$ 是一个可测集叙列, m 是任意固定的正整数, 并設 G 是由一切具有下列性质的点 x 组成的集: 至少有 m 个 E_n 包含 x . 則 G 是一个可测集, 并且

$$m \mu(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

(提示: 考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_G \chi_{E_n}(x) d\mu(x)$.)

(6) 設 f 是定义在全有限测度空间 (X, S, μ) 上的有限值可测函数, 并令

$$S_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{2^n} \mu\left(\left\{x: \frac{k}{2^n} < f(x) \leq \frac{k+1}{2^n}\right\}\right), n=1, 2, \dots.$$

則等式

$$\int f d\mu = \lim_n S_n$$

按照下述意义成立: 如果 f 是可积的, 則每一个級数 S_n 是絕對收斂的, 極限存在, 并且極限值等于积分值; 反之, 如果級数 S_n 中的任意一个是絕對收斂的, 則其他的都是絕對收斂的, $\lim_n S_n$ 存在, f 是可积的, 并且上列等式成立. (提示: 只須在 $f \geq 0$ 的場合下証明这个命題. 令

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{若 } \frac{k}{2^n} < f(x) \leq \frac{k+1}{2^n}, \\ 0, & \text{若 } f(x) = 0, \end{cases} \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

然后应用定理 2. 反面的命題可以証明如下: 由关系式

$$f(x) \leq 2f_n(x) + \mu(X)$$

可以看出, f 是可积的, 因而可以应用上面所述的命題.)

(7) 下面所述是接近积分概念的另一种常用的方式. 設 f 是定义在测度空間 (X, \mathcal{S}, μ) 上的非負可积函数. 对于每一个可測集 E , 令

$$a(E) = \inf\{f(x) : x \in E\};$$

并对于不相交可測集的每一个有限类 $C = \{E_1, \dots, E_n\}$, 令

$$s(C) = \sum_{i=1}^n a(E_i) \mu(E_i).$$

我們断言: 一切形如 $s(C)$ 之数的上确界就是 $\int f d\mu$. 事实上, 如果 f 是简单函数, 則結論显然成立. 在一般的場合, 如果 f 不一定是一个简单函数, 設

g 是一个非負简单函数使得 $g \leq f$. 令 $g = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$, 并令 $C = \{E_1, \dots, E_n\}$,

則

$$\int g d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^n a(E_i) \mu(E_i) = s(C).$$

由此可見, 如果 $\{g_n\}$ 是非負简单函数的一个增叙列, 并且这个叙列收斂到 f , 則有

$$\lim_n \int g_n d\mu \leq \sup s(C),$$

从而有

$$\int f d\mu \leq \sup s(C).$$

另一方面, 因为 $s(C)$ 是某一个具有上述性质的简单函数 g 的积分, 所以对于每一个 C , 我们有

$$s(C) \leq \int f d\mu.$$

(7a) 在(7)中所得到的结果能不能推广到不可积非负函数的场合?

(7b) 设 f 是定义在全有限测度空间 (X, S, μ) 上的可积函数, 并设它的分布函数 g 是连续的 (参看 18.11), 则

$$\int f d\mu = \int_{-x}^{+\infty} x dg(x);$$

(参看 25.4). (提示: 假定 $f \geq 0$. 考虑上式中两个积分的“积分和” $s(C)$ 并用(7).)

第六章

一般的集函数

§28. 广义测度

在本章中，我們將研究一种不很复杂但很有用的广义测度概念；以前引进的测度和我們現在要討論的集函数之間的主要区别，就在于后者不限定是非負的。

設 S 是由集 X 的子集組成的一个 σ -环， μ_1 和 μ_2 是定义在 S 上的两个测度。如果对于 S 中每一个集 E ，令 $\mu(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E)$ ，則显然 μ 是一个测度；同时可以看出，对于有限个测度之和的場合，这个結論也成立。此外，将一个测度乘以任意非負的常数，也可以获得新的测度。結合上述两种方法，我們得到下面的結論：如果 $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ 是有限个测度的集， $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是非負实数的有限集，則定义在 S 上由等式

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i(E)$$

确定的集函数 μ 是一个测度。

如果我們允許系数 α_i 可以是負数，則情况就大不相同了。例如，設 μ_1 和 μ_2 是 S 上的两个测度，如果令 $\mu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$ ，我們就会碰見两个新的問題。第一，对于某些集， μ 可能取負的值；事实上，这不但不是一个严重的問題，并且还是一个值得研究的有趣的現象。第二，对于某些集 E ，可能發生 $\mu_1(E) = \mu_2(E) = \infty$ ，这时 $\mu(E)$ 沒有意义；在我們开始研究以前，这是首先需要加以解决

的一个問題。

为了避免不定形的出現，我們規定，只有当两个測度中至少有一个是有限測度时，这两个測度才能相減。这种規定和我們以前对某种不可积函数采用記号 $\int f du$ 的情形十分相似(我們記得，对于一个可測函数 f ， $\int f du$ 有定义当而且只当函数 f^+ 和 f^- 二者中至少有一个是可积函数时；也就是說，当而且只当由等式

$$v^+(E) = \int_E f^+ du \quad \text{和} \quad v^-(E) = \int_E f^- du$$

确定的两个集函数 v^+ 和 v^- 中至少有一个是有限測度时)。我們还可以进一步發現它們的类似之点：如果 f 是一个可測函数使得 $\int f du$ 有定义，則由等式

$$v(E) = \int_E f du$$

确定的集函数 v 是两个測度之差。

上述論点已經充分地說明了下面的定义。設 μ 是定义在可測空間 (X, S) 中全体可測集类上的广义实值集函数，具有可列可加性， $\mu(0) = 0$ ，并且 μ 在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 二值中至多只能取得一个值，則称 μ 为广义測度。

我們注意到，广义測度 μ 的可列可加性条件隱含着下面的性質：对于任何不相交可測集叙列 $\{E_n\}$ ，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

的和总具有确定的意义，也就是說，級数或者是收斂的，或者發散到 $+\infty$ 或 $-\infty$ 。

关于測度的术语，“[全]有限”和“[全] σ -有限”，可以同样用之于广义測度，但在定义中必須将 $\mu(E)$ 換为 $|\mu(E)|$ ，也就是說，将 $\mu(E) < \infty$ 換为 $-\infty < \mu(E) < +\infty$ 。例如，广义測度 μ 称为全有限的，如果 X 可測并且 $|\mu(X)| < \infty$ 。

在以下的討論中，我們將要証明，每一个广义測度可以表为两

个测度之差。如果这个结论能够获得证明，我们就可以首先在一个环上定义广义测度的概念，然后试图将它扩张，正如同测度的扩张一样；但是我们立刻就会发现，这不过是浪费时间而已，因为每一个广义测度的扩张问题可以化为通常测度的扩张问题。

如同在测度的场合一样，由广义测度的定义可知，广义测度具有有限可加性，因而也具有可减性。

定理 1. 设 μ 是一个广义测度， E 和 F 是两个可测集使得

$$E \subset F \quad \text{和} \quad |\mu(F)| < \infty,$$

则 $|\mu(E)| < \infty$ 。

证明。我们有

$$\mu(F) = \mu(F - E) + \mu(E).$$

上式右端中如果恰好有一项为无限，则 $\mu(F)$ 也为无限；如果两项均为无限，则因 μ 在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 二值中至多只能取得一个值，所以或者是 $\mu(F - E) = \mu(E) = \infty$ ，或者是 $\mu(F - E) = \mu(E) = -\infty$ ，因此 $\mu(F)$ 仍为无限。由此可见，上式右端两项都是有限的；这就说明了：如果一个集具有有限的广义测度，则它的每一个可测子集都具有有限的广义测度。！

定理 2. 设 μ 是一个广义测度， $\{E_n\}$ 是一个不相交可测集数列使得 $|\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)| < \infty$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ 绝对收敛。

证明。令

$$E_n^+ = \begin{cases} E_n, & \text{若 } \mu(E_n) \geq 0, \\ 0, & \text{若 } \mu(E_n) < 0, \end{cases}$$

$$E_n^- = \begin{cases} E_n, & \text{若 } \mu(E_n) \leq 0, \\ 0, & \text{若 } \mu(E_n) > 0. \end{cases}$$

则有

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n^+)$$

和

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^-\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n^-).$$

考虑上面二式右端的两个級数。由于每一个級数的各項都保持相同的符号,并且 μ 在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 二值中至多只能取得一个值,因此这两个級数中至少有一个是收斂的。但是这两个級数的和是收斂

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$,因而两个級数都是收斂的。又因为上列正項級数和負項級数的收斂性無异于 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ 的絕對收斂性,定理于是

証明完畢。 |

定理 3. 設 μ 是一个广义測度, $\{E_n\}$ 是可測集的一个單調叙列,在 $\{E_n\}$ 是遞減的場合并設至少有 n 的一个值能使 $|\mu(E_n)| < \infty$,則

$$\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n).$$

証明。在 $\{E_n\}$ 是遞增的情形,定理的証明和§9 定理 4 的証明相同(將 $\{E_n\}$ 換为不相交的集叙列 $\{E_i - E_{i-1}\}$);在 $\{E_n\}$ 是遞減的情形,可以利用余集的运算化为遞增的情形(參看§9 定理 5),但此时必須应用定理 1 說明,在証明的过程中出現的減式是有限的。 |

(1) 两个[全] σ -有限測度之和是[全] σ -有限測度。这个命題对于無限項和的場合是否成立?

(2) 对于可測空間中每一个可測集 E ,定义 $\mu(E) = \mu_1(E) + i\mu_2(E)$,其中 $i = \sqrt{-1}$, μ_1 和 μ_2 是在本节所述意义下的两个广义測度,則称 μ 是定义在全体可測集类上的一个复測度。定理 1 至 3 对于复測度是否成立?

(3) 如果广义測度 μ 可以按照两种方式表为两个測度之差:

$$\mu = \mu_1 - \mu_2, \quad \mu = \nu_1 - \nu_2,$$

則是否一定有 $\mu_1 = \nu_1$ 和 $\mu_2 = \nu_2$?

(4) 广义測度在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 二值中至多只能取得一个值,这个性質可以

从可列可加性的条件推出。(提示:假定 $\mu(E)=\infty$, $\mu(F)=-\infty$. 考虑关系式

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu(E-F) + \mu(E \cap F), \\ \mu(F) &= \mu(F-E) + \mu(E \cap F)\end{aligned}$$

和

$$\mu(E \Delta F) = \mu(E-F) + \mu(F-E);$$

这三个等式的右端至少有一个是不定形.)

§29. 哈恩分解和若当分解

設 μ 是定义在可測空間 (X, \mathbf{S}) 中全体可測集类上的广义測度, 并設 E 是一个集. 如果对于每一个可測集 F , $E \cap F$ 可測并且 $\mu(E \cap F) \geq 0$, 則称 E (对于 μ) 是一个**正集**; 类似地, 如果对于每一个可測集 F , $E \cap F$ 可測并且 $\mu(E \cap F) \leq 0$, 則称 E (对于 μ) 是一个**負集**. 按照这种意义, 空集是正集同时也是負集; 除此而外, 我們不再肯定任何其他正集或負集一定存在.

定理 1. 設 μ 是一个广义測度, 則存在不相交的两个集 A 和 B , 使得 $A \cup B = X$, 并使得 A 对于 μ 为正集, B 对于 μ 为負集.

我們称集 A 和 B 形成 X 对于 μ 的一个**哈恩分解**.

証明. 因为 μ 在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 二值中至多只能取得一个值, 所以我們可以假定, 对于任何可測集 E .

$$-\infty < \mu(E) \leq +\infty.$$

两个負集的差集以及可列个不相交負集的併集显然都是負集, 因此負集的任何可列併仍为負集. 对于一切可測負集 B , 令 $\beta = \inf \mu(B)$. 設 $\{B_i\}$ 是可測負集的一个叙列使得 $\lim_i \mu(B_i) = \beta$; 如果 $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, 則 B 是一个可測負集使得 $\mu(B)$ 为最小.

現在我們証明 $A = X - B$ 是一个正集. 假定結論不成立, 設 E_0 是 A 的一个可測子集使得 $\mu(E_0) < 0$. 首先我們看出, E_0 不可能是負集; 因为如果 E_0 是一个負集, 則 $B \cup E_0$ 也将是一个負集并

且 $\mu(B \cup E_0) < \mu(B)$, 而这是不可能的。設 k_1 是滿足关系 $\mu(E_1) \geq \frac{1}{k_1}$ 的最小正整数, 其中 E_1 是 E_0 的可測子集 (我們注意到, 因为 $\mu(E_0) < 0$, 所以 $\mu(E_0)$ 和 $\mu(E_1)$ 都是有限的)。因为

$$\mu(E_0 - E_1) = \mu(E_0) - \mu(E_1) \leq \mu(E_0) - \frac{1}{k_1} < 0,$$

剛才用于 E_0 的論證也可以同样用之于 $E_0 - E_1$ 。設 k_2 是滿足关系 $\mu(E_2) \geq \frac{1}{k_2}$ 的最小正整数, 其中 E_2 是 $E_0 - E_1$ 的可測子集; 依此类推, 以至無穷。由于 E_0 的可測子集具有有限的 μ 值 (§28 定理 1), 我們有

$$\lim_n \frac{1}{k_n} = 0.$$

由此可見, 如果 F 是

$$F_0 = E_0 - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

的任意可測子集, 則 $\mu(F) \leq 0$, 也就是說, F_0 是一个可測負集。但是 F_0 和 B 不相交, 并且

$$\mu(F_0) = \mu(E_0) - \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \leq \mu(E_0) < 0,$$

这和 B 的最小性質相矛盾, 因此 $\mu(E_0) < 0$ 的假定不能成立。 |

不难构造一个例子來說明哈恩分解并非唯一的。不过, 如果

$$X = A_1 \cup B_1 \quad \text{和} \quad X = A_2 \cup B_2$$

是 X 的两个哈恩分解, 則我們可以証明, 对于每一个可測集 E , 有

$$\mu(E \cap A_1) = \mu(E \cap A_2) \quad \text{和} \quad \mu(E \cap B_1) = \mu(E \cap B_2).$$

事实上, 由关系式

$$E \cap (A_1 - A_2) \subset E \cap A_1$$

可知, $\mu(E \cap (A_1 - A_2)) \geq 0$; 又由关系式

$$E \cap (A_1 - A_2) \subset E \cap B_2$$

可知, $\mu(E \cap (A_1 - A_2)) \leq 0$ 。因此, $\mu(E \cap (A_1 - A_2)) = 0$, 同理可証 $\mu(E \cap (A_2 - A_1)) = 0$; 由此可見

$$\mu(E \cap A_1) = \mu(E \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu(E \cap A_2).$$

根据上述结果可知,在全体可测集类上,等式

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \quad \text{和} \quad \mu^-(E) = -\mu(E \cap B)$$

唯一地确定了两个集函数 μ^+ 和 μ^- , 分别称为 μ 的上变差和下变差. 对于每一个可测集 E , 令

$$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E),$$

则集函数 $|\mu|$ 称为 μ 的全变差. (注意记号 $|\mu|(E)$ 和 $|\mu(E)|$ 之间的重要区别.)

定理 2. 广义测度 μ 的上变差 μ^+ 、下变差 μ^- 和全变差 $|\mu|$ 都是测度, 并且对于每一个可测集 E , 有 $\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$. 如果 μ 是[全]有限或 σ -有限的, 则 μ^+ 和 μ^- 也是[全]有限或 σ -有限的; μ^+ 和 μ^- 二者中至少有一个是有限测度.

证明. μ 的变差显然都是非负的; 如果每一个可测集可以表为可列个具有有限 μ 值的可测集之并, 则根据 §28 定理 1, μ^+ 和 μ^- 也满足同样的条件. 等式 $\mu = \mu^+ - \mu^-$ 可由 μ^+ 和 μ^- 的定义直接推出; 因为 μ 在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 二值中至多只能取得一个值, 由此可见集函数 μ^+ 和 μ^- 二者中至少有一个恒为有限. μ^+ 和 μ^- 显然具有可列可加性, 定理于是证明完毕. **|**

定理 2 说明了每一个广义测度可以表为两个测度 (其中至少有一个是有限的) 之差; 将 μ 表为它的上变差与下变差之差, 这种表示的方式称为 μ 的若当分解.

(1) 设 μ 是一个有限广义测度, $\{E_n\}$ 是一个可测集叙列, 并且 $\lim_n E_n$ 存在 (也就是 $\limsup_n E_n = \liminf_n E_n$), 则

$$\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n).$$

(2) 有限广义测度以及它的变差都是有界的. 为了这个理由, 我们常称有限广义测度是有界变差的.

(3) 设 μ 是一个广义测度, E 是一个可测集, 则有

$$\mu^+(E) = \sup\{\mu(F) : E \supset F \in \mathcal{S}\}$$

和

$$\mu^-(E) = -\inf\{\mu(F) : E \supset F \in \mathcal{S}\}.$$

如果将上面两个等式当作 μ^+ 和 μ^- 的定义, 我們可以得到若当分解定理另一种常用的証法.

(4) 对于范数 $\|\mu\| = |\mu|(X)$ 而言, 由定义在某个 σ -代数上的一切全有限广义测度組成的集是否形成一个巴拿赫空間?

(5) 設 (X, \mathcal{S}, μ) 是一个测度空間, f 是定义在 X 上的一个可积函数, 則由等式

$$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu(x)$$

确定的集函数 ν 是一个有限广义测度, 并且

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu, \quad \nu^-(E) = \int_E f^- d\mu.$$

如何以 f 表出 $|\nu|(E)$?

(6) 設 μ 和 ν 是定义在 σ -代数 \mathcal{S} 上的两个全有限测度, E 是 \mathcal{S} 中的一个集, 則对于每一个实数 t , 存在 \mathcal{S} 中的集 A_t 使得 $A_t \subset E$, 并滿足下述条件: 对于 \mathcal{S} 中适合关系 $F \subset A_t$ [或 $F \subset E - A_t$] 的每一个集 F , 有 $\nu(F) \leq t\mu(F)$ [或 $\nu(F) \geq t\mu(F)$].

(7) 設 μ 是一个广义测度, f 是一个可测函数, 并且 f 对于 $|\mu|$ 是可积的, 則由定义可令

$$\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f d\mu^-.$$

这个积分具有在第五章中討論的“正”积分的許多主要性質. 如果 μ 是一个有限广义测度, 則对于每一个可测集 E , 有

$$|\mu|(E) = \sup \left| \int_E f d\mu \right|,$$

其中 \sup 指的是对滿足关系 $|f| \leq 1$ 的一切可测函数 f 取上确界.

(8) 对于复值函数 f 和复测度 μ (參看 28.2), 也可以定义积分 $\int f d\mu$, 只須分別考虑实部和虚部. 按照(7), 我們定义有限复测度 μ 的全变差为

$$|\mu|(E) = \sup \left| \int_E f d\mu \right|,$$

其中 \sup 指的是对滿足关系 $|f| \leq 1$ 的一切可测函数 f (可能是复值的) 取上确界. μ 的实部和虚部的全变差与 $|\mu|$ 有甚么关系?

§30. 絕對連續性

前面我們考慮了不定積分的性質，從而引進了廣義測度的抽象概念，並且指出了它具有不定積分的一些重要性質。然而不定積分還有一些性質（或者說，不定積分與借以定義的測度之間的某些關係）是一般的廣義測度所沒有的。其中之一就是具有高度重要意義的絕對連續性 (§23)；現在我們進而說明，在更為一般的場合下，絕對連續性仍然有其意義。

設 (X, S) 是一個可測空間， μ 和 ν 是 S 上的廣義測度，如果對於滿足關係式 $|\mu|(E) = 0$ 的每一個可測集 E ，有 $\nu(E) = 0$ ，則稱 ν 對於 μ 是絕對連續的，記為 $\nu \ll \mu$ 。用不精確但比較直觀的話來說， $\nu \ll \mu$ 的意義就是：當 μ 很小時 ν 也很小。我們注意到，在上述精確的定義中，表達的方式不是對稱的； μ 很小乃是由關於它的全變差的條件表達出來的。下面的定理說明這只是表面的現象。

定理 1. 設 μ 和 ν 是廣義測度，則條件

- (a) $\nu \ll \mu,$
 (b) $\nu^+ \ll \mu, \quad \nu^- \ll \mu,$
 (c) $|\nu| \ll |\mu|$

是互相等價的。

證明。 設 (a) 成立，則當 $|\mu|(E) = 0$ 有 $\nu(E) = 0$ 。令 $X = A \cup B$ 為 X 對於 ν 的一個哈恩分解，則當 $|\mu|(E) = 0$ 有

$$0 \leq |\mu|(E \cap A) \leq |\mu|(E) = 0$$

和

$$0 \leq |\mu|(E \cap B) \leq |\mu|(E) = 0,$$

因此有

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = 0$$

和

$$\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = 0;$$

于是(b)成立。

由关系式

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E)$$

可以說明, (c)是(b)的結論; 又由关系式

$$0 \leq |\nu(E)| \leq |\nu|(E)$$

可以說明, (a)是(c)的結論。 ▮

下面的定理說明了我們現在的絕對連續性定义与 §23 中引进的定义 (对于有限值集函数) 之間的关系。这个定理實質上肯定了, 对于“当 μ 很小时 ν 也很小”这样的說法, 可以給出另外一种精确的解釋, 这种解釋虽然在外表上与原来的不同, 但与它等价。

定理 2. 設 ν 是一个有限广义测度, μ 是一个广义测度, 并且 $\nu \ll \mu$, 則对于每一个正数 ε , 存在正数 δ , 使得对于滿足关系式 $|\mu|(E) < \delta$ 的每一个可測集 E , 有 $|\nu|(E) < \varepsilon$ 。

証明. 假定結論不成立. 設对于某一个 $\varepsilon > 0$, 存在可測集叙列 $\{E_n\}$ 使得 $|\mu|(E_n) < \frac{1}{2^n}$ 并且 $|\nu|(E_n) \geq \varepsilon$, $n = 1, 2, \dots$. 令 $E = \limsup_n E_n$, 則

$$|\mu|(E) \leq \sum_{i=n}^{\infty} |\mu|(E_i) < \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

因而有 $|\mu|(E) = 0$. 另一方面, 由于 ν 是有限的, 我們有

$$|\nu|(E) = \lim_n |\nu|(E_n \cup E_{n+1} \cup \dots) \geq \limsup_n |\nu|(E_n) \geq \varepsilon.$$

这个結果与假設条件 $\nu \ll \mu$ 相抵触, 定理于是証明完畢。 ▮

容易驗証, 关系“ \ll ”具有自反性 (即 $\mu \ll \mu$) 和推移性 (即若 $\mu_1 \ll \mu_2, \mu_2 \ll \mu_3$, 則 $\mu_1 \ll \mu_3$)。設 μ 和 ν 是两个广义测度, 如果同时有 $\nu \ll \mu$ 和 $\mu \ll \nu$, 則称 μ 和 ν 是等价的, 記为 $\mu \equiv \nu$ 。

現在我們引进奇异性关系, 它是和絕對連續性相对立的一种关系。設 (X, S) 是一个可測空間, μ 和 ν 是定义在 S 上的广义测度, 如果存在不相交的两个集 A 和 B , 使得 $A \cup B = X$, 并使得对于每一个可測集 E , $A \cap E$ 和 $B \cap E$ 都为可測集并且 $|\mu|(A \cap E) =$

$= |\nu|(B \cap E) = 0$, 則称 μ 和 ν 是互相奇异的, 或者说, μ 和 ν 是奇异的, 記为 $\mu \perp \nu$. 虽然在定义里 μ 和 ν 所占的地位是对称的, 但我們有时却用不对称的表达方式“ ν 对于 μ 是奇异的”来代替“ μ 和 ν 是奇异的”。

很明显, 奇异性乃是非绝对連續性的一个極端的形式。如果 ν 对于 μ 是奇异的, 則不但由 $|\mu|(E) = 0$ 不能推出 $|\nu|(E) = 0$, 而且實質上只有对于 $|\mu|$ 为 0 的集, $|\nu|$ 才有可能不为 0。

最后, 我們再介紹一种新的記号。我們在測度空間上已經引用“几乎处处”这个具有直觀性的傳統的術語; 在每次只限于考虑一个測度时, 这个術語是完全可以令人滿意的。然而, 在绝对連續性和奇异性的討論中, 我們必須同时考虑不止一个測度; 而时常說到“几乎处处对于 μ ”則过于累贅, 因此我們將采用下述的簡便記号。設 (X, S) 是一个可測空間, μ 是定义在 S 上的一个广义測度; 对于 (X, S) 中每一个点 x , $\pi(x)$ 表示有关 x 的一个命題。我們用記号

$$\pi(x)[\mu] \quad \text{或} \quad \pi[\mu]$$

表示: 如果 E 是由使 $\pi(x)$ 不成立的一切点 x 組成的集, 則 $|\mu|(E) = 0$. 例如, 令 f 和 g 为定义在 X 上的两个函数, 則記号 $f = g[\mu]$ 表示: 对于 $|\mu|$ 而言, $\{x: f(x) \neq g(x)\}$ 是一个測度为零的可測集。

(1) 設 μ 是一个广义測度, f 是对于 $|\mu|$ 为可积的一个函数。对于每一个可測集 E , 定义

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

(參看 29.7), 則 $\nu \ll \mu$.

(2) 設測度空間 (X, S, μ) 是具有勒貝格測度的单位区間。令 $F = \{x: 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$, 并定义函数 f_1, f_2 如下:

$$f_1(x) = 2\chi_F(x) - 1, \quad f_2(x) = x.$$

如果集函数 μ_i 由等式

$$\mu_i(E) = \int_E f_i d\mu, \quad i=1, 2$$

确定, 則 $\mu_2 \ll \mu_1$. 但当 $\mu_1(E)=0$ 时却不一定有 $\mu_2(E)=0$. 如果 μ_2 由等式

$$\mu_2(E) = \int_E \left(f_2 - \frac{1}{2} \right) d\mu$$

确定, 則当 $\mu_1(E)=0$ 时必有 $\mu_2(E)=0$.

(3) 設 μ 是一个广义测度, 則变差 μ^+ 和 μ^- 是互相奇异的, 并且它們之中的每一个对于 μ 是绝对連續的.

(4) 設 μ 是一个广义测度, 則 $\mu \equiv |\mu|$.

(5) 設 μ 是一个广义测度, E 是一个可測集, 則 $|\mu|(E)=0$ 的必要和充分条件是: 对于 E 的每一个可測子集 F , $\mu(F)=0$.

(6) 設 μ 和 ν 是定义在 σ -环 S 上的两个测度, 則 $\nu \ll \mu + \nu$.

(7) 設 f_1 和 f_2 是定义在全有限测度空間 (X, S, μ) 上的两个可积函数, μ_i 是 f_i 的不定积分, $i=1, 2$. 如果

$$\mu(\{x: f_1(x)=0\} \Delta \{x: f_2(x)=0\}) = 0,$$

則 $\mu_1 \equiv \mu_2$.

(8) 設 ψ 是在 19.3 中定义的康脫函数, μ_0 是定义在单位区間的全體波雷耳子集类上由 ψ 引出的勒貝格-史蒂尔杰测度 (参看 15.9). 如果 μ 是勒貝格测度, 則 μ_0 和 μ 是互相奇异的.

(9) 設 μ 和 ν 是两个广义测度, 并且 ν 对于 μ 既是绝对連續的又是奇异的, 則 $\nu=0$.

(10) 設 ν_1, ν_2 和 μ 都是有限广义测度, 并且 ν_1 和 ν_2 对于 μ 都是奇异的, 則 $\nu = \nu_1 + \nu_2$ 对于 μ 也是奇异的. (提示: 令 $X = A_1 \cup B_1$ 和 $X = A_2 \cup B_2$ 是滿足下述性質的两个分解: 对于 A_i 的可測子集, $|\mu_i|$ 恆等于零; 对于 B_i 的可測子集, $|\nu_i|$ 恆等于零, $i=1, 2$. 則

$$X = [(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1)] \cup (B_1 \cap B_2)$$

就是使得 $\mu \perp \nu$ 的一个分解.)

(11) 設 μ 和 ν 是定义在 σ -代数 S 上的两个测度, μ 是有限的, 并且 $\nu \ll \mu$, 則存在可測集 E , 使得 $X-E$ 对于 ν 而言具有 σ -有限测度, 并使得对于 E 的任何可測子集 F , $\nu(F)$ 或为 0 或为 ∞ . (提示: 利用穷举法 (参看 17.3), 可以找出一个可測集 E , 使得对于 E 的任何可測子集 F , $\nu(F)$ 或为 0 或为 ∞ , 并使得 $\mu(E)$ 为最大. 然后再应用穷举法說明 $X-E$ 对于 ν 而言具

有 σ -有限测度.)

(12) 在定理 2 中, 如果 ν 不是有限的, 则定理不一定成立. (提示: 令 X 为全体正整数集; 对于 X 的每一个子集 E , 令

$$\mu(E) = \sum_{n \in E} 2^{-n}, \quad \nu(E) = \sum_{n \in E} 2^n.)$$

§31. 拉东-尼古丁定理

定理 1. 设 μ 和 ν 是两个全有限测度, $\nu \ll \mu$, 并且 ν 不恒为零, 则存在正数 ε 和可测集 A , 使得 $\mu(A) > 0$, 并使得 A 对于广义测度 $\nu - \varepsilon\mu$ 为正集.

证明. 设 $X = A_n \cup B_n$ 是 X 对于广义测度 $\nu - \frac{1}{n}\mu$ 的哈恩分解, $n=1, 2, \dots$, 并令

$$A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

由于 $B_0 \subset B_n$, 我们有

$$0 \leq \nu(B_0) \leq \frac{1}{n}\mu(B_0), \quad n=1, 2, \dots,$$

从而有 $\nu(B_0) = 0$. 因此 $\nu(A_0) > 0$, 根据绝对连续性的假设条件就有 $\mu(A_0) > 0$. 由此可见, 至少对于 n 的一个值有 $\mu(A_n) > 0$; 对于这个 n 值, 令 $A = A_n$ 和 $\varepsilon = \frac{1}{n}$, 即得定理的结论. \blacksquare

在下面这个定理 (称为拉东-尼古丁定理) 中建立了有关绝对连续性的基本结论.

定理 2. 设 (X, \mathcal{S}, μ) 是全 σ -有限测度空间, ν 是定义在 \mathcal{S} 上的 σ -有限广义测度, 并且 ν 对于 μ 是绝对连续的, 则存在 X 上的有限值可测函数 f 使得对于每一个可测集 E 有

$$\nu(E) = \int_E f d\mu.$$

函数 f 在下述意义下是唯一确定的: 如果同时有 $\nu(E) = \int_E g d\mu$, $E \in \mathcal{S}$, 则 $f = g[\mu]$.

我們特別指出，在定理中並沒有肯定 f 是可積的。不難看出， f 為可積的必要和充分條件是： ν 為有限。然而，記號 $\int f d\mu$ 的引用隱含着（參看 §25）下述事實： f 的正部 f^+ 和負部 f^- 中至少有一個是可積的；如果 f^+ 是可積的，則 ν 的上變差 ν^+ 是有限的，如果 f^- 是可積的，則下變差 ν^- 是有限的。

證明。由於 X 可以表為可列個具有有限 μ 和 ν 值的不相交可測集的併，我們首先可以假定 μ 和 ν 都是有限的，而不致喪失普遍性（對於存在性和唯一性的證明，都可以這樣假定）。如果 ν 是有限的，則 f 是可積的，應用 §25 定理 5 即得唯一性的證明。最後，由於假設條件 $\nu \ll \mu$ 與條件

$$\nu^+ \ll \mu, \quad \nu^- \ll \mu$$

是等價的，因此剩下的只是要在 μ 和 ν 都是有限測度的場合下證明 f 的存在性。

設 \mathfrak{R} 是由具有下述性質的全体非負函數 f 組成的類： f 對於 μ 是可積的，並且對於每一個可測集 E 有 $\int_E f d\mu \leq \nu(E)$ 。令

$$\alpha = \sup \left\{ \int f d\mu : f \in \mathfrak{R} \right\},$$

並設 $\{f_n\}$ 是 \mathfrak{R} 中函數的一個叙列使得

$$\lim_n \int f_n d\mu = \alpha.$$

如果 E 是任意固定的可測集， n 是任意固定的正整數，並且 $g_n = f_1 \cup \dots \cup f_n$ ，則 E 可以表為 n 個不相交可測集的併集， $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$ ，使得 $g_n(x) = f_j(x)$ ， $x \in E_j$ ， $j = 1, \dots, n$ 。於是我們有

$$\int_E g_n d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f_i d\mu \leq \sum_{j=1}^n \nu(E_j) = \nu(E).$$

若令 $f_0(x) = \sup \{f_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$ ，則 $f_0(x) = \lim_n g_n(x)$ 。由 §27 定理 2 可知， $f_0 \in \mathfrak{R}$ 並且 $\int f_0 d\mu = \alpha$ 。因為 f_0 是可積的，所以存在有限值函數 f 使得 $f_0 = f[\mu]$ ；以下我們證明，若 $\nu_0(E) = \nu(E) -$

$\int_E f d\mu$, 則測度 ν_0 恒等于零.

假定 ν_0 不恒为零, 則根据定理 1, 存在正数 ε 和可測集 A , 使得 $\mu(A) > 0$, 并使得对于每一个可測集 E 有

$$\varepsilon\mu(E \cap A) \leq \nu_0(E \cap A) = \nu(E \cap A) - \int_{E \cap A} f d\mu.$$

令 $g = f + \varepsilon\chi_A$, 則对于每一个可測集 E 有

$$\int_E g d\mu = \int_E f d\mu + \varepsilon\mu(E \cap A) \leq \int_{E-A} f d\mu + \nu(E \cap A) \leq \nu(E),$$

因此 $g \in \mathfrak{R}$. 但因

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \varepsilon\mu(A) > \alpha,$$

这与 α 的定义相矛盾, 定理于是得証. \blacksquare

(1) 設 (X, \mathfrak{S}, μ) 是一个測度空間, 对于每一个可測集 E , 令

$$\nu(E) = \int_E f d\mu,$$

則

$$X = \{x: f(x) > 0\} \cup \{x: f(x) \leq 0\}$$

是 X 对于 ν 的一个哈恩分解.

(2a) 設 (X, \mathfrak{S}) 是一个可測空間, μ 和 ν 是 \mathfrak{S} 上的全有限測度, 且 $\nu \ll \mu$.

令 $\bar{\mu} = \mu + \nu$; 若对于每一个可測集 E , $\nu(E) = \int_E f d\bar{\mu}$, 則 $0 \leq f(x) < 1[\mu]$.

(2b) 若对于每一个非負可測函数 g 有 $\int g d\nu = \int fg d\bar{\mu}$, 則对于每一个可測集 E 有 $\nu(E) = \int_E \frac{f}{1-f} d\mu$. (提示: 将假設条件改写为

$$\int g(1-f) d\nu = \int fg d\mu.$$

对于每一个 E , 令

$$g = \frac{\chi_E}{1-f}.)$$

(3) 設測度空間 (X, \mathfrak{S}, μ) 是具有勒貝格測度的单位区間, M 是一个不可測集. 設 (α_1, β_1) 和 (α_2, β_2) 是两个正实数对使得 $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 1$, $\tilde{\mathfrak{S}}$ 是由 \mathfrak{S} 与 M 組成的类产生的 σ -环; 并設 $\tilde{\mu}_i$ 是由 (α_i, β_i) 所确定的 μ 在

\tilde{S} 上的擴張, $i=1, 2$ (參看 16.2). 則存在可測函數 f_1 和 f_2 使得對於每一個可測集 E 有

$$\tilde{\mu}_1(E) = \int_E f_1 d\tilde{\mu}_2 \quad \text{和} \quad \tilde{\mu}_2(E) = \int_E f_2 d\tilde{\mu}_1.$$

f_1 和 f_2 是怎樣的函數?

(4) 在 μ 為廣義測度的場合下, 拉東-尼古丁定理仍成立. (提示: 令 $X=A \cup B$ 為 X 對於 μ 的一個哈恩分解. 在 A 中對於 ν 和 μ^+ 並在 B 中對於 ν 和 μ^- 分別應用拉東-尼古丁定理.)

(5) 設 μ 是全 σ -有限的廣義測度. 因為 μ^+ 和 μ^- 對於 μ 和 $|\mu|$ 都是絕對連續的, 我們有

$$\mu^+(E) = \int_E f_+ d\mu = \int_E g_+ d|\mu| \quad \text{和} \quad \mu^-(E) = \int_E f_- d\mu = \int_E g_- d|\mu|.$$

函數 f_+, g_+, f_- 和 g_- 滿足關係式 $f_+ = g_+[\mu]$ 和 $f_- = g_-[\mu]$. 它們是怎樣的函數?

(6) 設 μ 是廣義測度, 如果對於每一個可測集 E 有

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad \text{和} \quad |\nu|(E) = \int_E g d|\mu|,$$

則 $g = |f|[\mu]$.

(7) 即使在 ν 不是 σ -有限的場合下, 拉東-尼古丁定理仍然成立; 但在這種情形下被積函數不一定是有限值的. (提示: 只須在 ν 是一個測度而 μ 為有限的場合下證明這個命題; 應用 30.11.)

(8) 如果 μ 不是全 σ -有限的, 則即使 ν 為有限, 拉東-尼古丁定理也不一定成立. (提示: 設 X 是一個不可列集, S 是由全體可列子集以及具有可列余集的子集組成的類. 對於 S 中每一個 E , 令 $\mu(E)$ 為 E 中之點的數目; 並按照 E 為可列或不可列而令 $\nu(E)$ 等於 0 或 1.)

(9) 設 (X, S) 是一個可測空間, μ 和 ν 是 S 上的 σ -有限測度, 並且 $\nu \ll \mu$, 則拉東-尼古丁定理可以分別地應用到每一個可測集上. 可能會發生這樣的問題: 是否可以在 X 上定義一個適當的函數 f , 使得 f 對於一切可測集可以同時作為被積函數? 下面的例子說明, 一般講來這是不可能的.

設 A 是任意不可列集, 它的勢是 α , B 是以 β 為勢的一個集, $\beta > \alpha$. 設 X 是由一切有序數對 (a, b) 組成的集, 其中 $a \in A, b \in B$. 我們稱形如 $\{(a, b_0): a \in A\}$ 的集為水平直綫, 形如 $\{(a_0, b): b \in B\}$ 的集為垂直直綫. 設 S 是

由一切具有下述性质的集 E 组成的类: E 能被可列个水平和垂直直线 L 所遮盖, 而对于每一个这样的 L , 或者 $L \cap E$ 是可列的, 或者 $L - E$ 是可列的 (参看 12.1). 对于 S 中每一个 E , 令 $\mu(E)$ 为使 $L - E$ 为可列的水平垂直直线 L 的数目, $\nu(E)$ 为使 $L - E$ 为可列的垂直直线 L 的数目. 显然, μ 和 ν 都是 σ -有限测度, 并且 $\nu \ll \mu$. 现在假定存在 X 上的一个函数 f 使得对于 S 中每一个 E 有 $\nu(E) = \int_E f d\mu$. 不难看出, 集 $\{x: f(x)=0\}$ 在每一个垂直直线上必须为可列; 而对于每一个水平直线 L , $L - \{x: f(x)=0\}$ 必须为可列. 前者说明集 $\{x: f(x)=0\}$ 的势不大于 $\aleph_0 = \alpha$, 而后者则说明这个集的势不小于 $\beta(\alpha - \aleph_0) \geq \beta$.

(10) 在拉东-尼古丁定理中, 加之于测度空间的条件, 可以换成一个较全 σ -有限为弱, 而较 σ -有限为强的条件, 定理仍然能够成立. 这个条件可以叙述如下. 空间可以表为具有有限测度不相交可测集类 D 的并集, 并使得每一个可测集在精确到一个测度为零的集的程度内能被 D 中可列个集所遮盖. 下面是满足这个条件但并非全 σ -有限的测度空间的一个例子.

令 X 为欧氏平面, S 是由一切具有下述性质的集 E 组成的类: E 能被可列条水平直线所遮盖, 并且 E 在每一条这样的水平直线上是勒贝格可测的. 如果 E 是一条水平直线的勒贝格可测子集, 定义 $\mu(E)$ 等于 E 的勒贝格测度; 对于 S 中一般的 E , μ 的值可以根据可列可加性而唯一地确定.

(11) 在(9)中如果 $B=A$, 并且这个集的势是 \aleph_1 (=最小不可列势), 则上面的证明不能用. 事实上, 在这种情形下, 存在 X 的子集 E , E 在每一个垂直直线上是可列的, 而对于每一个水平直线 L , $L - E$ 是可列的. (提示: 将 A 作成正序集, 即对于 A 中每一个 a , 以一个序数 $\xi(a) < \aleph_1$ (=最小不可列序数) 与之对应. 于是在 A 的全体点与小于 \aleph_1 的全体序数之间建立了一个一一对应关系. 令 $E = \{(a, b): \xi(a) < \xi(b)\}$.)

(12) 设 μ 是一个全有限测度, 对于每一个可测集 E , 令 $\nu(E) = \int_E f d\mu$, 则集

$$B(t) = \{x: f(x) \leq t\}$$

对于广义测度 $\nu - t\mu$ 为负集 (参看 (1)). 利用集 $B(t)$ 重建函数 f (参看 18.10), 据此可以得到拉东-尼古丁定理的另一种证明方式. 在这种证明的方式里, 主要的困难在于负集并非唯一的. 对于每一个 t , 选择 $B(t)$ 使 $\mu(B(t))$ 为极大, 这样可以局部地解决这个困难.

§32. 广义测度的导数

在拉东-尼古丁定理中出现的被积函数,常以一个富有启示意味的特别记号来表示. 设 μ 是一个全 σ -有限测度, 如果对于每一个可测集 E , $\nu(E) = \int_E f d\mu$, 则记为

$$f = \frac{d\nu}{d\mu} \quad \text{或} \quad d\nu = f d\mu.$$

拉东-尼古丁被积函数 f 也可以叫做拉东-尼古丁导数. 由微分记号的运算在形式上得出的 f 的全部性质, 都可以表为精确的定理而获得证明. 有些性质是很显然的, 例如

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu},$$

而有些则是积分的较深性质. 下面我们精确地叙述并证明复合函数的微分法则, 以及由此导出的积分号下的代换法则. 当然, 我们必须记住, 拉东-尼古丁导数 $\frac{d\nu}{d\mu}$ 仅仅在“几乎处处对于 μ ”的意义下是唯一确定的; 因此, 要用文字详细地表达一个微分公式, 就不得不时常用到“几乎处处”的字样.

定理 1. 设 λ 和 μ 是全 σ -有限测度, $\mu \ll \lambda$, 并设 ν 是全 σ -有限广义测度, $\nu \ll \mu$, 则

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\lambda} [\lambda].$$

证明. 如果上式对于 ν 的上变差和下变差都成立, 则上式对于 ν 也成立; 因此我们只须在 ν 是一个测度的场合下证明这个定理. 为了记号的简便起见, 令

$$\frac{d\nu}{d\mu} = f, \quad \frac{d\mu}{d\lambda} = g.$$

由于 ν 是非负的, 根据 §25 定理 4 就有 $f \geq 0 [\mu]$. 不丧失普遍性, 可以假定 f 是处处非负的.

設 $\{f_n\}$ 是非負簡單函數的一個增叙列，它在 X 中每一点处收斂到 f (§20 定理 2)。根据 §27 定理 2，对于每一个可測集 E ，我們有

$$\lim_n \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu \quad \text{和} \quad \lim_n \int_E f_n g d\lambda = \int_E f g d\lambda.$$

但对于每一个可測集 F ，有

$$\int_E \chi_F d\mu = \mu(E \cap F) = \int_{E \cap F} g d\lambda = \int_E \chi_{FG} d\lambda,$$

于是

$$\int_E f_n d\mu = \int_E f_n g d\lambda, \quad n=1, 2, \dots,$$

因此

$$v(E) = \int_E f d\mu = \int_E f g d\lambda. \quad |$$

定理 2. 設 λ 和 μ 是全 σ -有限測度， $\mu \ll \lambda$ ，并設 f 是使得 $\int f d\mu$ 有定义的有限值可測函数，則

$$\int f d\mu = \int f \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda.$$

証明. 对于每一个可測集 E ，令

$$v(E) = \int_E f d\mu,$$

然后应用定理 1。于是，对于每一个可測集 E ，有

$$v(E) = \int_E f \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda;$$

令 $E=X$ ，即得定理的結論。 |

下面是有关广义測度之間的关系的最后一条定理。它說明了一个全 σ -有限广义測度 ν 可以分解为两部分，其中一部分对于另外一个全 σ -有限广义測度 μ 是絕對連續的，而另一部分对于 μ 是奇异的。这种分解称为勒貝格分解。

定理 3. 設 (X, S) 是可測空間， μ 和 ν 是 S 上的全 σ -有限广

义测度，則存在唯一确定的两个全 σ -有限广义测度 ν_0 和 ν_1 ，使得 $\nu = \nu_0 + \nu_1$ ，并使得 $\nu_0 \perp \mu, \nu_1 \ll \mu$ 。

証明。和以前一样，我們可以假定 μ 和 ν 都是有限的。如果 ν_i ($i=0, 1$) 对于 $|\mu|$ 是绝对連續或奇异的，則它对于 μ 也是绝对連續或奇异的，因此我們可以假定 μ 是一个测度。又因为我們可以分別地对待 ν^+ 和 ν^- ，因此又可以假定 ν 也是一个测度。

对于全有限的测度，这个定理的証明方式是一种很有用的技巧。定理的証明建立在下述簡單的事实上： ν 对于 $\mu + \nu$ 是绝对連續的。根据这个事实可知，存在可測函数 f ，使得对于每一个可測集 E ，有

$$\nu(E) = \int_E f d\mu + \int_E f d\nu.$$

因为 $0 \leq \nu(E) \leq \mu(E) + \nu(E)$ ，我們有 $0 \leq f \leq 1[\mu + \nu]$ ，从而有 $0 \leq f \leq 1[\nu]$ 。令 $A = \{x: f(x) = 1\}$ ， $B = \{x: 0 \leq f(x) < 1\}$ ，則

$$\nu(A) = \int_A d\mu + \int_A d\nu = \mu(A) + \nu(A),$$

由于 ν 是有限的，所以 $\mu(A) = 0$ 。对于每一个可測集 E ，令

$$\nu_0(E) = \nu(E \cap A) \quad \text{和} \quad \nu_1(E) = \nu(E \cap B),$$

則显然有 $\nu_0 \perp \mu$ 。剩下需要証明的是 $\nu_1 \ll \mu$ 。

設 $\mu(E) = 0$ ，則

$$\int_{E \cap B} d\nu = \nu(E \cap B) = \int_{E \cap B} f d\nu,$$

于是

$$\int_{E \cap B} (1-f) d\nu = 0.$$

由于 $1-f \geq 0[\nu]$ ，因此 $\nu_1(E) = \nu(E \cap B) = 0$ ；这就証明了 ν_0 和 ν_1 的存在性。

如果 $\nu = \nu_0 + \nu_1$ 和 $\nu = \bar{\nu}_0 + \bar{\nu}_1$ 是 ν 的两个勒貝格分解，則 $\nu_0 - \bar{\nu}_0 = \bar{\nu}_1 - \nu_1$ 。因为 $\nu_0 - \bar{\nu}_0$ 对于 μ 是奇异的（参看 30.10），而 $\bar{\nu}_1 - \nu_1$ 对

于 μ 是绝对连续的, 由此有 $\nu_0 = \bar{\nu}_0$ 和 $\nu_1 = \bar{\nu}_1$ (参看 30.9). |

(1) 利用对于广义测度积分的概念, 拉东-尼古丁导数的定义可以推广到 μ 为广义测度的情形. 在这种情形下, 如果 λ 和 μ 是广义测度, 定理 1 仍成立. (提示: 考虑 X 对于广义测度 λ, μ, ν 的三个哈恩分解. 在这三个分解里各取一个集, 作成这三个集的交集, 于是将 X 分解为八个集. 在这八个集的任意一个的可测子集上, 集函数 λ, μ 和 ν 三者都保持不变号; 因此, 可以直接应用定理 1.)

(2) 设 μ 和 ν 是全 σ -有限广义测度, $\mu \equiv \nu$, 则

$$\frac{d\mu}{d\nu} = 1 / \frac{d\nu}{d\mu}.$$

(3) 设 μ 和 ν 是全 σ -有限广义测度, $\nu \ll \mu$, 则

$$\nu\left(\left\{x: \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0\right\}\right) = 0.$$

(4) 设 μ_0, μ_1 和 μ_2 都是全有限测度, 并且 $d\mu_0 = f_1 d(\mu_0 + \mu_1) = f_2 d(\mu_0 + \mu_2) = f d(\mu_0 + \mu_1 + \mu_2)$, 则几乎处处对于 $\mu_0 + \mu_1 + \mu_2$ 有

$$f(x) = \begin{cases} \frac{f_1(x) f_2(x)}{f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) f_2(x)}, & \text{若 } f_1(x) f_2(x) \neq 0, \\ 0, & \text{若 } f_1(x) = f_2(x) = 0. \end{cases}$$

(5) 设 $\{\mu_n\}$ 和 $\{\nu_n\}$ 是全有限测度的两个叙列, 令

$$\bar{\mu}_n = \sum_{i=1}^n \mu_i, \quad \bar{\nu}_n = \sum_{i=1}^n \nu_i, \quad \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i, \quad \nu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i,$$

并假定 μ 和 ν 都是有限测度. 如果 $\bar{\nu}_n \ll \bar{\mu}_n, n=1, 2, \dots$, 则 $\nu \ll \mu$, 并且

$$\lim_n \frac{d\bar{\nu}_n}{d\bar{\mu}_n} = \frac{d\nu}{d\mu} [\mu].$$

这个命题可以根据下列辅助定理而得证.

(5a) 设 $\{E_n\}$ 是可测集的叙列使得 $\bar{\mu}_n(E_n) = 0, n=1, 2, \dots$, 则 $\mu(\limsup_n E_n) = 0$. (提示: $\bar{\mu}_n(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \bar{\mu}_k(E_k)$.)

(5b) 设 $\{\phi_n\}$ 和 $\{\psi_n\}$ 是两个函数列使得 $\phi_n = \psi_n [\bar{\mu}_n], n=1, 2, \dots$, 则几乎处处对于 μ 有

和 $\limsup_n \phi_n(x) = \limsup_n \psi_n(x)$
 $\liminf_n \phi_n(x) = \liminf_n \psi_n(x).$

(提示: 令 $E_n = \{x: \phi_n(x) \neq \psi_n(x)\}$, 应用 (5a).)

由 (5b) 可知, 我們只須对于导数 $\frac{d\nu_n}{d\bar{\mu}_n}$ 的任意一种固定的表示式来証明

(5). 令

$$\frac{d\nu_n}{d\mu} = f_n \quad \text{和} \quad \frac{d\mu_n}{d\mu} = g_n, \quad n=1, 2, \dots,$$

則根据定理 1,

$$\frac{d\bar{\nu}_n}{d\bar{\mu}_n} = \frac{f_1 + \dots + f_n}{g_1 + \dots + g_n} [\bar{\mu}_n], \quad n=1, 2, \dots$$

就是这样一种固定的表示式.

$$(5c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \frac{d\nu}{d\mu}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n = 1[\mu]. \quad (\text{提示: 由于}$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(E) = \int_E (g_1 + \dots + g_n) d\mu$$

和

$$\sum_{i=1}^n \nu_i(E) = \int_E (f_1 + \dots + f_n) d\mu, \quad n=1, 2, \dots,$$

根据 §27 定理 2 和 §25 定理 5 即得結論.)

第七章

乘积空间

§33. 笛卡儿乘积空间

設 X 和 Y 是任意两个集(不一定是同一空间的子集), 由一切序偶 (x, y) 組成的集, 其中 $x \in X, y \in Y$, 称为**笛卡儿乘积空间**, 記为 $X \times Y$. 笛卡儿乘积空间的最为熟知的例子是欧几里得平面, 它常被看作两个坐标軸的乘积. 在以下的討論中, 許多地方要用到由这个例子所啓示的術語和概念. 例如, 若 $A \subset X, B \subset Y$, 則我們称集 $E = A \times B$ ($X \times Y$ 的一个子集) 为**矩形**, 而称构成这个矩形的集 A 和 B 为矩形的**边**(注意, 除非在矩形的边是区間的情形下, 此处的用法和通常矩形的意义不同).

定理 1. 矩形为空集的必要和充分条件是: 它的一个边为空集.

証明. 設 $A \times B \neq \emptyset$; 如果 $(x, y) \in A \times B$, 則同时有 $x \in A$ 和 $y \in B$, 因此 $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. 另一方面, 如果 $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$, 則存在一个点 (x, y) 使得 $(x, y) \in A \times B$, 因此 $A \times B \neq \emptyset$. \blacksquare

定理 2. 設 $E_1 = A_1 \times B_1$ 和 $E_2 = A_2 \times B_2$ 是兩個非空矩形, 則 $E_1 \subset E_2$ 的必要和充分条件是

$$A_1 \subset A_2 \quad \text{和} \quad B_1 \subset B_2.$$

証明. 条件显然是充分的. 条件的必要性可以証明如下. 設 $(x, y) \in A_1 \times B_1$. 假定存在 A_1 中的点 x_1 使得 $x_1 \notin A_2$, 則将有

$$(x_1, y) \in A_1 \times B_1 \quad \text{和} \quad (x_1, y) \notin A_2 \times B_2.$$

由此可見, 这样的点 x_1 不可能存在, 因此 $A_1 \subset A_2$. 同理可証

$B_1 \subset B_2$. |

定理 3. 設 $A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2$ 是一個非空矩形，則 $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$.

證明。根據定理 2,

$$A_1 \subset A_2 \subset A_1, \quad B_1 \subset B_2 \subset B_1. \quad |$$

定理 4. 設 $E = A \times B$, $E_1 = A_1 \times B_1$ 和 $E_2 = A_2 \times B_2$ 是三個非空矩形，則 E 成為 E_1 與 E_2 的不相交併集的必要和充分條件是：或者 A 是 A_1 與 A_2 的不相交併集而 $B = B_1 = B_2$ ，或者 B 是 B_1 與 B_2 的不相交併集而 $A = A_1 = A_2$ ，二者必居其一。

證明。首先證明條件是必要的。由於 $E_1 \subset E$ 和 $E_2 \subset E$ ，根據定理 2 有 $A_1 \subset A$ 和 $A_2 \subset A$ ，從而有 $A_1 \cup A_2 \subset A$ ；同理， $B_1 \cup B_2 \subset B$ 。但因

$$E_1 \cup E_2 \subset (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2),$$

我們有 $A \subset A_1 \cup A_2$ 和 $B \subset B_1 \cup B_2$ ，因此有 $A = A_1 \cup A_2$ 和 $B = B_1 \cup B_2$ 。類似地可證

$$0 = E_1 \cap E_2 \supset (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

由定理 1 可知， $A_1 \cap A_2$ 和 $B_1 \cap B_2$ 二者中至少有一個是空集。

設 $A_1 \cap A_2 = 0$ ，以下我們證明在這個場合下必有 $B = B_1 = B_2$ ($B_1 \cap B_2 = 0$ 的場合可以類似地加以討論)。假定存在點 $y \in B - B_1$ 。如果 x 是 A_1 中任意的點，則 $(x, y) \in E$ ；但是我們知道（由於 $y \notin B_1$ ） $(x, y) \notin E_1$ ，並且（由於 $x \notin A_2$ ） $(x, y) \notin E_2$ 。這個結果與假設條件 $E = E_1 \cup E_2$ 相抵觸，因此 $B - B_1 = 0$ ；同理 $B - B_2 = 0$ 。

條件的充分性證明比較簡單。設 A 是 A_1 和 A_2 的不相交併集，並且 $B = B_1 = B_2$ 。於是有 $A \supset A_1$, $A \supset A_2$, $B \supset B_1$, $B \supset B_2$ ，因此 $E \supset E_1 \cup E_2$ 。此外，如果 $(x, y) \in E$ ，則按照 $x \in A_1$ 或 $x \in A_2$ 而分別有

$$(x, y) \in E_1 \quad \text{或} \quad (x, y) \in E_2,$$

可見 E 的確是 E_1 和 E_2 的不相交併集。 |

定理 5. 設 S 和 T 分別是由 X 和 Y 的子集組成的環，則由

形如 $A \times B$ 的矩形的一切不相交有限并组成的类 \mathbf{R} , 其中 $A \in \mathbf{S}$, $B \in \mathbf{T}$, 是一个环.

证明. 我們首先证明, 两个形如 $A \times B$ 之集的交集仍是一个形如 $A \times B$ 的集. 如果二集中有一个是空集, 或者二集的交集是空集, 这个结果是很明显的. 如果

$$E_1 = A_1 \times B_1, \quad E_2 = A_2 \times B_2,$$

并且

$$(x, y) \in E_1 \cap E_2,$$

則有 $x \in A_1 \cap A_2$ 和 $y \in B_1 \cap B_2$, 因此

$$E_1 \cap E_2 \subset (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

另一方面, 根据定理 2, $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ 被 E_1 和 E_2 所包, 因而也被 $E_1 \cap E_2$ 所包. 因此

$$E_1 \cap E_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

但因 \mathbf{S} 和 \mathbf{T} 都是环, 所以 $A_1 \cap A_2 \in \mathbf{S}$, $B_1 \cap B_2 \in \mathbf{T}$. 由此立即可以推知, \mathbf{R} 对于有限交的运算是封闭的.

由于

$$\begin{aligned} & (A_1 \times B_1) - (A_2 \times B_2) = \\ & = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2)] \cup [(A_1 - A_2) \times B_1], \end{aligned}$$

我們看出, 两个形如 $A \times B$ 之集的差集是另外两个同样形式之集的不相交并集; 但因

$$\bigcup_{i=1}^n E_i - \bigcup_{j=1}^m F_j = \bigcup_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^m (E_i - F_j),$$

利用上段的结果可知, \mathbf{R} 对于差集的运算是封闭的. 最后, \mathbf{R} 对于不相交有限并的运算显然是封闭的, 定理于是证明完毕. \blacksquare

现在假定 \mathbf{S} 和 \mathbf{T} 分别是由 X 和 Y 的子集组成的 σ -环. 我們用記号 $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ 表示由一切形如 $A \times B$ 之集的类产生的 σ -环, 其中 $A \in \mathbf{S}$, $B \in \mathbf{T}$. 这个 σ -环是由 $X \times Y$ 的子集组成的.

定理 6. 設 (X, \mathbf{S}) 和 (Y, \mathbf{T}) 是可测空间, 則 $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ 也是可测空间.

可测空间 $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ 称为可测空间 (X, \mathbf{S}) 和 (Y, \mathbf{T}) 的笛卡兒

乘积空間。

証明。設 $(x, y) \in X \times Y$, 則存在集 A 和 B 使得 $x \in A \in \mathbf{S}, y \in B \in \mathbf{T}$; 因此 $(x, y) \in A \times B \in \mathbf{S} \times \mathbf{T}$. \square

我們注意到, 這是我們第一次引用測度空間是它的可測集的併集這一事實; 在本章中, 我們將會看到可測空間這個性質的重要用處。

我們將不止一次地用到可測矩形的概念。現在我們給出它的兩個定義, 它們都是很明顯而且自然的。第一個定義: 可測空間 (X, \mathbf{S}) 和 (Y, \mathbf{T}) 的笛卡兒乘积空間中的矩形若屬於 $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$, 則稱為可測矩形; 第二個定義: 若 $A \in \mathbf{S}, B \in \mathbf{T}$, 則 $A \times B$ 稱為可測矩形。對於非空矩形, 不難驗證這兩個定義是等價的; 目前我們採用第二個定義。按照這個定義, 我們就可以說, 兩個可測空間的笛卡兒乘积空間中的全體可測集類就是由全體可測矩形類產生的 σ -環。

(1) [可測]矩形的任何可列類的交集是[可測]矩形。如果將“可列”二字略去, 這個命題是否成立?

(2) 對於空的矩形, 定理 2 和定理 4 中的條件並非必要, 又定理 3 也不成立。

(3) 在定理 5 的假設條件下, 由一切形如 $A \times B$ 的集組成的類 \mathbf{P} , 其中 $A \in \mathbf{S}, B \in \mathbf{T}$, 是一個半環。如果 \mathbf{S} 和 \mathbf{T} 是半環, 上述命題是否成立?

(4) 如果(3)中的環 \mathbf{S} 和 \mathbf{T} 各包含兩個或兩個以上不相同的非空集, 則 \mathbf{P} 不是一個環。

(5) $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ 為 σ -代數的必要和充分條件是: \mathbf{S} 和 \mathbf{T} 都是 σ -代數。

(6) 設 (X, \mathbf{S}) 和 (Y, \mathbf{T}) 是可測空間, 則 $X \times Y$ 中任意一個可測集被一個可測矩形所包。(提示: 能被可測矩形遮蓋的集組成一個 σ -環。)

§34. 截 口

設 (X, \mathbf{S}) 和 (Y, \mathbf{T}) 是可測空間, $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ 是它們的笛卡兒乘积空間。如果 E 是 $X \times Y$ 的任意一個子集, x 是 X 中任意一個點, 我們稱集 $E_x = \{y: (x, y) \in E\}$ 是 E 的一個截口, 說得更確切

些,是由 x 确定的截口。关于截口,有时我们只注意它是由空间 X 中的点所确定(因而这个截口是 Y 的一个子集),至于究竟是由哪一个点所确定,则无关紧要,这时我们可以用 X -截口这个术语来表示。集 $E^y = \{x: (x, y) \in E\}$ 称为由 Y 中的点 y 所确定的 Y -截口; 主要的是应该对 X -截口与 Y -截口加以区别。我们特别强调指出,乘积空间中的集的截口并不是这个乘积空间中的集,而是分支空间的子集。

设 f 是定义在乘积空间 $X \times Y$ 的子集 E 上的任意一个函数, x 是 X 中任意一个点,则定义在截口 E_x 上由等式

$$f_x(y) = f(x, y)$$

定出的函数 f_x 称为 f 的截口,说得确切些,是 f 的 X -截口,更确切些,是由 x 确定的截口。同样,由 Y 中点 y 确定的 f 的 Y -截口定义为 $f^y(x) = f(x, y)$ 。

定理 1. 可测集的每一个截口是可测集。

证明. 设 \mathbf{E} 是由 $X \times Y$ 中具有下述性质的一切子集组成的类: 它的每一个截口是可测集。如果 $E = A \times B$ 是一个可测矩形,则 E 的截口或者是空集,或者等于 E 的一个边 (A 或 B , 按照截口是 Y -截口或 X -截口而定),因而 $E \in \mathbf{E}$ 。容易验证, \mathbf{E} 是一个 σ -环,因此 $\mathbf{S} \times \mathbf{T} \subset \mathbf{E}$ 。 |

定理 2. 可测函数的每一个截口是可测函数。

证明. 设 f 是定义在 $X \times Y$ 上的可测函数, $x \in X$, M 是数直线上任意一个波雷耳集,则由定理 1 及关系式

$$\begin{aligned} f_x^{-1}(M) &= \{y: f_x(y) \in M\} = \{y: f(x, y) \in M\} = \\ &= \{y: (x, y) \in f^{-1}(M)\} = (f^{-1}(M))_x \end{aligned}$$

即得 $N(f_x) \cap f_x^{-1}(M)$ 的可测性 (我们注意到 $N(f_x) = (N(f))_x$)。类似地可以证明, f 的任意 Y -截口也是可测的。 |

(1) 设 χ 是 $X \times Y$ 的子集 E 的特征函数, 则 χ_x 和 χ^y 分别是 E_x 和 E^y 的特征函数, 特别是, 如果 χ 是矩形 $A \times B$ 的特征函数, 则有

$$\chi(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y).$$

简单函数的每一个截面是简单函数。

(2) 設 $X=Y$ 是任意不可列集, $\mathbf{S}=\mathbf{T}$ 是由全体可列子集組成的类. 令 $D=\{(x, y): x=y\}$, 則 D 的每一个截面是可測的, 但 D 是不可測的; 換一句話說, 定理 1 的逆定理不成立。

(3) 設 f 是定义在可測空間 X 和 Y 的笛卡兒乘积空間上的广义实值函数, 具有下述性質: 对于数直綫上的每一个波雷耳集 M , $f^{-1}(M)$ 与任何可測集的交集是可測集; 則 f 的每一个截面也具有这个性質. 如果在可測空間的定义中, 将“可測空間是全体可測集的併集”这一条件除去, 上述命題是否仍成立? 上述性質与可測性之間的因果关系如何?

(4) 非空矩形为可測集, 当而且只当它是可測矩形时. (提示: 如果 $A \times B$ 可測, 則 $A \times B$ 的每一个截面可測.)

(5) 設 (X, \mathbf{S}) 是一个可測空間使得 $X \in \mathbf{S}$ (即, 使得 \mathbf{S} 是一个 σ -代数), Y 是数直綫, \mathbf{T} 是全体波雷耳集类. 如果 f 是定义在 X 上的非負实值函数, 則称 $X \times Y$ 的子集

$$V^*(f) = \{(x, y): x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

为 f 的上縱标集, 而称

$$V_*(f) = \{(x, y): x \in X, 0 \leq y < f(x)\}$$

为 f 的下縱标集 (例如, 恒等于零的函数的下縱标集是空集). 下面一系列的命題是对于函数可測性的另一种考虑方式。

(5a) 如果 f 是一个非負简单函数, 則 $V^*(f)$ 和 $V_*(f)$ 都是可測集. (提示: 这两个集都是有限个可測矩形的併集.)

(5b) 如果 f 和 g 是非負函数使得对于一切 x 有 $f(x) \leq g(x)$, 則

$$V^*(f) \subset V^*(g), \quad V_*(f) \subset V_*(g).$$

(5c) 如果 $\{f_n\}$ 是非負函数的一个增叙列, 并且这个叙列处处收敛到 f , 則 $\{V_*(f_n)\}$ 是一个以 $V_*(f)$ 为和集的遞增集叙列; 类似地, 如果 $\{f_n\}$ 是非負函数的一个减叙列, 并且这个叙列处处收敛到 f , 則 $\{V^*(f_n)\}$ 是一个以 $V^*(f)$ 为交集的遞减集叙列。

(5d) 如果 f 是一个非負可測函数, 則 $V^*(f)$ 和 $V_*(f)$ 都是可測集. (提示: 如果 f 是有界的, 則存在简单函数的叙列 $\{g_n\}$ 和 $\{h_n\}$ 使得

$$0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq f \leq h_{n+1} \leq h_n, \quad n=1, 2, \dots,$$

并使得 $\lim_n g_n = \lim_n h_n = f$.)

(5e) 如果 E 是 $X \times Y$ 中的任意可测集, α 和 β 是两个实数, 其中 $\alpha > 0$, 则集 $\{(x, y) : (x, \alpha y + \beta) \in E\}$ 是 $X \times Y$ 的一个可测子集. (提示: 如果 E 是一个可测矩形, 结论成立; 一切能使结论成立的集组成一个 σ -环.)

(5f) 如果 f 是一个非负函数使得 $V^*(f)$ [或 $V_*(f)$] 为可测, 则 f 是一个可测函数. (提示: 关于 $V^*(f)$ 的部分, 只须证明对于每一个正的实数 c , $\{x : f(x) > c\}$ 是一个可测集. 令 $E = V^*(f)$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) : \left(x, \frac{1}{n}y + c\right) \in E, y > 0 \right\} = \{(x, y) : f(x) > c, y > 0\};$$

因为可测矩形的边是可测的, 由此即得命题的结论.)

(5g) 如果称集 $\{(x, y) : f(x) = y\}$ 为函数 f (不限定是非负的) 的图象, 则可测函数的图象是可测集.

§35. 乘积测度

我們現在繼續研究笛卡兒乘积空间的性質, 考虑乘积空间的分支空间不但是可测空间, 并且是测度空间的情形.

定理 1. 設 (X, S, μ) 和 (Y, T, ν) 是 σ -有限测度空间, E 是 $X \times Y$ 的任意可测子集, 则定义在 X 上由等式 $f(x) = \nu(E_x)$ 确定的函数 f 以及定义在 Y 上由等式 $g(y) = \mu(E^y)$ 确定的函数 g 都是非负可测函数, 并且

$$\int f d\mu = \int g d\nu.$$

证明. 設 M 是由能使结论成立的一切集 E 组成的类, 则不难看出, M 对于不相交可列并的运算是封闭的. 由 μ 和 ν 的 σ -有限性可知, $S \times T$ 中的每一个集能被可列个不相交可测矩形的并集所遮盖, 其中每一个可测矩形的边具有有限的测度. 由此可见, 如果我们能够证明, 对于边的测度为有限的每一个可测矩形, 它的每一个可测子集属于 M , 则任何可测集都将属于 M . 換一句話說, 定

理的証明只須在有限測度的場合下進行；對於有限測度，下面我們証明，每一個可測矩形（因而，可測矩形的任何不相交有限併）屬於 \mathbf{M} ，並且 \mathbf{M} 是一個單調類。

設 $E = A \times B$ 是一個非空可測矩形，則有 $f = \nu(B)\chi_A$ 和 $g = \mu(A)\chi_B$ 。於是 f 和 g 都是可測函數，並且

$$\int f d\mu = \mu(A) \cdot \nu(B) = \int g d\nu.$$

\mathbf{M} 是單調類這一事實可由關於函數列積分的定理（特別是 §26 定理 4 和 §27 定理 2）導出（測度 μ 和 ν 的有限性說明這些定理是可以應用的）。

因為由可測矩形的一切不相交有限併組成的類是一個環（§33 定理 5），並且根據定義，全體可測集類就是由這個環產生的 σ -環，所以（§6 定理 2）每一個可測集屬於 \mathbf{M} ，定理於是証明完畢。 |

定理 2. 設 (X, \mathbf{S}, μ) 和 (Y, \mathbf{T}, ν) 是 σ -有限測度空間；對於 $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ 中每一個集 E ，令

$$\lambda(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \mu(E^y) d\nu(y).$$

則集函數 λ 是一個 σ -有限測度，並且具有下述性質：對於每一個可測矩形 $A \times B$ ，

$$\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

這個條件唯一地確定了 λ 。

測度 λ 稱為測度 μ 和 ν 的乘積測度，記為 $\lambda = \mu \times \nu$ ；測度空間 $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T}, \mu \times \nu)$ 稱為測度空間 (X, \mathbf{S}, μ) 和 (Y, \mathbf{T}, ν) 的笛卡兒乘積空間。

証明。利用關於單調敘列的積分定理（§27 定理 2，並參看 27.2）就可以說明 λ 是一個測度。 λ 的 σ -有限性可由下述事實導出： $X \times Y$ 的每一個可測子集能被可列個具有有限測度的可測矩形的併集所遮蓋；唯一性可由 §13 定理 1 導出。 |

(1) 設 $X=Y$ 是单位区間, $\mathbf{S}=\mathbf{T}$ 是全体波雷耳集类; 令 $\mu(E)$ 为 E 的勒貝格測度, 并令 $\nu(E)$ 为 E 中之点的数目. 如果 $D=\{(x,y):x=y\}$; 則 D 是 $X \times Y$ 的一个可測子集使得

$$\int \nu(D_x) d\mu(x) = 1, \quad \int \mu(D^y) d\nu(y) = 0.$$

換一句話說, 如果在定理 1 中将 σ -有限的条件除去, 則定理不成立.

(2) 两个 σ -有限完备測度空間的笛卡兒乘积空間不一定是完备的. (提示: 令 $X=Y$ 为单位区間, M 是 X 的一个不可測子集, y 是 Y 中任意一个点. 考虑集 $M \times \{y\}$; 參看 34.4.)

(3) 設 (X, \mathbf{S}, μ) 是一个全 σ -有限測度空間, (Y, \mathbf{T}, ν) 是数直綫, 其中 \mathbf{T} 是全体波雷耳集类, ν 是勒貝格測度; 并設 $\lambda = \mu \times \nu$. 我們已經看到 (34.5), 对于定义在 X 上的每一个非負可測函数 f , 因而对于每一个非負可积函数 f , 縱标集 $V^*(f)$ 和 $V_*(f)$ 都是 $X \times Y$ 的可測子集; 現在我們断言:

$$\lambda(V_*(f)) = \lambda(V^*(f)) = \int f d\mu.$$

(提示: 考虑到关于以简单函数来逼近函数以及关于函数列积分的已知結論, 只須对于简单函数 f 証明上列等式.) 这个等式在闡述积分理論的另一个系統里, 用来作为 $\int f d\mu$ 的定义; 这就是“积分是曲綫下的面积”这一种說法的一个精确的表达方式.

(4) 在 (3) 的假設条件下, 可測函数的圖象是測度为零的集. (提示: 只須考虑定义在全有限測度空間上的非負有界可測函数, 而对于这种函数可以应用 (3).)

(5) 設 (X, \mathbf{S}, μ) 和 (Y, \mathbf{T}, ν) 是 σ -有限測度空間, $\lambda = \mu \times \nu$, 則对于 $\mathbf{H}(\mathbf{S} \times \mathbf{T})$ 中的每一个集 E , $\lambda^*(E)$ 是形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$ 的和数的下确界, 其中 $\{E_n\}$ 是遮盖 E 的可測矩形列. (提示: 參看 33.3, §10 定理 1, 和 8.5.)

§36. 富比尼定理

在本节中我們將研究乘积空間上的积分与分支空間上的积分之間的关系. 在整个这一节里, 我們假定:

(X, \mathbf{S}, μ) 和 (Y, \mathbf{T}, ν) 是 σ -有限測度空間, $\lambda = \mu \times \nu$ 是 $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ 上

的乘积测度。

設定义在 $X \times Y$ 上的函数 h 能使它的积分有定义(例如, 若 h 为可积函数或非負可测函数), 則积分記为

$$\int h(x, y) d\lambda(x, y) \quad \text{或} \quad \int h(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y),$$

并称为 h 的重积分。設 h_x 能使

$$\int h_x(y) d\nu(y) = f(x)$$

有定义, 并且 $\int f d\mu$ 也有定义, 則習慣上記为

$$\int f d\mu = \int \int h(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int d\mu(x) \int h(x, y) d\nu(y).$$

类似地, 如果 g 是定义在 Y 上由等式

$$\int h^y(x) d\mu(x) = g(y)$$

确定的函数, 則它的积分(若存在)記为

$$\int g d\nu = \int \int h(x, y) d\mu(x) d\nu(y) = \int d\nu(y) \int h(x, y) d\mu(x).$$

积分 $\int \int h d\mu d\nu$ 和 $\int \int h d\nu d\mu$ 称为 h 的叠积分。我們用下面的記号表示 h 在 $X \times Y$ 的一个可测子集 E 上的重积分和叠积分, 也就是 $\chi_E h$ 的重积分和叠积分:

$$\int_E h d\lambda, \quad \iint_E h d\mu d\nu, \quad \iint_E h d\nu d\mu.$$

由于(集或函数的) X -截口是由 X 中的点所确定的, 所以, 如果我們說, “某一个命題对于几乎每一个 X -截口成立”, 这就意味着使得命題不成立的点 x 所成的集是 X 中一个测度为零的集。类似地可以定义 “几乎每一个 Y -截口” 这一說法。如果一个命題同时对于几乎每一个 X -截口和几乎每一个 Y -截口成立, 我們就說命題对于几乎每一个截口成立。

下面是一个简单然而重要的定理。

定理 1. $X \times Y$ 的可测子集 E 具有零测度的必要和充分条件是：几乎每一个 X -截面 [或几乎每一个 Y -截面] 具有零测度。

证明。根据乘积测度的定义，我们有

$$\lambda(E) = \begin{cases} \int \nu(E_x) d\mu(x), \\ \int \mu(E^y) d\nu(y). \end{cases}$$

如果 $\lambda(E) = 0$ ，则上式右端的两个积分是有限的，所以（根据 §25 定理 2）它们的非负被积函数必须几乎处处为零。另一方面，如果任何一个被积函数几乎处处为零，则 $\lambda(E) = 0$ 。 ▮

定理 2. 如果 h 是定义在 $X \times Y$ 上的非负可测函数，则

$$\int h d(\mu \times \nu) = \iint h d\mu d\nu = \iint h d\nu d\mu.$$

证明。如果 h 是一个可测集 E 的特征函数，则有

$$\int h(x, y) d\nu(y) = \nu(E_x) \quad \text{和} \quad \int h(x, y) d\mu(x) = \mu(E^y),$$

由 §35 定理 2 即得定理的结论。在一般情形，我们可以选取一个处处收敛到 h 的非负简单函数的增叙列 $\{h_n\}$ (§20 定理 2)。由于简单函数是有限个特征函数的线性组合，所以定理的结论对于每一个 h_n 成立。

根据 §27 定理 2，有

$$\lim_n \int h_n d\lambda = \int h d\lambda.$$

令

$$f_n(x) = \int h_n(x, y) d\nu(y),$$

则由叙列 $\{h_n\}$ 的性质可知， $\{f_n\}$ 是非负可测函数的一个增叙列，这个叙列处处收敛到

$$f(x) = \int h(x, y) d\nu(y)$$

(參看 §27 定理 2)。由此可見, f 是可測的 (並且顯然是非負的); 再應用一次 §27 定理 2 就得到下面的結論:

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

這就證明了重積分與疊積分之一相等; 類似地可以證明重積分與另外一個疊積分相等。 |

下面這個定理普遍地被稱為**富比尼定理**, 定理 1 和 2 有時也被稱為富比尼定理。

定理 3. 設 h 是定義在 $X \times Y$ 上的可積函數, 則 h 的幾乎每一個截口是可積的。如果函數 f 和 g 分別由等式

$$f(x) = \int h(x, y) d\nu(y) \quad \text{和} \quad g(y) = \int h(x, y) d\mu(x)$$

確定, 則 f 和 g 都是可積的, 並且

$$\int h d(\mu \times \nu) = \int f d\mu = \int g d\nu.$$

證明。 因為實值函數為可積的必要和充分條件乃是它的正部和負部為可積, 所以我們只須考慮函數 h 為非負的情形。在這種情形下, 由定理 2 即得定理中最後的等式。由於非負可測函數 f 和 g 具有有限的積分, 所以它們是可積的。這個性質說明了 f 和 g 是幾乎處處有限的, 因此, h 的截口具有定理中所述的可積性, 定理於是證明完畢。 |

(1) 設 X 是勢為 \aleph_1 的一個集, \mathbf{S} 是由一切可列集及其餘集組成的類; 對於 \mathbf{S} 中的 A , 若 A 是可列的, 令 $\mu(A) = 0$, 若 A 是不可列的, 則令 $\mu(A) = 1$. 設 $(Y, \mathbf{T}, \nu) = (X, \mathbf{S}, \mu)$, E 是 $X \times Y$ 的一個子集, 它在每一個垂直直綫上是可列的, 而對於每一個水平直綫 L , $L - E$ 是可列的 (參看 31.11), 並設 h 是 E 的特徵函數, 則 h 是一個非負函數使得

$$\int h(x, y) d\mu(x) = 0, \quad \int h(x, y) d\nu(y) = 1.$$

这个例子并不是定理 2 的反例, 为甚么?

(2) 設 (X, \mathbf{S}, μ) 和 (Y, \mathbf{T}, ν) 是具有勒貝格測度的单位区間, E 是 $X \times Y$ 的一个子集, 使得对于每一个 x 和每一个 y , E_x 和 $X - E^y$ 都为可列 (参看 (1)), 則 E 是不可測的.

(3) 下面所述的是本节定理的一个有趣的扩充. 設 (X, \mathbf{S}, μ) 是一个全有限測度空間, (Y, \mathbf{T}) 是一个可測空間使得 $Y \in \mathbf{T}$. 假定对于 X 中几乎每一个 x , 有 \mathbf{T} 上的一个有限測度 ν_x 与之对应, 并滿足下述条件: 对于 Y 的每一个固定的可測子集 B , 若令 $\phi(x) = \nu_x(B)$, 則 ϕ 是定义在 X 上的一个可測函数. 令 $\nu(B) = \int \nu_x(B) d\mu(x)$, 如果 g 是定义在 Y 上的一个非負可測函数, 并且令 $f(x) = \int g(y) d\nu_x(y)$, 則 f 是定义在 X 上的一个非負可測函数, 并且有 $\int f d\mu = \int g d\nu$.

(4) 富比尼定理的証明在有些文献中比我們所給出的証明稍为复杂些, 这是由于将 λ 增补成为完全測度而引起的. 換一句話說, 如果将 λ 換为 $\bar{\lambda}$, 本节的几个定理仍然成立. (提示: 每一个 $(\overline{\mathbf{S} \times \mathbf{T}})$ 可測的函数必与一个 $(\mathbf{S} \times \mathbf{T})$ 可測的函数几乎处处相等 [λ]; 参看 21.1.)

在以下(5)至(9)中, 我們假定測度空間 (X, \mathbf{S}, μ) 和 (Y, \mathbf{T}, ν) 都是全有限的. 容易驗証, 得出的結論可以扩充到全 σ -有限測度空間的情形, 因而也可以扩充到两个 σ -有限測度空間的乘积空間中每一个可測子集上.

(5) 設 E 和 F 是 $X \times Y$ 的可測子集使得对于 X 中 [几乎] 每一个 x 有 $\nu(E_x) = \nu(F_x)$, 則 $\lambda(E) = \lambda(F)$. (这个命題的某些特殊情形常以不严格的形式表达出来而称为开伐里里原理.)

(6) 設 f 和 g 分别是定义在 X 和 Y 上的可积函数, 則由等式 $h(x, y) = f(x)g(y)$ 确定的函数 h 是定义在 $X \times Y$ 上的可积函数, 并且

$$\int h d(\mu \times \nu) = \int f d\mu \cdot \int g d\nu.$$

(7) 設 $\mu(X) = \nu(Y) = 1$, A_0 和 B_0 分别是 X 和 Y 的可測子集使得 $\mu(A_0) = \nu(B_0) = \frac{1}{2}$. 設 λ 是 $(A_0 \times Y) \Delta (X \times B_0)$ 的特征函数, 并令 $f(x, y) = 2\lambda(x, y)$. 如果对于 $X \times Y$ 的每一个可測子集 E , 令

$$\bar{\lambda}(E) = \int_E f(x, y) d\lambda(x, y),$$

則 $\bar{\lambda}$ 是 $S \times T$ 上的一个有限测度, 具有下述性質: 当 $A \in S, B \in T$, 有 $\bar{\lambda}(A \times Y) = \mu(A)$ 和 $\bar{\lambda}(X \times B) = \nu(B)$. 換一句話說, 乘积测度 λ 并不是由它在这些特殊矩形上的值所唯一确定的.

(8) 乘积空間的存在性常用下述直接但比較复杂的方法来証明. 由可测矩形的一切不相交有限併組成的类是一个环 \mathbf{R} (§33 定理 5); 如果

$$\bigcup_{i=1}^n (A_i \times B_i) \quad \text{和} \quad \bigcup_{j=1}^m (C_j \times D_j)$$

是 \mathbf{R} 中同一个集的两種表示方式, 則因

$$\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m [(A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j)]$$

是这个集的另一種表示方式, 我們有

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \cdot \nu(B_i) = \sum_{j=1}^m \mu(C_j) \cdot \nu(D_j).$$

換一句話說, 等式

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \times B_i)\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \cdot \nu(B_i)$$

唯一地确定了定义在 \mathbf{R} 上的一个集函数 λ . 可以証明(主要是对于 \mathbf{R} 中之集証明一种較弱形式的富比尼定理), λ 是一个测度, 对于这个测度可以应用测度的擴張定理 (§13 定理 1).

(9) 設 A 和 B 分別是 X 和 Y 的任意子集(不一定是可測的), 則

$$\lambda^*(A \times B) = \mu^*(A) \cdot \nu^*(B).$$

(提示: 設 A^* 和 B^* 分別是 A 和 B 的可測复盖, 則由关系式 $A \times B \subset A^* \times B^*$ 可以推出 $\lambda^*(A \times B) \leq \mu^*(A) \cdot \nu^*(B)$. 另一方面, 考虑 $A \times B$ 的一个可測复盖 E^* , 可以导出反方向的不等式. 由于 $E^* \cap (A^* \times B^*)$ 也是 $A \times B$ 的一个可測复盖, 我們可以假定 $E^* \subset A^* \times B^*$. 根据富比尼定理, 我們有

$$\lambda(E^*) \geq \int_A \nu(E_x^*) d\mu(x) \geq \mu^*(A) \cdot \nu^*(B).$$

§37. 有限維乘积空間

前面我們建立了两个因子的乘积空間的理論; 現在我們要研究怎样可以将这个理論扩充到有限个因子的場合. 設 $n (> 1)$ 是一

个正整数, X_1, \dots, X_n 是 n 个集; 由一切形如 (x_1, \dots, x_n) 的元素组成的集, 其中 $x_i \in X_i, i=1, \dots, n$, 称为这些集的笛卡儿乘积空间, 记为

$$X_1 \times \dots \times X_n \quad \text{或} \quad \prod_{i=1}^n X_i \quad \text{或} \quad \prod \{X_i: i=1, \dots, n\}.$$

若 A_i 是 X_i 的任意子集, $i=1, \dots, n$, 则称集 $\prod_{i=1}^n A_i$ 是一个矩形。

对于笛卡儿乘积, 正如同对于一种代数运算, 我们要探讨一下它是否满足结合律。例如, 若 X_1, X_2 和 X_3 是三个集, 则不改变它们的次序我们可以作出三个新的集, $(X_1 \times X_2) \times X_3$, $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ 和 $X_1 \times X_2 \times X_3$ 。在怎样的意义下我们可以将这三个笛卡儿乘积空间看作相等呢? 显然, 它们并不是由相同的元素组成的; 将 $((x_1, x_2), x_3)$ 和 (x_1, x_2, x_3) 混淆起来是不对的。然而, 在上述三个笛卡儿乘积空间的每两个之间, 存在一个很自然的一一对应关系, 这就是使点

$$((x_1, x_2), x_3), \quad (x_1, (x_2, x_3)) \quad \text{和} \quad (x_1, x_2, x_3)$$

互相对应的关系。对于笛卡儿乘积空间的那些使我们感兴趣的结构性的性质来说, 这个对应关系能使它们保持不变, 因此我们以后将上述三个乘积永远看作是恒等的。又如对于七个因子的情形, 我们将集 $((X_1 \times X_2) \times X_3) \times ((X_4 \times X_5) \times (X_6 \times X_7))$ 的元素

$$(((x_1, x_2), x_3), ((x_4, x_5), (x_6, x_7)))$$

看作就是集 $X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 \times X_5 \times X_6 \times X_7$ 的元素

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7).$$

上面所述恒等的意义, 使我们在许多定理的证明里, 得以将语句的叙述简单化。例如, 我们可以将 $X_1 \times \dots \times X_n$ 看作每次取两个因子的连乘积:

$$(\dots((X_1 \times X_2) \times X_3) \times \dots) \times X_n,$$

于是我们就可以利用数学归纳法来证明与 §33 中定理相类似的定理。但在表达这些结论时必须稍加注意, 以免错误。例如将 §33 定理 4 推广, 它的正确的说法如下。如果

$$E = \prod_{i=1}^n A_i, \quad F = \prod_{i=1}^n B_i \quad \text{和} \quad G = \prod_{i=1}^n C_i$$

是三个非空矩形, 則 E 成为 F 与 G 的不相交併集的必要和充分条件是: 存在正整数 $j, 1 \leq j \leq n$, 使得 A_j 是 B_j 与 C_j 的不相交併集, 并使得对于 $i \neq j$ 有

$$A_i = B_i = C_i.$$

关于(集或函数的)截口的概念, 也需要稍加修改; 由 X_i 中的点 x_i 所确定的, $\prod_{i=1}^n X_i$ 中某集的 X_j -截口是

$$\prod \{X_i: 1 \leq i \leq n, i \neq j\}$$

的一个子集.

設 $(X_i, \mathbf{S}_i), i=1, \dots, n$, 是可測空間, 我們用記号

$$\mathbf{S}_1 \times \dots \times \mathbf{S}_n \quad \text{或} \quad \prod_{i=1}^n \mathbf{S}_i \quad \text{或} \quad \prod_i \{\mathbf{S}_i: i=1, \dots, n\}$$

表示由形如 $\prod_{i=1}^n A_i$ 的一切矩形的类产生的 σ -环, 其中 $A_i \in \mathbf{S}_i, i=1, \dots, n$; 并定义可測空間 $(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbf{S}_1 \times \dots \times \mathbf{S}_n)$ 为上述 n 个可測空間的笛卡兒乘积空間. 由此可知, 可測集[或可測函数]的每一个截口是可測集[或可測函数]. 設有 n 个 σ -有限測度空間: $(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i), i=1, \dots, n$, 利用数学归納法可以定义它們的笛卡兒乘积空間; 在 $\mathbf{S}_1 \times \dots \times \mathbf{S}_n$ 上存在唯一的一个測度 μ (記为 $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$), 使得对于每一个可測矩形 $A_1 \times \dots \times A_n$, 有

$$\mu(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i).$$

富比尼定理也可以直接加以推广, 因而在一个乘积空間中可积函数的积分可以化为任何次序的叠积分而加以計算.

習慣上我們称乘积空間 $X = \prod_{i=1}^n X_i$ 是 n 維的. 我們引用这个术语, 并不是要对維数概念給以定义, 也并不認为对于一个空間來說維数是它的內在結構性的性質, 而只是用来提醒我們由分支空間 X_i 构成 X 的方式. 同一个測度空間, 可能有时被看作是三維的, 而有时却被看作是二維的; 例如, 若 $n=3$, 我們可以将 X 看作 $X_1 \times X_2 \times X_3$, 也可以看作 $X_0 \times X_3$ (其中 $X_0 = X_1 \times X_2$).

在以下(1)至(5)中,我們假定 X_i 是数直綫, S_i 是全体波雷耳集类, μ_i 是勒貝格測度, $i=1, \dots, n$; 并令

$$(X, S, \mu) = \prod_{i=1}^n (X_i, S_i, \mu_i).$$

(1) σ -环 S 中的集称为 n 維欧几里得空間的波雷耳集. 全体波雷耳集类就是由全体开集类产生的 σ -环.

(2) 設 ϕ 是定义在 X 上的波雷耳可測函数, (Y, T) 是一个可測空間使得 $Y \in T$, f_1, \dots, f_n 是定义在 Y 上的实值可測函数, 則由等式 $\tilde{f}(y) = \phi(f_1(y), \dots, f_n(y))$ 确定的函数 \tilde{f} 是定义在 Y 上的可測函数 (参看 §19 定理 2).

(3) 完全測度 $\bar{\mu}$ 称为 n 維勒貝格測度; §§15 和 16 中絕大部分結論对于 $\bar{\mu}$ 都成立. 特别是, 若 U 和 C 分别是全体开集类和全部閉集类, 則对于 X 的每一个子集 E , 有

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U \in U\}$$

和

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(C) : E \supset C \in C\}.$$

(4) 設 T 是由关系式

$$T(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n), \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i, \quad i=1, \dots, n$$

确定的綫性变换, 則对于 X 的每一个子集 E , 有

$$\mu^*(T(E)) = |\Delta| \cdot \mu^*(E) \quad \text{和} \quad \mu_*(T(E)) = |\Delta| \cdot \mu_*(E),$$

其中 Δ 是矩陣 (a_{ij}) 的行列式. (提示: 只須对以区間为边的可測矩形 E 証明这个命題. 首先考虑下列特殊情形:

$$(4a) \quad y_i = x_i + b_i, \quad i=1, \dots, n.$$

$$(4b) \quad y_i = x_i \text{ 若 } i \neq j \text{ 且 } i \neq k; \quad y_j = x_k, \quad y_k = x_j.$$

$$(4c) \quad y_i = x_i \text{ 若 } i \neq j; \quad y_j = x_j \pm x_k, \text{ 其中 } k \neq j.$$

$$(4d) \quad y_i = x_i \text{ 若 } i \neq j; \quad y_j = cx_j.$$

要証明一般的情形, 可以将 T 写成上列四种情形的变换的乘积.)

(5) 定义在 X 上由等式

$$\phi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j \quad j=1, \dots, n$$

确定的函数 ϕ_j 是可測函数.

(6) n 維勒貝格測度可以不借助乘积空間的一般理論而定义. 考虑空間 $X_1 \times \dots \times X_n$, 其中 $X_i = X =$ 单位区間. 对于 X 中每一个 x , 設 $x = 0.a_1 a_2 a_3 \dots$

是它的一个二进位小数展开式, 并令

$$x_i = 0.a_1 a_{n+i} a_{2n+i} \dots, \quad i = 1, \dots, n$$

(对于具有两种二进位展开式的 x , 取定一种展开式; 例如, 可取它的有尽展开式). 由关系式 $T(x) = (x_1, \dots, x_n)$ 确定的由 X 到 $X_1 \times \dots \times X_n$ 的变换 T 具有下述性质: 若 E 是 $X_1 \times \dots \times X_n$ 的可测子集, 则 $T^{-1}(E) = \{x: T(x) \in E\}$ 是 X 的可测子集 (要证明这个事实, 可考虑 E 是矩形并且 E 的边是以二进有理数为端点的区间的情形). 等式 $(\mu_1 \times \dots \times \mu_n)(E) = \mu(T^{-1}(E))$ (其中 μ 是 X 中的勒贝格测度) 可以用来作为乘积测度 $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ 的定义; 这个定义与我们以前所述的定义是一致的.

(7) 利用对角线法, 令

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.a_1 a_2 a_4 a_7 \dots, \\
x_2 &= 0.a_3 a_5 a_8 a_{12} \dots, \\
x_3 &= 0.a_6 a_9 a_{13} a_{18} \dots, \\
x_4 &= 0.a_{10} a_{14} a_{19} a_{25} \dots, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

则(6)中所述的程序可以推广, 从而类似地得出在一个“无限维”欧几里得空间中乘积测度的定义.

§38. 无限维乘积空间

要将乘积空间的理论推广到维数为无限的情形, 第一步是很自然的. 设 $\{X_i\}$ 是一个集叙列, 由一切形如 (x_1, x_2, \dots) 的叙列组成的集, 其中 $x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots$, 称为集叙列的笛卡儿乘积空间, 记为

$$X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i.$$

但若每一个 X_i 是一个测度空间, S_i 是由它的可测集组成的一个 σ -环, μ_i 是 S_i 上的一个测度, 则在 X 中可测性与测度的概念应该怎样定义, 就不是很明显的了. 在本节中, 我们将在下面的假设条件下给出它们的定义: 空间 X_i 是全有限测度空间, 并且 $\mu_i(X_i) = 1, i = 1, 2, \dots$. 我们注意到, 对于任何一个全有限测度空间 (X, S, μ) , 只要 $\mu(X) \neq 0$, 总可以将每一个可测集的测度除以 $\mu(X)$, 因

而得到一个新的测度,使得整个空间的测度为 1. 然而我們也将看到,由于 1 这个数在乘积(特别是无限个因子的乘积)的形成中占有特别重要的地位,所以 $\mu_i(X_i) = 1$ 絕不只是一个普通的条件而已.

現在假定,对于每一个 $i=1, 2, \dots$, X_i 是一个集, S_i 是由 X_i 的子集组成的一个 σ -代数, μ_i 是 S_i 上的一个测度,并且 $\mu_i(X_i) = 1$. 在这种情形下,我們定义**矩形**是形如 $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ 的集,其中对于所有的 i 有 $A_i \subset X_i$, 并且除去有限个 i 的值外有 $A_i = X_i$. 矩形 $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ 称为**可测矩形**,若每一个 A_i 是 X_i 的可测子集;根据上面的条件可知,这只是加之于有限个 A_i 的限制条件. 設 S 是由全体可测矩形类产生的 σ -环(事实上它也是一个 σ -代数), 記为 $S = \prod_{i=1}^{\infty} S_i$; $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 的子集若属于 S , 則称为**可测集**.

設 J 是全体正整数集 I 的任意子集;

$$x = (x_1, x_2, \dots) \quad \text{和} \quad y = (y_1, y_2, \dots)$$

是两个点,如果对于 J 中每一个 j 有 $x_j = y_j$, 則称点 x 和 y 在 J 上相合,記为 $x \equiv y(J)$. 設 E 是 X 的一个子集,滿足下述条件:若 $x \equiv y(J)$, 則 x 和 y 或者都在 E 中,或者都不在 E 中,二者必居其一;我們称 E 是一个 J -柱面. 換一句話說,对于任意一个点,若改变它的那些指标不在 J 中的坐标,既不能使原来在 E 中的点移出 E 外,也不能使原来不在 E 中的点进入 E 中,則 E 是一个 J -柱面(參看 6.5d). 例如,若 $J = \{1, \dots, n\}$, A_j 是 X_j 的任意子集, $j = 1, \dots, n$, 則矩形 $A_1 \times \dots \times A_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots$ 是一个 J -柱面.

我們將采用下面的記号:

$$X^{(n)} = \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

根据我們所作的关于乘积空间恒等的規定,我們可以写成 $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i = (X_1 \times \dots \times X_n) \times X^{(n)}$. 与 $X (= X^{(0)})$ 一样,每一个 $X^{(n)}$ 是一个无限維乘积空间,因此,施行于 X 的論点(在以上和在后文中)可以同样用之于 $X^{(n)}$. 对于 $X_1 \times \dots \times X_n$ 中每一个点 (x_1, \dots, x_n)

和 X 中每一个集 E , 我們以記号 $E(x_1, \dots, x_n)$ 表示由 (x_1, \dots, x_n) 确定的 E (在 $X^{(n)}$ 中) 的截面。我們看出, X 中[可測]矩形的每一个这种截面是 $X^{(n)}$ 中一个[可測]矩形。

定理 1. 設 $J = \{1, \dots, n\}$, 并設 X 的子集 E 是一个[可測] J -柱面, 則 $E = A \times X^{(n)}$, 其中 A 是 $X_1 \times \dots \times X_n$ 的一个[可測]子集。

証明。令 $(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \dots)$ 为 $X^{(n)}$ 中任意一个点, A 为由这个点确定的 E (在 $X_1 \times \dots \times X_n$ 中) 的 $X^{(n)}$ -截面。因为集 E 和 $A \times X^{(n)}$ 都是 J -柱面, 可見若 X 中一个点 (x_1, x_2, \dots) 属于这两个 J -柱面中任何一个, 則点 $(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \dots)$ 也属于同一个 J -柱面。但若点 $(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \dots)$ 属于两个 J -柱面 E 和 $A \times X^{(n)}$ 中的一个, 則显然这个点也属于这两个 J -柱面中的另外一个。同样的推理說明, 若 $(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \dots)$ 属于两个 J -柱面中任何一个, 則 $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ 也属于同一个 J -柱面; 因此, E 和 $A \times X^{(n)}$ 是由同样的点組成的。根据 §34 定理 1 可知, 若 E 是可測的, 則 A 也是可測的。 |

設 m 和 n 是正整数, $m < n$, 則 X 的非空子集 E 可能既是一个 $\{1, \dots, m\}$ -柱面, 同时又是一个 $\{1, \dots, n\}$ -柱面。根据定理 1, 我們有

$$E = A \times X^{(m)} \quad \text{和} \quad E = B \times X^{(n)},$$

其中 $A \subset X_1 \times \dots \times X_m, B \subset X_1 \times \dots \times X_n$ 。因为上面两个等式中的第一个可以写成下列形式:

$$E = (A \times X_{m+1} \times \dots \times X_n) \times X^{(n)},$$

根据 §33 定理 3 就有 $B = A \times X_{m+1} \times \dots \times X_n$ 。由此可見, 若 E 是可測集, 从而 A 和 B 都是可測集, 則

$$(\mu_1 \times \dots \times \mu_m)(A) = (\mu_1 \times \dots \times \mu_n)(B).$$

因此, 对于每一个可測 $\{1, \dots, n\}$ -柱面 $A \times X^{(n)}$, 若令

$$\mu(A \times X^{(n)}) = (\mu_1 \times \dots \times \mu_n)(A),$$

则 μ 是具有确定意义的一个集函数。 μ 的定义域记为 \mathbf{F} , 它是由全体具有下述性质的可测集 E 组成的类: 对于 n 的某一个值, E 是一个 $\{1, \dots, n\}$ -柱面; \mathbf{F} 中的集可以称为 X 的有限维子集。容易验证, \mathbf{F} 是一个代数, $\mathbf{S}(\mathbf{F}) = \mathbf{S}$, 并且定义在 \mathbf{F} 上的集函数 μ 是非负有限值集函数, 具有有限可加性。

与 \mathbf{F} 和 μ 相仿, 我们在空间 $X^{(n)}$ 中可以完全类似地定义 $\mathbf{F}^{(n)}$ 和 $\mu^{(n)}$, $n=1, 2, \dots$ 。根据上节中得出的关于有限维乘积空间的性质, 如果 E 属于 \mathbf{F} , 则每一个形如 $E(x_1, \dots, x_n)$ 的截面都属于 $\mathbf{F}^{(n)}$, 并且

$$\mu(E) = \int \dots \int \mu^{(n)}(E(x_1, \dots, x_n)) du_1(x_1) \dots du_n(x_n).$$

定理 2. 设 $\{(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)\}$ 是全有限测度空间的一个数列, $\mu_i(X_i) = 1$, 则在 σ -代数 $\mathbf{S} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i$ 上存在唯一的一个测度 μ , 使得对于每一个形如 $A \times X^{(n)}$ 的可测集 E , 有

$$\mu(E) = (\mu_1 \times \dots \times \mu_n)(A).$$

测度 μ 称为测度 μ_i 的乘积测度, 记为 $\mu = \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i$; 测度空间

$$\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i, \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i \right)$$

称为测度空间 X_i 的笛卡儿乘积空间。

证明. 我们只须证明, 定义在由全体有限维可测集组成的代数 \mathbf{F} 上的集函数 μ 在 0 是上连续的, 也就是说, 如果 $\{E_n\}$ 是 \mathbf{F} 中之集的减数列使得 $0 < \varepsilon \leq \mu(E_j)$, $j=1, 2, \dots$, 则必有 $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \neq \emptyset$; 然后引用 §9 定理 6 和 §13 定理 1, 就完成了本定理的证明。

令 $F_j = \left\{ x_1: \mu^{(1)}(E_j(x_1)) > \frac{\varepsilon}{2} \right\}$, 则由关系式

$$\begin{aligned} \mu(E_j) &= \int \mu^{(1)}(E_j(x_1)) du_1(x_1) = \\ &= \int_{F_j} \mu^{(1)}(E_j(x_1)) du_1(x_1) + \int_{F_j'} \mu^{(1)}(E_j(x_1)) du_1(x_1) \end{aligned}$$

得到 $\mu(E_j) \leq \mu_1(F_j) + \frac{\varepsilon}{2}$, 因此

$$\mu_1(F_j) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $\{F_j\}$ 是 X_1 的可測子集的一个減叙列, 并且 μ_1 (具有可列可加性) 在 0 是上連續的, 因此在 X_1 中至少存在一个点 \bar{x}_1 使得 $\mu^{(1)}(E_j(\bar{x}_1)) \geq \frac{\varepsilon}{2}, j=1, 2, \dots$. 又因 $\{E_j(\bar{x}_1)\}$ 是 $X^{(1)}$ 的可測子集的一个減叙列, 所以剛才施之于 X , $\{E_j\}$ 和 ε 的論点可以同样用之于 $X^{(1)}$, $\{E_j(\bar{x}_1)\}$ 和 $\frac{\varepsilon}{2}$. 于是得到 X_2 中一个点 \bar{x}_2 使得 $\mu^{(2)}(E_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) \geq \frac{\varepsilon}{4}, j=1, 2, \dots$. 这样繼續下去, 我們得到一个叙列 $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots\}$ 使得 $\bar{x}_n \in X_n, n=1, 2, \dots$, 并使得

$$\mu^{(n)}(E_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)) \geq \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad j=1, 2, \dots.$$

現在我們証明, 点 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$ 屬於 $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$. 考虑任意一个 E_j , 并設 E_j 是一个 $\{1, \dots, n\}$ -柱面. 由关系式

$$\mu^{(n)}(E_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)) > 0$$

可知, E_j 中至少有一个点 (x_1, x_2, \dots) 使得 $x_i = \bar{x}_i, i=1, \dots, n$. 因为 E_j 是一个 $\{1, \dots, n\}$ -柱面, 所以 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$ 屬於 E_j . \blacksquare

(1) 对于本节的結論來說, 指标集 I 为全体正整数集这一条件并不是主要的; 任何可列的無限集都可以用来作为 I (按照定义, 空間 $X = \prod\{X_i; i \in I\}$ 是由定义在 I 上具有下述性質的一切函数 x 組成的: 对于每一个指标 i , 函数值 $x(i)$ 是 X_i 中的一个点). 要証明这个命題, 可以利用枚举法, 就是在 I 与全体正整数集之間建立任意一个固定的一一对应关系. 在 I 是全体正整数集の場合, 本节的結論常常是很有用的.

(2) 将乘积空間的理論推广到不可列無限多个因子的場合是出乎意外地容易. 設 I 是任意一个指标集, 如果对于 I 中每一个 i , (X_i, S_i, μ_i) 是一个全有限測度空間, 并且 $\mu_i(X_i) = 1$, 則我們可以和 (1) 中一样定义 $X = \prod\{X_i; i \in I\}$, 至于矩形, 可測矩形以及可測集的概念, 則只要逐字逐句地重复可列个因子的情形就行了. 考虑由全体具有下述性質的集 E 組成的类: 对于 I 的某一个可列子集 J , E 是一个 J -柱面; 因为这个类是包含全体可測

矩形的一个 σ -代数,所以每一个可测集 E 是一个 J -柱面,其中 J 是 I 的一个可列子集.如果令 $\mu(E) = (\prod_{j \in J} \mu_j)(E)$,则 μ 是定义在全体可测集类上的一个测度,并且 μ 具有符合于记号 $\prod_{i \in I} \bar{\mu}_i$ 的乘积性质.

(3) 很容易将有限维和无限维乘积空间的理论结合起来,从而得出一种无限维乘积空间的理论,对于其中的有限个因子可以不要求它们是全有限测度空间,而只要求是 σ -有限的.

(4) 设 $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 是一个类如定理2中所述的乘积空间,如果对于每一个 i , E_i 是 X_i 的一个可测子集,则 $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ 是 X 的一个可测子集,并且

$$\mu(E) = \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(E_i) = \lim_n \prod_{i=1}^n \mu_i(E_i).$$

(提示: 令 $F_n = E_1 \times \cdots \times E_n \times X^{(n)}$,则 $\{F_n\}$ 是 X 中可测集的一个递减列使得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \prod_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \mu(F_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(E_i).$$

(5) 利用乘积空间的理论,可以给出数直线上勒贝格测度的一种完全非拓扑性的构造方式(参看§8定理3的证明),从而得到在 n 维欧几里得空间上勒贝格测度的构造(参看37.6).设 $(X_0, \mathcal{S}_0, \mu_0)$ 是仅包含两个点0与1的测度空间, \mathcal{S}_0 是由 X_0 的一切子集组成的类, $\mu_0(\{0\}) = \mu_0(\{1\}) = \frac{1}{2}$.对于每一个 $i=1, 2, \dots$,令 $(X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i) = (X_0, \mathcal{S}_0, \mu_0)$,并作成乘积空间

$$(X, \mathcal{S}, \mu) = (\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_i, \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i).$$

(5a) 对于 X 中每一个点 $x = (x_1, x_2, \dots)$,集 $\{x\}$ 是可测的,并且 $\mu(\{x\}) = 0$.(提示: 参看(4).)

(5b) 设 \bar{E} 是由 X 中具有下述性质的一切点 $x = (x_1, x_2, \dots)$ 组成的集:除去有限个 i 的值外,对于任何其他 i 值有 $x_i = 1$;则 \bar{E} 是测度为零的可测集.(提示: \bar{E} 是可列的.)令 $\bar{X} = X - \bar{E}$,在以下我们将考虑测度空间 $(\bar{X}, \bar{\mathcal{S}}, \bar{\mu})$,其中 $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cap \bar{X}$, $\bar{\mu}(E \cap \bar{X}) = \mu(E)$, $E \in \mathcal{S}$.

(5c) 如果对于 \bar{X} 中每一个 $x = (x_1, x_2, \dots)$,令

$$z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i},$$

則函数 z 建立了 \bar{X} 与区間 $Z = \{z: 0 \leq z < 1\}$ 之間的一个一一对应关系。(提示: 考虑 Z 中每一个 z 的二进位小数展开式; 如果展开式不是唯一的, 則取有尽展开式.)

(5d) 設 $A = \{z: 0 \leq a \leq z < b \leq 1\}$, $E = \{x: z(x) \in A\}$, 則 E 是可測的, 并且 $\bar{\mu}(E) = b - a$. (提示: 只須考虑 a 和 b 是二进有理数的情形.)

(5e) 設 A 是 Z 中任意波雷耳集, $E = \{x: z(x) \in A\}$, 則 E 是可測的, 并且 $\bar{\mu}(E)$ 等于 A 的勒貝格測度. (提示: 由等式 $\nu(A) = \bar{\mu}(E)$ 确定的集函数 ν 是一个測度, 它在区間上取值与勒貝格測度相等.)

以上(5a) — (5e) 用来建立区間 Z 上的勒貝格測度. 将整个数直綫看作这类区間的不相交可列併集, 我們就可以得到数直綫上的勒貝格測度. 另外一种方法是考虑由全体整数組成的空間 I (以 I 的全体子集組成的类作为可測集类, 并定义一个集的測度为这个集所含点的数目), 并注意到在数直綫与乘积空間 $I \times Z$ 之間存在一个很明显的一一对应关系.

(6) 下面是与 (5) 类似的另外一种建立勒貝格測度的方式. 考虑空間 $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$, 其中 X_0 是全体正整数集, \mathbf{S}_0 是由 X_0 的全体子集組成的类,

$$\mu_0(E) = \sum_{i \in E} 2^{-i}.$$

和前面一样, 我們作出乘积空間 $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, X 中的点是正整数的叙列. 对于 X 中每一个点 $x = (x_1, x_2, \dots)$, 令

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(x_1 + \dots + x_n)}.$$

考虑二进位展开式, 就可以証明(5c), (5d) 和(5e) 中的結論对于这个 z 都成立.

(7) 設 $X_0 = \{x: 0 \leq x < 1\}$ 是半閉单位区間, \mathbf{S}_0 是 X_0 中全体波雷耳集类, μ_0 是 \mathbf{S}_0 上的勒貝格測度. 令

$$(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i) = (X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0), \quad i = 1, 2, \dots,$$

并作出乘积空間 $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. 在 X 和 X_0 之間存在一个一一对应关系, 使得 X_0 中每一个波雷耳集与 X 中一个可測集(即属于 $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i$ 的一个集) 相对应, 并使得相对应的二集具有相等的測度. (提示: 令 Y_0 为(5)中所述的只含有两个点的空間 X_0 , 对于 $i = 0, 1, 2, \dots$ 以及 $j = 1, 2, \dots$, 令 $Y_{ij} = Y_0$, 則 X_i

$= \prod_{j=1}^{\infty} Y_{ij}, i=0, 1, 2, \dots$. 对应关系建立在通常关于二重叙列(即, $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i = \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} Y_{ij}$ 的元素)与普通叙列(即, $X_0 = \prod_{j=1}^{\infty} Y_{0j}$ 的元素)之间的对应关系上.)

第八章

变换与函数

§39. 可测变换

在每一种数学系统里，那些能够使这个系统里某些或全部结构性性质保持不变的变换，总是值得研究的。虽然我们并不预备详尽地讨论在测度论中出现的全部变换，我们却将在本节内介绍一些它们的基本性质。

定义在集 X 上而在集 Y 中取值的函数 T 称为变换。集 X 称为 T 的定义域； Y 中一切形如 $T(x)$ 的点组成的集，其中 $x \in X$ ，称为 T 的变程。以 X 为定义域而变程在 Y 中的变换常称为 X 在 Y 中的变换；如果变程就是 Y ，则称 T 是 X 在 Y 上的变换。对于 X 的每一个子集 E ， E 在 Y 中的变换 T 的变程称为 E 对于 T 的映像，记为 $T(E)$ ；对于 Y 的每一个子集 F ， X 中映像属于 F 的一切点组成的集称为 F 对于 T 的原像，记为 $T^{-1}(F)$ ，即

$$T^{-1}(F) = \{x: T(x) \in F\}.$$

设 T 是一个变换，如果 $T(x_1) = T(x_2)$ 当而且只当 $x_1 = x_2$ 时，则称 T 是一个一一变换。一一变换 T 的逆变换，记为 T^{-1} ，就是这样一个变换：对于 T 的变程中的每一个 $y = T(x)$ ，这个变换由等式 $T^{-1}(y) = x$ 确定。

设 T 是 X 在 Y 中的变换， S 是 Y 在 Z 中的变换，则由等式 $(ST)(x) = S(T(x))$ 确定的 X 在 Z 中的变换 ST 称为 S 和 T 的乘积。

設 T 是 X 在 Y 中的变换, 則对于定义在 Y 上的每一个函数 g , 可以指定一个定义在 X 上的函数 f ; f 由等式 $f(x) = g(T(x))$ 定义, 簡記为 $f = gT$.

定理 1. 設 T 是 X 在 Y 中的变换, g 是定义在 Y 上的函数, M 是 g 的值所在的空間的任何子集, 則

$$\{x: (gT)(x) \in M\} = T^{-1}(\{y: g(y) \in M\}).$$

証明. 下面四个命題是互相等价的:

- (a) $x_0 \in \{x: (gT)(x) \in M\},$
- (b) $g(T(x_0)) \in M,$
- (c) 若 $y_0 = T(x_0),$ 則 $g(y_0) \in M,$
- (d) $T(x_0) \in \{y: g(y) \in M\}.$

(a) 与 (d) 等价恰好就是定理的結論。 |

設 (X, \mathcal{S}) 和 (Y, \mathcal{T}) 是可測空間, T 是 X 在 Y 中的变换, 我們應該怎样定义 T 的可測性呢? 考虑 Y 为数直綫的特殊情形, 由于这种特殊情形的啓發, 我們定义可測变换如下: 如果每一个可測集的原像是可測集, 則称 T 是可測变换. 我們注意到, 这个定义与我們以前引进的可測函数的定义是不一致的; 由于实数 0 所扮演的特殊的角色, 一个可測函数不一定是一个可測变换. 但是这样来定义可測变换, 在应用上却是十分方便的; 只要我們正确地运用“函数”和“变换”两个术语, 就不致于發生任何混淆. 在 X 本身属于 \mathcal{S} 而 Y 是数直綫的情形, 可測变换与可測函数这两个概念相合.

設 T 是 (X, \mathcal{S}) 在 (Y, \mathcal{T}) 中的可測变换, 我們以記号 $T^{-1}(\mathcal{T})$ 表示由一切形如 $T^{-1}(F)$ 的 X 的子集組成的类, 其中 $F \in \mathcal{T}$; 显然, $T^{-1}(\mathcal{T})$ 是一个被 \mathcal{S} 所包的 σ -环.

定理 2. 設 T 是 (X, \mathcal{S}) 在 (Y, \mathcal{T}) 中的可測变换, g 是定义在 Y 上的广义实值可測函数, 則 gT 对于 σ -环 $T^{-1}(\mathcal{T})$ 为可測.

証明. 由定理 1 可知, 对于数直綫上的每一个波雷耳集 M ,

$$\begin{aligned} N(gT) \cap (gT)^{-1}(M) &= \{x: (gT)(x) \in M - \{0\}\} = \\ &= T^{-1}(\{y: g(y) \in M - \{0\}\}) = T^{-1}(N(g) \cap g^{-1}(M)); \end{aligned}$$

根据 T 的可測性得到

$$N(gT) \cap (gT)^{-1}(M) \in T^{-1}(\mathbf{T}). \quad \blacksquare$$

設 T 是 (X, \mathbf{S}) 在 (Y, \mathbf{T}) 中的可測變換，則對於定義在 \mathbf{S} 上的每一個集函數 μ ，可以指定一個定義在 \mathbf{T} 上的集函數 ν ；對於 \mathbf{T} 中每一個 F ， ν 由等式 $\nu(F) = \mu(T^{-1}(F))$ 定義，簡記為 $\nu = \mu T^{-1}$ 。

定理 3. 設 T 是測度空間 (X, \mathbf{S}, μ) 在可測空間 (Y, \mathbf{T}) 中的可測變換， g 是定義在 Y 上的廣義實值可測函數，則等式

$$\int g d(\mu T^{-1}) = \int (gT) d\mu$$

按照下述意義成立：如果兩個積分中任意一個存在，則另一個也存在，並且二者相等。

證明。 只須考慮非負函數 g 。如果 g 是 Y 的一個可測子集 F 的特徵函數，則由定理 1， gT 是 $T^{-1}(F)$ 的特徵函數，因此

$$\int g d(\mu T^{-1}) = (\mu T^{-1})(F) = \mu(T^{-1}(F)) = \int (gT) d\mu.$$

根據這個關係式可知，如果 g 是一個簡單函數，則定理的結論成立。在一般的場合，令 $\{g_n\}$ 為收斂到 g 的一個簡單函數的增敘列；於是 $\{g_n T\}$ 是收斂到 gT 的一個簡單函數的增敘列，取極限即得定理的結論。 \blacksquare

沿用定理 3 中的記號，如果 F 是 Y 的一個可測子集，則對於函數 χ_{FG} 應用定理 3 可得關係式

$$\int_F g(y) d\mu T^{-1}(y) = \int_{T^{-1}(F)} g(T(x)) d\mu(x).$$

我們注意到，只要形式地以 $y = T(x)$ 代入上列等式的任何一端，就可以得到等式的另外一端。

定理 4. 設 T 是測度空間 (X, \mathbf{S}, μ) 在全 σ -有限測度空間 (Y, \mathbf{T}, ν) 中的可測變換，使得 μT^{-1} 對於 ν 是絕對連續的，則在 Y

上存在非负可测函数 ϕ , 使得对于每一个可测函数 g , 等式

$$\int g(T(x))d\mu(x) = \int g(y)\phi(y)d\nu(y)$$

按照下述意义成立: 如果两个积分中任意一个存在, 则另一个也存在, 并且二者相等.

这里的函数 ϕ 相当于多重积分变换理论中的函数行列式 (更确切地说, 相当于函数行列式的绝对值).

证明. 令

$$\phi = \frac{d(\mu T^{-1})}{d\nu}$$

(参看 §32), 然后对定理 3 的结果应用 §32 定理 2. |

设 T 是可测空间 (X, \mathcal{S}) 在可测空间 (Y, \mathcal{T}) 上的一一变换, 如果 T 和 T^{-1} 都是可测的, 则称 T 是保持可测性的变换, 简称为保测性变换. 设 T 是测度空间 (X, \mathcal{S}, μ) 在测度空间 (Y, \mathcal{T}, ν) 上的保测性变换, 如果 $\mu T^{-1} = \nu$, 则称 T 是保持测度的变换, 简称为保测变换.

(1) 两个可测变换的乘积是可测变换.

(2) 设 T 是 (X, \mathcal{S}) 在 (Y, \mathcal{T}) 中的可测变换, f 是定义在 X 上对于 $T^{-1}(\mathcal{T})$ 为可测的函数, 则当 $T(x_1) = T(x_2)$ 时有 $f(x_1) = f(x_2)$. (提示: 如果 F_1 是 Y 中包含 $T(x_1)$ 的一个可测集, 则存在 Y 中的可测集 F 使得

$$\{x: f(x) = f(x_1)\} \cap T^{-1}(F_1) = T^{-1}(F).$$

由 $x_1 \in T^{-1}(F)$ 可以导出 $x_2 \in T^{-1}(F)$.)

(3) 设 T 是 (X, \mathcal{S}) 在 (Y, \mathcal{T}) 上的可测变换, f 是定义在 X 上对于 $T^{-1}(\mathcal{T})$ 为可测的实值函数, 则在 Y 上存在唯一的一个可测函数 g 使得 $f = gT$. (提示: 根据 (2), 对于每一个 $y = T(x)$, g 由等式 $g(y) = f(x)$ 无歧义地确定. 对于数直线上每一个波雷耳集 M , 我们有

$$T^{-1}(\{y: g(y) \in M\}) = \{x: f(x) \in M\},$$

又因 $T(X) = Y$, 所以 $N(g) \cap \{y: g(y) \in M\} \in \mathcal{T}$.) 如果 T 将 X 映入 Y , 结论是否成立?

(4) 設 $X=Y$ =单位区間, S =全体波雷耳集类, T =全体可列集类. 如果变换 T 由等式 $T(x)=x$ 确定, 則 T 是 X 在 Y 上的一个一一可測变换, 但 T 并非保測性变换. 如果 $(X, S)=(Y, T)$, 能不能构造这样的例子?

(5) 設 T 是 (X, S) 在 (Y, T) 中的可測变换, μ 和 ν 是 S 上的两个測度使得 $\nu \ll \mu$, 則 $\nu T^{-1} \ll \mu T^{-1}$.

§40. 測 度 环

設有一个在通常代数意义下的环, 如果它的每一个元素都是冪等的, 則称这个环为布尔环. 換一句話說, 布尔环就是一个集 R , 对于 R 中每一对元素, 定义有两种代数运算 (称为加法和乘法), 滿足下列条件:

(a) 加法和乘法都适合交換律和結合律, 乘法对于加法的分配律成立.

(b) 在 R 中存在一个唯一确定的元素 (記为 0), 使得任意元素 E 与 0 的和*仍为 E .

(c) 对于任意一个元素 E , E 与 E 的和为 0 .

(d) 对于任意一个元素 E , E 与 E 的积*为 E .

布尔环的一个典型的例子就是由集 X 的子集組成的一个环, 而以 $E \Delta F$ 和 $E \cap F$ 分别表示 E 和 F 的和与积. 布尔环这个概念的引进, 完全是由于受到以集为元素的环的啓發, 所以我們以后在任何布尔环中都将以 Δ 和 \cap 分别表示加法和乘法.

关于以集为元素的环, 我們引进了一些概念并建立了一些理論, 这些概念和理論絕大部分都可以毫無更改地用在一般的布尔环的場合. 特别是, 如果併与差的运算分别由等式

$$E \cup F = (E \Delta F) \Delta (E \cap F)$$

*这里的“和”与“积”指的是两个元素經過布尔环中加法与乘法运算而得到的元素.

和

$$E - F = E \Delta (E \cap F)$$

定义, 则这些运算对于布尔环中的元素来说, 适合与集的运算在形式上完全相同的等式。关于包含关系 $E \subset F$ 和 $E \supset F$, 分别由等式

$$E \cap F = E \quad \text{和} \quad E \cap F = F$$

定义, 类似的论点也成立。

我们记得, 任何集类的并集就是包含全体集的最小集, 而交集则是被全体集所包的最大集; 在一个布尔环中, 同样的论点对于并与交也成立 (只要并与交能够形成)。例如, 若 E 和 F 是布尔环 \mathbf{R} 的元素, 则 $E \cup F$ 的确就是包含 E 和 F 的最小元素; 换一句话说, 我们有 $E \subset E \cup F$, $F \subset E \cup F$, 并且如果 G 是 \mathbf{R} 中满足关系式 $E \subset G$ 和 $F \subset G$ 的元素, 则必有 $E \cup F \subset G$ 。然而, 对于布尔环中元素的无限集, 却不一定有任何元素能够包含这个集的全体元素; 即使有, 也不一定有最小的。

设 \mathbf{S} 是一个布尔环, 如果 \mathbf{S} 中元素的每一个可列集具有并集, 则称 \mathbf{S} 是一个布尔 σ -环; 容易验证, 布尔 σ -环中元素的每一个可列集具有交集。由集 X 的子集组成的一个 σ -环就是布尔 σ -环的一个典型的例子。

如果在布尔环 \mathbf{R} 中存在一个异于 0 的元素 (记为 X) 使得对于 \mathbf{R} 中每一个 E 有 $E \subset X$, 则称 \mathbf{R} 为布尔代数。一个布尔 σ -环如果同时是一个布尔代数, 则称为布尔 σ -代数。

对于定义在布尔环上的函数来说, 可加性、测度、 σ -有限性等概念的定义, 与定义在以集为元素的环上的集函数的对应定义相同。设 μ 是定义在布尔环上的测度, 如果 μ 的值只在零元素上为零, 则称 μ 是一个正测度。

设 \mathbf{S} 是由集 X 的子集组成的一个 σ -环。定义在 \mathbf{S} 上的测度 μ 通常不是正测度。但是我们可以借助于几种熟知的方法从 μ 作

出一个正测度。一种方法是考虑测度为零的可测集类 N ，注意到 N 是环 S 的理想子环（这些术语都按照通常代数学的意义来了解），然后以因子环 S/N 来代替 S 。另外一种等效的方法是，对于满足条件 $\mu(E \Delta F) = 0$ 的集 E 和 F ，记为 $E \sim F$ ，注意到关系“ \sim ”具有自反性，对称性和推移性，然后将 S 换为对于关系 \sim 的一切等价类的集。

但是在测度论中最常用和最便利的方法却是另外一种，我们要采用的也正是这一种方法。因为我们要考虑的布尔 σ -环将以可测集为元素，所以我们不预备以其他的系统来代替 S 。我们现在对相等的概念重新给以定义；如果 S 中二集 E 和 F 满足关系式 $\mu(E \Delta F) = 0$ ，则我们将 E 和 F 看作相等而记为 $E = F[\mu]$ 。设 $E_n = F_n[\mu]$ ， $n = 1, 2, \dots$ ，则有

$$E_1 - F_1 = E_2 - F_2 \quad \text{和} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n[\mu];$$

由此可见，即使在新的相等的意义下，对于集论的两种通常的运算来说， S 仍然形成一个布尔 σ -环。设 $E = F[\mu]$ ，则 $\mu(E) = \mu(F)$ ，因此在新的相等的意义下，测度 μ 在 S 上仍是无歧义地确定的。又因关系式 $\mu(E) = 0$ 和 $E = 0[\mu]$ 显然是等价的，所以在新的相等的意义下， μ 变成了一个正测度。

设 (X, S, μ) 是一个测度空间，我们以记号 $S(\mu)$ 表示具有上述对于 μ 为相等的意义的 σ -环 S 。

设 S 是一个布尔 σ -环，在 S 上定义有一个正测度 μ ，则称 S 是一个测度环，记为 (S, μ) 。上面的讨论说明，如果 (X, S, μ) 是一个测度空间，则 $(S(\mu), \mu)$ 是一个测度环；我们称这个测度环为与 X 连带的测度环，或简称为 X 的测度环。一个布尔代数如果同时是一个测度环，则称为测度代数。如同对于测度空间一样，对于测度环和测度代数我们也将以同样的意义引用 [全] 有限和 σ -有限这些术语。

设 (S, μ) 和 (T, ν) 是两个测度环，如果 T 是 S 在 T 上的一个

一一变换,使得对于 S 的任意元素 E, F 和 $E_n, n=1, 2, \dots$, 有

$$T(E-F) = T(E) - T(F),$$

$$T(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(E_n)$$

和

$$\mu(E) = \nu(T(E)),$$

则称 T 是 (S, μ) 和 (T, ν) 之间的一个同构。如果两个测度环之间存在一个同构, 则称这两个测度环是同构的。设 (X, S, μ) 和 (Y, T, ν) 是两个测度空间, 如果与它们连带的测度环 $(S(\mu), \mu)$ 和 $(T(\nu), \nu)$ 是同构的, 则称测度空间 (X, S, μ) 和 (Y, T, ν) 是同构的。

设 E 是测度环 (S, μ) 的一个异于 0 的元素, 如果当 $F \subset E$ 时有 $F=0$ 或 $F=E$, 二者必居其一, 则称 E 是测度环 (S, μ) 的原子 [或测度 μ 的原子]; 不含原子的测度环称为缺原子的。设 (X, S, μ) 是一个测度空间, 如果它的测度环是缺原子的, 则测度空间 X 和测度 μ 都称为缺原子的。

设 (S, μ) 是一个测度环, 我们以记号 \mathcal{S} [或 $\mathcal{S}(\mu)$] 表示 S 中一切具有有限测度的元素的集; 对于 \mathcal{S} 中任意两个元素 E 和 F , 我们采用下列记号:

$$\rho(E, F) = \mu(E \Delta F).$$

容易验证, 函数 ρ 是 \mathcal{S} 的一个度量; 我们称 \mathcal{S} 为与 (S, μ) 连带的度量空间, 或简称为 (S, μ) 的度量空间。设 $(S(\mu), \mu)$ 是测度空间 (X, S, μ) 的测度环, 记号 $\mathcal{S}(\mu)$ 也将用来表示与 $(S(\mu), \mu)$ 连带的度量空间。如果与测度环或测度空间连带的度量空间是可分的, 则称这个测度环或测度空间是可分的。

定理 1. 设 \mathcal{S} 是测度环 (S, μ) 的度量空间, 并设

$$f(E, F) = E \cup F \quad \text{和} \quad g(E, F) = E \cap F,$$

则 f, g 和 μ 对于它们的主目元来说, 都是一致连续的函数。

证明。由关系式

$$\left. \begin{aligned} & \mu((E_1 \cup F_1) - (E_2 \cup F_2)) + \mu((E_2 \cup F_2) - (E_1 \cup F_1)) \\ & \mu((E_1 \cap F_1) - (E_2 \cap F_2)) + \mu((E_2 \cap F_2) - (E_1 \cap F_1)) \end{aligned} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mu(E_1 - E_2) + \mu(F_1 - F_2) + \mu(E_2 - E_1) + \mu(F_2 - F_1)$$

和

$$|\mu(E) - \mu(F)| = |\mu(E - F) - \mu(F - E)| \leqslant$$

$$\leqslant \mu(E - F) + \mu(F - E)$$

立即可得定理的結論。 ▮

定理 2. 設 (X, \mathcal{S}, μ) 是一個 σ -有限測度空間，其中 \mathcal{S} 是能夠由一個可列類產生的 σ -環，則測度為有限的全體可測集的度量空間 $\mathcal{S}(\mu)$ 是可分的。

證明。設 $\{E_n\}$ 是 \mathcal{S} 中集的一個叙列使得 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\{E_n\})$ 。由於 μ 是 σ -有限的，所以，對於每一個 $n=1, 2, \dots$ ，我們可以假定 $\mu(E_n) < \infty$ ，而不致喪失普遍性。根據 §5 定理 3，由 $\{E_n\}$ 產生的環也是可列的，因此我們又可以假定集類 $\{E_n: n=1, 2, \dots\}$ 是一個環。於是根據 §13 定理 4 可知，對於 $\mathcal{S}(\mu)$ 中每一個 E 並對於每一個正數 ε ，存在正整數 n 使得 $\rho(E, E_n) < \varepsilon$ 。這就說明了一個可列集在 $\mathcal{S}(\mu)$ 中稠密，定理於是證明完畢。 ▮

(1) 測度空間 (X, \mathcal{S}, μ) 的度量空間 \mathcal{S} 是完備空間。(提示：如果 $\{E_n\}$ 是 \mathcal{S} 中的一個基本叙列， χ_n 是 E_n 的特徵函數， $n=1, 2, \dots$ ，則 $\{\chi_n\}$ 是依測度基本的，於是可以應用 §22 定理 5.)

(2) 測度環的度量空間是不是完備空間？

(3) 關於布爾環也有一個完備性的概念；這個概念與度量空間的完備性概念有關，但二者並不相同。設 \mathcal{R} 是一個布爾環，如果 \mathcal{R} 的每一個子集 \mathbf{E} 具有併集，則稱 \mathcal{R} 是完備的。顯然，每一個完備布爾環必定是一個布爾 σ -代數；反之，每一個全有限測度代數是完備的。(提示：設 $\tilde{\mathbf{E}}$ 是由 \mathbf{E} 中元素的一切有限併組成的集。令 $\alpha = \sup \{\mu(E) : E \in \tilde{\mathbf{E}}\}$ ，選取 $\tilde{\mathbf{E}}$ 中元素的一個叙列 $\{E_n\}$ 使得 $\lim_n \mu(E_n) = \alpha$ ，並令 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.)

(4) 對於全 σ -有限測度代數，(3) 中的結論也成立。

(5) 設 ρ 是測度環 (\mathcal{S}, μ) 的度量空間 \mathcal{S} 上的度量，則當 E, F 和 G 都

是 \mathcal{S} 中的元素时, 有 $\rho(E\Delta F, F\Delta G) = \rho(E, F)$.

(6) 設 T 是测度环 (\mathbf{S}, μ) 在测度环 (\mathbf{T}, ν) 上的一一变换, 使得当 E 和 F 都属于 \mathbf{S} 时, 有

$$\begin{aligned} T(E-F) &= T(E) - T(F), \\ T(E \cup F) &= T(E) \cup T(F) \end{aligned}$$

和

$$\mu(E) = \nu(T(E)),$$

則 T 是一个同构.

(7) 設 T 是测度环 (\mathbf{S}, μ) 在测度环 (\mathbf{T}, ν) 上的一一变换, 滿足下列条件:

$$\mu(E) = \nu(T(E)), \quad E \subset F,$$

当而且只当 $T(E) \subset T(F)$, 則 T 是一个同构.

(8) 設 \mathcal{S} 是以 ρ 为其度量的度量空間, 如果对于 \mathcal{S} 中任意两个相异的元素 E 和 F , 存在异于 E 和 F 的元素 G 使得

$$\rho(E, F) = \rho(E, G) + \rho(G, F),$$

則称度量空間 \mathcal{S} 是凸的. σ -有限测度环的度量空間为凸的必要和充分条件是: 这个测度环是缺原子的.

(9) 两个测度环之間的同构是它們的度量空間之間等距变换.

(10) 全 σ -有限测度环最多有可列無限多个原子.

(11) 設 \mathcal{S} 是测度空間 (X, \mathbf{S}, μ) 的度量空間, ν 是定义在 \mathbf{S} 上的有限测度使得 $\nu \ll \mu$, 則函数 ν 在 \mathcal{S} 上是無歧义地确定的, 并且是連續的.

(12) 設 (X, \mathbf{S}, μ) 是 σ -有限测度空間. 如果 $\{\nu_n\}$ 是定义在 \mathbf{S} 上的有限广义测度的一个叙列, 其中每一个 ν_n 对于 μ 是絕對連續的, 并且对于 \mathbf{S} 中每一个 E , $\lim_n \nu_n(E)$ 存在且为有限, 則集函数 ν_n 对于 μ 是一致絕對連續的. (提示: 設 \mathcal{S} 是 (X, \mathbf{S}, μ) 的度量空間. 对于每一个固定的正数 ε , 令

$$\mathcal{E}_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} \left\{ E: E \in \mathcal{S}, \quad \left| \nu_n(E) - \nu_m(E) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\}.$$

根据 (11), 每一个 \mathcal{E}_k 是一个閉集, 又由 (1), \mathcal{S} 是一个完备度量空間, 因此应用关于集的范疇的貝尔定理可知, 存在正整数 k_0 和正数 r_0 , 并存在 \mathcal{S} 中的集 E_0 , 使得 $\{E: \rho(E, E_0) < r_0\} \subset \mathcal{E}_{k_0}$. 現在設 δ 是一个正数使得 $\delta < r_0$,

并使得对于 $\mu(E) < \delta$ 和 $n=1, \dots, k_0$ 有 $|\nu_n(E)| < \frac{\varepsilon}{3}$. 不难看出, 当 $\mu(E) < \delta$ 时有

$$\rho(E_0 - E, E_0) < r_0, \quad \rho(E_0 \cup E, E_0) < r_0$$

和

$$|\nu_n(E)| \leq |\nu_{k_0}(E)| + |\nu_n(E_0 \cup E) - \nu_{k_0}(E_0 \cup E)| + |\nu_n(E_0 - E) - \nu_{k_0}(E_0 - E)|.$$

(13) 沿用 (12) 中的記号, 如果 $\nu(E) = \lim_n \nu_n(E)$, 則 ν 是一个有限广义测度, 并且 $\nu \ll \mu$.

(14) 設 $\{\nu_n\}$ 是有限广义测度的叙列, 使得对于每一个可测集 E , $\lim_n \nu_n(E) = \nu(E)$ 存在且为有限, 則 $\nu(E)$ 是一个广义测度. (提示: 設 $|\nu_n(E)| \leq c_n$, $n=1, 2, \dots$; 令

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n c_n} |\nu_n|(E),$$

并应用 (13).)

(15a) 設 \mathbf{R} 是任意布尔环, 則 \mathbf{R} 与某集 X 的子集組成的环是同构的(在通常代数学的意义下). (提示: 考虑由 0 与 1 两个元素組成的布尔代数 \mathbf{R}_0 , 并設 X 是由 \mathbf{R} 在 \mathbf{R}_0 中的一切同态組成的集. 对于 \mathbf{R} 中每一个 E , 令

$$T(E) = \{x: x \in X, x(E) = 1\},$$

則 T 是 \mathbf{R} 在 X 的全体子集組成的代数中的一个同态; 剩下需要証明的是: 若 $E \in \mathbf{R}$ 并且 $E \neq 0$, 則存在 X 中的 x 使得 $x(E) = 1$. 如果 \mathbf{R} 是有限的, 这个結果显然成立. 在一般的場合, 設 X^* 是由定义在 \mathbf{R} 上而在 \mathbf{R}_0 中取值的一切函数組成的集; 对通常乘积拓扑而言, X^* 是一个紧豪司道夫空間. 設 $\tilde{\mathbf{R}}$ 是 \mathbf{R} 的有限子环, 并且 $E \in \tilde{\mathbf{R}}$; $X^*(\tilde{\mathbf{R}})$ 是 X^* 中一切具有下述性質的函数 x^* 組成的集: x^* 是定义在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 上的同态, 并且 $x^*(E) = 1$. 于是关系式

$$\bigcap_{i=1}^n X^*(\tilde{\mathbf{R}}_i) \supset X^*(\tilde{\mathbf{R}})$$

(其中 $\tilde{\mathbf{R}}$ 是由 $\tilde{\mathbf{R}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{R}}_n$ 产生的环) 說明了集类 $\{X^*(\tilde{\mathbf{R}})\}$ 具有有限交的性質.) 这个結果称为斯东定理.

(15b) 上面所述斯东定理的証明, 說明了 \mathbf{R} 与紧豪司道夫空間中又开又閉的集組成的一个环是同构的, 如果 \mathbf{R} 是布尔代数, 則 \mathbf{R} 与紧豪司道夫

空間中一切又开又閉的集組成的环是同构的。(提示: 将 (15a) 中的記号略加更改. 設 X 是由 R 在 R_0 中具有下述性質的一切同态組成的集: 这些同态将 R 的最大元素映成 1. 于是, 在变换 T 之下 R 的映像包含了 X 的拓扑結構的一个基. 如果紧豪司道夫空間的一个又开又閉子集类是一个基, 并且封閉于有限併的运算, 則这个类包含一切又开又閉的集.)

(15c) 設 S 是任意布尔 σ -代数, 則 S 与某集 X 的子集組成的以一个 σ -理想子环为模的 σ -代数是同构的。(提示: 設 X 是一个紧豪司道夫空間, T 是一个代数学的同构, 它将 S 映为 X 中一切又开又閉的集組成的代数; 又設 S_0 是由 X 的一切又开又閉子集类产生的 σ -环, N_0 是 S_0 中一切属于第一种范疇的集类. 如果 $\{E_n\}$ 是又开又閉集的一个叙列, 我們令 $E = T(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(E_n))$; 于是, $E - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 是一个無处稠密集. 換一句話說, 一切又开又閉的集組成的类对于可列併的运算是封閉的 (模 N_0). 尙待証明的是: N_0 不包含任何非空的又开又閉集; 这样就可以保証, 在以 N_0 为模的情况下, T 仍然是一个同构. 然而上述命題乃是关于集的范疇的貝尔定理的一个特殊情形; 而貝尔定理对于局部紧空間成立, 正如同对于完备度量空間一样.)

§41. 关于同构的定理

本节的目的是要說明, 測度环的概念并不是像看起来这样普遍的一个概念. 事实上, 我們将要証明, 在一些不太严的条件下, 每一个測度环是某个測度空間的測度环. 关于这一类的定理为数頗多, 我們只預备挑选其中比較特殊的一个加以討論, 这一个無論在历史上或在現今的应用上都有其重要性.

以下我們限于討論全有限測度代数. 設 (S, μ) 是一个全有限測度代数; 如果沒有特別的声明, 記号 X 将用来表示 S 的最大元素. 如果 $\mu(X) = 1$, 則代数 S 和測度 μ 都称为正規化的. 設 E 是 S 的一个元素, P 是 S 中不相交元素的有限集, 以 E 为併集, 則称 P 是 E 的一个分割. 分割 $P = \{E_1, \dots, E_k\}$ 的模指的是 $\mu(E_1), \dots, \mu(E_k)$ 諸数中的最大者, 記为 $|P|$. 設 $P = \{E_1, \dots, E_k\}$ 是 E 的一

个分割, F 是 S 中被 E 所包的任意元素, 我們以記号 $P \cap F$ 表示 F 的分割 $\{E_1 \cap F, \dots, E_k \cap F\}$.

設 P_1 和 P_2 是两个分割, 如果 P_1 的每一个元素被 P_2 的某个元素所包, 則記为 $P_1 \leq P_2$. 設 $\{P_n\}$ 是分割的叙列, 如果 $P_{n+1} \leq P_n$, $n=1, 2, \dots$, 則称 $\{P_n\}$ 是遞減的. 設 $\{P_n\}$ 是分割的叙列, 如果对于 S 中每一个元素 E 并对于每一个正数 ε , 存在正整数 n 并存在 S 中的元素 E_0 , 使得 P_n 的某些元素以 E_0 为其併集, 并使得 $\rho(E, E_0) = \mu(E \Delta E_0) < \varepsilon$, 則称 $\{P_n\}$ 是稠密的.

定理 1. 設 (S, μ) 是全有限, 缺原子的測度代数, 并設 $\{P_n\}$ 是 X 的分割的稠密遞減叙列, 則 $\lim_n |P_n| = 0$.

証明. 因为 $\{|P_n|\}$ 是遞減的正数列, 所以必有極限; 假定这个極限是一个正数 δ , 我們將由此导出矛盾.

設 $P_1 = \{E_1, \dots, E_k\}$, 則元素 E_i 中至少有一个能使

$$|P_n \cap E_i| \geq \delta, \quad n=1, 2, \dots.$$

令 F_1 为具有上述性質的一个元素, 并考察 F_1 的分割的叙列 $\{P_n \cap F_1\}$. 重复上面引用的論点, 我們可以找到分割 P_2 的一个元素 F_2 , 使得 $F_2 \subset F_1$ 并且

$$|P_n \cap F_2| \geq \delta, \quad n=1, 2, \dots.$$

这样繼續做下去, 以至無穷.

令 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 則 $\mu(F) \geq \delta > 0$; 由于 F 不是一个原子, 因此, 存在元素 F_0 使得 $F_0 \subset F$ 并且

$$0 < \mu(F_0) < \mu(F).$$

我們注意到, 元素 F_0 或者被每一个 P_n 的每一个元素所包含, $n=1, 2, \dots$, 或者和它們都不相交. 由此可見, 如果 ε 是比 $\mu(F_0)$ 和 $\mu(F) - \mu(F_0)$ 二数之一为小的一个数, 則 S 中的元素若为上述分割 P_n 中元素的併集, 它和 F_0 之間就不可能具有小于 ε 的距离. 这个事实与 $\{P_n\}$ 为稠密的假設条件相矛盾, 定理于是証明完畢. |

定理 2. 設 Y 是单位区間, \mathbf{T} 是 Y 的全体波雷耳子集类, ν 是 \mathbf{T} 上的勒貝格测度. 如果 $\{Q_n\}$ 是测度代数 (\mathbf{T}, ν) 的最大元素 Y 的一个分割叙列, 其中 Q_n 是区間集, 并滿足条件 $\lim_n |Q_n| = 0$, 則 $\{Q_n\}$ 是稠密的.

証明. 对于每一个正数 ε , 存在正整数 n 使得 $|Q_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. 如果 E 是 Y 的任意子区間, 令 E_1 为分割 Q_n 中包含 E 的左端点的区間; 显然, E_1 是唯一确定的. 如果 E_1 不包含 E 的右端点, 令 E_2 为分割 Q_n 中与 E_1 右端相邻接的区間. 这样繼續有限多次, 直到得出 Q_n 中包含 E 的右端点的区間 E_k 为止. 区間 E_1, \dots, E_k 的併集与 E 之間的距离小于 ε ; 这就說明了 Y 的任何子区間能够以 $\{Q_n\}$ 的元素的併集来逼近. 因为由区間的一切有限併組成的类是稠密的, 定理于是証明完畢. **|**

定理 3. 每一个可分的缺原子的正规化测度代数 (\mathbf{S}, μ) 与单位区間测度代数 (\mathbf{T}, ν) 是同构的.

証明. 設 $\{E_n\}$ 是 (\mathbf{S}, μ) 的度量空間 $\mathcal{S}(\mu)$ 中的一个稠密叙列. 对于每一个 $n=1, 2, \dots$, 由形如 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 的元素組成的集是 X 的一个分割 \mathbf{P}_n , 其中 $A_i = E_i$ 或 $A_i = X - E_i$, $i=1, \dots, n$. 显然, 分割叙列 $\{\mathbf{P}_n\}$ 是遞減的; 又由于 $\{E_n\}$ 在 $\mathcal{S}(\mu)$ 中稠密, 所以 $\{\mathbf{P}_n\}$ 是稠密的. 根据定理 1 可知, $\lim_n |\mathbf{P}_n| = 0$.

对于分割 \mathbf{P}_1 的每一个元素 E , 我們以 Y 的一个子区間 $T(E)$ 与之对应, 使得 $\mu(E) = \nu(T(E))$, 并使得这些区間构成 Y 的一个分割. 对于每一个这样的区間, 我們再按照类似的方式将它分解成为对应于分割 \mathbf{P}_2 中元素的子区間, 并且依此类推下去. 于是我們得到了将 Y 分解成区間的一个分割叙列 $\{Q_n\}$; 由于变换 T 是将 $\{\mathbf{P}_n\}$ 的分割元素变为区間的保测变换, 于是有 $\lim_n |Q_n| = 0$, 根据定理 2 可知, $\{Q_n\}$ 是稠密的.

如果我們不仅对在 $\{\mathbf{P}_n\}$ 中出現的分割元素定义 T , 并且也对这些元素的有限併按照下列方式定义 T : 对于每一个这样的有

限併, 以 $\{Q_n\}$ 中分割元素的对应有限併与之对应, 則变换 T 是度量空間 $\mathcal{S}(\mu)$ 的一个稠密子集在 $\mathcal{J}(\nu)$ 的一个稠密子集上的等距变换, 其中 $\mathcal{J}(\nu)$ 是測度代数 (T, ν) 的度量空間. 由此可見, 存在 $\mathcal{S}(\mu)$ 在 $\mathcal{J}(\nu)$ 上的唯一等距变换 \bar{T} , 它在 T 有定义的地方处处与 T 相等. 由于 T 保持併与差的运算不变, 又由于这些运算对于它們的主目元來說是一致連續的函数, 所以 \bar{T} 是一个同构. |

(1) 設 (S, μ) 是一个 σ -有限, 缺原子的測度环, 并且 $E_0 \in S, E_0 \neq \emptyset$, 則对于每一个正数 ε , 存在 S 中的元素 E , 使得 $E \subset E_0$ 并使得 $0 < \mu(E) < \varepsilon$. (提示: 如果 $\mu(E_0) < \infty$, 并且 E_1 是 S 的一个元素使得 $E_1 \subset E_0$ 和 $0 < \mu(E_1) < \mu(E_0)$, 則有 $\mu(E_1) \leq \frac{1}{2}\mu(E_0)$ 或 $\mu(E_0 - E_1) \leq \frac{1}{2}\mu(E_0)$, 二者必居其一.)

(2) 設 (S, μ) 是一个 σ -有限, 缺原子的測度环, 并且 $E_0 \in S$, 則对于滿足关系式 $0 \leq \alpha \leq \mu(E_0)$ 的每一个广义实数 α , 存在 S 中的元素 E , 使得 $E \subset E_0$ 并使得 $\mu(E) = \alpha$. (提示: 当 $\alpha = \infty$ 时, 命題显然成立, 因此我們可以假定 $\mu(E_0) < \infty$ 而不致丧失普遍性. 命題的結論可以利用超限穷举法得出. 这个方法与通常用来証明“完备凸度量空間中的任意两点可以用一条綫段連接起来”这个定理的方法类似. 事实上, 我們現在这个命題就是上述度量几何学中一般定理的特殊情形(参看 40.2 和 40.8).)

(3) 設 (S, μ) 是全 σ -有限, 缺原子的測度代数, 并且 $E_0 \in S$, 則对于滿足关系式 $\mu(E_0) \leq \alpha \leq \mu(X)$ 的每一个广义实数 α , 存在 S 中的元素 E , 使得 $E_0 \subset E$ 并使得 $\mu(E) = \alpha$. (提示: 当 α 为有限时, 对 $X - E_0$ 和 $\mu(X) - \alpha$ 应用(2).)

(4) 設 (S, μ) 是全有限測度代数, 則由測度 μ 的一切值組成的集是一个閉集.

(5) 設 σ -有限, 缺原子的測度环 (S, μ) 中至少有一个异于 \emptyset 的元素, 則它的度量空間 $\mathcal{S}(\mu)$ 中沒有孤立点. 反之, 如果 $\mathcal{S}(\mu)$ 中沒有孤立点, 則 (S, μ) 是否一定是缺原子的?

(6) 每一个可分的, 缺原子的全 σ -有限測度代数 (S, μ) 如果具有性質 $\mu(X) = \infty$, 必定与数直綫的測度代数 (T, ν) 是同构的. (提示: 由(2)知存在 S 中元素的叙列 $\{X_n\}$ 使得 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ 并使得 $\mu(X_n) = 1, n = 1, 2, \dots$;

因此, 当 n 为任何正整数时, 对于由 X_n 中一切元素组成的代数可以应用定理 3.)

(7) 每一个测度代数与一个测度空间的测度代数是同构的 (参看 40.15 c).

§42. 函数空间

设 (X, \mathbf{S}, μ) 是任意测度空间, $\mathcal{S}(\mu)$ 是具有有限测度的可测集空间, 则与 (X, \mathbf{S}, μ) 连带的某些度量空间是和 $\mathcal{S}(\mu)$ 相类似的. 由一切广义实值可积函数组成的类 \mathcal{L}_1 (或 $\mathcal{L}_1(\mu)$) 就是这样的一个度量空间. 如果对于 \mathcal{L}_1 中的 f 我们采用记号:

$$\|f\| = \int |f| d\mu,$$

而对于 \mathcal{L}_1 中的 f 和 g , 令 $\rho(f, g) = \|f - g\|$ (参看 §23), 则一个度量或距离所应具备的一切性质, 其中只有一条是函数 ρ 所不能满足的——就是, 当 $\rho(f, g) = 0$ 时, 不一定有 $f = g$. 根据 §25 定理 2, 我们知道, $\rho(f, g) = 0$ 的意义就是 $f = g[\mu]$. 我们将采用与测度为有限的可测集空间情形相同的考虑方式. \mathcal{L}_1 中的两个元素 (即函数) 将被认为是相等的, 如果它们之间的距离为零; 或者说, 如果它们几乎处处相等 $[\mu]$. 在这样的了解之下, \mathcal{L}_1 就成了一个度量空间, 并且还是一个完备度量空间 (参看 §26 定理 2).

为了分析中的某些目的, 我们需要将这些概念加以推广. 设 p 是大于 1 的一个实数, 我们以 \mathcal{L}_p (或 $\mathcal{L}_p(\mu)$) 表示使 $|f|^p$ 为可积的一切可测函数 f 组成的类. 如同在 \mathcal{L}_1 的场合一样, 如果 \mathcal{L}_p 中两个元素几乎处处相等 $[\mu]$, 我们就认为它们是相等的. 在某种程度内, 空间 \mathcal{L}_p 的理论 with 空间 \mathcal{L}_1 的理论是非常相像的. 例如, 对于 \mathcal{L}_p 中的 f , 我们定义

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

并且对于 \mathcal{L}_p 中的 f 和 g , 令 $\rho_p(f, g) = \|f - g\|_p$. 但是到了这里,

我們就遇到了困難。雖然我們有 $\rho_p(f, g) = \rho_p(g, f) \geq 0$, 並且 $\rho_p(f, g) = 0$ 當而且只當 $f = g[\mu]$, 然而三角形不等式是否成立却不是顯而易見的了。更嚴重的是, 我們甚至於還不知道 ρ_p 是否永遠是有限的。為了克服這些困難, 我們首先證明兩條經典性的定理; 下面這個定理稱為荷德爾不等式。

定理 1. 設 p 和 q 是兩個大於 1 的實數, 滿足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; 如果 $f \in \mathcal{L}_p, g \in \mathcal{L}_q$, 則 $fg \in \mathcal{L}_1$, 並且 $\|fg\| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

證明。考慮對於一切正的實數 t 有定義的輔助函數 ϕ :

$$\phi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}.$$

微分後得到

$$\phi'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1};$$

我們看出, 只有當 $t=1$ 時 $\phi'(t)$ 才能為零。由於

$$\lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \infty,$$

所以 ϕ 在 $t=1$ 取極小值, 從而有

$$\frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q} = \phi(t) \geq \phi(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

如果 a 和 b 是兩個正數, 令

$$t = \frac{a^q}{b^{\frac{1}{p}}},$$

我們得到

$$1 \leq \frac{a^{p-1}}{bp} + \frac{b^{q-1}}{aq} \quad \text{或} \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

顯然, 後面一個不等式即使當 a 和 b 為零時仍成立。

我們現在回到定理的證明。若 $\|f\|_p = 0$ 或 $\|g\|_q = 0$, 定理顯然成立。如果 $\|f\|_p$ 和 $\|g\|_q$ 都不為零, 可令

$$a = \frac{|f|}{\|f\|_p} \quad \text{和} \quad b = \frac{|g|}{\|g\|_q}.$$

应用前面得到的最后一个不等式, 我們有

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\int |f|^p d\mu} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\int |g|^q d\mu}.$$

因为 fg 是可测的, 所以这个不等式已经说明了 $fg \in \mathcal{L}_1$; 两边积分后即得定理的结论。 |

下面这个定理称为**闵可夫斯基不等式**。

定理 2. 設 p 是大于 1 的实数, 如果 f 和 g 都属于 \mathcal{L}_p , 則 $f+g \in \mathcal{L}_p$, 并且

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

証明. 对于由两点构成的测度空间, 当两点的测度都为 1 时, 应用荷德耳不等式可得下面的初等不等式:

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq (|a_1|^p + |a_2|^p)^{\frac{1}{p}} (|b_1|^q + |b_2|^q)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 因此

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leq |f| \cdot |f+g|^{p-1} + |g| \cdot |f+g|^{p-1} \leq \\ &\leq (|f|^p + |g|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (2|f+g|^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

从而有

$$|f+g|^p \leq 2^{\frac{p}{q}} (|f|^p + |g|^p).$$

这个不等式说明了 $f+g \in \mathcal{L}_p$. 又因为

$$\begin{aligned} (\|f+g\|_p)^p &= \int |f+g|^p d\mu \leq \\ &\leq \int |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu + \int |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leq \\ &\leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \\ &\quad + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) (\|f+g\|_p)^{\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

由此即可得出定理的结论。 |

由定理 2 可知, 如果 f, g 和 h 都屬於 \mathcal{L}_p , 則

$$\begin{aligned}\rho_p(f, g) &= \|f - g\|_p \leq \|f - h\|_p + \|h - g\|_p = \\ &= \rho_p(f, h) + \rho_p(h, g),\end{aligned}$$

所以 \mathcal{L}_p 的確是一個度量空間; 從前我們用以證明 \mathcal{L}_1 是完備空間的方法, 只須加以很明顯的修改, 就可以用來證明 \mathcal{L}_p 的完備性。

(1) 測度空間 (X, \mathcal{S}, μ) 的度量空間 $\mathcal{L}_p(\mu)$ 為可分的必要和充分條件是: 具有有限測度的可測集空間 $\mathcal{S}(\mu)$ 是可分的。(提示: 如果一個集類在 $\mathcal{S}(\mu)$ 中是稠密的, 則這些集的特征函數的具有有理系數的一切有限綫性組合構成一個在 $\mathcal{L}_p(\mu)$ 中稠密的集。)

(2) 另外一個有用的空間就是由一切本性有界的可測函數組成的集 \mathfrak{M} 。如果對於 \mathfrak{M} 中任意的 f , 令

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup } \{|f(x)| : x \in X\},$$

而對於 \mathfrak{M} 中的 f 和 g , 令 $\rho_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$, 則 \mathfrak{M} (在我們關於兩個元素相等的約定之下) 形成一個完備度量空間。

(3) 在本節所述的函數空間中, \mathcal{L}_2 是已被研究得最透徹的一個; 對於通常有限維的歐幾里得空間來說, \mathcal{L}_2 是它的最自然同時也是最富成效的推廣。定義在 \mathcal{L}_2 上的實值函數 A , 如果滿足關係式

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g),$$

其中 α, β 是兩個實數, f 和 g 都屬於 \mathcal{L}_2 , 則稱為 \mathcal{L}_2 上的綫性汎函數。設 A 是一個綫性汎函數, 如果存在正的常數 c 使得對於 \mathcal{L}_2 中每一個 f 有 $|A(f)| \leq c\|f\|_2$, 則稱 A 是有界的。

對於每一個有界的綫性汎函數 A , 必定存在 \mathcal{L}_2 中的元素 g , 使當 $f \in \mathcal{L}_2$ 時有

$$A(f) = \int fg d\mu$$

(這是 \mathcal{L}_2 的一個初等的幾何性質, 它的證明除了用到 \mathcal{L}_2 是完備空間這一事實外, 並不依賴於更深的性質)。這個結果可以用來證明拉東-尼古丁定理(同時這個結果又是拉東-尼古丁定理的相當容易的推論)。為了簡單起見, 我們只限於在有限測度的場合下列出這個命題的證明的綱要。

設 μ 和 ν 是兩個有限測度使得 $\nu \ll \mu$, 並令 $\lambda = \mu + \nu$ 。

(3a) 如果对于 $\mathcal{L}_2(\lambda)$ 中每一个 f 有

$$A(f) = \int f d\nu,$$

则 A 是 $\mathcal{L}_2(\lambda)$ 上的一个有界线性汎函数.

(3b) 如果

$$A(f) = \int f g d\lambda,$$

则 $0 \leq g \leq 1$ [λ]. (提示: 若 f 是可测集 E 的特征函数, 则 $A(f) = \nu(E) \leq \lambda(E)$.)

(3c) 如果 $E = \{x: g(x) = 1\}$, 则 $\lambda(E) = 0$. (提示: $\lambda(E) = \nu(E)$.)

(3d) 对于每一个非负可测函数 f , 有

$$\int f(1-g) d\nu = \int f g d\mu.$$

(3e) 如果 $g_0 = \frac{g}{1-g}$, 则对于每一个可测集 E , 有

$$\nu(E) = \int_E g_0 d\mu.$$

(提示: 令 $f = \frac{\chi_E}{1-g}$.)

(4) 设 (X, \mathcal{S}, μ) 是一个有限测度空间; 对于任意两个实值可测函数 f 和 g , 令

$$\rho_0(f, g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu.$$

函数 ρ_0 是一个度量; 在度量 ρ_0 的意义下的收敛性与依测度收敛性等价.

§43. 集函数与点函数

在本节中我们将研究单实变数的某些函数与数直线上的有限测度之间的关系. 在本节中我们假定

X 是数直线, \mathcal{S} 是全体波雷耳集类, μ 是 \mathcal{S} 上的勒贝格测度.

我们将考虑 X 上的单调非减函数 f , 也就是当 $x \leq y$ 时恒满足关系式 $f(x) \leq f(y)$ 的函数 f ; 为了简单起见, 我们就称这种函数为单调函数. 设 f 是一个有界单调函数, 则容易看出,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 都存在并有限；我們按照通常的習慣將它們分別記作 $f(-\infty)$ 和 $f(+\infty)$ 。

定理 1. 設 ν 是 S 上的有限測度，如果對於每一個實數 x 令

$$f_\nu(x) = \nu(\{t: -\infty < t < x\}),$$

則 f_ν 是一個有界單調函數，從左邊連續，並且 $f_\nu(-\infty) = 0$ 。

證明。 f_ν 的有界性和單調性可由測度 ν 的對應性質推出。因為 $f_\nu(-n) = \nu((-\infty, -n))$ ， $n=1, 2, \dots$ ，所以

$$\begin{aligned} f_\nu(-\infty) &= \lim_n f_\nu(-n) = \\ &= \nu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \{t: -\infty < t < -n\}\right) = \nu(0) = 0. \end{aligned}$$

現在證明，對於任意的 x ， f_ν 是左連續的。設 $\{x_n\}$ 是一個增數列使得 $\lim_n x_n = x$ ；於是

$$\begin{aligned} 0 &= \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n, x)\right) = \lim_n \nu([x_n, x)) = \\ &= \lim_n (f_\nu(x) - f_\nu(x_n)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

下面的定理是反面的命題。

定理 2. 設 f 是一個有界單調函數，從左邊連續，並且 $f(-\infty) = 0$ ，則存在 S 上唯一的一個有限測度 ν ，使得 $f = f_\nu$ 。

證明。這個定理的證明和勒貝格測度的建立完全一樣。換一句話說，如果對於每一個半閉區間我們以等式

$$\nu([a, b]) = f(b) - f(a)$$

來定義 ν ，則在 §8 中將 μ 換為 ν ，結論仍然成立，因而可以應用測度的擴張定理 (§13 定理 1)。唯一需要修改的，乃是我們用來證明 §8 定理 3 的論點。我們要證明的就是，如果 $\{[a_i, b_i)\}$ 是半閉區間的一個叙列，而 $[a_0, b_0)$ 是被這個叙列的併集所包的一個半閉區間，則有

$$\nu([a_0, b_0)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu([a_i, b_i)).$$

如果 $a_0 = b_0$ ，結論顯然成立；在其他的情形，令 ε 為滿足關係 $\varepsilon <$

$< b_0 - a_0$ 的一个正数。因为 f 在 a_i 是左连续的, 因此, 对于每一个正数 δ 和每一个正整数 i , 存在正数 ε_i 使得

$$f(a_i) - f(a_i - \varepsilon_i) < \frac{\delta}{2^i}, \quad i=1, 2, \dots.$$

如果 $F_0 = [a_0, b_0 - \varepsilon]$, 并且 $U_i = (a_i - \varepsilon_i, b_i)$, $i=1, 2, \dots$, 则 $F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$; 因此, 根据海尼-波雷耳定理, 存在正整数 n 使得

$$F_0 \subset \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

与 §8 定理 2 的证明相类似, 我们可以得到

$$\begin{aligned} f(b_0 - \varepsilon) - f(a_0) &\leq \sum_{i=1}^n (f(b_i) - f(a_i - \varepsilon_i)) = \\ &= \sum_{i=1}^n (f(b_i) - f(a_i)) + \sum_{i=1}^n (f(a_i) - f(a_i - \varepsilon_i)) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (f(b_i) - f(a_i)) + \delta. \end{aligned}$$

由于 ε 和 δ 都是任意的, 再利用 f 在 b_0 的左连续性, 就得到我们需要的结论。 |

定理 1 和 2 建立了定义在 S 上的一切有限测度 ν 与某些单实变数函数 f_ν 之间的一一对应关系; 下面两条定理指出, 如何可以将测度 ν 的某些测度论的性质借助于对应的函数 f_ν 而表达出来。

定理 3. 设 ν 是 S 上的有限测度, 则 f_ν 为连续的必要和充分条件是: 对于任一点 x , 有 $\nu(\{x\}) = 0$.

证明. 如果 $\{x_n\}$ 是一个递减数列, 使得 $\lim_n x_n = x$, 则

$$\begin{aligned} \nu(\{x\}) &= \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n, x)\right) = \lim_n \nu([x_n, x)) = \\ &= \lim_n (f_\nu(x_n) - f_\nu(x)). \end{aligned}$$

我们注意到, f_ν 在 x 为连续的必要和充分条件是上式最右端的一项为零。定理于是证明完毕。 |

设 f 是单实变数的实值函数, 如果对于每一个正数 ε , 存在正

数 δ , 使得对于有界开区間的任何有限不相交类 $\{(a_i, b_i) : i=1, \dots, n\}$, 只要满足关系式 $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, 必有

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon,$$

則称 f 是绝对連續的。

定理 4. 設 ν 是 S 上的有限測度, 則 f_ν 为绝对連續的必要和充分条件是: ν 对于 μ 是绝对連續的。

証明. 設 $\nu \ll \mu$, 則对于每一个正数 ε , 存在正数 δ , 使得对于满足条件 $\mu(E) < \delta$ 的任何波雷耳集 E , 有 $\nu(E) < \varepsilon$. 由此可見, 如果 $\{(a_i, b_i) : i=1, \dots, n\}$ 是有界开区間的有限不相交类, 满足关系

$$\mu(\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta,$$

則

$$\sum_{i=1}^n |f_\nu(b_i) - f_\nu(a_i)| = \sum_{i=1}^n \nu([a_i, b_i)) = \nu(\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i)) < \varepsilon.$$

現在証明条件是必要的。設 f_ν 是绝对連續的。令 ε 为任意正数, 而 δ 是一个正数使得当 $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ 时有 $\sum_{i=1}^n |f_\nu(b_i) - f_\nu(a_i)| < \varepsilon$. 如果 E 是一个波雷耳集, 并且它的勒貝格測度为零, 則存在半閉区間的不相交叙列 $\{[a_i, b_i)\}$ 使得

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i) \quad \text{和} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \delta.$$

于是, 对于每一个正整数 n , 有 $\sum_{i=1}^n |f_\nu(b_i) - f_\nu(a_i)| < \varepsilon$; 因此

$$\nu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu([a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} |f_\nu(b_i) - f_\nu(a_i)| \leq \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 所以 $\nu(E) = 0$. \blacksquare

为了表达下面这个定理 (它是勒贝格分解定理的很简单然而很有用的一个推论), 我们再引进一个定义. 设 ν 是 S 上的有限测度, 如果存在可列集 C 使得 $\nu(X-C) = 0$, 则称 ν 是纯原子的.

定理 5. 设 ν 是 S 上的有限测度, 则存在唯一确定于 S 上的三个测度 ν_1, ν_2 和 ν_3 , 满足下述条件: ν_1, ν_2, ν_3 的和是 ν ; ν_1 对于 μ 是绝对连续的; ν_2 是纯原子的; ν_3 对于 μ 是奇异的, 但对于任一点 x 有 $\nu_3(\{x\}) = 0$.

证明. 按照勒贝格分解定理 (§32 定理 3), 存在 S 上的两个测度 ν_0 和 ν_1 , 它们的和是 ν , 并且 ν_0 对于 μ 是奇异的, 而 ν_1 对于 μ 是绝对连续的. 令 C 为满足关系式 $\nu_0(\{x\}) \neq 0$ 的点 x 组成的集; 因为测度 ν 是有限的, 所以 C 是一个可列集. 如果令

$$\nu_2(E) = \nu_0(E \cap C) \quad \text{和} \quad \nu_3(E) = \nu_0(E - C),$$

则分解 $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ 显然具有定理中所述的全部性质. 分解的唯一性可从勒贝格分解的唯一性以及 C 的很明显的唯一性推出. \blacksquare

(1) 本节的全部结论对于广义测度 ν 都成立, 只须将 f 为单调这个条件换为有界变差的条件. (提示: 每一个有界变差函数是两个单调函数之差.)

(2) 单调函数和绝对连续函数的某些熟知的性质可以利用本节的方法获得证明; 我们指出下面两个例子.

(2a) 单调函数最多具有可列无限多个间断点. (提示: 如果有界单调函数, 从左边连续, 并且 $f(-\infty) = 0$, 对于这种情形可以应用定理 2 以及在证明定理 3 时所用的论点. 对于一般的情况, 可以利用一些简单的变换化为这种特殊情况.)

(2b) 如果有界单调函数 f 是绝对连续的, 并且 $f(-\infty) = 0$, 则存在非负勒贝格可积函数 ϕ 使得

$$f(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) d\mu(t).$$

(提示: 应用定理 2 和 4.)

(3) 下面的一些命題指出, §15 定理 3 和 15.1 中的結果可以扩充到一个非常广泛的測度类上, 这个測度类包含本节所討論的測度在內。

(3a) 設 \mathbf{S} 是由 X 的子集組成的一个 σ -环, \mathbf{L} 是 \mathbf{S} 中之集組成的一个絡, $\mathbf{S}(\mathbf{L})$ 是由 \mathbf{L} 产生的 σ -环. 如果定义在 \mathbf{S} 上的两个有限測度 μ 和 ν 在 \mathbf{L} 上相等, 則它們在 $\mathbf{S}(\mathbf{L})$ 上也相等. (提示: 如果 $E \in \mathbf{L}$, $F \in \mathbf{L}$, 并且 $E \subset F$, 則 $\mu(F-E) = \nu(F-E)$. 然后应用 5.2, 8.5 和 §13 定理 1.)

(3b) 設 X 是一个度量空間. 如果定义在 X 的全体波雷耳集类上的两个有限測度 μ 和 ν 在 X 的全体开集类 \mathbf{U} 上相等, 則 μ 和 ν 对于一切波雷耳集相等.

(3c) 設 X 是一个度量空間, \mathbf{U} 是 X 的全体开集类, μ 是定义在 X 的全体波雷耳集类上的一个有限測度, 則对于每一个波雷耳集 E 有 $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}$. (提示: 由等式 $\nu^*(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}$ 确定的集函数 ν^* 是一个有限的度量外測度(参看 11.8a), 它在全体波雷耳集类上确定了一个測度 ν , 并且 ν 和 μ 在 \mathbf{U} 上相等.)

(3d) 設 X 是一个度量空間, μ 是定义在 X 的全体波雷耳集类上的一个測度, \mathbf{C} 是 X 中具有有限測度的全体闭子集組成的类, 則对于每一个具有 σ -有限測度的波雷耳集 E , 有 $\mu(E) = \sup\{\mu(C) : E \supset C \in \mathbf{C}\}$. (提示: 只須考虑測度为有限的集 E . 令 $\nu(F) = \mu(E \cap F)$, 然后对 ν 和 $X-E$ 应用 (3c).)

(3e) 設 X 是一个可分的完备度量空間, μ 是定义在 X 的全体波雷耳集类上的一个測度, \mathbf{C}_0 是 X 中具有有限測度的全体紧子集組成的类, 則对于每一个具有 σ -有限測度的波雷耳集 E , 有 $\mu(E) = \sup\{\mu(C) : E \supset C \in \mathbf{C}_0\}$. (提示: 应用 (3d) 和 9.10.)

(4) 設 ν 是 \mathbf{S} 上的有限測度, 如果波雷耳集 E_0 是 ν 的一个原子, 則存在 E_0 中的点 x_0 使得 $\nu(E_0 - \{x_0\}) = 0$. (提示: 利用 (3) 可将一般場合化为 E_0 是有界閉集的場合.)

(5) 設 ν 是 \mathbf{S} 上的有限測度, 則 f_ν 为連續的必要和充分条件是: ν 是缺原子的.

(6) 本节的大部分結論对于不一定为有限的測度和广义測度 ν 也成立; 重要的是, 当 E 是有界区間时, $\nu(E)$ 必須是有限的.

(7) 为了和 (6) 相联系, 并且为了建立反例起見, 我們指出下面这个有

趣的事实. 存在定义在 S 上的 σ -有限测度 ν , ν 对于 μ 是绝对连续的, 但对于具有非空内部任何区间 E , 有 $\nu(E) = \infty$. (提示: 设 f 是一个正的勒贝格可积函数使得对于每一个正数 ε 有

$$\int_{-e}^{+e} f^2 d\mu = \infty;$$

例如, 可令 $f(x) = (e^{|x|} \sqrt{|x|})^{-1}$. 设 $\{r_1, r_2, \dots\}$ 是全体有理数列, 如果对于每一个 x 令

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(x - r_n),$$

而对于每一个波雷耳集 E 令

$$\nu(E) = \int_E g^2 d\mu,$$

则测度 ν 具有命题中所述的全部性质. 我们注意到, 因为

$$\int g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int f d\mu,$$

所以函数 g 几乎处处有限 $[\mu]$.)

第九章 概 率

§44. 引 言

本节的目的是,对于如何在测度論的基础上建立概率的理論,給以直觀的解釋。

在概率論中,“事件”是还没有确切定义的術語中最主要的一个。不严格地說,某种物理試驗的任何一种可能發生的結果就是一个事件。我們取大家都知道的擲骰子的試驗作为例子,以 x ($= 1, 2, 3, 4, 5$ 或 6) 表示擲出的点数。“ x 是偶数”,“ x 小于 4”,“ x 等于 6”——每一个这样的論断,都与試驗的一个可能發生的結果相对应。从这个观点出發,事件的数目就是六个正整数 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的一切可能組合的总数。如果为了完整以及以后应用的方便起見,我們再加上一个不可能事件:“ x 不等于 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 六个数中的任何一个”,于是在擲骰子这个試驗中我們就有了 2^6 种可能的事件。为了进一步討論这个例子,我們引进一些記号。我們以 $\{2, 4, 6\}$ 表示事件“ x 是偶数”,以 $\{1, 2, 3\}$ 表示事件“ x 小于 4”,等等。不可能事件和必然事件 ($= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) 應該用特殊的記号来表示;我們分別以 0 和 X 来記它們。

关于事件,在日常談話中常常会用到下面的种种說法:“两个事件 E 和 F 是互不相容的”,“事件 E 和事件 F 是对立的”,“事件 E 是由 F 和 G 二者同时發生而組成的”,以及“事件 E 是由 F 和 G 二者至少發生其一而組成的”。这些說法指出了在事件和事件之間

有一定的关系存在，同时也指出了从原来的事件經過运算可以产生新的事件；这些关系和运算，最后必然会成为事件的数学理論的一部分。

对立事件的概念也許是最明显的。設 E 是一个事件，則“ E 不發生”这一个事件就称为 E 的对立事件，記为 E' 。于是，若 $E = \{2, 4, 6\}$ ，則 $E' = \{1, 3, 5\}$ 。对应于邏輯上的“或”与“和”，我們也可以引进事件組合的概念。对于任意两个事件 E 和 F ，我們以 $E \cup F$ 和 $E \cap F$ 分別表示它們的“併”与“交”；事件 $E \cup F$ 發生，必須而且只須 E 和 F 二者至少發生其一；事件 $E \cap F$ 發生，必須而且只須 E 和 F 二者都發生。于是，若 $E = \{2, 4, 6\}$ ，而 $F = \{1, 2, 3\}$ ，則 $E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ， $E \cap F = \{2\}$ 。

以上这些討論，以及在更为复杂的試驗里这些概念的很明显的推广，說明了概率論建立在对于以集为元素的布尔代数的研究上。一个事件就是一个集，对立事件就是余集；互不相容事件就是不相交集；由两个事件同时發生而組成的事件就是两个集的交集。很明显，这种以集論的術語来表达的方式还可以列举出許多来。

对于古典概率論來說，由于考虑的問題只是些簡單的賭博游戏，例如擲骰子，其中可能事件的总数是有限的，因此，将一切事件的类归結为以集为元素的布尔代数，是很恰当的。但对于近代理論和实际中产生的問題，甚至对于比較复杂的賭博游戏的討論，都需要另外有一个附加的假設条件。这个条件就是：事件系对于可列併的运算必須是封閉的；用我們的術語來說，就是：布尔代数必須是一个 σ -代数。

也許我們可以通过一个例子，虽然是一个不太自然的例子，來說明上述假設条件的必要性。假定有一个賭徒，决心要連續地擲一粒骰子，直到第一次出現 6 点为止。令 E_n 表示只在第 n 次擲出 6 这一事件。事件 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 發生，当而且只当游戏在有限次的投擲后終止。对立事件 E' 的發生，至少在邏輯上（即使不是在

实际上)是可能的,因此在一般的概率理論中,要将这一事件包含在內而加以討論,是很合理的。許許多多这一类的例子,尤其重要的是某些純粹数学上的理由,証明我們前面所述的論点是正确的,那就是,概率的数学理論建立在对于以集为元素的布尔 σ -代数的研究上。

但这并不是說,一切以集为元素的布尔 σ -代数都是概率論的研究对象。同时,有关这类布尔 σ -代数以及它們的元素之間关系的命題,通常都只限于性質方面的描述;而概率論則也要研究布尔 σ -代数的量的方面的性質。現在我們进而引出概率的定义。

当我們問:“某一事件的概率是多少?”我們希望得到的回答乃是一个数,是与这个事件相联系的一个数。換一句話說,概率是事件 E 的一个数值的函数 μ ,也就是定义在一个布尔 σ -代数上的集函数。从直觀和实际上来考虑,我們要求数 $\mu(E)$ 應該能够表出事件 E 出現的頻率。如果在試驗的大量重复进行下,可能發生的事件 E 事实上只出現了总次数的四分之一(因而其余四分之三的次数乃是 E' 出現的次数),則我們可以試圖以 $\mu(E) = \frac{1}{4}$ 来反映这个結果。即使是这样一种非常粗糙的估計,已經可以使我們对函数 μ 的性質有一个初步的認識。

令 $\mu(E)$ 表示事件 E 發生的頻率,也就是 E 出現的次数与試驗的总次数之比,則 $\mu(E)$ 必須是一个非負的实数,事实上乃是单位区間 $[0, 1]$ 中的一个数。如果事件 E 和 F 互不相容——例如,在上面擲骰子的例子里, $E = \{1\}$, $F = \{2, 4, 6\}$ ——則事件 $E \cup F$ (在上面的例子里就是 $\{1, 2, 4, 6\}$) 發生的頻率显然就是 E, F 二者頻率之和。如果擲出 1 点的次数占总次数的 $\frac{1}{6}$, 而擲出偶数点占 $\frac{1}{2}$, 則擲出 1 点或偶数点的次数占总次数的 $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$ 。由此可見,函数 μ 不能是完全任意的;它必須滿足可加性的条件,也就是說,如果 $E \cap F = 0$, 則 $\mu(E \cup F)$ 必須等于 $\mu(E) + \mu(F)$ 。又因为必然事件每次都發生,我們必須規定 $\mu(X) = 1$ 。

現在我們只差一点就可以到达概率的最后定义了；所差的这一点在表面上看起来好像是很微細的一点，而事实上却是極其重要的。如果 μ 是定义在以集为元素的布尔 σ -代数上具有可加性的集函数，而 $\{E_n\}$ 是这个代数中不相交集的無限叙列，則等式

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

可能成立，也可能不成立。可列可加性是我們对于 μ 的另一个附加条件——如果没有这一个条件，近代概率論就不可能起作用。从直觉的观点出發，我們要求可列可加性正如同要求有限可加性一样。至少，可列可加性与我們的直观并無抵触之处，而由此建立起来的理論已經获得極为成功的發展，足以証明当初引进它是完全正确的。总结上面的討論，我們得到概率的定义如下：

概率 μ 是定义在由集 X 的子集組成的某个布尔 σ -代数 S 上的測度，并且 $\mu(X) = 1$ 。

在前面几章关于測度的理論中，“可測函数”、“积分”和“乘积空間”这些概念占有重要的地位；以下我們將介紹这些概念的概率意义。

我們先从“随机变数”这个常用的术语开始。“随机变数是一个变量，它的值由机会确定”。因此，我們所要考虑的乃是“变量”。大家都知道，自从人們开始要求严格地表述数学的定义以来，“变量”这个术语，特别是，一个变量，它的值是按照某种方式而“确定”的，事实上就是指的函数。这样，我們就可以說，随机变数是一个函数，它所取的值由机会来确定。換一句話說，随机变数就是与某一个試驗相联系的函数，試驗一旦完成，函数的值也就随之确定。我們已經看到，在数学里与試驗相对应的就是測度空間 X ；因而，試驗結果的函数就是 X 中点 x 的函数。所以，随机变数是定义在測度空間 X 上的实值函数。

但是上面的說法还没有完全地描述出“随机变数”这个术语通

常所包含的意义。定义在测度空间 X 上的函数 f ，只有当与 f 的值相关的概率问题具有意义的时候，才能够称为随机变数。例如，“ f 的值在 α 与 β 之间的概率是多少？”就是一个典型的问题。按照测度论的说法，就是：“满足关系式 $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ 的点 x 的集，它的测度是多少？”为了使得这一类的问题都能得到解答，必须而且只须，在问题中出现的集都属于 X 的基本 σ -代数 S 。换一句话说，随机变数是一个可测函数。

现在我们来详尽地讨论一下与掷骰子的试验相联系的随机变数。假定骰子的质量是均匀的，我们以等式 $f(x) = x$ 来定义随机变数 f 。函数 f 可能取的值是 1, 2, 3, 4, 5, 6 六个正整数。在概率论中，这六个数的算术中值 $\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$ 有相当重要的意义；我们称它为随机变数 f 的平均值、中值或数学期望。如果骰子里灌了铅，则 x 出现的概率就不一定是 $\frac{1}{6}$ 而是 p_x ，这时算术中值就变成了加权中值；在这种情形下 f 的数学期望是 $1 \cdot p_1 + \dots + 6 \cdot p_6$ 。在函数 f 取值的数目为无限时，这种加权和数可以类似地以积分表出；如果可测函数 f 是可积的，则按照定义，积分的值就是 f 的数学期望。

这样，可测函数及其积分在概率论中就有了意义；为了揭露乘积空间的概率意义，以下我们对掷骰子的试验继续加以研究。为了简单起见，我们仍然假定掷出任何一面的可能性是相等的，因而每一面出现的概率都是 $\frac{1}{6}$ 。考虑事件 $E = \{2, 4, 6\}$ 和 $F = \{1, 2\}$ 。我们首先要引进条件概率的概念，利用这个概念就可以解答下面这一类的问题：“如果知道了事件 F 已经发生，问事件 E 发生的概率是多少？”在掷骰子的例子里，就是：“已知 x 小于 3，问 x 为偶数的概率是多少？”所谓“条件概率”，就是要计算在预先指定的条件下某事件发生的概率。

设有事件 $G = \{2\}$ ，现在假定事件 G 已发生，我们要来求 E 的条件概率。这个问题的解答，在直观上是十分明显的，它并不取决

于任何像骰子是否均匀之类的条件。既然已知 x 等于 2，则 x 当然是偶数，因此 E 的条件概率是 1。这个问题的解决所以是如此地容易，乃是因为 G 被 E 所包。在一般的情况下，我们需要计算，在什么样的程度或比例下，已知事件 F 被未知事件 E 所包。到了这里，问题的解答差不多已经是很明显了： F 被 E 所包的程度，可以用 E 和 F 同时发生的可能性来量度，也就是用 $\mu(E \cap F)$ 来量度。但是问题并没有完全解决，因为我们不但要考虑 $E \cap F$ 的大小，主要的还要考虑 $E \cap F$ 的大小与 F 的大小之比。

现在我们可以给出条件概率的定义了。在事件 F 已经发生的情况下，事件 E 的条件概率定义为 $\mu(E \cap F) / \mu(F)$ ，记为 $\mu_F(E)$ 。如果 $E = \{2, 4, 6\}$, $G = \{2\}$ ，我们得到前面已经得出的结论： $\mu_G(E) = 1$ ；如果 $E = \{2, 4, 6\}$ 而 $F = \{1, 2\}$ ，则 $\mu_F(E) = \frac{1}{2}$ ，这在直观上是十分合理的。换一句话说，如果已知 x 等于 1 或 2，则 x 为奇数 ($=1$) 或偶数 ($=2$) 的概率都是 $\frac{1}{2}$ 。

考虑下面两个问题：“如果事件 F 已经发生，则事件 E 的概率是多少？”“事件 E 的概率是多少？”当然，答案分别是 $\mu_F(E)$ 和 $\mu(E)$ 。在有些场合中，例如在前面的例子里，对于上述两个问题来说，答案是相等的；也就是说，事件 F 的发生与否并不影响事件 E 的概率。在这种情形下，我们很自然地想到用“独立”或“无关”来表达它们的相互关系：事件 E 的概率分布与事件 F 无关。更精确地说，如果 $\mu_F(E) = \mu(E)$ ，则事件 E 和 F 是互相独立的。如果我们回想一下 $\mu_F(E)$ 的定义，就可以将独立事件的定义表达成更为对称并且常用的形式：当而且只当 $\mu(E \cap F) = \mu(E)\mu(F)$ 时，事件 E 和 F 称为概率无关（或统计无关，或随机无关）或独立。

假定我们要互相独立地进行两个同样的试验——例如，将一粒均匀的骰子连续掷两次。在这种复合试验下，每次得出的结果就不再是一个数，而是一对数 (x_1, x_2) 了。与这种复合试验相对应的测度空间中的点，乃是原来的测度空间和它自己的笛卡儿乘积

空間中的點。現在的問題是，要在乘積空間中確定概率，即測度。作為一個例子，我們考慮事件 $E = "x_1 < 3"$ 和 $F = "x_2 < 4"$ 。我們有 $\mu(E) = \frac{1}{3}$ ， $\mu(F) = \frac{1}{2}$ ；如果將試驗的獨立性了解為任意兩個事件例如 E 和 F 的獨立性，則必然有 $\mu(E \cap F) = \frac{1}{6}$ 。

根據上段的論點，我們看到，如果一個試驗在數學上由一個測度空間 (X, S, μ) 給出，則兩個互相獨立的同樣的試驗組合在數學上就是 (X, S, μ) 與其本身的笛卡兒乘積空間。

正如同由同一個試驗的兩次重複產生了二維笛卡兒乘積空間，由任意有限次數的重複，例如 n 次，就可以給出 n 維笛卡兒乘積空間。這個步驟也可以擴充到無限維的場合：一個試驗的無限多次互相獨立的重複，在數學上就是一個無限維笛卡兒乘積空間。雖然在實際上一個試驗的無限多次互相獨立的重複是不可想像的，但是我們考慮無限維乘積空間卻是很有益處的。問題在於，有許多概率的命題是關於大量試驗或對於事件的發生進行長期觀察的結論，而要精確地表達出這類命題，必須利用十分嚴密的極限定理。

我們的引言到此告一段落；從下一節開始我們轉而詳盡地研究概率論的基本概念和結論。

§45. 獨立性

全有限測度空間 (X, S, μ) 如果滿足條件 $\mu(X) = 1$ ，稱為**概率空間**；定義在概率空間上的測度 μ 稱為**概率測度**。

設 \mathbf{E} 是概率空間 (X, S, μ) 中可測集的有限或無限類，如果對於 \mathbf{E} 中不相同集的每一個有限類 $\{E_i; i = 1, \dots, n\}$ ，等式

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) = \prod_{i=1}^n \mu(E_i)$$

成立，則稱類 \mathbf{E} 中的集是(隨機)獨立的。在 \mathbf{E} 只包含兩個集 E 和 F 的場合下，獨立性的條件由等式

$$\mu(E \cap F) = \mu(E)\mu(F)$$

表出。作为一个例子，我們考虑具有勒貝格測度的单位正方形 $X = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ；令

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, a \leq y \leq b\}, \\ F &= \{(x, y) : c \leq x \leq d, 0 \leq y \leq 1\}, \end{aligned}$$

其中 a, b, c, d 是单位閉区間 $[0, 1]$ 中任意的数，則 E 和 F 是互相独立的。我們注意到，要使得一个类 \mathcal{E} 中的集（即使 \mathcal{E} 是一个有限类也好）是独立的，則 \mathcal{E} 中不相同的集两两独立还是不够的。

設 \mathcal{E} 是定义在概率空間 (X, \mathcal{S}, μ) 上的实值可測函数的有限或無限集，如果对于 \mathcal{E} 中不相同函数的每一个有限子集 $\{f_i : i = 1, \dots, n\}$ ，以及数直綫上波雷耳集的每一个有限类 $\{M_i : i = 1, \dots, n\}$ ，等式

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^n \{x : f_i(x) \in M_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mu(\{x : f_i(x) \in M_i\})$$

成立，則称集 \mathcal{E} 中的函数是（随机）独立的。下面是这个条件的一个等价的說法。如果对于 \mathcal{E} 中每一个函数 f ，按照任意的方式选择数直綫上的一个波雷耳集 M_f ，則类 $\mathcal{E} = \{f^{-1}(M_f) : f \in \mathcal{E}\}$ 中的集是互相独立的。下面是两个独立函数 f 和 g 的例子。如同在上面的例子里一样，取单位正方形作为 X ，而由等式 $f(x, y) = x$ 和 $g(x, y) = y$ 分別定义 f 和 g 。

我們的独立集和独立函数的例子指出，在随机独立性和笛卡兒乘积空間的概念之間存在着很密切的联系。事实上，假定 f_1 和 f_2 是定义在概率空間 (X, \mathcal{S}, μ) 上的两个独立函数，我們来考虑由等式

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

确定的， X 在欧几里得平面中的变换 T 。如果平面中的可測性了解为按照波雷耳意义的可測性，則因 $X \in \mathcal{S}$ 而 f_1 和 f_2 都是可測函数，所以 T 是一个可測变换；此外， f_1 和 f_2 本身都是 X 在数直綫中的可測变换。与独立性的定义加以直接的比較，我們看出，函数 f_1 和 f_2 的独立性可以由等式

$$\mu T^{-1} = \mu f_1^{-1} \times \mu f_2^{-1}$$

很简单地表达出来(如果以記号 $f_1 \times f_2$ 来表示变换 T , 則上面这个等式取分配律的形式). 如果在平面上定义函数 g_1 和 g_2 如下:

$$g_1(y_1, y_2) = y_1, \quad g_2(y_1, y_2) = y_2,$$

則容易验证, $f_1 = g_1 T$, $f_2 = g_2 T$. 从这些很简单的考虑, 我們已經可以得到下面的結論.

定理 1. 設 f_1 和 f_2 是独立函数, 二者都不是几乎处处为零, 則 f_1 和 f_2 都为可积函数的必要和充分条件是: 它們的乘积 $f_1 f_2$ 是可积函数. 如果滿足了这个条件, 則有

$$\int f_1 f_2 d\mu = \int f_1 d\mu \cdot \int f_2 d\mu.$$

証明. 利用上面引进的記号, 我們看出(根据 §39 定理 3), $|f_i|$ 的可积性等价于 g_i 的可积性, $i=1, 2$; 而根据富比尼定理, 如果 $|g_1|$ 和 $|g_2|$ 是可积的, 則 $|g_1 g_2|$ 是可积的. 反之, 如果 $|g_1 g_2|$ 是可积的, 則 $|g_1 g_2|$ 的几乎每一个截面是可积的. 因为每一个这样的截面乃是 $|g_1|$ 或 $|g_2|$ 与一个常数的乘积, 而根据假设条件, f_1 和 f_2 都不是几乎处处为零, 所以可令这些常数因子异于零; 由此可見, 如果 $|g_1 g_2|$ 是可积的, 則 $|g_1|$ 和 $|g_2|$ 都是可积的. 最后, 再应用一次 §39 定理 3 就可以說明, $|g_1 g_2|$ 是可积的必須而且只須 $|f_1 f_2|$ 是可积的, 于是定理中关于可积性部分就得到了証明. 定理的第二部分可由富比尼定理推出. **┃**

乘积空間在独立函数的研究中的应用, 其范围远远超出上面指出的简单情形. 例如, 設 $\{f_n\}$ 是独立函数的叙列, Y 是数直綫的叙列的笛卡兒乘积空間, 其中每一个数直綫中的可測性了解为按照波雷耳意义的可測性. 如果对于每一个 x , 令

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots),$$

則 T 是 X 在 Y 中的可測变换; 函数 f_n 为独立的必要和充分条件是

$$\mu T^{-1} = \mu f_1^{-1} \times \mu f_2^{-1} \times \dots.$$

如果在 Y 上定义函数 g_n 如下:

$$g_n(y_1, y_2, \dots) = y_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

則 $f_n = g_n T, n = 1, 2, \dots$. 对于函数的任意 (有限, 可列, 或不可列) 集, 类似的結論也成立.

定理 2. 設 $\{f_{ij}; i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n_i\}$ 是独立函数集, 如果 ϕ_i 是 n_i 个实变数的实值波雷耳可測函数, $i = 1, \dots, k$, 并且

$$f_i(x) = \phi_i(f_{i1}(x), \dots, f_{in_i}(x)),$$

則函数 f_1, \dots, f_k 是独立的.

証明. 利用前面建立起来的关于乘积空間和独立性的关系, 很容易証明这个定理. 設 Y_{ij} 是数直綫, $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n_i$, 并令 $Y = \prod_{i,j} Y_{ij}$. 如果令

$$T(x) = (f_{11}(x), \dots, f_{1n_1}(x), \dots, f_{k1}(x), \dots, f_{kn_k}(x)),$$

$$g_{ij}(y_{11}, \dots, y_{1n_1}, \dots, y_{k1}, \dots, y_{kn_k}) = y_{ij}$$

和

$$g_i = \phi_i(g_{i1}, \dots, g_{in_i}),$$

則 $f_i = g_i T, i = 1, \dots, k$. 因为函数 g_i 显然是独立的, 所以函数 f_i 也是独立的. \blacksquare

作为本节的結束, 我們引进概率論中常用的一个术语. 設 f 是定义在概率空間 (X, S, μ) 上的一个实值可測函数, 并且 f^2 是可积的, 則由許瓦茲不等式 (即当 $p = 2$ 时的荷德爾不等式, 參看 §42 定理 1) 可知, f 本身也是可积的, 并且有

$$\left(\int f d\mu\right)^2 \leq \int f^2 d\mu.$$

如果令 $\int f d\mu = \alpha$, 則

$$\int (f - \alpha)^2 d\mu$$

称为 f 的方差, 記为 $\sigma^2(f)$. 因为恒等于常数的函数在整个概率空間上的积分值就等于这个常数, 所以根据 α 的定义就有

$$\sigma^2(f) = \left(\int f^2 d\mu \right) - \left(\int f d\mu \right)^2.$$

对于任意实数 c , 显然有 $\sigma^2(cf) = c^2\sigma^2(f)$.

定理 3. 設 f 和 g 是具有有限方差的独立函数, 則

$$\sigma^2(f+g) = \sigma^2(f) + \sigma^2(g).$$

証明. 我們有

$$\begin{aligned} \sigma^2(f+g) &= \int (f+g)^2 d\mu - \left(\int (f+g) d\mu \right)^2 = \\ &= \int f^2 d\mu + 2 \int fg d\mu + \int g^2 d\mu - \left(\int f d\mu \right)^2 - \\ &\quad - 2 \left(\int f d\mu \right) \left(\int g d\mu \right) - \left(\int g d\mu \right)^2; \end{aligned}$$

应用定理 1 就得到本定理的結論. \blacksquare

(1) 設 F 是概率空間 (X, \mathbf{S}, μ) 中具有正測度的一个可測集, 如果对于每一个可測集 E , 令 $\mu_F(E) = \mu(F \cap E) / \mu(F)$, 則 μ_F 是定义在 \mathbf{S} 上滿足条件 $\mu_F(F) = 1$ 的一个概率測度; 集 E 和 F 是独立的, 必須而且只須 $\mu_F(E) = \mu(E)$. 数 $\mu_F(E)$ 称为 E 在条件 F 下的条件概率.

(2) 設 $\{E_i; i=1, \dots, n\}$ 是具有正測度的可測集的有限类, 則

$$\mu(E_1 \cap \dots \cap E_n) = \mu(E_1) \mu_{E_1}(E_2) \cdots \mu_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}(E_n).$$

这个結果称为条件概率的乘法定理.

(3) 設 $\{E_i; i=1, \dots, n\}$ 是具有正測度的不相交可測集的有限类, 它的併集是 X (即設 $\{E_i\}$ 是 X 的一个分割), 則对于每一个可測集 F , 有

$$\mu(F) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i) \mu_{E_i}(F);$$

如果 F 具有正的測度, 則

$$\mu_F(E_j) = \frac{\mu(E_j) \mu_{E_j}(F)}{\sum_{i=1}^n \mu(E_i) \mu_{E_i}(F)}.$$

这个結果称为貝叶斯定理.

(4) 設 $\{E_i; i=1, \dots, n\}$ 和 $\{F_j; j=1, \dots, m\}$ 是 X 的两个分割, 如果对于

式。

定理 1. 設 $f_i, i=1, \dots, n$, 是独立函数, 滿足条件 $\int f_i d\mu=0$ 和 $\int f_i^2 d\mu < \infty, i=1, \dots, n$. 如果 $f(x) = \bigcup_{k=1}^n \left| \sum_{i=1}^k f_i(x) \right|$ (即, f 是 f_i 的諸部分和的絕對值的最大值), 則对于每一个正数 ε , 有

$$\mu(\{x: |f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n \sigma^2(f_k).$$

証明. 令

$$E = \{x: |f(x)| \geq \varepsilon\}, \quad s_k = \sum_{i=1}^k f_i,$$

并令

$$E_k = \{x: |s_k(x)| \geq \varepsilon\} \cap \bigcap_{1 \leq i < k} \{x: |s_i(x)| < \varepsilon\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{E_k} s_n^2 d\mu &= \int_{E_k} s_k^2 d\mu + \mu(E_k) \sum_{k < i \leq n} \int f_i^2 d\mu \geq \\ &\geq \int_{E_k} s_k^2 d\mu \geq \mu(E_k) \varepsilon^2. \end{aligned}$$

因为 $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$, 并且集 E_k 是不相交的, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sigma^2(f_k) &= \int (f_1 + \dots + f_n)^2 d\mu \geq \int_E s_n^2 d\mu = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{E_k} s_n^2 d\mu \geq \sum_{k=1}^n \mu(E_k) \varepsilon^2 = \mu(E) \varepsilon^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

定理 2. 設 $\{f_n\}$ 是独立函数叙列, 滿足条件 $\int f_n d\mu=0$ 和

$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_2(f_n) < \infty$, 則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 几乎处处收敛。

証明. 令

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad n=1, 2, \dots,$$

$$a_m(x) = \sup\{|s_{m+k}(x) - s_m(x)| : k=1, 2, \dots\},$$

$$a(x) = \inf\{a_m(x) : m=1, 2, \dots\},$$

則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 x 收斂的必要和充分条件是: $a(x)=0$ 。根据柯尔莫哥洛夫不等式, 对于每一个正数 ε 和每一对正整数 m, n , 我們有

$$\mu(\{x: \bigcup_{k=1}^n |s_{m+k}(x) - s_m(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{m+n} \sigma^2(f_k);$$

因此

$$\mu(\{x: a_m(x) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma^2(f_k).$$

从而有

$$\mu(\{x: a(x) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma^2(f_k).$$

因为級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n)$ 是收斂的, 所以 $\mu(\{x: a(x) \geq \varepsilon\}) = 0$ 。由于 ε 是任意的, 于是得到定理的結論。 ▮

下面这个定理是反面的命題。

定理 3. 設 $\{f_n\}$ 是独立函数叙列, c 是一个正的常数, 使得 $\int f_n d\mu = 0$ 并使得 $|f_n(x)| \leq c$ 几乎处处成立, $n=1, 2, \dots$ 。如果級數 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在一个具有正测度的集上收斂, 則

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n) < \infty.$$

証明。令 $s_0(x) = 0$ 而 $s_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$, $n=1, 2, \dots$, 則根据叶果洛夫定理(參看 21.2), 存在正数 d 使得集

$$E = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{x: |s_n(x)| \leq d\}$$

具有正的測度。如果令

$$E_n = \bigcap_{i=1}^n \{x: |s_i(x)| \leq d\}, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

則 $\{E_n\}$ 是一个遞減集叙列, 它的交集是 E 。令

$$F_n = E_{n-1} - E_n, \quad n=1, 2, \dots,$$

$$\alpha_n = \int_{E_n} s_n^2 d\mu, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

于是有

$$\begin{aligned} \alpha_n - \alpha_{n-1} &= \int_{E_{n-1}} s_n^2 d\mu - \int_{F_n} s_n^2 d\mu - \int_{E_{n-1}} s_{n-1}^2 d\mu = \\ &= \int_{E_{n-1}} f_n^2 d\mu + 2 \int_{E_{n-1}} f_n s_{n-1} d\mu - \int_{F_n} s_n^2 d\mu, \\ &\quad n=1, 2, \dots \end{aligned}$$

因为

$$\int_{E_{n-1}} f_n^2 d\mu = \mu(E_{n-1}) \sigma^2(f_n), \quad \int_{E_{n-1}} f_n s_{n-1} d\mu = 0,$$

又因为

$$\begin{aligned} \mu(E_{n-1}) &\geq \mu(E), \\ |s_n(x)| &\leq c + d, \end{aligned}$$

其中 x 屬於 F_n , $n=1, 2, \dots$, 因此

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} \geq \mu(E) \sigma^2(f_n) - (c+d)^2 \mu(F_n), \quad n=1, 2, \dots$$

令 n 等于 1 到 k , 然后相加, 我們得到

$$d^2 \geq \mu(E_k) d^2 \geq \alpha_k \geq \mu(E) \sum_{n=1}^k \sigma^2(f_n) - (c+d)^2. \quad |$$

定理 2 和 3 指出, 如果 $\{f_n\}$ 是独立函数的一个一致有界叙列,

滿足条件 $\int f_n d\mu = 0$, $n=1, 2, \dots$, 則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 或者几乎处处

收斂, 或者几乎处处發散; 由此可見, 使得这个級数收斂的点集, 它的測度不是 0 就是 1.

定理 4. 設 $\{f_n\}$ 是独立函数叙列, c 是一个正的常数, 使得 $|f_n(x)| \leq c$ 几乎处处成立, $n=1, 2, \dots$, 則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 几乎处处收

斂的必要和充分条件是: 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n)$ 都收斂.

証明. 設 $\{g_n\}$ 是由等式

$$g_n(x) = f_n(x) - \int f_n d\mu, \quad n=1, 2, \dots$$

确定的函数叙列, 对 $\{g_n\}$ 应用定理 2, 就可以說明条件的充分性. 現在証明条件的必要性. 考虑 X 和它自己的乘积空間, 在这个乘积空間上定义函数 h_n 如下:

$$h_n(x, y) = f_n(x) - f_n(y), \quad n=1, 2, \dots$$

根据假設条件, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 几乎处处收斂, 所以級数 $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x, y)$

几乎处处收斂; 又因为

$$\int h_n d(\mu \times \mu) = 0,$$

由定理 3 可知, $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(h_n) < \infty$. 但是 $\sigma^2(h_n) = 2\sigma^2(f_n)$, 因此

$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n) < \infty$. 因为 $\sigma^2(g_n) = \sigma^2(f_n)$, 所以根据定理 2, 級数

$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 几乎处处收斂; 由关系式

$$\int f_n d\mu = f_n(x) - g_n(x), \quad n=1, 2, \dots$$

可知, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$ 收斂. |

我們前面关于級数的全部結論，都包含在下面这个普遍的定理中。这个定理称为柯尔莫哥洛夫三級数定理。

定理 5. 設 $\{f_n\}$ 是独立函数叙列, c 是一个正的常数, 令 $E_n = \{x: |f_n(x)| \leq c\}, n=1, 2, \dots$. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 几乎处处收斂的必要和充分条件是: 下面三个級数

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E'_n),$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_n d\mu,$$

$$(c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f_n^2 d\mu - \left(\int_{E_n} f_n d\mu \right)^2 \right)$$

都收斂。

証明。令

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) \\ c \end{cases} \quad \text{和} \quad h_n(x) = \begin{cases} f_n(x), \\ -c \end{cases} \quad \text{若} \quad \begin{cases} |f_n(x)| \leq c, \\ |f_n(x)| > c. \end{cases}$$

显然, 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \quad \text{和} \quad \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$$

在相同的点处收斂。根据定理 4 (分別用在 $\{g_n\}$ 和 $\{h_n\}$ 上),

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 几乎处处收斂的必要和充分条件是: 下面四个級数

$$(d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f_n d\mu \pm c\mu(E'_n) \right),$$

$$(e) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f_n^2 d\mu - \left(\int_{E_n} f_n d\mu \right)^2 + c^2\mu(E_n)\mu(E'_n) \mp \mp 2c\mu(E'_n) \int_{E_n} f_n d\mu \right)$$

都收敛。容易验证，级数(a)，(b)和(c)的收敛性等价于级数(d)和(e)的收敛性(在符号+和-的两两配合下)。在验证时，除了简单的加减法外，只须注意下面的事实：因为收敛级数的各项是有界的，所以，如果两个收敛级数中有一个级数的各项是非负的，则它们的乘积级数是收敛的。 |

(1) 下面这个结果称为契貝雪夫不等式。以前在我们关于平均收敛性和依测度收敛性的讨论里，其实就已经包含了这个结果在内。

设 f 是具有有限方差的可测函数，则对于每一个正数 ε ，有

$$\mu(\{x: |f(x) - \int f d\mu| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^2(f).$$

柯尔莫哥洛夫不等式在 $n=1$ 时化为契貝雪夫不等式。沿用定理 1 中的记号，因为

$$\{x: |f(x)| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^n \{x: |\sum_{i=1}^k f_i(x)| \geq \varepsilon\},$$

对于每一个部分和应用契貝雪夫不等式，我们得到

$$\mu(\{x: |f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n (n-k+1) \sigma^2(f_k).$$

(2) 如果对于拉德馬海爾函数列 $\{f_n\}$ (参看 45.5) 应用定理 4，可以得到一个很有趣的结果。设 $\{c_n\}$ 是一个实数列，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ 依照级数

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ 为收敛或发散而几乎处处收敛或几乎处处发散。用概率论的话来说，

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n$ 收敛并且概率为 1 的必要和充分条件是：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ 收敛；这

里我们假定，第一个级数中每一项取+号或-号是等可能性的，并且它们的取法是不相关的。

(3) 我们已经指出，使得独立函数级数收敛的点集，它的测度只可能是 0 或 1；上述事实乃是下面这个非常普遍的原理的推论，这个原理称为零一律。设概率空间 X 是概率空间叙列 $\{X_n\}$ 的笛卡儿乘积空间。对于每一个

正整数 n , 令 $J_n = \{n+1, n+2, \dots\}$. 如果对于任意的 n , X 中可测集 E 是一个 J_n -柱面, 则 $\mu(E) = 0$ 或 1 . (提示: 对于每一个可测集 F , 令 $\nu(F) = \mu(E \cap F)$. 如果 F 是一个 J -柱面, 其中 J 是一个有限集, 则 $\nu(F) = \mu(E) \mu(F)$. 在这个等式中可以将 F 换为 E , 因为定义在 X 的全体可测子集类上的有限测度由它在这种 J -柱面上的值唯一确定.)

(4) 设 $\{E_n\}$ 是独立集的叙列, 则

$$\mu(\limsup_n E_n) = 0$$

的必要和充分条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

(参看 9.6). (提示: 以 χ_n 表 E_n 的特征函数, 对叙列 $\{\chi_n\}$ 应用定理 4.) 这个结果称为波雷耳-次特立辅助定理.

(5) 两个叙列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 若满足关系式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x: f_n(x) \neq g_n(x)\}) < \infty,$$

则称为在辛欽意义下是等价的. 设 $\{f_n\}$ 是独立函数叙列, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

几乎处处收敛的必要和充分条件是: 存在与 $\{f_n\}$ 等价的独立函数叙列 $\{g_n\}$, 其中每一个 g_n 都具有有限的方差, 使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu \quad \text{和} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(g_n)$$

都收敛.

(6) 设 $\{f_n\}$ 是可积函数叙列, f 是具有有限方差的可测函数, 并且对于每一个正整数 n , 函数

$$f_1, \dots, f_n, \quad f - (f_1 + \dots + f_n)$$

互相独立, 则每一个 f_n 具有有限方差, 并且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - \int f_n d\mu)$$

几乎处处收敛. (提示: 应用 45.9 和三級数定理.)

§47. 大数定律

在概率論中有一系列的極限定理，統称为大数定律；我們在本节里提出这类定理中具有典型性的两个。第一个定理称为貝努里定理或弱大数定律。

定理 1. 設 $\{f_n\}$ 是具有有限方差的独立函数叙列， $\int f_n d\mu = 0$, $n=1, 2, \dots$, 并且

$$\lim_n \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2(f_i) = 0,$$

則平均值的叙列 $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i \right\}$ 依測度收斂到 0。

証明。因为 σ^2 是二次齐次函数，而对于独立函数來說又是可加的，所以

$$\int \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i \right)^2 d\mu = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2(f_i).$$

換一句話說，定理的假設条件和下列条件等价：平均值的叙列二阶平均收斂到 0（即在空間 \mathcal{L}_2 中收斂到 0）。从这个条件就可以推出依測度收斂性。 ▮

設 f 和 g 是定义在概率空間 (X, S, μ) 上的两个实值可測函数，如果对于数直綫上的一切波雷耳集 M ，有 $\mu(f^{-1}(M)) = \mu(g^{-1}(M))$ ，則称 f 和 g 具有同样的分布。容易驗証，如果 f 和 g 是具有同样分布的可积函数，若令 $F = f^{-1}(M)$, $G = g^{-1}(M)$ ，其中 M 是数直綫上的某一个波雷耳集，則

$$\int_F f d\mu = \int_G g d\mu.$$

在貝努里定理中，如果函数列 $\{f_n\}$ 的任何兩項都具有同样的分布，我們得到这个定理的一个特殊情形。在这种情形下，对于每一个

正整数 n 有 $\sigma^2(f_n) = \sigma^2(f_1)$, 从而有 $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2(f_i) = \frac{1}{n} \sigma^2(f_1)$, 因此, 对于方差数列 $\{\sigma^2(f_n)\}$ 的条件自然满足。

为了要证明较强形式的大数定律, 我们要用到下面两条初等分析中的定理。

定理 2. 设 $\{y_n\}$ 是具有有限极限值 y 的实数列, 则 $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = y$.

证明. 对于每一个正数 ε , 存在正整数 n_0 使当 $n > n_0$ 有 $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. 设 n_1 是大于 n_0 并满足关系式

$$\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_0} |y_i - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

的一个正整数. 如果 $n > n_1$, 则

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) - y \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_0} (y_i - y) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{i=n_0+1}^n (y_i - y) \right| < \\ &< \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_0} |y_i - y| + \frac{n - n_0}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

定理 3. 设 $\{y_n\}$ 是一个实数列, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y_n$ 收敛, 则

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 0.$$

证明. 令

$$s_0 = 0, \quad s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} y_i, \quad t_n = \sum_{i=1}^n y_i, \quad n = 1, 2, \dots.$$

因为 $y_i = i(s_i - s_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots$, 并且

$$t_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} i s_i - \sum_{i=1}^{n+1} i s_{i-1} = - \sum_{i=1}^n s_i + (n+1) s_{n+1}, \quad n=1, 2, \dots,$$

所以

$$\frac{t_{n+1}}{n+1} = - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i + s_{n+1}.$$

由于数列 $\{S_n\}$ 趋向一个有限的极限, 而根据定理 2, 数列 $\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i\right\}$ 趋于同一个极限, 因此

$$\lim_n \frac{t_{n+1}}{n+1} = 0. \quad \blacksquare$$

定理 4. 设 $\{f_n\}$ 是具有有限方差的独立函数列, $\int f_n d\mu = 0$, $n=1, 2, \dots$, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(f_n)}{n^2} < \infty,$$

则数列 $\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i\right\}$ 几乎处处收敛到 0.

我們注意到, 定理 4 的假设条件和结论都比定理 1 里面的为强. 这个定理是强大数定律的一种形式.

证明. 令 $g_n(x) = \frac{1}{n} f_n(x)$, $n=1, 2, \dots$, 然后对数列 $\{g_n\}$ 应用 §46 定理 2. 因为

$$\int g_n d\mu = 0, \quad n=1, 2, \dots,$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(g_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(f_n)}{n^2} < \infty,$$

所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_n(x)$$

几乎处处收敛。应用定理 3 即得結論。

(1) 两个可測函数具有同样的分布, 其必要和充分条件是: 它們具有同一个分布函数(参看 18.11)。

(2) 設 $\{\sigma_i^2\}$ 是一个非負实数列, m 和 n 是两个正整数, 并且 $m < n$, 則

$$\frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n^2} \leq \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_m^2}{n^2} + \frac{\sigma_{m+1}^2}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{\sigma_n^2}{n^2}.$$

利用这个不等式可以說明, 定理 4 的假設条件并不比定理 1 的假設条件为弱。事实上, 定理 4 的条件是較强的; 这个事实可以通过具有方差

$$\sigma^2(f_n) = \frac{n+1}{\log(n+1)}$$

的独立函数列 $\{f_n\}$ 来說明。

(3) 定理 4 中关于方差的假設条件不能再放寬了。事实上, 如果 $\{\sigma_n^2\}$ 是一个非負实数列, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} = \infty,$$

則存在独立函数列 $\{f_n\}$, 使得 $\int f_n d\mu = 0$, $\sigma^2(f_n) = \sigma_n^2$, $n=1, 2, \dots$, 并使得

$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i \right\}$ 不能几乎处处收敛到 0。 (提示: 作出滿足下列条件的函数 f_n : 当

$\sigma_n^2 \leq n^2$ 时,

$$\mu(\{x: f_n(x) = n\}) = \mu(\{x: f_n(x) = -n\}) = \frac{\sigma_n^2}{2n^2},$$

$$\mu(\{x: f_n(x) = 0\}) = 1 - \frac{\sigma_n^2}{n^2};$$

而当 $\sigma_n^2 > n^2$ 时,

$$\mu(\{x: f_n(x) = \sigma_n\}) = \mu(\{x: f_n(x) = -\sigma_n\}) = \frac{1}{2}.$$

我們注意到, 如果 $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 0$, 則有 $\lim_n \frac{1}{n} y_n = 0$; 然后对集 $\{x: |f_n(x)| \geq n\}$ 应用波雷耳-坎特立輔助定理.)

(4) 設 $\{f_n\}$ 是滿足定理 4 中条件的独立函数列, 則存在等价于 $\{f_n\}$ 的独

立函数列 $\{g_n\}$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(g_n)}{n^2} = \infty;$$

換一句話說, 强大数定律的逆命題不成立.

(5) 下述强大数定律的較弱形式的逆命題成立. 設 $\{f_n\}$ 是独立函数列, c 是一个正的常数, 并且 $\int f_n d\mu = 0$, $\left| \frac{1}{n} f_n(x) \right| \leq c$ 几乎处处成立, $n=1, 2, \dots$; 如果叙列 $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i \right\}$ 几乎处处收斂到0, 則对于任意正数 ε , 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(f_n)}{n^{2+\varepsilon}} < \infty.$$

(提示: 設 $\{y_n\}$ 是一个实数列, 使得 $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 0$, 或者使得数列

$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right\}$ 为有界, 則对于每一个正数 ε , 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

收斂.)

(6) 在定理4中, 如果将条件 $\int f_n d\mu = 0$, $n=1, 2, \dots$ 換为

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int f_i d\mu = 0,$$

結論仍成立.

(7) 下面这个定理有时也称为强大数定律. 設 $\{f_n\}$ 是具有同样分布的独立可积函数列, 并且 $\int f_n d\mu = 0$, 則几乎处处有 $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i = 0$. 下面一系列命題的目的在于引导我們証明这个定理.

(7a) 如果 $E_n = \{x: |f_1(x)| \leq n\}$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{E_n} f_1^2 d\mu < \infty$. (提示: 以

χ_n 表示 E_n 的特征函数, 并令 $g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \chi_n f_1^2$. 如果 $k-1 < |f_1(x)| \leq k$,

則对于一切 $n < k$ 有 $\chi_n(x) = 0$; 于是有 $|g(x)| < |f_1(x)|$, 因而 g 是可积

的.)

(7b) 如果 $F_n = \{x: |f_n(x)| \leq n\}$, 并且 $g_n = \chi_{F_n} f_n$, 則独立函数列 $\{g_n\}$ 等价于 $\{f_n\}$.

(7c) $\lim_n \sum_{i=1}^n \int g_i d\mu = 0$. (提示: $\int g_i d\mu = \int_{F_i} f_i d\mu = \int_{E_i} f_i d\mu$, 而 $\{E_i\}$ 是可測集的增叙列, 它的併集是 X (参看定理 2).)

(7d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sigma^2(g_n) < \infty$. (提示: 注意到 $\int g_n^2 d\mu = \int_{F_n} f_n^2 d\mu = \int_{E_n} f_n^2 d\mu$, 并应用 (7a) 說明級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int g_n^2 d\mu$ 收敛; 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\int g_n d\mu)^2$ 的收敛性可由关系式

$$\left(\int g_n d\mu\right)^2 \leq \left(\int |f_n| d\mu\right)^2$$

推出.)

(8) 在 (7) 中所述的强大数定律, 它的逆定理成立: 設 $\{f_n\}$ 是具有同样分布的独立函数列, 并且 $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i = 0$ 几乎处处成立, 則 f_n 是可积的.

(提示: 由 $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i = 0$ 几乎处处成立这一个条件, 再加上波雷耳-坎特立輔助定理, 就可以推出級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x: |f_n(x)| > n\})$ 的收敛性. 然后注意到 $\mu(\{x: |f_n(x)| > n\}) = \mu(\{x: |f_1(x)| > n\})$, 并应用 27.4.)

(9) 对于拉德馬海爾函数列应用强大数定律, 我們得到波雷耳关于**正規数**的著名定理: 在单位区間中的几乎每一个数, 它的二进位展开式中包含同样数目的 0 和 1. 对于任意 r 进位展开式 ($r \geq 3$), 类似的結論也成立; 我們得到关于**绝对正規数**的定理: 几乎每一个数对于一切基 r 都同时是正規的.

§48. 条件概率和条件数学期望

設 E 和 F 是概率空間 (X, S, μ) 中的可測集; 如果 $\mu(F) \neq 0$, 我們已經由等式

$$\mu_F(E) = \frac{\mu(E \cap F)}{\mu(F)}$$

定义了 E 在条件 F 下的条件概率(参看 §44 和 45.1), 并且也已經稍稍探討了一下它对于 F 的依賴性. 現在我們要研究, $\mu_F(E)$ 究竟如何地依賴于 F . 設 F 是使得 $\mu(F)$ 和 $\mu(F')$ 都不为 0 的一个集; 考虑只包含两个点 y_1 和 y_2 的可測空間 Y (这里 Y 的一切子集都了解为可測集), 并定义 X 在 Y 中的一个可測变换 T 如下: 若 $x \in F$, 則 $T(x) = y_1$, 若 $x \in F'$, 則 $T(x) = y_2$. 对于 Y 的每一个子集 A , 令

$$\nu_E(A) = \mu(E \cap T^{-1}(A)) \quad \text{和} \quad \nu(A) = \nu_X(A) = \mu(T^{-1}(A)),$$

則显然有

$$\mu_F(E) = \frac{\nu_E(\{y_1\})}{\nu(\{y_1\})} \quad \text{和} \quad \mu_{F'}(E) = \frac{\nu_E(\{y_2\})}{\nu(\{y_2\})}.$$

換一句話說, 条件概率可以看作定义在 Y 上的一个可測函数——不严格地說, 这个函数就是測度 ν_E 和 ν 的比.

将上段的論点加以推广, 設 $\{F_1, \dots, F_n\}$ 是具有正測度的不相交可測集的一个有限类, 并且 $\bigcup_{i=1}^n F_i = X$; 考虑由 n 个点 y_1, \dots, y_n 組成的可測空間 Y . 如果当 $x \in F_i$ 时令 $T(x) = y_i, i = 1, \dots, n$, 則 T 是 X 在 Y 中的一个可測变换, 于是条件概率又可以表为定义在 Y 上的两个測度之比. 根据以上的考虑, 我們引进下列一般的定义. 設 T 是概率空間 (X, \mathbf{S}, μ) 在可測空間 (Y, \mathbf{T}) 中的可測变换; 如果 E 和 F 分別是 X 和 Y 中的可測集, 令 $\nu_E(F) = \mu(E \cap T^{-1}(F))$, 則 ν_E 和 $\mu T^{-1}(=\nu_X)$ 显然是 \mathbf{T} 上的測度, 并且 $\nu_E \ll \mu T^{-1}$. 根据拉东-尼古丁定理, 存在定义在 Y 上的可积函数 p_E , 使得对于 \mathbf{T} 中每一个 F , 有

$$\mu(E \cap T^{-1}(F)) = \int_F p_E(y) d\mu T^{-1}(y);$$

函数 p_E 在 $[\mu T^{-1}]$ 的意义下是唯一确定的. 我們称 $p_E(y)$ 为 E 在条件 y 下的条件概率, 或者称为 E 在条件 $T(x) = y$ 下的条件概率. 有时我們称 $p_E(T(x))$ 这个数为“在已給的值 $T(x)$ 下 E 的条

件概率”。我們通常將 $p_E(y)$ 記為 $p(E, y)$ ；而當我們必須將 p 作為第一個主目元 E 的函數來考慮時，則記為 $p^y(E) = p(E, y)$ 。

如果集 F 滿足條件 $\mu(T^{-1}(F)) \neq 0$ ，則將借以定義 p 的等式兩端各除以 $\mu(T^{-1}(F))$ ，我們得到關係式

$$\begin{aligned} \mu_{T^{-1}(F)}(E) &= \frac{\mu(E \cap T^{-1}(F))}{\mu(T^{-1}(F))} = \\ &= \frac{1}{\mu(T^{-1}(F))} \int_F p(E, y) d\mu T^{-1}(y). \end{aligned}$$

因為上式最左端的一項是 E 在條件 $T^{-1}(F)$ 下的條件概率，所以，從形式上來看，我們似乎可以說：當“ F 縮成 y ”時，左端應該趨向 E 在條件 y 下的條件概率，而右端則應該趨向被積函數 $p(E, y)$ 。利用拉東-尼古丁定理可以使這種說法嚴格化。

定理 1. 設 E 是 X 中任意固定的可測集，則

$$0 \leq p(E, y) \leq 1 [\mu T^{-1}];$$

設 $\{E_n\}$ 是 X 中不相交可測集的任意固定的序列，則

$$p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(E_n, y) [\mu T^{-1}].$$

證明。 因為對於 Y 中每一個可測集 F ，有 $0 \leq \mu(E \cap T^{-1}(F)) \leq 1$ ，由此即得定理里的不等式。為了證明定理里的等式，首先注意到

$$\begin{aligned} \int_F p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, y\right) d\mu T^{-1}(y) &= \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap T^{-1}(F)\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap T^{-1}(F)) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_F p(E_n, y) d\mu T^{-1}(y) = \\ &= \int_F \left(\sum_{n=1}^{\infty} p(E_n, y)\right) d\mu T^{-1}(y), \end{aligned}$$

然後應用拉東-尼古丁定理中關於唯一性的部分。

定理 1 指出，函數 p^y 在某些方面很像是一個測度，我們還可

以得到更多的与测度相类似的性质,例如,我们可以证明: $p(X, y) = 1[\mu T^{-1}]$; 如果 $E_1 \subset E_2$, 则有 $p(E_1, y) \leq p(E_2, y)[\mu T^{-1}]$; 如果 $\{E_n\}$ 是 X 中可测集的减数列, 则

$$p\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, y\right) = \lim_n p(E_n, y)[\mu T^{-1}].$$

但是我们必须记住, 在那些测度为零的集上, 对应的关系式不能成立, 而测度为零的集与集 E_i 的选择有关, 因此, 在一般的场合, 我们不能说, 对于 y 的几乎一切的值, p^y 是一个测度.

前面我们用来定义 $p(E, y)$ 的等式也可以写成下列形式:

$$\int_{T^{-1}(F)} \chi_E(x) d\mu(x) = \int_F p(E, y) d\mu T^{-1}(y).$$

在更一般的场合, 如果 f 是定义在 X 上的任意可积函数, 则对于 Y 中一切可测集 F , 由等式

$$v(F) = \int_{T^{-1}(F)} f(x) d\mu(x)$$

确定的不定积分 v 可以看作是定义在 T 上的一个广义测度. 显然, $v \ll \mu T^{-1}$, 因此, 根据拉东-尼古丁定理, 存在定义在 Y 上的可积函数 e_f , 使得对于 T 中每一个 F , 有

$$\int_{T^{-1}(F)} f(x) d\mu(x) = \int_F e_f(y) d\mu T^{-1}(y);$$

函数 e_f 在 $[\mu T^{-1}]$ 的意义下是唯一确定的. 我们称 $e_f(y)$ 为 f 在条件 y 下的条件数学期望; 我们有时也将 $e_f(y)$ 记为 $e(f, y)$.

因为 p 和 e 之间的关系与一个测度和不定积分之间的关系相类似, 所以像下面这样的等式似乎应该成立:

$$e(f, y) = \int f(x) dp^y(x).$$

但是一般说来 p^y 不一定是一个测度, 因此上式右端的积分可能是没有定义的.

定理 2. 设 f 是定义在 Y 上的可积函数, 则 fT 是定义在 X 上的可积函数, 并且 $e(fT, y) = f(y)$.

証明。根据 §39 定理 3, fT 是可积的, 并且对于 \mathbf{T} 中每一个 F , 有

$$\int_{T^{-1}(F)} f(T(x)) d\mu(x) = \int_F f(y) d\mu T^{-1}(y).$$

(1) 考虑概率空间 (X, \mathbf{S}, μ) 和 (Y, \mathbf{T}, ν) 的笛卡儿乘积空间 $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T}, \mu \times \nu)$. 如果 $T(x, y) = x$, 则 T 是 $X \times Y$ 在 X 上的一个可测变换. 对于 $X \times Y$ 中每一个可测集 E , 等式 $p(E, x) = \nu(E_x) [\mu]$ 成立; 在这种情形下, p_E 对于每一个 E 有定义, 因此, 对于任意的 x , p^x 是一个测度.

(2) 設 (X, \mathbf{S}, μ) 和 (Y, \mathbf{T}, ν) 是两个概率空间, λ 是 $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ 上的测度, 满足条件 $\lambda \ll \mu \times \nu$; 例如, 令 $\lambda(E) = \int_E f d(\mu \times \nu)$. 如果 $T(x, y) = x$, 则对于 $X \times Y$ 中每一个可测集 E , 有

$$p(E, x) = \int \chi_E(x, y) f(x, y) d\nu(y) [\mu].$$

(3) 設 T 是概率空间 (X, \mathbf{S}, μ) 在可测空间 (Y, \mathbf{T}) 中的可测变换, 则对于 Y 中每一个可测集 F , 有 $p(T^{-1}(F), y) = \chi_F(y) [\mu T^{-1}]$.

(4) 要确定条件概率 $p(E, y)$, 使得 p^y 对于 y 的几乎一切的值是一个测度, 有时是不可能的. 下面一系列命题的目的, 就在于建立一个这样的例子. 設 Y 是单位闭区间, \mathbf{T} 是 Y 中全体波雷耳集类, ν 是 \mathbf{T} 上的勒貝格测度. 令 $X = Y$, 并設 \mathbf{S} 是由 \mathbf{T} 中全体集与集 M 组成的类所产生的 σ -环, 其中 M 是具有下述性质的一个集: M 本身及其余集 M' 都是 Y 中的浓厚集. 令

$$\mu((A \cap M) \cup (B \cap M')) = \nu(A),$$

其中 A 和 B 属于 \mathbf{T} , 则 μ 是定义在 \mathbf{S} 上的一个测度; 现在我們考虑由等式 $T(x) = x$ 确定的, X 在 Y 上的变换 T . 假定在 \mathbf{T} 中存在一个测度为零并且具有下述性质的集 C_0 : 当 $y \in C_0$ 时, p^y 是 \mathbf{S} 上的一个测度.

(4a) 如果 $D_0 = \{y: p(M, y) \neq 1\}$, 则 $\nu(D_0) = 0$.

(4b) 設 E_0 是由一切这样的点 y 组成的集: 等式 $p(T^{-1}(F), y) = \chi_F(y)$ 不能对于 \mathbf{T} 中一切的 F 恒成立; 则 $\nu(E_0) = 0$. (提示: 設 \mathbf{R} 是一个可列环使得 $\mathbf{S}(\mathbf{R}) = \mathbf{T}$. 对于 \mathbf{R} 中每一个 F , 令

$$E_0(F) = \{y: p(T^{-1}(F), y) \neq \chi_F(y)\},$$

则 $\nu(E_0(F)) = 0$. 注意利用下述事实: 如果两个概率测度在 \mathbf{R} 上相等, 则它們在 \mathbf{T} 上也相等.)

(4c) 如果 $y \in C_0 \cup D_0 \cup E_0$, 則 $y \in M$. (提示: 因为 $p(M, y) = 1$, $p(T^{-1}(\{y\}), y) = 1$, 并且 p^ν 是一个测度, 所以

$$p(M \cap T^{-1}(\{y\}), y) = 1.)$$

由(4c)可知, 测度为 1 的波雷耳集 $C'_0 \cap D'_0 \cap E'_0$ 被集 M 所包, 这与 M' 为濃厚集的假定相矛盾.

(5) 設 X 是数直綫, μ 是定义在 X 中全体波雷耳集类 \mathbf{S} 上的概率测度, T 是 X 在可測空間 (Y, \mathbf{T}) 中的可測变换, 則可以确定条件概率 $p(E, y)$, 使得 p^ν 对于 y 的几乎一切的值是一个测度. (提示: 令 $q(x, y) = p((-\infty, x), y)$. 在 Y 中存在可測集 C_0 , 满足下面几个条件: $\mu T^{-1}(C_0) = 0$; 若 $y \in C_0$, 則 q^ν 是定义在 X 中全体有理数集上的单調函数; 对于每一个有理数 x , $\lim_n q^\nu(x - \frac{1}{n}) = q^\nu(x)$. 設 \bar{q}^ν 是定义在 X 上从左边連續的单調函数, 并且当 x 为有理数时 \bar{q}^ν 与 q^ν 相等; 又設 \bar{p}^ν 是定义在 \mathbf{S} 上由等式 $\bar{p}^\nu((-\infty, x)) = \bar{q}^\nu(x)$ 确定的测度. 令 $\bar{p}(E, y) = \bar{p}^\nu(E)$.)

(6) 設 T 是概率空間 (X, \mathbf{S}, μ) 在可測空間 (Y, \mathbf{T}) 中的可測变换. 如果条件概率 $p(E, y)$ 能够被确定, 使得 p^ν 对于 y 的几乎一切的值是一个测度, 則对于定义在 X 上的每一个可积函数 f , 有

$$e(f, y) = \int f(x) d p^\nu(x) [\mu T^{-1}].$$

(提示: 如果 f 是可測集的特征函数, 則等式成立.)

(7) 設 T 是概率空間 (X, \mathbf{S}, μ) 在可測空間 (Y, \mathbf{T}) 中的可測变换. 如果 f 是对于 μ 为可积的函数, g 是对于 μT^{-1} 为可积的函数, 并設由等式 $h(x) = f(x)g(T(x))$ 定义的函数 h 在 X 上为可积, 則

$$e(h, y) = e(f, y)g(y) [\mu T^{-1}].$$

§49. 乘积空間上的测度

考虑下面的問題. 是否存在独立随机变数的叙列, 这些随机变数具有預先指定的分布? 确切地說, 如果 $\{\mu_n\}$ 是定义在数直綫中全体波雷耳集类上的概率测度叙列, 則是否存在概率空間 (X, \mathbf{S}, μ) 以及定义在 X 上的独立函数叙列 $\{f_n\}$, 使得对于任意波雷耳集 E 和任意正整数 n , 有 $\mu(f_n^{-1}(E)) = \mu_n(E)$? 更一般地說, 如果

$\{(X_n, \mathbf{S}_n, \mu_n)\}$ 是概率空間的叙列, 則是否存在概率空間 (X, \mathbf{S}, μ) , 并且, 对于每一个正整数 n , 是否存在 X 在 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 中的可測变换 T_n , 使得 $\mu T_n^{-1} = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$? 对于这些問題, §38 定理 2 都給出了肯定的回答。

独立性是概率論中最重要的概念之一, 但同时也應該着重地指出, 在概率論中所考虑的随机变数, 不能只限于是互相独立的。本节的主要目的, 是要表述并証明关于非独立随机变数的一个定理, 这个定理是和关于独立随机变数的 §38 定理 2 相对应的; 換一句話說, 这个定理断言, 具有預先指定的分布的随机变数叙列必定存在。然而, 和 §38 定理 2 有所不同, 本节的定理只适用于一致有界实值函数的場合; 換一句話說, 我們所要考虑的乘积空間, 它的每一个因子都是单位区間。定理本身及其証明都可以扩充到更为一般的場合, 但都需依赖于拓扑学方面的概念。要想不用到任何拓扑方面的条件, 看来是不可能的; 和下面定理 1 相类似的測度論方面的定理, 已經被証明不能成立。

設对于每一个正整数 n , X_n 是单位閉区間而 \mathbf{S}_n 是 X_n 中的全体波雷耳集类, 并令 $(X, \mathbf{S}) = \prod_{n=1}^{\infty} (X_n, \mathbf{S}_n)$ 。又設 \mathbf{F}_n 是由 X 中全体可測 $\{1, \dots, n\}$ -柱面組成的 σ -环, $\mathbf{F} (= \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n)$ 是由 X 中全体可測的有限維子集組成的环(参看 §38)。

定理 1. 設 μ 是定义在 \mathbf{F} 上的集函数, 并設对于每一个正整数 n , μ 是 \mathbf{F}_n 上的一个概率測度, 則在 \mathbf{S} 上存在唯一的一个 μ 的扩张, 这个扩张是一个概率測度。

証明. 定义 X 在可測空間 $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$ 上的可測变换 T_n 如下:

$$T_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = (x_1, \dots, x_n), \quad n=1, 2, \dots;$$

对于 Y_n 中每一个可測集 A , 令 $\nu_n(A) = \mu(T_n^{-1}(A))$ 。如果 $\{E_i\}$ 是 \mathbf{F} 中集的遞減叙列使得 $0 < \varepsilon \leq \mu(E_i), i=1, 2, \dots$, 則对于每一个固定的 i , 存在正整数 n 以及 Y_n 中的波雷耳集 A_i , 使得 $E_i =$

$T_n^{-1}(A_i)$. 設 B_i 是 A_i 的閉子集, 滿足关系式

$$\nu_n(A_i - B_i) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

令 $F_i = T_n^{-1}(B_i)$, 則 F_i 是乘积空間 X 的一个紧子集(对于乘积空間 X 的拓扑結構), 并且 $\mu(E_i - F_i) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. 令 $G_k = \bigcap_{i=1}^k F_i$, 則 $\{G_k\}$ 是 X 的紧子集的一个遞減叙列. 因为

$$\mu(E_k - G_k) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k (E_k - F_i)\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^k (E_i - F_i)\right) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$\mu(G_k) = \mu(E_k) - \mu(E_k - G_k) \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

因而有 $G_k \neq \emptyset, k=1, 2, \dots$. 由于非空紧集的遞減叙列具有非空的交集, 因此 μ 在 0 是上連續的, 从而具有可列可加性; 应用 §13 定理 1 即得結論. \blacksquare

沿用上面引进的記号, 我們現在証明单位区間的乘积空間的一个有趣的性質.

定理 2. 对于 X 中每一个可測集 E , 有

$$\lim_n p(E, T_n(x)) = \chi_E(x) [\mu];$$

換一句話說, 对于一切的 x (可能要除去一个測度为零的集), 在 x 的最前面 n 个坐标的給定值之下, E 的条件概率按照 $x \in E$ 或 $x \notin E$ 而收斂到 0 或 1.

証明. 証明几乎一致收斂性比証明几乎处处收斂性来得方便; 按照 §21 定理 1 和定理 2, 这两种收斂性是等价的. 設 ε 是任意正数, δ 是小于 1 的任意正数. 根据 §13 定理 4, 存在正整数 n_0 和可測 $\{1, \dots, n_0\}$ -柱面 E_0 , 使得

$$\mu(E \Delta E_0) < \frac{\varepsilon \delta}{2}.$$

令 $B = E \Delta E_0$, 我們注意到, 如果 $x \notin B$, 則

$$\chi_E(x) = \chi_{E_0}(x).$$

令

$$\begin{aligned} C_n &= \{x: p(B, T_n(x)) \geq \delta\}, \\ D_n &= C_n - \bigcup_{1 \leq i < n} C_i, \end{aligned} \quad n=1, 2, \dots,$$

并令

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

則对于每一个 n , C_n 和 D_n 都是可測 $\{1, \dots, n\}$ -柱面。于是有

$$\mu(B \cap D_n) = \int_{D_n} p(B, T_n(x)) d\mu(x) \geq \delta \mu(D_n),$$

从而有

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon \delta}{2} > \mu(B) &\geq \mu(B \cap C) = \mu(B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap D_n) \geq \delta \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) = \\ &= \delta \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = \delta \mu(C). \end{aligned}$$

如果令 $A = B \cup C$, 則

$$\mu(A) \leq \frac{\varepsilon \delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

因为

$$\begin{aligned} |p(E, T_n(x)) - p(E_0, T_n(x))| &\leq p(E \Delta E_0, T_n(x)) \quad [\mu], \\ n &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

所以我們可以假定, 这些不等式对于 X 中一切 x 都成立。如果 $n \geq n_0$, 根据 §38 定理 1 和 §48 定理 2, 有

$$|p(E, T_n(x)) - \chi_{E_0}(x)| \leq p(B, T_n(x)).$$

如果再假定 $x \in A$, 則有 $\chi_{E_0}(x) = \chi_E(x)$ 和 $p(B, T_n(x)) < \delta$, 因此 $|p(E, T_n(x)) - \chi_E(x)| < \delta$. \blacksquare

(1) 設 $\{(X_n, S_n, \mu_n)\}$ 是概率空間的叙列, $(X, S) = \prod_{n=1}^{\infty} (X_n, S_n)$, μ 是定义在 F 上的集函数, 并且对于每一个正整数 n , μ 是 F_n 上的一个概率测度。如果在每一个 F_n 上, μ 对于乘积测度 $\prod_{i=1}^n \mu_i$ 是绝对連續的, 則在 S

上存在 μ 的唯一的扩张, 这个扩张是一个概率测度. (提示: 参看 §38 定理 2 的证明.) 这个结果和证明的方法可以扩充到一切满足下述条件的场合: 条件概率 $p(E, T_n(x))$ 能够被确定, 使得对于几乎每一个固定的 x , 它们是在每一个 F_k 上的概率测度.

(2) 如果 X_n 是紧度量空间, 定理 1 仍然成立, 并且定理的叙述和证明都保持不变. 于是, 若每一个 X_n 都是数直线, 则通过紧化的步骤很容易证明定理 1 仍然成立. 对于任意的紧空间, 定理 1 是否成立?

(3) 沿用(1)中的记号, 我们现在给出一个例子, 说明定理 1 在 X_n 不是区间的场合下不一定成立. 设 Y 是单位区间, \mathbf{T} 是 Y 中的全体波雷耳集类, ν 是 \mathbf{T} 上的勒贝格测度. 设 $\{X_n\}$ 是 Y 中浓厚子集的递减数列, 并且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = 0$. 令 $S_n = \mathbf{T} \cap X_n$; 如果 $E \in S_n$, 即 $E = F \cap X_n$, 其中 $F \in \mathbf{T}$, 则令 $\mu_n(E) = \nu(F)$. 设 $(X, \mathbf{S}) = \mathbf{X}_{n=1}^{\infty}(X_n, S_n)$; 对于每一个正整数 n , 设 S_n 是由等式

$$S_n(x_n) = (z_1, \dots, z_n), \quad z_i = x_n, \quad i = 1, \dots, n$$

确定的, X_n 在 $X_1 \times \dots \times X_n$ 中的可测变换.

(3a) 对于 X 中每一个可测 $\{1, \dots, n\}$ -柱面

$$E = A \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots, \quad A \in S_1 \times \dots \times S_n,$$

令 $\mu(E) = \mu_n(S_n^{-1}(A))$. 于是, 集函数 μ 在 \mathbf{F} 上具有确定的定义, 并且, 对于每一个正整数 n , μ 是 \mathbf{F}_n 上的一个概率测度.

(3b) 设 E_i 是 X 中一切具有下述性质的点 (x_1, x_2, \dots) 组成的集: (x_1, x_2, \dots) 的最前面 i 个坐标彼此相等, $i = 1, 2, \dots$, 则 $E_i \in \mathbf{F}_i$. (提示: 令

$$D_i = \{(y_1, \dots, y_i) : y_1 = \dots = y_i\},$$

则 D_i 是 Y 与其本身构成的 i 维笛卡儿乘积空间的一个可测子集, 并且

$$E_i = (D_i \cap (X_1 \times \dots \times X_i)) \times X_{i+1} \times X_{i+2} \times \dots)$$

(3c) 定义在 \mathbf{F} 上的集函数 μ 在 0 不是上连续的. (提示: 在(3b)中定义的集 $E_i, i = 1, 2, \dots$, 具有下列性质: $\mu(E_i) = 1, \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = 0$.)

(4) 零一律 (46.3) 是定理 2 的一个特殊情形. 事实上, 如果 E 是一个 J_n -柱面而 F 是 Y_n 的一个可测子集, 则 $T_n^{-1}(F)$ 是一个 $\{1, \dots, n\}$ -柱面, 并且有

$$\mu(E \cap T_n^{-1}(F)) = \mu(E) \mu T_n^{-1}(F) = \int_F \mu(E) d\mu_n$$

因此, $p(E, T_n(x))$ 几乎处处 $[\mu]$ 等于常数 ($=\mu(E)$). 根据定理 2, $\chi_E(x) = \mu(E)[\mu]$, 所以 $\mu(E)$ 等于 0 或 1.

第十章

局部紧空間

§50. 一些拓扑学方面的定理

在本节中我們要介紹一些拓扑学方面的結果，由于它們的性質比較特殊，这些結果在拓扑学的書里通常是沒有的。

在整个这一章里，除特別指明的場合外，我們总是假定 X 是一个局部紧的豪司道夫空間。我們以記号 \mathcal{F} 表示由定义在 X 上滿足下列条件的一切实值連續函数 f 組成的类：对于 X 中一切的 x , $0 \leq f(x) \leq 1$ 。

定理 1. 設 C 是紧集, U 和 V 是兩個开集, 并且 $C \subset U \cup V$, 則存在紧集 D 和 E , 使得 $D \subset U$, $E \subset V$, 并且 $C = D \cup E$ 。

証明。因为 $C - U$ 和 $C - V$ 是不相交的紧集, 所以存在不相交的开集 \tilde{U} 和 \tilde{V} 使得 $C - U \subset \tilde{U}$ 和 $C - V \subset \tilde{V}$; 令 $D = C - \tilde{U}$, 并令 $E = C - \tilde{V}$ 。容易看出, D 和 E 都是紧集, 并且 $D \subset U$, $E \subset V$ 。由于 $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$, 我們有

$$D \cup E = (C - \tilde{U}) \cup (C - \tilde{V}) = C - (\tilde{U} \cap \tilde{V}) = C. \quad \blacksquare$$

定理 2. 設 C 是紧集, F 是閉集, 并且 $C \cap F = \emptyset$, 則在 \mathcal{F} 中存在滿足下列条件的函数 f : 当 $x \in C$ 时, $f(x) = 0$, 当 $x \in F$ 时, $f(x) = 1$ 。

証明。由于 X 是完备正則空間, 因此, 对于 C 中每一个点 y , 存在 \mathcal{F} 中的函数 f_y , 滿足下列条件: $f_y(y) = 0$, 而当 $x \in F$ 时, $f_y(x) = 1$ 。因为由一切形如 $\{x: f_y(x) < \frac{1}{2}\}$ 的集組成的类 (其中 $y \in C$)

是 C 的一个开复盖, 而 C 是一个紧集, 所以存在 C 的有限子集 $\{y_1, \dots, y_n\}$ 使得

$$C \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ x : f_{y_i}(x) < \frac{1}{2} \right\}.$$

令 $g(x) = \prod_{i=1}^n f_{y_i}(x)$, 则 $g \in \mathcal{F}$; 因为对于 X 中一切 x 和 C 中一切 y , 有 $0 \leq f_y(x) \leq 1$, 于是, 当 $x \in C$ 时, $g(x) < \frac{1}{2}$, 而当 $x \in F$ 时, $g(x) = 1$. 容易验证, 若令 $f = (2g - 1) \cup 0$, 则 $f \in \mathcal{F}$, 并且当 $x \in C$ 时, $f(x) = 0$, 而当 $x \in F$ 时, $f(x) = 1$. \blacksquare

有时我们不但需要知道, 像在定理 2 里指出的, 在 C 上恒等于零的函数 $f \in \mathcal{F}$ 是否存在, 同时还需要知道, 是否能够选择 f 使它在别处恒不等于零. 一般说来这是不可能的, 下面的定理就这个问题给出了恰切的解答.

定理 3. 设 f 是 X 上的实值连续函数, c 是一个实数, 则集 $\{x : f(x) \geq c\}$, $\{x : f(x) \leq c\}$ 和 $\{x : f(x) = c\}$ 都是闭的 G_δ 集. 反之, 如果 C 是紧 G_δ 集, 则存在 F 中的函数 f , 使得 $C = \{x : f(x) = 0\}$.

证明. 因为

$$\{x : f(x) \geq c\} = \{x : -f(x) \leq -c\},$$

$$\{x : f(x) = c\} = \{x : f(x) \geq c\} \cap \{x : f(x) \leq c\},$$

所以只须考虑集 $\{x : f(x) \leq c\}$. 根据函数 f 的连续性, $\{x : f(x) \leq c\}$ 是闭集; 同时, 对于每一个 $n = 1, 2, \dots$, $\{x : f(x) < c + \frac{1}{n}\}$ 是开集. 由等式

$$\{x : f(x) \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x : f(x) < c + \frac{1}{n} \right\}$$

可知, $\{x : f(x) \leq c\}$ 是 G_δ 集.

反之, 设 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, 其中 C 是紧集而 $\{U_n\}$ 是开集的叙列. 根据定理 2, 对于每一个 $n = 1, 2, \dots$, 存在 \mathcal{F} 中的函数 f_n , 满足下

列条件: 当 $x \in C$ 时, $f_n(x) = 0$, 当 $x \in X - U_n$ 时, $f_n(x) = 1$. 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x),$$

则 $f \in \mathcal{F}$, 并且当 $x \in C$ 时有 $f(x) = 0$. 对于 $X - C$ 中任意的 x , 至少存在一个正整数 n 使得 $x \in X - U_n$; 由此可见, 若 $x \in X - C$, 则 $f(x) \geq \frac{1}{2^n} f_n(x) = \frac{1}{2^n} > 0$, 因此 $C = \{x: f(x) = 0\}$. \downarrow

定理 4. 设 C 是紧集, U 是开集, 并且 $C \subset U$, 则存在紧 G_δ 集 C_0 , 并存在 σ -紧开集 U_0 , 使得

$$C \subset U_0 \subset C_0 \subset U.$$

证明. 因为满足条件 $C \subset V \subset U$ 的有界开集 V 必定存在, 所以我们可以假定 U 是有界集而不致丧失普遍性. 设 f 是 \mathcal{F} 中的函数, 满足下列条件: 当 $x \in C$ 时, $f(x) = 0$, 而当 $x \in X - U$ 时, $f(x) = 1$ (定理 2); 令

$$U_0 = \left\{x: f(x) < \frac{1}{2}\right\}, \quad C_0 = \left\{x: f(x) \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

显然, $C \subset U_0 \subset C_0 \subset U$; 根据定理 3, C_0 是一个闭的 G_δ 集. 因为 U 是有界的, 所以 C_0 是紧的; 由等式

$$U_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x: f(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right\}$$

可知, U_0 是 σ -紧的. \downarrow

定理 5. 设 X 是可分的, 则 X 的每一个紧子集 C 是 G_δ 集.

证明. 对于 X 中不属于 C 的任意点 x , 存在两个不相交的开集 $U(x)$ 和 $V(x)$, 使得 $C \subset U(x)$, $x \in V(x)$. 因为 X 是可分的, 而类 $\{V(x): x \in' C\}$ 是 $X - C$ 的一个开复盖, 所以存在 X 中点的叙列 $\{x_n\}$ 使得

$$X - C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V(x_n).$$

于是有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U(x_n) \supset C \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - V(x_n)) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} U(x_n). \quad \downarrow$$

(1) 定理 2 也可以按照下面的方式来証明。补上一个点, 使 X 紧化; 利用下述事实: 每一个紧豪司道夫空間是正規空間。于是, 对于紧豪司道夫空間的任意两个不相交的閉子集 C 和 D , 存在 \mathcal{S} 中的函数 f , 滿足下列条件: 当 $x \in C$ 时, $f(x) = 0$, 而当 $x \in D$ 时, $f(x) = 1$ 。

(2) 定理 3 可以用来証明下述結果。全体紧 G_δ 集类封閉于有限併与可列交的运算。这个結果直接証明起来也很容易。

(3) 設 X 是一个不可列的离散空間, X^* 是由 X 补上了一个点 x^* 而得到的紧空間, 則单点集 $\{x^*\}$ 是一个紧集, 但不是 G_δ 集。

(4) 設 I 是任意不可列集; 对于 I 中每一个 i , 設 X_i 是由两个实数 0 和 1 构成的(紧豪司道夫)空間; 并設以 X 表示笛卡兒乘积空間 $\prod_i X_i$ 。

(4a) X 中每一个单点集是紧集, 但不是 G_δ 集。

(4b) 設 E 是 X 的子集, 如果存在 I 的可列子集 J 使得 E 是一个 J -柱面(參看 38.2), 我們称 E 是一个 \aleph_0 -集。 X 中的紧集 C 是一个 G_δ 集, 当而且只当它是一个 \aleph_0 -集。(提示: 如果 C 是紧集, U 是开集, 并且 $C \subset U$, 則根据 X 中拓扑結構的定义, 有 $C \subset U_0 \subset U$, 其中 U_0 是 X 中的开集同时又是一个 J -柱面, J 是 I 的某一个有限子集。)

(4c) 設 f 是定义在 X 上的任意实值連續函数, M 是数直綫上的任意波雷耳集, 則 $f^{-1}(M)$ 是一个 \aleph_0 -集。

(5) 設 X^* 和 Y^* 分别是由一个离散的可列無限空間和一个不可列离散空間补上一个点(x^* 和 y^*)而得到的紧空間。局部紧豪司道夫空間 $(X^* \times Y^*) - \{(x^*, y^*)\}$ 的子集

$$(\{x^*\} \times Y^*) - \{(x^*, y^*)\} \quad \text{和} \quad (X^* \times \{y^*\}) - \{(x^*, y^*)\}$$

可以用來說明, 定理 2 中 C 为紧集的条件是不可少的。

(6) 在局部紧豪司道夫空間中, 全体 σ -紧开集类构成一个基(參看定理 4)。

§51. 波雷耳集和貝尔集

函数的可測性和連續性之間的关系是十分有趣的, 在局部紧空間的場合下它們被研究得最为透徹。我們仍假定所考虑的是一个固定的局部紧豪司道夫空間 X ; 在这一节里我們要介紹关于

X 中可測性理論的基本概念和結論。

我們以 \mathbf{C} 表示由 X 的一切紧子集組成的类, 以 \mathbf{S} 表示由 \mathbf{C} 产生的 σ -环, 以 \mathbf{U} 表示屬於 \mathbf{S} 的全体开集类。 \mathbf{S} 里的集称为 X 的波雷耳集; 因而 \mathbf{U} 可以定义为全体开的波雷耳集类。 定义在 X 上的实值函数如果对于 σ -环 \mathbf{S} 是可測的, 則称为波雷耳可測函数 (或簡称为波雷耳函数)。

定理 1. 每一个波雷耳集是 σ -有界的; 每一个 σ -有界开集是波雷耳集。

証明。 每一个紧集显然是有界的, 因而是 σ -有界的。 由一切 σ -有界集組成的类是一个 σ -环; 因为这个 σ -环包含 \mathbf{C} , 所以它也包含由 \mathbf{C} 产生的 σ -环。

反之, 設 U 是开集而 $\{C_n\}$ 是紧集的叙列使得

$$U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = K.$$

因为 $C_n - U$ 是紧集, $n=1, 2, \dots$, 于是有

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n - U) \in \mathbf{S};$$

由于 $D = K - U$, 所以 $U = K - (K - U) \in \mathbf{S}$. \blacksquare

我們以 \mathbf{C}_0 表示由 X 中一切紧 G_δ 集組成的类, 以 \mathbf{S}_0 表示由 \mathbf{C}_0 产生的 σ -环, 以 \mathbf{U}_0 表示屬於 \mathbf{S}_0 的全体开集类。 \mathbf{S}_0 里的集称为 X 的貝尔集; 因而 \mathbf{U}_0 可以定义为全体开的貝尔集类。 定义在 X 上的实值函数如果对于 σ -环 \mathbf{S}_0 是可測的, 則称为貝尔可測函数 (或簡称为貝尔函数)。

初看起来局部紧空間中測度論的研究对象似乎当然應該是波雷耳集。 但是为了以下几个理由我們必須引进表面上不很自然的貝尔集概念。 第一, 貝尔集的理论在某些方面較波雷耳集的理论为簡單, 同时关于貝尔集的理论还可以用来作为研究波雷耳集的工具 (参看 §63)。 其次, 每一个連續函数 (或在某个紧集以外恒等于零的連續函数) 是貝尔可測的 (参看下面的定理 2)。 第三, 要确定 X 的拓扑結構, 必須有包含着足够多的集的 σ -环, 而全体

貝爾集類是這種 σ -環中最小的一个 (參看下面的定理 3)。第四, 在一切古典的特殊場合下, 當測度論被用在拓撲空間 (例如歐几里得空間) 中時, 波雷耳集和貝爾集的概念合而為一 (參看 §50 定理 5)。

定理 2. 設 f 是 X 上的實值連續函數, 並且集 $N(f) = \{x: f(x) \neq 0\}$ 是 σ -有界的, 則 f 是貝爾可測函數。

證明. 如果 σ -有界開集 U 是一個 F_σ 集, 則必存在緊集的序列 $\{C_n\}$ 使得 $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ 。根據 §50 定理 4, 對於每一個正整數 n , 存在緊貝爾集 D_n 使得 $C_n \subset D_n \subset U$ 。由此有 $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, 因而 U 是一個貝爾集。由定理中關於 f 的假設條件可知, 對於每一個實數 c , 集 $N(f) \cap \{x: f(x) < c\}$ 是一個 σ -有界開集同時又是一個 F_σ 集。 |

定理 3. 設 \mathbf{B} 是一個子基, $\hat{\mathbf{S}}$ 是包含 \mathbf{B} 的 σ -環, 則 $\hat{\mathbf{S}} \supset \mathbf{S}_0$ 。

證明. 如果 C 是緊集, U 是包含 C 的開集, 則存在集 E 使得 $C \subset E \subset U$ 而 E 是 \mathbf{B} 中之集的有限個有限交的併集 (因而 $E \in \hat{\mathbf{S}}$)。由此可見, 如果 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, 其中 U_n 是開集, 則對於每一個 $n = 1, 2, \dots$, 存在 $\hat{\mathbf{S}}$ 中的集 E_n 使得 $C \subset E_n \subset U_n$; 因此, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \hat{\mathbf{S}}$ 。這就說明了 $\mathbf{C}_0 \subset \hat{\mathbf{S}}$, 由 \mathbf{S}_0 的定義即得定理的結論。 |

貝爾集類已經定義為由緊 G_δ 集類產生的 σ -環; 也許會發生這樣的想法: 一個緊集可能是貝爾集而不是 G_δ 集, 換一句話說, 在 \mathbf{S}_0 里面可能會出現不屬於 \mathbf{C}_0 的緊集。下面的定理說明這是不可能的。

定理 4. 每一個緊貝爾集是 G_δ 集。

證明. 設 C 是 \mathbf{S}_0 中的緊集; 根據 §5 定理 4, 存在 \mathbf{C}_0 中集的序列 $\{C_n\}$ 使得 C 屬於 σ -環 $\mathbf{S}(\{C_n\})$ 。根據 §50 定理 3, 對於每一個 $n = 1, 2, \dots$, 存在 \mathcal{F} 中的函數 f_n 使得 $C_n = \{x: f_n(x) = 0\}$ 。如果對於 X 中每一對點 x 和 y , 令

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|,$$

則有 $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = d(y, x)$ 和 $0 \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. 由此可見, 若以記号 $x \equiv y$ 表示 $d(x, y) = 0$, 則关系 “ \equiv ” 具有自反性, 对称性和推移性, 因而是一个等价关系; 我們以記号 Ξ 表示全体等价类的集. 对于 X 中每一个 x , 以 $\xi = T(x)$ 表示包含 x 的(唯一确定的)等价类.

如果 $T(x_1) = T(y_1)$, $T(x_2) = T(y_2)$ (即若 $x_1 \equiv y_1$, $x_2 \equiv y_2$), 則

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, x_2) = d(y_1, y_2).$$

根据对称性, $d(y_1, y_2) \leq d(x_1, x_2)$, 因此, $d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$. 由此可見, 如果 $\xi_1 = T(x_1)$ 和 $\xi_2 = T(x_2)$ 是 Ξ 的两个元素, 則等式 $\delta(\xi_1, \xi_2) = d(x_1, x_2)$ 無歧义地确定了数 $\delta(\xi_1, \xi_2)$. 因为当 $\delta(\xi_1, \xi_2) = 0$ 时必有 $\xi_1 = \xi_2$, 所以函数 δ 是 Ξ 上的一个度量. 設 $\xi_0 = T(x_0)$ 是度量空間 Ξ 中任意一点, r_0 是任意正数, 并令 $E = \{\xi: \delta(\xi_0, \xi) < r_0\}$, 則 $T^{-1}(E) = \{x: d(x_0, x) < r_0\}$. 因为 $d(x_0, x)$ 連續地依赖于 x , 所以 T 是 X 在 Ξ 上的一个連續变换.

要使得 X 的子集 A 是 Ξ 的某个子集对于 T 的原像, 必須而且只須 A 具有下述性質: A 若包含任一点 x , 則 A 同时包含与 x 等价的一切点(換一句話說, 必須而且只須 A 是某些等价类的併). 由于每一个 C_n 具有这个性質, 而由一切原像集組成的类是一个 σ -环, 并且 $C \in \mathbf{S}(\{C_n\})$, 因此, 存在 Ξ 的子集 Γ 使得 $T^{-1}(\Gamma) = C$. 因为 $T(T^{-1}(\Gamma)) = \Gamma$, T 是連續变换, 而 C 是紧集, 所以 Γ 是紧集. 由于度量空間的每一个閉子集(因而每一个紧子集)是 G_δ 集, 所以存在 Ξ 中开集的叙列 $\{\Delta_n\}$ 使得

$$\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

令 $U_n = T^{-1}(\Delta_n)$, $n = 1, 2, \dots$, 則 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$; 由 T 的連續性可知, U_n 是开集, 因此 $C \in \mathbf{C}_0$. \blacksquare

定理 5. 設 X 和 Y 是局部紧豪司道夫空間, \mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0 和 \mathbf{S}_0 分別是由 X , Y 和 $X \times Y$ 中全体貝尔集組成的 σ -环, 則 $\mathbf{S}_0 = \mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0$.

証明. 設 A 和 B 分別是 X 和 Y 中的紧貝尔集, 則 $A \times B$ 是

一个紧 G_0 集, 因而是 $X \times Y$ 中的紧貝尔集. 因为 $A_0 \times B_0$ 是由一切形如 $A \times B$ 的集組成的类产生的 σ -环, 所以 $A_0 \times B_0 \subset S_0$. 如果 U 和 V 分别是 X 和 Y 中开的貝尔集, 則 $U \times V \in A_0 \times B_0$. 因为由一切形如 $U \times V$ 的集組成的类构成 $X \times Y$ 的一个基, 由定理 3 可知, $A_0 \times B_0 \supset S_0$. **|**

为了便于参考起見, 我們在下面叙述有关波雷耳集类和貝尔集类的生成的一个定理(参看 5.2 和 5.3); 这个定理的証明是很简单的.

定理 6. 由 C [或 C_0] 中之集的正常差集的一切不相交有限併組成的类是一个环; 由这个环产生的 σ -环与 S [对应地, S_0] 相合.

(1) 如果将数直綫看作局部紧空間, 則数直綫上波雷耳集的定义与 §15 中給出的定义等价.

(2) 空間 X 本身是一个波雷耳集, 当而且只当它是 σ -紧的.

(3) 由全体有界开集类产生的 σ -环与 S 相合; 或者說, 由 U 产生的 σ -环与 S 相合. (提示: 对于任意紧集 C , 設 U 是包含 C 的一个有界开集; 考虑 $U - (U - C)$.)

(4) 設 X 是 50.4 中定义的乘积空間, 則 X 的貝尔集类与可測集类相合(参看 §38, 可測集的定义).

(5) 由全体有界貝尔开集类产生的 σ -环与 S_0 相合; 或者說, 由 U_0 产生的 σ -环与 S_0 相合. (提示: 設 C 是紧集, U 是开集, 并且 $C \subset U$, 則存在有界貝尔开集 U_0 使得 $C \subset U_0 \subset U$.)

(6) “貝尔集”是由“貝尔函数”这个术语而得名的. 設 \mathcal{B} 是具有下述性質的函数类中的最小者: 这个类包含一切連續函数, 并包含这个类中函数的一切收敛(不一定一致收敛)叙列的極限函数; 我們称 \mathcal{B} 里的函数为 X 上的貝尔函数. 一个集成为貝尔集的必要和充分条件是: 它是一个波雷耳集, 并且它的特征函数是貝尔函数.

(7) 設 X 是一个完全不連通的紧豪司道夫空間, 則每一个布尔 σ -代数与 X 的全体貝尔集类是同构的(以属于第一种范畴的貝尔集为模). (提示:

参看 40.15c; 注意到由 X 中全体又开又闭集类产生的 σ -环与全体贝尔集类相合.)

§52. 正则测度

设 μ 是定义在全体波雷耳集类 S 上的测度, 并且对于 C 中每一个 C , 有 $\mu(C) < \infty$, 则称 μ 是一个波雷耳测度; 设 μ_0 是定义在全体贝尔集类 S_0 上的测度, 并且对于 C_0 中每一个 C_0 , 有 $\mu_0(C_0) < \infty$, 则称 μ_0 是一个贝尔测度.

波雷耳测度和贝尔测度的理论在某些方面是非常相像的, 我们不妨平行地加以讨论. 为了这个目的, 我们采用下述记号. 在本书中, 我们以 $\hat{C}, \hat{U}, \hat{S}$ 分别表示 C, U, S , 同时也分别表示 C_0, U_0, S_0 ; 当我们研究一个测度 $\hat{\mu}$ 的时候, 如果 $\hat{S} = S$, 则 $\hat{\mu}$ 表示一个波雷耳测度, 如果 $\hat{S} = S_0$, 则 $\hat{\mu}$ 表示一个贝尔测度.

设 $E \in \hat{S}$, 如果

$$\hat{\mu}(E) = \inf\{\hat{\mu}(U) : E \subset U \in \hat{U}\},$$

则称 E 是(对于测度 $\hat{\mu}$ 的)外正则集; 设 $E \in \hat{S}$, 如果

$$\hat{\mu}(E) = \sup\{\hat{\mu}(C) : E \supset C \in \hat{C}\},$$

则称 E 是(对于 $\hat{\mu}$ 的)内正则集. 设 $E \in \hat{S}$, 如果 E 既是外正则集又是内正则集, 则称 E 是正则集; 如果 \hat{S} 中每一个集 E 是正则集, 则称测度 $\hat{\mu}$ 是正则测度.

不严格地讲, 所谓一个测度是正则的, 就是说, 借助于它在紧集和开集(也就是在拓扑学观点下最重要的集)上的值, 就可以确定它在任何集上的值. 如果想要使 X 的测度论结构与它的拓扑性质不是毫无关联, 则测度的正则性是一个最为自然的条件, 通过这个条件可以表出二者之间的某些关系. 从测度论的观点看来, 非正则集的性质是极端不规则的.

不难验证, 当 $E \in \hat{S}$ 和 $\hat{\mu}(E) = \infty$, 或者当 $E \in \hat{U}$, 或者当 E 可以表为 \hat{U} 中测度为有限的集的一个叙列的交集, 在每一种情形下, E

都是外正則集。对偶的命題也成立：当 $E \in \hat{S}$ 和 $\hat{\mu}(E) = 0$ ，或者当 $E \in \hat{C}$ ，或者当 E 可以表为 \hat{C} 中之集的一个叙列的併集，則 E 是內正則集。我們在下面首先要証明的就是：从某些集的正則性可以推出許許多多其他集的正則性。我們將分段証明这个事实，从紧集到紧集的差，再从差集到差集的併；§51 定理 6 足以說明这种分段証明的方式是十分正确的。然后我們要証明，全体正則集类具有足够的封閉性，因而可以应用关于由环产生的单調类的定理 (§6 定理 2)；最后我們可以得到一个結論，說明某些測度必然是正則的。

定理 1. 設 \hat{C} 中全体集都是外正則集，則 \hat{C} 中之集的每一个正常差集是外正則集；設 U 中全体有界集都是內正則集，則 U 中之集的每一个正常差集是內正則集。

証明。設 C 和 D 是 \hat{C} 里面的两个集，并且 $C \supset D$ 。如果 C 是外正則集，則对于每一个 $\varepsilon > 0$ ，存在 \hat{U} 中的集 U ，使得 $C \subset U$ 并且 $\hat{\mu}(U) \leq \hat{\mu}(C) + \varepsilon$ 。因为 $C - D \subset U - D \in \hat{U}$ ，由关系式

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(U - D) - \hat{\mu}(C - D) &= \hat{\mu}((U - D) - (C - D)) = \\ &= \hat{\mu}(U - C) = \hat{\mu}(U) - \hat{\mu}(C) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

可知， $C - D$ 是外正則集。

現在証明定理中关于內正則性的部分。設 U 是 \hat{U} 里面的有界集，并且 $C \subset U$ 。如果有界集 $U - D (\in \hat{U})$ 是內正則集，則对于每一个 $\varepsilon > 0$ ，存在 \hat{C} 中的集 E ，使得 $E \subset U - D$ 并且 $\hat{\mu}(U - D) \leq \hat{\mu}(E) + \varepsilon$ 。因为 $C - D = C \cap (U - D) \supset C \cap E \in \hat{C}$ ，由关系式

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(C - D) - \hat{\mu}(C \cap E) &= \hat{\mu}((C - D) - (C \cap E)) = \\ &= \hat{\mu}((C - D) - E) \leq \\ &\leq \hat{\mu}((U - D) - E) = \\ &= \hat{\mu}(U - D) - \hat{\mu}(E) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

可知， $C - D$ 是內正則集。 |

定理 2. 有限多个具有有限測度的不相交內正則集的併集是

內正則集。

證明。設 $\{E_1, \dots, E_n\}$ 是具有有限測度的不相交內正則集的有限類，則對於每一個 $\varepsilon > 0$ 並對於每一個 $i = 1, \dots, n$ ，存在 \hat{C} 中的集 C_i ，使得

$$C_i \subset E_i, \quad \hat{\mu}(E_i) \leq \hat{\mu}(C_i) + \frac{\varepsilon}{n}.$$

令 $C = \bigcup_{i=1}^n C_i, E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ ，則 $E \supset C \in \hat{C}$ ；由關係式

$$\hat{\mu}(E) = \sum_{i=1}^n \hat{\mu}(E_i) \leq \sum_{i=1}^n \hat{\mu}(C_i) + \varepsilon = \hat{\mu}(C) + \varepsilon$$

可知， E 是內正則集。 |

對應的關於外正則測度的定理，證明起來也很容易；但事實上並沒有這個必要，因為下面的定理包括這種情形在內。

定理 3. 外正則集敘列的併集是外正則集；遞增內正則集敘列的併集是內正則集。

證明。設 $\{E_i\}$ 是外正則集的敘列，則對於每一個 $\varepsilon > 0$ 以及每一個 $i = 1, 2, \dots$ ，存在 \hat{U} 中的集 U_i ，使得

$$E_i \subset U_i, \quad \hat{\mu}(U_i) \leq \hat{\mu}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

令 $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 。如果 $\hat{\mu}(E) = \infty$ ，則 E 顯然是外正則集；如果 $\hat{\mu}(E) < \infty$ ，則

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(U) - \hat{\mu}(E) &= \hat{\mu}(U - E) \leq \hat{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (U_i - E_i)\right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\mu}(U_i - E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\hat{\mu}(U_i) - \hat{\mu}(E_i)) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

設 $\{E_i\}$ 是內正則集的遞增敘列，並設 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 。我們有

$$\hat{\mu}(E) = \lim_i \hat{\mu}(E_i).$$

我們要證明，對於滿足條件 $c < \hat{\mu}(E)$ 的每一個實數 c ，存在 \hat{C} 中的集 C ，使得 $C \subset E$ 並且 $c < \hat{\mu}(C)$ 。為了證明這個事實，我們只須選取 i 的一個值使得 $c < \hat{\mu}(E_i)$ ；然後利用 E_i 的內正則性，選取 \hat{C} 中

的集 C , 使得 $C \subset E_i$ 并且 $c < \hat{\mu}(C)$. |

定理 4. 具有有限測度的內正則集叙列的交集是內正則集; 具有有限測度的遞減外正則集叙列的交集是外正則集.

證明. 設 $\{E_i\}$ 是具有有限測度的內正則集的叙列, 則對於每一個 $\varepsilon > 0$ 以及每一個 $i=1, 2, \dots$, 存在 \hat{C} 中的集 C_i , 使得

$$C_i \subset E_i, \quad \hat{\mu}(E_i) \leq \hat{\mu}(C_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

令 $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$. 如果 $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, 則 $E \supset C \in \hat{C}$, 并且

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(E) - \hat{\mu}(C) &= \hat{\mu}(E - C) \leq \hat{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i - C_i)\right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\mu}(E_i - C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\hat{\mu}(E_i) - \hat{\mu}(C_i)) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

設 $\{E_i\}$ 是具有有限測度的外正則集的遞減叙列, 并設 $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$. 我們有

$$\hat{\mu}(E) = \lim_i \hat{\mu}(E_i).$$

我們要證明, 對於滿足條件 $c > \hat{\mu}(E)$ 的每一個實數 c , 存在 \hat{U} 中的集 U , 使得 $E \subset U$ 并且 $c > \hat{\mu}(U)$. 為了證明這個事實, 我們只須選取 i 的一個值使得 $c > \hat{\mu}(E_i)$; 然後利用 E_i 的外正則性, 選取 \hat{U} 中的集 U , 使得 $E_i \subset U$ 并且 $\hat{\mu}(U) < c$. |

上面定理的證明里的類似之處, 表現出內正則性和外正則性之間的对偶性質; 事實上這種对偶性比上面所表現出來的更為深刻. 我們現在證明, 這兩種正則性在本質上是一樣的.

定理 5. \hat{C} 中一切集是外正則集的必要和充分條件是: \hat{U} 中一切有界集是內正則集.

證明. 假定 \hat{C} 中所有的集都是外正則集, U 是 \hat{U} 中的任意有界集, ε 是任意的正數. 設 C 是 \hat{C} 中的集, 并且 $U \subset C$; 因為 $C - U$ 是緊集并且屬於 \hat{S} , 所以根據 §51 定理 4 有 $C - U \in \hat{C}$, 因而存在 \hat{U} 中的集 V , 使得

$$C - U \subset V, \quad \hat{\mu}(V) \leq \hat{\mu}(C - U) + \varepsilon.$$

因为 $U = C - (C - U) \supset C - V \in \hat{C}$, 由关系式

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(U) - \hat{\mu}(C - V) &= \hat{\mu}(U - (C - V)) = \hat{\mu}(U \cap V) \leq \\ &\leq \hat{\mu}(V - (C - U)) = \hat{\mu}(V) - \hat{\mu}(C - U) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

可知, U 是内正则集.

现在假定 \hat{U} 中所有的有界集都是内正则集, C 是 \hat{C} 中任意的集, ε 是任意的正数. 设 U 是 \hat{U} 中的有界集, 并且 $C \subset U$; 因为 $U - C$ 是有界集并且属于 \hat{U} , 所以存在 \hat{C} 中的集 D , 使得

$$D \subset U - C, \quad \hat{\mu}(U - C) \leq \hat{\mu}(D) + \varepsilon.$$

因为 $C = U - (U - C) \subset U - D \in \hat{U}$, 由关系式

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(U - D) - \hat{\mu}(C) &= \hat{\mu}((U - D) - C) = \\ &= \hat{\mu}((U - C) - D) = \hat{\mu}(U - C) - \hat{\mu}(D) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

可知, C 是外正则集. |

定理 6. 下面两个条件都是 $\hat{\mu}$ 为正测度的必要和充分条件: 1) \hat{C} 中全体集都是外正则集; 2) \hat{U} 中全体有界集都是内正则集.

证明. 两个条件的必要性都是很显然的. 要证明条件的充分性, 只须 (定理 3) 证明 \hat{S} 中每一个有界集是正则集, 因为 \hat{S} 中每一个集可以表为 \hat{S} 中有界集增叙列的并集. 设 E_0 是 \hat{S} 中的有界集, C_0 是 \hat{C} 中的集, 并且 $E_0 \subset C_0$. 根据 §5 定理 5, σ -环 $\hat{S} \cap C_0$ 是由一切形如 $C \cap C_0$ 的集组成的类产生的, 其中 $C \in \hat{C}$. 根据 §5.1 定理 6 (应用在紧空间 C_0 上), 这个 σ -环是由一切形如 $E \cap C_0$ 的集组成的环产生的, 其中 E 是 \hat{C} 中之集的正常差集的不相交有限并. 根据定理 1, 2 和 3, 如果条件 1) 成立, 则 σ -环 $\hat{S} \cap C_0$ 中每一个集是外正则集; 如果条件 2) 成立, 则 $\hat{S} \cap C_0$ 中每一个集是内正则集. 根据定理 3 和 4, C_0 的外正则子集类和内正则子集类都是单调类; 由 §6 定理 2 和本节定理 5 可知, 如果条件 1) 和 2) 的任何一个成立, 则当 C_0 的子集属于 \hat{S} 时, 这个子集必然是正则集; 特别是, E_0 是正则集. |

定理 7. 貝尔測度 ν 是正則測度；如果 $C \in \mathbf{C}$ ，則

$$\nu^*(C) = \inf\{\nu(U_0) : C \subset U_0 \in \mathbf{U}_0\},$$

如果 $U \in \mathbf{U}$ ，則

$$\nu_*(U) = \sup\{\nu(C_0) : U \supset C_0 \in \mathbf{C}_0\}.$$

証明。因为 \mathbf{C}_0 中每一个集可以表为 \mathbf{U}_0 中測度为有限的集的遞減叙列的交集，由定理 6 可知， ν 是正則測度。根据外測度的定义，我們有

$$\nu^*(C) = \inf\{\nu(E_0) : C \subset E_0 \in \mathbf{S}_0\} \leq \inf\{\nu(U_0) : C \subset U_0 \in \mathbf{U}_0\};$$

对于每一个 $\varepsilon > 0$ ，存在 \mathbf{S}_0 中的集 E_0 ，使得

$$C \subset E_0, \quad \nu(E_0) \leq \nu^*(C) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 E_0 是外正則集，所以存在 \mathbf{U}_0 中的集 U_0 ，使得

$$E_0 \subset U_0, \quad \nu(U_0) \leq \nu(E_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是有

$$C \subset U_0, \quad \nu(U_0) \leq \nu^*(C) + \varepsilon.$$

定理中关于內測度部分也可以按照完全同样的方式証明，只須利用貝尔集 E_0 的內正則性。 |

定理 8. 設 μ 是波雷耳測度， ν 是定义在全体貝尔集类上的測度，由等式 $\nu(E) = \mu(E)$ 确定，其中 E 是貝尔集。下面两个条件都是 μ 为正則測度的必要和充分条件：

对于 \mathbf{C} 中一切 C ， $\mu(C) = \nu^*(C)$ ；

对于 \mathbf{U} 中一切有界开集 U ， $\mu(U) = \nu_*(U)$ 。

如果两个正則波雷耳測度在一切貝尔集上相等，則它們在一切波雷耳集上相等。

証明。先証条件的充分性。設 $\mu(C) = \nu^*(C)$ ，其中 $C \in \mathbf{C}$ ，則根据定理 7，对于每一个 $\varepsilon > 0$ ，存在 \mathbf{U}_0 中的集 U_0 ，使得

$$C \subset U_0, \quad \mu(U_0) = \nu(U_0) \leq \nu^*(C) + \varepsilon = \mu(C) + \varepsilon;$$

因此 C 是外正则集, 所以 μ 是正则测度. 第二个条件的充分性可以按照完全同样的方式证明, 只须应用定理 7 的最后部分.

现在证明条件的必要性. 设 μ 是正则测度, ε 是任意正数. 对于 \mathbf{C} 中每一个 C , 存在 \mathbf{U} 中的有界集 U , 使得

$$C \subset U, \quad \mu(U) \leq \mu(C) + \varepsilon;$$

类似地, 对于 \mathbf{U} 中每一个有界集 U , 存在 \mathbf{C} 中的集 C , 使得

$$C \subset U, \quad \mu(U) \leq \mu(C) + \varepsilon.$$

在每一种情形, 存在 \mathbf{C}_0 中的 C_0 和 \mathbf{U}_0 中的 U_0 , 使得 $C \subset U_0 \subset C_0 \subset U$ (§50 定理 4). 根据定理 7, 我们有

$$\nu^*(C) \leq \nu(U_0) = \mu(U_0) \leq \mu(U) \leq \mu(C) + \varepsilon$$

和

$$\nu_*(U) \geq \nu(C_0) = \mu(C_0) \geq \mu(C) \geq \mu(U) - \varepsilon.$$

因为 ε 是任意的, 所以有

$$\nu^*(C) \leq \mu(C) \quad \text{和} \quad \nu_*(U) \geq \mu(U);$$

反方向的两个不等式显然都成立. 这就说明了正则测度在紧集上的值可以由它在贝尔集上的值唯一地确定. 最后, 利用 §51 定理 6, 就得到定理中最后一部分结论. \blacksquare

在结束本节之前, 我们再引进一个概念, 这个概念有时可以用作证明正则性的工具. 设 μ 是任意波雷耳测度, μ_0 是由等式 $\mu_0(E) = \mu(E)$ 确定的贝尔测度, 其中 $E \in \mathbf{S}_0$. 如果 \mathbf{C} 中每一个集或 \mathbf{U} 中每一个有界集是 μ_0^* -可测集——因而, 在每一种情形, \mathbf{S} 中每一个集是 μ_0^* -可测集, ——则称波雷耳测度 μ 是增补正则测度; 也就是说, 如果一切紧集, 因而一切波雷耳集, 属于 μ_0 的增补的定义域, 则 μ 是一个增补正则测度. 如果 μ 是增补正则测度, 则对于每一个波雷耳集 E , 存在贝尔集 A 和 B , 使得

$$A \subset E \subset B, \quad \mu_0(B - A) = 0;$$

根据定理 8, 增补正则测度必然是正则测度.

(1) 每一个波雷耳测度是 σ -有限的.

(2) 如果空間 X 是緊的, 則全体正則集类是一个正規类(參看 6.2).

(3) 設 μ 是波雷耳測度, 如果存在可列集 Y , 使得對於每一個波雷耳集 E 有 $\mu(E) = \mu(E \cap Y)$, 則 μ 是正則測度.

(4) 設 X 是歐几里得平面, μ 是定義在全体波雷耳集类上的勒貝格測度, 則 μ 是在本节意义下的一个正則波雷耳測度. 如果對於每一個波雷耳集 E , 定義 $\mu(E)$ 为 E 的一切水平截口的(值綫上的)測度之和, 則 μ 不是波雷耳測度.

(5) 設空間 X 是緊的, x^* 是一个点使得 $\{x^*\}$ 不是 G_δ 集(例如 50.3 中所述的). 對於 S 中每一个集 E , 令 $\mu(E) = \chi_E(x^*)$, 則 μ 是一个正則波雷耳測度, 但不是增補正則測度.

(6) 設 μ_1, μ_2 和 μ 都是波雷耳測度, 滿足条件 $\mu = \mu_1 + \mu_2$, 則只要这三个測度中任意两个是正則的, 另外一个必定也是正則的. (提示: 如果 $C \in \mathcal{C}$, $U \in \mathcal{U}$, $C \subset U$, 并且 $\mu(U) \leq \mu(C) + \varepsilon$, 則

$$\mu_1(C) + \mu_2(U) \leq \mu(U) \leq \mu_1(C) + \mu_2(C) + \varepsilon.)$$

(7) 設 X 和 Y 都是緊豪司道夫空間, T 是 X 在 Y 上的連續變換, μ 是 X 上的波雷耳測度. 令 $\nu = \mu T^{-1}$, 并設 D 是 Y 的緊子集. D 對於 ν 是正則的, 必須而且只須, $C = T^{-1}(D)$ 對於 μ 是正則的. (提示: 如果 $C \subset U \in \mathcal{U}$, 則 $T(X - U)$ 和 D 是 Y 中不相交的緊集. 如果 V 是 D 的一个邻域, 并且与 $T(X - U)$ 不相交, 則 $C \subset T^{-1}(V) \subset U$.)

(8) 設 μ 是正則波雷耳測度, 則對於每一个 σ -有界集 E , 有 $\mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U \in \mathcal{U}\}$ 和 $\mu_*(E) = \sup\{\mu(C) : E \supset C \in \mathcal{C}\}$.

(9) 設 μ 和 ν 是波雷耳測度, μ 是正則測度, 并且 $\nu \ll \mu$, 則 ν 也是正則測度.

(10a) 設 ω 是最小的不可列序数, \bar{X} 是由小于或等于 ω 的一切序数组成的集. 令 $X = \bar{X} - \{\omega\}$. 如果取一切形如 $\{x : \alpha < x \leq \beta\}$ 的“区間”与集 $\{0\}$ 組成的类作为 \bar{X} 的一个基, 則 \bar{X} 是緊的.

(10b) 由 X 的一切無界閉子集組成的类對於可列交的运算是封閉的.

(10c) 對於 \bar{X} 中每一个波雷耳集 E , 按照 E 包含或不包含 X 的無界閉子集而令 $\mu(E) = 1$ 或 0 , 則 μ 是一个波雷耳測度.

(10d) 在 (10c) 中定义的波雷耳測度 μ 不是正則測度. (提示: 包含 ω 的每一个区間具有測度 1.)

§53. 波雷耳测度的生成

本节的目的在于说明, 怎样可以从一些比较简单的集函数得出某些(正则的)波雷耳测度.

设 \mathbf{C} 是全体紧集类, 定义在 \mathbf{C} 上的非负, 有限, 单调, 并具有可加性及部分可加性的集函数称为容度. 换一句话说, 容度就是定义在 \mathbf{C} 上满足下列条件的集函数 λ :

- (a) 对于 \mathbf{C} 中一切 C , $0 \leq \lambda(C) < \infty$;
- (b) 如果 C 和 D 是紧集, 并且 $C \subset D$, 则 $\lambda(C) \leq \lambda(D)$;
- (c) 如果 C 和 D 是不相交的紧集, 则 $\lambda(C \cup D) = \lambda(C) + \lambda(D)$;
- (d) 如果 C 和 D 是任意两个紧集, 则 $\lambda(C \cup D) \leq \lambda(C) + \lambda(D)$.

因为 $\lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset) = \lambda(\emptyset \cup \emptyset) = \lambda(\emptyset) < \infty$, 所以容度在空集上的值必为零.

以下我们要从一个给定的容度 λ 得出定义在全体波雷耳开集类上的一个集函数 λ_* , 又从 λ_* 得出定义在全体 σ -有界集类上的一个外测度 μ^* . 然后, 利用以前已经建立起来的 μ^* -可测性理论, 得出一个测度 μ , 而这个测度是一个正则波雷耳测度.

设 λ 是一个容度, 对于 \mathbf{U} 中每一个 U , 令

$$\lambda_*(U) = \sup\{\lambda(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\};$$

我们称 λ_* 是由 λ 引出的内容度.

定理 1. 设 λ_* 是由容度 λ 引出的内容度, 则 λ_* 在空集上的值为零, 并具有单调性, 可列部分可加性和可列可加性.

证明. 等式 $\lambda_*(\emptyset) = 0$ 显然成立. 设 U 和 V 都属于 \mathbf{U} , $U \subset V$, 并设 C 是被 U 所包的紧集, 则 $C \subset V$, 因而 $\lambda(C) \leq \lambda_*(V)$. 于是有

$$\lambda_*(U) = \sup \lambda(C) \leq \lambda_*(V).$$

设 U 和 V 都属于 \mathbf{U} , C 是紧集, 并且 $C \subset U \cup V$, 则根据 §50 定理 1, 存在紧集 D 和 E 使得

$$D \subset U, \quad E \subset V \quad \text{并且} \quad C = D \cup E.$$

因为 $\lambda(C) \leq \lambda(D) + \lambda(E) \leq \lambda_*(U) + \lambda_*(V)$, 所以

$$\lambda_*(U \cup V) = \sup \lambda(C) \leq \lambda_*(U) + \lambda_*(V),$$

也就是說, λ_* 具有部分可加性。利用数学归纳法, λ_* 具有有限部分可加性。設 $\{U_i\}$ 是 U 中之集的叙列, C 是紧集, 并且 $C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, 則根据 C 的紧性, 存在正整数 n 使得 $C \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. 于是有

$$\lambda(C) \leq \lambda_*(\bigcup_{i=1}^n U_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_*(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i),$$

从而有

$$\lambda_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = \sup \lambda(C) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i),$$

也就是說, λ_* 具有可列部分可加性。

現在設 U 和 V 是 U 中不相交的两个集, C 和 D 是紧集, 并且 $C \subset U, D \subset V$. 因为 C 和 D 不相交, 而且 $C \cup D \subset U \cup V$, 所以有

$$\lambda(C) + \lambda(D) = \lambda(C \cup D) \leq \lambda_*(U \cup V),$$

从而有

$$\lambda_*(U) + \lambda_*(V) = \sup \lambda(C) + \sup \lambda(D) \leq \lambda_*(U \cup V).$$

由 λ_* 的部分可加性推出, λ_* 具有可加性; 利用数学归纳法, λ_* 具有有限可加性。設 $\{U_i\}$ 是 U 中不相交集的叙列, 則

$$\lambda_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \geq \lambda_*(\bigcup_{i=1}^n U_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_*(U_i).$$

上式对于每一个 $n=1, 2, \dots$ 都成立, 因此

$$\lambda_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i).$$

由 λ_* 的可列部分可加性推出, λ_* 具有可列可加性。 |

設 λ_* 是由容度 λ 引出的内容度, 在由全体 σ -有界集組成的可傳 σ -环上定义集函数 μ^* 如下:

$$\mu^*(E) = \inf\{\lambda_*(U) : E \subset U \in \mathcal{U}\}.$$

我們称 μ^* 为由 λ 引出的外測度; 下面的定理足以說明, 我們采用

这个術語是很合理的。

定理 2. 由容度 λ 引出的外測度 μ^* 是一个外測度。

証明。因为 $0 \subset 0 \in \mathbf{U}$ 并且 $\lambda_*(0) = 0$, 所以 $\mu^*(0) = 0$ 。設 E 和 F 是两个 σ -有界集, 并且 $E \subset F$ 。如果 U 是 \mathbf{U} 中的集, 并且 $F \subset U$, 則 $E \subset U$, 因而 $\mu^*(E) \leq \lambda_*(U)$ 。于是有

$$\mu^*(E) \leq \inf \lambda_*(U) = \mu^*(F).$$

設 $\{E_i\}$ 是 σ -有界集的叙列, 則对于每一个 $\varepsilon > 0$ 以及每一个 $i = 1, 2, \dots$, 存在 \mathbf{U} 中的集 U_i 使得

$$E_i \subset U_i, \quad \lambda_*(U_i) \leq \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

于是有

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \lambda_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon;$$

由于 ε 是任意的, 所以 μ^* 具有可列部分可加性。 |

我們可能会想到, 集函数 λ_* 也許恰好就是 λ 的擴張, 而 μ^* 恰好就是 λ_* 的擴張; 例如, 我們要問, 对于任何緊集 C , μ^* 是否能使 $\mu^*(C) = \lambda(C)$? 一般說来这是不正确的; 下面的定理就这个问题給出了精确的解答。

定理 3. 設 λ_* 是由容度 λ 引出的內容度, μ^* 是由 λ 引出的外測度, 則对于 \mathbf{U} 中每一个 U , $\mu^*(U) = \lambda_*(U)$, 而对于 \mathbf{C} 中每一个 C , $\mu^*(C^0) \leq \lambda(C) \leq \mu^*(C)$ 。

(我們記得, C^0 表示集 C 的内部。)

証明。設 $U \in \mathbf{U}$, 則由关系式 $U \subset U \in \mathbf{U}$ 可知, $\mu^*(U) \leq \lambda_*(U)$ 。設 $V \in \mathbf{U}$, 并且 $U \subset V$, 則 $\lambda_*(U) \leq \lambda_*(V)$, 因而

$$\lambda_*(U) \leq \inf \lambda_*(V) = \mu^*(U).$$

設 $C \in \mathbf{C}$, $U \in \mathbf{U}$, 并且 $C \subset U$, 則 $\lambda(C) \leq \lambda_*(U)$, 因而

$$\lambda(C) \leq \inf \lambda_*(U) = \mu^*(C).$$

設 $C \in \mathbf{C}$, $D \in \mathbf{C}$, 并且 $D \subset C^0 (\subset C)$, 則 $\lambda(D) \leq \lambda(C)$, 因而

$$\mu^*(C^0) = \lambda_*(C^0) = \sup \lambda(D) \leq \lambda(C). \quad \blacksquare$$

定理 4. 設 μ^* 是由容度 λ 引出的外測度, 則 σ -有界集 E 為 μ^* -可測集的必要和充分条件是: 對於 \mathbf{U} 中每一個 U ,

$$\mu^*(U) \geq \mu^*(U \cap E) + \mu^*(U \cap E').$$

證明。設 λ_* 是由 λ 引出的內容度, A 是任意 σ -有界集, U 是 \mathbf{U} 中的集, 並且 $A \subset U$ 。由關係式

$$\begin{aligned} \lambda_*(U) = \mu^*(U) &\geq \mu^*(U \cap E) + \mu^*(U \cap E') \geq \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') \end{aligned}$$

可知,

$$\mu^*(A) = \inf \lambda_*(U) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E');$$

反方向的不等式可由 μ^* 的部分可加性推出, 条件的必要性則可由 μ^* -可測集的定义推出。 \blacksquare

定理 5. 設 μ^* 是由容度 λ 引出的外測度。對於每一個波雷耳集 E , 令 $\mu(E) = \mu^*(E)$, 則集函數 μ 是一個正則波雷耳測度。

我們稱 μ 是由容度 λ 引出的波雷耳測度。

證明。首先我們要證明, 每一個緊集 C (因而每一個波雷耳集) 是 μ^* -可測的; 然後就可以直接推出, μ 是定义在全体波雷耳集类上的一个測度。借助于定理 4, 我們只須證明, 對於 \mathbf{U} 中一切 U , 有

$$\mu^*(U) \geq \mu^*(U \cap C) + \mu^*(U \cap C').$$

設 D 是 $U \cap C'$ 的緊子集, E 是 $U \cap D'$ 的緊子集; 我們注意到, 集 $U \cap C'$ 和 $U \cap D'$ 都屬於 \mathbf{U} 。因為 $D \cap E = \emptyset$, 並且 $D \cup E \subset U$, 所以有

$$\mu^*(U) = \lambda_*(U) \geq \lambda(D \cup E) = \lambda(D) + \lambda(E),$$

其中 λ_* 是由 λ 引出的內容度。于是有

$$\begin{aligned} \mu^*(U) &\geq \lambda(D) + \sup \lambda(E) = \lambda(D) + \lambda_*(U \cap D') = \\ &= \lambda(D) + \mu^*(U \cap D') \geq \lambda(D) + \mu^*(U \cap C), \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \mu^*(U) &\geq \mu^*(U \cap C) + \sup \lambda(D) = \\ &= \mu^*(U \cap C) + \lambda_*(U \cap C') = \mu^*(U \cap C) + \mu^*(U \cap C'). \end{aligned}$$

現在証明 $\mu(C) < \infty$. 設 F 是一个紧集, 滿足条件 $C \subset F^0$, 則有

$$\mu(C) = \mu^*(C) \leq \mu^*(F^0) \leq \lambda(F) < \infty.$$

最后, 由关系式

$$\begin{aligned} \mu(C) = \mu^*(C) &= \inf\{\lambda_*(U) : C \subset U \in \mathbf{U}\} = \\ &= \inf\{\mu^*(U) : C \subset U \in \mathbf{U}\} = \inf\{\mu(U) : C \subset U \in \mathbf{U}\} \end{aligned}$$

可知, 测度 μ 是正则的。 ▮

最后, 我們再引进一个定理, 这个定理我們以后还要引用。

定理 6. 設 T 是 X 在 X 上的一个同胚, λ 是一个容度. 对于 \mathbf{C} 中每一个 C , 令 $\hat{\lambda}(C) = \lambda(T(C))$. 如果 μ 和 $\hat{\mu}$ 分别是由 λ 和 $\hat{\lambda}$ 引出的波雷耳测度, 則对于每一个波雷耳集 E , 有 $\hat{\mu}(E) = \mu(T(E))$. 特别是, 如果 λ 对于 T 是不变的, 則 μ 对于 T 也是不变的。

証明. 如果 λ_* 和 $\hat{\lambda}_*$ 分别是由 λ 和 $\hat{\lambda}$ 引出的内容度, $U \in \mathbf{U}$, 則由关系式

$$\begin{aligned} \{\hat{\lambda}(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\} &= \{\lambda(T(C)) : U \supset C \in \mathbf{C}\} = \\ &= \{\lambda(D) : D = T(C), U \supset C \in \mathbf{C}\} = \\ &= \{\lambda(D) : U \supset T^{-1}(D) \in \mathbf{C}\} = \\ &= \{\lambda(D) : T(U) \supset D \in \mathbf{C}\} \end{aligned}$$

可知, $\hat{\lambda}_*(U) = \lambda_*(T(U))$. 如果 μ^* 和 $\hat{\mu}^*$ 分别是由 λ 和 $\hat{\lambda}$ 引出的外测度, 則类似的关系式可以說明, 对于每一个 σ -有界集 E , 有 $\hat{\mu}^*(E) = \mu^*(T(E))$; 因此, 对于每一个波雷耳集 E , 有 $\hat{\mu}(E) = \mu(T(E))$. 定理的最后部分可由前面部分立即推出。 ▮

(1) 下面的例子都是定义在局部紧豪司道夫空间的全体紧子集类 \mathbf{C} 上的非負, 有限集函数; 在这些例子里, 有的是容度, 而其余的則恰好不滿足容度定义里的条件(单调性, 可加性和部分可加性)之一。

(1a) X 是一个无限的离散空间, X^* 是由 X 补上一个点而得到的紧空

間; 对于 X^* 中每一个紧集 C , 按照 C 为有限或無限而令 $\lambda(C)=0$ 或 1 .

(1b) X 是由有限多个点組成的离散空間; 对于每一个紧集 C , 令 $\lambda(C)=1$.

(1c) X 是閉区間 $[-1, +1]$; 按照 $0 \in C^0$ 或 $0 \notin C^0$ 而令 $\lambda(C)=1$ 或 0 .

(1d) $X^* = \{X, x^*\}$ 是(1a)中所述的紧空間; 按照 $x^* \in C$ 或 $x^* \notin C$ 而令 $\lambda(C)=1$ 或 0 .

(1e) $X = \{0, \pm \frac{1}{n} : n=1, 2, \dots\}$. 如果 C 包含無限多个負数, 令 $\lambda(C)=0$; 在其他的場合, 按照 $0 \in C$ 或 $0 \notin C$ 而令 $\lambda(C)=1$ 或 0 .

(1f) 設 μ_0 是 X 上的貝尔測度; 对于 C 中每一个 C , 令

$$\lambda(C) = \sup\{\mu_0(C_0) : C \supset C_0 \in \mathcal{C}_0\}.$$

(1g) 設 μ 是 X 上的波雷耳測度; 对于 C 中每一个 C , 令 $\lambda(C) = \mu(C^0)$.

(2) 設 λ 和 $\hat{\lambda}$ 是两个容度, μ^* 和 $\hat{\mu}^*$ 分别是由 λ 和 $\hat{\lambda}$ 引出的外測度; 如果对于 C 中每一个 C , 有 $\lambda(C) \leq \hat{\lambda}(C) \leq \hat{\mu}^*(C)$, 則 $\mu^* = \hat{\mu}^*$. (提示: 借助于定理 3 的第一部分, 我們只須証明, 对于 U 中每一个 U , $\mu^*(U) = \sup\{\hat{\lambda}(C) : U \supset C \in \mathcal{C}\}$.)

(3) 下面是定理 3 的逆定理, 这个結果比(2)中的为强. 設 λ 和 $\hat{\lambda}$ 是两个容度, μ^* 和 $\hat{\mu}^*$ 分别是由 λ 和 $\hat{\lambda}$ 引出的外測度; 如果对于 C 中每一个 C , 有 $\mu^*(C^0) \leq \hat{\lambda}(C) \leq \mu^*(C)$, 則 $\mu^* = \hat{\mu}^*$. (提示: 根据定理 5, 对于 U 中每一个 U , 有

$$\mu^*(U) = \sup\{\mu^*(C) : U \supset C \in \mathcal{C}\}.$$

我們要証明的是:

$$\mu^*(U) = \sup\{\hat{\lambda}(C) : U \supset C \in \mathcal{C}\}.$$

如果 $\varepsilon > 0$, 并且 $U \in \mathcal{U}$, 則存在 C 中的集 C 使得 $C \subset U$ 和 $\mu^*(U) \leq \mu^*(C) + \varepsilon$, 并存在 C 中的集 D 使得 $C \subset D^0 \subset D \subset U$.)

(4) 設 λ 是一个容度, 具有下列性質: 当 $C^0 \neq \emptyset$ 时, $\lambda(C) > 0$. 如果 μ 是由 λ 引出的波雷耳測度, 則对于 U 中每一个非空的 U , 有 $\mu(U) > 0$.

(5) 不依赖于任何容度, 我們可以考慮具有下列性質的, 定义在全体 σ -有界集类上的外測度 μ^* : 对于 C 中每一个 C ,

$$\mu^*(C) = \inf\{\mu^*(U) : C \subset U \in \mathcal{U}\} < \infty.$$

对于这种外測度來說, 定理 4 和 5 是否成立?

§54. 正则容度

前面我們已經提到，一个容度的值可能不等于由这个容度引出的波雷耳测度的值(当然指的是在紧集上)。但是对于有一类很重要的容度來說，§53 中所述的过程确实构成了容度的扩张。我們要在本节中研究这一类容度，并利用得到的結果导出一个很重要的定理；这个定理肯定了在某种場合下波雷耳测度的存在性，至于唯一性則已經包含在 §52 定理 8 里面。

設 λ 是一个容度，如果对于 \mathbf{C} 中每一个 C ，有

$$\lambda(C) = \inf\{\lambda(D) : C \subset D^0 \subset D \in \mathbf{C}\},$$

則称 λ 是正则的。考虑到容度只在紧集上有定义，我們尽可能地使容度的正则性定义与测度的(外)正则性定义相仿。

定理 1. 設 μ 是由正则容度 λ 引出的波雷耳测度，則对于 \mathbf{C} 中每一个 C ， $\mu(C) = \lambda(C)$ 。

証明. 設 $C \in \mathbf{C}$ ；因为 λ 是正则的，所以，对于每一个 $\varepsilon > 0$ ，存在 \mathbf{C} 中的集 D ，使得

$$C \subset D^0, \quad \lambda(D) \leq \lambda(C) + \varepsilon.$$

根据 §53 定理 3，我們有

$$\lambda(C) \leq \mu(C) \leq \mu(D^0) \leq \lambda(D) \leq \lambda(C) + \varepsilon;$$

由于 ε 是任意的，于是得到定理的結論。 ▮

下面是定理 1 的逆定理。

定理 2. 設 μ 是正则波雷耳测度。如果对于 \mathbf{C} 中每一个 C ，令 $\lambda(C) = \mu(C)$ ，則集函数 λ 是一个正则容度，并且由 λ 引出的波雷耳测度与 μ 相合。

証明. 集函数 λ 显然是一个容度。根据 μ 的正则性，对于 \mathbf{C} 中每一个 C 并对于每一个 $\varepsilon > 0$ ，存在 \mathbf{U} 中的集 U ，使得

$$C \subset U, \quad \mu(U) \leq \mu(C) + \varepsilon.$$

如果 $D \in \mathbf{C}$ ，并且 $C \subset D^0 \subset D \subset U$ ，則

$$\lambda(D) = \mu(D) \leq \mu(U) \leq \mu(C) + \varepsilon = \lambda(C) + \varepsilon;$$

这就說明了 λ 是正則的。設 $\hat{\mu}$ 是由 λ 引出的波雷耳測度，則根据定理 1，对于 \mathbf{C} 中每一个 C ，有 $\hat{\mu}(C) = \lambda(C) = \mu(C)$ ；因此 $\hat{\mu} = \mu$ 。 ▮

定理 3. 設 μ_0 是貝尔測度。如果对于 \mathbf{C} 中每一个 C ，令

$$\lambda(C) = \inf\{\mu_0(U_0) : C \subset U_0 \in \mathbf{U}_0\},$$

則 λ 是一个正則容度。

証明。不难驗証， λ 是非負的，有限的，并且是單調的。

設 C 和 D 是 \mathbf{C} 中的集， U_0 和 V_0 是 \mathbf{U}_0 中的集，并且 $C \subset U_0$ ， $D \subset V_0$ ；于是 $C \cup D \subset U_0 \cup V_0 \in \mathbf{U}_0$ ，因而

$$\lambda(C \cup D) \leq \mu_0(U_0 \cup V_0) \leq \mu_0(U_0) + \mu_0(V_0).$$

由此得到

$$\lambda(C \cup D) \leq \inf \mu_0(U_0) + \inf \mu_0(V_0) = \lambda(C) + \lambda(D),$$

也就是說， λ 具有部分可加性。

設 C 和 D 是 \mathbf{C} 中不相交的集，則在 \mathbf{U}_0 中存在不相交的集 U_0 和 V_0 ，使得 $C \subset U_0$ ， $D \subset V_0$ 。如果 $C \cup D \subset W_0 \in \mathbf{U}_0$ ，則有

$$\lambda(C) + \lambda(D) \leq \mu_0(U_0 \cap W_0) + \mu_0(V_0 \cap W_0) \leq \mu_0(W_0),$$

从而有

$$\lambda(C) + \lambda(D) \leq \inf \mu_0(W_0) = \lambda(C \cup D).$$

利用前面得到的关于 λ 的部分可加性，就說明了 λ 具有可加性。

現在証明 λ 是正則的，設 C 是任意紧集， ε 是任意正数。按照 λ 的定义，存在 \mathbf{U}_0 中的集 U_0 ，使得

$$C \subset U_0, \quad \mu_0(U_0) \leq \lambda(C) + \varepsilon.$$

如果 D 是紧集，并且 $C \subset D^0 \subset D \subset U_0$ ，則

$$\lambda(D) \leq \mu_0(U_0) \leq \lambda(C) + \varepsilon. \quad \blacksquare$$

定理 4. 設 μ_0 是貝尔測度，則存在滿足下列条件的唯一的一个正則波雷耳測度 μ ：对于每一个貝尔集 E ， $\mu(E) = \mu_0(E)$ 。

証明。对于 \mathbf{C} 中每一个 C ，令

$$\lambda(C) = \inf\{\mu_0(U_0) : C \subset U_0 \in \mathbf{U}_0\},$$

則根据定理 3, λ 是一个正則容度; 設 μ 是由 λ 引出的正則波雷耳測度。根据定理 1, 对于 \mathbf{C} 中每一个 C , 有 $\mu(C) = \lambda(C)$ 。因为每一个貝尔測度是正則的(参看 §52 定理 7), 所以 $\lambda(C) = \mu_0(C)$; 于是, 对于 \mathbf{C}_0 中每一个 C , 我們有 $\mu(C) = \mu_0(C)$ 。这就証明了 μ 的存在性; μ 的唯一性見 §52 定理 8。 |

(1) 在 53.1 里給出的集函数, 其中哪几个是正則容度?

(2) 沿用 §53 定理 6 中的記号, 如果 λ 是正則容度, 則 $\hat{\lambda}$ 也是正則容度。

(3) 設 μ 是波雷耳測度; 对于 \mathbf{C} 中每一个 C , 令

$$\lambda(C) = \sup\{\mu(C_0) : C \supset C_0 \in \mathbf{C}_0\}.$$

μ 为增补正則測度的必要和充分条件是: λ 是正則容度(参看 53.1f)。

(4) 設 λ 是一个容度, 如果对于 \mathbf{C} 中每一个 C , 有

$$\lambda(C) = \sup\{\lambda(D) : C^0 \supset D \in \mathbf{C}\},$$

則称 λ 是內正則的。下述与定理 1 和定理 2 相类似的定理成立。

(4a) 設 μ 是由內正則容度 λ 引出的波雷耳測度, 則对于 \mathbf{C} 中每一个 C , $\mu(C^0) = \lambda(C)$ 。

(4b) 設 μ 是正則波雷耳測度。如果对于 \mathbf{C} 中每一个 C , 令 $\lambda(C) = \mu(C^0)$, 則集函数 λ 是一个內正則容度, 并且由 λ 引出的波雷耳測度与 μ 相合。

§55. 某些連續函数类

和前面一样, 設 X 是局部紧豪司道夫空間。我們以 $\mathcal{L}(X)$ 或 \mathcal{L} 表示由定义在 X 上具有下述性質的一切实值連續函数 f 組成的类: f 在一个紧集以外恒等于零。換一句話說, \mathcal{L} 就是定义在 X 上能使

$$N(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$$

为有界集的一切实值連續函数 f 的类。如果 X 不是紧空間, 而 X^* 是由 X 补上一个点 x^* 而得到的紧空間, 則常称 x^* 为無穷远点; 因此, \mathcal{L} 就是定义在 X 上并在無穷远点的某邻域內恒等于零的实值連續函数类。以記号 $\mathcal{L}_+(X)$ 或 \mathcal{L}_+ 表示由 \mathcal{L} 中一切非負函数

組成的子类。下面是我們关于这种函数空間的第一条定理；在我們以前的許多問題里已經隱含着这个結果。

定理 1. 設 C 是任意紧貝尔集，則存在 \mathcal{L}_+ 中函数的遞減叙列 $\{f_n\}$ ，使得对于 X 中每一个 x ，

$$\lim_n f_n(x) = \chi_C(x).$$

証明。設 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ ，其中 U_n 是有界开集；于是，对于每一个正整数 n ，在 \mathcal{F} (参看 §50) 中存在函数 g_n 使得

$$g_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in C, \\ 0, & \text{若 } x \in U_n. \end{cases}$$

令 $f_n = g_1 \cap \cdots \cap g_n$ ，則 $\{f_n\}$ 是非負連續函数的遞減叙列，并且对于 X 中每一个 x ，有

$$\lim_n f_n(x) = \chi_C(x).$$

因为 U_n 是有界的，所以 $f_n \in \mathcal{L}_+$ ， $n=1, 2, \dots$ 。 ▮

設 μ_0 是貝尔測度， $f \in \mathcal{L}$ ， $\{x: f(x) \neq 0\} \subset C \in \mathbf{C}_0$ 。因为 $\mu_0(C) < \infty$ ，而 f 是有界的貝尔可測函数 (参看 §51 定理 2)，所以 f 对于 μ_0 是可积的，并且

$$\int f d\mu_0 = \int_C f d\mu_0.$$

特別是，如果 μ 是波雷耳測度， μ_0 是由等式 $\mu_0(E) = \mu(E)$ 确定的貝尔測度，其中 E 是貝尔集，則在这种情形下上述命題也成立。

定理 2. 設 μ 是貝尔測度，它在一切非空的貝尔开集上取正值，并設 $f \in \mathcal{L}_+$ ；則 $\int f d\mu = 0$ 的必要和充分条件是：对于 X 中每一个 x ， $f(x) = 0$ 。

証明。条件显然是充分的。現在証明条件的必要性。設 $\int f d\mu = 0$ ， U 是一个有界的貝尔开集，并且 $\{x: f(x) \neq 0\} \subset U$ 。令 $E = \{x: f(x) = 0\}$ ；因为

$$0 = \int f d\mu \geq \int_{U-E} f d\mu,$$

而 f 是非负的, 所以 $\mu(U-E)=0$. 由于 $U-E$ 是一个贝尔开集, 因此 $U-E=0$, 也就是 $U \subset E$. \blacksquare

定理 3. 设 μ_0 是贝尔测度, $\varepsilon > 0$, 则对应于每一个可积简单贝尔函数 f , 存在可积简单函数 g ,

$$g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{C_i},$$

使得 C_i 是紧贝尔集, $i=1, \dots, n$, 并且

$$\int |f-g| d\mu_0 \leq \varepsilon.$$

证明. 设 $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$; 并设 c 是一个正数, 满足下述条件: 对于 X 中一切 x , $|f(x)| \leq c$ (也就是, 对于 $i=1, \dots, n$, $|\alpha_i| \leq c$). 因为 μ_0 是正则的, 所以, 对于每一个 $i=1, \dots, n$, 存在紧贝尔集 C_i , 使得

$$C_i \subset E_i, \quad \mu_0(E_i) \leq \mu_0(C_i) + \frac{\varepsilon}{nc}.$$

如果 $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{C_i}$, 则

$$\int |f-g| d\mu_0 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \mu_0(E_i - C_i) \leq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

定理 4. 设 μ_0 是贝尔测度, $\varepsilon > 0$; 如果 $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{C_i}$ 是一个简单函数, 其中 C_i 是紧贝尔集, 则在 \mathcal{L} 中存在函数 h , 使得

$$\int |g-h| d\mu_0 \leq \varepsilon.$$

证明. 因为 $\{C_1, \dots, C_n\}$ 是不相交紧集的有限类, 所以存在不相交有界贝尔开集的有限类 $\{U_1, \dots, U_n\}$, 使得 $C_i \subset U_i$, $i=1, \dots, n$. 由于 μ_0 是正则的, 不丧失普遍性我们可以假定

$$\mu_0(U_i) \leq \mu_0(C_i) + \frac{\varepsilon}{nc}, \quad i=1, \dots, n,$$

其中 c 是滿足下述条件的正数: 对于 X 中一切 x , $|g(x)| \leq c$. 对于每一个 $i=1, \dots, n$, 在 \mathcal{F} 中存在函数 h_i , 滿足下列条件, 当 $x \in C_i$ 时 $h_i(x) = 1$, 当 $x \in X - U_i$ 时 $h_i(x) = 0$; 我們令 $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i$. 因为 $h_i \in \mathcal{L}_+$, $i=1, \dots, n$, 所以 $h \in \mathcal{L}$; 又因为 U_i 是不相交的, 所以对于 X 中一切 x , 我們有 $|h(x)| \leq c$. 于是

$$\int |g-h| d\mu_0 = \sum_{i=1}^n \int_{U_i - C_i} |h| d\mu_0 \leq \sum_{i=1}^n c \mu_0(U_i - C_i) \leq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

(1) 設 μ 是正則波雷耳測度, 則由紧集的特征函数的一切有限綫性組合組成的类在 $\mathcal{L}_p(\mu)$ 中稠密, $1 \leq p < \infty$.

(2) 設 μ 是正則波雷耳測度, 則 \mathcal{L} 在 $\mathcal{L}_p(\mu)$ 中稠密, $1 \leq p < \infty$.

(3) 設 μ 是正則波雷耳測度, E 是測度为有限的波雷耳集, f 是定义在 E 上的波雷耳可測函数, 則对于每一个 $\varepsilon > 0$, 在 E 中存在紧集 C , 使得 $\mu(E - C) \leq \varepsilon$, 并使得 f 在 C 上連續. (提示: 如果 f 是簡單函数, 可以按照証明定理 3 的方法来証明这个命題. 在一般的場合, 存在收斂到 f 的簡單函数列 $\{f_n\}$; 根据叶果洛夫定理和 μ 的正則性, 在 E 中存在紧集 C_0 , 使得 $\mu(E) \leq \mu(C_0) + \frac{\varepsilon}{2}$, 并使得 $\{f_n\}$ 在 C_0 上一致收斂到 f . 設 C_n 是 E 的紧子集, 使得 $\mu(E) \leq \mu(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, 并使得 f_n 在 C_n 上連續; 于是, 集

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

滿足命題中所述的条件.) 这个結果称为卢辛定理.

§56. 綫性汎函数

設 A 是定义在 \mathcal{L} 上的实值函数, 如果对于 \mathcal{L} 中任意一对函数 f 和 g 以及任意一对实数 α 和 β , 有

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g),$$

則称 A 是 \mathcal{L} 上的綫性汎函数. 設 A 是 \mathcal{L} 上的綫性汎函数, 如果对于 \mathcal{L}_+ 中每一个 f , 有 $A(f) \geq 0$, 則称 A 是正的. 我們注意到, 正

的綫性汎函数 A 具有单調性, 也就是說, 如果 $f \in \mathcal{L}, g \in \mathcal{L}$, 并且 $f \geq g$, 則 $A(f) \geq A(g)$. 不难驗証, 如果 μ_0 是貝尔測度, 而 $A(f) = \int f d\mu_0$, 其中 $f \in \mathcal{L}$, 則 A 是正的綫性汎函数; 本节的主要目的在于証明, 任何正的綫性汎函数都可以按照这种方式表示出来.

我們將采用下面的記号; 这种記号虽然不常見, 但却很能表出它的含义. 設 E 是 X 的子集, f 是定义在 X 上的实值函数, 如果对于 X 中每一个 x , 有 $\chi_E(x) \leq f(x)$ [或 $\chi_E(x) \geq f(x)$], 則記为 $E \subset f$ [对应地, $E \supset f$].

定理 1. 設 A 是 \mathcal{L} 上正的綫性汎函数. 对于 \mathbf{C} 中每一个 C , 令

$$\lambda(C) = \inf\{A(f) : C \subset f \in \mathcal{L}_+\},$$

則 λ 是一个正則容度. 如果 μ 是由 λ 引出的波雷耳測度, 則对于每一个有界开集 U 并对于 \mathcal{L}_+ 中滿足条件 $U \subset f$ 的每一个 f , 有

$$\mu(U) \leq A(f).$$

証明. 因为 A 是正的, 所以当 $C \in \mathbf{C}$ 时有 $\lambda(C) \geq 0$. 要証明 λ 是有限的, 設 C 是任意紧集, U 是包含 C 的任意有界开集. 因为在 \mathcal{L}_+ 中存在滿足下列条件的函数 f : 当 $x \in C$ 时 $f(x) = 1$, 当 $x \in X - U$ 时 $f(x) = 0$, 所以 $C \subset f \in \mathcal{L}_+$, 从而有

$$\lambda(C) \leq A(f) < \infty.$$

設 C 和 D 是紧集, $C \supset D$, 并且 $C \subset f \in \mathcal{L}_+$, 則 $D \subset f$, 因此 $\lambda(D) \leq A(f)$. 于是有 $\lambda(D) \leq \inf A(f) = \lambda(C)$, 也就是說, λ 具有单調性.

設 C 和 D 是紧集, 并且 $C \subset f \in \mathcal{L}_+, D \subset g \in \mathcal{L}_+$, 則

$$C \cup D \subset f + g \in \mathcal{L}_+,$$

因此 $\lambda(C \cup D) \leq A(f + g) = A(f) + A(g)$. 于是有

$$\lambda(C \cup D) \leq \inf A(f) + \inf A(g) = \lambda(C) + \lambda(D),$$

也就是說, λ 具有部分可加性.

設 C 和 D 是不相交的紧集, 則存在不相交的有界开集 U 和

V , 使得 $C \subset U, D \subset V$. 設 f 和 g 是 \mathcal{L}_+ 中滿足下列条件的两个函数: 当 $x \in C$ 时 $f(x) = 1$, 当 $x \in X - U$ 时 $f(x) = 0$, 当 $x \in D$ 时 $g(x) = 1$, 当 $x \in X - V$ 时 $g(x) = 0$. 如果 $C \cup D \subset h \in \mathcal{L}_+$, 則

$$\lambda(C) + \lambda(D) \leq A(hf) + A(hg) = A(h(f+g)) \leq A(h).$$

于是有

$$\lambda(C) + \lambda(D) \leq \inf A(h) = \lambda(C \cup D);$$

利用 λ 的部分可加性, 立即推出 λ 具有可加性.

我們已經証明了 λ 是一个容度; 剩下需要証明的是 λ 的正則性. 对于 \mathbf{C} 中每一个 C 以及每一个 $\varepsilon > 0$, 在 \mathcal{L}_+ 中存在函数 f , 使得

$$C \subset f, \quad A(f) \leq \lambda(C) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

如果 γ 是滿足条件 $0 < \gamma < 1$ 的实数, 而 $D = \{x: f(x) \geq \gamma\}$, 則

$$C \subset \{x: f(x) \geq 1\} \subset \{x: f(x) > \gamma\} \subset D^0 \subset D \in \mathbf{C}.$$

因为 $D \subset \frac{1}{\gamma} f \in \mathcal{L}_+$, 所以

$$\lambda(D) \leq \frac{1}{\gamma} A(f) \leq \frac{1}{\gamma} \left(\lambda(C) + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

我們可以选择 γ 使它滿足关系式

$$\frac{1}{\gamma} \left(\lambda(C) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \lambda(C) + \varepsilon,$$

于是有 $\lambda(D) \leq \lambda(C) + \varepsilon$; 由于 ε 是任意的, 这就說明了 λ 是正則的.

定理中最后一部分結論可由 μ 的正則性推出. 事实上, 如果 C 是紧集, 并且 $C \subset U$, 則 $C \subset f$, 因此

$$\mu(C) = \lambda(C) \leq A(f);$$

于是有 $\mu(U) = \sup \mu(C) \leq A(f)$. \blacksquare

定理 2. 設 A 是 \mathcal{L} 上正的綫性汎函数, 对于 \mathbf{C} 中每一个 C , 令

$$\lambda(C) = \inf \{ A(f) : C \subset f \in \mathcal{L}_+ \}.$$

如果 μ 是由容度 λ 引出的波雷耳测度, 则对于 \mathcal{L}_+ 中每一个 f , 有

$$\int f d\mu \leq A(f).$$

证明. 因为 $\int f d\mu$ 和 $A(f)$ 都是线性地依赖于 f , 所以只须就满足下列条件的函数 f 证明这个不等式: 对于 X 中每一个 x , $0 \leq f(x) \leq 1$.

设 n 是一个固定的正整数; 对于 $i=1, \dots, n$, 令

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x) < \frac{i-1}{n}, \\ \frac{f(x) - \frac{i-1}{n}}{\frac{1}{n}} = nf(x) - (i-1), & \text{若 } \frac{i-1}{n} \leq f(x) \leq \frac{i}{n}, \\ 1, & \text{若 } \frac{i}{n} < f(x). \end{cases}$$

因为

$$f_i = ([nf - (i-1)] \cup 0) \cap 1 = ([nf - (i-1)] \cap 1) \cup 0,$$

$i=1, \dots, n$, 所以函数 f_i 都属于 \mathcal{L}_+ . 在满足关系式

$$\frac{j-1}{n} \leq f(x) \leq \frac{j}{n}$$

的任何 x 处, 我们有

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 1 \leq i \leq j-1, \\ 0, & \text{若 } j+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

因此, 对于 X 中每一个 x , 有 $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x)$.

令 $U_i = \{x: f(x) > \frac{i}{n}\}$, $i=0, 1, \dots, n$, 则 U_i 是有界开集, 而对于 $i=1, \dots, n$, 有 $U_i \subset f_i$, 根据定理 1, 又有 $\mu(U_i) \leq A(f_i)$. 因为 $U_0 \supset U_1 \supset \dots \supset U_n = \emptyset$, 我们有

$$\begin{aligned}
A(f) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A(f_i) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu(U_i) = \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \mu(U_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} [\mu(U_i) - \mu(U_{i+1})] = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i+1}{n} \mu(U_i - U_{i+1}) - \frac{1}{n} \mu(U_1) \geq \\
&\geq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{U_i - U_{i+1}} f d\mu - \frac{1}{n} \mu(U_1) = \\
&= \int_{U_1} f d\mu - \frac{1}{n} \mu(U_1) \geq \int f d\mu - \frac{1}{n} \mu(U_0).
\end{aligned}$$

由于 n 是任意的, 而 $\mu(U_0) < \infty$, 于是得到定理的結論。 ▮

定理 3. 設 A 是 \mathcal{L} 上正的綫性汎函数, 对于 \mathbf{C} 中每一个 C , 令

$$\lambda(C) = \inf\{A(f) : C \subset f \in \mathcal{L}_+\}.$$

如果 μ 是由容度 λ 引出的波雷耳测度, 則对于每一个紧集 C 以及每一个正数 ε , 在 \mathcal{L}_+ 中存在函数 f_0 , 使得 $C \subset f_0$, 并且

$$A(f_0) \leq \int f_0 d\mu + \varepsilon.$$

証明. 設 f_0 是 \mathcal{L}_+ 中的函数, 滿足下列条件:

$$C \subset f_0, \quad A(f_0) \leq \lambda(C) + \varepsilon;$$

于是有

$$A(f_0) \leq \mu(C) + \varepsilon \leq \int f_0 d\mu + \varepsilon. \quad \blacksquare$$

定理 4. 設 A 是 \mathcal{L} 上正的綫性汎函数, 則存在滿足下列条件的波雷耳测度 μ : 对于 \mathcal{L} 中每一个 f ,

$$A(f) = \int f d\mu.$$

証明. 对于 \mathbf{C} 中每一个 C , 令 $\lambda(C) = \inf\{A(f): C \subset f \in \mathcal{L}_+\}$, 并設 μ 是由容度 λ 引出的波雷耳测度, f 是 \mathcal{L} 中一个固定的函数.

設 C 是滿足条件 $\{x: f(x) \neq 0\} \subset C$ 的紧集, ε 是一个正数. 根据定理 3, 在 \mathcal{L}_+ 中存在函数 f_0 , 使得

$$C \subset f_0, \quad A(f_0) \leq \int f_0 d\mu + \varepsilon.$$

設 c 是滿足下述条件的正数: 对于 X 中一切 x , $|f(x)| \leq c$; 于是, 函数 $f + cf_0$ 属于 \mathcal{L}_+ , 而根据定理 2, 就有

$$\begin{aligned} A(f) + cA(f_0) &= A(f + cf_0) \geq \int (f + cf_0) d\mu = \\ &= \int f d\mu + c \int f_0 d\mu. \end{aligned}$$

因此

$$A(f) \geq \int f d\mu + c \left[\int f_0 d\mu - A(f_0) \right] \geq \int f d\mu - c\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 所以

$$A(f) \geq \int f d\mu,$$

換一句話說, 定理 2 对于 \mathcal{L} 中一切 f 都成立. 对函数 $-f$ 应用这个不等式, 我們得到反方向的不等式. \blacksquare

定理 5. 設 μ 是正則波雷耳测度; 令

$$A(f) = \int f d\mu,$$

其中 $f \in \mathcal{L}$; 并令

$$\lambda(C) = \inf\{A(f): C \subset f \in \mathcal{L}_+\},$$

其中 $C \in \mathbf{C}$. 于是, 对于 \mathbf{C} 中每一个 C , 有 $\mu(C) = \lambda(C)$. 由此可見, 将正的綫性汎函数表为对于正則波雷耳测度的积分, 其表示方式是唯一的.

証明. 显然, $\mu(C) \leq \lambda(C)$. 如果 $C \in \mathbf{C}$ 而 $\varepsilon > 0$, 則因为 μ 是正則的, 所以必定存在包含 C 的有界开集 U , 使得

$$\mu(U) \leq \mu(C) + \varepsilon.$$

設 f 是 \mathcal{L} 中滿足下列条件的函数: 当 $x \in C$ 时 $f(x) = 1$, 当 $x \in X - U$ 时 $f(x) = 0$; 于是 $C \subset f \in \mathcal{L}_+$, 并且

$$\lambda(C) \leq \Delta(f) = \int f d\mu \leq \mu(U) \leq \mu(C) + \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 定理于是証明完畢。 ▮

(1) 設 $x_0 \in X$. 对于 \mathcal{L} 中每一个 f , 令 $\Delta(f) = f(x_0)$, 对于每一个波雷耳集 E , 令 $\mu(E) = \chi_E(x_0)$, 則 $\Delta(f) = \int f d\mu$.

(2) 設 μ_0 是貝尔測度. 对于 \mathcal{L} 中每一个 f , 令 $\Delta(f) = \int f d\mu_0$, 并設 μ 是滿足条件 $\Delta(f) = \int f d\mu$ 的波雷耳測度, 則对于每一个貝尔集 E , 有 $\mu(E) = \mu_0(E)$.

(3) 設 μ_0 是貝尔測度. 对于 \mathcal{L} 中每一个 f , 令 $\Delta(f) = \int f d\mu_0$. 对于 \mathbf{U} 中每一个 U , 令

$$\lambda_*(U) = \sup\{\Delta(f) : U \supset f \in \mathcal{L}_+\},$$

而对于每一个 σ -有界集 E , 令

$$\mu^*(E) = \inf\{\lambda_*(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\};$$

則对于每一个貝尔集 E , 有 $\mu^*(E) = \mu_0(E)$.

(4) 在由全体正整数组成的可列离散空間中补上一个点 ∞ , 我們得到紧空間 X . 在这种場合下, \mathcal{L} 中的函数 f 就是滿足条件 $f(\infty) = \lim_n f(n)$ 的收斂实数列 $\{f(n)\}$; 最一般的正綫性汎函数 Δ 具有下列形式:

$$\Delta(f) = \sum_{1 \leq n < \infty} f(n) \Delta_n,$$

其中 $\sum_n \Delta_n$ 是收斂的正数項級数.

(5) 設 Δ 是 \mathcal{L} 上的綫性汎函数, 如果存在滿足下述条件的常数 k : 对于 \mathcal{L} 中每一个 f , 有 $|\Delta(f)| \leq k \sup\{|f(x)| : x \in X\}$, 則称 Δ 是有界的. 每一个有界(不一定是正的)綫性汎函数可以表为两个有界的正綫性汎函数之差. 要証明这个命題, 可以摹仿广义測度的若当分解的导出过程.

(6) 如果 X 是紧空間, 則 \mathcal{L} 上每一个正的正綫性汎函数是有界的.

第十一章

哈尔测度

§57. 开子群

在开始阐述拓扑群中的测度理论以前，我们要在本节内引进三条拓扑方面的定理，这些定理在测度论里有很重要的用处。设 Z 是拓扑群 X 的子群，如果 Z 本身是一个开的子集，则称 Z 是 X 的**开子群**。我们要证明，拓扑群 X 的开子群 Z 拥有 X 的全部拓扑性质——出乎 Z 的范围以外的性质，则可以通过 Z 的左陪集类的结构而表达出来，这个左陪集类的拓扑结构是离散的。我们还要证明，每一个局部紧拓扑群必有充分小的开子群——换一句话说，必有这样的开子群：在这些开子群里，测度在无穷远点处的不规则现象不可能发生。

定理 1. 拓扑群 X 的子群 Z 是开子群的必要和充分条件是： Z 具有非空的内部 Z^0 。

证明。条件显然是必要的。现在证明条件的充分性。因为 $Z^0 \neq \emptyset$ ，所以在 Z^0 中存在元素 z_0 。设 z 是 Z 的任意元素，则 $zz_0^{-1} \in Z$ ，因而 $zz_0^{-1}Z = Z$ 。于是 $zz_0^{-1}Z^0 = Z^0$ ，从而

$$z = (zz_0^{-1})z_0 \in Z^0.$$

由于 z 是 Z 中任意的元素，因此 $Z \subset Z^0$ ，换一句话说， Z 是一个开集。 |

定理 2. 设 Z 是拓扑群 X 的开子群，则任意多个 Z 的左陪集的并集在 X 中既是开集又是闭集。

証明。因为任意多个左陪集之併的余集，其本身还是一个同样类型的併集，而以开集为余集的集必为閉集，所以只須証明，任意多个左陪集之併是一个开集。又因为开集的併集必为开集，所以只須証明， Z 的每一个左陪集是开集；但是我們已經知道 Z 是一个开集，定理于是証明完畢。 |

定理 3. 設 E 是局部紧拓扑群 X 中的任意波雷耳集，則存在 X 的 σ -紧开子群 Z ，使得 $E \subset Z$ 。

証明。只須証明(參看 §51 定理 1)，如果 $\{C_n\}$ 是 X 中紧集的叙列，則存在 X 的 σ -紧开子群 Z ，使得 $C_n \subset Z, n=1, 2, \dots$ 。

設 D 是紧集，包含单位元素 e 的某个邻域。令 $D_0 = D$ ，并令

$$D_{n+1} = D_n^{-1} D_n \cup C_{n+1}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

如果 $Z = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ ，則 Z 是 σ -紧集，具有非空的内部，并包含一切 C_n 。如果我們能导出关系式 $Z^{-1}Z \subset Z$ ，則定理的証明就完成了。

首先我們証明：如果 $e \in D_n, n=0, 1, 2, \dots$ ，則 $D_n \subset D_{n+1}$ 。事实上，如果 $e \in D_n$ ，則 $e \in D_n^{-1}$ ；由此可見，如果 $x \in D_n$ ，則

$$x \in (D_n^{-1})x \subset D_n^{-1} D_n \subset D_{n+1}.$$

因为 $e \in D_0$ ，所以 $D_n \subset D_{n+1}, n=0, 1, 2, \dots$ 。

現在設 x 和 y 是 z 的两个元素。由上段的結論可知， x 和 y 二者同屬於某一个 D_n ，因此

$$x^{-1}y \in D_n^{-1} D_n \subset D_{n+1} \subset Z. \quad |$$

§58. 哈尔测度的存在性

設局部紧拓扑群 X 里的波雷耳测度 μ 具有下列性質：对于每一个非空波雷耳开集 $U, \mu(U) > 0$ ，对于每一个波雷耳集 $E, \mu(xE) = \mu(E)$ ；我們称 μ 是一个哈尔测度。本节的目的在于証明，在每一个局部紧拓扑群里至少有一个哈尔测度存在。

哈尔测度定义里的第二个条件可以称为左不变性（或者称为在左轉移下的不变性）。定义里第一个条件与 μ 不恒为零这个条

件是等价的。事实上，如果 $\mu(U)=0$ ，其中 U 是某个非空的波雷耳开集，又设 C 是任意紧集，则类 $\{xU: x \in C\}$ 是 C 的开复盖。因为 C 是紧集，所以存在 C 的有限子集 $\{x_1, \dots, x_n\}$ ，使得 $C \subset \bigcup_{i=1}^n x_i U$ ，而由 μ 的左不变性导出

$$\mu(C) \leq \sum_{i=1}^n \mu(x_i U) = n\mu(U) = 0.$$

如果 μ 在全体紧集类 \mathbf{C} 上等于零，则 μ 在全体波雷耳集类 \mathbf{S} 上也等于零；于是我们得到下述结论：哈尔测度就是不恒等于零的左不变的波雷耳测度。

在开始讨论哈尔测度的构成以前，我们还要指出，哈尔测度的定义里有着不对称的地方。左转移和右转移在群里占有完全对称的地位；因此，在我们的定义里只提出左不变性似乎是不很公平的。我们所定义的概念事实上应该称为“左哈尔测度”；同时我们还应该引进一个类似的“右哈尔测度”概念，并且应该对二者之间的关系加以详尽的研究。实际上我们在以后有时就要引用这种更为精确的术语。但是在绝大多数的场合，特别是在有关哈尔测度的存在性问题里，由于左、右哈尔测度的完全对称性，我们只须采用不对称的处理方式。事实上，因为将 X 中每一个 x 映为 x^{-1} 的变换能使一切拓扑和群论的性质保持不变，并且能使一切“左”和“右”的性质相互转化，所以从每一个“左定理”可以导出和它对应的“右定理”，反之亦然。特别是，不难验证，如果 μ 是一个左哈尔测度，对于每一个波雷耳集 E ，令 $\nu(E) = \mu(E^{-1})$ ，则集函数 ν 是一个右哈尔测度；反之，如果 μ 是一个右哈尔测度，则 ν 是一个左哈尔测度。

设 E 是任意有界集， F 是具有非空内部的任意集；我们定义“比” $E:F$ 为满足下述条件的最小非负整数 n ： E 能被 n 个 F 的左转移所遮盖，换一句话说，存在 X 中 n 个元素组成的集 $\{x_1, \dots, x_n\}$ ，使得 $E \subset \bigcup_{i=1}^n x_i F$ 。容易看出，因为 E 是有界集，而 $F^0 \neq \emptyset$ ，所

以 $E:F$ 必为有限数;此外,如果 A 是具有非空内部的有界集,則

$$E:F \leq (E:A)(A:F).$$

哈尔测度的建立,以下述的想法为其基础。上一章的结果告诉我们,要想在局部紧豪司道夫空间里建立一个波雷耳测度,只须首先建立一个容度 λ ,也就是定义在 \mathbf{C} 上具有某种可加性的一个集函数。設 C 是一个紧集, U 是一个非空的开集,則比 $C:U$ 可以用来表示 C 和 U 二者的大小之间的比较。将 $C:U$ 乘以取决于 U 的大小的一个适当的因子,然后对所得的乘积按照某种意义取极限,假定 U 无限地缩小,則所得的極限值应该就是 λ 在 C 上的值。

上面的說法并不完全准确。为了揭露这个不准确之点,并使得我們的考虑方式更富于直观性起见,我們現在举出一个例子。設 X 是欧几里得平面, μ 是勒貝格测度, C 是任意紧集。設 U_r 是半徑为 r 的一个圆的内部;如果对于每一个 $r > 0$, 令 $n(r) = C:U_r$, 則显然有 $n(r)\pi r^2 \geq \mu(C)$ 。我們知道, $\lim_{r \rightarrow 0} n(r)\pi r^2$ 存在,但它不等于 $\mu(C)$ 而等于 $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\mu(C)$ 。換一句話說,从一个在 U_r 上取值为 πr^2 的通常的测度出發,按照上述的考虑方式我們得到一个新的测度,这个测度是原来的测度与一个常数因子的乘积。为了消去这个比例因子,我們將以两个比的比值 $(C:U)/(A:U)$ 来代替 $C:U$, 其中 A 是具有非空内部的一个固定的紧集。

定理 1. 設 U 是一个固定的非空开集, A 是具有非空内部的一个固定的紧集。对于每一个紧集 C , 令

$$\lambda_U(C) = \frac{C:U}{A:U},$$

則集函数 λ_U 是非負的,有限的,單調的,具有左不变性和部分可加性;此外, λ_U 并具有下述狹义的可加性:如果 C 和 D 是紧集,并且 $CU^{-1} \cap DU^{-1} = 0$, 則

$$\lambda_U(C \cup D) = \lambda_U(C) + \lambda_U(D).$$

証明。除了最后一部分以外,定理的其余部分都可以利用关

于 $C:U$ 的定义直接验证。现在证明定理的最后一部分。设 xU 是 U 的一个左转移；容易看出，如果 $C \cap xU \neq 0$ ，则有 $x \in CU^{-1}$ ，如果 $D \cap xU \neq 0$ ，则有 $x \in DU^{-1}$ 。由此可见， U 的任何左转移都不能够与 C 和 D 同时有非空的交集。所以 λ_U 具有定理中所述的狭义可加性。 |

定理 2. 在每一个局部紧拓扑群 X 中，至少有一个正则哈尔测度存在。

证明。 考虑到 §53 定理 5 和 6，我们只须建立一个不恒等于零并且具有左不变性的容度；然后由 §53 定理 3 可知，由这个容度引出的测度不恒等于零，因而是一个正则哈尔测度。

设 A 是具有非空内部的一个固定的紧集，并设 \mathbf{N} 是由单位元素的一切邻域组成的类。对于 \mathbf{N} 中每一个 U ，我们在全体紧集 \mathbf{C} 的类上定义集函数 λ_U 如下：

$$\lambda_U(C) = \frac{C:U}{A:U}.$$

因为 $C:U \leq (C:A)(A:U)$ ，所以，对于 \mathbf{C} 中每一个 C ，

$$0 \leq \lambda_U(C) \leq C:A.$$

根据定理 1。每一个 λ_U 与一个容度的差别之点只在于它不一定具有可加性。我们要应用康脱对角线法的近代形式，也就是齐霍诺夫关于乘积空间的紧性的定理，来确定出 λ_U 的一个极限，这个极限具有容度的全部性质，包含可加性在内。

对于 \mathbf{C} 中每一个集 C ，我们以闭区间 $[0, C:A]$ 与之对应，并以 Φ 表示全体这种区间的笛卡儿乘积空间（在拓扑学的意义下）。于是， Φ 是一个紧豪司道夫空间， Φ 中的点就是定义在 \mathbf{C} 上的实值函数 ϕ ，并且对于 \mathbf{C} 中每一个 C ， $0 \leq \phi(C) \leq C:A$ 。对于 \mathbf{N} 中每一个 U ，函数 λ_U 就是这个空间里的一个点。

对于 \mathbf{N} 中每一个 U ，我们以记号 $\Lambda(U)$ 表示由一切能使 $V \subset U$ 的函数 λ_V 组成的集，即

$$A(U) = \{\lambda_V : U \supset V \in \mathbf{N}\}.$$

如果 $\{U_1, \dots, U_n\}$ 是由单位元素的邻域组成的任意有限类, 也就是 \mathbf{N} 的任意有限子类, 则 $\bigcap_{i=1}^n U_i$ 也是单位元素的一个邻域, 并且

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \subset U_j, \quad j=1, \dots, n.$$

我們有

$$A\left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^n A(U_i),$$

而由于每一个 $A(U)$ 包含 λ_U , 因而是非空的, 所以由一切形如 $A(U)$ 的集组成的类, 其中 $U \in \mathbf{N}$, 具有有限交的性質. 由 Φ 的紧性可知, 在一切 $A(U)$ 的闭包的交集里存在一个点 λ :

$$\lambda \in \bigcap \overline{A(U)} : U \in \mathbf{N}.$$

我們要証明, λ 就是我們所求的容度.

对于 \mathbf{C} 中每一个 C , 显然有 $0 \leq \lambda(C) \leq C: A < \infty$. 現在我們証明, λ 具有单調性; 我們注意到, 对于 \mathbf{C} 中每一个固定的 C , 由等式 $\xi_C(\phi) = \phi(C)$ 确定的函数 ξ_C 是定义在 Φ 上的連續函数, 因此, 对于任意两个紧集 C 和 D , 集

$$\Delta = \{\phi : \phi(C) \leq \phi(D)\} \subset \Phi$$

是一个閉集. 如果 $C \subset D$, 并且 $U \in \mathbf{N}$, 则 $\lambda_U \in \Delta$, 从而有 $A(U) \subset \Delta$. 因为 Δ 是閉集, 所以 $\lambda \in \overline{A(U)} \subset \Delta$; 于是, λ 具有单調性.

关于 λ 的部分可加性, 可以按照完全相同的方式得到証明; 我們略去这一部分的証明, 轉而証明 λ 具有可加性. 設 C 和 D 是滿足条件 $C \cap D = 0$ 的紧集, 則存在 e 的邻域 U , 使得 $CU^{-1} \cap DU^{-1} = 0$. 如果 $V \in \mathbf{N}$, 并且 $V \subset U$, 則 $CV^{-1} \cap DV^{-1} = 0$, 因而(定理 1)

$$\lambda_V(C \cup D) = \lambda_V(C) + \lambda_V(D).$$

这就是說, 当 $V \subset U$ 时, λ_V 属于閉集

$$\Delta = \{\phi : \phi(C \cup D) = \phi(C) + \phi(D)\},$$

因此 $A(U) \subset \Delta$. 由此可見, $\lambda \in \overline{A(U)} \subset \Delta$, 換一句話說, λ 具有可加性.

再应用一次同样的論点就可以証明 $\lambda(A) = 1$ (因为对于 \mathbf{N} 中

每一个 U 有 $\lambda_U(A) = 1$); 这就说明了集函数 λ (我們已經知道, 它是一个容度) 不恒等于零. 最后, 因为每一个 λ_U 具有左不变性, 所以 λ 具有左不变性. |

(1) 如果我們引进与群 X 相对偶的群 \hat{X} , 就可以由左哈尔测度的存在性导出右哈尔测度的存在性. 按照定义, 群 \hat{X} 具有与 X 相同的元素和拓扑结构; \hat{X} 中两个元素 x 和 y 的乘积 (即 xy) 則規定为 X 中 y 和 x 的乘积 (即 yx).

(2) 哈尔测度显然不是唯一的, 因为, 如果 μ 是一个哈尔测度而 c 是任意的正数, 則 $c\mu$ 也是一个哈尔测度.

(3) 对于 \mathbf{N} 中每一个 U , 設 λ_U 是定理 1 中所定义的集函数, 則对于滿足条件 $C^0 \neq 0$ 的每一个紧集 C ,

$$0 < \frac{1}{A:C} \leq \lambda_U(C).$$

由此可見, 当 $C^0 \neq 0$ 时, $\lambda(C) > 0$.

(4) 下面是一个著名的群的例子, 在这个群里左、右哈尔测度有本質上的区别. 設 X 是由一切形如

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的矩陣組成的集, 其中 $0 < x < \infty$, $-\infty < y < +\infty$; 容易驗証, 对于通常的矩陣乘法, X 构成一个群. 如果按照明显的方式将 X 拓扑化, 也就是将 X 看作欧几里得平面的一个子集 (半平面), 則 X 是一个局部紧拓扑群. 对于 X 中每一个波雷耳集 E , 令

$$\mu(E) = \iint_E \frac{1}{x^2} dx dy, \quad \nu(E) = \iint_E \frac{1}{x} dx dy$$

(式中对于半平面里的勒貝格测度取积分), 則 μ 和 ν 分别是 X 中的左和右哈尔测度. 因为 $\mu(E^{-1}) = \nu(E)$, 所以这个例子說明, 可以存在可測集 E , 使得 $\mu(E) < \infty$ 而 $\mu(E^{-1}) = \infty$.

(5) 設 C 和 D 是两个紧集; 如果 $\mu(C) = \mu(D) = 0$, 則是否一定有 $\mu(CD) = 0$?

(6) 設 μ 是 X 里的哈尔测度, 則 X 为离散的必要和充分条件是: 至少对于 X 中一个点 x , 有 $\mu(\{x\}) \neq 0$.

(7) 每一个局部紧拓扑群 X 满足 §1.10 中所述的條件(參看§57)。

(8) 設 X 里的哈尔測度 μ 是有限測度, 則 X 是紧群。

(9) 設 μ 是 X 里的哈尔測度, 則下面四个条件是互相等价的: (a) X 是 σ -紧群; (b) μ 是全 σ -有限的; (c) 任何不相交的非空波雷耳开集类是可列的; (d) 对于每一个非空波雷耳开集 U , 存在 X 中元素的叙列 $\{x_n\}$, 使得

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n U.$$

§59. 可 測 群

按照定义, 拓扑群就是一个群 X , 它具有滿足某种可分公理的拓扑結構, 并且将 (x, y) 变为 $x^{-1}y$ ($X \times X$ 在 X 上) 的变换是連續的。为了我們应用方便起見, 我們要以另外一个定义来代替它。这个新的定义要求: 由等式 $S(x, y) = (x, xy)$ 确定的 ($X \times X$ 在它本身上的) 变换 S 是一个同胚。两个定义是等价的。事实上, 如果 X 是在原来的定义下的拓扑群, 則 S 是連續的; 又因为 S 显然是一个一一变换, 并且 $S^{-1}(x, y) = (x, x^{-1}y)$, 所以 S^{-1} 也是連續的, 因而 S 是一个同胚。反之, 如果已知 S 是一个同胚, 則 S^{-1} 是連續的, 因而由 S^{-1} 随之以 $X \times X$ 在 X 上的射影所成的变换也是連續的。(在 X 是数直綫并以加法作为群的运算法則的場合, 变换 S 的几何意义很容易想象: 它使平面上每一个点 (x, y) 沿着垂直方向移动一个綫段, 这个綫段的量等于 x 。)

有了上面的討論, 再加上我們已經知道在每一个局部紧拓扑群里有一个哈尔測度存在, 我們現在引进下述与拓扑群相类似的測度論方面的概念。設 σ -有限測度空間 (X, \mathbf{S}, μ) 具有下列性質:

(a) μ 不恒等于零,

(b) X 是一个群,

(c) σ -环 \mathbf{S} 和測度 μ 对于左轉移都是不变的,

(d) 由等式 $S(x, y) = (x, xy)$ 确定的, $X \times X$ 在它本身上的变换 S 是保測性变换,

則称 (X, \mathbf{S}, μ) 是一个可测群。(S 对于左转移的不变性是指, 对于 X 中每一个 x 以及 \mathbf{S} 中每一个 $E, xE \in \mathbf{S}$; 和通常一样, $X \times X$ 的可测子集是指 σ -环 $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ 中的集.)

設 X 是局部紧群, \mathbf{S} 是 X 中全体貝尔集类, μ 是一个哈尔测度. 因为 S 是一个同胚 (因而保持貝尔可测性), 并且 $X \times X$ 中全体貝尔集类与 $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ 重合 (参看 §51 定理 5), 所以 (X, \mathbf{S}, μ) 是一个可测群. 我們在下面对可测群的討論, 其目的在于說明, 只从测度論的观点来研究局部紧拓扑群, 可以得到怎样的結論.

設 X 是任意可测空間 (特別是, 若 X 是任意可测群), 則由等式 $R(x, y) = (y, x)$ 确定的, $X \times X$ 在它本身上的一一变换 R 是保测性变换——要証明这个事实, 只須注意到下述極容易驗証的事实: 如果 E 是可测矩形, 則 $R(E)$ 和 $R^{-1}(E) (=R(E))$ 都是可测矩形. 因为保测性变换的乘积仍是保测性变换, 所以上述事实給出了在一个可测群里的大量保测性变换—— S 和 R 的一切乘幂的乘积. 除了变换 S 以外, 我們还时常要用到它的“反射” $T = R^{-1}SR$; 我們有 $T(x, y) = (yx, y)$.

在本节中我們假定:

μ 和 ν (可能但不一定相等) 是使得 (X, \mathbf{S}, μ) 和 (X, \mathbf{S}, ν) 为可测群的两个测度, R, S 和 T 是前面描述过的保测性变换.

定理 1. 設 E 是 $X \times X$ 的任意子集, 則对于 X 中任意的 x 和 y , 有

$$(S(E))_x = xE_x \quad \text{和} \quad (T(E))^\nu = yE^\nu.$$

証明. 因为下列等式成立:

$$\chi_{S(E)}(x, y) = \chi_E(x, x^{-1}y),$$

并且 $y \in (S(E))_x$ 必須而且只須 $\chi_{S(E)}(x, y) = 1$, $x^{-1}y \in E_x$ 必須而且只須 $\chi_E(x, x^{-1}y) = 1$, 由此即得定理中关于 S 的結論. 关于 T 的結論可以按照类似的方式証明. |

定理 2. 变换 S 和 T 都是从测度空間 $(X \times X, \mathbf{S} \times \mathbf{S}, \mu \times \nu)$ 到

它本身上的保測變換。

證明。設 E 是 $X \times X$ 的可測子集，則由富比尼定理和本節定理 1,

$$\begin{aligned} (\mu \times \nu)(S(E)) &= \int \nu((S(E))_x) d\mu(x) = \int \nu(xE_x) d\mu(x) = \\ &= \int \nu(E_x) d\mu(x) = (\mu \times \nu)(E); \end{aligned}$$

於是, S 保持測度不變。考慮截面 $(T(E))^y$, 按照類似的方式就可以得到定理中關於 T 的結論。 |

定理 3. 設 $Q = S^{-1}RS$, 則

$$(Q(A \times B))_{x^{-1}} = xA \cap B^{-1},$$

並且

$$(Q(A \times B))^{y^{-1}} = \begin{cases} Ay, & \text{若 } y \in B, \\ 0, & \text{若 } y \notin B. \end{cases}$$

證明。我們注意到, $Q(x, y) = (xy, y^{-1})$, 並且 $Q^{-1} = Q$. 因為下列等式成立:

$$\chi_{Q(A \times B)}(x^{-1}, y) = \chi_{A \times B}(x^{-1}y, y^{-1}) = \chi_{xA}(x) \chi_B(y^{-1}),$$

並且 $y \in (Q(A \times B))_{x^{-1}}$ 必須而且只須 $\chi_{Q(A \times B)}(x^{-1}, y) = 1$, $y \in xA \cap B^{-1}$ 必須而且只須 $\chi_{xA}(y) \chi_B(y^{-1}) = 1$, 由此即得定理中第一個結論。又因為下列等式成立:

$$\chi_{Q(A \times B)}(x, y^{-1}) = \chi_{A \times B}(xy^{-1}, y) = \chi_{Ay}(x) \chi_B(y),$$

並且 $x \in (Q(A \times B))^{y^{-1}}$ 必須而且只須 $\chi_{Q(A \times B)}(x, y^{-1}) = 1$, $x \in Ay$ 和 $y \in B$ 必須而且只須 $\chi_{Ay}(x) \chi_B(y) = 1$, 由此即得定理中第二個結論。 |

定理 4. 設 A 是 X 的可測子集 [具有正的測度], 並且 $y \in X$, 則 Ay 是可測集 [具有正的測度], A^{-1} 也是可測集 [具有正的測度]。如果 f 是可測函數, A 是具有正測度的可測集, 對於 X 中每一個 x , 令 $g(x) = f(x^{-1})/\mu(Ax)$, 則 g 是可測函數。

証明。設 B 是包含 y 的任意可測集，則根据定理 3, Ay 是可測集 $Q(A \times B)$ (其中 $Q = S^{-1}RS$) 的一个截口，因此 Ay 是可測集。要証明定理的其余部分，我們利用下述事实： Q 是 $(X \times X, \mathbf{S} \times \mathbf{S}, \mu \times \mu)$ 在它本身上的保測變換。于是，若 $\mu(A) > 0$ ，則根据定理 3, 有

$$0 < (\mu(A))^2 = (\mu \times \mu)(Q(A \times A)) = \int \mu(x^{-1}A \cap A^{-1}) d\mu(x),$$

因而对于 x 的至少一个值， $x^{-1}A \cap A^{-1}$ 是一个具有正測度的可測集。換一句話說，我們已經証明，如果 A 是具有正測度的可測集，則必存在具有正測度的可測集 B 使得 $B \subset A^{-1}$ 。(由此可見，特別是，如果我們能够証明 A^{-1} 是可測集，就立刻可以得到 $\mu(A^{-1}) > 0$ 。) 因为当 $B \subset A^{-1}$ 时有 $y^{-1}B \subset y^{-1}A^{-1}$ ，此外，等式 $\mu(y^{-1}B) = \mu(B)$ 成立，所以再应用一次剛才得到的結果就可以說明，必定存在具有正測度的可測集 C 使得 $C \subset (y^{-1}B)^{-1} \subset (y^{-1}A^{-1})^{-1} = Ay$ 。这就証明了定理中关于 Ay 的全部結論。現在証明 A^{-1} 的可測性。我們注意到，如果 $\mu(A) > 0$ ，則根据定理 3 和剛才得到的結果，我們有

$$\{y: \mu((Q(A \times A))^y) > 0\} = A^{-1}.$$

这就証明了当 $\mu(A) > 0$ 时 A^{-1} 是可測的；如果 $\mu(A) = 0$ ，我們可以选择一个具有正測度并且与 A 不相交的可測集 B ，然后由等式 $A^{-1} = (A \cup B)^{-1} - B^{-1}$ 导出 A^{-1} 的可測性。

由上面得出的結果可知，如果 f 是可測函数，并且 $\hat{f}(x) = f(x^{-1})$ ，則 \hat{f} 也是可測函数。設 A 和 B 是可測集， $f_0(y) = \mu((Q(A \times B))^y)$ ，并且 $\hat{f}_0(y) = f_0(y^{-1})$ ，則函数 f_0 和 \hat{f}_0 都是可測的，根据定理 3 就有

$$\hat{f}_0(y) = \mu(Ay) \chi_B(y).$$

換一句話說，我們已經証明，如果 $h(y) = \mu(Ay)$ ，則函数 h 在每一个可測集上是可測的，因而 $\frac{1}{h}$ 也具有同样的性質。 |

定理 5. 設 A 和 B 是具有正測度的可測集，則存在具有正測

度的可測集 C_1 和 C_2 以及元素 x_1, y_1, x_2 和 y_2 , 使得

$$x_1 C_1 \subset A, \quad y_1 C_1 \subset B, \quad C_2 x_2 \subset A, \quad C_2 y_2 \subset B.$$

証明。如果 $\mu(B) > 0$, 則 $\mu(B^{-1}) > 0$, 因而

$$(\mu \times \mu)(A \times B^{-1}) = \mu(A)\mu(B^{-1}) > 0.$$

由定理 3 可知, 对于 X 中每一个 x , 集 $x^{-1}A \cap B$ 是可測的, 而对于 X 中至少一个 x , 这个集具有正的測度。設 x_1 能使 $\mu(x_1^{-1}A \cap B) > 0$, 并設 $y_1 = e$, 則若令 $C_1 = x_1^{-1}A \cap B$, 就有 $x_1 C_1 \subset A$ 以及 $y_1 C_1 \subset B$ 。

对集 A^{-1} 和 B^{-1} 应用这个結果, 我們可以找到集 C_0 和点 x_0, y_0 , 使得 $x_0 C_0 \subset A^{-1}$ 和 $y_0 C_0 \subset B^{-1}$; 然后我們可以令 $C_2 = C_0^{-1}$, $x_2 = x_0^{-1}, y_2 = y_0^{-1}$ 。 |

定理 6. 設 A 和 B 是可測集, 并設 $f(x) = \mu(x^{-1}A \cap B)$, 則 f 是可測函数, 并且

$$\int f d\mu = \mu(A)\mu(B^{-1}).$$

如果 $g(x) = \mu(xA \Delta B)$, 并且 $\varepsilon < \mu(A) + \mu(B)$, 則集 $\{x: g(x) < \varepsilon\}$ 是可測的。

定理的前半部有时称为**平均定理**。

証明。定理的前半部可以由下述命題导出: 如果 $Q = S^{-1}RS$, 則 Q 是 $(X \times X, \mathbf{S} \times \mathbf{S}, \mu \times \mu)$ 在它本身上的一个保測变换, 并且

$$f(x) = \mu((Q(A \times B^{-1}))_x).$$

如果 $\hat{f}(x) = f(x^{-1})$, 則 \hat{f} 是可測函数。利用这个結果以及下列等式:

$$\{x: g(x) < \varepsilon\} = \{x: \hat{f}(x) > \frac{1}{2}(\mu(A) + \mu(B) - \varepsilon)\},$$

就得到定理后半部的結論。 |

(1) 两个可測群的笛卡兒乘积是不是可測群?

(2) 設 X 是一个紧群, 它的势大于連續統的势, μ 是 X 上的哈尔測度,

則 (X, \mathbf{S}, μ) 不是可測群. (提示: 令 $D = \{(x, y) : x = y\} = \mathbf{S}(X \times \{e\})$. 假定 $D \in \mathbf{S} \times \mathbf{S}$, 則存在矩形的可列类 \mathbf{R} 使得 $D \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$. 設 \mathbf{E} 是由 \mathbf{R} 中矩形的边組成的[可列]类. 因为 $D \in \mathbf{S}(\mathbf{E}) \times \mathbf{S}(\mathbf{E})$, 所以 D 的每一个截口屬於 $\mathbf{S}(\mathbf{E})$. 但根据 5.9c, $\mathbf{S}(\mathbf{E})$ 的势不大于連續統的势, 这与关于 X 的势的假設条件相矛盾.)

(3) 設 μ 是局部紧群 X 上的哈尔测度, E 是任意貝尔集, x 是 X 中任意的元素; 如果下列四个数

$$\mu(E), \mu(xE), \mu(Ex) \text{ 和 } \mu(E^{-1})$$

中任意一个为零, 則其余三个也都为零.

(4) 設 (X, \mathbf{S}, μ) 是可測群, 其中 μ 是全有限测度; 如果 A 是可測集, 并且对于 X 中每一个 x 有 $\mu(xA - A) = 0$, 則或是 $\mu(A) = 0$, 或是 $\mu(X - A) = 0$. (提示: 对 A 和 $X - A$ 应用平均定理.) 即使不假設 μ 为有限, 这个結果也成立; 用各态歷經論的話來說, 就是: 如果將可測群看作在其本身上的保測变换群, 則这个群具有度量推移性.

(5) 設 μ 是紧群 X 上的哈尔测度, 則对于每一个貝尔集 E 和 X 中每一个 x ,

$$\mu(E) = \mu(xE) = \mu(Ex) = \mu(E^{-1}).$$

§60. 哈尔测度的唯一性

本节的目的是要証明, 一个可測群里的哈尔测度本質上是唯一的.

定理 1. 設 μ 和 ν 是使得 (X, \mathbf{S}, μ) 和 (X, \mathbf{S}, ν) 为可測群的两个测度, E 是 \mathbf{S} 中的集, 并且 $0 < \nu(E) < \infty$, 則对于定义在 X 上的每一个非負可測函数 f ,

$$\int f(x) d\mu(x) = \mu(E) \int \frac{f(y^{-1})}{\nu(Ey)} d\nu(y).$$

在后面关于唯一性的証明里, 我們需要引用的乃是这个定理的質的方面: 每一个 μ -积分可以表为 ν -积分的形状.

証明. 令 $g(y) = f(y^{-1})/\nu(Ey)$, 由上节的結果可知, 如果 f 是

非負可測函数, 則 g 也是非負可測函数. 和前面一样, 令

$$S(x, y) = (x, \tau y), \quad T(x, y) = (yx, y),$$

則在測度空間 $(X \times X, \mathbf{S} \times \mathbf{S}, \mu \times \nu)$ 里 S 和 T 都是保測變換, 因而 $S^{-1}T$ 也是保測變換. 因為 $S^{-1}T(x, y) = (yx, x^{-1})$, 所以根據富比尼定理有

$$\begin{aligned} \mu(E) \int g(y) d\nu(y) &= \int \chi_E(x) d\mu(x) \int g(y) d\nu(y) = \\ &= \int \chi_E(x) g(y) d(\mu \times \nu)(x, y) = \\ &= \iint \chi_E(yx) g(x^{-1}) d\nu(y) d\mu(x) = \\ &= \int g(x^{-1}) \nu(Ex^{-1}) d\mu(x). \end{aligned}$$

但 $g(x^{-1}) \nu(Ex^{-1}) = f(x)$, 定理於是證明完畢. \blacksquare

定理 2. 設 μ 和 ν 是使得 (X, \mathbf{S}, μ) 和 (X, \mathbf{S}, ν) 為可測群的兩個測度, E 是 \mathbf{S} 中的集, 並且 $0 < \nu(E) < \infty$, 則對於 \mathbf{S} 中每一個 F ,

$$\mu(E) \nu(F) = \nu(E) \mu(F).$$

我們指出, 這個結果事實上就是唯一性定理. 定理斷言: 對於 \mathbf{S} 中每一個 F , $\mu(F) = c \nu(F)$, 其中 $c = \mu(E) / \nu(E)$ 是一個非負的有限常數; 換一句話說, μ 和 ν 的區別只在一個常數因子.

證明. 設 f 是 F 的特征函数. 因為特別是當測度 μ 和 ν 相等時定理 1 也成立, 所以我們有

$$\int f(x) d\nu(x) = \nu(E) \int \frac{f(y^{-1})}{\nu(Ey)} d\nu(y).$$

兩端乘以 $\mu(E)$ 並應用定理 1, 我們得到

$$\mu(E) \int f(x) d\nu(x) = \nu(E) \int f(x) d\mu(x). \quad \blacksquare$$

定理 3. 設 μ 和 ν 是局部緊拓撲群 X 上的正則哈爾測度, 則存在正的有限常數 c , 使得對於每一個波雷耳集 E , $\mu(E) = c\nu(E)$.

証明. 如果 S_0 是 X 中全体貝尔集类, 則 (X, S_0, μ) 和 (X, S_0, ν) 都是可測群, 因而根据定理 2, 对于每一个貝尔集 E , $\mu(E) = c\nu(E)$, 其中 c 是一个非負的有限常数; 选任意有界貝尔开集作为 E , 我們得到 $c > 0$. 如果任意两个正則波雷耳测度 (例如 μ 和 ν) 在一切貝尔集上相等, 則它們在一切波雷耳集上也相等 (参看 §52 定理 8). \blacksquare

(1) 一切非零实数乘法群中的哈尔测度对于勒貝格测度是絕對連續的; 它的拉东-尼古丁导数是什么?

(2) 設 μ 和 ν 分别是局部紧群 X 和 Y 中的哈尔测度, λ 是 $X \times Y$ 中的哈尔测度, 則在 $X \times Y$ 中全体貝尔集类上 λ 是 $\mu \times \nu$ 与一个常数因子的乘积.

(3) 在 59.4 中建立起来的度量推移性可以用来証明具有有限测度的可測群中哈尔测度的唯一性定理. 首先設 μ 和 ν 都是左不变的测度, 并且 $\nu \ll \mu$; 于是, 存在非負可积函数 f , 使得对于每一个可測集 E ,

$$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu(x).$$

由此有

$$\nu(yE) = \int_{yE} f(x) d\mu(x) = \int_E f(y^{-1}x) d\mu(x),$$

又因 ν 是左不变的, 所以 $f(x) = f(y^{-1}x)[\mu]$. 令 $N_t = \{x: f(x) < t\}$, 則

$$\mu(yN_t - N_t) = \mu(\{x: f(y^{-1}x) < t\} - \{x: f(x) < t\}) = 0,$$

因此, 对于每一个实数 t , 或是 $\mu(N_t) = 0$, 或是 $\mu(N_t^c) = 0$. 这就說明了, f 几乎处处等于一个常数 $[\mu]$, 因而 $\nu = c\mu$. 在一般的場合, 就是不假定 $\nu \ll \mu$ 的場合, 我們以 $\mu + \nu$ 来代替 μ . 正如同在 59.4 中一样, 上面的論点也可以应用到测度不一定为有限的場合.

(4) 設 (X, S, μ) 是可測群, E 和 F 是可測集, 則存在 X 中元素的两个叙列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 以及可測集的叙列 $\{A_n\}$, 使得 (a) $\{x_n A_n\}$ 和 $\{y_n A_n\}$ 分别是 E 和 F 的不相交子集的叙列, (b) 可測集

$$E_0 = E - \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n A_n \quad \text{和} \quad F_0 = F - \bigcup_{n=1}^{\infty} y_n A_n$$

二者中至少有一个的测度为零. (提示: 如果 E 或 F 的测度为零, 命題显然

成立. 如果 E 和 F 的測度都是正的, 应用 §59 定理 5, 选取 x_1, y_1 和 A_1 , 使得 $\mu(A_1) > 0$, $x_1 A_1 \subset E$, $y_1 A_1 \subset F$. 如果 $E - x_1 A_1$ 或 $F - y_1 A_1$ 的測度为零, 則命題成立; 如果二者的測度都是正的, 則又可应用 §59 定理 5. 利用可列或超限歸納法可以完成命題的證明.)

因为这个結果对于一切左不变測度都成立, 所以利用它又可以給出唯一性定理的另外一个證明. 設 μ 和 ν 都是左不变測度; 考虑下列对应关系: 对于每一个可測集 E , 以 $\mu(E)$ 与 $\nu(E)$ 相对应. 可以証明, 这个对应关系是 μ 的一切值的集与 ν 的一切值的集之間的一个一一对应关系, 并且是無歧义地确定的. 对于这个对应关系加以更詳尽但并不特別困难的考察, 就可以得到唯一性定理.

(5) 設 μ 是局部紧群 X 上的正則哈尔測度. 对于 X 中任意的 x , 由等式 $\mu_x(E) = \mu(Ex)$ 确定的集函数 μ_x , 其中 E 是波雷耳集, 也是一个正則哈尔測度. 由唯一性定理可知, $\mu(Ex) = \Delta(x)\mu(E)$, 其中 $0 < \Delta(x) < \infty$.

$$(5a) \quad \Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y); \Delta(e) = 1.$$

$$(5b) \quad \text{如果 } x \text{ 属于群 } X \text{ 的中心, 則 } \Delta(x) = 1.$$

(5c) 如果 x 是一个交换子, 或者, 更一般地, 如果 x 属于由 X 中全体交换子組成的子群, 則 $\Delta(x) = 1$.

(5d) 函数 Δ 是連續的. (提示: 令 C 为具有正測度的紧集, ε 是任意正数. 因为測度 μ 是正則的, 所以存在有界开集 U , 使得 $C \subset U$ 并且 $\mu(U) \leq (1 + \varepsilon)\mu(C)$. 設 V 是 e 的邻域, 使得 $V = V^{-1}$ 并且 $CV \subset U$; 如果 $x \in V$, 則有

$$\Delta(x)\mu(C) = \mu(Cx) \leq \mu(U) \leq (1 + \varepsilon)\mu(C)$$

和

$$\frac{\mu(C)}{\Delta(x)} = \mu(Cx^{-1}) \leq \mu(U) \leq (1 + \varepsilon)\mu(C),$$

因此

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \leq \Delta(x) \leq 1 + \varepsilon.$$

(5e) 我們得到紧群 X 上的左不变測度和右不变測度相等的另一个証明; 因为, 由 (5a) 和 (5d) 中的結果可知, $\Delta(X)$ 是正实数乘法群的一个紧子群.

(5f) 对于每一个波雷耳集 E ,

$$\mu(E^{-1}) = \int_E \frac{1}{\Delta(x)} d\mu(x).$$

(提示: 根据右不变测度的唯一性定理, 有

$$\mu(E^{-1}) = c \int_E \frac{1}{\Delta(x)} d\mu(x),$$

其中 c 是某个正的有限常数. 因此, 对于每一个可积函数 f ,

$$\int f(x^{-1}) d\mu(x) = c \int \frac{f(x)}{\Delta(x)} d\mu(x).$$

将 $f(x)$ 换为 $f(x^{-1})$, 令 $g(x^{-1}) = f(x^{-1})/\Delta(x)$, 对 g 应用上面的等式, 就有

$$\frac{1}{c} \int g(x^{-1}) d\mu(x) = c \int g(x^{-1}) d\mu(x).$$

(5g) 如果 $\Gamma(x)$ 是与 $\Delta(x)$ 相类似的数: Γ 由等式 $\nu(xE) = \Gamma(x)\nu(E)$ 确定, 其中 ν 是右不变测度, 则 $\Gamma(x) = \frac{1}{\Delta(x)}$.

(6) 设局部紧群 X 上不恒等于零的贝尔测度 ν 具有下述性质: 对于 X 中每一个固定的 x , 由等式 $\nu_x(E) = \nu(xE)$ 确定的测度 ν_x 是 ν 与一个非零常数因子的乘积; 我们称 ν 是一个相对不变测度. 测度 ν 为相对不变测度的必要和充分条件是

$$\nu(E) = \int_E \phi(y) d\mu(y),$$

其中 μ 是哈尔测度, ϕ 是 X 在正实数乘法群中的一个同态. (提示: 如果 ϕ 是非负的, 连续的, $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, 并且

$$\nu(E) = \int_E \phi(y) d\mu(y),$$

则

$$\begin{aligned} \nu(xE) &= \int_{xE} \phi(y) d\mu(y) = \int_E \phi(xy) d\mu(y) = \\ &= \int_E \phi(x)\phi(y) d\mu(y) = \phi(x)\nu(E). \end{aligned}$$

反之, 如果 $\nu(xE) = \phi(x)\nu(E)$, 则 (参看 (5)) $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, 并且 ϕ 是连续的. 于是, 积分

$$\tilde{\mu}(E) = \int_E \phi(y^{-1}) d\nu(y)$$

存在, 根据唯一性定理就有 $\tilde{\mu} = \mu$.)

(7) 設 μ 是定义在局部紧群 X 中全体貝尔集类 \mathbf{S}_0 上的 σ -有限左不变测度, 則 μ 是哈尔测度(在貝尔集上) 与一个常数因子的乘积; 由此可知, 特别是, μ 在紧集上为有限. (提示: 如果 μ 不恆等于零, 則 (X, \mathbf{S}_0, μ) 是一个可測群.)

第十二章

群里的測度和拓扑

§61. 以測度表拓扑

在上一章里我們已經證明，在每一個局部紧群里可以定出一個左不變的貝爾測度（或左不變的正則波雷耳測度），並且這個測度在實質上是唯一的。在這一章里我們要揭露，對於這種群來說，它的測度論和拓扑方面的性質之間有着極其密切的關係。特別是，在這一節里我們要建立一些定理，這類定理不但告訴我們測度可以由拓扑來確定，而且在相反的方面也說明了拓扑方面的一切概念都可以用測度論的術語來描述。在本節中我們假定：

X 是局部紧拓扑群， μ 是 X 上的正則哈爾測度，並且 $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$ ，其中 E 和 F 是任意的波雷耳集。

定理 1. 設 E 是測度為有限的波雷耳集，對於 X 中每一個 x ，令 $f(x) = \rho(xE, E)$ ，則 f 是連續函數。

證明. 設 $\varepsilon > 0$ ；因為 μ 是正則的，所以存在紧集 C 使得 $\rho(E, C) < \frac{\varepsilon}{4}$ ，並存在包含 C 的波雷耳開集 U 使得 $\rho(U, C) < \frac{\varepsilon}{4}$ 。設 V 是 e 的鄰域，滿足條件 $V = V^{-1}$ 和 $VC \subset U$ 。如果 $y^{-1}x \in V$ ，則 $x^{-1}y \in V$ ，因而

$$\begin{aligned} \rho(xC, yC) &= \mu(xC - yC) + \mu(yC - xC) = \\ &= \mu(y^{-1}xC - C) + \mu(x^{-1}yC - C) \leq \\ &\leq 2\mu(VC - C) \leq 2\mu(U - C) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

于是

$$|\rho(xE, E) - \rho(yE, E)| \leqslant \\ \leqslant \rho(xE, yE) \leqslant \rho(xE, xC) + \rho(xC, yC) + \rho(yC, yE) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

由定理 1 可知, 对于每一个测度为有限的波雷耳集 E 以及每一个正数 ε , $\{x: \rho(xE, E) < \varepsilon\}$ 是开集。下面的定理说明, 存在充分多的这类开集。

定理 2. 设 U 是 e 的任意邻域, 则存在具有正的有限测度的贝尔集 E 以及正数 ε , 使得

$$\{x: \rho(xE, E) < \varepsilon\} \subset U.$$

证明。设 V 是 e 的邻域, 满足条件 $VV^{-1} \subset U$, 并设 E 是具有正的有限测度的贝尔集, 满足条件 $E \subset \bar{V}$ 。如果 $0 < \varepsilon < 2\mu(E)$, 则 $\{x: \rho(xE, E) < \varepsilon\} \subset \{x: xE \cap E \neq \emptyset\} = EE^{-1} \subset VV^{-1} \subset U$ 。 \blacksquare

由定理 1 和定理 2 可知, 由一切形如 $\{x: \rho(xE, E) < \varepsilon\}$ 的集组成的类是一个在 e 处的基; 因此, 要用测度论的术语来描述拓扑方面的一切概念, 的确是可能的。作为这种描述的一个详尽的例子, 我们现在对有界性给以测度论的表述。

定理 3. 集 A 为有界的必要和充分条件是: 存在具有正的有限测度的贝尔集 E 以及满足条件 $0 \leqslant \varepsilon < 2\mu(E)$ 的数 ε , 使得

$$A \subset \{x: \rho(xE, E) \leqslant \varepsilon\}.$$

证明。为了说明条件的充分性, 我们要证明, 如果 E 是具有正的有限测度的贝尔集, 并且 $0 \leqslant \varepsilon < 2\mu(E)$, 则集 $\{x: \rho(xE, E) \leqslant \varepsilon\}$ 是有界的。设 δ 是一个正数, 满足条件 $4\delta < 2\mu(E) - \varepsilon$, 并设 C 是 E 的紧子集, 满足条件 $\mu(E) - \delta < \mu(C)$ 。于是

$$\rho(xC, C) \leqslant \rho(xC, xE) + \rho(xE, E) + \\ + \rho(E, C) < 2\delta + \rho(xE, E),$$

因而

$$\{x: \rho(xE, E) \leqslant \varepsilon\} \subset \{x: \rho(xC, C) \leqslant \varepsilon + 2\delta\}.$$

因为 $\varepsilon + 2\delta < 2\mu(C)$, 所以有

$$\{x: \rho(xE, E) \leq \varepsilon\} \subset \{x: \mu(xC \cap C) \neq 0\} \subset CC^{-1}.$$

現在證明条件的必要性。設 C 是紧集，滿足条件 $A \subset C$ ，并設 D 是测度为正的紧集。選擇具有正的有限测度的貝尔集 E 使 $E \supset C^{-1}D \cup D$ 。因为 $D \subset E$ ，而当 $x \in C$ 时有 $D \subset xC^{-1}D \subset xE$ ，所以，当 $x \in C$ 时， $D \subset xE \cap E$ 。于是

$$A \subset C \subset \{x: D \subset xE \cap E\} \subset \{x: \rho(xE, E) \leq \varepsilon\},$$

其中 $\varepsilon = 2(\mu(E) - \mu(D))$ 。 ▮

(1) 如果將 $\rho(xE, E)$ 換为 $\mu(xE \cap F)$ ，其中 E 和 F 是具有正的有限测度的貝尔集，則与定理 1、2 和 3 相类似的定理都成立。

(2) 設 E 是一个固定的测度为有限的波雷耳集，令 $f(x) = xE$ ，則 f 是从 X 到由一切测度为有限的可測集組成的度量空間中的連續函数。

(3) 設 E 是测度为正的任意波雷耳集，則存在 e 的邻域 U ，使得 $U \subset EE^{-1}$ 。

(4) X 为可分空間的必要和充分条件是：由一切测度为有限的可測集組成的度量空間是可分的。

(5) 設 E 是任意有界波雷耳集，对于 X 中每一个 x 以及 e 的每一个有界邻域 U ，令

$$f_U(x) = \frac{\mu(E \cap Ux)}{\mu(Ux)},$$

則当 $U \rightarrow e$ 时 f_U 平均收敛(因而依测度收敛)到 χ_E 。換一句話說，对于每一个正数 ε ，存在 e 的有界邻域 V ，使当 $U \subset V$ 有

$$\int |f_U - \chi_E| d\mu < \varepsilon.$$

这个結果可以叫做拓扑群的稠密性定理。(提示：設 V 是 e 的邻域，滿足下列条件：当 $y \in V$ 时 $\rho(yE, E) < \frac{\varepsilon}{2}$ 。如果 $U \subset V$ ，而 F 是任意波雷耳集，則

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &> \frac{1}{\mu(U)} \int_U \int_F |\chi_E(yx) - \chi_E(x)| d\mu(x) d\mu(y) \geq \\ &\geq \left| \int_F d\mu(x) \int_U \frac{1}{\mu(U)} \chi_{E_x^{-1}}(y) d\mu(y) - \int_F \chi_E(x) d\mu(x) \int_U \frac{d\mu(y)}{\mu(U)} \right| = \\ &= \left| \int_F (f_U(x) - \chi_E(x)) d\mu(x) \right|. \end{aligned}$$

[我們記得, 对于任意波雷耳集 A 和 B 以及 X 中每一个 x , 有 $\frac{\mu(A)}{\mu(B)} = \frac{\mu(Ax)}{\mu(Bx)}$; 参看 60.5.] 首先对

$$F = \{x: f_U(x) - \lambda_E(x) > 0\}$$

然后对

$$F = \{x: f_U(x) - \lambda_E(x) < 0\}$$

应用这个結果, 就得到命題的結論.)

(6) 設 ν 是定义在 X 中全体貝尔集类上的任意有限广义測度, 則 (参看 17.3) 存在貝尔集 N_ν , 使得对于每一个貝尔集 E , 有 $\nu(E) = \nu(E \cap N_\nu)$. 如果 λ 和 ν 是两个这样的广义測度, 对于每一个貝尔集 E , 令

$$(\lambda * \nu)(E) = \iint_{N_\lambda \times N_\nu} \lambda_E(x, y) d(\lambda \times \nu)(x, y),$$

我們称 $\lambda * \nu$ 为 λ 和 ν 的結合. 如果 λ 和 ν 分别是可积函数 f 和 g 的不定积分 (对于哈尔測度 μ), 則 $\lambda * \nu$ 是函数 h 的不定积分, 其中

$$h(y) = \int f(x)g(x^{-1}y) d\mu(x).$$

(7) 設 λ 和 ν 是有限广义測度 (参看 (6)), 則

$$(\lambda * \nu)(E) = \int_{N_\lambda} \nu(x^{-1}E) d\lambda(x).$$

如果群 X 是阿倍尔群, 則 $\lambda * \nu = \nu * \lambda$.

(8) 設 X 是局部紧, σ -紧的阿倍尔群, λ 和 ν 是定义在 X 中全体貝尔集类上的有限測度, 則

$$\int \lambda(xE) d\nu(x) = \int \nu(xE^{-1}) d\lambda(x).$$

(提示: 如果 $\bar{\nu}(E) = \nu(E^{-1})$, $\bar{\lambda}(E) = \lambda(E^{-1})$, 則

$$\int \lambda(xE) d\nu(x) = \int \lambda(x^{-1}E) d\bar{\nu}(x),$$

$$\int \nu(xE^{-1}) d\lambda(x) = \int \bar{\nu}(x^{-1}E) d\lambda(x),$$

由关系式 $\lambda * \bar{\nu} = \bar{\nu} * \lambda$ 即得命題的結論.)

(9) 設 f 和 g 是定义在数直綫上的两个有界連續单調函数, 則 (参看 25.4)

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

即, 通常分部积分的等式成立. (提示: 設 λ 和 ν 分别是由 f 和 g 引出的測度, 对 λ 和 ν 应用 (8), 其中令 $E = \{x: -\infty < x < 0\}$.)

§62. 魏尔拓扑

我們已經看到, 如果把局部紧群里的可測性了解为按照貝尔意义的可測性, 則每一个局部紧群是一个可測群; 此外, 局部紧群的拓扑由它的測度論結構唯一地确定. 在本节里我們要考虑反面的問題: 能不能在可測群里引进一种自然的拓扑結構, 使它成为一个局部紧拓扑群? 我們將要看到, 对于这个問題的回答, 在實質上是肯定的; 以下我們进入細节的精确描述.

在本节中, 我們假定所考虑的是一个固定的可測群 (X, \mathbf{S}, μ) ; 和通常一样, 我們令 $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$, 其中 E 和 F 是任意的可測集. 以記号 \mathbf{A} 表示由一切形如 EE^{-1} 的集組成的类, 其中 E 是具有正的有限測度的可測集; 以記号 \mathbf{N} 表示由一切形如 $\{x: \rho(xE, E) < \varepsilon\}$ 的集組成的类, 其中 E 是具有正的有限測度的可測集, ε 是滿足条件 $0 < \varepsilon < 2\mu(E)$ 的实数.

定理 1. 如果 $N = \{x: \rho(xE, E) < \varepsilon\} \in \mathbf{N}$, 則每一个具有正測度的可測集 F 包含具有正的有限測度的可測子集 G , 使得 $GG^{-1} \subset N$.

証明. 只須考虑 F 具有有限測度的情形. 如果 $T(x, y) = (yx, y)$, 則 $T(E \times F)$ 是 $X \times X$ 中具有有限測度的可測集; 因此, 在 $X \times X$ 中存在集 A , 使得 A 是有限多个可測矩形的併集, 并且

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{4} \mu(F) &> \rho(T(E \times F), A) = \\ &= \iint |\chi_{T(E \times F)}(x, y) - \chi_A(x, y)| d\mu(x) d\mu(y) \geq \\ &\geq \int_F \int |\chi_E(y^{-1}x) - \chi_A(x, y)| d\mu(x) d\mu(y). \end{aligned}$$

令

$$C = \left\{ y : \int |\chi_E(y^{-1}x) - \chi_A(x, y)| d\mu(x) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

則 $\mu(F \cap C) \leq \frac{1}{2}\mu(F)$, 因而

$$\mu(F - C) \geq \frac{1}{2}\mu(F) > 0.$$

如果 $y \in F - C$, 則

$$\rho(yE, A^y) = \int |\chi_E(y^{-1}x) - \chi_A(x, y)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 A 是有限多个可測矩形的併集, 所以形如 A^y 的集中只有有限多个是相异的; 我們以 A_1, \dots, A_n 来表示它們. 于是, 我們所得到的結果可以用下面的关系式来表示:

$$F - C \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ y : \rho(yE, A_i) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

由于 $\frac{\varepsilon}{2} < \mu(E) = \mu(yE)$, 因此, 根据 §59 定理 6,

$$\left\{ y : \rho(yE, A_i) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \quad i = 1, \dots, n$$

都是可測集; 又因为 $\mu(F - C) > 0$, 所以上面这些集中至少有一个与 $F - C$ 交于一个測度为正的集. 令

$$G_0 = (F - C) \cap \left\{ y : \rho(yE, A_i) < \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

我們选定 i 的一个值使得 $\mu(G_0) > 0$. 显然, G_0 是具有正的有限測度的可測集, 并且 $G_0 \subset F$. 如果 $y_1 \in G_0^{-1}$, $y_2 \in G_0^{-1}$, 則

$$\begin{aligned} \rho(y_1 y_2^{-1} E, E) &= \rho(y_2^{-1} E, y_1^{-1} E) \leq \\ &\leq \rho(y_2^{-1} E, A_i) + \rho(y_1^{-1} E, A_i) < \varepsilon. \end{aligned}$$

因而 $G_0^{-1} G_0 \subset N$. 換一句話說, 我們已經証明了, 存在集 G_0 , 它具有定理的結論中所述除去关系式 $GG^{-1} \subset N$ 以外的全部性質; 而与这个关系式相对应, 我們有 $G_0^{-1} G_0 \subset N$. 如果現在对 F^{-1} 应用这个

結果，我們得到 F^{-1} 的一个子集，記为 G^{-1} ；于是，集 G 具有定理結論中所述的全部性質。 ▮

定理 1 断言，特別是， \mathbf{N} 中每一个集包含 \mathbf{A} 中某个集。下面是反方向的定理。

定理 2. 如果 $A = EE^{-1} \in \mathbf{A}$, $0 < \varepsilon < 2\mu(E)$, 并且

$$N = \{x: \rho(xE, E) < \varepsilon\},$$

則有 $N \in \mathbf{N}$ 和 $N \subset A$.

証明. 显然, $N \in \mathbf{N}$; 要証明 $N \subset A$, 只須注意到关系式 $N \subset \{x: xE \cap E \neq \emptyset\} = EE^{-1}$. ▮

定理 3. 如果 $N = \{x: \rho(xE, E) < \varepsilon\} \in \mathbf{N}$, 則 N 是測度为正的可測集. 如果 $\mu(E^{-1}) < \infty$, 則 $\mu(N) < \infty$.

証明. 因为

$$N = \left\{x: \mu(xE \cap E) > \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

由 §59 定理 6 即得 N 的可測性. 要証明 $\mu(N) > 0$, 我們应用定理 1. 設 G 是具有正的測度并滿足条件 $GG^{-1} \subset N$ 的可測集, 則特别是对于 G 中任意的 y , 有 $Gy^{-1} \subset N$. 定理的最后部分可由关系式

$$\begin{aligned} \left(\mu(E) - \frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(N) &\leq \int_N \mu(xE \cap E) d\mu(x) \leq \\ &\leq \int \mu(xE \cap E) d\mu(x) = \mu(E)\mu(E^{-1}) \end{aligned}$$

导出. ▮

定理 4. 設 A 和 B 是 \mathbf{A} 中任意的两个集, 則在 \mathbf{A} 中存在集 C , 使得 $C \subset A \cap B$.

証明. 設 E 和 F 是具有正的有限測度的可測集, 使得 $A = EE^{-1}$ 和 $B = FF^{-1}$. 根据 §59 定理 5, 存在具有正的有限測度的可測集 G , 并存在 X 中的元素 x 和 y , 使得

$$Gx \subset E \text{ 和 } Gy \subset F.$$

如果 $C = GG^{-1}$, 則 $C \in \mathbf{A}$, 并且

$$C = (Gx)(Gx)^{-1} \subset A, \quad C = (Gy)(Gy)^{-1} \subset B. \quad \downarrow$$

在引进前面提到的 X 中的拓扑以前, 我們还需要定义一个概念. 我們記得, 我們的可測群的定义是通过拓扑群的連續性而引进的, 在定义里絲毫也沒有提到可分公理; 而可分公理在拓扑群的定义里是一个主要的构成部分. 拓扑群里可分公理的一种表达方式如下: 对于群中异于 e 的任意元素 x , 存在 e 的邻域 U 使得 $x \in U$. 根据以上的考虑以及 §61 定理 1 和 2, 我們給出下面的定义: 如果对于可測群 X 中异于 e 的任意元素 x , 存在具有正的有限測度的可測集 E , 使得 $\rho(xE, E) > 0$, 則称 X 具有可分性.

定理 5. 設 X 具有可分性, 如果取类 \mathbf{N} 作为在 e 处的基, 則对于如此定出的拓扑而言, X 是一个拓扑群.

我們称可測群 X 的这个拓扑結構为魏尔拓扑.

証明. 我們將証明, \mathbf{N} 滿足 §0 中所述的条件 (a), (b), (c), (d) 和 (e).

設 $x_0 \in X$, $x_0 \neq e$, 并設 E 是具有正的有限測度的可測集, 使得 $\rho(x_0E, E) > 0$. 如果 ε 是滿足条件 $0 < \varepsilon < \rho(x_0E, E)$ 的正数, 則 $\varepsilon < 2u(E)$. 由此可見, 若令 $N = \{x: \rho(xE, E) < \varepsilon\}$, 則 $M \in \mathbf{N}$, 并且显然有 $x_0 \in N$.

如果 $N \in \mathbf{N}$, $M \in \mathbf{N}$, 則由定理 1 可知, 在 \mathbf{A} 中存在集 A 和 B , 使得 $A \subset N$ 和 $B \subset M$. 由定理 4 可知, 在 \mathbf{A} 中存在集 C , 使得 $C \subset A \cap B$; 应用定理 2, 我們得到 \mathbf{N} 中的集 K , 滿足关系式

$$K \subset C \subset A \cap B \subset N \cap M.$$

如果 $N = \{x: \rho(xE, E) < \varepsilon\}$, 我們令 $M = \left\{x: \rho(xE, E) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. 对于 M 中任意两个元素 x_0 和 y_0 , 我們有

$$\begin{aligned} \rho(x_0y_0^{-1}E, E) &\leq \rho(y_0^{-1}E, E) + \rho(x_0^{-1}E, E) = \\ &= \rho(y_0E, E) + \rho(x_0E, E) < \varepsilon, \end{aligned}$$

因而 $MM^{-1} \subset N$.

如果 $N \in \mathbf{N}$, $x \in X$, 則由定理 1 可知, 存在具有正的有限測度的可測集 E , 使得 $EE^{-1} \subset N$. 对 \mathbf{A} 中的集 $(xE)(xE)^{-1}$ 应用定理 2, 我們得到 \mathbf{N} 中的集 M , 使得

$$M \subset (xE)(xE)^{-1} = xEE^{-1}x^{-1} \subset xNx^{-1}.$$

最后, 如果 $N = \{x: \rho(xE, E) < \varepsilon\} \in \mathbf{N}$, 而 $x_0 \in N$, 則 $\rho(x_0E, E) < \varepsilon$. 因为 $\varepsilon < 2\mu(E)$, 所以 $\varepsilon - \rho(x_0E, E) < 2\mu(x_0E)$; 由此可見, 如果

$$M = \{x: \rho(xx_0E, x_0E) < \varepsilon - \rho(x_0E, E)\},$$

則 $M \in \mathbf{N}$. 因为

$$Nx_0^{-1} = \{xx_0^{-1}: \rho(xE, E) < \varepsilon\} = \{x: \rho(xx_0E, E) < \varepsilon\},$$

所以, 对于 M 中每一个 x , 有

$$\begin{aligned} \rho(xx_0E, E) &\leq \rho(xx_0E, x_0E) + \rho(x_0E, E) < \\ &< (\varepsilon - \rho(x_0E, E)) + \rho(x_0E, E) = \varepsilon. \end{aligned}$$

于是 $x \in Nx_0^{-1}$, 因而 $Mx \subset N$. \blacksquare

定理 6. 設 X 是具有可分性的可測群, 則对于它的魏尔拓扑而言, X 是局部有界的. 如果可測集 E 具有非空的內部, 則 $\mu(E) > 0$; 如果可測集 E 是有界的, 則 $\mu(E) < \infty$.

証明. 設 N_0 是 \mathbf{N} 中具有有限測度的任意集 (參看定理 3), 并設 M_0 是 \mathbf{N} 中滿足条件 $M_0M_0^{-1} \subset N_0$ 的集. 我們將証明 M_0 是有界的. 假定 M_0 不是有界的, 則存在 \mathbf{N} 中的集 N 并存在 M_0 中元素的叙列 $\{x_n\}$, 使得

$$x_{n+1} \in \bigcup_{i=1}^n x_i N, \quad n=1, 2, \dots.$$

根据定理 1, 存在具有正的有限測度的可測集 E , 使得 $E \subset M_0^{-1}$ 和 $EE^{-1} \subset N$. 由 $\{x_n\}$ 的性質可知, $\{x_n E\}$ 是不相交集的叙列; 又因为 $x_n E \subset M_0 M_0^{-1} \subset N_0$, 所以 $\mu(N_0) = \infty$. 这与定理 3 相矛盾, 于是証明了定理的第一部分.

由定理 3 可知, 有非空內部的可測集具有正的測度. 定理的

最后一部分可由定理 3 和下述事实导出：有界集能被 N 中任意集的有限多个左转移所遮盖。 |

定理 6 在某种意义下是关于这方面能够得到的最好的结果了。然而，如果我们应用下述事实：每一个局部有界群可以看作某个局部紧群的稠密子群，我们就可以把上面的结果表成更为有用的形式。我们在定理 8 里给出这种表达的方式；现在我们先证明关于局部紧群中任意（就是不一定是右或左不变的）贝尔测度的一个辅助定理。

定理 7. 设 μ 是局部紧拓扑群 X 中的任意贝尔测度， Y 是由具有下列性质的一切元素 y 组成的集：对于任意贝尔集 E , $\mu(yE) = \mu(E)$ ；则 Y 是 X 的闭子群。

证明。 Y 显然是 X 的子群。为了证明 Y 是闭的，设 y_0 是 \bar{Y} 中任意固定的元素，并设 C 是任意紧贝尔集。如果 U 是包含 y_0C 的任意贝尔开集，则存在 e 的邻域 V ，使得 $Vy_0C \subset U$ 。因为 Vy_0 是 y_0 的邻域，所以在 Y 中存在元素 y ，使得 $y \in Vy_0$ 。因为 $yC \subset Vy_0C \subset U$ ，所以

$$\mu(C) = \mu(yC) \leq \mu(U),$$

根据 μ 的正则性就有 $\mu(C) \leq \mu(y_0C)$ 。对 y_0^{-1} 和 y_0C (代替 y_0 和 C) 应用这个结果，我们得到反方向的不等式；于是，对于任意的 C ，我们有 $\mu(C) = \mu(y_0C)$ 。由此可见，对于每一个贝尔集 E , $\mu(E) = \mu(y_0E)$ ，因而 $y_0 \in Y$ 。 |

可测群的子群如果是一个浓厚集（参看 §17），我们称这个子群是可测群的浓厚子群。

定理 8. 设 (X, S, μ) 是具有可分性的可测群，则存在局部紧拓扑群 \hat{X} 以及定义在全体贝尔集类 \hat{S} 上的哈尔测度 $\hat{\mu}$ ，使得 X 是 \hat{X} 的浓厚子群， $S \supset \hat{S} \cap X$ ，并且当 $\hat{E} \in \hat{S}$ 和 $E = \hat{E} \cap X$ 时， $\mu(E) = \hat{\mu}(\hat{E})$ 。

证明。设 \hat{X} 是 X 关于它的魏尔拓扑的增补，就是说， \hat{X} 是一

个局部紧群, 包含 X 作为它的稠密子群. 考虑由 \hat{X} 的一切这样的子集 \hat{E} 组成的类: $\hat{E} \cap X \in \mathcal{S}$. 这个类显然是一个 σ -环; 为了证明这个 σ -环包含一切贝尔集, 我们将证明, 它包含群 \hat{X} 的拓扑的某个基.

设 \hat{x} 是 \hat{X} 的任意元素, \hat{U} 是 \hat{X} 中单位元素 \hat{e} 的任意邻域; 并设 \hat{V} 是 \hat{e} 的邻域, 使得 $\hat{V}^{-1} \hat{V} \subset \hat{U}$. 因为 $\hat{V} \cap X$ 是 X 中的开集, 所以在 X 中存在可测开集 W , 使得 $W \subset \hat{V} \cap X$; 由于 (根据 \hat{X} 的定义) X 中的拓扑结构是 X 作为 \hat{X} 的子空间而得到的相对拓扑, 因此, 在 \hat{X} 中存在开集 \hat{W} , 使得 $W = \hat{W} \cap X$. 因为 W 总可以换为 $\hat{W} \cap \hat{V}$, 所以我们可以假定 $\hat{W} \subset \hat{V}$ 而不致丧失普遍性. 由于 X 在 \hat{X} 中稠密, 因此, 在 X 中存在点 x , 使得 $x \in \hat{x} \hat{W}^{-1}$; 于是

$$\hat{x} \in x \hat{W} \subset \hat{x} \hat{W}^{-1} \hat{W} \subset \hat{x} \hat{V}^{-1} \hat{V} \subset \hat{x} \hat{U}.$$

对于 $\hat{\mathcal{S}}$ 中每一个 \hat{E} , 令 $\hat{\mu}(\hat{E}) = \mu(\hat{E} \cap X)$; 不难验证, $\hat{\mu}$ 是 \hat{X} 中的贝尔测度. 因为当 $x \in X$ 和 $\hat{E} \in \hat{\mathcal{S}}$ 时有 $\hat{\mu}(x\hat{E}) = \hat{\mu}(\hat{E})$, 由定理 7 可知, $\hat{\mu}$ 是左不变的. 按照唯一性定理, $\hat{\mu}$ 在 $\hat{\mathcal{S}}$ 上与 \hat{X} 中一个哈尔测度重合. 于是, 当 $\hat{E} \in \hat{\mathcal{S}}$ 和 $\hat{E} \cap X = 0$ 时, $\hat{\mu}(\hat{E}) = \mu(\hat{E} \cap X) = 0$, 就是说, X 在 \hat{X} 中是浓厚的. \blacksquare

(1) 设 X 是局部紧拓扑群, \mathcal{S} 是全体贝尔集类, μ 是 \mathcal{S} 上的哈尔测度. 令 $\tilde{X} = X \times X$, 如果 $\tilde{\mathcal{S}}$ 是由一切形如 $E \times X$ 的集组成的类, 其中 $E \in \mathcal{S}$, 并令 $\tilde{\mu}(E \times X) = \mu(E)$, 则 $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mu})$ 是一个可测群, 不具有可分性. 这个例子在怎样的程度内表现了一般不具有可分性的可测群的典型性?

(2) 设 X 是具有可分性的可测群, 则集 E 对于 X 的魏尔拓扑为有界的必要和充分条件是: 存在具有正的有限测度的可测集 A , 使得 EA 被一个测度为有限的可测集所包.

(3) 定理 7 对于波雷耳测度是否成立?

(4) 定理 7 中所述的子群 Y 是否必须是不变的?

(5) 在定理 7 的假设条件下, 对于 X 中每一个 x 以及每一个贝尔集 E , 令 $f(x) = \mu(xE)$. f 是不是连续函数?

(6) 下面一系列命题的目的在于给出浓厚子群的一个例子. 设 X 是数

直綫, 考虑局部紧拓扑群 $X \times X$. X 的子集 B 称为綫性無关的, 如果条件

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i = 0, \quad x_i \in B, \quad i=1, \dots, n$$

蘊涵 $r_1 = \dots = r_n = 0$, 其中 r_i 是有理数.

(6a) 如果 E 是 $X \times X$ 中測度为正的波雷耳集, B 是 X 中綫性無关的集, 它的勢小于連續統的勢, 則在 E 中存在点 (x, y) , 使得 $B \cup \{x\}$ 是綫性無关集. (提示: 存在 y 的值使 B^y 具有正的測度, 因而具有連續統的勢.)

(6b) 在 $X \times X$ 中存在集 C , 使得 (i) 对于 $X \times X$ 中每一个測度为正的波雷耳集 E , $C \cap E \neq \emptyset$, (ii) 由 C 中一切点的第一个坐标組成的集 B 是綫性無关的, (iii) C 与任何垂直直綫至多交于一点. (提示: 把 $X \times X$ 中全体測度为正的波雷耳集类作成正序集, 利用 (6a), 用超限归納法建立 C .)

(6c) 設 B 是 X 中具有下列性質的綫性無关集: 对于 X 中每一个 x , 存在 B 的有限子集 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 以及对应的有理数有限集 $\{r_1, \dots, r_n\}$, 使得

$$x = \sum_{i=1}^n r_i x_i;$$

我們称 B 是一个海末尔基. x 表为 B 中元素的有理綫性組合的表示式是唯一的. 每一个綫性無关集被一个海末尔基所包. (提示: 利用超限归納法或桑恩輔助定理.)

(6d) 根据 (6b) 和 (6c), 在 $X \times X$ 中存在集 C , 具有 (6b) 中所述的性質 (i), (ii) 和 (iii), 并使得由 C 中一切点的第一个坐标組成的集 B 是一个海末尔基. 設 $x = \sum_{i=1}^n r_i x_i$, 其中 r_i 是有理数, $(x_i, y_i) \in C$, $i=1, \dots, n$;

令 $f(x) = \sum_{i=1}^n r_i y_i$. 如果 $Z = \{(x, y) : y = f(x)\}$ (即 Z 是 f 的圖象), 則 Z 是 $X \times X$ 的濃厚子群.

§63. 因 子 群

在本节內我們假定:

X 是局部紧拓扑群, μ 是 X 中的哈尔測度; Y 是 X 的紧不变

子群, ν 是 Y 中使得 $\nu(Y)=1$ 的哈尔测度, π 是从 X 到因子群 $\hat{X}=X/Y$ 上的射影.

虽然本节的大部分结果对于闭的 (但不一定是紧的) 子群 Y 成立, 但我们只限于讨论紧子群的情形, 因为这对我们来说已经够用了, 并且在这种情形下的证明比一般情形的证明稍微简单一些.

定理 1. 如果紧集 C 是 Y 的陪集之并, 而 U 是包含 C 的开集, 则在 \hat{X} 中存在开集 \hat{V} , 使得

$$C \subset \pi^{-1}(\hat{V}) \subset U.$$

证明. 我们可以假定 U 是有界集而不致丧失普遍性. 令 $X_0 = \overline{UY}$, 则 X_0 是紧集. 我们断言, 与 UY 一样, X_0 也是 Y 的陪集之并. 为了证明这个事实, 假定 $x_1 \in X_0$ 且 $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ (因而 $x_1^{-1}x_2 \in Y$); 我们将证明 $x_2 \in X_0$. 设 V 是 x_2 的任意邻域, 则 $Vx_2^{-1}x_1$ 是 x_1 的邻域, 因此 $UY \cap Vx_2^{-1}x_1 \neq \emptyset$. 因为 $x_1^{-1}x_2 \in Y$, 所以

$$\begin{aligned} UY \cap V &= UYx_1^{-1}x_2 \cap Vx_2^{-1}x_1x_1^{-1}x_2 = \\ &= (UY \cap Vx_2^{-1}x_1)x_1^{-1}x_2 \neq \emptyset; \end{aligned}$$

由于 V 是任意的, 这就说明了 $x_2 \in X_0$.

由于 C 是 Y 的陪集之并, 因此

$$\pi(X_0 - U) \cap \pi(C) = \pi((X_0 - U) \cap C) = \emptyset.$$

因为 $\pi(X_0 - U)$ 和 $\pi(C)$ 都是紧集, 而 $\pi(U)$ 是包含 $\pi(C)$ 的开集, 所以在 \hat{X} 中存在开集 \hat{V} , 使得

$$\pi(C) \subset \hat{V} \subset \pi(U) \subset \pi(X_0) \quad \text{和} \quad \hat{V} \cap \pi(X_0 - U) = \emptyset.$$

如果 $x \in \pi^{-1}(\hat{V})$, 从而 $\pi(x) \in \hat{V}$, 则 $\pi(x) \notin \pi(X_0 - U)$, 因而 $x \notin X_0 - U$. 但因 $x \in X_0$, 于是 $x \in U$, 因此 $C \subset \pi^{-1}(\hat{V}) \subset U$. \blacksquare

定理 2. 如果 \hat{C} 是 \hat{X} 的紧子集, 则 $\pi^{-1}(\hat{C})$ 是 X 的紧子集; 如果 \hat{E} 是 \hat{X} 中的贝尔集 [或波雷耳集], 则 $\pi^{-1}(\hat{E})$ 是 X 中的贝尔集 [或波雷耳集].

证明. 设 \mathbf{K} 是 $\pi^{-1}(\hat{C})$ 的开复盖. 对于 \hat{C} 中任意的 \hat{x} , $\pi^{-1}(\{\hat{x}\})$ 是 Y 的陪集, 因而是紧集; 于是, \mathbf{K} 包含有限子类 $\mathbf{K}(\hat{x})$

使得 $\pi^{-1}(\{\hat{x}\}) \subset U(\hat{x}) = \bigcup K(\hat{x})$. 根据定理 1, 在 \hat{X} 中存在开集 $\hat{V}(\hat{x})$ 使得

$$\pi^{-1}(\{\hat{x}\}) \subset V(\hat{x}) = \pi^{-1}(\hat{V}(\hat{x})) \subset U(\hat{x}).$$

因为 \hat{C} 是紧集, 所以 \hat{C} 包含有限子集 $\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n\}$ 使得 $\hat{C} \subset \bigcup_{i=1}^n \hat{V}(\hat{x}_i)$; 于是

$$\pi^{-1}(\hat{C}) \subset \bigcup_{i=1}^n V(\hat{x}_i) \subset \bigcup_{i=1}^n \bigcup K(\hat{x}_i),$$

因此, $\pi^{-1}(\hat{C})$ 是紧集.

定理中关于贝耳集和波雷耳集的結論可由上段的結果以及下述事实得出: G_δ 集的原像(对于 π)是 G_δ 集, 由 \hat{X} 中原像属于某个预先指定的 σ -环的一切集组成的类是一个 σ -环. |

由定理 2 可知, 如果 X 和 \hat{X} 中的可测性都了解为按照贝耳意义的可测性, 或都了解为按照波雷耳意义的可测性, 则变换 π 是可测的. 换一句话说, π^{-1} 对于可测集的变换是令人满意的; 现在我们要问, π^{-1} 对于测度的变换如何?

定理 3. 如果 $\hat{\mu} = \mu\pi^{-1}$, 则 $\hat{\mu}$ 是 \hat{X} 中的哈尔测度.

证明. 因为紧集或非空开集的原像(对于 π)分别是紧集或非空开集, 所以 $\hat{\mu}$ 在紧集上为有限而在非空波雷耳开集上为正. 剩下需要证明的是 $\hat{\mu}$ 的左不变性.

设 \hat{E} 是 \hat{X} 中的波雷耳集, $\hat{x}_0 \in \hat{X}$, 并设 x_0 是 X 中使得 $\pi(x_0) = \hat{x}_0$ 的元素. 如果 $x \in x_0\pi^{-1}(\hat{E})$, 则(因为 π 是一个同态) $\pi(x) \in \hat{x}_0\hat{E}$, 因此

$$x_0\pi^{-1}(\hat{E}) \subset \pi^{-1}(\hat{x}_0\hat{E}).$$

反之, 设 $x \in \pi^{-1}(\hat{x}_0\hat{E})$, 则 $\pi(x) \in \hat{x}_0\hat{E}$, 因而 $\pi(x_0^{-1}x) = \hat{x}_0^{-1}\pi(x) \in \hat{E}$. 由此有 $x_0^{-1}x \in \pi^{-1}(\hat{E})$, 从而 $x \in x_0\pi^{-1}(\hat{E})$. 于是, 我們已經证明了

$$\pi^{-1}(\hat{x}_0\hat{E}) \subset x_0\pi^{-1}(\hat{E}),$$

由此得到

$$\hat{\mu}(\hat{x}_0\hat{E}) = \mu\pi^{-1}(\hat{x}_0\hat{E}) = \mu(x_0\pi^{-1}(\hat{E})) = \mu\pi^{-1}(\hat{E}) = \hat{\mu}(\hat{E}). \quad |$$

定理 4. 如果 $f \in \mathcal{L}_+(X)$, 并且

$$g(x) = \int_Y f(xy) d\nu(y),$$

則 $g \in \mathcal{L}_+(X)$, 并且在 $\mathcal{L}_+(\hat{X})$ 中存在(唯一确定的)函数 \hat{g} 使得 $g = \hat{g}\pi$.

証明. 如果 $f_x(y) = f(xy)$, 則因 f 是連續的, 所以 f_x 在 Y 上連續, 因而可积. f 是一致連續的, 就是說, 对于每一个正数 ε , 存在 e 的邻域 U 使当 $x_1 x_2^{-1} \in U$ 时有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 如果 $x_1 x_2^{-1} \in U$, 則

$$(x_1 y)(x_2 y)^{-1} = x_1 x_2^{-1} \in U,$$

因而

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq \int_Y |f(x_1 y) - f(x_2 y)| d\nu(y) < \varepsilon,$$

所以 g 是連續的. g 显然是非負的; 又因

$$\{x: g(x) \neq 0\} \subset \{x: f(x) \neq 0\} \cdot Y,$$

于是有 $g \in \mathcal{L}_+(X)$.

如果 $\pi(x_1) = \pi(x_2)$, 則 $x_1^{-1} x_2 \in Y$, 由 ν 的左不变性可知

$$g(x_1) = \int_Y f(x_1 y) d\nu(y) = \int_Y f(x_1(x_1^{-1} x_2 y)) d\nu(y) = g(x_2).$$

于是, 若令 $\hat{g}(\hat{x}) = g(x)$, 其中 $\hat{x} = \pi(x)$, 則在 \hat{X} 上無歧义地定出了一个函数 \hat{g} ; 显然, $g = \hat{g}\pi$. 对于数直綫上的每一个开集 M , 我們有

$$\{\hat{x}: \hat{g}(\hat{x}) \in M\} = \pi(\{x: g(x) \in M\})$$

(參看 §39 定理 1), 因为 π 是开变换, 所以 \hat{g} 是連續的. 由于 π 将有界集 $\{x: g(x) \neq 0\}$ 映为 \hat{X} 中的某个有界集, 因此, $\hat{g} \in \mathcal{L}_+(\hat{X})$; 因为 π 将 X 映为整个空間 \hat{X} , 所以 \hat{g} 是唯一的. \blacksquare

定理 5. 如果 C 是 X 中的紧貝尔集, 并且 $g(x) = \nu(x^{-1}C \cap Y)$, 則存在(唯一确定的)定义在 \hat{X} 上的貝尔可測且可积的函数 \hat{g} , 使得 $g = \hat{g}\pi$. 如果 C 是 Y 的陪集之併, 則

$$\int \hat{g} d\hat{\mu} = \mu(C).$$

証明. 設 $\{f_n\}$ 是 $\mathcal{L}_+(X)$ 中函数的遞減叙列, 使得对于 X 中每一个 x , $\lim_n f_n(x) = \chi_C(x)$. 如果

$$g_n(x) = \int_Y f_n(xy) d\nu(y), \quad n=1, 2, \dots,$$

則 $\{g_n\}$ 是 $\mathcal{L}_+(X)$ 中函数的遞減叙列 (參看定理 4), 于是 (例如, 根据有界收斂定理), 对于 X 中每一个 x ,

$$\begin{aligned} \lim_n g_n(x) &= \int_Y \chi_C(xy) d\nu(y) = \int_Y \chi_{x^{-1}C}(y) d\nu(y) = \\ &= \nu(x^{-1}C \cap Y) = g(x). \end{aligned}$$

根据定理 4, 对于每一个正整数 n , 在 $\mathcal{L}_+(\hat{X})$ 中存在函数 \hat{g}_n , 使得 $g_n = \hat{g}_n \pi$. 因为叙列 $\{\hat{g}_n\}$ 是遞減的, 所以可令 $\hat{g}(x) = \lim_n \hat{g}_n(x)$; 显然, $g = \hat{g}\pi$. 因为 (§39 定理 3)

$$\int \hat{g} d\hat{\mu} = \int g d\mu = \int \nu(x^{-1}C \cap Y) d\mu(x),$$

并且 $\{x: \nu(x^{-1}C \cap Y) \neq 0\} \subset \{x: x^{-1}C \cap Y \neq 0\} = CY$, 由 ν 的有限性可知, g 是可积的.

最后, 設 C 是 Y 的陪集之併, 則

$$x^{-1}C \cap Y = \begin{cases} Y, & \text{若 } x \in C, \\ 0, & \text{若 } x \notin C, \end{cases}$$

于是

$$\int \hat{g} d\hat{\mu} = \int g d\mu = \int \nu(x^{-1}C \cap Y) d\mu(x) = \mu(C). \quad \blacksquare$$

定理 6. 設 E 是 X 中任意貝尔集, 如果

$$g_E(x) = \nu(x^{-1}E \cap Y),$$

則存在 (唯一确定的) 定义在 \hat{X} 上的貝尔可測函数 \hat{g}_E , 使得 $g_E = \hat{g}_E \pi$.

証明. 我們首先注意到 (根据 Y 中拓扑的定义), $x^{-1}E \cap Y$ 是 Y 中的貝尔集, 因此, 对于任意的 x , $g_E(x)$ 总是有定义的.

設 \mathbf{E} 是由能使定理的結論成立的一切集 E 組成的類，則由定理 5 可知，一切緊貝爾集屬於 \mathbf{E} 。根據(有限)測度 ν 的基本性質， \mathbf{E} 封閉于正常差，不相交有限併以及單調併，單調交的運算，因此 \mathbf{E} 包含一切貝爾集。 |

定理 7. 設 E 是 X 中任意貝爾集，如果 \hat{g}_E 是 \hat{X} 上唯一確定的具有下列性質的貝爾可測函數：對於 X 中每一個 x ，

$$\hat{g}_E(\pi(x)) = \nu(x^{-1}E \cap Y) = g_E(x),$$

則對於每一個貝爾集 E ，有

$$\int \hat{g}_E d\hat{\mu} = \mu(E).$$

證明。對於 X 中每一個貝爾集 E ，令

$$\lambda(E) = \int \hat{g}_E d\hat{\mu} = \int \nu(x^{-1}E \cap Y) d\mu(x).$$

因為對於每一個緊貝爾集 C ， $\lambda(C)$ 是有限的(定理 5)，並且 λ 顯然是非負的，所以 λ 是 X 中的貝爾測度。設 $x_0 \in X$ ，於是

$$\begin{aligned} \lambda(x_0E) &= \int g_{x_0E}(x) d\mu(x) = \int \nu(x^{-1}x_0E \cap Y) d\mu(x) = \\ &= \int \nu((x_0^{-1}x)^{-1}E \cap Y) d\mu(x) = \int g_E(x_0^{-1}x) d\mu(x) = \\ &= \int g_E(x) d\mu(x) = \lambda(E), \end{aligned}$$

就是說， λ 是左不變的。由唯一性定理可知， $\lambda(E) = c\mu(E)$ ，其中 c 是某個常數。如果 C 是緊貝爾集，並且是 Y 的陪集之併，則根據定理 5， $\lambda(C) = \mu(C)$ ，又因為存在使 $\mu(C) > 0$ 的這種集 C ，所以 $c = 1$ 。 |

§64. 哈爾測度的正則性

本節的目的是要證明，每一個哈爾測度是正則的。在本節內，除去最後一個定理外，我們假定：

X 是局部紧和 σ -紧的拓扑群, μ 是 X 中不恒等于零的左不变貝尔测度(因而在一切非空貝尔开集上取正值)。

为了用起来方便起见, 我們引进下面的輔助概念. 設 \mathbf{T} 是由貝尔集組成的一个 σ -环, 滿足下列条件: 当 $E \in \mathbf{T}$ 和 $x \in X$ 时, $xE \in \mathbf{T}$; 我們称 \mathbf{T} 是不变 σ -环. 因为全体貝尔集类是一个不变 σ -环, 并且任意多个不变 σ -环的交仍是一个不变 σ -环, 所以, 如果 \mathbf{E} 是貝尔集的任意类, 我們可以把包含 \mathbf{E} 的一切不变 σ -环的交定义为由 \mathbf{E} 产生的不变 σ -环.

定理 1. 設 \mathbf{E} 是一个貝尔集类, \mathbf{T} 是由 \mathbf{E} 产生的不变 σ -环, 則 \mathbf{T} 与由类 $\{xE: x \in X, E \in \mathbf{E}\}$ 产生的 σ -环 \mathbf{T}_0 重合.

証明. 对于 X 中每一个 x 以及 \mathbf{E} 中每一个 E , 我們有 $xE \in \mathbf{T}$, 因此 $\mathbf{T}_0 \subset \mathbf{T}$; 于是, 只須証明 \mathbf{T}_0 是不变的. 設 x_0 是 X 中任意固定的元素. 由能使关系式 $x_0F \in \mathbf{T}_0$ 成立的一切貝尔集 F 組成的类是一个 σ -环; 而对于 X 中每一个 x 和 \mathbf{E} 中每一个 E , 有 $x_0(xE) = (x_0x)E \in \mathbf{T}_0$, 所以上述 σ -环包含 \mathbf{T}_0 . 換一句話說, 我們已經証明, 如果 $F \in \mathbf{T}_0$, 則 $x_0F \in \mathbf{T}_0$. \blacksquare

定理 2. 設 \mathbf{E} 是测度为有限的貝尔集的可列类, \mathbf{T} 是由 \mathbf{E} 产生的不变 σ -环, 則由 \mathbf{T} 中测度为有限的一切集組成的度量空間(度量 ρ 由等式 $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$ 定义)是可分的.

証明. 因为可分度量空間的每一个子空間是可分的, 所以只須証明, 存在由貝尔集組成的 σ -环 \mathbf{T}_0 , 使得 $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}_0$, 并使得 \mathbf{T}_0 能由测度为有限的集的可列类产生(参看 §40 定理 2). 由于 X 是一个貝尔集, 因此, 对于 \mathbf{E} 中每一个 E , $X \times E$ 是 $X \times X$ 中的貝尔集. 如果令 $S(x, y) = (x, xy)$, 則对于 \mathbf{E} 中每一个 E , $S(X \times E)$ 也是 $X \times X$ 中的貝尔集. 因此, 对于 \mathbf{E} 中每一个 E , 存在测度为有限的矩形的可列类 \mathbf{R}_E , 使得 $S(X \times E) \in \mathbf{S}(\mathbf{R}_E)$. 設 \mathbf{T}_0 是由一切 \mathbf{R}_E 中的一切矩形的一切边組成的类所产生的 σ -环, 其中 $E \in \mathbf{E}$, 則对于 \mathbf{E} 中每一个 E 显然有

$$S(X \times E) \in \mathbf{T}_0 \times \mathbf{T}_0.$$

因为 $\mathbf{T}_0 \times \mathbf{T}_0$ 中集的每一个截面属于 \mathbf{T}_0 , 于是, 对于 X 中每一个 x 和 \mathbf{E} 中每一个 E ,

$$xE = x(X \times E)_x = (S(X \times E))_x \in \mathbf{T}_0;$$

因此(根据定理 1), $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}_0$. \blacksquare

定理 3. 设 \mathbf{T} 是不变 σ -环, f 是 \mathcal{L} 中的 (\mathbf{T}) 可测函数, 并设 y 是 X 中这样的元素: 对于 \mathbf{T} 中每一个 E , $\rho(yE, E) = 0$; 于是, 对于 X 中每一个 x , $f(y^{-1}x) = f(x)$.

证明. 设 E 是 \mathbf{T} 中测度为有限的任意集, 则

$$\begin{aligned} 0 = \rho(yE, E) &= \int |\chi_{yE}(x) - \chi_E(x)| d\mu(x) = \\ &= \int |\chi_E(y^{-1}x) - \chi_E(x)| d\mu(x). \end{aligned}$$

于是, 对于每一个 (\mathbf{T}) 可测的可积简单函数 g ,

$$\int |g(y^{-1}x) - g(x)| d\mu(x) = 0.$$

因为 f 可以由这类函数来逼近, 所以

$$\int |f(y^{-1}x) - f(x)| d\mu(x) = 0.$$

由于上面这个积分的被积函数属于 \mathcal{L}_+ , 应用 §55 定理 2 就得到定理的结论. \blacksquare

定理 4. 设 \mathbf{T} 是由它的测度为有限的全体集产生的不变 σ -环, 并且 \mathbf{T} 至少包含一个具有正测度的有界集. 如果 \mathbf{E} 是一个集类, 它在 \mathbf{T} 中测度为有限的全体集组成的度量空间中稠密, 并设

$$Y = \{y: \rho(yE, E) = 0, E \in \mathbf{E}\},$$

则 Y 是 X 的紧不变子群.

证明. 如果 $Y_0 = \{y: \rho(yE, E) = 0, E \in \mathbf{T}\}$, 则显然有 $Y_0 \subset Y$. 另一方面, 如果 E_0 是 \mathbf{T} 中测度为有限的集, 则对于每一个正数 ε , 在 \mathbf{E} 中存在集 E , 使得 $\rho(E_0, E) < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是, 若 $y \in Y$, 则

$$0 \leq \rho(yE_0, E_0) \leq \rho(yE_0, yE) + \rho(yE, E) + \rho(E, E_0) < \varepsilon.$$

因为 ε 是任意的, 所以 $y \in Y_0$, 因而 $Y = Y_0$.

如果 y_1 和 y_2 都属于 Y 而 E 属于 \mathbf{T} , 则

$$0 \leq \rho(y_1^{-1}y_2 E, E) \leq \rho(y_1^{-1}y_2 E, y_2 E) + \rho(y_2 E, E).$$

因为 $y_2 E \in \mathbf{T}$ 而 $\rho(y_1^{-1}y_2 E, y_2 E) = \rho(y_2 E, y_1 y_2 E)$, 所以 $y_1^{-1}y_2 \in Y$; 因此, Y 的确是 X 的子群. 设 $y \in Y$, $x \in X$, 并且 $E \in \mathbf{T}$, 则 $x E \in \mathbf{T}$ 而 $\rho(x^{-1}y x E, E) = \rho(y x E, x E) = 0$; 因而 Y 是不变的.

如果 E_0 是 \mathbf{T} 中具有正测度的有界集, 则因为对于 Y 中每一个 y 有 $\rho(yE_0, E_0) = 0$, 所以 $yE_0 \cap E_0 \neq \emptyset$. 于是 $y \in E_0 E_0^{-1}$, 因此, Y 被有界集 $E_0 E_0^{-1}$ 所包. 最后, 我们证明 Y 是闭的 (因而是紧的); 我们注意到,

$$Y = \bigcap_{E \in \mathbf{E}} \{y : \rho(yE, E) = 0\},$$

由 §61 定理 1 即得结论. \blacksquare

定理 5. 设 E 是 X 中的任意贝尔集, 则存在 X 的紧不变贝尔子群 Y , 使得 E 是 Y 的陪集之并.

证明. 设 $\{C_i\}$ 是紧贝尔集的叙列, 使得 $E \in \mathbf{S}(\{C_i\})$, 并且至少有一个 C_i 具有正的测度. 对于每一个 i , 设 $\{f_{ij}\}$ 是 $\mathcal{L}_+(X)$ 中具有下列性质的函数的递减叙列: 对于 X 中每一个 x , $\lim_j f_{ij}(x) = \chi_{C_i}(x)$. 对于每一个正的有理数 r , $\{x : f_{ij}(x) \geq r\}$ 是一个紧贝尔集; 设 \mathbf{T} 是由一切具有这种形状的集组成的类所产生的不变 σ -环. 由定理 2 可知, \mathbf{T} 中测度为有限的一切集组成的度量空间是可分的; 设叙列 $\{E_n\}$ 在这个度量空间中稠密. 如果

$$Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{y : \rho(yE_n, E_n) = 0\},$$

则根据定理 4, Y 是 X 的紧不变子群, 而根据 §61 定理 1, Y 是贝尔集.

因为每一个 f_{ij} 是 (\mathbf{T}) 可测的, 由定理 3 可知, 对于 Y 中每一个 y 和 X 中每一个 x , $f_{ij}(y^{-1}x) = f_{ij}(x)$. 于是, 对于 Y 中每一个 y 以及每一个 $i=1, 2, \dots$, $\chi_{C_i}(y^{-1}x) = \chi_{C_i}(x)$, 也就是 $yC_i = C_i$.

对于 Y 中每一个 y , 一切能使等式 $yF = F$ 成立的集 F 組成一个 σ -环; 因此, 对于 Y 中每一个 y , $yE = E$. 由此有 $E = YE = \bigcup_{x \in E} Yx$; 換一句話說, E 是不变子群 Y 的陪集之併. \blacksquare

定理 6. 如果 $\{e\}$ 是一个貝尔集, 則 X 是可分的.

証明. 設 $\{U_n\}$ 是使得 $\{e\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ 的有界开集叙列. 我們在前面已經看到, 可以假定

$$\bar{U}_{n+1} \subset U_n, \quad n=1, 2, \dots$$

而不致丧失普遍性. 設 $\{C_i\}$ 是使得 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ 的紧集叙列; 因为每一个 C_i 是紧的, 所以, 对于每一个 i 和 n , 存在 C_i 的有限子集 $\{x_{ij}^{(n)}\}$, 使得 $C_i \subset \bigcup_j x_{ij}^{(n)} U_n$. 我們現在証明, 可列类 $\{x_{ij}^{(n)} U_n\}$ 是一个基.

我們首先証明, 如果 U 是 e 的任意邻域, 則存在正整数 n , 使得 $e \in U_n \subset U$. 事实上, 因为

$$\{e\} = \bigcap_n U_n = \bigcap_n \bar{U}_n,$$

并且 $e \in U$, 所以

$$\bigcap_n (\bar{U}_n - U) = (\bigcap_n \bar{U}_n) - U = 0.$$

由于 $\{\bar{U}_n - U\}$ 是紧集的遞減叙列, 具有空的交集, 因此, 对于 n 的至少一个值, 集 $U_n - U (\subset \bar{U}_n - U)$ 是空的.

現在設 x 是 X 的任意元素而 V 是 x 的任意邻域. 因为 $x^{-1}V$ 是 e 的邻域, 所以存在 e 的邻域 U 使得 $U^{-1}U \subset x^{-1}V$; 又由上一段可知, 存在正整数 n 使得 $e \in U_n \subset U$. 由于 $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, 于是, 对于 i 的某个值有 $x \in C_i$, 因而对于 j 的某个值有 $x \in x_{ij}^{(n)} U_n$. 由此得到 $x_{ij}^{(n)} \in x U_n^{-1}$, 于是有

$$x \in x_{ij}^{(n)} U_n \subset x U_n^{-1} U_n \subset x U^{-1} U \subset x x^{-1} V = V. \quad \blacksquare$$

由定理 5 和定理 6 可以得到下面这个令人惊奇的同时也是很有用的結果.

定理 7. 設 E 是 X 中的任意貝尔集, 則存在 X 的紧不变子群 Y , 使得 E 是 Y 的陪集之併, 并使得因子群 X/Y 是可分的.

証明。由定理 5 可知，存在紧不变貝尔子群 Y ，使得 E 是 Y 的陪集之併。設 $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ ，其中 $\{U_n\}$ 是开集的叙列，則对于每一个正整数 n ，在因子群 $\hat{X} = X/Y$ 中存在开集 \hat{U}_n ，使得

$$Y \subset \pi^{-1}(\hat{U}_n) \subset U_n,$$

其中 π 是 X 在 \hat{X} 上的射影（参看 §63 定理 1）。于是有 $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi^{-1}(\hat{U}_n)$ ，从而有 $\{\hat{e}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n$ ；由定理 6 可知， \hat{X} 是可分的。┆

定理 8. X 中每一个哈尔测度是增补正則的。

証明。只須証明，如果 U 是任意有界开集，則 U 必包含滿足下列条件的貝尔集 E ： $U-E$ 能被测度为零的一个貝尔集所遮盖。对于給定的 U ，我們选择貝尔集 $E (\subset U)$ 使 $\mu(E)$ 为最大。根据定理 7，存在 X 的紧不变子群 Y ，使得 E 是 Y 的陪集之併，并使得因子群 $\hat{X} (= X/Y)$ 是可分的。

設 π 是 X 在 \hat{X} 上的射影，并令 $F = \pi^{-1}\pi(U-E)$ ；我們現在証明， F 是测度为零的貝尔集。由于 E 是 Y 的陪集之併，因此 $\pi(U-E) = \pi(U) - \pi(E)$ ；因为 $\pi(U)$ 是可分空間中的开集，所以 $\pi(U)$ 是 \hat{X} 中的貝尔集（参看 §50 定理 5）。由关系式 $F = \pi^{-1}\pi(U) - E$ 可知， F 的确是一个貝尔集。

因为 X 中全体貝尔开集类是一个基，所以，对于 $U-E$ 中每一个点 x ，存在貝尔开集 $V(x)$ 使得 $x \in V(x) \subset U$ 。因为 $\{\pi(V(x)) : x \in U-E\}$ 是 $\pi(U-E)$ 的一个开复盖，又因为 \hat{X} 是可分的，所以，存在 $U-E$ 中的点叙列 $\{x_i\}$ 使得

$$\pi(U-E) \subset \bigcup_i \pi(V(x_i)).$$

由于 $\pi(U-E) = \pi(U) - \pi(E)$ ，我們有

$$\pi(U-E) \subset (\bigcup_i \pi(V(x_i))) - \pi(E) = \bigcup_i \pi(V(x_i) - E).$$

由此可見，为了完成这个定理的証明，我們只須証明，对于被 U 所包的每一个貝尔开集 V ，有

$$\mu(\pi^{-1}(\pi(V-E))) = 0;$$

現在我們就来导出这个結果。(首先我們注意到, 上面用以說明 $\pi^{-1}\pi(U-E)$ 是貝尔集的論点, 如果把 U 換成 V , 仍然可以应用.)

如果 V 是被 U 所包的貝尔开集, 則根据关于 E 的最大性質, 有 $\mu(V-E)=0$. 如果 ν 是 Y 中使得 $\nu(Y)=1$ 的哈尔测度, 若令 $\hat{\mu}=\mu\pi^{-1}$ 和 $g(x)=\nu(x^{-1}(V-E)\cap Y)$, 則(參看 §63 定理 7) 存在 \hat{X} 上的(非負)貝尔可測函数 \hat{g} , 使得 $g=\hat{g}^\pi$ 和

$$\begin{aligned} 0=\mu(V-E) &= \int \hat{g} d\hat{\mu} = \int g d\mu \geq \\ &\geq \int_{\pi^{-1}\pi(V-E)} \nu(x^{-1}(V-E)\cap Y) d\mu(x) \geq 0. \end{aligned}$$

由等式

$$x^{-1}(V-E)\cap Y = (x^{-1}V\cap Y) - (x^{-1}E\cap Y)$$

可知, 如果 $x\in V$, 則 $e\in x^{-1}V\cap Y$, 如果 $x\in E$, 則 $x^{-1}E\cap Y=0$. 于是, 若 $x\in V-E$, 則 $x^{-1}(V-E)\cap Y$ 是 Y 的非空开子集. 由此可見, 如果 $x\in\pi^{-1}\pi(V-E)$, 从而对于 $V-E$ 中某个 x_0 有 $\pi(x)=\pi(x_0)$, 則

$$g(x) = \hat{g}(\pi(x)) = \hat{g}(\pi(x_0)) = g(x_0) > 0;$$

根据 §25 定理 4 就有 $\mu(\pi^{-1}\pi(V-E))=0$. **■**

定理 9. 設 X 是任意(不一定是 σ -紧的)局部紧拓扑群. 如果 μ 是 X 中的左不变波雷耳测度, 則 μ 是增补正則的.

証明. 对于 X 中任意波雷耳集 E , 存在 X 的 σ -紧开子群 Z 使得 $E\subset Z$. 根据定理 8, μ 在 Z 上是增补正則的, 因此, 在 Z 中存在具有下列性質的集 A 和 B : A 和 B 是 Z 的貝尔子集, 并且

$$A\subset E\subset B, \quad \mu(B-A)=0.$$

因为 Z 在 X 中既为开集又为閉集, 所以 A 和 B 也是 X 的貝尔子集. **■**

参考文献索引

(方括号里的数字指“参考文献”表中的号码)

§0. (1)—(7): [7]和[15]. 拓扑: [1, 第一、二章]和[42, 第一章]. 度量空间: [41]. 齐霍诺夫定理: [14]. 拓扑群: [58, 第一至第三章]和[73, 第一章]. 拓扑群的增补: [72].

§4. 环和代数: [27]. 半环: [52].

§5. 络: [6]. (3): [52, 第 70 页].

§6. (2): [61, 第 85 页].

§7. (5): [52, 第 77—78 页].

§9. (10): [57, 第 561 页].

§11. 外测度和可测性: [12, 第五章]. 度量外测度: [61, 第 43—47 页]和[10].

§12. 豪司道夫测度: [29, 第七章].

§17. 浓厚集: [3, 第 108 页]. 定理 1 和(1): [19, 第 109—110 页].

§18. (10): [51, 第 602—603 页]和 [20, 第 91—92 页]. 分布函数: [16].

§21. 叶果洛夫定理: [61, 第 18—19 页].

§26. (7): [63].

§29. 若当分解, (3): [61, 第 10—11 页].

§31. 拉东-尼古丁定理: [56, 第 168 页], [61, 第 32—36 页]和[74].

§37. (4): [12, 第 340—349 页].

§38. 定理 2: [64]和[32].

§40. 布尔环: [6, 第六章]和[68]. (8): [49]. (12): [59]和[60]. (15a): [21]和[66]. (15b): [68]和[69]. (15c): [47].

§41. 定理 3: [22]: (2): [50, 第 85—87 页]. (1), (2), (3)和(4): [11],

[24]和[44]. 定理 3 和(7): [48]和[8].

§42. 荷德尔与閔可夫斯基不等式: [26, 第 139—143 和 146—150 頁].
函数空間: [5]. (3): [54, 第 130 頁].

§43. 点函数与集函数: [28]. 定理 5: [28, 第 338 和 603 頁].

§44. [23], [45]和[67].

§46. [71]. 柯尔莫哥洛夫不等式: [37, 第 310 頁]. 关于級数的定理:
[35], [37]和[38].

§47. 大数定律: [30]和[39]. 正規数: [9, 第 260 頁].

§48. 条件概率和条件数学期望: [40, 第五章]. (4): [18]和[20, 第 96 頁].

§49. 定理 1: [40, 第 24—30 頁]. 定理 2: [43, 第 129—130 頁]. (3):
[20, 第 92 頁]和[65].

§51. 波雷耳集和貝尔集: [33]和[36].

§52. [55]. (10): [17].

§54. 正則容度: [2].

§55. 卢辛定理: [61, 第 72 頁]和[62].

§56. 綫性汎函数: [5, 第 61 頁]和[31, 第 1008 頁].

§58. [73, 第 33—34 頁]. 遮盖平面集的圓: [34].

§59. [73, 第 140—149 頁].

§60. [13], [46]和[53].

§61. 分部积分法: [61, 第 102 頁]和[70].

§62. (6): [36, 第 93 頁].

§63. [4]和[73, 第 42—45 頁].

§64. [33].

参 考 文 献

1. P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, Berlin, 1935.
2. W. Ambrose, *Lectures on topological groups* (未出版), Ann. Arbor, 1946.
3. W. Ambrose, *Measures on locally compact topological groups*, Trans. A. M. S., **61** (1947), 106—121.
4. W. Ambrose, *Direct sum theorem for Haar measures*, Trans. A. M. S., **61** (1947), 122—127.
5. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.
6. G. Birkhoff, *Lattice theory*, New York, 1940.
7. G. Birkhoff and S. MacLane, *A survey of modern algebra*, New York, 1941.
8. A. Bischof, *Beiträge zur Carathéodoryschen Algebraisierung des Integralbegriffs*, Schr. Math. Inst. u. Inst. Angew. Math. Univ. Berlin, **5** (1941), 237—262.
9. E. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rend. Circ. Palermo, **27** (1909), 247—271.
10. N. Bourbaki, *Sur un théorème de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, **201** (1935), 1309—1311.
11. K. R. Buch, *Some investigations of the set of values of measures in abstract space*, Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd., **21**, № 9 (1945).
12. C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin, 1927.
13. H. Cartan, *Sur la mesure de Haar*, C. R. Acad. Sci. Paris, **211** (1940), 759—762.
14. C. Chevalley and O. Frink, *Bicompactness of Cartesian products*, Bull. A. M. S., **47** (1941), 612—614.
15. R. Courant, *Differential and integral calculus*, London-Glasgow, 1934.
16. H. Cramér, *Random variables and probability distributions*, Cambridge, 1937.
17. J. Dieudonné, *Un exemple d'espace normal non susceptible d'une structure uniforme d'espace complet*, C. R. Acad. Sci. Paris, **209** (1939), 145—147.
18. J. Dieudonné, *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym (III)*, Ann. Univ. Grenoble, **23** (1948), 25—53.
19. J. L. Doob, *Stochastic processes depending on a continuous parameter*, Trans. A. M. S., **42** (1937), 107—140.
20. J. L. Doob, *Stochastic processes depending on an integral-valued parameter*,

- Trans. A. M. S., **44** (1938), 87—150.
21. O. Frink, Representations of Boolean algebras, Bull. A. M. S., **47** (1941), 755—756.
 22. P. R. Halmos and J. V. Neumann, Operator methods in classical mechanics, II, Ann. Math., **43** (1942), 332—350.
 23. P. R. Halmos, The foundations of probability, Amer. Math. Monthly, **51** (1944), 493—510.
 24. P. R. Halmos, The range of a vector measure, Bull. A. M. S., **54** (1948), 416—421.
 25. P. R. Halmos, Measurable transformations, Bull. A. M. S., **55** (1949).
 26. G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, Inequalities, Cambridge, 1934.
 27. F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin-Leipzig, 1927.
 28. E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Vol. I, Cambridge, 1927.
 29. W. Hurewicz and H. Wallman, Dimension theory, Princeton, 1941.
 30. M. Кас, Sur les fonctions indépendantes, I, Studia Math., **6** (1936), 46—58.
 31. S. Kakutani, Concrete representation of abstract (M) -spaces, Ann. Math., **42** (1941), 994—1024.
 32. S. Kakutani, Notes on infinite product measure spaces, I, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **19** (1943), 148—151.
 33. S. Kakutani und K. Kodaira, Über das Haarsche Mass in der lokal bikompakten Gruppe, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **20** (1944), 444—450.
 34. R. Kershner, The number of circles covering a set, Amer. Journ. Math., **61** (1939), 665—671.
 35. А. Я. Хинчин и А. Н. Колмогоров, Über Konvergenz der Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, Mat. сборник, **32** (1925), 668—677.
 36. K. Kodaira, Über die Beziehung zwischen den Massen und Topologien in einer Gruppe, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **23** (1941), 67—119.
 37. А. Н. Колмогоров, Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen, Math. Ann., **99** (1928), 309—319.
 38. А. Н. Колмогоров, Bemerkungen zu meiner Arbeit „Über die Summen der zufälliger Grössen“, Math. Ann., **102** (1930), 484—488.
 39. А. Н. Колмогоров, Sur la loi forte des grands nombres, C. R. Acad. Sci. Paris, **191** (1930), 910—912.
 40. А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, Москва, 1936.
 41. C. Kuratowski, Topologie, Warszawa-Lwów, 1933.
 42. S. Lefschetz, Algebraic topology, New York, 1942.
 43. P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937.
 44. А. А. Ляпунов, О вполне аддитивных векторных функциях, Изв. АН

- CCCP, 4 (1940), 465—478.
45. A. Lomnicki, Nouveaux fondements du calcul des probabilités, *Fund. Math.*, **4** (1923), 34—71.
 46. L. H. Loomis, Abstract congruence and the uniqueness of Haar measure, *Ann. Math.*, **46** (1945), 348—355.
 47. L. H. Loomis, On the representation of σ -complete Boolean algebras, *Bull. A. M. S.*, **53** (1947), 757—760.
 48. D. Maharam, On homogeneous measure algebras, *Proc. N. A. S.*, **28** (1942), 108—111.
 49. E. Marczewski, Sur l'isomorphie des mesures séparables, *Colloq. Math.*, **1** (1947), 39—40.
 50. K. Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik, *Math. Ann.*, **100** (1928), 75—163.
 51. J. V. Neumann, Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, *Ann. Math.*, **33** (1932), 587—642.
 52. J. V. Neumann, *Functional operators*, Princeton, 1933—1935.
 53. J. V. Neumann, The uniqueness of Haar's measure, *Mat. сборник*, **1** (1936), 721—734.
 54. J. V. Neumann, On rings of operators, III, *Ann. Math.*, **41** (1940), 94—161.
 55. J. V. Neumann, *Lectures on invariant measures* (未出版), Princeton, 1940.
 56. O. Nikodym, Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, *Fund. Math.*, **15** (1930), 131—179.
 57. J. C. Oxtoby and S. M. Ulam, On the existence of a measure invariant under a transformation, *Ann. Math.*, **40** (1939), 560—566.
 58. Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Москва, 1938.
 59. S. Saks, On some functionals, *Trans. A. M. S.*, **35** (1933), 549—556.
 60. S. Saks, Addition to the note on some functionals, *Trans. A. M. S.*, **35** (1933), 965—970.
 61. S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa-Lwów, 1937.
 62. H. M. Schaerf, On the continuity of measurable functions in neighborhood spaces, *Portugaliae Math.*, **6** (1947), 33—44.
 63. H. Scheffé, A useful convergence theorem for probability distributions. *Ann. Math. Stat.*, **18** (1947), 434—438.
 64. E. Sparre Andersen and B. Jessen, Some limit theorems on integrals in an abstract set, *Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd.*, **22**, № 14 (1946).
 65. E. Sparre Andersen and B. Jessen, On the introduction of measures in infinite product sets, *Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd.*, **25**, № 4 (1948).
 66. E. R. Stabler, Boolean representation theory, *Amer. Math. Monthly*, **51** (1944), 129—132.

67. H. Steinhaus, Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure, *Fund., Math.*, **4** (1923), 286—310.
68. M. H. Stone, The theory of representations for Boolean algebras, *Trans. A. M. S.*, **40** (1936), 37—111.
69. M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. A. M. S.*, **41** (1937), 375—481.
70. G. Tautz, Eine Verallgemeinerung der partiellen Integration; uneigentliche mehrdimensionale Stieltjesintegrale, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, **53** (1943), 136—146.
71. E. R. van Kampen, Infinite product measures and infinite convolutions, *Amer. Journ. Math.*, **62** (1940), 417—448.
72. A. Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Paris, 1938.
73. A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Paris, 1940.
74. K. Yosida, Vector lattices and additive set functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 228—232.

常用記号表

(本表中的数字指記号的定义所在处的頁数)

$(a, b), [a, b), [a, b]$	33	f^+, f^-	86
\mathbf{C}	233	$f^{-1}(M), f^{-1}(\mathbf{E})$	80
\mathbf{C}_0	233	f_x, f_y	147
χ_E	14	$f \cup g, f \cap g$	2
$\frac{d\nu}{d\mu}$	138	$\int f d\mu$	99, 106
e	6	G_s	3
E^0, \bar{E}	3	gT	169
$\{E\}$	12	$\mathbf{H}(\mathbf{E})$	42
E'	16	$\mathcal{L}, \mathcal{L}_+$	253
E^{-1}, EF	6	$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_p$	183
E_x, E_y	146—147	$\mathbf{M}(\mathbf{E})$	27
Ex	6	$[\mu]$	131
$E \subset F, E \supset F$	9	μ^*, μ_*	43, 62
$E \cup F$	12	$\mu^+, \mu^-, \mu $	127
$E - F$	17	$\mu \ll \nu$	129
$E \Delta F$	17	$\mu \equiv \nu$	130
$\mathbf{E} \cap A$	25	$\mu \perp \nu$	131
$\bigcup_n E_n$	12	$\mu \times \nu$	150
$\bigcap_n E_n$	13	μT^{-1}	170
ϵ, ϵ'	9	$\chi_i \mu_i$	163
\mathcal{E}	5	$N(f)$	80
		$\mathbf{0}$	10

$p(E, y)$	220	U	233
R(E)	22	U₀	233
$\rho(f, g)$	102	$\{x\}, \{x, y\}$	12
$\rho(E, F)$	175	$\{x: \pi(x)\}$	11
S	233	xE	6
S₀	233	$x \cap y, x \cup y$	2
S(E)	24	U_nx_n, ∩_nx_n	2
S(μ), (S, μ)	174	X	9
$\delta, (\mu)$	175	(X, S)	77
S × T	145	(X, S, μ)	77
X_i, S_i	158, 161	X/Y	7
$\sigma^2(f)$	203	X × Y	143
T(E), T⁻¹(F)	168	X, X_i	157

索引

一 划

一致連續性, Uniform continuity, 8

一致絕對連續性, Uniform absolute continuity, 104

二 划

几乎一致收斂性, Almost uniform convergence, 93

几乎处处, Almost everywhere, 90

几乎处处一致收斂性, Uniform convergence almost everywhere, 91

几乎处处收斂性, Convergence almost everywhere, 90

三 划

三級数定理, Three series theorem, 210

上变差, Upper variation, 127

上連續, Continuity from above, 40

上極限, Superior limit, 15

上确界, Supremum, 1

上縱标集, Upper ordinate set, 148

下变差, Lower variation, 127

下連續, Continuity from below, 40

下極限, Inferior limit, 15

下确界, Infimum, 1

下縱标集, Lower ordinate set, 148

广义实数, Extended real number, 2

广义測度, Signed measure, 122

四 划

中心, Center, 5

中值定理, Mean value theorem, 117

內正則容度, Inner regular content, 253

內正則集, Inner regular set, 237

內容度, Inner content, 245

內部, Interior, 3

內測度, Inner measure, 62

方差, Variance, 203

分布函数, Distribution function, 84

分部积分法, Integration by parts, 285

分割, Partition, 32, 50, 179

子分割, Subpartition, 32, 50
 子空間, Subspace, 3
 子基, Subbase, 3
 子群, Subgroup, 6
 不可測集, Non measurable sets, 73
 不定积分, Indefinite integral, 101
 不变子群, Invariant subgroups, 6
 不变的集, Invariant sets, 29
 不变 σ -环, Invariant σ -rings, 298
 不相交, Disjoint, 14
 不相交的集叙列, Disjoint sequences of sets, 38
 不相关, Uncorrelated, 205
 开伐里里原理, Cavalieri's principle, 155
 开变换, Open transformation, 6
 开复盖, Open covering, 4
 开集, Open set, 3
 水平直綫, Horizontal line, 136
 互相奇异的, Mutually singular, 131
 引出的內容度, Induced inner content, 245
 引出的外測度, Induced outer measure, 44
 引出的波雷耳測度, Induced Borel measure, 248

引出的測度, Induced measure, 49

五 划

正的綫性汎函数, Positive linear functional, 256
 正則外測度, Regular outer measures, 55
 正則容度, Regular contents, 251
 正則集, Regular sets, 237
 正則測度, Regular measures, 237
 正部, Positive part, 86
 正常余集, Proper difference, 17
 正規化, Normalized, 179
 正規类, Normal class, 29
 正規数, Normal numbers, 218
 正集, Positive sets, 125
 正測度, Positive measure, 173
 外正則集, Outer regular sets, 237
 外測度, Outer measure, 43
 左不变性, Left invariance, 264
 左哈尔測度, Left Haar measure, 265
 左轉移, Left translation, 6
 右哈尔測度, Right Haar measure, 265
 右轉移, Right translation, 6
 本性上确界, Essential supremum, 90

- 本性有界的函数, Essentially bounded functions, 90
- 平均收敛性, Convergence in the mean, Mean convergence, 107
- 平均定理, Average theorem, 274
- 平均基本的, Fundamental in the mean, Mean fundamental, 103
- 半环, Semiring, 22
- 半径, Radius, 5
- 半闭区間, Semiclosed interval, 33
- 区間上的测度, Measure on intervals, 35
- 由环产生的单調类, Monotone class generated by a ring, 28
- 由格产生的环, Ring generated by a lattice, 26
- 边, Sides of a rectangle, 143
- 代数, Algebra of sets, 21
- 布尔代数, Boolean algebra of sets, 21
- 布尔代数, Boolean algebra, 173
- 布尔环, Boolean ring of sets, 19
- 布尔环, Boolean ring, 22, 172
- 布尔 σ -代数, Boolean σ -algebra, 173
- 布尔 σ -环, Boolean σ -ring, 173
- 可分的拓扑空間, Separable topological space, 3
- 可分的测度空間, Separable measure space, 175
- 可加集函数, Additive set functions, 30
- 可列可加性, Countable additivity, 30
- 可列部分可加性, Countable subadditivity, 43
- 可积简单函数, Integrable simple functions, 99
- 可积函数, Integrable functions, 106
- 可减的, Subtractive, 38
- 可测函数, Measurable function, 81
- 可测函数的可测函数, Measurable function of a measurable function, 86
- 可测空間, Measurable space, 77
- 可测变换, Measurable transformation, 169
- 可测复盖, Measurable cover, 53
- 可测矩形, Measurable rectangle, 146, 161
- 可测核心, Measurable kernel, 62
- 可测集, Measurable set, 77
- 可测群, Measurable group, 271
- 可傳类, Hereditary class, 42

对称差, Symmetric difference, 17
 对称邻域, Symmetric neighborhood, 7
 对偶原理, Principle of duality, 16
 叶果洛夫定理, Egoroff's theorem, 92
 卢辛定理, Lusin's theorem, 256

六 划

交集, Intersection, 13
 点, Point, 9
 完备正则空间, Completely regular spaces, 5
 完全测度, Complete measure, 31
 完备布尔环, Complete Boolean ring, 176
 全有限, Totally finite, 31
 全 σ -有限, Totally σ -finite, 31
 全变差, Total variation, 127
 有限可加性, Finite additivity, 30
 有限部分可加性, Finite subadditivity, 43
 有限交的性质, Finite intersection property, 4
 有限测度, Finite measure, 31
 有界收敛定理, Bounded convergence theorem, 113
 有界变差, Bounded variation,

127

有界集, Bounded sets, 4, 8
 有界线性汎函数, Bounded linear functional, 186, 262
 同构, Isomorphism, 175
 同态, Homomorphism, 7
 同胚, Homeomorphism, 6
 同样的分布, Same distribution, 213
 同等連續, Equicontinuous, 111
 因子群, Quotient group, 7
 原子, Atom, 175
 原像, Inverse image, 80, 168
 在 e 处的基, Base at e , 7
 凸度量空间, Convex metric spaces, 177
 产生的不变 σ -环, Generated invariant σ -ring, 298
 产生的可傳类, Generated hereditary class, 42
 产生的环, Generated ring, 22
 产生的 σ -环, Generated σ -ring, 24
 产生的单調类, Generated monotone class, 27

七 划

貝尔可測函数, Baire measurable functions, 233
 貝尔集, Baire sets, 233
 貝尔测度, Baire measure, 237

貝叶斯定理, Bayes' theorem, 204
 貝努里定理, Bernoulli's theorem, 213
 初等函数, Elementary function, 90
 条件数学期望, Conditional expectation, 221
 条件概率, Conditional probability, 204, 219
 局部有界的, Locally bounded, 8
 局部紧的, Locally compact, 4
 余集, Complement, 16
 穷举法, Exhaustion, 79

八 划

併集, Union, 11
 差集, Difference of two sets, 17
 空集, Empty set, 10
 空間, Space, 9
 定义域, Domain, 168
 环, Ring of sets, 19
 邻域, Neighborhood, 3
 单位元素, Identity, 6
 单调函数, Monotone functions, 187
 单调类, Monotone class, 27
 单调数列, Monotone sequences, 16
 单调集函数, Monotone set functions, 38

函数行列式, Jacobian, 171
 垂直直綫, Vertical line, 136
 变程, Range, 168
 变换, Transformation, 168
 奇异的, Singular, 131
 依测度收敛性, Convergence in measure, 95
 依测度基本的, Fundamental in measure, 95
 具有可分性的可测群, Separated measurable group, 288
 拓扑空間, Topological space, 3
 拓扑群, Topological group, 6
 拓扑群的增补, Completion of a topological group, 8
 拉东-尼古丁定理, Radon-Nikodym theorem, 133
 拉德馬海耳函数, Rademacher functions, 205
 法都輔助定理, Fatou's lemma, 117
 波雷耳可测函数, Borel measurable functions, 233
 波雷耳集, Borel sets, 66, 159, 233
 波雷耳测度, Borel measure, 237
 波雷耳-坎特立輔助定理, Borel-Cantelli lemma, 212

九 划

类, Class, 10
 总类, Collection, 10

重积分, Double integral, 152
 复测度, Complex measure, 124
 保测变换, 保持测度的变换, Measure preserving transformation, 171
 保测性变换, 保持可测性的变换, Measurability preserving transformation, 171
 负部, Negative part, 86
 负集, Negative sets, 125
 独立函数, Independent functions, 201
 独立集, Independent sets, 200
 度量外测度, Metric outer measures, 50
 度量空间, Metric spaces, 5
 度量空间的拓扑, Topology of a metric space, 5
 映像, Image, 168
 柱面, Cylinder, 29, 161
 标准离差, Standard deviation, 205
 相对不变测度, Relatively invariant measure, 279
 相关系数, Coefficient of correlation, 205
 相对余集, Relative complement, 17
 相对拓扑, Relative topology, 3
 柯尔莫哥洛夫不等式, Kolmogoroff's inequality, 205

契贝雪夫不等式, Tchebycheff's inequality, 211
 哈尔测度, Haar measure, 264
 哈恩分解, Hahn decomposition, 125
 若当分解, Jordan decomposition, 127

十 划

乘法定理, Multiplication theorem, 204
 乘积测度, Product measures, 150
 逆元素, Inverse, 6
 积分, Integral, 99, 106
 射影, Projection, 7
 特征函数, Characteristic function, 14
 容度, Content, 245
 弱大数定律, Weak law of large numbers, 213
 连带的度量空间, Associated metric space, 175
 连带的测度环, Associated measure ring, 174
 连续变换, Continuous transformations, 6
 矩形, Rectangle, 143, 157, 161
 缺原子的, Non atomic, 175
 纯原子的, Purely atomic, 191
 海末尔基, Hamel basis, 292

离散的拓扑空間, Discrete topological space, 3

紧化, Compactification, 4

紧集, Compact sets, 4

十一划

闵可夫斯基不等式, Minkowski's inequality, 185

基, Base, 3

基本的叙列, Fundamental sequence, 91

球体, Sphere, 5

闭包, Closure, 3

闭集, Closed sets, 3

陪集, Coset, 6

部分可加性, Subadditivity, 43

勒貝格分解, Lebesgue decomposition, 139

勒貝格可測函数, Lebesgue measurable function, 81

勒貝格可測集, Lebesgue measurable set, 66

勒貝格积分, Lebesgue integral, 110

勒貝格測度, Lebesgue measure, 66

勒貝格-史蒂尔杰測度, Lebesgue-Stieltjes measure, 71, 159

笛卡兒乘积, Cartesian product, 4, 133, 145, 150, 158, 163

康脫函数, Cantor function, 87

康脫集, Cantor set, 71

荷德爾不等式, Hölder's inequality, 184

十二划

測度, Measure, 30

測度代数, Measure algebra, 174

測度空間, Measure space, 77

測度环, Measure ring, 174

測度的擴張, Extension of measures, 57

測度的增补, Completion of a measure, 58

集, Set, 9

集函数, Set function, 30

集函数的导数, Derivatives of set functions, 138

極限, Limit, 16

距离, Distance, 102

絡, Lattice of sets, 26

結合, Convolution, 284

等价的广义測度, Equivalent signed measures, 130

等价的集函数, Equivalent sequences of functions, 212

强大数定律, Strong law of large numbers, 215, 217

無穷远点, Point at infinity, 253

絕對正規数, Absolutely normal numbers, 218

絕對連續性, Absolute continui-

ty, 101, 129, 190

富比尼定理, Eubini's theorem,
154

斯东定理, Stone's theorem, 178

十三划

数直綫的拓扑, Topology of the
real line, 3

零一律, Zero-one law, 211

叠积分, Iterated integral, 152

稠密性定理, Density theorem,
283

稠密集, Dense sets, 3

十四划

遞減的分割叙列, Decreasing se-
quences of partitions, 180

遞減的集叙列, Decreasing sequ-
ences of sets, 16

遞增的集叙列, Increasing se-
quence of sets, 16

截面, Section, 146

維数, Dimension, 158

綫性汎函数, Linear functional,
186, 256

綫性無关集, Linearly indepen-
dent sets, 292

增补正則測度, Completion re-
gular measure, 243

豪司道夫空間, Hausdorff space,
4

豪司道夫測度, Hausdorff mea-
sure, 57

十六划

概率空間, Probability spaces,
200

概率測度, Probability mea-
sures, 200

整个空間, Entire space, Whole
space, 9

濃厚子群, Thick subgroups, 290,
291

濃厚集, Thick sets, 78

十八划

簡單函数, Simple function, 89

魏尔拓扑, Weil topology, 288

其他

J -柱面, J -Cylinder, 161

μ -分割, μ -Partition, 32

μ^* -分割, μ^* -Partition, 50

μ^* -可測集, μ^* -Measurable sets,
46

σ -代数, σ -Algebra, 29

σ -有限測度, σ -Finite measure,
31

σ -有界, σ -Bounded, 4

σ -环, σ -Ring, 24

σ -紧, σ -Compact, 4