导数的初步推广——分数阶导数的简介

徐　杭

08990217　数学与应用数学　综合理科 082 班

指导教师：张　　翼

数理与信息工程学院

【摘　要】分数阶导数已经在较多地方发挥重要作用。本文首先阐述了分数阶导数的研究现状，然后通过对分数阶导数的几种不同定义，进行分析与比较，说明它们的一些联系。并举出了一些实际应用分数阶导数的例子。

【关键词】分数阶导数；Riemann-Liouville 定义；Grunwald-Letnikov 定义；Caputo 定义

1. 引言

分数阶导数，简单来讲就是对整数阶导数理论的拓展。例如，我们一般对某个性质较好的可导函数，可以求出它的一阶导数、二阶导数、 ……、n 阶导数。那么我们是否可以对函数求分数阶导数呢？比如 $\frac{1}{2}$ 导数。再如某个函数不满足求导条件，我们是否可以使用微积分理论对这个函数进行分析性质的研究呢？根据多方文献的参考得知，答案是肯定的，这也是分数阶导数产生的源动力。

早在 1695 年，Leibniz 给 L'Hospital 写了一封信，问:“整数阶导数的概念能否自然地推广到非整数阶导数。”L'Hospital 对这个问题感到很新奇，作为回信他反问了一个简单的问题：“如果求导的次数为 $\frac{1}{2}$，那么将会是怎样的情况呢？”在这一年的 9 月 30 号，Leibniz 给 L'Hospital 回信写到：“这会导致悖论，不过总有一天会得到有用的结果。”这个特殊的日子 1695 年 9 月 30 号被认为分数阶微积分的诞生日。[1][2]

自 1695 年，分数阶导数的研究已经经历了三百多年。但是早期分数阶导数的研究主要存在于理论数学领域。在很长的一段时间内，分数阶微积分的研究没有得到自然科学与工程科学研究人员的关注，基本上没有相关的应用文章发表。分数阶微积分的研究热潮是在二十世纪七十年代，主要原因是因为研究人员发现分形几何、幂律现象与记忆过程[12]等相关现象或过程可以与分数阶微积分建立起密切的联系。分数阶微积分可以作为一种很好的描述与刻画手段。

2. 简单介绍

2.1 一般的研究现状与优势

现在关于分数阶导数研究论文每年约 1000 篇，且正在快速增长。分数阶微积分理论与应用的交流与学术会议日益频繁。每年都有比较大型的国际会议，小型会议越来越多（学术关注度详见图 1）。

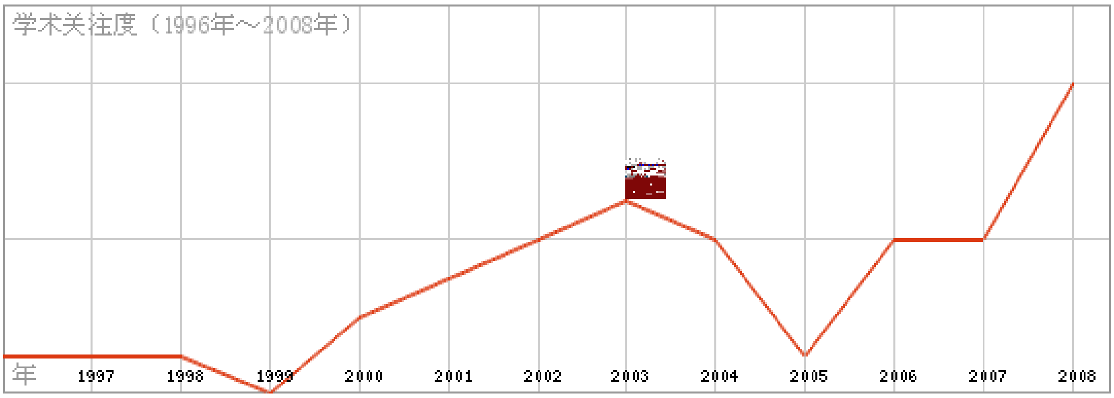

图 1

分数阶导数主要具有以下优势：1.分数阶导数具有全局相关能较好地体现系统函数发展的历史依赖过程；而整数阶导数具有局部性，不适合描述有历史依赖过程。 2.分数阶导数模型克服了经典整数阶微分模型理论与实验结果吻合不好的严重缺点，使用较少几个参数就可获得很好的效果。3.在描述复杂物理力学问题时，与非线性模型比较，分数阶模型的物理意义更清晰，表述更简洁。

2.2 数值方法的研究现状

近年来分数阶微积分被广泛的应用于反常扩散、信号处理与控制、流体力学、图像处理[3]、软物质研究、地震分析[4]、粘弹性阻尼器[5~8]、电力分形网络、分数阶正弦振荡器、分形理论[9]、分数阶PID控制器设计[10][11]。但是由于分数阶微积分具有历史依赖性与全域相关性，增加了分数阶导数方程的数值计算复杂性。

在数值算法方面主要存在的问题有：(1) 长时间历程问题一直没有找到一个满意的解决途径，在数值模拟中，随着时间历程的增加计算量成指数增长。同时一些学者提出的短期记忆方法只对很少一些情况有效，并不具有普适性。因而长时间历程问题的解决任重道远。(2) 在原有算法基础上开发出时间－空间混合的分数阶导数方程的算法和软件。一种数学工具要在工程中有广泛的应用，那么就必须有成熟的算法与软件，像有限元的计算模拟软件就有很多，所以有限元才能在工程界有如 此广泛的应用。(3) 分数阶导数的定义还不完善，现在分数阶导数的定义有多种，至今还没有一个完善到大多数学者能够接受的定义。[12]

现阶段，分数阶导数方程的数值算法主要包括[12]：(1) 有限差分法：显示格式，隐式格式，Crank-Nicholson 格式，预估校正算法，线性算法等；(2) 级数逼近法：变分迭代法，Adomian 分解法，同伦摄动法，通论分析法，微分转换法等；(3) 有限元法；(4) 无网格方法；(5) 一些新的算法：矩阵转化法，外推法等。

以上这些数值算法各有优缺点，不同的条件与方程适用于不同的算法，这需要我们对各种方法比较熟悉，能够比较灵活的应用。否则很容易得到错误的计算结果。另外一个难点是在数值计算中使用哪一个分数阶导数的定义，这就涉及到定义的选择问题。根据大量文献参考后，一般在时间分数阶导数的计算中一般使用 Caputo 定义，在空间分数阶导数方程的数值计算中较多的使用 Riemann-Liouville 定义和级数定义。

3. 分数阶导数的定义

关于分数阶导数的定义，许多数学家各自从不同角度入手, 给分数阶导数分别以不同的定义。其定义的合理性与科学性已在实践中得以检验。这个数学分支的发展已在实际问题中,得到了广泛的应用。本文这部分重点将分析各种不同的定义,也说明各种定义之间的区别与联系。为了区分整数n阶导数的表示形式$\frac{d^n y}{dx^n}$，对于分数α阶的导数，本文引入新的记号$D^{\alpha} f(x)$（下文Riemann-Liouville积分中$D^{-\upsilon} f(x)$表示υ阶积分，在此申明以防混淆）。

3.1Riemann-Liouville 定义及性质

下面先阐述在研究中应用得比较广泛的一种分数阶导数的定义：Riemann-Liouville 分数阶导数。在定义分数阶导数之前，先来阐述下 Riemann-Liouville 分数阶微积分。

3.1.1Riemann-Liouville 定义

定义1[1]　设f在$\left(0,+\infty\right)$上逐段连续，且在$J=\left[0,+\infty\right)$的任何有限子区间上可积，对$t>0,\mathrm{Re}(\upsilon)>0$，称

$$D^{-\upsilon} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_0^x (x-t)^{\upsilon-1} f(t)dt \tag{1}$$

为函数$f(x)$的υ阶 Riemann-Liouville 积分（简称 R-L 积分），并且记为$f(x)\in L_0^{\upsilon}\left(J\right)$。其中$\Gamma(\upsilon)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\upsilon-1}dt$为 Gamma 函数[2]。

结合上面的υ阶Riemann-Liouville分数阶积分的定义以及经典微积分中的整数阶微积分[13]可以给出如下的μ阶Riemann-Liouville分数阶微分的定义：

定义2[1]　设$f\in C\left(0,+\infty\right),\mu>0$,$m$是大于或等于$\mu$的最小正整数($m=\left[\mu\right]+1$)，记$\upsilon=m-\mu\geq 0$。则称

$$D^{\mu} f(x)=D^{m}\left[D^{-\upsilon} f(x)\right],\mu>0,x>0 \tag{2}$$

为函数f的μ阶Riemann-Liouville微分。

应用定义1可得μ阶Riemann-Liouville微分如下：

$$\begin{aligned} D^{\mu} f(x)=D^{m}\left[D^{-\upsilon} f(x)\right]&=D^{m}\frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_0^x (x-t)^{\upsilon-1} f(t)dt \\ &=\frac{1}{\Gamma(m-\mu)}D^{m}\left(\int_0^x (x-t)^{m-\mu-1} f(t)dt\right) \\ &=\frac{1}{\Gamma(m-\mu)}\frac{d^{m}\left(\int_0^x x^{m-\mu-1} f(x-t)dt\right)}{dx^{m}} \qquad (m-1<\mu<m) \end{aligned} \tag{3}$$

3.1.2Riemann-Liouville 分数阶导数的性质

设 $f(x)$，$g(x)$ 是满足定义1的函数，a 为任一常数，μ 为分数，$\mathrm{Re}(\mu)>0$，则有文献【1】得到以下两条线性的性质：

性质1：$D^{\mu}\left(f(x)+g(x)\right)=D^{\mu}f(x)+D^{\mu}g(x)$。

性质2：$D^{\mu}\left(af(x)\right)=aD^{\mu}f(x)$。

3.2 分数阶导数的级数定义

分数阶导数的级数定义又称为 Grunwald-Letnikov 定义。我们先来看整数阶导数的定义。一阶导数的定义：

$$f^{'}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{4}$$

二阶导数的定义：

$$f^{''}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{'}(x+h)-f^{'}(x)}{h}=\lim_{h_1\to 0}\frac{\lim\limits_{h_2\to 0}\frac{f(x+h_1+h_2)-f(x+h_1)}{h_2}-\lim\limits_{h_2\to 0}\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}}{h_1} \tag{5}$$

通过选择相同变量 h,令 $h=h_1=h_2$，则（5）式等价于

$$f^{''}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h} \tag{6}$$

那么对于 n 阶导数来说就是以下的（7）式：

$$d^{n}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{n}}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m}\binom{n}{m}f(x-mh)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{n}}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m}\frac{n!}{m!(n-m)!}f(x-mh) \tag{7}$$

从（7）式整数阶的导数我们可以从形式上得到分数阶导数的级数定义。从形式上式（7）中的 n 可以推广到非整数 $\alpha\in R$,组合数 $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 可以用 Gamma 函数 $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha-m+1)}$ 来描述。而求和的上限（并非整数 n）也变成是 $\frac{t-a}{h}$（其中 t 和 a 分别是微分的上极限和下极限）。所以我们得到了用级数定义的分数阶导数（如下（8）式），又称 the Grunwald-Letnikov fractional derivative。[14]

定义 3[14]

$$d^{\alpha}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{n}}\sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}}(-1)^{m}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha-m+1)}f(x-mh) \tag{8}$$

在 $f(x)$ 具有 $m+1$ 阶连续导数,并且 m 至少取 $[\alpha]=m-1$ 的条件下，Riemann-Liouville

定义与Grunwald-Letnikov定义等价[15]。所以由（7）到（8）的推广也是合理的。

3.3 分数阶导数的 Caputo 定义

定义 4[15][16] 对于正的非整数α（在阶数α为负实数时，Caputo 定义与 Riemann-Liouville 定义等价），$f(x)\in C\left(0,+\infty\right)$,$\alpha>0$,$m$是大于或等于$\alpha$的最小正整数($m=\left[\alpha\right]+1$)。则称

$$D^{\alpha}f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\displaystyle\int_{0}^{x}\frac{f^{(m)}\left(t\right)dt}{(x-t)^{\alpha+1-m}},0\le m-1<\alpha<m\\ \dfrac{d^{m}f(x)}{dx^{m}},\alpha=m\in N\end{cases} \tag{9}$$

为函数$f(x)$的α阶Caputo分数导数。

3.4 三种分数阶导数定义的关系

Riemann-Liouville定义是Grunwald-Letnikov定义的扩充，其应用范围也就更广泛。与Grunwald-Letnikov定义扩展到Riemann-Liouville定义的思维方式相似，Caputo定义也是对Grunwald-Letnikov定义的另一种改进。对于函数$f(x)$的正的非整数α阶导数,先进行m阶导数，再进行$m-\alpha$阶积分。

Riemann-Liouville定义与Caputo定义都是对Grunwald-Letnikov定义的改进。在阶数α为负实数和正整数时，它们是等价的。由文献【15】分析可知，在条件：(1)函数$f(x)$有$m+1$阶连续导数，m至少取$[\alpha]=n-1$。（2）$f^{(k)}(a)=0,k=0,1,2,\cdots,n-1$之下，它们也是等价的。否则，它们不等价。引入Riemann-Liouville定义，可以简化分数阶导数的计算；引入Caputo定义，让其拉普拉斯变换式更简洁，有利于分数阶微分方程的讨论。[11][12]

现实应用中，具体使用哪一个分数阶导数的定义，还是要看具体的情况而定。

4. 分数导数的应用举例

分数阶导数在很多领域都有应用，下面拿与生活联系比较紧密的气候研究、医学图像处理、地震分析为例进行进一步地阐述与说明。

4.1 天气和气候的研究

我们都知道没有一天天气是一样的，而气候的预测也不可能提到日程上来研究。这说明天气和气候的研究是比较困难的。天气和气候虽然遵从流体力学规律,但是却显示出随机性,研究天气和气候之间的关系必须引入分数阶的导数和积分,从物理上讲不外乎说明天气和气候的随机程度是不相同的。为此提出气候的q ($0\le q\le 1$) 阶微商是天气[17]。此时引入天气和气候之间的桥梁——分数阶导数，这为天气与气候的研究带来很大的方便。

4.2 医学图像处理

医学图像一般是指为了清楚地看到病人内部的局部器官病变情况而通过一定的设备仪器得到的图片,例如CT、B超等图片。由于设备,技术等方面的原因,得到的医学图像有可能模

糊不清。图像的不清晰对临床诊断带来很大的麻烦。所以要考虑怎样处理，可以得到更清晰的医学图像。

现在从分数阶微分基本定义出发,可以作用于二维医学图像的分数阶微分掩模,掩模可以根据对图像的需求进行增强。[3] 通过实验证明,这个方法可以有效完成对医学图像的处理,并且弥补了传统方法不能连续改变处理效果的缺点,是一种简单可行并且效果较好的图像增强方法。

所以说分数阶导数对医学图像的处理，帮助是很大的。

4.3 地震奇异性分析

由文献【4】，我们知道传统的地震解释主要是观测地震资料的振幅及相位的变化, 而振幅往往并不能反映真实的地质情况。地震界面可能是岩性分界面也可能是岩性过渡带, 岩性过渡带的地震反射波是入射波的分数阶导数。

因此我们将分数阶导数引入地震属性计算中, 构建一种对波形敏感而对振幅变化不敏感的新属性——奇异性, 用以刻画反射界面的横向变化。

方法的基本原理是首先计算地震子波的不同分数阶导数，然后利用匹配追踪算法将地震数据分解成地震子波的不同分数阶导数,进而获得反射波同相轴的分数阶。[4] 对胜利油田某区块实际二维地震资料进行了试处理,结果表明分数阶导数剖面能很好地描述不整合面,反映实际界面的横向变化。

【参考文献】

[1] 王小东.Riemann-Liouville 分数阶微积分及其性质证明[D].太原理工大学硕士学位论文,2008.

[2] 邓伟华.分数阶微分方程的理论分析与数值计算[D].上海大学博士学位论文,2007.

[3] 晏祥玉,周激流.分数阶微积分在医学图像处理中的应用[J]. 成都信息工程学院学报, 2008, 23 (01):38~41.

[4] 宋建国,刘垒,李辉等.分数阶导数在地震奇异性分析中的应用[J].石油物探, 2009,48(01):72~75.

[5] 刘朝辉,张为民.含分数阶导数的粘弹性固体模型及其应用[J]. 株洲工学院学报,2002,16(04):23~25.

[6] 刘林超,黄学玉,闫启方.基于 Lagrange 变分法的分数导数粘弹性梁振动分析[J]. 噪声与振动控制,2007,(02):43~46.

[7] 胡卫兵,何建.粘弹性阻尼材料的分数导数模型的对比分析[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版),2002,34(03):222~227.

[8] 王少伟.分数阶微积分理论在粘弹性流体力学及量子力学中的某些应用[D].山东大学博士学位论文,2007.

[9] 姚奎.分形函数与分数阶微积分-构造性方法的应用[D].浙江大学博士学位论文,2003.

[10] 王振滨,曹广益,曾庆山.分数阶 PID 控制器及其数字实现[J].上海交通大学学报,2004,38(04):517~520.

[11] 袁晓,张红雨,虞厥邦.分数导数与数字微分器设计[J].电子学报,2004, 32(10):1658~1665.

[12] 孙洪广. 分数阶微积分的研究[EB/OL] .（2010-07-30）[2010-08-03]. http://www.sciencenet.cn/blog/user_content.aspx?id=348472.

[13] 陈纪修.数学分析（第二版上册）[M]. 北京:高等教育出版社,2008:119~129.

[14] Adam Loverro. Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer.Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame,May 8, 2004.

[15] 林孔容.关于分数阶导数的几种不同定义的分析与比较[J].闽江学院学报,2003,24(05):3~6.

[16] 胡亦郑,刘发旺.一类分数阶控制系统的数值解法[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2005,44(03):313~317.

[17] 刘式达,时少英,刘式适等.天气和气候之间的桥梁-分数阶导数[J].气象科技,2007,35(01):15~19.

论文完成时间：2010 年 8 月 30 日