第十四章：现代数学概观－二十世纪的数学

第一节　五大新兴学科的建立

一、数理逻辑

1．符号逻辑

数理逻辑作为一门数学学科，来源于对数学和逻辑基础的探讨，它最早可追溯到莱布尼茨，他关于逻辑演算的观念预示着布尔代数，而英国数学家布尔(G．Boole 1815—1864)在1847年出版《逻辑的数学分析》一书，正式推出所谓布尔代数，在逻辑上相当于命题演算．其后由英国数学家杰方斯(W．S．Jevons，1835—1882)和小皮尔斯(C．S．Peirce，1839—1914)在1874年加入次序关系，德国数学家施罗德（E．Schröder，1841—1902）在他的《逻辑代数讲义》第一卷中加以公理化．第一个完全形式化的语言是德国数学家弗瑞格(G．Frege，1848—1925)在1879年出版的《概念文字》中引进的．他首先定义了全称量词及存在量词．并引进一般的谓词逻辑．不过相应的逻辑代数一直到1950年才由波兰数学家塔斯基(A．Tarski，1902—1983)所发展，他引进所谓“圆柱代数”．1955年美国数学家哈尔莫斯(P．Halmos，1916—)又引进多进代数，形成一般的逻辑代数理论．1889年意大利数学家皮亚诺(G．Peano，1858—1932)提出自然数的公理系统，即后来所谓皮亚诺算术公理．而戴德金在前一年也提出类似的公理系统．弗雷格在1884年出版的《算术基础》中开始提到算术无非是扩展的逻辑．戴德金也提出类似的观点．弗雷格在1893年出版的《算术的基本规律》第一卷中，用五条逻辑公理来推导算术命题．1902年6月罗素给弗雷格一封信，提出著名的罗素悖论，并指出弗雷格的矛盾．弗雷格在1903年出版的《算术的基本规律》第二卷附录中承认这是对他的巨大打击，正是这个悖论，揭开了数理逻辑新的一章．

2．罗素悖论

罗素的悖论是关于集合论的，康托尔已经意识到不加限制地谈论“集合的集合”会导致矛盾．其他人也发现集合论中存在矛盾．而罗素在1903年出版的《数学的原理》(Principles of Mathematics)中，则十分清楚地表现出集合论的矛盾，从而动摇了整个数学的基础．罗素的悖论是说：可以把集合分成两类：凡不以自身为元素的集合称为第一类集合，凡以自身做为元素的集合称为第二类的集合，每个集合或为第一类集合或为第二类集合．设M表示第一类集合全体所成的集合．如果M是第一类集合，$M \notin M$，但由M的定义，$M \in M$，导致矛盾。如果M是第二类集合，则$M \in M$，但由M的定义，第二类集合$M \notin M$，同样也导致矛盾。发现了这个矛盾之

后，导致第三次数学危机，在数学界出现了各种意见，从抛弃集合论到尽可能保持集合论在数学中的基础地位的都有．由于20世纪数学的发展主流是建立在集合论基础之上，这里只考虑数学家如何消除悖论．在20世纪初，大致有两种办法，一个办法是罗素的分支类型论，它在1908年发表，在这个基础上罗素与怀特海(A．N．Whitehead，1861—1947)写出三大卷《数学原理》(principia Mathematica，1910—1913)，成为数理逻辑最早一部经典著作．还有一个办法是公理方法限制集合，由此产生公理集合论．

3．集合论的公理化

康托尔本人没有对集合论进行公理化．集合论公理化是策梅罗(E．Zermelo，1871—1953)在1908年发表的．富兰克尔(A．Fraenkel，1891—1965)等人曾加以改进，形成著名的ZF系统，这是最常用的一个系统，因此大家都希望从中推出常用的选择公理(1904年策梅罗引进它来证明康托尔的良序定理)以及著名的连续统假设(即第一个基数ω_0与2^{ω_0}之间没有其他基数)等．

1940年哥德尔(K．Gödel，1906—1978)证明，选择公理和连续统假设与ZF系统是相容的．1963年，柯亨(P．Cohen，1934—)发明“力迫法”证明这两条“公理”的否定也不能在ZF系统中证明，从而推出其独立性．

4．希尔伯特纲领

为了使数学奠定在严格公理化基础上，1922年希尔伯特提出希尔伯特纲领，首先将数学形式化，构成形式系统，然后通过有限主义方法证明其无矛盾性．

1928年希尔伯特提出四个问题作为实现其纲领的具体步骤：

(1)分析的无矛盾性．1924年阿克曼(W．Ackermann，896—1962)和1927年冯·诺伊曼(J．Von Neumann，1903—1957)的工作使希尔伯特相信只要一些纯算术的初等引理即可证明分析的无矛盾性．

1930年夏天，哥德尔开始研究这个问题，他不理解希尔伯特为什么要直接证明分析的无矛盾性．哥德尔认为应该把困难分解：用有限主义的算术证明算术的无矛盾性，再用算术的无矛盾性证明分析的无矛盾性．哥德尔由此出发去证明算术的无矛盾性而得出不完全性定理．

(2)更高级数学的无矛盾性．特别是选择公理的无矛盾性．这个问题后来被哥德尔在1938年以相对的方式解决．

(3)算术及分析形式系统的完全性．这个问题在1930年秋天哥尼斯堡的会议上，哥德尔已经提出了一个否定的解决．这个问题的否定成为数理逻辑发展的转折点．

(4)一阶谓词逻辑的完全性，这个问题已被哥德尔在1930年完全解决．

这样一来哥德尔把希尔伯特的方向扭转，使数理逻辑走上全新的发展道路．

5．哥德尔的三项重大贡献

除了连续统假设的无矛盾性之外，哥德尔在1929—1930年证明下面两大定理：

(1)完全性定理：哥德尔的学位论文《逻辑函数演算的公理的完全性》解决了一阶谓词演算的完全性问题．罗素与怀特海建立了逻辑演算的公理系统及推演规则之后，数学家最关心的事就是公理系统的无矛盾性及完全性．所谓完全性就是，每一个真的逻辑数学命题都可以由这个公理系统导出，也就是可证明．命题演算的完全性已由美国数学家波斯特(E．Post，1897—1954)在1921年给出证明．而一阶谓词演算的完全性一直到1929年才由哥德尔给出证明．

(2)不完全性定理：这是数理逻辑最重大的成就之一，是数理逻辑发展的一个里程碑和转折点．

哥德尔证明不完全性定理是从考虑数学分析的无矛盾性问题开始的．1930年秋在哥尼斯堡会议上他宣布了第一不完全性定理：一个包括初等数论的形式系统，如果是无矛盾的，那就是不完全的．不久之后他又宣布：如果初等算术系统是无矛盾的，则无矛盾性在算术系统内不可证明．

哥德尔的不完全定理造的是一个不自然的数论问题，数学家一直希望在一阶皮亚诺算术中找到一个数学表述既简单又有趣的数论问题，就像哥德巴赫猜想或费马大定理来说明算术的不完全性．这一直到1977年才由巴黎斯(J．Paris)等人造出，这更加证明希尔伯特纲领是不可能实现的．

6．哥德尔以后的数理逻辑．哥德尔的不完全性定理从根本上动摇了数学的基础，它指出绝对的无矛盾性的证明是不可能实现的，数学家只能限制自己的领域及要求．数理逻辑也成为一个专门的学科，它分成四大分支：证明论、递归论、公理集合论及模型论，它们都在30年代发展起来．证明论仍然继续希尔伯特纲领，但不得不放宽有限主义的条件．其中最主要的成就是根岑(G．Gentzen，1909—1945)在1934年用超穷归纳法证明自然数算术的无矛盾性．递归论也奠定基础，1935年克林尼(S.Kleene，1909—1994)定义一般递归函数，1936年图林(A．Tu¯ring，1912—)提出图林机概念．同年车尔赤(A．Church1903—)提出车尔赤论点：任何有效可计算函数均等价于一般递归函数．递归论与数学关系至为密切，它不仅为计算机科学奠定基础，同时一系列判定问题则直接涉及数学基本问题：如群的基本问题是问什么时侯两个群同构，对于有限表出群是1908年提出的，到50年后，苏联数学家阿其扬(C．И．Адьян，)在1957年及以色列数学家拉宾(M．O．Rabin，)在1958年独立证明这问题是不可解的．在这个基础上，小马尔科夫(A．A．MapkoB，1903—1979)证明拓扑学的基本问题——同胚问题也是不可解的，1970年最终证明希尔伯特第十问题是不可解的．模型论首先是处理真假问题，它指出一系列命题在某些模型下为真，而在另外模型下非真．其次它构造一批非标准模型．1934年斯科仑(T．Skolem，1887—1968)给出整数的非标准模型，1961年鲁宾逊(A．Robinson，1918—1974)提出非标准分析，使莱布尼茨的无穷小合法化，创立了非标准数学．

二、抽象代数学

代数学与拓扑学是现代数学的两大部门．它们构成现代数学的基础与核心．没有代数学和拓扑学，现代数学(除了那些较为孤立的、相对地讲不太重要的学科)可以说寸步难行．

抽象代数学或近世代数学是在20世纪初发展起来的．1930—1931年范·德·瓦尔登(B．L．vander Waerden，1903—)的《近世代数学》(Moderne Algebra)一书问世，在数学界引起轰动，由此之后，抽象代数学或近世代数学成为代数学的主流，不久之后也就理所当然地把“抽象”及“近世”的帽子甩掉，堂尔皇之成为代数的正统．

范·德·瓦尔登的书至今仍然是代数学的模式．它是根据德国女数学家E．诺特(E．Noether，1882—1935)和德国数学家阿廷(E．Artin，1898—1962)的讲义编写而成，在精神上基本来源于他们两位，特别是诺特，被公认为“近世代数学之母”．在诺特之前，不少大数学家都对近世代数学有过这样或那样的贡献，但是这种与经典代数学迥然不同的思想主要来源于戴德金和希尔伯特，戴德金不仅引进大多数抽象代数观念——如理想、模、环、格等，而且初步研究它们的结构及分类，而希尔伯特的抽象思维方式及公理方法则对现代整个数学都有举足轻重的影响．

抽象代数学的研究对象与研究目标与经典代数学有着根本的不同：经典代数学的主要目标是求解代数方程和代数方程组，而抽象代数学的目标则是研究具有代数结构的集合的性质，刻划它们并加以分类，这些对象是用公理定义的．

1．域论

从古代起，人们就已经熟悉有理数和它们的运算——加法和乘法．这些运算满足加法交换律和加法结合律，乘法交换律和乘法结合律，以及分配律，而且对于加法存在零元素(0)及逆元素(倒数)．所有有理数的集合是人们最早认识的具体的域，后来也知道实数集合、复数集合同样满足上述公理，它们也是城．除了这些最熟悉的域之以，在19世纪研究得最多的域是代数数域，这些都是含有无穷多元素的数域．有没有有限多个元素的域呢？1830年伽罗瓦已知有有限多个元素的域(后来被称为伽罗瓦域)，其元素被称为伽罗瓦虚数，它们满足pa＝0，其中p是一个素数，p称为域的特征．伽罗瓦曾具体证明，在一个特征为p的伽罗瓦域中，元素个数是p的一个幂．如在当时的情况一样，伽罗瓦所作的一切都是有具体表示的．到19世纪末，人们知道其他域的例子还有有理函数域及代数函数域．

从整体结构上对域进行考察始自戴德金及克罗内克对代数数域的研究(从1855年起)．但抽象域的观念则来自德国数学家韦伯(H．Weber，1842—1913)，他的思想来自抽象群的观念．后来美国数学家狄克逊(L．E．Dickson，1874—1954)及亨廷顿(E．V．Huntington，1874—1952)给出域的独立的公理系统．在韦伯的影响下，德国数学家施泰尼茨(E．Steinitz，1871—1928)在1910年发表《域的代数理论》一文，为抽象域论奠定了基础．他把域分为两种类型：一种是特征为p的域，也即对所有元素a满足pa＝0的域，它们一定包含最小的城(称为素域)，最小的域一定是只含p个元素的伽罗瓦

域．另一种是不存在这种p的域，称为特征0，其素域一定是有理数域．不管域属于哪一种类型，任何域均可由素域添加一些新元素“扩张”而成．所以域的根本问题是研究域的扩张．他对扩张进行了分类，其中主要的一类是添加系数在原域中的多项式的根后所得的扩张(代数扩张)．当一个域通过代数扩张不能再扩大时称为代数封闭域．施泰尼茨证明，每个域均有唯一的代数封闭域．特别他还对特征p一般域胁许多特殊性质如不可分性、不完全性进行研究．

关于抽象有限域，已经有了相当完整的结果：1893年美国数学家莫尔(E．H．Moore，1862—1932)证明，任何一有限域必定与某一个伽罗瓦域同构．反过来，对于任意素数p和正整数a，必定存在唯一一个伽罗瓦域，具有p^a个元素．有限域理论在数论、编码理论、组合理论及数理统计等方面有着许多应用．

在域论中引进p进域是一个重大成就．德国数学家亨泽尔(K．Hensel，1861—1941)在1908年出版的《代数数论》(Theorie der algebraischen Zahlen)中系统阐述了p进数，他对这种数规定了加、减、乘、除四种基本运算，构成一个域称p进域，而它是有理数域的一个完备化，如同实数域一样．但是与实数域性质的一个很大的不同是实数域具有阿基米德性质，也就是对任何两个实数a，b总存在一个正整数n，使na＞b．p进域虽然也有一个自然的顺序，但却没有阿基米德性质．p－进数域是一种“局部”域，在它里面也可定义整数及代数数，它的建立大大有助于数论的发展．亨泽尔之后，抽象赋值论得到发展，在代数数论及代数几何学上有着重要应用．

抽象理论的建立不仅使已有的零散知识系统化，而且有助于许多问题的解决，1927年阿廷解决希尔伯特第17问题就是靠他引进抽象的实域(他称为形式实域)．实域k是把实数域的一个特性抽象化：即-1不能表示为k中元素的平方和．通过这个概念，他证明“任何正定有理函数都可表示为有理函数平方和”．

2．环论

环的概念原始雏型是整数集合．它与域不同之处在于对于乘法不一定有逆元素．抽象环论的概念来源一方面是数论，整数的推广——代数整数具有整数的许多性质，也有许多不足之处，比如唯一素因子分解定理不一定成立，这导致理想数概念的产生．戴德金在1871年将理想数抽象化成“理想”概念，它是代数整数环中的一些特殊的子环．这开始了理想理论的研究，在诺特把环公理化之后，理想理论被纳入环论中去．

环的概念的另一来源是19世纪对数系的各种推广．这最初可追溯到1843年哈密顿关于四元数的发现．他的目的是为了扩张用处很大的复数．它是第一个“超复数系”也是第一个乘法不交换的线性结合代数．它可以看成是实数域上的四元代数．不久之后凯莱得到八元数，它的乘法不仅不交换，而且连结合律也不满足，它可以看成是第一个线性非结合代数．其后各种“超复数”相继出现．1861年，魏尔斯特拉斯证明，有限维的实数域或复数域上的可除代数，如满足乘法交换律，则只有实数

及复数的代数(1884年发表)．1870年戴德金也得出同样结果(1888年发表)．1878年弗洛宾尼乌斯(F．G．Frobenius，1849—1917)证明实数域上有限维可除代数只有实数、复数及实四元数的代数．1881年小皮尔斯也独立得到证明．1958年用代数拓扑学方法证明，实数域上有限维可除代数，连非结合可除代数也算在内，只有1，2，4，8这四种已知维数．可见实数域及复数域具有独特的性质．

关于域上线性结合代数的研究在19世纪末处于枚举阶段，1870年老皮尔斯(B．Peirce，1809—1880)发表《线性结合代数》，列举6维以下的线性结合代数162个．他还引进幂零元与幂等元等重要概念为后来的结构理论奠定基础．1898年、嘉当(E．Cartan)在研究李代数的结构基础上，对于结合代数进行类似的研究，1900年，德国数学家摩林(T．Molien，1861—1941)征明，复数域上维数≥2的单结合代数都与复数域上适当阶数的矩阵代数同构．线性结合代数的结构定理是1907年由美国数学家魏德本(J．HM．Wedderburn，1882—1948)得出的：线性结合代数可以分解为幂零代数及半单代数，而半单代数又可以表示为单代数的直和．单代数可表为域上可除代数的矩阵代数．这样结合代数就归结为可除代数的研究．可除代数有着以下的结果．1905年魏德本证明：有限除环都是(交换)域，也即伽罗瓦域．当时除了伽罗瓦域及四元数之外，不知道有别的除环．20世纪虽然发现了一些新的除环，但除环的整个理论至今仍不完善．

从线性结合代数到结合环的过渡是阿廷完成的．1928年，阿廷首先引进极小条件环(即左、右理想满足降键条件的环，后称阿廷环)，证明相应的结构定理．对于半单环的分类，雅可布孙(N.Jacobson，1910—)创立了他的结构理论．他认为对任意环均可引进根基的概念，而对阿廷环来说，根基就是一组真幂零元．对于非半单的阿廷环(主要出现于有限群的模表示中)，如福洛宾尼乌斯代数及其推广也有许多独立的研究．而与阿廷环对应的是诺特环，对于有么无的环，秋月康夫(1902—1984)及霍普金斯(C．H opkins)证明阿廷环都是诺特环．对于诺特环，却长期没有相应的结构理论．一直到1958年英国数学家戈尔迪(A．W．Gold－ie)才取得突破，他证明任何诺特半素环都有一个阿廷半单的分式环，这才促进了新研究．与诺特环平行发展的是满足多项式等式的环．近来环表示论及同调方法的应用对结合环理论有极大促进．

环论的另一来源是代数数论及代数几何学及它们导致的交换环理论．1871年戴德金引进理想概念，开创了理想理论．环这个词首先见于希尔伯特的数论报告．代数几何学的研究促使希尔伯特证明多项式环的基定理．在本世纪初英国数学家腊斯克(E．Lasker，1868—1941)及麦考莱(F．S．Macaulay，1862—1937)对于多项式环得出分解定理．对于交换环的一般研究来源于E．诺特．她对一般诺特环进行公理化，证明准素分解定理从而奠定交换环论乃至抽象代数学基础，其后克鲁尔(W．Krull，1899—1971)给出系统的研究，他还引进了最值得注意的局部环．四十年代，薛华荔、柯恩(I．S．Cohen，1917—1955)及查瑞斯基(O．Zariski，1899—1986)对局部环论进行了系统的研究．

3．群论

19世纪末抽象群开始成为独立研究的对象，当时主要问题仍是以置换群为模式的有限群，问题涉及列举给定阶数的所有群以及群的可解性的判据．

当时主要的定理是由挪威数学家西洛(L．Sylow，1832—1918)在七十年代及德国数学家荷尔德(O. Hölder，1859—1937)在九十年代得出的．而19世纪90年代群论最主要成就是群表示论的出现，它是由德国数学家福洛宾尼乌斯奠定的．后由他的学生舒尔(I．Schur，1875—1941)所发展，成为研究群论不可缺少的工具．所谓群表示即是把群具体实现为某种结构的自同构群，例如域F上的有限维线性空间的线性变换群，通常是把群的元素与F上的n×n可逆矩阵相对应．在英国数学家伯恩塞德(W．Burnside，1852—1927)的经典著作《有限阶群论》(Theory of Groups of Finite Order)第二版(1911)已经进行综述并给出应用．

20世纪有限群论的中心问题是有限单群的分类．很久以来，就已经知道一个相当长的有限单群的表，除了素数阶循环群之外，对于每一个整数n≥5存在一个n！/2阶单群，它由n个事物的所有偶置换构成，这就是所谓交错群．当n=5时，它就是二十面体群．另外还知道许多射影特殊线性变换群PSL(n，q)，它们通过行列式为1的n×n矩阵群(元素取在有限域GL(q)中)的商群构造出来．另外对于正交矩阵、辛矩阵、酉矩阵也可以造出一批单群来．这些“典型群”，从若尔当时候起就已知道，后来经过美国数学家狄克逊、荷兰数学家范·德·瓦尔登、法国数学家丢东涅(J．Dieudonné，1906—1992)进行系统研究．真正重大的突破是1955年薛华荔在日本《东北数学杂志》上发表的“论某些单群”的论文，这篇论文的重要性不仅展示一些新单群，而且更重要的是对于以前知道的绝大部分通过李代数换基的办法进行统一的处理，从而得出九个系列的薛华荔群．其后，这些薛华荔群经过美国数学家斯坦伯格(R．Steinberg，1922—)、韩国数学家李林学、比利时数学家梯茨(J．Tits，1930—)、日本数学家铃木通夫(1926—)等人加以扩充，得出全部李型单群的16系列．除了上述这18个序列中的有限单群之外，还有几个不属于它们的所谓“散在单群”，其中头一个是7920阶的群M_{11}是法国数学家马丢(E．L．Mathieu，1835—1890)在1861年发现的，他不久又发现另外4个单群M_{12}，M_{22}，M_{23}，M_{24}．一直到1965年之前再没有发现新的散在单群了．突然1965年南斯拉夫数学家严科(Z．Janko，1932—)发现了一个175560阶的新单群，其后10年间，陆续发现另外20个敬在单群，其中最大的称为费舍尔(B．Fischer，1936—)“魔群”，其阶大约为8.10^{53}，到这时候是否所有单群均已找到，也就是有限单群的分类已经完成了呢？在这条漫长的路上，首先的突破是一系列群论性质及表示论的成果，其中包括1955年布劳尔(R．Brauer 1901—1977)的工作．第二个突破是1963年美国数学家费特(W．Feit，1930—)和汤姆逊(J．G．Thompson，1932—)证明除循环群之外，奇阶群都是可解群，这个长达250页的论文包括了极其丰富的信息．70年代，在群的结构研究上有了新的突破，最终导致1981年，有限单群的分类彻底完成，不过全文需要1万页以上，这是各国上百位群论专家通力合作的结果．

对于无穷阶的离散群，也有一些重要的研究，其中重要的是与数理逻辑有关的“字的问题”，即两个符号序列何时相等，对于有限生成的具有有限个关系式的群，1955年左右苏联数学家诺维科夫(П·С·Новиков，1901—1975)、美国数学家布里顿(J．L．Britton)和布恩(W．Boone，1920—1983)证明一般的字的问题是不可解的，也就是不存在一个普遍的算法来判定两个字是否相等，但是另一方面德国数学家马格努斯(W．Magnus，1907—)在1932年解决一个关系式的有限生成群的字的问题．另一个重要的问题是伯恩赛德问题，他问一个有限生成的群如果其所有元素都是有限阶的，该群是否有限，这个问题一直到1964年由前苏联数学家考斯特利金(А．И．Кострикин，1929—)举出例子而得出否定的回答．另外还有一个狭义的伯恩赛德猜想，即有限生成群当所有元素x满足x^n＝0是有限群，现在知道当n＝2，3，4，6时，狭义伯恩赛德猜想成立，但如果n相当大，诺维科夫和布里顿等人也举出反例．

三、测度与积分理论

测度是长度、面积和体积概念的精密化及推广．各民族数学发展一开始均致力于测量长度和面积，得出相应的公式及方法，而统一的求积方法一直到牛顿和莱布尼茨建立微积分之后才得到．这时求积问题变成一个特殊的积分问题．但积分是一个相当复杂的概念，19世纪由于分析的严格化才导致由柯西、黎曼及达布相继改进的黎曼积分的概念，最后确定下来．

随着康托尔点集论的建立，要求对更一般的点集的‘大小’进行比较及量度，这要求定义测度．先是对黎曼可积性条件中函数的不连续点集的“测度”给出定义．最早是哈那克(A．Harnack，1851—1888)、杜布瓦—瑞芒(P．du Bois Rey－mond，1831—1889)、史托尔茨(O．Stolz，1842—1905)及康托尔在1881到1885试着做出定义，他们均采用覆盖区间长度的下确界，但是这样定义有毛病．例如，两个无公共点集的并集的“测度”有时能够小于两集的“测度”之和，除了上述定义的“外”测度之外，最先定义“内”测度的是皮亚诺，他在1887年定义“可测”集为内、外测度相等，这样虽然克服上述困难，但有界开集并不一定可测．若尔当在他的《分析教程》第一卷第二版(1893)中也做了类似的定义，同样也有类似的毛病．对这些毛病的补救来自波莱尔(E．Borel，1871—1956)，他在《函数论教程》中大大改进了以前的测度观念，利用可数可加性对任一有界开集构造地定义测度．他还考虑零测度集(实际上这个观念可以追溯到黎曼)．而真正把波莱尔的方法同皮亚诺—若尔当的办法结合而形成系统测度论的则是波莱尔的学生勒贝格，这些发表在他的博士论文《积分、长度、面积》当中．

勒贝格的功绩不仅在于建立系统的测度理论，更主要的是建立系统的积分理论．在勒贝格之前，除了黎曼积分之外，还有斯蒂尔吉斯(T．J．Stieltjes，1856—1894)积分．斯蒂尔吉斯在1894年发表的“连分式的研究”中证明：如连分式

$$\frac{1}{a_1 Z}+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3 Z+}\frac{1}{a_4}\frac{1}{a_5 Z}\cdots\frac{1}{a_{2n}+}\frac{1}{a_{2n+1}Z+}\cdots(1)$$

(其中a_i为正实数，z为复数)的系数级数$\sum_{N=1}^{\infty}a_n$发散，则式(1)收敛到一函数F(Z)，F(Z)可表为

$$F(Z)=\int_0^{\infty}\frac{d\varphi(u)}{u+Z}$$

其中$\varphi(u)$表示u的递增函数，这样他可把黎曼和稍加修改写成$\sum_{i=0}^{n=1}f(\xi_i)\varphi((x_{i+1})-(x_i))$，然后取极限即得．但他没有严格的深入讨论．虽然黎曼积分对于一般的数学分析已经足够，但是还有一系列不理想的地方．

微积分的基本定理是微分和积分互为逆运算，也就是说如果

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

则导数F′(x)存在，而且等于f(x)，至少在f光滑的点是如此．但是1881年沃尔泰拉(V．Volterra，1860—1940)还在比萨大学做学生时，发现一个例子：一个函数F在(0，1)区间上定义有界，其导数f＝F′处处存在，但是在当时流行的积分——黎曼可积的意义是不可积的．因此，需要定义一种积分，它可以在更广的一类函数上定义，而且使微分和积分成为互逆的运算．另外对这种积分还希望收敛级数可以逐项积分．勒贝格在他的1902年学位论文中迈出新的一步，他定义勒贝格积分与以前定义积分的方式不同，以前是先定义积分，然后由积分得到“测度”，勒贝格与此相反，他先定义测度，然后定义积分．他定义积分时，不去把自变量的区间加以区分，而把因变量y的区间(对于实函数来说是R的子集)加以重分(成有限个区间)，再仿照通常的办法定义积分，这样就可以使一些很坏的函数也成为勒贝格可积的，最明显的例子就是狄利克雷函数．这样，大大扩充了可积函数的范围．另外如果勒贝格可积函数同时也黎曼可积，则两个积分相等．并且与一些极限运算可以交换，而且可以推广到高维．

勒贝格积分虽然能解决沃尔泰拉原来的问题，但并不足够一般以致能够使所有具有有限导数f(x)＝F′(x)的函数F(x)的导数f(x)=F′(x)都可积．为此，法国数学家当日瓦(A．Denjoy，1884—1974)在1912年和德国数学家佩隆(O．Per－ron，1880—1975)在1914年分别设计了以他们各自的姓定义的积分．其后鲁金(Н．Н．Лузин，1883—1950)给出描述性定义，这三者是等价的．

1915年法国数学家弗雷歇把积分扩张到抽象集合的泛函上．他的模式取自1913年奥地利数学家拉东(J．Radon，1887—1956)的工作，其中引进集函数．他实际上综合了斯蒂尔吉斯积分与勒贝格在1910年把勒贝格测度论推广到高维(三维及三维以上)欧氏空间的研究．勒贝格通过可测函数的积分定义一个集函数，证明它是完全可加的而且绝对连续的．不过他只有点函数观念，而拉东则利用

集函数定义拉东测度．1930年波兰数学家尼古丁(O．Nikodyn，1887—1974)对抽象测度论完成了1910年勒贝格定理在抽象测度论的推广，最终完成抽象测度论的建立．它不仅构成概率论的基础，同时也是抽象调和分析、谱理论等分支不可少的前提．

四、泛函分析

泛函分析是一门新兴学科，1932年才被正式列入德国《数学文摘》．“泛函分析”这个词首先出现于列维(P．Lévy，1886—1971)的1922年出版的《泛函分析教程》中．它是一门分析学科，但与传统的分析学科不太一样，后者强调演算，而前者强调概念．它们的对象也有所不同，后者主要讨论个别函数(类)的性质，而前者主要讨论函数空间及其上算子的集合，特别是其上的拓扑、代数及序结构．不过很难说它有一个统一的对象及目标．泛函分析大致可分为四大块：一是函数空间理论，从希尔伯特空间、巴拿赫空间到一般拓扑线性空间的理论．二是函数空间上的分析，这是最先发展的一部分，即所谓泛函演算．三是函数空间之间的映射及算子理论，发展最成熟的是希尔伯特空间中的线性算子理论．四是算子(或函数)集合的代数结构，如巴拿赫代数、冯·诺伊曼代数、C*代数以及算子半群等理论．

泛函分析的来源可以追溯到18世纪变分法的产生．正如微积分研究函数的极值一样，变分法研究函数集(空间)上的函数——泛函的极值．而泛函分析的直接推动力则是19世纪末兴起的积分方程的研究．它导致线性泛函分析的诞生．

泛函分析的发展可分三个时期：

第一阶段是创始时期，大约从19世纪80年代到20世纪20年代．开始是意大利一些数学家引进泛函演算，特别是他们引进原始泛函以及线性算子的概念．后来法国数学家发展了泛函演算，这反映在阿达马(J．Hadamard)在1897年第一次国际数学家大会上的报告中．他为了研究偏微分方程而考虑了闭区间[0，1]上全体连续函数所构成的族，发现这些函数构成一个无穷维的线性空间，并于1903年定义了这个空间上的函数，即泛函．这些还只是具体的结果．

法国数学家弗雷歇利用当时的集合论观念把前人的结果统一成为一个抽象的理论，他把他们的共同点归纳起来而且加以推广：

(1)把函数或曲线看成一个集合或空间中的点．不妨把它们看成一个抽象集合．

(2)点列的极限概念也可以推广，这样有极限概念的集合他称为L空间，这是后来拓扑空间的萌芽．

(3)集合上可以定义取值在实数里的实函数，即泛函．由于有了极限概念，就可以定义泛函的连续性．

(4)泛函可以进行代数运算，也可以进行分析演算，比如微分．这样就成为名符其实的泛函分析

了．

1906年他还在抽象的空间中引进“距离”的观念，具有欧几里得空间距离的性质，这种空间就有更丰富的结构．

大约在弗雷歇同时，希尔伯特对于积分方程进行系统的研究．他在前人基础上，深刻认识积分方程与无穷多变无线性方程组之间的相似性，积分方程的有解性与无穷多变元的收敛性条件有关．这样他实际上得到了具体的希尔伯特空间的理论．抽象的希尔伯特空间理论是他的学生施密特(E．Schmidt，1876—1959)得到的．他引进实和复的希尔伯特空间的几何观念，把函数看成是平方可积序列的空间(l^2空间)的点．1907年，匈牙利数学家黎斯(F．Riesz，1880—1956)等人引进勒贝格平方可积空间(L^2空间)，发现其性质和l2空间相同，两个月之后，德国数学家费歇尔(E．Fischer，1875—1959)与黎斯(M．Riesz，1886—1969)证明l^2空间和L^2空间同构，只不过是同一种抽象希尔伯特空间的两种具体表现而已．这也反映出研究抽象空间的重要意义．黎斯—费歇尔定理也更清楚表明积分理论和抽象空间的泛函之间的紧密联系．

1910年黎斯仿照L^2空间研究了L^p空间($1<p<\infty$)就是p次方可积函数全体构成的空间，后又研究l^p空间，它们不是希尔伯特空间，而是巴拿赫(S．Banach，1892—1945)空间．他发现l^p上连续线性泛函全体

构成一个“对偶的”空间L^q，且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$．这些空间在研究偏微分方程

方面是不可少的工具．

第二阶段泛函分析正式发展成为一门学科， 1920年到1922年间奥地利数学家哈恩(H．Hahn，1879—1934)，海莱(E．Helly，1884—1943)，维纳(N．Wiener，1894—1964)和巴拿赫都对赋范空间进行定义并加以研究，海莱还得到所谓哈恩——巴拿赫定理．但对泛函分析贡献最杰出的是巴拿赫．他进一步把希尔伯特空间推广成巴拿赫空间，用公理加以刻划，形成了系统的理论．他在1932年出版的《线性算子论》一书统一了当时泛函分析众多成果，成为泛函分析第一本经典著作．

这时泛函分析不仅理论上比较完备，而且在古典分析的应用上起着举足轻重的作用，其中特别是波兰数学家肖德尔(J．Schauder，1899—1940)和法国数学家勒瑞(J．Leray，1906—)的不动点理论是现代偏微分方程理论的重要工具．他们把微分方程的解看成巴拿赫空间到自身映射的不动点，得出了基本定理，这是现代非线性泛函分析的出发点．

1926年冯·诺伊曼来到哥丁根大学，当时正是哥丁根物理学与数学的全盛时代．量子力学的产生和抽象代数、泛函分析的发展使人们思想空前活跃．冯·诺伊曼把希尔伯特空间公理化，并把量子力学的数学基础建立在泛函分析之上．虽然冯·诺伊曼的公理的来源可以从维纳、外尔和巴拿赫的工作中看到，但冯·诺伊曼的工作更为系统，特别是他关于厄米算子的谱理论．

三十年代末，波兰数学家马祖尔(S．Mazur，1905—1981)与苏联数学家盖尔范德(Ц.М.Г е л ьфанд，1913—)发展巴拿赫代数(赋范环)理论，而且通过抽象方法轻而易举证明古典分析中的大定理．这显示了泛函分析方法的威力，也论证了泛函分析的独立存在的价值．

第三阶段是泛函分析的成熟阶段．从40年代起泛函分析在各方面取得突飞猛进的发展．头等重要的事是施瓦兹(L．Schwarーtz 1915—)系统地发展了广义函数论，它现在已成为数学中不可缺少的重要工具．它的前身就是狄拉克(P．Dirac，1902—1984)在量子力学中引进的δ函数．

第二次世界大战以后，泛函分析取得突飞猛进的发展：1920年到1940年间所发展的局部凸向量空间理论的技术在1945年后主要通过沙顿(R．Schatten，1911—)及格罗登迪克(A．Grothendieck，1927—)引入拓扑张量积的理论而完成．在这个理论的发展过程中，格罗登迪克引进一种新型的拓扑凸空间一核空间，它在许多方面比巴拿赫空间还接近于有限维空间，并且具有许多卓越的性质，使它在泛函分析及概率论的许多分支中证明是非常有用的．

巴拿赫时代就提出来的两个老问题直到1973年才被恩福楼(P．Enflo)否定解决掉：他造出一个可分巴拿赫空间，其中不存在(巴拿赫意义下的)基；他还造出一个可分巴拿赫空间的紧算子的例子，它不是有限秩算子(关于紧集上的一致收敛拓扑)的极限．

1900年到 1930年间由希尔伯特、卡勒曼(T．Carleman，1892—1949)及冯·诺伊曼所发展的希尔伯特空间的算子谱理论由于盖尔范德及其学派于1941年所创始的巴拿赫代数理论而大大简化及推广．但是，这个理论中最有趣的部分仍然是冯·诺伊曼代数的研究．冯·诺伊曼代数的研究开始得稍早一些，它和希尔伯特空间中局部紧群的酉表示理论有着非常紧密的联系．在冯·诺伊曼的先驱性文章之后，这些代数的分类并没有取得多少进步，特别是相当神秘的“III”型因子．到1967年，不同构的III型因子只知道三个．其后，事情开始发展很快，几年之内许多数学家发现了新的III型因子，一直到1972年到达顶点，发展成一般的分类理论，这个分类理论是建立在富田稔(1924—)的思想及康耐(A．Connes，1947—)定义的新的不变量的基础上的，康耐的不变量使他解决了冯·诺伊曼代数理论中许多未解决的问题．

五、拓扑学

拓扑学是现代数学的基础，研究拓扑空间及其间的连续映射．在20世纪初期，分为一般拓扑学(也称点集拓扑学)及组合拓扑学．一般拓扑学讨论点集的一般的拓扑性质，如开、闭性、紧性、可分性、连通性等等．它们的具体体现可追溯到很久以前，但抽象化的定义则是20世纪的事情．最早的拓扑概念在康托尔、拜尔(Baire1874—193z)及若尔当等人著作中已经出现，1906年弗雷歇正式提出非度量的抽象空间，同时黎斯也提出“聚点”的公理化定义，然后用它定义邻域，但真正从邻域出发定义拓扑的是豪斯道夫(F．Hausdorff，1868—1942)，他在1914年的《集论大纲》中通过邻域定义所谓豪斯道夫空间以及开集、闭集、边界、极限等概念，从而正式形成了一般拓扑学的分支．另

一种不通过度量定义拓扑的方法是库拉托夫斯基(C．Kuratｰowski，1895—1980)在1922年提出来的，他用闭包概念定义拓扑．1923年，蒂茨(H．Tietze，1880—1964)以开集做为定义拓扑的中心概念，现在通用的公理首先是亚历山大洛夫(П．С．Александров，1896—1982)在1925年提出来的．豪斯道夫在他的书的第二版《集论》中加以总结，使—般拓扑学的表述得以确立下来．

庞加莱(Poincare，Henri 1854-1912)

使组合拓扑学成为一个重要的数学分支的是庞加莱．他在1881年到1886年在微分方程定性理论以及后来天体力学的研究中，都有意识地发展拓扑的思想．他从1892年起对拓扑学开始进行系统地研究．在1895年到1904年发表的关于“位置分析”的六篇论文中，他创造了组合拓扑学的基本方法并引进重要的不变量，同调及贝蒂数(1895)、基本群(1895)、挠系数(1899)，并进行具体计算．他还证明了庞加莱对偶定理的最初形式．1904年他提出了著名的庞加莱猜想；单连通、闭(定向)三维流形同胚于球面．他有意识地研究两个闭流形(首先是三维流形)同胚的条件．在他的第二篇补充(1900)中，曾猜想如果两个闭流形的贝蒂数及挠系数对应相等，则它们同胚．但不久(1904)他自己就举出反例，因而他进一步把基本群考虑进去．1919年美国数学家亚力山大(J.w.Alexander，1888—1971)举出两种透镜空间，证明它们贝蒂数、挠系数和基本群对应相等，但仍不同胚．至今三维流形的同胚问题尚未解决．

布劳威尔继庞加莱之后对拓扑学做出突出贡献，创造单纯逼进方法，使拓扑学的证明有了严格的基础．1915年亚历山大证明贝蒂数及挠系数的拓扑不变性．对偶定理是拓扑不变量之间关系的重要方面，1922年亚力山大证明亚历山大对偶定理，是对庞加莱对偶定理的重要补充及发展．1930年，列夫希兹(S．Lefscｰhetz，1884—1972)证明列夫希兹对偶定理，以上述两定理为其特殊情形．

对基本的拓扑不变量加以改造，早在1908年蒂茨的文章中已经开始，他和其他人开始考虑整数以外的系数，如模p系数及有理数．1926年亚历山大引进Z_n系数．1925年底到1926年初，诺特同亚历山大洛夫等拓扑学家接触时，曾建议把组合拓扑学建立在群论基础上，在她的影响下，浩普夫(H．Hopf，1894—1971)于1928年定义同调群，但诺特的思想直到以后才逐步为大家了解和接受．1935年切赫(E．Cech，1893—1960)考虑系数取在任何交换群中．

二十年代起，数学家曾试图把同调论从流形逐步推广到更一般的拓扑空间．先是维埃陶瑞斯(L.Vietoris，1891—)(1927)、亚历山大洛夫(1928)等人推广到紧度量空间，继而切赫推广到一般拓扑空间(1932)，即所谓切赫同调论．同时列夫希兹发展了奇异同调论．这是两个最重要的同调理论．在代数与几何的对偶观念的影响下，许多数学家在三十年代初提出同调群的对偶观念——上同调群．除了同调群和上同调的加法结构外，许多人从各个角度寻找其中的乘法结构，列夫希兹和浩普夫在1930年左右研究流形的交口环．1935年到1938年亚力山大、切赫、惠特尼(H．Whitney，1907—1989)、柯尔莫哥洛夫(А．Н．Колмогоров，1903—1987)等人独立引进复形的上积．后来才证明(1952)一般同调不一定有上同调那种自然的乘法．上同调具有环的结构，带来更多的应用．1947年，斯廷洛德(N．Steenrod，1910—1971)定义了平方运算，后来发展成上同调运算的理论．

同样在三十年代，另一个更广泛的概念——同伦产生了．同伦观念的重点由拓扑空间的性质转移到空间与空间的映射的性质上．1895年庞加莱定义的基本群是第一个同伦群．其后布劳威尔、浩普夫等人对于球面到球面的映射进行过初步的研究，得出拓扑度的概念．尤其是1931年浩普夫映射的发现促使人们注意连续映射的研究．1932年，切赫在国际数学家大会上定义了高维同伦群，但未引起注意．1933年波兰数学家虎尔维兹(W．Hure- wicz，1904—1956)对连续映射进行研究，在1935—1936年发表四篇论文，定义了高维同伦群并研究了其基本性质．虎尔维兹还定义了伦型的概念，由于当时所知的大多数拓扑不变量均为伦型不变量，使同伦论的研究有了巨大的推动力．1942年列夫希兹的《代数拓扑学》问世，标志着组合拓扑学正式转变为代数拓扑学．

第二节　老学科的新进展

一、复变函数论

19世纪数学上最主要的成就之一是复变函数论的产生与发展．有人说“19世纪是函数论的世纪．”实际上，19世纪研究的主要是特殊函数，特别是椭圆函数及其推广，以及特殊的应用，尤其是用残数演算计算定积分和为绘制地图而进行的保形变换的研究．复变函数论三个奠基人是柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯，他们各有一套方法和课题，各有自己的追随者．到19世纪末，出现了这三条途径的融合，形成了统一的复变函数论，另外，把一般函数论作为函数论的主要方向大大扩充了函数论的研究领域．

整函数及亚纯函数理论．比多项式复杂的函数是超越整函数，n次多项式有n个根，它可以表示为各因子的乘积．如果复变元z的复值函数在所有不等于∞的点z处全纯，则称f(z)为整函数．当∞是f(z)的极点，f(z)就是多项式，而不是多项式的整函数，就是超越整函数，例如e^z，，sinz，cosz等．魏尔斯特拉斯最先研究一般(超越)整函数，他在1876年把整函数表示成典范乘积．他还证明，所有复

值都是f(z)可以趋于任何复数值C．1879年法国数学家皮卡(E．Picard，1895—1941)证明了皮卡大定理：每一个超越整函数f(z)对每一有限值w，最多除了一个之外，都取无穷多次．这个定理成为后来值分布理论的出发点．这个可能不取的值称为例外值，如果我们把∞也算一个值，则例外值可以有两个．儒利雅(G．Julia，1893—1978)在1919年把皮卡定理加以精密化，他证明，对于超越整函数，至少存在一个方向，在这个方向的狭窄角域中，皮卡定理也成立，这个方向称为儒利雅方向．

比整函数再稍微复杂一些的函数是亚纯函数(半纯函数)，它在复平面上可以有极点．同样，魏尔斯特拉斯也给出了表示．1877年瑞典数学家米塔格—莱夫勒(G．Mittag－Leffler，1846—1927)给出部分分式的表示：

对于亚纯函数，皮卡大定理也成立．在经过许多人研究之后，芬兰数学家耐凡林那(R．Nevanlinna，1895—1980)对于亚纯函数的值分布理论进行了统一的论述．他引进了特征函数T(r)及亏数等概念，证明了第一、第二定理，使值分布理论成为精致的定量理论． 1935年芬兰数学家阿尔福斯(L．V．Ahlfo－rs，1907—)用拓扑的方法建立了覆盖面理论，由它不仅可推出耐凡林那理论，而且还得出亚纯函数许多其他结果，由它还明确了例外值个数2的拓扑意义，它与球面的欧拉示性数有关．其后的值分布理论是本着耐凡林那理论的模式向一般区域或黎曼面上推广．

幂级数及狄利克雷级数是应用最多的复变函数，从19世纪末有着多方面的研究．特别是一个幂级数的收敛圆周成为自然边界的条件，有各种各样的缺项定理．应用上最常用的是陶伯尔型定理．陶伯尔型定理是

阿贝尔定理的过定理。阿贝尔定理讲：如果$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$的收敛半径

为1，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$收敛，其和为A，则当z沿着某条道路趋于1时，$f(z)\to A$.

奥地利数学家陶伯尔(A．Tauber，1866—1943)给出逆定理成立的条

件，即$an=0(\frac{1}{n})$，1910年英国数学家李特尔伍德(J．E．Littlewood，1855

—1977）把条件放宽到$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$，而且这条件不能再放宽了．维纳把

李特尔伍德的陶伯尔型定理推广到可测函数，进而证明素数定理．在数

论上应用最多的是狄利克雷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}$，同样也有许多系数及奇点关系

的研究，另外也有相应的陶伯尔型定理，在数论上有许多应用．

函数论一个重要方面是保角映射，其基本定理是黎曼映射定理(1851)．它指出单连通区域之间

可通过解析函数进行保角映射．在区域D内定义的单值解析函数f(z)，如D内不同两点映到不同点，称为单叶函数．单叶函数理论是保角映射的重要组成部分，在单位圆内单叶函数族的理论开始于科贝(P．Koebe，1882—1945)单值化问题的研究．他于1909年得出畸变定理，畸变定理反映函数值的某种限界．德国数学家比勃巴赫(L．Bieberbach，1886—1982)在1916年推导定量结果时，得出单叶函数系统理论，同时证明单叶函数｜a_2｜≤2，他猜想｜a_n｜≤n．几十年来，数学家对所猜想发表了上千篇论文，研究了各种方法，特别是德国数学家娄伍纳（K．Löwner，1893—1968）在1923年引进偏微分方程，首先证明｜a_3｜≤3．美国数学家席弗尔(M．Schiffer，1911—)在1938年引进变分方法，后得出｜a_4｜≤4(1956)．到1972年才证明对a5，a6比勃巴赫猜想成立．出乎人们意料，美国数学家德、布兰吉斯(L．de Bianges，1932—)1984年一举完全证明比勃巴赫猜想，从而结束了这个问题近七十年的历史．

对于开黎曼面的分类，最初是分型问题，即区别是一圆盘还是复平面是开黎曼面的覆盖面．由芬兰数学家阿尔福斯、梅尔堡(P．J．Myrberg，1892—1976)等人在三十年代初开始研究，后来进入一般开黎曼面的分类，这是从撒利奥(L．Sario，1916—)1946年的工作开始的．

函数论方面一个老问题是单值化问题，也就是象圆$x^2+y^2=1$这样的代数函数，能不能找到一个单值的参数表示(如x=cost，y=sint就是)．19世纪许多大数学家都对此做过贡献．一直到1907年，整个问题才由科贝和庞加莱独立地解决．像代数函数这样的多值函数，怎样表示为单值化的曲面上的单值函数的问题，早在19世纪中叶由黎曼得出富有想象力的黎曼面的观念．他的几何思想不仅推动几何函数论的发展，而且也预示着曲面拓扑学的萌芽．1913年，德国数学家外尔(H．Weyl，1885—1955)发表了《黎曼面的思想》(Die Idee der RiemannschenFlöche)这部划时代的著作，对黎曼面做了抽象的刻划，引进了复流形的概念．匈牙利数学家拉多(T．Rado，1895—1965)及罗马尼亚数学家斯托伊洛夫(S．Stoilow，1887—1961)有着基本的贡献．对于闭黎曼曲面的分类，归结为参模结构的研究．近年来，对于黎曼面的参模的结构进行了重要的研究，这方面的工具是1928年德国数学家格罗采(H．Grotzsch，1902—)引进的拟保角映射．保角映射把地图上一小圆映成一个小圆，保持两条线交角不变，而拟保角映射则可看成把一个小圆映成一个小椭圆．1939年德国数学家台什缪勒(O．Teichmiiller，1913—1943)应用极值保角映射观念研究黎曼面的模，他的文章极为晦涩后来发现思想倒是对头的．战后沿着这条路线取得了巨大进展．

二、调和分析

傅里叶级数原来是处理直线(－∞，＋∞)上，周期为2π且在[0，2π]上可积的数值函数(最好令

其为复数值)，这样的函数f的傅里叶级数是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

其中 $$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

由于e^{inx}=cosnx+isinnx，因此可用sin和cos来表达傅里叶级数．这种实的形式在几何上更直观，复指数形式在代数上更容易处理和推广．主要问题是函数f的傅里叶级数的“和”是否存在，是否“等于”f．最初“和”与“等于”自然地理解为逐点收敛的，后来自然的和更富成果的是几乎处处收敛与依范数收敛．人们早就知道，存在连续函数的傅里叶级数，它在某一点上，甚至在许多点上发散．如果考虑齐撒罗意义下的求和，则费耶尔(L.Fejer，1880—1959)定理(1904)指出：在这种意义下每一连续函数f的傅里叶级数逐点收敛于f．但可积函数情况就差得多，柯尔莫哥洛夫证明若只要求$f\in L^1[0，2\pi]$(即f在[0，2π]上可积)，则f的傅里叶级数可以几乎处处发散(1923)，或甚至于处处发散(1926)．

鲁金提出：如果$f\in L^2[0，2\pi]$，则f的傅里叶级数是否几乎处处收敛于f呢？过了50年仍无法回答这问题，想证明答案是肯定的努力，遭到无数次失败以至50年代到60年代专家们几乎一致认为，鲁金问题的答案必定是否定的．令人感到惊异的是：答案却是肯定的．1966年，瑞典数学家卡尔松(L．Carleson，1928—)给出了第一个证明，他的成就的一个突出之点是他没有用到以前所不知道的技巧．次年洪特(R．A．Hunt)证明，对$f\in L^p[0，2\pi]$其中$1<p<\infty$，则f的傅里叶级数几乎处处收敛于f．这样就漂亮而完整地结束了傅里叶级数论中最重要的一章．

函数f及其傅里叶级数的系数序列$\{a_n\}$之间关系，只当平方可积函数($\in L^2$)时才有极好的性质；即1907年由黎斯及费舍尔独立证明的黎斯—费舍尔定理，它指出任意L^2中的函数都存在收敛于其自身的傅里叶级数，反过来对任意平方可和序列$\{a_n\}$，也都存在L2中的函数f，使$\{a_n\}$为其傅里叶级数的系数序列，同时有帕塞瓦尔(M．A．Parseval，1755—1836)定理成立：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2$$

这当然是最理想的情形．但是，对于任L^p，$1\leq p\leq\geq\infty$，情形要复杂

得多．设$1<p<\infty$，$f\in L^p$，它展开成傅里叶级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{-inx}$，那么如在系

数前随机地加上正负号$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\pm a_n e^{-inx}$,则这些三角级数以概率不是傅里叶

级数．1930年起，李特尔伍德及佩利(R．E．Paley，1907—1933)创立李特尔伍德—佩利理论，特别是把f分解为“二进”块之和：$\triangle_0+\triangle_1+\cdots+\triangle k+\cdots\triangle_k=\Sigma a_n e^{inx}$．用这个分解来代替傅里级数可得

L^p空间的结果．相应于L^p空间，对于单位圆上的全纯函数，哈代及黎斯建立了哈代空间H^p理论．对于$1<p<\infty$，可证L^p与H^p同构，有趣的情形只是H'及H^∞．

以傅里叶级数理论为模式，可以在许多方向上进行推广．首先是从周期函数推广到全实线$(-\infty,\infty)$上的任意函数，这样就产生傅里叶积分理论．对于在$(-\infty,\infty)$上的勒贝格可积函数f，可定义其傅里叶积分或傅里叶变换式

$$Ff=\hat{f}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ixt}dx。$$

傅里叶积分理论大致与傅里叶级数理论平行，也有许多差别，例如对周

周期函数有L^p函L^1，而非周期函数，$L^p\not\subset L'$，因此定义时取$L^p\cap L^1$中

的函数．与傅里叶级数情形类似，L2的情形最理想，对此普兰舍瑞尔(M．Plancherel，1885－1967)在1901年到1915年进行研究，特别是1910年证明了普兰舍瑞尔定理：傅里叶变换F及其逆变换F^{-1}是L^2空间到自身的等距变换．这定理是后来许多推广的出发点．由此推出帕舍瓦尔定理成立：

$$\|f\|_2=\|\hat{f}\|_2$$

其中$\|\ \|_2$表示L^2中的范数，对于L^p空间，$1\leq p\leq 2$，相应的等式只有不等式

$$\|\hat{f}\|_q\leqslant\|f\|_p$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 这通称豪斯道夫一杨不等式, 是他们分别在1923年及1913

年得出的．由此出发，发展出一套算子内插理论．

第二次世界大战前后，傅里叶分析向多维化及抽象化方向发展，多维傅里叶分析正如多复变函数论一样，与一维情形相距甚远，最早是波赫纳的工作， 50年代起卡尔德隆(A.P.Calde－ron，1920—)与齐格蒙所创立的奇异积分理论起着最重要的作用．其后，斯坦因(E．M．Stein，1931—)和外斯(G．Weiss，1928—)把H^p空间理论推广到高维，而且还在一维问题也有突破．1971年巴克荷路德(D．Burkholder 1927—)等人用概率论的方法刻划H'中函数的实部，次年费弗曼(C．Fefferman，1949—)及斯坦因把它推广到n维．同时，费弗曼证明，H'空间的对偶空间是BMO，这里BMO是1960年由约翰(F．John，1910—)及尼仑伯格(L．Nirenberg，1925—)引进的有界平均振动函数空间，这个结果也被立即推广到n维．

由于周期函数可以看成是定义在圆圈群T上的函数，R本身对加法也是交换群，调和分析最大的推广是推广到一般的群上．这在五十年代产生出抽象凋和分析的理论．对于局部紧交换群，有一套漂亮的理论，例如用代数方法证明1932年维纳的强有力的广义陶伯尔型定理，而对于局部紧李群，则与艰深的群表示论方法结合，形成非交换调和分析的庞大分支．

三、微分方程

常微分方程的研究随着微积分的诞生就已开始．从天文学、力学、物理学及几何学的问题引进各种常微分方程．18世纪到19世纪数学家用各自方法进行求解，除了明显形式解之外，主要是通过幂级数及积分把解表示出来．19世纪初，通过数学物理方程经过变量分离法，导出许多特殊的常微分方程，如贝塞尔方程、勒让德方程等，对它们解的研究构成了特殊函数的重要分支．一般常微分方程求解问题，首先是拉格朗日发展的．在19世纪中叶，由于黎曼及富克斯(L．Fuchs，1833—1902)的工作形成了系统的解析理论．但直到19世纪最后20年，常微分方程理论才形成自己的理论基础．

首先是常微分方程的代数理论．受到代数方程的伽罗瓦理论的启发，皮卡在1883年把群论引进线性常微分方程，其后法国数学家德拉什(J．Drach，1871—1941)和维索(E．Vessiot，1865—1952)继续这方面的工作．伴随着抽象代数学的发展，这理论溶入微分代数学的框架之中，到五十年代又纳入代数群理论当中．

现代微分方程论的基础是解的存在性、唯一性以及连续性等等，因为大部分微分方程的实际背景是来自自然界的描述，而其解则反映自然界的客观运动规律，因此解的存在性、唯一性有着重大的现实意义．关于常微分方程解的存在性的考虑，首先来自柯西，他的一系列论文奠定了各种存在性证明的基础．第一种方法来源于欧拉折线法(1768)，柯西在1820年建立，李普希兹(R．Lipschitz，1832—1903)于1869年作了改进，皮亚诺在1890年得到存在性定理，配隆在1915年又加以改进，他在1925年还得出初值问题的充分必要条件．对于解析系数的方程，柯西在1840年用所谓极限演算即优函数法证明解的存在性．第四种方法来自拉格朗日的常数变易法，后来庞加莱推广成小参数法．

常微分方程论主要困难还在于非线性问题．1881年到1886年，庞加莱发表一组四篇题为“由微分方程所确定的积分曲线”的论文，开辟了微分方程定性理论的新方向．他一反过去具体局部求解的做法，而着重研究大范围内解的曲线形态，他发现，微分方程的奇点起着关键的作用．于是，他把奇点进行分类，然后研究解在奇点附近的性态，这样可以定性地确定解是否稳定．

俄国数学家李雅普诺夫(А．М．Ляпунов，1857—1918)从1892年起从另一角度研究稳定性问题，他的方法是定量的．他证明，在奇点附近解的稳定性依赖于特征方程的根，如果根都具有负实部，则方程所有解才是稳定的．

1901年瑞典数学家本迪克逊(I．Bendixson，1861—1935)提供了判断某区域内存在闭轨道的准则，并证明庞加莱——本迪克逊定理，这个定理给方程存在周期解一个肯定的判据．

微分方程在假定解的存在性及连续性前提之下，应用相空间的拓扑结构及向量场的解析结构可以得到解的行为的定性信息(如稳定性、周期性、回归性等等)．如庞加莱提出猜想：狭义三体问题存在无穷多周期解．他没能够证明它，只是在他临终前几个月，把这个问题归结为一个拓扑定理，所谓“庞加莱最后的问题”：由两个同心圆构成的圆环保持面积不变，且在两同心圆上方向相反的

一对一连续映射，一定在圆环内至少有两个不动点．没有料到，庞加莱去世还不到半年，美国数学家柏克霍夫(G．D．Birk－hof，1884—1944)就证明了这个定理，使欧洲数学界大为震惊．柏克霍夫受庞加莱的强烈的影响，在1912年到1931年二十年间，应用拓扑技术，研究动力系统许多问题，特别是极限集、回归性、极小集的结构等．他的工作总结在1927年出版的《动力系统》(Dynamical Systems)一书中．30年代，苏联数学家开始研究动力系统，他们得到一些基本概念，特别是流及结构稳定性等．另外，他们在李雅普诺夫稳定性理论中也有许多贡献，特别是许多新工具、新方法在定性理论上有种种应用，其中包括：不动点理论、拓扑度理论、半群理论、同调理论、代数几何方法等等．

动力系统另一重要问题也来自天体力学，这就是周期系数的常微分方程的同期解的存在问题．经过厄米特(1877)、皮卡(1881)的研究，希尔(G．Hill，1838—1914)的工作及庞加莱关于渐近解的观念之后，富洛凯(G．Floquet，1847—1920)在1883年给出一个完整线性方程的理论．到20世纪，周期系数推广到概周期函数上面．1924年到1926年丹麦数学家玻尔(H．Bohr，1887—1951，著名物理学家玻尔的弟弟)开创了这方面的理论，其后博赫纳(S．Bochner，1899—1982)及冯·诺伊曼作出重大贡献．1933年法瓦(J.Favard，1902—1965)出版这方面的第一部书，书中给出一阶线性概周期系数方程具有概周期解的充分条件，后来还推广到非线性方程上面．

偏微分方程的出现要比常微分方程晚半个世纪，最早是达朗贝尔(1744)及欧拉研究流体力学开始的．18世纪末，从位势理论中产生拉普拉斯方程．对它的研究一直贯彻到19世纪末，研究热传导方程使傅里叶得到傅里叶级数．波动方程的求解导致黎曼、克里斯托费尔关于间断解的研究．这些二阶线性方程虽在1889年由德国数学家杜布瓦累芒加以分类，分别称为椭圆型、抛物型及双曲型方程，但是一般理论并不成熟．当时只有柯西及柯瓦列夫斯卡雅的存在定理．而一般理论到本世纪初才由阿达马开始探讨．他1903年声称偏微分方程的“适定”问题，不仅要求解存在及唯一，而且要连续地依赖于给定的初始条件或边界条件，否则就不是有物理意义的解．

这种连续性的要求，不仅是泛函分析的源泉，也是应用泛函分析的领域．如现在偏微分方程最常用的方法是先验估计，首先证明对条件的连续性，然后应用泛函定理(巴拿赫定理及黎斯定理)证明存在性和唯一性．反过来，巴拿赫的闭图象定理又可以在多种情形下，由存在性及唯一性证明连续依赖性．另外，阿达马对于二阶正规型双曲型方程引进基本解(法文称初等解)的概念．1930年勒瑞、肖德尔的不动点定理，索保列夫(С．Л．Соболев 1908—)在1936年引进广义解的概念，尤其是施瓦兹的整个广义函数论，给偏微分方程提供了系统的函数空间工具．

第二次世界大战以后，偏微分方程理论取得巨大的发展：1954年左右马尔格朗日(Malgrange，1928—)等人证明对于常系数线性偏微分方程都存在基本解．1956年刘威举出著名的反例，对于先滑系数线性方程可能没有解存在．1958年卡尔德隆证明光滑系数偏微分点子的柯西问题的唯一性条件．1970年，尼仑伯格等人分别得出这类方程有解的充分条件和必要条件．1973年，费弗曼等人得

出充分必要条件．在这个过程中，1956年许多人同时引进一大类伪微分算子，1968年又被推广为傅里叶积分算子．这一大类算子不仅包含以前所知的微分算子，而且也包括奇异积分算子．它们的集合构成算子代数，具有很好的不变性质．

1967年，加德纳等人解决了浅水波的考德威克赫(D．J．Korteweg1848—1941)—德 ·夫瑞斯(A．de Vries，1858—1939)方程的孤立子解，震动了整个数学及物理学界，它们的方法是逆散射方程，即利用散射数据．

四、代数几何学

代数几何学的对象原来是欧氏平面中的代数曲线以及三维欧氏空间中的代数曲线及曲面，后来推广到高维欧氏空间中的代数方程组所定义的代数簇．从几何上来看，它是解析几何学的延长，在解析几何学中对于二次代数曲线和曲面已有相当完整的结果，从牛顿起着手对三次代数曲线进行分类．18世纪，代数几何学的基本问题是曲线和曲面的交截问题，这在代数学上是消去法问题．随着18世纪末射影几何学的兴起，开始了射影几何方法的研究．这时引进无穷远点及虚点，考虑问题也从实数扩张到复数．德国数学家普吕克(J．Plücker，1801—1868)在 1834年得出平面曲线的普吕克公式，它联系平面代数曲线的阶数、类数、二重切线数、拐点数等等．特别由此证明一切三阶曲线均有几个拐点．1839年他发现四阶曲线有28条二重曲线，其中至多8条是实的．黎曼的函数论方法对代数几何学以极大促进，他把代数曲线作为黎曼面上的函数论来研究，黎曼更引进第一个双有理变换不变量——亏格，开辟了代数几何学新的一章，他和他的学生洛赫(G．Roch，1839—1866)得出黎曼—洛赫定理是代数曲线的基本定理，也是各种推广的出发点．黎曼去世之后，他的成就为各种流派所继承．首先是克莱布什(R．Clebsch， 1833—1872)重新把黎曼用函数论方法得到的结果改写成代数曲线的结果，而他的学生M．诺特(M．Noether，1844—1921)则是代数几何方向的首创者．他在1871年首次证明平面代数曲线的奇点解消定理，1874年和布瑞尔(A．Von Brill，1842—1935)合作，引进线性系的概念，给黎曼—洛赫定理一个代数的证明．1882年M．诺特和哈尔芬(G．Halphen，1844—1889)把他们的工作推广到空间代数曲线上．同年，诺特给出三维射影空间内代数曲线分类的表，戴德金和韦伯开辟了以理想为基础的代数方向，而克罗内克则是以除子为基础．

到19世纪中叶，代数曲面只有零散的特殊结果．1849年，萨蒙(G． Salmon，1819—1904)及凯莱证明在没有奇点的三次代数曲面上存在27条直线．一直到1868年克莱布什才从双有理变换观点讨论代数曲面．它定义第一类重积分，并征明其线性独立的最大数目是双有理不变量，称为几何亏格P_g，它与凯莱在1869年由另外途径引进的算术亏格P_a一般并不相等(1871年错玉登H．G．Zeuthen，1839—1920，及诺特在1875年证明其不变性)．从1870年起M．诺特发展了他的思想，他还引进曲面的线性亏格$P^{(1)}$，并研究曲面上代数曲线得出曲线亏格公式，他还引进例外曲线的概念．从19世纪80

年代末起，意大利的代数几何学派继承了M．诺特的几何思想，开始对代数几何学、尤其是代数曲面进行研究．其主要代表人物是卡斯泰努沃(G．Castelnuo-vo，1865—1952)、恩瑞克斯(F．Enriques，1871—1946)和稍晚的塞梵利(F．Severi，1879—1961)，他们主要的结果是代数曲面的分类．头一个结果是贝尔蒂尼(E．Bertini，1846—1933)在1877年给出的平面对合变换的分类，1893年，卡斯泰努沃解决了吕略特(J.L üroth，1844—1910)问题，1896年他提出并解决用数值不变量刻划有理曲面的问题，曲线只有唯一数值双有理不变量——亏格，亏格为0是曲线是有理曲线的充分且必要条件，对于曲面则有多种不变量：除了P_g，P_a，$P^{(1)}$之外还有恩瑞克斯引进的多亏格$P_k(k\geq 2)$与曲线的情形不同， $P_g=P_a=0$还不足以保证代数曲面是有理曲面，要保证这点的充分必要条件是$Pg=P_2=0$．恩瑞克斯给出曲面是直纹曲面(直线与一个亏格为g的曲线的乘积)的充分必要条件是$P_4=P_6=0$．另外还发现一些特殊的曲面，最主要的是恩瑞克斯六阶曲面和K．曲面．K_3曲面的一个特殊情形是库默尔于19世纪60年代引进的具有16个二重点的四阶库默尔曲面．这一切都导致恩瑞克斯在20世纪初一系列论文中对于曲面的分类．1914年，由P_{12}的不同分成四大类．意大利学派这方面的成果总结在1949年出版的恩瑞克斯《代数曲面》(Le superficie algeb- iche)一书中．

与意大利学派大约同时的是法国的超越方法，从某种意义上来讲，这是黎曼研究代数曲线观点的直接继续，只不过把单变量代数函数论推广成两个变量代数函数论，即由三个复变量的不可约多项式P(x，y，z)=0定义的代数函数．黎曼研究的黎曼面的拓扑结构及黎曼面上的有理函数及阿贝尔积分都被庞加莱及皮卡推广到代数曲面上，但是代数曲面情形要复杂得多．皮卡在1899年发展了第二类二重积分理论，不过独立的数目与亏格无关．

五、微分几何学

微分几何学是随着微积分一起产生的．有了微积分这种有力工具，加上解析几何带来的坐标表示，不难求出给定曲线的切线，曲线的长度，曲线的曲率(弯曲程度的度量)．对于三维空间中的曲面，可以具体求出曲面在一点的切平面，法线，并研究曲面上曲线的一些性质．1827年德国大数学家高斯建立了曲面的“内在”几何学．他用曲线坐标(好像球面上经纬度)来代替三维笛卡儿坐标，证明曲面在一点的全曲率(即高斯曲率，为两个主曲率的乘积)，只依赖于曲面上两点间的无穷小距离平方ds^2，与如何把曲面嵌入到三维欧几里得空间的方式无关．黎曼发展了高斯的思想，把几何从二维、三维推广到任意维，把曲线、曲面推广到任意维流形，从而开拓了黎曼几何的新篇章．它的主要工具是张量分析．

在黎曼的影响下，德国数学家克里斯托费尔(E.B.Chri-stoffel，1829—1900)把ds^2推广成一般的形式$\Sigma gijdxidxj$，研究在局部坐标变换之下，两个ds^2是如何互相变换的．这样他引进了以他名字命名的克里斯托费尔记号Γ_{jk}^{i}．利用这个记号他能够对于向量场进行微分，即所谓协变微分法．1887年

意大利数学家里奇(R．Ricci-Curbastro，1853—1925)定义了张量概念，在克里斯托费尔公式的启发下，定义了张量的一般运算，即协变微分或绝对微分法．有了这个工具，对于黎曼几何的研究对象黎曼流形(即微分流形具有一个指定的正定黎曼度量ds_2)，也可以定义类似高斯曲率的量，但这时曲率不是一个数量，而是一个张量，称为曲率张量(或黎曼——克里斯托费尔张量)．如果曲率张量处处相等，则黎曼流形称为常曲率的．非欧双曲几何(罗巴切夫斯基几何)，就是研究曲率＜0的常曲率空间；而非欧椭圆几何，则是研究曲率＞0的常曲率空间．普通欧几里得空间，处处曲率都等于0．

20世纪初，微分几何学还与克莱因的变换群观点下的几何学结合起来，形成了射影微分几何学、仿射微分几何学及保形微分几何学．射影微分几何学研究空间中图形的微分几何性质中在射影变换群下不变的那些性质．在达布(J.G.Darboux)的曲面论中已多处看到其萌芽．本世纪初，美国数学家魏尔钦斯基(E．J．Wilczynski，1876—1932)和意大利数学家福比尼(G．Fubini，1876—1943)独自进行了系统的研究，后来E·嘉当、切赫、意大利数学家邦比安尼(E．Bompiani， 1889—1975)均作出重大贡献．相应有仿射微分几何学．对这种几何学，定向闭超曲面的体积是不变量．对于这种几何学，能够应用活动标架法．在这方面作出主要贡献的是德国数学家布拉施克(W．Blasckke，1885—1962)，他特别对曲线、曲面得出大范围性质．布拉施克也对保形微分几何学进行研究．他的《微分几何学讲义》(Vorlesungen über Diferentialgeometrie)(Ⅱ1923，Ⅲ1929)长期以来是这方面标准著作．

1901年里奇和他的学生列维—奇维塔(T．Levi-Civita，1873—1941)系统地建立了张量分析的技术，提出求绝对微分不变式的一般问题，并且指出这些与坐标选取无关的量在物理问题与数学问题中肯定是有意义的．20世纪初，张量分析还只是少数数学家手中的工具，而一旦被爱因斯坦用在广义相对论上，不仅物理学家找到理想的数学工具，反过来激发人们对于黎曼几何及张量分析的兴趣，从而极大推动了微分几何学的发展．数学家决不满足于只给物理学家提供工具，他们要走自己的道路，而在这条道路上后来依然不断地为物理学提供工具．

由于黎曼几何学在爱因斯坦广义相对论中取得成功，引起了数学家对黎曼几何学的各种推广．芬斯拉(P．Finsler，1894—1970)在他的1918年博士论文中首先把线素ds中的基本张量gij推广，即gij不仅依赖空间中的点而且还依赖该点切向量的方向．因此，由度量得到克里斯托费尔符号不规定联络．于是E．嘉当由一般联络理论定义芬斯拉空间上的联络，不过，它具有三种曲率张量，从而比黎曼空间复杂得多．更一般的道路几何学由美国数学家爱森哈特(L．Eisenhart，1876—1965)及维布伦在1922年提出来，以微分方程定义的道路为空间的基本元素．另外，E·嘉当提出以面积元素为基础的空间，称为嘉当空间，1937年日本数学家河口商次(1902—1984)更提出更一般的高阶线元空间或河口空间．

1917年，列维—奇维塔提出平行移动的概念．他的出发点是考虑黎曼流形上两个向量平行的意义，他把向量场X(t)沿曲线Γ平行移动定义为X(t)，对曲线的协变微分等于0，由此推出沿着测地线(也

就是短程线)，曲线切向量是平行移动的．这样可不必通过ds2得出曲率概念．1918年，外尔注意到平行性是仿射几何的概念，与度量无关，因此从黎曼空间中除去度量性质，只保留平行概念就可以得出更广的几何理论．为此他提出第一个联络的概念——仿射联络，它可以看成是Γ_{jk}^{i}的变换关系式的推广，但却不依赖于ds2的选取．这样通过联络可以直接引进曲率，而不必籍助于度量．这种几何理论叫仿射联络几何学．其后E．嘉当进一步发展了联络的概念，他在1922年到1923年引进仿射联络、射影联络、保形联络，建立了系统的联络理论．同时，他发展了由达尔布及黎包古尔(A．Ribaucour，1845—1893)发展的“活动标架法”，这成为他发展一般联络理论的工具．

20世纪的微分几何学另一个重要发展方向是大范围微分几何学．以前的微分几何学局限于每点临近的范围，只限于描述局部的性质，而对于整个曲面或流形的性质则所知甚少．19世纪末起，许多几何学的研究，涉及局部性质与整体性质的关系：阿达马1898年证明，一个完备的单连通，处处曲率非正的曲面一定同胚于欧氏平面．1899年希尔伯特证明，三维欧氏空间中不存在处处曲率为负的完全曲面而没有奇点，从而指出非欧双曲几何的曲面模型在空间中一定有奇点．德国数学家李伯曼(W．Liebma-nn，1874—1939)在1899年证明三维欧氏空间中完备的正常曲率团曲面一定是球面．

测地线为局部性质和整体性质的相互关系提供了另外一个突出的例子．所谓测地线就是曲面上一条距离最短的曲线C，也就是从C上一点P到C上另外一点Q的路径中，如果P和 Q不相距太远的话，沿着C的路径是曲面上所有(P到Q的)可能路径中最短路径．因此，在通常的球面上，每个大圆是一条测地线．几何学家已在许多特殊的曲面上明显指出测地线来．庞加莱首先研究在紧流形上，不同的封闭测地线的存在和数目问题，其后经过美国数学家柏克霍夫、莫尔斯和前苏联数学家刘斯铁尔尼克(Л．А．Люетсрник，1899—1981)，施尼列尔曼和其他人的工作，得到一个一般的存在性定理，这定理断言，在给定的闭凸曲面上至少存在三种不同的简单闭测地线．莫尔斯曾举出一个例子，表明这个结果中的三条是最佳的数字，不能再改进了．克林根柏格(W． Klingenberg，1924—)和其他人把这个结果由曲面推广到高维情形．

另一个研究最多的问题是极小曲面问题．1873年普拉托(J．Plateau，1801—1883)的著作《实验和理论流体静力学》出版，他是比利时物理学家，长期以来对肥皂泡进行了大量的研究．他把金属丝圈成各种封闭的曲线形状，浸泡在肥皂水或甘油溶液中．当金属丝圈被拉出来时，在金属丝圈上就张上一层肥皂薄膜．由于表面张力的作用，在同一边界曲线上张成的曲面是所有可能的曲面中面积最小的，在数学上称为极小曲面．所谓普拉图问题就是要证明这样的定理，对于给定任意形状的边界线圈，只假定边界闭曲线是可求长度的(即有一个长度)，那么总存在一个极小曲面．实际上数学家早就考虑过这个问题，拉格朗日在1760年就已经用变分方法推导出极小曲面应该满足的偏微分方程，这是一个二阶的非线性偏微分方程，因此问题就变成解这个方程了．尽管19世纪许多大数学家如魏尔斯特拉斯和施瓦兹等人都对此做出贡献，但一直到1930年这个解的存在性才首先由匈牙利

数学家拉多和美国数学家道格拉斯(J．Douglas，1897—1965)所证明，但是，他们的解并不排除曲面可能存在奇点(它们是分支点)．1970年奥斯曼(R．Osserman，1926—)的研究排除掉这种可能性，他证明极小曲面不出现分支点．

六、李群与李代数

丢东涅说过“李群成为数学的中心，没有它什么大事也干不成”，这句话虽说有点夸大，但的确反映出李群同几乎所有纯粹数学部门——拓扑学、微分几何学、代数学、数论、多复变函数论、微分方程论、调合分析等领域不可分的密切关系，而且对物理、化学也是必不可少的工具，就连经济学也有李群的用武之地．

1．李群的刻划和结构．

李群是挪威数学家李(S．Lie，1842—1899)的创造．他的思想来源有三方面：一是几何学，他和克莱因曾经共同合作研究几何学，他们把几何学对象由具体的几何图形转换到变换群上，这明确在克莱因的埃尔兰根的纲领中得到表述．1872年他们似乎有一种默契对他们各自的研究领域有一个分工：克莱因研究离散变换群，而李则研究连续变换群．二是微分方程论．李的老师西洛把伽罗瓦理论引进挪威，对李有深刻的影响，既然有限置换群是研究代数方程可解性的工具，李引进“有限连续群”(即后来的李群)就是为了研究微分方程的可解性的．换句话说，也就是发展微分方程的伽罗瓦理论．三是力学，李在1870年引进“切触变换”的概念，对他来讲，重要的一步是把两函数的波松括号解释为两个无穷小变换的切触变换的括号,这个括号引导他研究李群的局部结构(也就是李代数)的性质．

李产生“有限连续群”的概念是在1873年，在1874年到1879年发表的头一批论文中他只用群的封闭性，并且还有许多不确切的地方．在1880年他发表的《变换群论》(Theorie der Tr- ansformations gruppen)才假设群的元素的逆元素存在，并修正以前的一些错误．李自己关于有限连续群较好的论述是他同他的学生德国数学家恩格尔(F．Engel，1861—1941)合著三卷《变换群论》(1888—1893)中表述的，其中他首先定义某一区域D上的变换：

$$x'_i=f_i(x_1,\cdots,x_n)(i=1,\cdots,n)$$

其中f_i均是解析函数，如果函数行列式不等于零，则局部(在D中某点适当邻域)的这个变换有逆元素．其次，他考虑依赖于r个参数a_1，…，ar的变换：

$$x'_i=f_i(x_1,\cdots,x_n;a_1,\cdots a_n).$$

这样得到一组变换．如果两个变换的乘积也在这组之中，那么这组变换就称为有限连续群．不过，他们也注意到这时必须假定幺元素及逆过元素存在，否则可能构不成群．不过李和他的合作者实际上考虑的是无穷小变换和由无穷小变换构成的“李代数”，并证明了三大基本定理．实际上，

李代数是r，维线性空间，具有乘积[A，B]，它满足[B，A]=-[A，B]，[A，[B，C]]＋[B，[C，A]＋[C，[A，B]]＝0．第二个等式即雅可比恒等式．由此可见，它是非交换、非结合的线性代数．李还证明：局部同构的李群定义同一李代数．他们以为反过来也对，实际上这是错误的．这样他们把研究李群问题归结为李代数的研究．

从1883年起，李等人开始研究李代数的结构，而且得出四个类型局部单李群，即射影线性群，射影正交群及射影辛群，这就是后来的典型李群(李代数)的来源．1888年到1890年，德国数学家基林(W．Killing，1847—1923)更找出例外的单李群．1894年法国大数学家嘉当在他的博士论文中弥补了基林等人的漏洞，证明半单李群为单李群的乘积，证明单李群即是基林发现的五种例外群以及李的四类典型群．实际上完成了复数域上单李代数的结构及分类的研究．1914年，他研究实数域上单李代数的结构．大约同时，他在单李代数结构理论的基础上引进了“权”的概念，决定了复单李代数的所有不可约表示．

到1925年左右，对于原来的李群的整体(大范围性质)了解很少，由于外尔的几篇论文(1925—1927)才真正开始李群论的研究．外尔把E．嘉当的无穷小方法和弗洛宾尼乌斯和I·舒尔(I．Schur，1875—1941)的有限群的特征标理论结合起来，把胡尔维茨(A．Hurwitz，1859—1919)的积分技巧搬到紧群上．他证明半单李群的表示是完全可约的．稍后又得出紧群的表示理论并为它在物理学上的应用开辟道路．E·嘉当(1927—1930)在外尔工作的启示下建立起半单李群和对称空间的漂亮理论，并开始通过不变微分形式来研究对称空间的实上同调，后来导致德·拉姆(G．W．de Rham，1903—1990)定理的产生(1931)．对李群及对称空间的拓扑学研究还导致李代数上同调、纤维丛及示性类的丰硕成果，使拓扑学及微分几何学呈现崭新的局面．

这样，李群理论由分析及微分方程开始，转变成代数的理论(李代数)，又由局部转变成大范围理论，最后到三十年代与拓扑学及微分几何学连系在一起，在各方面发挥重要的影响．

2．李群概念的演化及推广

虽然李把他的‘群’称为有限连续群，实际上，它既不有限且元素数目有限必定离散即不连续．他用函数定义变换是解析的，至少也要可微的．所以希尔伯特在他的巴黎数学家大会上提出的23个问题中，第5个问题就问是否能把解析及可微的条件简化为“连续”．其后由于抽象代数学及拓扑学的发展，促使人们对李群概念进行分析，李群一身兼三任：既是解析流形，又是拓扑空间，还是群．兼备拓扑空间和群两方面的结合是拓扑群．

一般的拓扑群概念是施莱尔(O．Schreier，1901—1929)在1927年首先提出的，他给出一组一般的公理：一方面有群的公理，一方面是拓扑空间(一般是豪斯道夫空间)，群与拓扑的关系是群的运算在该拓扑之下是连续的．如果加上群的每元素局部与欧氏空间开集同胚，则称为局部欧氏群．但李群一般不一定紧，最接近李群的是局部紧拓扑群．1933年匈牙利数学家哈尔(A．Haar，1885—1933)

在局部紧拓扑群上给出不变测度，后称哈尔测度，藉助于它冯·诺伊曼证明局部欧氏紧群是李群．但对一般局部紧欧氏群一直到1951年才由三位美国数学家格里森(A．Gleason，1921—)、蒙哥马利(D．Montgomery，1909—)和齐平(L．Zippin，1905—)完全解决．当时关于拓扑群及李群的一些结果总结在邦特里亚金(Л．C．ПCHT Р Я Г Ц Н， 1908—1988)的《连续群》(1938)一书中，而对李群的现代刻划则见于薛华荔的《李群论》第一卷(1946)中．

七、数论

1912年，德国数学家朗道(E．Landau，1877—1938)在英国剑桥召开的第五届国际数学家大会上十分悲观地说：即使要证明下面比较弱的命题，在当时也是十分困难的：存在一个正整数k，使得每个≥2的整数都是不超过k个素数之和．

不难看出，这个命题同希尔伯特不久前证明的华林问题在形式上十分相似．它们都是把任一整数表示成为有限多个某种特殊类型的整数之和的可能性问题．希尔伯特只解决了这种表示的存在性问题，但并没有给出法数的估计．1918年英国数学家哈代(G．H．Hardy，1877—1947)与印度数学家拉曼纽詹(S．Ramanujan，1887—1920)首先发表圆法，但没有应用于哥德巴赫猜想及华林问题．

1920年开始，哈代与李特尔伍德发表一系列论文，总题目是“‘数的分拆’的某些问题”，系统地发展了圆法并首先应用于华林问题，并给出g(k)及G(k)的明显公式，其中1923年发表的III，V两篇文章就是专门讨论哥德巴赫猜想的．

1920年挪威数学家布龙(V．Brun，1885—1978)改进了原始的筛法，创造了所谓布龙筛法，得到了任何大偶数都可以表示为两个数之和，每个数的素因子数目不超过9个的结论．(我们简记为9＋9)．后来相继改进为(7＋7)(1924)，(6＋ 6)(1932)，(5＋5)(1938)和(4＋4)(1940)， 1947年挪威数学家塞尔伯格(A．Selberg，1917—)大大改进了布龙筛法，它能得出更好的定量结果(相当于2＋3)．1941年苏联数学家林尼克(Ю．В．Л И Н Н И К，1915—1972)发明大筛法，1948年匈牙利数学家瑞尼(A．Renyi，1921—1970)把大筛法加以精密化，首先得出(1＋c)．1965年英国数学家罗斯(K．F．Roth，1925—)及意大利数学家明比利(E．Bombieri，1940—)大大改进了大筛法，得出大筛法不等式，因此可以得出(1＋3)．1966年陈景润改进前人的方法，宣布了(1＋ 2)， 1973年发表了全部证明．

研究加法数论的另一个初等方法是密率法，它是由苏联数学家史尼列尔曼在1930年创造的，首先解决了朗道在1912年提出的较弱的哥德巴赫猜想，这在当时引起了轰动．朗道等人很快就对方法及结果加以改进，不仅得出新结果，而且应用到其他数学领域．

黎曼猜想是如此重要，以致成为许多20世纪数学家研究的对象．

1915年哈代成功地证明在$\sigma=\frac{1}{2}$这条直线上有无穷多零点。1921年哈代

代和李特尔伍德证明从$\frac{1}{2}$到$\frac{1}{2}+iT$间的线段上零点的数目当T相当大时至少有AT那么多(其中A是一个正实数)．1942年，挪威数学家塞尔伯格又改进到ATlogT，并证明至少有$\frac{1}{10}$的零点落在线上。1974年美国数学家列文松（N. Levinson，1912—1975）证明至少有$\frac{1}{3}$以上零点落在临界线上．

代数数论是研究代数数域及其代数整数环的结构的．所谓代数数是指满足有理整系数代数方程的根，如果代数方程的首项系数为1，则代数数称为代数整数．最早把整数推广到代数整数的是高斯，他在1831年为了研究四次互反律而引进所谓“复数”，即形如$a+b\sqrt{-1}$的数，其中a和b都是有理整数。随后爱森斯坦引进形如$a+b\rho$的数，其中ρ是1的三次根，a，b是有理整数．而一般的二次数域理论是高斯(1801)首先用二元二次型的术语表达的，整系数二元二次型在线性变换之下可以划分为等价类，给定判别式的二元二次型的等价类数目称为类数．类数的计算是代数数论中头等重要的问题．狄利克雷(1840)给出二元二次型的类数公式．高斯和狄利克雷的工作后来被翻译成二次数域的语言，连同库默尔发展的分圆域理论，构成代数数域的理论基础．它们分别由戴德金在1871年到1894年用理想的语言以及克罗内克在1882年用除子的语言所发展，而真正代数数域理论的完整形式最后是希尔伯特在他的《数论报告》(1897)中奠定的．

希尔伯特不仅统一了以前的零散理论，而且把它们大大发展了．他引进类域及范数剩余记号等概念，而且在特殊情形下研究类域许多性质，然后推广到一般情形下的猜想．大约十个这样的猜想构成20世纪代数数论的主流——类域论．该分支研究数域k的阿贝尔扩张与k的某些理想类之间的一一对应，而且描述在这种对应之下，k中的素理想如何在k的阿贝尔扩张中分解．希尔伯特的猜想从本世纪初起一个一个地被证明，主要是奥地利数学家冯特万格勒(P. Furl wängler，1869— 1940)以及日本数学家高木贞治(1875—1960)的成果．高木(1920)还推广了类域的概念，证明代数数域k的任何阿贝尔扩张K，都可以表示为k上的类域，这把经典代数数域理论纳入类域论的框架之中．1927年阿廷证明了一般互反律，建立了k的阿贝尔扩张的伽罗瓦群与k的理想类群的某一商群的明显同构，从而完成类域论的建立．不过这些证明都极复杂，而且运用了解析工具．20年代末，法国年轻的数学家厄布朗及薛华荔开始对类域论进行探索及改造，他们在诺特、阿廷及哈塞(H． Hasse，1898—1979)的影响下，不仅简化了许多证明，而且薛华荔在他1933年的博士论文中奠定了自成体系的类域论基础．在其后几年的研究中，他去掉解析工具，得出了完整的算术证明(1935)，并把有限次扩张推广

到无穷次扩张上(1936)，为此他引进伊德尔，从而成功地完成从“局部”到“全局”的过渡——直接由局部类域论得出全局类域论所有结果(1940)．40年代，由于同调代数的发展，阿廷和他的学生泰特(J.Tats，1925—)用伽罗瓦上同调的语言重新表述类域论．

希尔伯特在1900年提出的著名的23个问题中数论的问题除了素数

的第八问题之外，还有关于超越数的第七问题。第七问题中间如$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

之类的数是否超越数．它的定义如下：一个数如果满足有理系数的代数方程，就叫做代数数．不是代数数的数就称为超越数．这种问题很难，直到1882年才证明圆周率π是超越数．希尔伯特曾对他的第七问题的解决很悲观，认为黎曼猜想的解决要比这个问题容易．不料情况完全相反，1929年苏联数学家格尔芳德(A．O．ГеЛЬФОНД，1906—1968)取得了突破，不久就解决了第七问题．近年来超越数论取得了重大的进展，并解决一系列经典问题，比如人们很早(1844)猜想$a^b-c^d=1$只有唯一一组解$3^2-2^2=1$，一直到1977年才由于超越数论的进展而得到肯定解决．

八、概率论

概率论是研究偶然、随机现象的规律性的数学理论，它产生于17世纪中叶．古典概率论来源于赌博中提出的一些问题，当时用的工具主要是排列组合理论，由此得出概率及数学期望等概念．另外，人口统计，射击理论，特别是观测误差的理论，使概率论与解析方法相结合，引出了像正态分布、大数定律等概念，引进了在自然科学中有着广泛应用的最小二乘法．一直到20世纪二十年代之后，概率论才从一个较小的、孤立的课题，形成一个有自己体系的独立学科．1925年到1940年，被称为概率论的英雄时代，在这段时期中，对概率论做出最大贡献的有下列几位数学家：法国数学家保尔·莱维，他在1919年被高等工艺学校邀请讲授高斯正态分布律及误差理论，结果他发现，这门学科的数学基础很缺乏，这激起他开始进行这方面的研究．其后十几年间，他和别人完全解决了经典的极限定理问题，并为随机过程理论奠定基础；苏联数学家柯尔莫哥洛夫，他在1933年对概率论的公理化标志着概率论这门学科的正式诞生，他在极限定理及随机过程理论方面也有决定性的贡献；苏联数学家辛钦(А．Я．ХИНЦИН，1894—1959)、美国数学家杜布(J．L．Doob，1910—)、费勒(W．Feller，1906—1970)也都是现代概率论的奠基者．第二次世界大战以后，分别形成了法国学派、苏联学派和美国学派三个主要的概率论研究中心．

概率论的最基本概念是“概率”，它也叫“几率”“或然率”等，是随机事件的或然性或者可能性的数值估计．它有多种定义，如由大量试验所计算出来的“频率”(统计定义)，由“等可能性”出发，按照组合方法的古典定义，以及做为认识主体“信念程度”的定义．但是只有到1900年测度论发展起来以后，才有正确的理解．这时，我们把“事件”归结成“集合”，比如掷一颗骰子得1，2，3，4，5，6点，我们把它对应于{1，2，3，4，5，6}这样一个集合，而事件的“概率”，则表示

集合中各子集合的“测度”，只要它满足整个集合的测度(概率)，等于1．因此，如果骰子没有不均匀处，发生{1}，{2}，…，{6}事件的

概率均为$\frac{1}{6}$，发生奇数点的概率为{1，3，5}这个子集上的测度等于$\frac{1}{2}$，

如此等等．这样的概率表述方法的优点在于它可能推广到可列无穷集合上乃至一般的无穷集合如连续统(区间)上．

古典概率论两大极限定理是由伯努利和德·莫伏瓦在18世纪上半叶所奠基的大数定律和中心极限定理．前者是说当试验次数n增加时，取得成功的频率与概率p的偏差几乎可以任意小，比如掷硬币，掷的次数

越多，掷出正面的机会越接近$\frac{1}{2}$．而后者是说，当试验次数越来越多时，

频率与概率的误差分布越来越接近正态分布．这两个定理经过拉普拉斯、泊松、切贝舍夫、马尔科夫的经典研究之后，在1900年由李雅普诺夫开创了一个新时期．他引进特征函数，这实际上是过去应用很久的傅里叶变换法(傅里叶、拉普拉斯、油松及柯西均在不严格的情形下用过)，并改进切贝舍夫及马尔科夫的大数定律，同时证明李雅普诺夫定理．马尔科夫用截断变量的矩量法加以证明．后来柯尔莫哥洛夫于1926年最终给出大数定律的充分且必要条件，林德伯格(J．Lindeb- erg)1922年给出中心极限定理的充分条件．最后1937年费勒证明林德伯格条件是充分且必要的，从而结束了古典极限定理的研究时期．

大约同时，也开始了对极限定理的新研究．例如，极限分布不是正态分布的情形，求独立且同分布的随机变量的和收敛于给定的极限的条件．关键的一步是意大利数学家芬耐蒂(B．de．Finetti)在1929年引进无穷可分分布律，1934年莱维给出它完全的刻划．1936年辛钦证明某种条件的独立随机变量和的极限分布都是无穷可分分布律．最后1939年苏联数学家格涅坚科(Б．В．Гнедко，1912—)及德国数学家杜

柏林（W．Döblin，1915—1940）独立给出收敛地无穷可分分布律的充

分必要条件．

概率论当前最重要的分支是随机过程理论．比如一个口袋里含有b个黑球及r个红球，一次摸出一个球，摸出以后不放回，如果第七次摸到黑球，则令$x_t=1$，否则令$x_t=0$，从而xt是个随机变量，每一次具体抽样，就得到一个样本序列w，$\{x_1(w)，x_2(w)，\cdots x_{b+}(w)\}$，这序列称为一个随机过程．这个例子中t的值及xt的取值均为离散的，我们称之为离散随机序列，同样可以推广成连续随机序列，离散随机过程及连续随机过程，随机过程研究诸xt之间的依赖关系．

随机过程的研究不仅有内在的意义，而且还与数学许多领域有着密切联系．它由测度论、位势

论、傅里叶分析、巴拿赫空间中的算子半群，谱理论及遍历理论得到解析工具，反过来它又应用到函数不等式、微分方程、信息论、统计数学等领域，并通过随机积分应用到数学物理的许多分支中去．

最早最严格定义并深入研究的随机过程有马尔科夫过程及平稳过程．

马尔科夫过程是1906年由俄国数学家马尔科夫(A．A．Ma-РкOв，1856—1922)提出来的．粗浅地讲，它的含义是，一个体系将来的发展只与体系的现在状况有关，而与体系过去的历史无关．

离散时间的马尔科夫过程称为马尔科夫链．1907年保尔·埃伦菲斯特(Paul Ehrenfest，1880—1933)夫妇提出一个简单而漂亮的马尔科夫链的模型．考虑两个容器A和B，A中盛有标记 1到N号码的球，然后在一个签盒中(号码 1到N)抽一个签得x，就把号码为x的球由它所在的容器搬到另一容器中．当然B最初是空的，第一步显然由A搬到B，其后A中球数就指数地减少到N/2，其后就在N/2附近摆动．这有点像气体由一瓶中扩散到真空瓶中的过程，所不同的是，这样一个过程总是以概率1回到初始状态，也就是全部N个球回到容器A，当然回到初始状态所经历的时间可以是很长很长的，而且永远也不返回初始状态的过程在所有过程当中是极少极少的．

马尔科夫过程最典型的例子是布朗运动．1827年，美国植物学家布朗(R．Brown，1773—1858)在显微镜下观察到液体中的颜料粒子做奇特的无规则运动．他在1828年发表这个结果后，曾引起许多不同意见的争论，长时间没有满意的定量解释．一直到1900年爱因斯坦(A．Einstein，1879—1955)和波兰物理学家斯莫卢霍夫斯基(H．VOO SOOIOChOWSki，1872—1917)独立给出物理上的解释，这就是布朗运动是分子无规则碰撞的结果．他们还得出粒子在某一轴上投影的位置．

服从正态分布，x的平均值为 0，均方差 $\overline{x^2} = \sigma^2 t$．法国物理学家佩兰(J．Perrin，1870—1942)在1908年发表了他关于布朗运动的实验结果，并给出测定阿伏加德罗常数的一个精确测定方法．这就无可辩驳地证明了原子论，打击了唯能论．1916年，斯莫卢霍夫斯基把布朗运动归结为一个数学问题，但不是从随机过程的观点出发的．第一个从数学上深刻研究布朗运动的是维纳，1923年他第一次给出随机函数(即后来随机过程)ω(t，ω)的严格定义，证明x=σω(c，ω)可以是布朗运动的理论模型．这种函数早在1900年已被法国数学家巴夏里耶(L．Bachelier，1870—1946)在他的博士论文中考虑过，不过他的论文是投机理论的．他在寻求股票市场的涨落过程中，发现W(t，w)的许多特征性质．他实际上发展了一种随机过程理论，而且也提到布朗运动．不过，由于当时对于概率论的普遍忽视，没有受到注意．维纳从样本路线的观念出发，研究“路线”的集合，引进维纳测度，并证明几乎所有轨道是连续的．1933年英国数学家佩莱，波兰数学家齐格蒙与维纳合作证明布朗运动的几乎确定所有轨道在每一点都是不可微的．这种连续而不可微函数在过去很长时间被认为是病态，而现在成为概率论中最重要的一类函数．

而从马尔科夫过程观点研究布朗运动的是保尔·列维．他从1938年起，对布朗运动进行系统的

研究，他研究随时间增长的样本路线，总假定未来与过去无关这种马尔科夫性质．

第三节　第二次世界大战之后纯粹数学的发展

第二次世界大战之后，纯粹数学取得了令人瞩目的进展，它主要表现在以流形的整体性质为中心的代数拓扑学及微分拓扑学、大范围微分几何学、大范围分析的研究．在这些研究的基础上，对经典的代数几何学、复变函数论逐步由低维扩张到高维乃至一般维．在代数几何学的成果基础上，数论的核心——丢番图分析取得重大进展．与线性问题迥然不同的非线性问题也有所突破．

一、代数拓扑学及微分拓扑学

1939年底波兰数学家爱伦堡(S．Eilenberg，1913—)到达美国，开始了他同麦克莱因(S．Maclane，1909—)及斯廷洛德(N．Steenrod，1910—1971)的合作，为代数拓扑学奠定了基础．特别是他1944年定义了奇异(上)同调群并和斯廷洛德在1945年把同调论公理化，结束了战前那种多种同调论并存的局面．1939年英国数学家怀特海(J．H．C．Whitehead，1904—1960)引进了CW复形并对同伦等价条件进行代数刻划，使代数拓扑学有了相当合理的对象．1947年斯廷洛德发展了障碍理论，定义了第一个同调运算Sq，成为代数拓扑学的重要工具．

但是战后代数拓扑学的大发展得力于法国学派的兴起．特别是1948年H·嘉当(H．Cartan，1904—)讨论班，对代数拓扑学产生重大突破．早在三十年代末，产生纤维丛的概念，这时扩展成纤维空间的概念，成为拓扑不变量的有力工具．1951年塞尔(J．P．Serre，1926—)引入1945年勒瑞发明的谱序列方法首先对球面同伦群的计算得出一系列成果．1952年道姆(R．Thom，1923—)得出道姆基本定理，直接导向配边理论的发展．1956年美国数学家鲍特(R．Bott，1923—)对于李群的稳定同伦群得出周期性定理，这一结果是K理论的重要组成部分．1970年外斯特(J．West)及钱普曼(T．Chapman，1940—)证明任何CW复形的同胚都是单同伦等价．

由于代数拓扑学工具的发展，促进了微分拓扑学的大跃进．微分拓扑学主要研究流形的拓扑学，随着流形上拓扑结构、分段线性(组合)结构及微分结构的不同，流形分成三大范畴TOP，PL，DIFF．早在30年代，美国数学家凯恩斯(S．Cairns，1904—1982)等就证明，凡是微分流形都可以加以剖分产生与其微分结构相协调的组合结构．但是组合流形反过来并不一定有相应的微分结构，这首先由瑞士数学家克外尔(M．Kervaire，1927—)在1959年举出反例．更令人震惊的是美国数学家米尔诺(J.Milnor，1931—)在1956年证明七维球面上有多种不同的微分结构．其后他们还定出球面上到底有多少种不同的微分结构．1960年美国数学家斯梅尔(S．Smale，1930—)证明了广义庞加莱猜想，即五维及五维以上的同伦球面(具有与球面相同的同伦群)都与球面同胚．对于拓扑流形何时存在PL结

构，以及其PL结构是否唯一的问题(去猜想)，为美国数学家克拜(R．Kirby，1938—)及基奔曼(L．Siebenmann，1939—)在1969年完全解决，他们得出了不存在的“障碍”．他们的方法用到无限维的分类空间．

七十年代最困难的三维拓扑学开始取得突破，虽然原来的庞加莱猜想还没有得到证明，但美国数学家色斯顿(W．Thurs-ton，1946—)证明，除了三维球面情形之外，其他三维流形可以得到完全的分类．更令人惊异的是，最为困难的是四维流形情形，1981年美国数学家弗里德曼(M．H．Freedman，1951—)证明拓扑的庞加莱猜想，而且利用英国数学家唐纳森(S．Donaldson，1957—)的结果，可以证明，四维球面上有无穷多种微分结构．低维流形最有兴趣的扭结问题长期以来没有取得新突破：1984年琼斯(V．Jones，1953—)得到新的多项式， 1988年高尔登(C．M．Gordon)等证明了蒂茨猜想(1908)．

二、微分流形的几何学

微分流形的微分结构可以通过切丛给予一定的刻划．一般丛的理论在40年代初由施蒂费尔(E．Stiefel，1909—)惠特尼定义了施蒂费尔—惠特尼示性类，吴文俊(1919—)1949年证明其拓扑不变性．邦特里亚金引进邦特里亚金示性类．1957年托姆证明有理系数的邦特里亚金示性类是组合不变量．1965年诺维科夫证明其拓扑不变性．关于微分流形的粗分类，托姆在1952年提出“配边”理论，配边理论是微分流形理论的重大成就，藉助它德国数学家赫采布鲁赫(F．Hirzebruch， 1927—)证明高维代数簇的黎曼—洛赫定理，米尔诺证明七维球面上存在不同的微分结构．这个理论为米尔诺等人推广到一般配边理论，如复配边理论，它同K理论一样是一种广义同调理论，即满足同调论七条公理中的前六个，因此给拓扑学引进了新的工具．K理论的产生使一些经典问题得到解决，特别是球面上独立向量场的数目．

微分流形上的向量场．在微分流形M上，使r阶可微(C^r，$(r\geq 1)$)类向量场x为零的临界点在研究向量场的积分曲线中起着重要的作用，这些临界点就是向量场的奇点．庞加莱第一个发现曲面上向量场的临界点与曲面的拓扑不变量之间的关系，而这个关系的一般形式是由浩普夫给出的．假设M是紧的，且x的临界点只有有限多个，那么对于每个临界点可以内在地对应一个整数，称为该点的指数，则所有指数之和(称为x的指数)等于M的欧拉——庞加莱示性数．如果x_1，…x_k是M上k个向量场，这个向量场组的奇点就是这样的点$x\in M$，在其上向量$x_1(x)$，…$x_k(x)$是线性相关的；指数的概念也能推广到这样的向量场组上，当k＝2时，也有它与M的同调之间关系的结果．一个曾进行许多研究的问题是：决定最大的整数k，使存在k个向量场x1，…，xk不具有奇点．如k＝n=dim(M)，流形M就称为可平行的．对于球面S_n的情形，这问题由亚当斯(J．F．Adams，1930—1988)在

1962年完全解决。把$n+1$写成$(2a+1)2^{c+4d}$的形式，其中a，c，d是≥ 0的整数，且$c\leq 3$；则藉助于基于K理论的广义上同调可以证明，k等于2^c+8d-1．特别可平行的球面只有S_1，S_3，S_7．

嘉当的一段联络理论被法国数学家埃雷斯曼(C．Ehres-mann，1905—1979)等人发展成为一般的纤维丛观念．纤维丛是一种以空间为基，基上每点又长出另一空间为其纤维，所有这些纤维合在一起成为纤维丛．利用纤维丛的观念可以自然地定义外微分形式及外微分．嘉当的联络概念使得我们能够比较在两个无穷近点的两个切空间的向量，同时可以定义一个向量场关于另一向量场的导数，这正好是协变导数的推广．嘉当这一套概念和方法不仅对于微分几何产生深远的影响，而且对微分拓扑乃至物理学中的规范场理论都提供了重要工具．而陈省身(1911—)则是现代微分几何学奠基人．

三、大范围分析

“大范围”(Global)也可以译为整体、全局，它的原意是全球．它的对立面是局部．流形的局部是欧几里得空间，在它上面有着丰富的结构，更有着各种坐标系，使我们很容易在上面开展数学分析，因此，长期以来，数学分析基本上是局部分析．局部n维欧几里得空间，经过拼接之后，可以成为各种各样的n维流形，所以，大范围分析也可以说是流形上的数学分析．它包括流形上的微积分，流形上的微分方程，流形上的变分法，流形上的函数论及泛函分析等等．

虽然大范围分析这个名词在1965年才开始出现，可是它的内容至少已有一百多年的历史了．在微分流形上考虑微分算子的思想至少可追溯到黎曼与贝尔特拉米．到19世纪八十年代，大数学家庞加莱，已经在常微分方程论中引进几何方法，开创了微分方程定性理论的新方向．他一反过去具体局部求解的方法，而着重研究大范围内解曲线的分布状况．他发现，微分方程的奇点起着关键的作用，通过奇点的分类，对于解的性态有深入的了解，特别是提出了稳定性问题．后来的发展围绕着稳定性，周期解及极限环等问题展开，而且很快在电路问题中找到应用．庞加莱去世之前，对狭义三体问题(即其中一体的质量远远比其他二体为小)证明定理：(1)运动方程的解除了已知的雅可比积分之外，不存在其他的解，并提出(2)存在无穷多周期解．他没能证明这点，只是把它归结成一个拓扑定理，这就是所谓“庞加莱最后问题”．没有料到，他去世不到半年，这问题就被美国数学家柏克霍夫解决．他还用拓扑方法研究回归问题(如一个星体经过一段时期后是否还回到原来位置附近)，并用极小极大方法来推动动力系统的研究，这可以说是大范围分析的第一个分支．大约同时，有人对环面上的微分方程进行充分的研究．

二十年代中期，柏克霍夫的学生莫尔斯(H．M．Morse，1892—1977)开创大范围变分法，也即莫尔斯理论．莫尔斯理论把流形上的函数的临界点与流形的拓扑性质连系在一起．莫尔斯理论促进

了微分拓扑学的大发展，特别是证明了广义庞加莱猜想．

二十年代中期，美国数学家惠特尼开创了大范围分析的第三个分支——微分映射奇点理论，到五十年代中期取得突破性进展，其后成为托姆的突变理论的基础．

大约同时，英国数学家浩治(W．Hodge， 1903—1975)应用流形上的微分算子来研究微分流形的拓扑性质，即所谓调和积分理论或浩治理论．

微分映射的奇点。如f是微分流形V上的实值无穷可微（C^∞）函数，所谓f的临界点就是使微分df在该点等于零的那些点x∈V，这实际上是函数取极大值或极小值的点的推广．f的临界点集可以是V中任意闭集，因此，企图根据其临界点的性质来对C^∞函数进行分类似乎是不现实的．临界点称为非退化的，如果f在这点的某一邻域中的泰勒展开的二次项所构成的多项式是一个非退化二次型；根据定义这个二次型的指数就是临界点的指数．只有非退化临界点并且在这些点(它们必定是孤立的）取不同的值的函数是一些非常特殊的函数，与V的拓扑密切相关．

奇点理论的主要问题是通过某种等价关系来分类无穷可微映射f：M→N，f与f′看成等价，如果f′=h·f·g，其中g和h分别是M和N的微分同胚，或者g和h分别是M和N的同胚．1955年，惠特尼和托姆开创了研究奇点理论的大规模纲领．他们的新思想主要是集中注意于一般的映射．这个纲领主要由麦泽尔(J．Mather，1942—)在60年代初的工作而大大推进了．他证明，拓扑稳定的映射总构成ε(M，N)中的稠密开子集，但是对于微分稳定的映射，同样的论断只对某些明显走出的维数对(m，n)(“好维数”)才成立．一般的映射总是拓扑稳定的，而在好维数下，一般的映射恒同于微分稳定映射．这里证明的技术在于把微分稳定性的问题归结为所考虑映射的导网的相应问题，然后，由于一个关键的结果，即拉格朗日把魏尔斯特拉斯的“预备定理”推广到C^∞函数，从而可以运用交换局部环理论这个工具．

四、多复变函数论

多复变解析函数论是单复变解析函数论的自然推广．早在19世纪末，就已经把单复变最简单的结果平行地推广到多复变，而且尝试把一些一般定理，如魏尔斯特拉斯定理(整函数的表示问题)及米塔格—列夫勒定理(亚纯函数的有理分式表示)推广到多复变情形．1895年，法国数学家库辛(P．Cousin ，1867—1933)提出库辛第一问题和第二问题，即给定零点、极点作出相应亚纯函数问题．库辛对函数定义域G是整个n元复空间C^∞的情形(以及一些特殊情形)肯定地解决第一、第二问题，但一般情形一直到1935年才由日本数学家冈洁(1901—1978)解决．他证明当G是全纯域时，库辛第一问题永远可解．而第二问题即使对全纯域也还需要满足一定条件．这显示出全纯域的重要．但是多

复变解析函数的定义域远比单复变复杂，而且多复变解析函数还具有不同于单复变函数的独特性质，这就是1906年由德国数学家哈托格斯(F．Hartogs，1874—1933)发现的向内可解析开拓性：设C^n中的域G内有一个紧集K，只要G—K是连通的，任何在G—K上全纯函数都可开拓到整个G上．这个性质对n＝1是决不成立的，由此多复变函数走上自己独立的发展道路．对向外开拓，多复变情形也不同于单复变情形，即总有开拓不出去的全纯函数，一般来讲，所有全纯函数都可以开拓到更大的域中去．而不具有这种性质的域则称为全纯域．20世纪前半叶，多复变函数论的主要问题是研究全纯域的刻划问题．为此哈托格斯及意大利数学家列维(E．E．Levi，1883—1917)引进伪凸性(也译拟凸性)的概念，1910年列维提出列维问题：伪凸域是否全纯域？在这方面第一个重要结果是H·嘉当及德国数学家图仑(P．Thullen，1907—)在1932年给出的：他们证明可以用全纯凸性来刻划全纯域．但由全纯凸性过渡到伪凸性又经历了二十年．冈洁在1942年证明n=2的情形，到1953年才证明一般情形，1954年诺盖(F．Norguet，1932—)及布列莫曼(H．J．Bremermann，1926—)也独立证明同样结果，至此列维问题完全解决．

另外有一些沿着不同道路关于多复变解析函数的研究：德国数学家莱因哈特(K．Reinhardt)于1921年开创的解析自同构的研究，博赫纳及伯格曼(S．Bergman， 1895—1977)从1922年开始的核函数的研究．对单复变整函数及亚纯函数论的推广也并非易事，法图等还引出皮卡定理的反例：解析映射$f:C^2\to C^2$的函数行列式处处不为零，但f的象$f(C^2)$在C^2中的余集却具有非空开集．1930年，H·嘉当证明解析映射的唯一性定理，但1926年，儒利雅把正规族理论推广到多复变．在几何函数论方面，庞加莱早就知道C^2中圆盘与双圆柱不双全纯等价．关于自守函数的推广有两个方向：一个方向是由希尔伯特及他的学生布鲁门塔尔(L．Blumenthal， 1876—1944)在20世纪初的工作开拓的，另一个方向是西格尔从1935年到1950年的工作开拓的，这些工作与代数数论、李群的无穷维表示与代数几何学联系在一起，形成当前十分活跃的领域．

最早的多复变函数论的综述是奥斯古德1914年的书及1924年《函数论》第二卷第一版，但较全面的总结则是1929年《函数论》第二卷第二版．其后的成就见于贝恩克(H．Behnke，1898—1979)及图仑的《多复变函数论》(Theorie der Fun - ktionen mehrerer Komplexer Veränd erlichen)1934年版及1948年出版的博赫纳及马丁(W．T．Martin，1911—)《多复变》(Several Complex Variables)两书中． 对于1950年以前的多复变，外尔在“半世纪的数学”一文中说“多复变解析函数论，虽有一些深刻的结果，仍然还处于它的草创阶段”．实际上，从1951年起，在拓扑学、微分几何学、抽象代数学、李群理论以及分析学的发展的共同作用下多复变函数论迎来一个崭新的时期．

首先，研究对象已由多元复数空间C_n中的域推广到复解析流形及解析空间．1951年德国数学家施泰因(K．Stein，1913—)把全纯域的性质抽象出来，定义了后来以他命名的施泰因流形．它具有许多好的性质，特别是在1951年H·嘉当及塞尔在其上引进层系数上同调及凝聚层的概念，用层上

同调来表述分析成果，特别是库辛第一、第二问题．这样一举解决定理A、B，反过来，用层上同调刻划施泰因流形．德国数学家格劳尔特(H．Grau-ert，1930—)在1958年证明：复解析流形的相对紧域，如是强伪凸，则是施泰因流形．1953年塞尔猜想：底及纤维均为施泰因空间，丛空间是否也是施泰因空间？这个问题刺激了多复变特别是施泰因空间理论的发展．到1977年斯科达(H．Skoda)举出一个反例．

复解析流形虽然是单复变解析函数的定义域——黎曼面(一维复流形)的自然推广，但是许多自然定义的集合，最简单的像解析函数的零点集，一般并不是一个复解析流形．因为不是每一点都有一个邻域与Cn双全纯等价．显然这是因为有奇点的缘故．为此，必需把研究对象由复流形大大推广，这就是复空间或解析空间的概念．它们首先是由贝恩克和施泰因在1951年引进的．50年代中期起，运用层上同调理论，格劳尔特、雷姆尔特(R．Remmert，1930—)及施泰因等人得出一系列基本结果．

解析空间之间的映射中，重要的一类是正常映射(紧集的原象是紧的)．关于正常映射的基本结果是1960年格劳尔特证明的直接象定理：f：X→Y是正常映射，则X上的凝聚层的各次直接象都是Y的凝聚层．特别地f(X)是Y的解析子空间．另外，广中平祐还把奇点解消定理推广到解析空间．

与单复变的情形不同，两个单连通的域不一定双全纯等价(存在一对一的保角或共形映射)．庞加莱早就指出二维复数空间C^2中球体$|Z_1|^2+|Z_2|^2<1$与双柱$|Z_1|<1$，$|Z_2|<1$之间不存在双全纯映射，这由它们的解析自同构群不同即可看出．也知道Cn中存在单连通的全纯域，它没有非平凡的自同构．一般的解析空间的自同构群，只有个别特殊结果，而它们之间映射的普遍定理，只有费弗曼在1974年证明的扩张定理：如果C^n中两个严格伪凸域D_1，D_2之间存在映上同构，则该同构可扩张或包含边界的微分同胚．1980年以后，有人给出简短的证明．

与施泰因流形对立的另一极端是紧复流形，其概念可追溯到1913年
外尔的《黎曼面的概念》（Die Idee der RiemannschenFläche）一书。由
于紧黎曼面与光滑代数曲线是同一事情的不同说法，紧复流形理论也可看成是代数几何学的推广，但在方法上却有微分几何学及分析上的好处．

最重要的一类复流形是凯勒（E．köhler，1906—）流形，特别是所有
非异射影代数流形都是凯勒流形，反过来不成立，1954年小平邦彦证明只有约束型凯勒度量的复流形(浩治流形)才是代数流形．凯勒流形上重要的工具是调和积分论，这是由浩治在1941年发展起来的，它可看成黎曼面上调和函数论在复流形上的推广．调和积分理论把拓扑的关系通过具体的调和积分表示出来，由此可以得出一系列深刻的结果，例如1954年小平邦彦证明的致零定理，由此把曲率与拓扑性质联系起来．

1963年美国数学家柯恩(J．J．Kohn，1932—)对重要的伪凸流形，
特别是强伪凸流形，解决$\bar{\sigma}$—纽曼问题，开创了一个新时期，利用这种

方法不仅解决了许多函数论问题，而且把浩治—小平邦彦关于紧复流形的结果推广到非紧、带边缘复流形上．

五、抽象代数几何学和丢番图方程

古典代数几何学主要研究三维复射影空间Pn(C)中的代数曲面和代数曲线,实际上与复分析不可分．但是无论从理论上还是从应用上讲，都要求对代数几何学作推广．例如把基本定理——黎曼—洛赫定理推广到代数曲面及高维代数簇上，多个代数簇的交截问题，舒伯特(H．Schubert，1848—1911)的计数几何的严密基础问题(这是希尔伯特第十五问题)等，尤其是许多数论问题更要求有限域的求解．这些都促使代数几何学的抽象化．从30年代起，抽象代数学、代数拓扑学、微分几何学的发展为代数几何学的抽象化提供了许多新工具，尤其是四十、五十年代层论中层的上同调及纤维丛的思想及同调代数方法更导致代数几何学基础的两次革新，并在不定方程上取得两次大突破，这是抽象代数几何学的突出成就．

第一次革新是抽象代数几何学的基础的建立，它反映在魏伊1946年出版的《代数几何学基础》(Foundations of Algeb-raic Geometry，1962年第二版)一书中．虽然从30年代起，范·德·瓦尔登在十几篇论文中已经为代数几何学一些概念(如“一般点”)给了严密的定义，但“交截重数”的概念仍然成问题．魏伊解决了这个问题，他还把定义域由复数扩充到一般的代数封闭域(特别是特征不等于0的域，从而为数论问题的解决打通道路)．他还第一次把代数簇的概念由射影空间中解放出来，也就是给出一个“内在的”定义．相应地对于代数簇的其他概念也作了推广．1949年魏伊又把纤维空间概念引进理论当中．运用新的代数几何学工具，他于1948年成功地证明有限域上曲线的黎曼猜想，1949年提出更一般代数簇上的黎曼猜想，并证明一些特殊情形．这个所谓“魏伊猜想”推动了其后二、三十年的代数几何学再一次更新．

第二次革新主要是格罗登迪克所建立的“概型”的庞大理论．概型理论把所有交换代数学都包括进去．它来源于1955年塞尔的工作．塞尔把多复变函数论中层的语言引到抽象代数簇上，把抽象代数簇定义为环式空间，这样代数簇成为具有查瑞斯基拓扑的拓扑空间，从而可以建立上同调理论，这样可以给出算术亏格等古典不变量一个上同调解释．1958年，格罗登迪克定义了比代数簇远为一般的概型概念，在其后十多年里，运用上同调理论，不仅推广了一系列古典定理，如查瑞斯基的主要定理，而且得出了一系列辉煌的新成就．

1．黎曼—洛赫定理的推广

1951年小平邦彦把代数曲线的黎曼—洛赫定理推广到代数曲面情形，把原来意大利数学家的不等式变成等式．照这样推广下去到高维存在许多困难，德国数学家希策布鲁赫当时在普林斯顿高等研究院同小平邦彦的讨论得知塞尔了解如何把黎曼—洛赫定理中的不变量用上同调来表示，从而得

出一般代数簇的黎曼—洛赫定理的表达式，1953年底又知道托姆的配边理论，于是在1954年一举证明一般情形的黎曼—洛赫定理．1958年格罗登迪克又推广到更一般情形，最后纳入阿拉雅(M．Atiyah，1929—)—辛格(I．Singer，1924—)指标定理．

2．奇点解消

奇点解消是通过坐标变换把奇点消去或化简．19世纪已知代数曲线的奇点可以通过双有理变换消去，而代数曲面则一直到1935年才由沃克(R．Walker，1909—)及查瑞斯基用不同方法给出证明．三维代数簇一直到1944年时查瑞斯基给出证明．高维代数簇的奇点解消越来越复杂，正由于一般理论的建立，1964年日本数学家广平中祐(1931—)一举证明特征为0的情形，但特征为P的情形还未解决．

3．代数曲线的参模空间结构

1965年，美国数学家曼福德(Mumford，1937—)证明，任意代数闭域亏格为g的代数曲线的参模空间Mg具有抽象代数簇(概型)结构．1969年德林(Deligne，1944—)及曼福德证明Mg是不可约拟射影代数簇．塞梵利曾猜想它们是有理的，并证明g≤0时是有理簇的象，但曼福德等人证明g≥23非但不成立，而且还是一般型的．

与参模空间结构有关的变形理论于1955年由小平邦彦及斯宾塞(D．Spencer，1912—)系统给出．

4．高维代数簇的系统分类

高维代数簇要比代数曲线和曲面复杂得多．单有理代数曲线是有理的，也即同射影曲线双有理等价．但是对于三维及三维以上代数簇，长期以来并不知道，1970年左右，三组数学家用不同方法举出反例，由此可以看出高维问题极为困难．

但1972年左右，日本年轻一代数学家饭高茂(1940—)仿照代数曲面的分类，引进小平维数对n维代数簇分成四类．其后其他日本数学家也对高维代数簇进行更细微的探讨，其中突出的结果有1978年森重文(1951—)对光滑完全不可约n维代数簇是有理簇给出充分必要条件，即具有丰富的切丛，而且对特征大于0的代数闭域也成立．1987年森重文等完成三维代数簇的分类工作．

代数几何学在数论上取得两项突破：

第一个突破是德林在1973年证明的魏伊猜想．魏伊猜想是关于有限域上代数簇的同余ζ函数的黎曼猜想，对于代数曲线情形，阿廷在1924年仿照黎曼ζ函数对于特殊情形定义了同余ζ函数．1931年施密特(F．K．Schmidt，1901—1977)把它推广到一般情形．1934年哈塞证明椭圆曲线的同余ζ函数的黎曼猜想．对于亏格≥2的曲线，魏伊用他的抽象代数几何学工具于1940年给出了征明，1948年全文发表．1949年他对于一般的代数簇，定义类似的同余ζ函数并提出类似的黎曼猜想即所谓魏伊猜想．他还对一些特殊情形作了证明．以证明魏伊猜想为目标，格罗登迪克学派发展一系列新工具，特别是平展上同调使德林走完最后一步．魏伊猜想对许多数论问题的解决有极大的促进，特别是证明拉曼努詹猜想以及三角和的估计．

第二个大突破是法尔廷斯(G．Faltings，1954—)关于莫德尔(L．Mordell，1888—1972)猜想的证明．莫德尔猜想是说：如果K是任何数域，x是K上定义的亏格大于1的任何曲线，则x只有有限多个K有理点．它的最简单的情形是指如果n次多项式方程f(x，y)=0的系数是有理数，且n≥s，则这方程的有理数解的个数只有有限多个．如果方程系数是代数数，类似的结果也成立．1928年魏伊证明解构成的点群是有限生成的．1929年西格尔(C．L.Siegel，1896—1981)用丢番图逼近的方法证明多项式方程的整数解是有限的．其后30年间这问题进展不大．代数几何学的进展有助于得到一些结果，特别是1963年到1965年许多数学家独立证明，如果把代数数域换成代数函数域则答案是肯定的．1962年沙法列维奇(Ц．Щафаревиц，1923—)提出一个猜想，1968年证明了由沙法列维奇猜想可以推出莫德尔猜想．而沙法列维奇猜想又与1963年发表的泰特猜想有关．这样利用代数几何学的工具在这些猜想之间来回穿梭，终于在1983年完成了莫德尔猜想的证明．

第四节 应用数学

数学并不是一门自然科学，它不讨论外在世界的实体与现象以及它们之间的相互关系．但是，长期以来，数学的成果却是与天文学、地理学、物理学(包括力学)乃至其他自然科学的研究联系在一起的．在这种背景之下，纯粹数学家、应用数学家、计算数学家往往三者集于一身，牛顿、欧拉、拉格朗日、拉普拉斯、高斯就是这方面的突出代表．19世纪中期以后，随着专业化的发展，除了最优秀的大数学家之外，只能在一个狭窄专业里取得一定成就，而且纯粹数学家以搞纯正的数学问题(如数论问题)为荣，对于应用数学不屑一顾，甚至一些应用数学家也以进行数值计算为耻，认为这些是下手活．这种分化对于整个数学乃至自然科学的发展是不利的．尽管如此，最优秀的一些数学家仍然在理论数学、应用数学甚至数值方法诸方面均作出一定的贡献．其中有法国的傅里叶、柯西、刘维尔·厄米特一直到庞加莱，德国的雅可比、狄里克雷、黎曼一直到克莱因、希尔伯特及闵科夫斯基．19世纪末开始编纂的德国《数学科学百科全书》公平地把数学一分为二：前半分为数论和代数、分析及几何学三部分，后半分为力学、物理学、天文学及测地学三部分．在克莱因的倡导下，应用数学受到一定的重视并且取得巨大的成绩．但同时国际上也越来越兴起越无用越纯粹的数学越好的说法：德国的数论专家朗道等讥讽普兰托(L．Prandtl，1875—1953)等搞的应用数学为“润滑油技师”，英国的哈代说自己搞的数学都是没用的，而法国的两代数学家，20世纪初的函数论学派以及30年代兴起的布尔巴基学派都是以抽象为荣．直到第二次世界大战前后，纯粹数学、应用数学及计算数学和它们之间的关系有了巨大的变化，这表现在：

1．应用数学的领域大大扩展了，它不仅把以微分方程为主的数学物理学扩展到化学、生物学、地学乃至社会科学，而且所用的数学工具也扩张到群论、微分几何学、拓扑学．

2．随着电子计算机的出现，数值方法必需要适应机器的需要，从而使应用数学取得越来越多的成果．

3．反过来，应用数学的发展及计算机上的数值试验也推动了一系列纯粹数学问题的提出及解决，如唐纳逊由规范场理论出发导致四维拓扑学的突破，计算机试验导致KdV方程的解．

一、数学物理学

第二次世界大战之前，物理学的各项重大成就都与数学及数学家的贡献分不开．在爱因斯坦于1905年发表狭义相对论之前，对该理论贡献最大的有荷兰物理学家洛伦兹(H．A．Lorentz，1853—1928)与法国大数学家庞加莱，而且有人认为庞加莱有不亚于爱因斯坦的功绩．为了对它给出数学表述，1907年闵科夫斯基第一个提出四维时空(即闵科夫斯基空间)概念，他的思想后来还引导爱因斯坦走向广义相对论．1912年爱因斯坦在他的同学格罗斯曼(M．Grossmann，1878—1936)的帮助下，发现数学家早已发展起来的黎曼几何学及张量分析是广义相对论的适用工具．他于1915年11月25日最后得出对坐标变换协变的引力方程，稍早一些，希尔伯特也独立地得出该方程．1918年，外尔在他的《时间、空间和物质》(Raum， Zeit， Materie)中首次进行统一引力场及电磁场的尝试，虽然没有成功，但他提出的“规范不变性”的概念在二次大战后直接导致规范理论的发展．

同时，克莱因、希尔伯特及E·诺特利用不变式理论得出物理原理，特别是诺特原理，它把对称变换的不变性与物理量的守恒性联系在一起．

E·诺特（Noether，Analie Emmy，1882-1935）

1900年，德国数学家普朗克(M．Planck，1858—1947)提出量子概念，到1925年发展成海森伯(W.Heisenberg，1901—1976)的矩

阵力学及1926年薛定愕（E．Sc-hrödinger，1887—1961）的波动力学

，这标志着量子力学的诞生．而1924年出版的库朗—希尔伯特《数学物理方法》(Methodender Mathematischen Physik)I似乎早就为物理学准备好数学工具．矩阵力学及波动力学的等价性早在20多年前已在希尔伯特的掌握之中．海森伯写道“希尔伯特对哥廷根量子力学的发展的影响最为巨大．……现已表明，量子力学的数学方法原来是希尔伯特积分方程理论的直接应用”．希尔伯特说“无穷多个变量的理论研究，完全出于纯数学的兴趣，我甚至管这个理论叫‘谱分析’，当时也没有预料到它后来在实际的物理学光谱理论中获得应用”．希尔伯特同诺德海姆(Nord-heim，)及冯·诺伊曼合写了《量子力学的公理基础》．冯·诺伊曼发展了希尔伯特空间及其算子理论，他推广希尔

伯特的自伴算子成为量子力学适用的厄米特算子并发展其谱理论从而给量子力学建立了完整的数学基础．他的《量子力学的数学基础》(1932)成为这方面的经典著作．

冯·诺依曼(Von Neumann, Jahann, 1903-1957)

第二次世界大战后，基本粒子的分类及规范场理论深刻地影响物理及数学的发展，由于李群表示论及代数几何学的进步，超弦理论成为当前最广泛的大统一场论．

二、计算数学

长期以来，数学一直以数值计算为其最主要的任务，大量数学研究的目的无非是建立算法并不断加以改进，使之算得准、算得快、算得容易、方便，得出令人满意的结果．20世纪计算机的出现，根本改变了计算数学这一分支，对数学及其他科学也产生革命性的影响．1947年冯·诺伊曼等人发表的“高阶矩阵的数值求逆”标志着数值分析这门学科的诞生．其目的不仅要建立优秀的算法，特别是适用于计算机的程序，而且要对算法进行比较和分析，特别是对误差分析稳定性收敛速度以及计算量、存贮量等要进行细致的研究，其后产生一系列的有效方法，如乌拉姆(S．Ulam， 1909—1984)等创造的蒙特卡罗法以及有限元法、稀疏矩阵、样条函数法、快速傅里叶变换(1965)等一系列行之有效的方法．各种数值代数、数值积分以及解各种方程的方法也有许多改进及研究．针对具体问题也产生了计算力学、计算流体力学、计算物理学、计算化学等等新兴分支，成为与实验互补的科研手段．60年代初在基础研究方面还产生了计算复杂性理论，提出一系列基本的与计算有关的理论问题．

数学物理学的问题大都化成微分方程，对于这些方程的分析方法及数值方法的发展简述如下：

1．常微分方程

从天体力学的三体问题到各种非线性自由振动及受迫振动问题，许多实际问题都转化为解常微分方程的问题．一般来讲，常微分方程，特别是非线性常微分方程，找不到精确的解析解，甚至在有解析解时，也不能由常用的函数表出，因此，从19世纪晚期，人们就致力于寻找好的求近似解析解的方法，而第二次世界大战以后，更促进各种数值方法的改进及发展．

最早的近似方法是庞加莱所发展起来的摄动方法，现在已成为数学的一分支——摄动理论．最早它是瑞典天文学家林德斯泰特(Lindstedt)在1883年为解天体力学一个复杂问题提出来的．为了避

免长期项的出现，庞加莱在1892年对于方程

$$\ddot{x}+x=\mu f(x,\dot{x})$$

严格证明存在定理，从而使该方法合法化．而对于非线性振动中常见的方程

$$\ddot{x}+ax=\varepsilon f(x,\dot{x},\omega t)$$

(其中f是t的周期函数，ω是小参数)，则由弗瑞德利克斯等人(1942—1943)及斯托克(J．J．Stoker，1905—)于1950年所解决．同时苏联克雷洛夫(H．M．Крылов，1879—1955)及博戈留波夫(H．H．Боголюбов，1909—1991)在1943年发展了范德波(Van der Pol)于1926年首创的方法，发展了一套平均法，后来在研究非线性振动时常用．另外一种所谓调和均衡法首先由达芬(G．Duffing)在1918年提出，应用也很广泛．从20年代起，问题更集中于奇异摄动问题(如小参数ε出现于高阶导数项和大参数问题)．最早是杰夫瑞斯(H．Jeffreys， 1891—)从1924年起发表四篇论文研究马丢方程解法，其后温采尔(G．Wentzel，1898—)、克拉默斯(H．Kramers，1894—1952)、布理鲁因(L.Brillouin，1889—1969)独立发展成解薛定谔方程的W—K—B方法．另外还有兰格(R.E.Langer，1894—)在1931年提出并由奥立佛(Oliver)发展起的LO方法，对于空气动力学许多问题中产生的强奇异性，1949年由莱特希尔(M．S．Lighthill，1924—)引进自变量的非线性变换，使得庞加莱正则摄动方法也能产生有效渐近解，这方法于1953年由郭永怀，(1909—1968)发展后被命名为PLK方法1955年华沙(W．Wasow，1909—)把这个经验方法加以系统化．

解常微分方程的数值方法还有不少，应用最广泛的是差分方法．最早可追溯到18世纪，其后有相当大的改进．

2．偏微分方程

偏微分方程是由物理学、几何学、函数论等提出来要求求解的问题，从18世纪中叶起，二百多年来对于各种类型的方程进行大量的研究，只有到第二次世界大战之后，才有比较系统的研究．但应用问题，特别是非线性问题，仍然是具体问题具体分析，缺乏统一的方法，许多问题发展了有效的数值解法．

19世纪以来，研究最多的有波动方程、热传导方程及位势方程，对于弹性力学方程及麦克斯韦方程组也有许多进展，而流体力学方程，特别是有粘性的不可压缩流体纳维尔——斯托克斯方程则有许多困难．进入20世纪以后，一系列新的方程出现了：如边界层方程、薛定谔方程、反应扩散方程等等．

求解偏微分方程的过程推动了分析的发展：如傅里叶分析及各种积分变换、复变函数论、变分法、正交函数论、渐近展开、位势理论等等．

在求解偏微分方程的近似方法及数值方法当中，较常用的有变分方法、有限差分方法及有限元方法等．变分方法来源于黎曼为解决狄利克雷问题所提出的狄利克雷原理，该原理虽遭魏尔斯特拉斯的批判，但在1900年被希尔伯特恢复其合法性．他的做法是直接求出泛函极值的最小系列，从而

解对应的边值问题．希尔伯特的学生黎兹(W．Ritz，1878—1909)在1908年应用希尔伯特的思想提出黎兹方法，他首先把解展成完
备独立系$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$的线性组合，然后通过变分条件求系数构成最
小序列来逼近解．对于本征值问题Au＝λu，可以用瑞利商为泛函来通过黎兹方法解决．苏联数学家伽辽金(Б．Г．Галёркин，1871—1945)改变决定系数的方法，可用于更为一般的问题，包括初值问题，这类方法统称黎兹——伽辽金方法．最常用的数值方法是有限差分方法，其历史可追溯到欧拉，它以差商代微商，将微分方程化为差分方程．它适用于各种类型方程．关键问题是收敛性及稳定性问题．1928年，库朗、弗瑞德里克斯及卢伊征明三大典型方程的典型差分格式的收敛性定理，为该方法的应用打下基础，第二次世界大战之后，由于计算机的运用，差分方法做为有效的数值方法得到有效的发展．1948年冯·诺伊曼对于无粘性流体的非线性双曲型方程，为避开激波引出的间断性，引进人工粘性项，为此设计差分方法是现代流体力学数值计算主要方法．在论文中他引进稳定性这个十分重要的概念，并给出稳定性的必要条件．1956年拉克斯(P．D．Lax，1926—)及里希特迈尔(R．D． Richtmyer，1910—)建立了一般差分格式的收敛性及稳定性等价的定理，它对实际计算中误差积累问题有着重要意义．

在战后的数值方法中，有限元方法是另一个最常用的方法．它可以看成是变分方法及差分方法有机的结合，其思想可追溯到库朗1943年的论文．1956年起一些工程人员在处理结构工程问题时又独立发现，60年代开始引进连续体的单元剖分，逐步明确有限元法是变分原理加剖分逼近的思想并建立数值分析的理论基础．

三、统计数学

高尔顿(F．Galton， 1822—1911)在1889年出版的《自然遗传》(Natural In heritance)一书中，首次提出“相关的概念以及其定量表征——相关系数．大约同时，他在一系列观察及测定的基础上，提出了“回归”的概念，他观察到父代与子代的性状虽然有一定的相关性，但连续观察下去，则特征逐步减退，而“回归”到平均值上，从而开创了回归分析．

英国科学家卡尔·皮尔逊(Karl Pearson 1857—1936)是高尔顿的学生，从1894年到1916年发表一系列有关进化论的数学研究，其间发展了相关及回归理论，成功建立了生物统计学，他区别“总体”与“样本”，1898年提出多重相关理论，指出由样本估计总体参数时要采用似然函数．1900年提出拟合优度检验，为此引进χ^2分布(在此之前，德国物理学家阿贝(E．Abbe， 1840—1905)在1863年发表的论文中及德国测地学家海尔穆特(F． R．Helmert，1843—1917)在1875年都曾独立地发现χ^2分布)．这奠定了大样本理论的基础．数理统计学至此时处于描述统计学阶段，其后则是费舍尔(R． A． Fisher，1890—1962)之后的推断统计学阶段．

推断统计学的先驱是英国医生哥塞特(W．Gosset， 1876—1937)，他使用笔名“ 学生 ”—student)，他在1908年发现了大分布，开创了小样本理论，也即根据小样本来进行推断，这使得统计学由研究集体现象转变为随机现象，对于其后的统计学的发展有决定性的意义．但他们推导极不完整，一直到费舍尔加以严格证明并在1925年《研究人员用统计方法》一书中加以系统阐述之后，这种统计方法才得到广泛的传播．

费舍尔把统计学变成为数学的一个分支，他强调统计方法的统一性，对近代数理统计的形式及发展做出巨大的贡献．他提出许多重要的方法，建立了一些分支．他引进解消假设和显著性检验的概念，成为假设检验理论的先驱．他列举一致性、有效性及充分性作为参数的估计量应有的性质．他还提出“ 信息量 ”的概念．从1912年起，建立了以最大似然估计为中心的点估计理论．

1925年费舍尔与叶茨(F． Yates，1902—)合作创立实验设计这一分支，提出区组平方设计与拉丁方．他的工作总结在1925年出版的《实验设计》一书中，他还在1923年发展了与实验设计相适应的方差分析法．费舍尔另一项重要贡献是引进“ 可信分布 ”的概念，对于一些困难的问题如贝伦斯(W． U． Behren-s)——费舍尔问题，提供简单解法．不过，费舍尔的思想方法偏于直观，数学方法也欠严格，这有待于奈曼等人的工作加以发展．

原籍波兰的美国数学家奈曼(J． Neyman，1894—1981)在1925年9月到达伦敦，结识了英国统计学界的人物，与卡尔·皮尔逊的儿子小皮尔逊(E． S． Pearson，1895—1980)建立起终生友谊．他们合作(1928—1938)的头一篇在1928年6月发表的论文中就提出“ 备择假设 ”的概念，指出存在两类错误，他们把假设H真确时而拒绝H所犯的错误称为第一类错误、把备择假设A真确时而接受H所犯的错误称为第二类错误，从而开始使统计推断理论建立在新的数学基础上．他们引进检验功效函数的概念，以此做为判断检验方法优劣的标准．奈曼还在1924年到1937年间建立置信区间概念，它建立在概率的频率解释之上，奠定了区间估计理论的数学基础．

原籍罗马尼亚的美国数学家瓦尔德(A． Wald，1902—1950)1939年发展了统计判决函数理论，在这个理论中，把推断程序全体作为一个整体来考虑，被命名为判决函数空间．它定义了其上的风险函数，作为推断程序好坏的准则．他与费舍尔及奈曼不同的是把先验概率也考虑进去，对第二次世界大战以后的统计数学影响极大．他的结果收入1950年出版的《统计决策函数》(statistical decision functions)一书中．他把估计理论及假设检验理论相结合，形成“ 决策理论 ”这一新的应用数学分支．1943年起瓦尔德还发展了序贯分析，1947年他的《序贯分析》(Sequential analysis)的发表标志这一新分支的诞生．

1946年瑞典统计学家克拉美(H．Cramer，1893—)的《统计学的数学方法》(Mathematical Methods of St-atistics)把统计数学建立在现代测度论的严密基础上，标志着作为数学的重要分支——数理统计学最终形成自己的科学体系．

四、运筹数学

运筹学的产生是第二次世界大战前后的事．1933年希特勒在德国掌权，英国就开始进行适当的准备来防御可能发生的空袭．结果在1937年末研制出雷达和飓风式战斗机．但是1938年7月进行的空战演习中，雷达和战斗机临时凑和，不能形成一个有效的空防体系．因此，当时英国在海岸的雷达研制工作的领导人罗维(A．P．Rowe)建议进行关于雷达战斗机系统的运用方面(与纯技术方面相对立)的研究工作，他还创造出“运用的研究”(operational research)一即运筹学这个词来称呼这种研究工作，这可以说运筹学正式诞生．他和威廉斯(E．C． Willia-ms)发展了发现和预防空袭的方法，并且在布莱开特(P．M．S．Blackett 1897—1974)直接领导下，成立了运筹小组．这些直接导致英国防空体系根本上的改进，在1940年8、9月间经受住了决定性的考验．美国参战之后，在1942年底，美国也进行类似的研究工作．由于从事战时工作的科学家在战后大力倡导，而使运筹学的理论和应用在战后得到了蓬勃的发展，并由军用扩大到民用许多领域，产生许多分支学科．主要学科是数学规划(包含线性规划、非线性规划、整数规划、组合最优化乃至动态规划等)、对策论、排队论、库存论、搜索论、决策分析等．

规划问题从数学上讲是具有约束的最优化问题．如线性规划是考虑在线性等式及不等式组的条件下求线性目标函数的极值问题．它在经济上的应用，来源于冯·诺伊曼1928年证明的对策论基本定理——极大极小定理．后来列昂节夫(W．Leontiev，1906—)关于投入产出分析在1941年提出的模型及1944年冯·诺伊曼及摩根施坦(Morgenstern，1902—1977)在他们的名著《对策论及经济行为》(Theory of Games and Economic Be-havior)中更提出竞争模型．库普曼斯(T．C．Koopmans，1910—1985)在1951年出版《生产与配置的活动分析》中独立地对线性规划的创建及发展作出贡献，并因此获1975年诺贝尔经济学奖．其中把线性规划问题化为数学上凸集或凸体的理论，其中线性不等式及凸体的对偶性起着关键的作用．这方面的理论可追溯到蒙日(1781)及傅里叶(1823)关于n维欧氏空间内凸锥、凸多面体理论，匈牙利数学家法卡斯(J．Farkas，1847—1930)给出特殊线性规划问题有解的充分必要条件，1956年塔克尔(A．W．Tucker，1915—)给出一般解的存在条件．这些理论在数学上已成为独立的学科，并由欧氏空间推广到函数空间及一般的拓扑线性空间．对于应用问题，更重要的是实用的计算方法．在这方面苏联的数学家康托洛维奇(Л．В．Канторвич，1912—1986)在1939年已做了先驱性工作，著有《生产组织与计划工作中的数学方法》，并因此获1976年诺贝尔经济学奖，由于当时环境，长期未受到注意．现代实用的方法主要是丹齐格(G．B．Dantzig， 1917—)在1947年提出的单形法，其后有一系列变形及改进，这种方法可以编成程序在计算机上运用，1977年苏联的哈奇洋(Л．Г．Хачиян)、1983年印度的卡马卡(A．Karmarkar)作出许多改进．

当线性规划的条件有各种变化时，得出各种规划，它们的解法基础大都仍基于线性规划的研究结果．当限定一部分为全部变元取整数值时，称为整数规划．求解整数规划，首先由戈莫瑞

(R．E．Gomory，1929—)于1959年提出来．如果目标函数或约束条件中包括非线性函数，就称为非线性规划．在极值在边界上达到的简单条件下，库恩(H．W．Kuhn)及塔克尔早在1951年就发展了拉格朗日乘子法予以解决，而一般情形唯一性的讨论十分困难，只有当凸函数或凸区域的情形可以通过推广线性规划而解决，这发展成凸规划．在目标函数为正定二次函数(因而是凸函数)这种特殊二次规划情形下，还可以得出更有效的算法，毕利(E．M．L．Beale)于1959年提出的方法可以说是单形法的直接推广，其后还有各种各样方法的混合及改进．六十年代发展出另一种应用很广的几何规划，其目标函数变元的幂次不一定是整数．运筹学处理另一大类随机性模型，此外还有无约束的最优化问题．

1957年美国数学家贝尔曼(R．Bellman，1920—1984)提出另一种最优化技术——动态规划．它把问题分为一串子问题，它与变分法及邦德里亚金极大原理有关，更适于用微分方程来表述，却应用于离散的组合问题．它在运筹学及控制理论中都有着广泛的应用．

在第二次世界大战前就开始研究的随机模型的运筹学理论有排队论和对策论．战后还有价值论、决策论、搜索论、模拟论等等．排队论的问题随着公用服务事业的发展而提出来，特别是售票窗口的设置及电话线路设计等问题．最早1907年约翰森(Jo-hannsen)及1909年厄朗(A．K．Erlang)开始研究特殊情形，至1953年肯达尔(D．G．Kendall，1918—)引进标准记号，并应用马尔科夫链理论，正式建立了系统的排队论．基弗(J．Kiefer， 1924—1981)及沃尔弗维兹(J．Wolfowitz，1910—1981)在1955年更建立了多窗口排队系统理论．

第五节　中国现代数学的发展

中国传统数学在宋元时期达到高峰，以后渐走下坡路．20世纪重登世界数学舞台的中国现代数学，主要是在西方数学影响下进行的．

西方数学比较完整地传入中国，当以徐光启(1562—1633)和利玛窦(Mattao Ricci， 1552—1610)翻译出版《几何原本》前六卷为肇始，时在1607年．清朝初年的康熙帝玄烨(1654—1722)，曾相当重视数学，邀请西方传教士进宫讲解几何学、测量术和历法，但只是昙花一现．鸦片战争之后，中国门户洞开，再次大规模吸收西方数学，其主要代表人物是李善兰(1811—1882)．他熟悉中国古代算学，又善于汲取西方数学的思想．1859年，李善兰和英国教士伟烈亚力(Alexander Wylie，1815—1887)合译美国数学家鲁米斯(Elias Loomis， 1811—1889)所著的《代微积拾级》(Elements of AnalyticalGeometry and of the Differenfial and Integral Calculus)，使微积分学思想首次在中国传播，并影响日本．李善兰在组合数学方面很有成就．著称于世的有李善兰恒等式：

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{n+2k-j}{2k}=\binom{n+k}{k}^2$$

1866年，北京同文馆增设天文算学馆，聘李善兰为第一位数学教习．由于清廷政治腐败，数学

发展十分缓慢．反观日本，则是后来居上．日本在1870年代还向中国学习算学，《代微积拾级》是当时日本所能找到的最好的微积分著作．但到1894年的甲午战争之后，中日数学实力发生逆转． 1898年，中国向日本大量派遣留学生，其中也包括数学方面的留学生．

1911年辛亥革命之前，有三位留学国外的数学家最负盛名．第一位是冯祖荀(1880—1940)，浙江杭县人．1904年去日本京都第一高等学校就读，然后升入京都帝国大学研修数学．回国后曾在北京大学长期担任数学系系主任．第二位是秦汾(1887—1971)，江苏嘉定人．1907年和1909年在哈佛大学获学士和硕士学位．回国后写过许多数学教材．担任北京大学理科学长及东南大学校长之后，弃学从政，任过财政部次长等．郑桐荪(1887—1963)在美国康奈尔大学获学士学位(1907)，以后在创建清华大学数学系时颇有贡献．

由于1908年美国退回部分庚子赔款，用于青年学生到美国学习．因此，中国最早的数学博士多在美国获得．胡明复(1891—1927)于1917年以论文“具边界条件的线性微积分方程”(Lin-ear Integro-Differential Equations with BoundaryCondition)，在哈佛大学获博士学位，是中国以现代数学研究获博士学位的第一人．他返国后办大同大学，参与《科学》杂志的编辑，很有声望，惜因溺水早逝．1918年，姜立夫(1890—1978)亦在哈佛大学获博士学位，专长几何．他回国后办南开大学，人才辈出，如陈省身、江泽涵、吴大任等，姜立夫是中国现代数学的先驱，曾任中央研究院数学研究所首任所长．

本世纪20年代，中国各地的大学纷纷创办数学系．自国外留学回来的数学家担任教授，开始培养中国自己的现代数学人才．其中比较著名的有熊庆来(1893—1969)，1913年赴法国学采矿，后改攻数学．1921年回国后在东南大学、清华大学等校任数学教授，声誉卓著．1931年再度去法国留学，获博士学位(1933)，以研究无穷级整函数与亚纯函数而闻名于世．

陈建功(1893—1971)和苏步青(1902—)先后毕业于日本东北帝国大学数学系．他们分别于1930年和1931年回国，在浙江大学担任数学教授．由于锐意进取，培植青年，使浙江大学成为我国南方最重要的数学中心．陈建功以研究三角函数论、单叶函数论及函数逼近论著称．他在1928年发表的《关于具有绝对收敛傅里叶级数的函数类》，指出：有绝对收敛三角级数的函数的充要条件是杨(Young)氏函数，此结果与英国数学大家哈代(G．H．Hardy)和李特尔伍德(J． E． Littlewood)同时得到．这可以标志中国数学研究的论文已能达到国际水平．苏步青以研究射影微分几何而著称于世．他的一系列著作《射影曲线概论》，《一般空间微分几何》、《射影曲面概论》等，在国内外都产生相当影响，曾被称为中国的微分几何学派．1952年，他们从浙江大学转到上海复旦大学，使复旦大学数学系成为中国现代数学的重要基地．

陈省身（1911-）

1930年前后，清华大学数学系居于中国数学发展的中心地位．系主任是熊庆来，郑桐荪是资深教授.另外两位教授都在1928年毕业于美国芝加哥大学数学系,获博士学位.其中孙光远(1897—1984)专长微分几何,他招收了中国的第一名数学硕士生(陈省身),杨武之(1898—1975)则专长代数和数论，以研究华林(Waring)问题著称．这时的清华，有两个杰出的青年学者，这就是来自南开大学的陈省身和自学成才的华罗庚．陈身省于1911年生于浙江嘉兴．1926年入南开大学，1930年毕业后转到清华，翌年成为孙光远的研究生，专习微分几何．1934年去汉堡大学，在布拉士开(W．Bla-schke)指导下获博士学位(1936)，旋去巴黎，在嘉当(E．Cartan)处进行访问，得其精华．1937年回国后在西南联大任教．抗日战争时期，受外尔(H．Weyl)之邀到美国普林斯顿高等研究院从事研究，以解决高维的高斯—邦内(Gauss—Bonnet)公式，提出后来被称为“陈省身类”的重要不变量，为整体微分几何奠定基础，其影响遍及整个数学．抗日战争结束后返国，任中央研究院数学研究所代理所长，培植青年数学家．1949年去美国．1983年获世界5高数学奖之一的沃尔夫奖(WilfPrize)．

华罗庚（1910-1985）

华罗庚(1910—1985)是传奇式的数学家．他自学成才，1929年他只是江苏金坛中学的一名职员，却发表了《苏家驹之代数的五次方程解法不能成立之理由》，此文引起清华大学数学教授们的注意，系主任熊庆来遂聘他到清华任数学系的文书华罗庚最初随杨武之学习数论，在华林问题上很快作出了成果，破例被聘为教员．1936年去英国剑桥大学，接受哈代的指导．抗日战争时期，华罗庚写成《堆垒素数论》，系统地总结、发展与改进了哈代与李特尔伍德的圆法，维诺格拉多夫(И．М．Виноградов)的三角和估计方法，以及他本人的方法．发表至今已40年，主要结果仍居世界领先地位，仍是一部世界数学名著．战后曾去美国．1950年返回中国，担任中国科学院数学研究所的所长．他在数论，代数，矩阵几何，多复变函数论以及普及数学上的成就，使他成为世界级的著名数学家．他的名字在中国更是家喻户晓，成为“聪敏”、“勤奋”的同义语．

三十年代初的清华大学，汇集了许多优秀的青年学者．在数学系先后就读的有柯召(1910—)，

许宝騄(1910—1970)，段学复(1914—)，徐贤修(1911—)，以及物理系毕业、研究应用数学的林家翘(1916—)等等，后来均成为中国数学的中坚以及世界著名数学家．

许宝騄是中国早期从事数理统计和概率论研究，并达到世界先进水平的一位杰出学者．1938—1945年间，他在多元分析与统计推断方面发表了一系列论文，以出色的矩阵变换技巧，推进了矩阵论在数理统计中的应用，他对高斯—马尔可夫模型中方差的最优估计的研究，是许多研究工作的出发点．50年代以来，为培养新中国的数理统计学者和开展概率统计研究作出许多贡献．

林家翘是应用数学家，清华大学毕业后去加拿大，美国留学．从师流体力学大师冯·卡门(von Karman)．1944年，他成功地解决了争论多年的平行平板间的流动稳定性问题，发展了微分方程渐近理论的研究．60年代开始，研究螺旋星系的密度波理论，解释了许多天文现象．

北京大学是我国的最高学府．20年代军阀混战时期，因经费严重不足，学术水平不及由美国退回庚款资助的清华大学数学系．进入30年代，以美国退回庚款为基础的中华文化教育基金会也拨款资助北京大学，更由于江泽涵(1902—)在哈佛大学获博士学位后加盟北大，程毓淮(1910—)获德国哥廷根大学博士学位后来北大任教，阵容渐强．学生中有后来成名的樊畿(1916—)，王湘浩(1915—1993)等．

三十年代的中国青年数学家还有曾炯之(1897—1943)，他在哥廷根大学跟随杰出的女数学家诺特(E．Noether)研究代数，1933年完成关于“函数域上可除代数”的两个基本定理，后又建立了拟代数封闭域层次论，蜚声中外．抗日战争时期因贫病在西昌去世．周炜良(1911—)为清末民初数学家周达之子，家庭富有，在美国芝加哥大学毕业后，转到德国莱比锡大学，在范·德·瓦尔登(Van der Waerden)指导下研究代数几何，于1936年获博士学位，一系列以他名字命名的“周坐标”“周形式”、“周定理”“周引理”，使他享有盛誉．抗日战争胜利后去美国约翰·霍普金斯大学任教，直至退休．

1935年，中国数学会在上海成立．公推胡敦复(1886—1978)为首届董事会主席．会上议决出版两种杂志．一种是发表学术论文的《中国数学会学报》，后来发展成今日的《数学学报》，一种是普及性的《数学杂志》，相当于今之《数学通报》．中国数学会的成立，标志中国现代数学已经建立，并将很快走向成熟．

最早访问中国的著名数学家是罗素(B．A．W．Russel)，他于1920年8月到达上海，在全国各地讲演数理逻辑，由赵元任做翻译，于次年7月离去．法国数学家班勒卫(P．Painleve)和波莱尔(E．Bovel)也在20年代末以政治家身份访华．1932年，德国几何学家布拉希开(W．Blaschk)到北京大学讲学，陈省身、吴大任等受益很多．1932—1934年间，汉堡大学年轻的拓扑学家斯披涅儿(E．Sperner)也在北京大学讲课．1934年4月，美国著名的常微分方程和动力系统专家伯克霍夫(G.D.Birkhoff)也到过北大．此后来华的是美国哈佛大学教授奥斯古德(W．F．Osgood)，他在北京大学讲授函数论(1932

—1934)．

控制论创始人，美国数学家维纳(N．Wiener)来清华大学电机系访问，与李郁荣(1904—)合作研究电网络，同时在数学系讲授傅里叶变换理论等．维纳于1936年去挪威奥斯陆参加国际数学家大会，注明他是清华大学的代表．

抗日战争开始之后，中国现代数学发展进入一个新时期．一方面是异常清苦的战时生活，与外界隔绝的学术环境；另一方面则是无比高涨的研究热情，硕果累累的科学成就．在西南联合大学(北大、清华、南开)的数学系，姜立夫、杨武之、江泽涵等领导人正值中年，而刚满30岁的年轻教授如华罗庚、陈省身以及许宝騄等，都已达到当时世界的先进水平．例如华罗庚的《堆垒素数论》，陈省身证明高斯—邦内公式，许宝騄发展矩阵论在数理统计的应用，都产生于这一时期．他们培养的学生，如王宪钟、严志达、吴光磊、王浩、钟开莱，日后都成为著名数学家．与此同时，位于贵州湄潭的浙江大学，也由陈建功、苏步青带领，造就出程民德、熊全治、白正国、杨忠道等一代数学学者．如果说，在20年代，中国创办的大学已能培养自己的数学学士，那么在30年代的北大、清华、浙大等名校，已能培养自己的数学硕士，而到抗日战争时期的40年代，从教员的学术水准，开设的课程以及学生的成绩来看，应该说完全能培养自己的数学博士了．从1917年中国人第一次获得数学博士，到实际上具备培养自己的数学博士的水平，前后不过20余年的时间，发展不可谓不快．

1944年，中央研究院决定成立数学研究所，由姜立夫任筹备主任．不久，抗日战争胜利，于1946年在上海正式成立数学研究所，由姜立夫任所长．因姜立夫出国考察，遂由陈省身代理所长．陈省身办所的宗旨是培养青年人，首先让他们研修拓扑学，以便迅速达到当时数学发展的前沿．这时在所内工作的研究人员中，有王宪钟、胡世桢、李华宗等已获博士学位的年轻数学家，更有吴文俊、廖山涛、陈国才、杨忠道、叶彦谦、曹锡华、张素诚、孙以丰、路见可、陈杰等刚从大学毕业不久的学生．

1949年成立中华人民共和国之后，中国现代数学有了长足的发展．原来已有建树的解析数论、三角级数论、射影微分几何等学科继续发展．在全面学习苏联的50年代，与国民经济发展有密切关系的微分方程、概率论、计算数学等学科获得应有的重视，使整个数学获得全面和均衡地进步．高等学校数学系大规模招生，严谨的教学方式培养出大批训练有素的数学工作者．

在这一时期内，作出重要贡献的有吴文俊(1919—)．他于1940年在交通大学毕业，后去法国留学，获博士学位．他在拓扑学方面的主要贡献有关于施蒂费尔—惠特尼(Stiefel-Whit-ney)示性类的吴(文俊)公式，吴(文俊)示性类，以及关于示嵌类的研究．70年代起，吴文俊提出了使数学机械化的纲领，其一个自然的应用是定理的机器证明，这项工作现在正处于急剧发展中．吴文俊的数学机械化思想来源于中国传统数学．因此，吴文俊的工作显示出中国古算法与现代数学的有机结合，具有浓烈的中国特色．

50年代以来的一些青年数学家的工作值得注意，如陈景润、王元、潘承洞在数论方面的研究，特别是对哥德巴赫猜想的重大推进．杨乐、张广厚关于亚纯函数值分布论的研究，谷超豪在微分几何与非线性偏微分方程方面的研究，夏道行关于线性算子谱论和无限维空间上调和分析的研究，陆启铿、钟家庆在多复变函数论与微分几何方面的研究，都有国际水平的成果．80年代以来，还有姜伯驹(不动点理论)、张恭庆(临界点理论)、陆家羲(斯坦纳三元素)等人的工作，十分优秀．廖山涛在微分动力系统研究上作出了独特的贡献．

中国数学家参加国际数学家大会(International Cong-ress of Mathematics)始自1932年．北京数学物理学会的熊庆来和上海交通大学的许国保作为中国代表参加了那年在苏黎世举行的会议．中山大学的刘俊贤则是参加1936年奥斯陆会议的唯一中国代表(不计算维纳代表清华大学与会)．此后由于代表权问题，中国大陆一直未派人与会．华罗庚、陈景润收到过到大会作报告的邀请．1983年，中国科学院计算数学家冯康被邀在华沙大会上作45分钟的报告，都因代表权问题未能出席．

1986年，中国在国际数学家联盟(IMU)的代表权问题得到解决：中国数学会有三票投票权，位于中国台北的数学会有两票投票权．这年在美国加州伯克莱举行的大会上，吴文俊作了45钟报告(关于中国数学史)．1990年在东京举行国际数学家大会，中国有65名代表与会(不包括台北)．

80年代以来，中国数学研究发展很快．从原来的中国科学院数学研究所又分立出应用数学研究所和系统科学研究所．由陈省身担任所长的南开数学研究所向全国开放，发挥了独特的作用．北京大学、复旦大学等著名学府也成立了数学研究所．这些研究机构的数学研究成果正在逐渐接近国际水平．到1988年为止，在国外出版的中国数学家的数学著作已有43种．《数学年刊》《数学学报》都相继出版了英文版，在国外的影响日增，1990年收入世界数学家名录的中国学者有927名．先后在中国国内设立的数学最高奖有陈省身奖和华罗庚奖．1990年起，为了支持数学家率先赶上世界先进水平的共同愿望，除了正常的自然科学基金项目之外，又增设了专项的天元数学基金．这一措施也大大促进了数学研究水平的提高．

在中国的台湾省，中央研究院的数学研究所是主要的数学研究机构，曾由周鸿经、樊畿等多人主持过．台湾大学集中了许多著名的数学教授．早期有施拱星、许振荣等．台湾学生在美国获博士学位并在美国各大学数学系任教的学者很多，有较大影响的有项武忠、项武义等人．

香港地区的数学教育在第二次世界大战之前没有多少力量．战后最有影响的是几何学家黄用诹，他从1948年起任香港大学教授，又担任过教务长和副校长．从香港大学和中文大学培养出一批有世界影响的数学家，其中包括荣获菲尔兹奖的丘成桐，以及肖荫堂、陈绍远等著名数学家．