积分变换

傅立叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l})$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\tau)d\tau$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\tau)\cos\frac{n\pi\tau}{l}d\tau$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sin\frac{n\pi\tau}{l}d\tau$$

$n=1,2,\ldots$

傅立叶积分公式

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

狄里克雷积分公式

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-\beta t^2}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$$

对称公式

$f(t)\leftrightarrow\hat{f}(\omega)$

$\hat{f}(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

欧拉公式

$$\cos n\omega_0 t=\frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t}+e^{-jn\omega_0 t})$$

$$\sin n\omega_0 t=\frac{j}{2}(e^{-jn\omega_0 t}-e^{jn\omega_0 t})$$

$\hat{f}(\omega)$为$f(t)$的频谱密度函数，模$|\hat{f}(\omega)|$称为振幅频谱，简称频谱，$\varphi(\omega)=\arg\hat{f}(\omega)$为相位频谱。

δ函数

(i) $\delta(t-t_0)=\begin{cases}+\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$

δ函数的筛选性质

$$\int_a^b\delta(t-t_0)\,\varphi(t)dt=\varphi(t_0),\qquad a<t_0<b$$

δ函数性质

1.δ(t)是偶函数。

2.$\alpha(t)$在t_0邻域内连续　$\alpha(t)\delta(t-t_0)=\alpha(t_0)\delta(t-t_0)$

海维赛函数　$H(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

$$H'(t)=\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t-t_0)\varphi(t)dt=(-1)^n\varphi^{(n)}(t_0)$$

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t_0}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega-\omega_0)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

$$\begin{cases}\delta(t-t_0)\leftrightarrow e^{-j\omega t_0}\\ \delta(t)\leftrightarrow 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)\\ 1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)\end{cases}$$

$$|\mathcal{F}[\delta(t-t_0)]|=\left|e^{-j\omega t_0}\right|=1$$

$$H(t)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[e^{jat}\right]=2\pi\delta(\omega-a)$$
$$\mathcal{F}[\cos at]=\pi[\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)]$$
$$\mathcal{F}[\sin at]=\pi j[\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)]$$

$$\mathrm{sgn}\,t=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

$$\mathrm{sgn}t = 2H(t) - 1$$

$$\mathcal{F}[\mathrm{sgn}t] = \frac{2}{j\omega}$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-\beta t}H(t)\right] = \frac{1}{\beta + j\omega}$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \qquad a \neq 0$$

$$\delta(t^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(t+a) - \delta(t-a)], \quad a \neq 0$$

傅立叶变换性质

线性性质

$$\mathcal{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)\right] = \alpha f(t) + \beta g(t)$$

位移性质

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0}\hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega - a)\right] = e^{jat}f(t)$$

相似性质

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

微分性质

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega\hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (j\omega)^n\hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}[-jtf(t)] = \frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)$$

$$(-j)^n\,\mathcal{F}[t^n f(t)] = \frac{d^n}{d\omega^n}\hat{f}(\omega) \quad \mathcal{F}[t^n f(t)] = j^n\frac{d^n}{d\omega^n}\hat{f}(\omega)$$

积分性质

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{j\omega}\hat{f}(\omega) + \pi\hat{f}(0)\delta(\omega)$$

卷积

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(\tau - t)d\tau$$

$$f * g = g * f$$

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

卷积定理

$\mathcal{F}[f(t)*g(t)]=\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$　　　$\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)*\cdots*f_n(t)]=\hat{f}_1(\omega)\hat{f}_2(\omega)\cdots\hat{f}_n(\omega)$

$\mathcal{F}[f(t)g(t)]=\frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega)*\hat{g}(\omega)$　　　$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)\cdots f_n(t)]=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\hat{f}_1(\omega)*\hat{f}_2(\omega)*\cdots*\hat{f}_n(\omega)$

$\delta(t-a)*f(t)=f(t-a)$

$\delta(t-a)*\delta(t-b)=\delta(t-a-b)$

拉普拉斯变换

$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$

$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{F}[f(t)e^{-\beta t}H(t)]$

逆变换　反演积分公式

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)e^{st}ds\quad(t>0)$

周期函数的拉普拉斯变换：$f(t)$在$[0,+\infty)$内是以 T 为周期的函数

$F(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^{T}f(t)e^{-st}dt$

拉普拉斯变换性质

1.线性性质

$\mathcal{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(s)+\beta G(s);$　　$\mathcal{L}^{-1}[aF(s)+\beta G(s)]=\alpha f(t)+\beta g(t)$

2.相似性质

$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\ a>0$

3.微分性质

导数的象函数

$\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$

象函数的导数

$L[-tf(t)]=F'(s)$

$(-1)^n\mathcal{L}[t^nf(t)]=F^{(n)}(s)$

4.积分性质

积分的象函数

$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{s}F(s)$

$\mathcal{L}\left[\int_0^t dt\int_0^t dt\cdots\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{s^n}F(s)$

象函数的积分

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_{s}^{\infty}F(s)ds$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^{n}}\right]=\int_{s}^{\infty}ds\int_{s}^{\infty}ds\cdots\int_{s}^{\infty}F(s)ds$$

位移性质

$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$　a 是复常数

延迟性质

$\mathcal{L}[f(t-\tau)H(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s)$

卷积与卷积定理

$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)*\cdots*f_n(t)]=F_1(s)F_2(s)\cdots F_n(s)$

初值定理与终值定理

初值定理

$$f(0^+)=\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$

终值定理

$$f(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)\quad Re(s)>-c\text{ 解析}$$

幂函数的拉式变换

$$\mathcal{L}[t^m]=\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}\quad Re(s)>0$$

若当定理

$$s=\beta+Re^{j(\theta+\frac{\pi}{2})}\quad 0\le\theta\le\pi$$

在区域$Re(s)\le\beta$内，$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$，函数$F(s)e^{st}$沿半圆C_R的积分存在

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(s)e^{st}ds$$

展开定理

$F(s)$在复平面 s 上有限个奇点在$Re(s)<\beta$内，设$s\to\infty$时，$F(s)\to0$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)\,e^{st}ds=\sum_{k=1}^{n}Res[F(s)e^{st},s_k]$$

常见拉氏变换：

$\mathcal{L}[\mathrm{H}(\mathrm{t})]=\frac{1}{\mathrm{s}}\quad \mathrm{Re}(\mathrm{s})>0\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]=1\quad \mathrm{t}>0$

$\mathrm{e}^{\mathrm{at}}\leftrightarrow\frac{1}{\mathrm{s}-\mathrm{a}}\ \ \mathrm{Re}(\mathrm{s})>a\,;\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\leftrightarrow\frac{1}{\mathrm{s}+\mathrm{a}}\ \ \mathrm{Re}(\mathrm{s})>-a\,;\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\leftrightarrow\frac{1}{\mathrm{s}-\mathrm{j}\omega}\ \ \mathrm{Re}(\mathrm{s})>0$

$\mathrm{sinat}\leftrightarrow\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{s}^2+\mathrm{a}^2}\ \ \mathrm{Re}(\mathrm{s})>0;\quad cosat\leftrightarrow\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+\mathrm{a}^2}\ \ \mathrm{Re}(\mathrm{s})>0$

$\delta(\mathrm{t}-\mathrm{a})\leftrightarrow\ \mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\ (\mathrm{a}\geq 0);\qquad \delta(\mathrm{t})\leftrightarrow 1$