线性代数·总结与复习

武汉大学 黄正华

WUHAN UNIVERSITY

目 录

第一章　行列式

在线性代数中最重要的内容就是行列式和矩阵. 虽然表面上看, 行列式和矩阵不过是一种符号或速记, 但从数学史上来看, 优良的数学符号和生动的概念是数学思想产生的动力和钥匙.

§1.1　内容小结

§1.1.1　性质与定理

本章学习了行列式的 6 个性质(及 2 个推论), 行列式按行(列)展开的定理 3 及其推论, 共 10 个结论. 下面做三点归纳.

(一) 行列式的三种变换.

性质 2、性质 3、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

- 互换某两行(列); 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$).
- 提出某一行(列)的公因子; 记作 $r_i \div k$ ($c_i \div k$).
- 把某一行(列)的 k 倍加到另一行(列); 记作 $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$).

计算行列式最常用的一种方法就是利用变换 $r_i + kr_j$ 和 $r_i \leftrightarrow r_j$, 把行列式化为上三角形行列式, 从而算得行列式的值.

(二) 行列式为零的两种情形:

- 两行(列)相同.
- 两行(列)成比例.

(三) 行列式按某行展开的两种情形:

- 按任一行展开(定理 3).
- 一行元素乘以另一行对应元素的代数余子式, 其和为零(定理 3 的推论).

上述情形, 综合起来就是一个表达式:

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is} = \begin{cases} D, & k = i, \\ 0, & k \neq i; \end{cases} \tag{1.1}$$

还有两个性质, 比较简单:

- $D^{\mathrm{T}} = D$ (性质 1).
- 行列式的裂开(性质 5).

§1.1.2　常用结论

1. 对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{1.2}$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{1.3}$$

2. 三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

3. 准三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

对角行列式是三角形行列式的特例, 三角形行列式又是准三角形行列式的特例.

4. 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1} (x_i - x_j).$$

§1.2 两个典型例题

这两个例子很有代表性, 我们给出其一题多解, 基本涵盖了行列式计算的所有常见方法. 典型例题 1 及其变形, 广泛出现在各类考题中.

典型例题 1 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解: **解法一**. 将第一行乘 (-1) 分别加到其余各行, 得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix},$$

再将各列都加到第一列上, 得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=\big(x+(n-1)a\big)(x-a)^{n-1}.$$

解法二. 将各列都加到第一列得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=\big(x+(n-1)a\big)\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix},$$

再将第一行乘以 (-1) 分别加到其余各行, 得

$$D_n=\big(x+(n-1)a\big)\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=\big(x+(n-1)a\big)(x-a)^{n-1}.$$

解法三. 升阶法.

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \xlongequal[i=2,3,\cdots]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)},$$

若 $x=a$, 则 $D_n=0$. 若 $x\neq a$, 则将 $\frac{1}{x-a}c_j$ 加到 c_1, $j=2,3,\cdots,n+1$:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+\frac{a}{x-a}n & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$=\left(1+\frac{na}{x-a}\right)(x-a)^n=\big(x+(n-1)a\big)(x-a)^{n-1}.$$

解法四. 将 D_n 的第 1 列拆开, 得

$$D_n=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}.$$

所以

$$\begin{cases} D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}, \\ (x-a)D_{n-1}=(x-a)^2D_{n-2}+a(x-a)^{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x-a)^{n-3}D_3=(x-a)^{n-2}D_2+a(x-a)^{n-1}. \end{cases}$$

将上述等式累加, 消掉等号两边的相同项, 并注意到 $D_2=x^2-a^2$, 则

$$D_n=(x-a)^{n-2}(x^2-a^2)+(n-2)a(x-a)^{n-1}=\big(x+(n-1)a\big)(x-a)^{n-1}.$$

注 1.1 这个行列式经常以不同的样子出现, 比如

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(n-1)\,(-1)^{n-1},$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}=[1+(n-1)\,a]\,(1-a)^{n-1},$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+n)\,\lambda^{n-1}.$$

注 1.2 这是一个重要的例题. 解法一最简单.

解法二是因为所有的列(行)加到某一列(行), 其值相等, 可以提出公因子. 是一个常用的方法.

解法三称为“升阶法”或“加边法”, 在这个题中看似笨拙, 实则是一类重要的方法. 比如这个题目可以改一下:

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

此时解法二是不适用的. 这个题还可以进一步改为:

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

行列式 (1.7) 和 (1.8) 用升阶法很方便.

注 1.3 行列式 (1.7) 的结果: 假定 $x_i \neq a$, 得

$$D_n=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a}\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a).$$

行列式 (1.8) 的结果: 假定 $x_i \neq a_i$, 得

$$D_n=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i).$$

行列式 (1.7) 和 (1.8) 有很多不同的出现形式, 常见于各类教材和习题, 也是极常见的试题. 比如

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}=\left(a+\frac{n(n+1)}{2}\right)a^{n-1}.$$

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}=b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right). \qquad \text{(2003 年考研数学三)}$$

这里顺便提一下“爪形”行列式. 在解法三中出现了下面形式的行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

可以谓之“爪形”行列式. 它的解法是固定的. 比如计算行列式(假定 $a_i \neq 0$):

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

分别将第 i $(i=2,\cdots,n+1)$ 行乘以 $-\frac{1}{a_{i-1}}$ 加到第 1 行, 得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\Big(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\Big).$$

再看一些典型例题 1 的变形.

例 1.1 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 按第一列拆开,

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= a(x+a)^{n-1}+(x-a)D_{n-1}^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

对称地可知

$$D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} x & -a & -a & \cdots & -a \\ a & x & -a & \cdots & -a \\ a & a & x & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=-a(x-a)^{n-1}+(x+a)D_{n-1}.$$

所以

$$D_n=D_n^{\mathrm{T}}=-a(x-a)^{n-1}+(x+a)D_{n-1}. \tag{1.10}$$

于是, 联立 (1.9) 和 (1.10), 消去 D_{n-1}, 得 $2aD_n=a(x+a)^n+a(x-a)^n$. 当 $a\neq 0$ 时, 有

$$D_n=\frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}.$$

易见当 $a=0$ 时, 结论也成立.

例 1.2 计算 n 阶行列式($a \neq b$):

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ b & b & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}.$$

解 从 r_1 开始, 各行减去下一行:

$$\begin{aligned} D_n & \xlongequal[i=1,\cdots,n-1]{r_i - r_{i+1}} \begin{vmatrix} x-b & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-b & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-b & a-x \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix} \\ & \xlongequal{\text{展开}_{c_1}} (x-b)D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot b \cdot (a-x)^{n-1} \\ & = (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

由 D_n 表达式中 a, b 的对称性, 知 $D_n^{\mathrm{T}} = (x-a)D_{n-1}^{\mathrm{T}} + a(x-b)^{n-1}$, 而 $D_n^{\mathrm{T}} = D_n$, $D_{n-1}^{\mathrm{T}} = D_{n-1}$, 可得

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-b)^{n-1}. \tag{1.12}$$

联立 (1.11) 和 (1.12) 式, 消去 D_{n-1} 得

$$D_n = \frac{a(x-b)^n - b(x-a)^n}{a-b}.$$

典型例题 2 试证

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

证明: **解法一**. 设法把主对角线上的 x 变为 0, 再按第一列展开.

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_{n-1}+xc_n}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_{n-2}+xc_{n-1}}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & x^3+a_1x^3+a_2x+a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_j+xc_{j-1}}\begin{vmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n & x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1} & \cdots & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

解法二. 设法把 -1 全部变为 0, 得到一个下三角矩阵.
若 $x=0$, 则 $D_n=a_n$. 等式成立.
若 $x\neq 0$, 则

$$D_n\xlongequal{c_2+\frac{1}{x}c_1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+\frac{1}{x}c_2}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$
=\begin{vmatrix}
x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\
a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & P_2 & P_1
\end{vmatrix}
$$

这里,

$$
P_2 = a_2 + \frac{a_3}{x} + \frac{a_4}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-2}},
$$

$$
P_1 = x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-1}}.
$$

得到下三角阵, 所以

$$
D_n = x^{n-1}\cdot P_1 = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.
$$

解法三. 用递归法证明. 记

$$
D_n = \begin{vmatrix}
x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1
\end{vmatrix},
$$

则

$$
D_n \xlongequal{\text{展开 } c_1} x\begin{vmatrix}
x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & x & -1 \\
a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1
\end{vmatrix} + a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}
-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & x & -1
\end{vmatrix}
$$

$$
= xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n.
$$

所以, $D_n = xD_{n-1} + a_n$. 由此递归式得

$$
D_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.
$$

解法四. 按最后一行展开. 先看 a_{n-i} 的代数余子式. 因为

$$
D_n = \left|\begin{array}{ccccc|c|cccc}
x & -1 & & & & & & & & \\
 & x & -1 & & & & & & & \\
 & & x & \ddots & & & & & & \\
 & & & \ddots & -1 & & & & & \\
 & & & & x & -1 & & & & \\
\hline
 & & & & & x & -1 & & & \\
 & & & & & & x & \ddots & & \\
 & & & & & & & \ddots & -1 & \\
 & & & & & & & & x & -1 \\
\hline
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-(i-1)} & a_{n-i} & a_{n-(i+1)} & & a_2 & x+a_1
\end{array}\right|
$$

划掉 a_{n-i} 所在的行和所在的列, 左上角是 $i\times i$ 的方块, 右下角是 $(n-i-1)\times(n-i-1)$ 的方块, 余下全为 0.

则 a_{n-i} 的代数余子式为(注意到 a_{n-i} 处在第 n 行、$i+1$ 列)

$$(-1)^{n+i+1}\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & x & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix}_{i\times i}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & \ddots & & \\ & \ddots & -1 & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}_{(n-i-1)\times(n-i-1)} = x^i$$

所以, D_n 按最后一行展开, 得到

$$\begin{aligned} D_n &= a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_{n-i}x^i + \cdots + a_2x^{n-2} + (x+a_1)x^{n-1} \\ &= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

解法五. 针对 c_1 作变换.

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{c_1+xc_2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{c_1+x^2c_3} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \\ &= \cdots \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ P & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

这里, $P = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1} + x^n$.

再按第一列展开, 得

$$D_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

§1.3 行列式计算的常见方法

从解题的宏观思路看, 有三角化、降阶法、递推法等方法;

从具体的微观手法看, 有行累加、主行消法、逐行消法、逐行相邻互换等方法;

还有一些非主流的方法, 如升阶、裂开等.

§1.3.1 基本计算思路

1 三角化

化行列式为三角形是计算行列式的最基本思路. 通过观察行列式的特点, 利用行列式的性质将其作变形, 再将其化为三角形行列式.

例 1.3 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 5 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n-3 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 各行只有副对角线元素不同. 将第 1 行乘以 (-1) 加到第 $2, 3, \ldots, n$ 行, 得

$$D = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!.$$

例 1.4 计算行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

解 注意到从第 1 列开始, 每一列与它后一列中有 $n-1$ 个数相差 1. 依次进行列运算: 第 n 列加上第 $n-1$ 列的 -1 倍; 第 $n-1$ 列加上第 $n-2$ 列的 -1 倍; 一直到第 2 列加上第 1 列的 -1 倍. 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1+\frac{1}{n}r_i}\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{n}(1+\cdots+(n-1)) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 2 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=\frac{(n+1)}{2}\cdot(-n)^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

$$=\frac{(n+1)}{2}\cdot n^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

2 降阶法

按一行(列)展开或按 Laplace 定理展开, 将 n 阶行列式降为较低阶又容易计算的行列式, 此方法统称为**降阶法**.

例 1.5 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解 按第一列展开,

$$D_n=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

3 递推法

一般地, 递推方法是通过降阶等途径, 建立 n 阶行列式 D_n 和较它阶低的结构相同的行列式之间的关系, 并求得 D_n.

例 1.6 计算如下的 n 阶三对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

解 按第 1 列展开, 得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & & & \\ 1 & a+b & ab & & & \\ & 1 & a+b & ab & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}. \tag{1.13}$$

由 (1.13) 得到

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-2} - bD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - bD_1).$$

又 $D_1 = a+b$, $D_2 = a^2+b^2+ab$, 得

$$D_n - bD_{n-1} = a^n. \tag{1.14}$$

同理(或由 a, b 的对称性)得

$$D_n - aD_{n-1} = b^n. \tag{1.15}$$

若 $a \neq b$, 联立 (1.14) 和 (1.15) 消去 D_{n-1}, 得

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

若 $a = b$, 则 $D_n = aD_{n-1} + a^n$. 依此递推, 得 $D_n = (n+1)a^n$.

注 1.4 与递推过程相反的方法是归纳. 如要计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 3 & 2 \\ & & & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

因为 $D_1 = 3 = 2^2 - 1$, $D_2 = 7 = 2^3 - 1$, $D_3 = 15 = 2^4 - 1$. 因此, 猜想

$$D_n = 2^{n+1} - 1,$$

并利用数学归纳法易证此结论成立.

§1.3.2 常用化简手法

要计算一个 n 阶行列式, 往往要利用行列式性质将它化简. 为此, 总结上面例子有以下三种常用手法:

- 行累加, 即把行列式的某 $n-1$ 个行, 加到余下的一行. 当行列式的各行的和相同时常使用此技巧.
- 主行消法, 即某行的适当倍数, 加到其余的各行.
- 逐行消法, 即第 i 行乘以 k 加到第 $i+1$ 行, $i = n-1, n-2, \cdots, 1$; 或第 $i+1$ 行乘以 k 加到第 i 行, $i = 1, 2, \cdots, n-1$.
- 逐行相邻互换.

当然, 这些方法都是行列式三种基本变换的"高级形式".

例 1.7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 各列加到第一列后, 各行减去第一行,

$$D=160.$$

例 1.8 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

解 各列加到第一列, 再展开第一列, 得

$$D_n=(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}.$$

§1.3.3 辅助算法

1 升阶

将 n 阶行列式添上一行、一列, 变为 $n+1$ 阶行列式再化简计算. 也称加边法.

当然加边不是随便加一行一列就可以了. 关键是观察每行或每列是否有相同的因子.

例 1.9 计算 n 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}.$$

分析 暂时不看主对角线上的 1, 则第 i 行是 x_i 与 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 相乘. 该行列式每行有相同的因子 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 从而考虑加边法.

解

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_{i+1}-x_ir_1} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{c_1+x_ic_{i+1}} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1} = 1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

注意 升阶法最大的特点就是要找出每行或每列相同的因子, 把 1 及这些相同的因子作为新行列式的第一行, 那么升阶之后, 就可利用行列式的性质把绝大部分元素化为零, 从而简化计算.

2 裂开

将一个行列式裂开成 2 个(或 2 个以上)行列式来化简计算.

例 1.10 试证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

解 记左端行列式为 D, 利用行列式的性质, 将 D 的第 1 列拆开得到两个行列式

$$D = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}.$$

将第一个行列式中将第 3 列减去第 1 列, 在第 2 个行列式中将第 2 列减去第 1 列:

$$D = \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

得证.

§1.4 特殊行列式: Vandermonde 行列式

例 1.11 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1+1 & a_2+1 & \cdots & a_n+1 \\ a_1^2+a_1 & a_2^2+a_2 & \cdots & a_n^2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}+a_1^{n-2} & a_2^{n-1}+a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}+a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

解 从第二行起, 各行减去上一行, 得一范德蒙行列式

$$D_n = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

例 1.12 计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

解 将第 i 行提公因子 i, 得

$$
\begin{aligned}
D_n = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} &= n! \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j) \\
&= n!\, (2-1)(3-1)(4-1)\cdots(n-1) \\
&\qquad \cdot (3-2)(4-2)\cdots(n-2) \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots \\
&\qquad \cdot \big(n-(n-1)\big) \\
&= n!\,(n-1)!\,(n-2)!\,\cdots\, 2!\, 1!.
\end{aligned}
$$

§1.5 小知识

§1.5.1 线性代数简介

线性代数[1] (Linear Algebra) 是代数学的一个分支, 主要处理线性关系问题. 线性关系意即数学对象之间的关系是以一次形式来表达的. 例如, 在解析几何里, 平面上直线的方程是二元一次方程; 空间平面的方程是三元一次方程, 而空间直线视为两个平面相交, 由两个三元一次方程所组成的方程组来表示. 含有 n 个未知量的一次方程称为线性方程. 关于变量是一次的函数称为线性函数. 线性关系问题简称线性问题. 解线性方程组的问题是最简单的线性问题.

线性代数作为一个独立的分支在 20 世纪才形成, 然而它的历史却非常久远. 最古老的线性问题是线性方程组的解法, 在中国古代的数学著作《九章算术・方程》章中, 已经作了比较完整的叙述, 其中所述方法实质上相当于现代的对方程组的增广矩阵的行施行初等变换, 消去未知量的方法. 随着研究线性方程组和变量的线性变换问题的深入, 行列式和矩阵在 18～19 世纪期间先后产生, 为处理线性问题提供了有力的工具, 从而推动了线性代数的发展. 向量概念的引入, 形成了向量空间的概念. 凡是线性问题都可以用向量空间的观点加以讨论. 因此, 向量空间及其线性变换, 以及与此相联系的矩阵理论, 构成了线性代数的中心内容.

线性代数的含义随数学的发展而不断扩大. 线性代数的理论和方法已经渗透到数学的许多分支, 同时也是理论物理和理论化学所不可缺少的代数基础知识.

“以直代曲”是人们处理很多数学问题时一个很自然的思想. 很多实际问题的处理, 最后往往归结为线性问题, 它比较容易处理. 因此, 线性代数在工程技术和国民经济的许多领域都有着广泛的应用, 是一门基本的和重要的学科. 线性代数的计算方法是计算数学里一个很重要的内容.

Algebra 一词来源于 9 世纪阿拉伯数学家和天文学家花拉子米(al-Khowārizmi, 约 780–约 850) 的重要著作《al-jabr w'almuqabala》的名称. 原义是还原(al-jabr)与相消(almuqabalah), 即方程两端的移项和同类项合并, 简称为 algebra. 清初输入中国时, 译为阿尔热巴拉(梅瑴成, 1761), 后改译为代数学(李善兰, 1835). 代数一词源自一个朴素的认识: Algebra 的特征是以符号“代”替“数”字. 李善兰(1811–1882)创译了许多科学名词, 如“函数”, “方程式”, “微分”, “积分”, “级数”, “植物”, “细胞”等.

§1.5.2 行列式简史

行列式出现于线性方程组的求解, 它最早是一种速记的表达式, 现在已经是数学中一种非常有用

[1] 摘抄整理自《中国大百科全书・数学》P.757:“线性代数”词条; P.111: “代数学”词条; P.302:“花拉子米”词条; P.434:“李善兰”词条.

的工具. 行列式是由莱布尼茨和日本数学家关孝和发明的. 1693 年 4 月, 莱布尼茨在写给洛比达的一封信中使用并给出了行列式, 并给出方程组的系数行列式为零的条件. 同时代的日本数学家关孝和在其著作《解伏题元法》中也提出了行列式的概念与算法.

1750 年, 瑞士数学家克莱姆(G. Cramer, 1704–1752) 在其著作《线性代数分析导引》中, 对行列式的定义和展开法则给出了比较完整、明确的阐述, 并给出了现在我们所称的解线性方程组的克莱姆法则. 稍后, 数学家贝祖(E. Bezout, 1730–1783) 将确定行列式每一项符号的方法进行了系统化, 利用系数行列式概念指出了如何判断一个齐次线性方程组有非零解.

总之, 在很长一段时间内, 行列式只是作为解线性方程组的一种工具使用, 并没有人意识到它可以独立于线性方程组之外, 单独形成一门理论加以研究.

在行列式的发展史上, 第一个对行列式理论做出连贯的逻辑的阐述, 即把行列式理论与线性方程组求解相分离的人, 是法国数学家范德蒙(A-T. Vandermonde, 1735–1796). 特别地, 他给出了用二阶子式和它们的余子式来展开行列式的法则. 就对行列式本身这一点来说, 他是这门理论的奠基人. 1772 年, 拉普拉斯在一篇论文中证明了范德蒙提出的一些规则, 推广了他的展开行列式的方法.

继范德蒙之后, 在行列式的理论方面, 又一位做出突出贡献的就是另一位法国大数学家柯西. 1815 年, 柯西在一篇论文中给出了行列式的第一个系统的、几乎是近代的处理. 其中主要结果之一是行列式的乘法定理. 另外, 他第一个把行列式的元素排成方阵, 采用双足标记法; 引进了行列式特征方程的术语; 给出了相似行列式概念; 改进了拉普拉斯的行列式展开定理并给出了一个证明.

继柯西之后, 在行列式理论方面最多产的人就是德国数学家雅可比(J. Jacobi, 1804–1851), 他引进了函数行列式, 即"雅可比行列式", 指出函数行列式在多重积分的变量替换中的作用, 给出了函数行列式的导数公式. 雅可比的著名论文《论行列式的形成和性质》标志着行列式系统理论的建成. 由于行列式在数学分析、几何学、线性方程组理论、二次型理论等多方面的应用, 促使行列式理论自身在 19 世纪也得到了很大发展. 整个 19 世纪都有行列式的新结果. 除了一般行列式的大量定理之外, 还有许多有关特殊行列式的其他定理都相继得到.

第二章 矩阵及其运算

矩阵是一个数表, 而行列式本质上是一个数. 这是两者的巨大区别.

§2.1 内容小结

本章重点:

(一) 矩阵的运算. 特别是矩阵乘法不满足的几个运算律.

I. 不满足交换律, 即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 一般不成立. (特别地, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是**可交换的**.) 相应地要注意以下几点:

(1) 矩阵乘法特别地有"左乘"和"右乘"的说法, 比如 $\boldsymbol{B}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{BA}$) 和 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{AB}$) 是完全不同的.

(2) 在提取公因子的时候, 要分清楚是从左侧还是右侧提出. 比如 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}$ 可以写为 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B}$ 只能从右侧提出, 不能写成 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$. 而 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BC}$, 写成 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})$, 都是错误的.

(3) 由于不满足交换律, 下列公式一般不成立:

- $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$;
- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$;
- 牛顿二项式展开式一般不成立, 比如最简单的公式 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 就不成立. 而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{E}$ 当然是可交换的, 所以牛顿二项式展开式只在下面的情形成立:

$$(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^n=\boldsymbol{A}^n+C_n^1\lambda\boldsymbol{A}^{n-1}+C_n^2\lambda^2\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots C_n^{n-1}\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}+\lambda^n\boldsymbol{E}.$$

II. 不满足消去律:

(1) 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

(2) 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

注意, 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 消去律是成立的, 即

当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时, 且 $|\boldsymbol{A}|\neq\boldsymbol{O}$ 时, 有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;
当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $|\boldsymbol{A}|\neq\boldsymbol{O}$ 时, 有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

问: 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, 能否得到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$? 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, 能否得到 $\boldsymbol{A}=\pm\boldsymbol{E}$?

由 $a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 且 $b^2-4ac\geqslant 0$, 能否得到 $\boldsymbol{A}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\boldsymbol{E}$?

上述都是不成立的, 根源仍然是因为矩阵乘法不满足消去律.

矩阵运算不满足交换律, 不满足消去律, 还有一些过去熟知的公式在矩阵理论里并不成立. 前述是线性代数初学者最容易犯的几个错误之一, 为数不少的人会一直犯这个错误.

我们要注意, 虽然矩阵也有所谓的"加法"、"乘法", 但是这和我们熟知的实数加法、乘法是完全不同的. 运算的对象不同, 运算的内容不同, 当然, 运算的规律也不同. 这是两个不同的讨论范围里的不同运算, 相同的只不过是沿用了以前的称谓或记号而已, 我们不要被这一点"相同"而忘记二者本质的不同.

(二) 伴随矩阵.

1) $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 这个公式要牢记! 其重大意义是由此引入了逆矩阵的讨论. 注意这里的 $\boldsymbol{A}$ 不一定是可逆的.

2) 若 $\boldsymbol{A}\neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$. 它在理论上给出了求逆矩阵的方法, 但是并不实用, 在第三章将给出一个简单实用的方法(见教材 P.64 例 2).

(三) 逆矩阵

1) 矩阵定义中的条件 “$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$” 是可以弱化的: 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为方阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 可逆, 且互为逆矩阵. 更一般地, 对方阵而言, 若 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k=\lambda\boldsymbol{E}$ 且 $\lambda\neq 0$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{A}_k$ 都是可逆的.

2) 逆矩阵在运算中实现了除法的功能. 在矩阵中没有除法, 或者说, 我们通过引入逆矩阵, 避免了对除法的讨论.

对于任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 都有 $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$. 从乘法的角度来看, n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 在矩阵中的地位类似于 1 在复数中的地位. 一个复数 $a\neq 0$ 的倒数可以用等式 $aa^{-1}=1$ 来刻划, 相仿地, 我们引入记号 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 并且满足 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$. 记号 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是特定的, 它不能写成 $\dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$.

3) 矩阵可逆的几个等价说法: 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff |\boldsymbol{A}|\neq 0\iff \boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.

其他的等价说法, 在以后会学习到.

(四) 其他重要公式与结论.

- $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$.
- $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
- $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.
- $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$, $(ad-bc\neq 0)$.
- $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_1^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k^{-1}\end{pmatrix}$.
- $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_k|$.
- $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. (P.56 习题 27)
- $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{m\times m}\\ \boldsymbol{B}_{n\times n} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\,|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$. (使用 Laplace 展开可得. 或者, 将 $\boldsymbol{A}$ 所在行的最后一行开始, 与 $\boldsymbol{B}$ 所在的 n 行进行相邻互换, 共进行 $m\times n$ 次互换后, 得到 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{B}_{n\times n} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{m\times m}\end{vmatrix}$.)

§2.2 题型举例

§2.2.1 矩阵运算

例 2.1 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 $n\times n$ 矩阵, 则必有 【 】

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$. (B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

(C) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$. (D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

解 选 (C). 特别注意选项 (D): $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$, 是错误的.

例 2.2 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$ 【 】

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$. (B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$. (D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解 首先就可以排除 (A), (B). 选项 (B) 和上例中的 (D) 是一样的错误. 正确选项是 (C). 事实上,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1} &= (\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E})^{-1}\\ &= (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\\ &= \left(\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}\\ &= (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\\ &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

例 2.3 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$, $\boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解

$$\boldsymbol{A}^n=\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^n=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^{n-1}\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}.$$

例 2.4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 而 n 为正整数, 求 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}$. $(n\geqslant 2)$

解 由 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}\left(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{O}.$$

例 2.5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵, 求 $\boldsymbol{B}^{2008}-2\boldsymbol{A}^2$.

解 由 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{E}$, 得

$$\boldsymbol{B}^{2008}-2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2008}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&-1\end{pmatrix}.$$

§2.2.2 伴随矩阵

例 2.6 证明下列结论:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$; (*$\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.*)

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆. 此时 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}$, $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$;

(3) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$;

(4) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$;

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

解 (1) 反证法. 假设 $|\boldsymbol{A}^*| \neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆. 由 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$.
而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 这导致 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$. 与假设 $|\boldsymbol{A}^*| \neq 0$ 矛盾. 故若$|\boldsymbol{A}| = 0$, 则$|\boldsymbol{A}^*| = 0$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}.$$

又 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 知 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \left(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

另由伴随矩阵性质有 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*\boldsymbol{A}^{-1} = \left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{E}$, 两边右乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^* = \left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{A} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(3) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}$ 取行列式得到: $|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^*| = \big||\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}\big| = |\boldsymbol{A}|^n$.
若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 由(1)知 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$, 此时命题也成立.

(4) 因为 $k\boldsymbol{A}$ 的代数余子式 $\overline{\boldsymbol{A}}_{ij} = k^{n-1}\boldsymbol{A}_{ij}$, 故 $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(5) 由伴随矩阵的定义

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix},$$

容易验证结论成立.

例 2.7 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 分块矩阵 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{C}^* =$ 【 】

(A) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$.

解 为了方便地得到正确选项, 不妨设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{C}$ 也可逆.

$$\boldsymbol{C}^* = |\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

所以选 (D).

例 2.8 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}| = 2$, $|\boldsymbol{B}| = -3$, 求 $\left|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right|$.

解 由 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 所以

$$\left|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right| = 2^n\,|\boldsymbol{A}^*| \cdot \left|\boldsymbol{B}^{-1}\right| = 2^n\,|\boldsymbol{A}|^{n-1}\,\frac{1}{|\boldsymbol{B}|} = -\frac{2^{2n-1}}{3}.$$

例 2.9 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$ 两边同时右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}.$$

再两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E},\ \text{即}\ \left(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{B}=3\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}.$$

注意到 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 由题设得 $|\boldsymbol{A}|=2$. 所以 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)\,\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E}$, 得

$$\boldsymbol{B}=6\,(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}.$$

§2.2.3 逆矩阵

例 2.10 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$, 证明: $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 并求其逆. 若$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解 (方法一) 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$, 两边左乘 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\\ \Rightarrow\quad&(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E},\\ \Rightarrow\quad&(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})=2\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$.

(方法二) 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$, 得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(2\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})),\\ \Rightarrow\quad&\boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{E},\\ \Rightarrow\quad&\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}.\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 且$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}$.

例 2.11 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$, 证明矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆. 若 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,

求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 由 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$ 得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{A},\\ \Rightarrow\ &(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{B}=4\,(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+8\boldsymbol{E},\\ \Rightarrow\ &(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\,(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆. 且 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}+8\,(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=2\boldsymbol{E}+8\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$

§2.2.4 矩阵方程

例 2.12 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解 由题设得 $\boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆, 两边右乘 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{B}=2\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=2\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}.$$

例 2.13 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA}$, 求证 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$.

解 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$, 得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$, 知 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1} \tag{2.1}$$

由 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA}$, 得 $\boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$, 而 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 所以

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}. \tag{2.2}$$

将 (2.1) 和 (2.2) 相减得

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=E.$$

例 2.14 设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$, 两边左乘 $\boldsymbol{A}$ 得$|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{AX}$, $(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{X}=(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}$.

例 2.15 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{E}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解 移项得 $\boldsymbol{AX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{BX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}$, 即 $(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{BX})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}$, 所以

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}.$$

则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 可逆, 且 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$. 又

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},\ 且\ (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例 2.16 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足条件 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

解 由 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ 得$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

例 2.17 设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 由题设得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})+2\boldsymbol{E}$, $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=2(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$.

例 2.18 设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$, $(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}=-8\boldsymbol{E}$, 故 $\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$可逆, 所以 $\boldsymbol{B}=-8(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=-8\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E})\big)^{-1}=-8(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}$.

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

秩是矩阵的一种内在属性. 矩阵的这种内在属性是与生俱来的, 一个矩阵一旦诞生, 它的这种内在属性就确定了. 虽然初等变换可以把它们变得面目全非, 但是它们的这个内在属性是不变的. 等价的矩阵, 看上去各各不同, 但是有一个内在属性是一样的, 那就是它们的秩.

§3.1　内容小结

§3.1.1　本章重点

(一) 初等矩阵在矩阵乘法中的功能.

"复制、传递"——初等矩阵是怎么由单位阵得来的, 它将把该变换过程传递到它所乘的矩阵; 并遵循"左乘则行变, 右乘则列变"的特点.

具体而言, 设 $\boldsymbol{P}$ 为初等矩阵,

(i) 若 $\boldsymbol{P}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{PA}$ 的结果是: 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 并且 $\boldsymbol{P}$ 是怎样由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 通过行变换得来, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就进行完全相同的行变换.

(ii) 若 $\boldsymbol{P}$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{AP}$ 的结果是: 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换, 并且 $\boldsymbol{P}$ 是怎样由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 通过列变换得来, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就进行完全相同的列变换.

上述过程体现为初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 把自己生成的过程复制、传递到了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上.

设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&k&0\\ &1&0&0\\ & &1&0\\ & & &1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\ b_1&b_2&b_3&b_4\\ c_1&c_2&c_3&c_4\\ d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}$.

(i) 若计算 $\boldsymbol{PA}$, 则把 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, $\boldsymbol{P}$ 是由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经行变换 r_1+kr_3 得来, 则把 $\boldsymbol{A}$ 就进行相同的行变换, 所以

$$\begin{pmatrix}1&0&k&0\\ &1&0&0\\ & &1&0\\ & & &1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\ b_1&b_2&b_3&b_4\\ c_1&c_2&c_3&c_4\\ d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+kc_1&a_2+kc_2&a_3+kc_3&a_4+kc_4\\ b_1&b_2&b_3&b_4\\ c_1&c_2&c_3&c_4\\ d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}.$$

(ii) 若计算 $\boldsymbol{PA}$, 此时要视 $\boldsymbol{P}$ 是由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 通过初等列变换 c_3+kc_1 得来, 并有

$$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\ b_1&b_2&b_3&b_4\\ c_1&c_2&c_3&c_4\\ d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&k&0\\ &1&0&0\\ & &1&0\\ & & &1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3+ka_1&a_4\\ b_1&b_2&b_3+kb_1&b_4\\ c_1&c_2&c_3+kc_1&c_4\\ d_1&d_2&d_3+kd_1&d_4\end{pmatrix}.$$

(二) 利用初等变换求(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$; (2) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{BA}^{-1}$.

在本章, 矩阵求逆和解矩阵方程, 在方法上已经完全更新.

虽然我们不再通过伴随矩阵求逆矩阵, 但用定义求伴随矩阵的方法仍然要熟练掌握.

(二) 矩阵的秩

1. 初等变换不改变矩阵的秩. 或者用下面的两种方式表述:

(i) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$. (但 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$ 不能得 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 除非两者是同型矩阵.)

(ii) 若 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 可逆, 则 $R(\boldsymbol{PAQ})=R(\boldsymbol{A})$.

2. 矩阵和、差、积的秩.

(i) $R(\boldsymbol{A})-R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

(ii) $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})-n\leqslant R(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$. 其中 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别为 $s\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵.

(三) 线性方程组有解判别

(1) 一般的方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的情形.

对 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$. 注意到 $R(\boldsymbol{B})$ 比 $R(\boldsymbol{A})$ 只多 0 或 1.

(1) 若 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})+1$, 则说明出现了矛盾方程, 导致方程组无解.

(2) 若 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})$, 则没有矛盾方程, 方程组有解. 其中,

(i) 当 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})<n$ 时, 说明出现了自由未知量, 导致方程组有无限多解;

(ii) 而 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})=n$ 时, 则没有出现自由未知量, 所以方程组有唯一解.

是否出现矛盾方程是方程组有解与否的关键; 是否出现自由未知量又是区分有无限多解和有唯一解的关键. 换成秩的角度去说问题, 就呈现为下面的表达:

$$n \text{ 元线性方程组 } \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \text{ 有解} \iff R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B}).\ \text{且}\begin{cases} R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=n, & \text{有唯一解;}\\ R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})<n, & \text{有无限多解.}\end{cases}$$

n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解 $\iff R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$.

(2) 齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的情形.

齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是天然有解的, 它至少有一个解: 零解. 所以对齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$, 我们关心的不是它有没有解, 而是它是否有非零解. 下面的结论要非常的清楚:

n 元齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$.

n 元齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})<n$.

注意: (i) n 是未知量的个数, 或者说是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数. $R(\boldsymbol{A})<n$ 表明 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯型矩阵中非零行的行数, 小于 n, 说明出现了自由未知量, 导致方程组的不唯一, 所以有非零解. (ii) 这里的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不一定是方阵. 这个结论较第一章 P.25 的定理 5 就更一般化了, 而且是充要条件.

线性代数的基本内容的中心问题是解线性方程组, 关于线性方程组的解的判别在理论上是极端重要的, 必须熟练掌握. 特别是本章的例题 12, 该题型给出了两种解法. 解法二是我们要特别推荐的: 克拉默法则我们总是记得的, 系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 就得到了使方程组有唯一解的 λ 的值, 然后将其他的 λ 值代入方程组, 直接解方程组即可. 其优点是避免对含参数矩阵的初等变换, 缺点是仅适用于系数矩阵为方阵的情形. (*后文给出了系数矩阵不是方阵的题型, 见例* 3.2.)

(四) 新添矩阵可逆的等价说法.

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 新添下列等价说法:

(1) $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵; 或 $R(\boldsymbol{A})=n$. (不可逆矩阵又称为降秩矩阵.)

(2) $\boldsymbol{A}$ 的标准形是 $\boldsymbol{E}$; 或 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{E}$.

(3) $\boldsymbol{A}$ 可以表达为有限个初等矩阵的乘积.

(4) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

(5) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

注意, 第一章的克拉默法则只告诉了我们矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分条件.

§3.1.2 要避免的错误

求矩阵秩时, 行变换和列变换可以随意进行, 行变、列变、两者交叉进行, 都可以(*因为“初等变换不改变矩阵的秩”*). 而解方程和求逆矩阵时只能进行一种变换:

(1) 对增广矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 进行初等变换求解方程时, 只有行变换, 不能有列变换; (*因该过程本质上是消元法, 当然只能方程与方程之间进行运算, 在对应的增广矩阵中就体现为初等行变换.*)

(2) 用矩阵初等变换 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\sim(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$ 求逆矩阵时, 只有行变换, 不能有列变换. 其他的情形类似.

§3.2 题型举例

§3.2.1 线性方程组解的判定

例 3.1 已知方程组 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ 无解, 则 $a=$____________.

解 方程组无解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$. 由

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\3&a&-2&0\end{array}\right)\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{array}\right)\overset{r_3+(a-2)r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a-3)(a-1)&a-3\end{array}\right),$$

若 $a=-1$, 则

$$\boldsymbol{B}\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&-4\end{array}\right),$$

此时 $R(\boldsymbol{A})=2$, $R(\boldsymbol{B})=3$, 方程组无解. 故答案为: $a=-1$.

例 3.2 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0,\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=0,\\3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1.\end{cases}$$

已知 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是该方程组的一个解. 试求方程组的全部解.

解 将 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 带入方程组, 得 $\lambda=\mu$. 即方程组为

$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2+\lambda x_3+x_4=0,\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=0,\\3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\lambda)x_3+4x_4=1.\end{cases}$$

记方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作初等行变换, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=&\left(\begin{array}{cccc:c}1&\lambda&\lambda&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2+\lambda&4+\lambda&4&1\end{array}\right)\underset{r_1\leftrightarrow r_2}{\overset{r_3-r_1-r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc:c}2&1&1&2&0\\1&\lambda&\lambda&1&0\\0&1&3&1&1\end{array}\right)\\&\underset{r_1\div 2}{\overset{r_2-\frac{1}{2}r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&0\\0&\lambda-\frac{1}{2}&\lambda-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&3&1&1\end{array}\right)\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}\left(\begin{array}{cccc:c}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&0\\0&1&3&1&1\\0&\lambda-\frac{1}{2}&\lambda-\frac{1}{2}&0&0\end{array}\right).\end{aligned}\tag{3.1}$$

(I) 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时,

$$\boldsymbol{B}\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&0\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right),\tag{3.2}$$

此时 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2<n=4$, 方程组有无限多解. 又

$$(3.2)\overset{r_1-\frac{1}{2}r_2}{\sim}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

得同解方程组及其通解为

$$\begin{cases}x_1=\quad x_3-\frac{1}{2}x_4-\frac{1}{2},\\x_2=-3x_3-\quad x_4+1,\\x_3=\quad x_3,\\x_4=\qquad\quad x_4,\end{cases}\Longrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

(II) 当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时,

$$(3.1)\overset{r_3\div(\lambda-\frac{1}{2})}{\sim}\left(\begin{array}{cccc:c}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&0\\0&1&3&1&1\\0&1&1&0&0\end{array}\right)\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1-\frac{1}{2}r_3}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&0\\0&0&2&1&1\\0&1&1&0&0\end{array}\right)\underset{r_2\leftrightarrow r_3}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-2&0&-1\\0&1&1&0&0\\0&0&2&1&1\end{array}\right),$$

此时 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3<n=4$, 方程组有无限多解. 得同解方程组及其通解为

$$\begin{cases}x_1=\quad 2x_3-1,\\x_2=\quad -x_3,\\x_3=\qquad x_3,\\x_4=-2x_3+1.\end{cases}\Longrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

其中 k 为任意常数.

例 3.3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $t=$__________.

解 即言矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 有非零解, 则 $R(\boldsymbol{A})<3$, 故 $|\boldsymbol{A}|=0$, 解得 $t=-3$.

例 3.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次线性方程组, 则下列结论正确的是 【 】

(A) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.
(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解.
(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.
(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

解 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则下列基本结论要非常清楚:

- $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解 $\Longleftrightarrow R(\boldsymbol{A})=n$.
- $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Longleftrightarrow R(\boldsymbol{A})<n$.
- $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$.
- $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解 $\Longleftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$.

选项 (A) 错, 除非系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是方阵. (B) 错, 因不能判断 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是否有解. 正确答案是 (D).

例 3.5 设 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中方程个数为 m, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 则 【 】

(A) 当 $r=m$ 时, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解.

(B) 当 $r=n$ 时, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(C) 当 $n=m$ 时, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(D) 当 $r<n$ 时, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解.

解 注意到方程个数为 m, 即 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 行数为 m, $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\leqslant m$.

当 $r=m$ 时, 由 $m=R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\leqslant m$, 得 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=m$, 即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解. 故选 (A).

(B) 错误: $r=n$ 不能得到 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A})$, 即不能判断 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是否有解. (C) 错误: 只是说了 $\boldsymbol{A}$ 为方阵而已. (D) 错误: 不能判断 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是否有解.

§3.2.2 解矩阵方程

用初等变换可以方便的计算 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{BA}^{-1}$. 为了再次提醒大家注意方法上的更新, 我们回头去解一下前一章的题目.

例 3.6 (P.55 **第二章习题** 11 **之** (2)) 解矩阵方程

$$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}.$$

解 由

$$\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\\\hdashline 1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}\underset{}{\overset{c_1\leftrightarrow c_3}{\sim}}\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&1&2\\1&-1&1\\\hdashline 3&-1&1\\2&3&4\end{pmatrix}\underset{c_3+2c_2}{\overset{c_2+c_1}{\sim}}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\1&0&3\\\hdashline 3&2&3\\2&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\underset{c_3\div 3}{\overset{c_1\times(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\\\hdashline -3&2&1\\-2&5&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\overset{c_1+c_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hdashline -2&2&1\\-\frac{8}{3}&5&-\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-\frac{8}{3}&5&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

注 3.1 求解形如 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 的方程, 仍然可以使用初等变换的方法(假定 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 可逆). 分两步:

(i) 由初等行变换 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})\overset{r}{\sim}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})$, 算得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$;

(ii) 由初等列变换 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\\hdashline\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\overset{c}{\sim}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\\hdashline\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}\end{pmatrix}$, 得到 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$.

例 3.7 (P.55 **第二章习题** 11 **之** (3)) 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}.$$

解 记方程组为 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})=\left(\begin{array}{cc:cc}1&4&3&1\\-1&2&0&-1\end{array}\right)\overset{r_2+r_1}{\sim}\left(\begin{array}{cc:cc}1&4&3&1\\0&6&3&0\end{array}\right)\underset{r_2\div 6}{\overset{r_1-\frac{2}{3}r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&1\\0&1&\frac{1}{2}&0\end{array}\right),$$

即 $\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$. 又

$$\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{B}\\\hdashline\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}2&0\\-1&1\\\hdashline 1&1\\\frac{1}{2}&0\end{array}\right)\overset{c_1+c_2}{\sim}\left(\begin{array}{cc}2&0\\0&1\\\hdashline 2&1\\\frac{1}{2}&0\end{array}\right)\overset{c_1\div 2}{\sim}\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\\hdashline 1&1\\\frac{1}{4}&0\end{array}\right),$$

所以, $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}$.

§3.2.3 矩阵的秩

例 3.8 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵, 且 $R(\boldsymbol{A})=2$, 而 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$. 则 $R(\boldsymbol{AB})=$________.

解 因为 $|\boldsymbol{B}|=10\neq 0$, 即 $\boldsymbol{B}$ 可逆. 所以 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{A})=2$.

例 3.9 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}$, 且 $R(\boldsymbol{A})=3$, 则 $k=$____________.

解 $\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}k+3&k+3&k+3&k+3\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}k+3&0&0&0\\1&k-1&0&0\\1&0&k-1&0\\1&0&0&k-1\end{pmatrix}$, 得 $k=-3$.

例 3.10 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{C}$ 是 n 阶可逆矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$ 的秩为 r_1, 则【 】

(A) $r>r_1$; (B) $r<r_1$;

(C) $r=r_1$; (D) r 与 r_1 的关系依 $\boldsymbol{C}$ 而定.

解 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$, 及 $\boldsymbol{C}$ 是 n 阶可逆矩阵, 知 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$, 故选 (C).

这个题目很基本: 可逆矩阵与矩阵相乘, 不改变矩阵的秩. 见教材矩阵秩的性质 4. 其根源是初等变换不改变矩阵的秩.

例 3.11 设 $n\,(n\geqslant 3)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&\cdots&a\\a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&1\end{pmatrix}$, 若 $R(\boldsymbol{A})=n-1$, 则 a 必为 【 】

(A) 1. (B) $\frac{1}{1-n}$. (C) -1. (D) $\frac{1}{n-1}$.

解 $\boldsymbol{A}$ 不是满秩的, 即 $|\boldsymbol{A}|=0$. 容易算得 $\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [1+(n-1)a](1-a)^{n-1}$, 得 $a=\frac{1}{1-n}$, 或 $a=1$. 而 $a=1$ 时 $R(\boldsymbol{A})=1$, 舍去. 选 (B).

例 3.12 若 $\boldsymbol{A}_{n\times m}\boldsymbol{B}_{m\times n}=\boldsymbol{E}_n$ $(n<m)$, 证明: $R(\boldsymbol{B}_{m\times n})=n$.

证明 注意到 $n<m$, 有

$$\begin{aligned} n = R(\boldsymbol{E}_n) &= R(\boldsymbol{A}_{n\times m}\boldsymbol{B}_{m\times n}) \\ &\leqslant R(\boldsymbol{B}_{m\times n}) \leqslant \min\{n,m\} = n, \end{aligned}$$

所以, $R(\boldsymbol{B}_{m\times n})=n$.

§3.2.4 初等变换

例 3.13 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$, 再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$, 则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为 【 】

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解 因为 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \boldsymbol{B} \xrightarrow{c_3 + c_2} \boldsymbol{C}$, 所以

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}.$$

可以取

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以应选 (D).

例 3.14 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得到 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 【 】

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. (B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$. (C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$. (D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

解 由题设知

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C},$$

所以 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$. 选 (B).

例 3.15 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\,(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 【 】

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$. (B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$. (D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解 为表述方便, 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为 $\boldsymbol{P}$. 由题设知 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$. 由 $(\boldsymbol{PA})^*(\boldsymbol{PA})=|\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{E}$, 得

$$(\boldsymbol{PA})^*=|\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

注意到 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}$, $|\boldsymbol{P}|=-1$, 而由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$, 知 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 得

$$\boldsymbol{B}^*=(\boldsymbol{PA})^*=-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P},$$

即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{B}^*$. 因 $\boldsymbol{P}$ 亦可视为交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 1 列与第 2 列得的初等矩阵, $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$ 意味着要交换矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列, 所以选 (C).

例 3.16 设$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, 试给出 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 间的关系式, 并证明 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 同时可逆或同时不可逆.

解 由题设知 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 间的关系式为

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},\ \text{即}\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}.$$

两边取行列式得 $-|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$, 即 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 同时为零或同时不为零, 得证 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 同时可逆或同时不可逆.

例 3.17 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对换后得的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$. (1) 试证 $\boldsymbol{B}$ 可逆. (2) 求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$.

解 (1) 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行与第 j 行得的初等矩阵, 记为 $\boldsymbol{E}(i,j)$. 由题设知 $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵, 即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 又注意到 $\big|\boldsymbol{E}(i,j)\big|=-1$, 所以

$$|\boldsymbol{B}|=\big|\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}\big|=\big|\boldsymbol{E}(i,j)\big||\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|\neq 0,$$

得证 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

(2) 注意到 $\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$, 得

$$\boldsymbol{AB}^{-1}=\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}\big)^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j).$$

§3.2.5 逆矩阵

例 3.18 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵.

解 已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$, 知 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 所以

$$\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=|\boldsymbol{A}^{-1}|\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}.$$

计算得 $\left|A^{-1}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$, 且

$$(A^{-1}, E) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right),$$

所以

$$(A^*)^{-1} = 2\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

§3.3 附录 分块初等阵和分块阵的初等变换

将分块乘法与初等变换结合就成为矩阵运算中极端重要的手段.

将某个单位矩阵进行如下分块:

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

对它进行两行(列)对换; 某一行(列)左乘(右乘)一个矩阵 P; 一行(列)加上另一行(列)的 P (矩阵)倍数, 就可得到如下三类分块初等矩阵:

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}, \qquad \text{(分块对换初等阵)}$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}, \qquad \text{(分块倍乘初等阵)}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}. \qquad \text{(分块倍加初等阵)}$$

和初等矩阵与初等变换的关系一样, 用这些矩阵左乘任一个分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 只要分块乘法能够进行, 其结果就是对它进行相应的分块初等行变换:

$$\begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C + PA & D + PB \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

同样, 用它们右乘任一矩阵, 相当于对该矩阵作相应的分块初等列变换.

例 3.19 (P.56 **习题** 27) 设 n 阶矩阵 A 及 s 阶矩阵 B 都可逆, 求

(1) $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}$; (2) $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}$.

解 (1) 解法一. 设

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E},$$

求解 $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{C}_3, \boldsymbol{C}_4$ 得结果. 下略.

解法二. 利用分块初等矩阵在矩阵乘法中的功能. 因为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_s \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}.$$

所以

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_s \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \boldsymbol{E},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_s \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

解法三. 利用分块初等变换求解. 由

$$\left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{array}\right) \underset{\sim}{\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \end{array}\right) \xrightarrow[\boldsymbol{A}^{-1} \times r_2]{\boldsymbol{B}^{-1} \times r_1} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{array}\right),$$

得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

更一般的结论是, 若矩阵 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 可逆, 则

$$\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_k & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_k^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

(2) 直接利用分块初等变换求解.

$$\left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{array}\right) \underset{\sim}{\xrightarrow{\boldsymbol{A}^{-1} \times r_1}} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{array}\right) \tag{3.6}$$

$$\underset{\sim}{\xrightarrow{r_2 - \boldsymbol{C} \times r_1}} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E} \end{array}\right) \tag{3.7}$$

$$\underset{\sim}{\xrightarrow{\boldsymbol{B}^{-1} \times r_2}} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{array}\right). \tag{3.8}$$

所以

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

注 3.2 上述的 (3.7) 式中的变换为什么写成 $r_2 - \boldsymbol{C} \times r_1$, 而不是 $r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}$? 注意这里是行变换, 应该是左乘. 否则会导致下面的错误:

$$(3.6) \underset{\sim}{\overset{r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}}{}} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{E} \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{r_2 \times \boldsymbol{B}^{-1}}{}} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{array}\right).$$

其实, 分块初等矩阵可以分解为有限个初等矩阵的乘积, 分块初等矩阵在矩阵乘法中体现出的功能, 是初等矩阵的相应功能的"浓缩". 比如 (3.8) 中只写了一步 $\boldsymbol{B}^{-1} \times r_2$ 来表示变换过程, 其实就是数个初等行变换的集中反映.

这也是利用分块初等矩阵解题, 在方法上成立的真正原因.

第四章　向量组的线性相关性

最大无关组是原向量组的核心. 最大无关组的概念, 才真正阐明了秩的涵义.

§4.1　内容小结

§4.1.1　本章要点

(一) 向量的线性表示.

有关向量的线性表示, 下面的说法是等价的:

向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

$\Longleftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}$ 有解.

$\Longleftrightarrow$ $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) = R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b})$.

上述结论的朴素理解: $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) = R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b})$, 意味着往向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 中添加向量 $\boldsymbol{b}$, 并没有使得向量组的秩增加, 其根本原因在于向量 $\boldsymbol{b}$ 能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

进而, $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) = R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s)$, 也可理解为往向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 中添加向量 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$, 并没有使得向量组的秩增加, 所以, 向量组 B: $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ 能由向量组 A: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是

$$R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) = R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s).$$

(二) 线性相关与线性无关.

对于线性相关, 下面的说法是等价的:

向量组 A: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ $(m \geqslant 2)$ 线性相关.

$\Longleftrightarrow$ 向量组 A 中至少存在一个向量是其余 $m-$ 个向量的线性组合.

$\Longleftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$ 有非零解.

$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 的秩小于向量的个数 m, 即 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) < m$.

对于线性无关, 下面的说法是等价的:

向量组 A: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ $(m \geqslant 2)$ 线性无关.

$\Longleftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

$\Longleftrightarrow$ $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) = m$.

从上述说法要得到的理解是:

(1) 注意向量、方程组、矩阵问题的相互转换;

(2) 得到一个朴素的认识: $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) < m$ 的根本原因在于, 列向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 中有多余的向量, 或说存在某向量可以被其他的向量线性表示, 当然整个向量组是线性相关的.

(三) 矩阵等价与向量组等价的区别与联系.

设有 n 维向量组 A: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$, n 维向量组 B: $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$. 矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$, 矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$. 则

(1) 向量组等价, 可得矩阵等价; (注意这里所设的两向量组中向量的个数相同, 否则两矩阵的列数不同, 会导致矩阵不是同型矩阵, 就不能得到矩阵等价.)

(2) 矩阵等价, 不能得到向量组等价.

例如, 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 由 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 2$, 知 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. 但向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 不是等价的, 因为这里 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = 4$, 不满足两向量

组等价的充要条件 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$. 见教材 P.84 定理 2 的推论, 两向量组等价的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, 而不是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

(四) 研究最大无关组的意义.

最大无关组和原向量组是等价的, 是原向量组的简约, 更是原向量组的"全权代表".

最大无关组从理论上弄清了, 用消元法解线性方程组时, 为什么最后会剩余稳定数量的方程, 事实上那些剩下的方程就是原方程组的"最大无关组", 和原方程组是等价的, 是同解的.

线性相关、线性表示的概念也可以解释用消元法解线性方程组的相关问题: 方程组是"线性相关"的, 说明有多余的方程; 能被其他的方程"线性表示"的方程就是多余的. ("多余"是相对的, 方程的去、留不是绝对的, 因最大无关组一般不唯一.)

最大无关组也使线性方程组在解的表示上, 得到了简洁、完备的表达.

从更广泛的含义上看, 最大无关组还充当了坐标系的功能.

(五) "$n-r$"的含义.

定理 7 是说: 对 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$, 设 $R(\boldsymbol{A})=r$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系包含 $n-r$ 个向量.

r 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 也是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯型矩阵的非零行的行数, 是非自由未知量的个数. (非自由未知量一般取自非零行的第一个非零元所对应的未知量, 一个非零行只能确定一个非自由未知量.)

n 是未知量的总数, 所以 $n-r$ 是自由未知量的个数. 有多少个自由未知量, 基础解系里就对应有多少个向量.

§4.1.2 重新理解矩阵秩的性质

矩阵秩的性质在第三章列出了 8 条. 我们对其中的几条重要性质重新加以证明和理解.

例 4.1 (**性质** 5) 证明: $\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列线性表出, 所以

$$R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),\tag{4.1}$$

同理 $R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. 所以

$$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).$$

设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大线性无关组, $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的极大线性无关组. 则 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列向量均可由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s$ 线性表出, 所以

$$R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s).$$

而向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s$ 的秩不可能超过其向量的个数 $r+s$, 即 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$, 所以

$$R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).\tag{4.2}$$

得证 $\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

注 4.1 对 (4.1) 式的朴素理解是, 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右侧添加新的列, 只会有可能使秩在原来的基础上得到增加; 当 $\boldsymbol{B}$ 的列向量能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出时, 等号成立.

对 (4.2) 式的朴素理解是, 对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, 有可能 $\boldsymbol{A}$ 的列向量与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量出现线性相关, 合并为 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的秩一般会比 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$ 要小. 当$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 两者列向量的极大线性无关组线性无关时, (4.2) 式的等号成立. 更极端的情形是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

矩阵秩的性质 5 其实还可以写成

$$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$$

上式第一个不等号也是说明, 给一个矩阵添加行, 有可能使得矩阵的秩增加.

例 4.2 (**性质** 6) 证明: $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

证明 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列线性表出, 所以 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$. 得证

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}). \tag{4.3}$$

注 4.2 注意 (4.2) 式、(4.3) 式的右侧都是 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$. 就是说把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{B}$ 合并、相加, 只可能使秩得以减少.

例 4.3 (**性质** 7) 证明: $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$.

证明 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合, 事实上, 设

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix},$$

知矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 1 列为 $b_{11}\boldsymbol{a}_1+b_{21}\boldsymbol{a}_2+\cdots+b_{m1}\boldsymbol{a}_m, \ldots,$ 第 m 列为 $b_{1s}\boldsymbol{a}_1+b_{2s}\boldsymbol{a}_2+\cdots+b_{ms}\boldsymbol{a}_m$. 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量可以被矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 由 P.85 定理 3, 知

$$R(\boldsymbol{AB}) \leqslant R(\boldsymbol{A}).$$

类似地, 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量的线性组合, 有 $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$. 得证 $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$.

从这个性质及 P.85 定理 3 得到的共同理解是: 对一个向量组进行线性组合可能会使向量组的秩减小.

§4.2 题型举例

§4.2.1 向量组的线性相关性

例 4.4 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分条件是 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 均不为零向量.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一部分向量线性无关.

解 选 (C). “向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充要条件是向量组中至少存在一个向量能由其余 $s-1$ 个向量线性表示”, 这句话的等价叙述是, “向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是向量组中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示”.

(B)只能说明向量两两线性无关, 得不到整个向量组线性无关. (A), (B), (C) 都只是必要条件.

例 4.5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 均为 n 维列向量, 下列结论正确的是 【 】

(A) 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \neq \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则对任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$.

(D) 若 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

解 选 (B).

例 4.6 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 则向量组 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关.

解 (A) 错: $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$;

(B) 错: $(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$;

(D) 错: $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$;

选 (C): 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

且右侧矩阵可逆.

例 4.7 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩 【 】

(A) 必有一个等于零. (B) 都小于 n.

(C) 一个小于 n, 一个等于 n. (D) 都等于 n.

解 即言矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 有非零解, 所以 $R(\boldsymbol{A})<n$. 同理, 由 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 有非零解, 知 $R(\boldsymbol{B})<n$. 选 (B).

或者直接应用由 P.70 性质 8: 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$, 则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

例 4.8 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵, 则必有 【 】

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

解 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数(也是 $\boldsymbol{B}$ 的行数)为 n. 因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 所以 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$. 又 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$, 知 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 1$, $R(\boldsymbol{B})\geqslant 1$. 所以

$$R(\boldsymbol{A})\leqslant n-1,\quad R(\boldsymbol{B})\leqslant n-1,$$

故选(A).

直观的理解是, 注意到矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列的线性组合, 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行的线性组合(见例 4.3 中的说明), 由题设知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

或者, 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, 则在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中至少存在一个非零的列向量 $(b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{mi})^{\mathrm{T}}$ 使得

$$b_{1i}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2i}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots,b_{mi}\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关. 类似可判断 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

例 4.9 设 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n})=m<n$, 则下述结论正确的是 【 】

(A) $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的任意 m 个列向量必线性无关.

(B) $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的任意一个 m 阶子式不等于零.

(C) 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

(D) $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 通过初等行变换必可以化为 $(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})$ 的形式.

解 选 (C). 直观的解释是, $\boldsymbol{BA}$ 的行向量是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量的线性组合:

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}+b_{12}\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+b_{1m}\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \\ b_{12}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}+b_{22}\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+b_{2m}\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ b_{t1}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}+b_{t2}\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+b_{tm}\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

若 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$, 则

$$\begin{cases} b_{11}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}+b_{12}\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+b_{1m}\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}, \\ b_{12}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}+b_{22}\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+b_{2m}\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}, \\ \qquad\qquad\vdots \\ b_{t1}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}+b_{t2}\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+b_{tm}\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}, \end{cases}$$

而 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n})=m$, 知向量组 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}}$ 线性无关, 则 $b_{ij}=0$, 所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

注 4.3 由此总结一下矩阵乘法消去律成立的条件:

(1) 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$, 若 $R(\boldsymbol{A})=n$ (即 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量线性无关, 称为是列满秩的), 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$, 若 $R(\boldsymbol{B})=n$ (即 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个行向量线性无关, 称为是行满秩的), 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

关于列满秩、行满秩, 请联系例题 4.29 的结论.

例 4.10 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则线性方程组 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 【 】

(A) 当 $n>m$ 时仅有零解. (B) 当 $n>m$ 时必有非零解.

(C) 当 $n<m$ 时仅有零解. (D) 当 $n<m$ 时必有非零解.

解 注意到 $\boldsymbol{AB}$ 是 $m\times m$ 矩阵, 即 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 是 m 元方程组. 当 $n<m$ 时, $R(\boldsymbol{A})\leqslant n$, $R(\boldsymbol{B})\leqslant n$. 所以 $R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant n<m$, 系数矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的秩小于未知量的个数, 导致方程组 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 有非零解. 选 (D).

例 4.11 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 且 $n<m$. 试证: $|\boldsymbol{AB}|=0$.

证明 见例 4.10.

例 4.12 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 且 $n<m$. $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关.

证明 因 $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 且 $n<m$, 所以 $R(\boldsymbol{B})\leqslant n$. 又 $R(\boldsymbol{B})\geqslant R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{E})=n$, 所以 $R(\boldsymbol{B})=n$, 得证 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个列向量是线性无关的.

例 4.13 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m<n)$ 线性无关, 则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充要条件为 【 】

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示.

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$等价.

解 选 (D). 已知 $R(\boldsymbol{A})=m$, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关, 等价于, $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=m$, 等价于, $R(\boldsymbol{B})=m$, 等价于, $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$, 等价于, $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$(注意到 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵).

注 4.4 强调: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$, 但反之不一定成立, 除非 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵. 因为不同型的矩阵也可能秩相等, 但不同型的矩阵是不可能等价的. (比较教材 P.79 习题 11: 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.)

要特别注意选项 (C) 是错误的. 反例: 设 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, 而 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

注意向量组等价与矩阵等价的差别: 矩阵等价不能推出它们的行向量组(列向量)是等价的.

例 4.14 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}$, $i=1,2,\cdots,m$, 线性无关, 对每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 任意添加 r 个分量, 得到

$$\boldsymbol{\beta}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},b_{i1},\cdots,b_{ir})^{\mathrm{T}},\quad i=1,2,\cdots,m.$$

证明: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关.

解 设

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0},\tag{4.4}$$

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.\tag{4.5}$$

注意到方程组 (4.4) 是在方程组 (4.5) 的基础上添加了 r 个方程而成的, 则方程组 (4.4) 的解均满足方程组 (4.5).

而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 方程组 (4.5) 只有零解, 所以齐次方程组 (4.4) 也只有零解. 得证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

注 4.5 这结论可以称为: “分量”无关, 则“整体”也无关.

比如设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(3,\ 21,\ 0,\ 9,\ 0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 7,\ -1,\ -2,\ -1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,\ 14,\ 0,\ 6,\ 1)^{\mathrm{T}},$$

我们截取后面的三个分量, 容易判断 $\boldsymbol{\alpha}_1'=(0,\ 9,\ 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2'=(-1,\ -2,\ -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3'=(0,\ 6,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 是线性无关的, 从而断定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的.

例 4.15 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)^{\mathrm{T}}$. 问 p 为何值时, 该向量组线性无关? 此时用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 表示向量 $\boldsymbol{\alpha}=(4,1,6,10)^{\mathrm{T}}$.

解 由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&p+2&p&10\end{array}\right)\underset{\substack{r_3-r_1\\r_4-3r_1}}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\\0&4&p-7&p+6&-2\end{array}\right)$$
$$\underset{\substack{r_4+2r_2\\r_2\times(-1)}}{\overset{(r_3+3r_2)\div(-7)}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&0&1&0&1\\0&0&p-9&p-2&-8\end{array}\right)\underset{\substack{(r_2-r_3)\div 2\\r_4-(p-9)r_3}}{\overset{r_1-3r_3}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&-2&1\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p \end{array}\right) \tag{4.6}$$

当 $p \neq 2$ 时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 且

$$(4.6) \xrightarrow{r_4 \div (p-2)} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1-p}{p-2} \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-2r_4} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3p-4}{p-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1-p}{p-2} \end{array}\right).$$

得 $\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{3p-4}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \frac{1-p}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_4$.

注意, 这个题目其实是重要题型“带参量的线性方程组”的另一个提法: 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 + x_4\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha},$$

相当于讨论下面方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 10 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + (p+2)x_3 + px_4 = 10. \end{cases}$$

例 4.16 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, a+2, -3a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, -b-2, a+2b)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (1,3,-3)^{\mathrm{T}}$, 试讨论 a, b 为何值时,

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示, 并求出表示式.

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 并求出表示式.

解 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}. \tag{4.7}$$

下面讨论线性方程组 (4.7) 的解.

系数行列式不等于零时, 方程组有唯一解. 由

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a & -b \\ 0 & -3a & a+2b \end{vmatrix} = a(a-b),$$

所以 $a \neq 0$ 且 $a \neq b$ 时, 方程组 (4.7) 有唯一解. 又

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+3r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right) \tag{4.8}$$

(1) 当 $a \neq 0$ 且 $a \neq b$ 时,

$$(4.8) \overset{r_3 \div (a-b)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{(r_2+br_3)\div a}{\overset{r_1+r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

得方程组 (4.7) 有唯一解

$$x_1 = 1 - \frac{1}{a}, \quad x_2 = \frac{1}{a}, \quad x_3 = 0.$$

即此时 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示, 并且表示式为

$$\boldsymbol{\beta} = (1 - \frac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2.$$

(2) 当 $a = 0$ 时,

$$(4.8) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{array}\right) \overset{r_2-r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{array}\right),$$

出现矛盾方程 $0 = 1$, 方程组 (4.7) 无解, 即此时 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(3) 当 $a = b$ 且 $a \neq 0$ 时,

$$(4.8) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{r_2 \div a}{\overset{r_1-\frac{1}{a}r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

得同解方程组及通解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{a}, \\ x_2 = x_3 + \frac{1}{a}, \\ x_3 = x_3. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{a}, \\ x_2 = k + \frac{1}{a}, \quad k \in \mathbb{R}. \\ x_3 = k. \end{cases}$$

即此时 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 并且表示式为

$$\boldsymbol{\beta} = (1 - \frac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}_1 + (k + \frac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3.$$

例 4.17 确定常数 a, 使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, a, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (a, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 1, a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (-2, a, 4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (-2, a, a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示, 但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示的充要条件是 $R(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = R(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$. 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & a & 1 & a & 1 \\ a & 4 & a & a & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{r_3 - ar_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 4+2a & 3a & 0 & 1-a & 1-a^2 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_3 - 2r - 2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a-4 & 0 & 3-3a & -(a-1)^2 \end{array}\right),$$

当 $a \neq 4$ 且 $a \neq -2$ 时, $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = 3$, 此时向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

另一方面,

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & a & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a & 4 & a \end{array}\right) \underset{r_3 - ar_1}{\overset{r_2 - r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & a & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 0 & 4+2a & 3a \end{array}\right)$$

$$\overset{r_3 + r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & a & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & (a+2)(1-a) & 0 & 3a+6 & 4a+2 \end{array}\right),$$

当 $a=1$ 时, $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = 3$, 而 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = 1$; 当 $a=-2$ 时, $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = 3$, 而 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = 2$.

所以当 $a=1$ 或 $a=-2$ 时, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

综上知, $a=1$ 时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示, 但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

例 4.18 已知 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4) = 3$, $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5) = 4$, 证明:

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4) = 4.$$

证明 由题设知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 而且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_4 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4) &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_2\boldsymbol{\alpha}_2-k_3\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 1 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

由于 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5) = 4$, $R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 1 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$, 故 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4) = 4$.

另法: 说明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 等价即证.

例 4.19 已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 具有相同的秩, 且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 求 a, b 的值.

解 因 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 则 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)$.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2 \div 2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 9 & b \\ 1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 3 & 6 & b-\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b-5 \end{array}\right),$$

所以 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$, 且 $b=5$, $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$. 又

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_3} \begin{pmatrix} 0 & a & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & a-15 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $a=15$.

例 4.20 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解, 即 $\boldsymbol{A\beta}\neq\mathbf{0}$. 证明: 向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

证明 方法一.令

$$k_0\boldsymbol{\beta}+k_1(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_t(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t)=\mathbf{0}. \tag{4.9}$$

即

$$(k_0+k_1+\cdots+k_t)\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\mathbf{0}. \tag{4.10}$$

在 (4.10) 式两边左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 注意到 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\mathbf{0}$, $i=1,2,\cdots,t$, 得 $(k_0+k_1+\cdots+k_t)\boldsymbol{A\beta}=\mathbf{0}$. 因 $\boldsymbol{A\beta}\neq\mathbf{0}$, 所以只能是

$$k_0+k_1+\cdots+k_t=0, \tag{4.11}$$

代入 (4.10) 式, 得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\mathbf{0}$. 又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 为基础解系, 是线性无关的, 所以只能

$$k_1=k_2=\cdots=k_t=0,$$

代入 (4.11) 式, 得 $k_0=0$. 即要使 (4.9) 式成立只能是

$$k_0=k_1=k_2=\cdots=k_t=0,$$

得证向量组$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$线性无关.

方法二. 由题设可知$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$线性无关. 事实上, 假若 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性相关, 而已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示, 从而 $\boldsymbol{\beta}$ 是方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解, 这与题设矛盾. 又

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t)=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{(t+1)\times(t+1)} \triangleq \boldsymbol{BK}$$

而K可逆, 故$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$线性无关.

方法三. 先说明 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关(如前述). 又

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t)\xrightarrow[j=2,\cdots,t]{c_j-c_1}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t),$$

所以

$$R(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t)=R(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)=t+1,$$

得证 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

§4.2.2 线性方程组的解

例 4.21 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$, 若 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_4$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的互不相等的解, 则对应的齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系 【 】

(A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量.

解 已知 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个代数余子式不等于零, 则 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 初步判断 $R(\boldsymbol{A}) \geqslant n-1$.

又 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_4$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的互不相等的解, 即言 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解不唯一, 所以 $\boldsymbol{A}$ 不是满秩的, 得 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant n-1$.

综上得 $R(\boldsymbol{A}) = n-1$, 则齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系仅含一个非零解向量, 故选 (B).

例 4.22 已知 4 元齐次线性方程组(I)为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

又已知另一个 4 元齐次线性方程组(II)的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, -1, a+2, 1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, 2, 4, a+8)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求方程组(I)的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时, 方程组(I)和(II)有非零公共解? 在有非零公共解时, 求出全部非零公共解.

解 (1) 方程组(I)的一个基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_1 = (5, -3, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (-3, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 方程组(I)和(II)有非零公共解, 将(II)的通解 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 代入(I)中, 得

$$\begin{cases} (a+1)\,k_1 = 0, \\ (a+1)\,k_1 - (a+1)\,k_2 = 0. \end{cases}$$

当 $a \neq -1$ 时, $k_1 = k_2 = 0$, $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0}$, 则(I)和(II)无非零公共解;

当 $a = -1$ 时, k_1, k_2 任意, 此时(I)和(II)有非零公共解, 且全部非零公共解为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = k_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

k_1, k_2 为不全为零的任意实数.

例 4.23 已知齐次线性方程组

$$\text{(I)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0, \end{cases} \quad 和 \ \text{(II)} \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)\,x_3 = 0, \end{cases}$$

同解, 求 a, b, c 的值.

解 记两方程组的系数矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$.

因 $\boldsymbol{A}$ 的前两行不成比例, 则 $R(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$, 又 $R(\boldsymbol{B}) \leqslant 2$, 由(I)和(II)同解, 得 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 2$. 所以 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 由

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 - a$$

得 $a = 2$. 对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得(I)的一个基础解系: $(-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, 代入(II), 有

$$\begin{cases} -1 - b + c = 0, \\ -2 - b^2 + c + 1 = 0, \end{cases}$$

得 $b = 1, c = 2$, 或$b = 0, c = 1$.

当 $b = 0, c = 1$ 时, $R(\boldsymbol{B}) = 1$, 从而 (I) 和 (II) 不可能同解. 故 $b = 0, c = 1$ 应舍去.

综上, 当 $a = 2, b = 0, c = 1$ 时, (I) 和 (II) 同解.

注 4.6 注意“同解”和“有公共解”的差异. 若线性方程组同解, 则两者的系数矩阵的秩是相等的.

例 4.24 设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 $m \times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:

① 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解, 则 $R(\boldsymbol{A}) \geqslant R(\boldsymbol{B})$.

② 若 $R(\boldsymbol{A}) \geqslant R(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解.

③ 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解, 则 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

④ 若 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解.

以上命题正确的是 【 】

(A) ①②. (B) ①③. (C) ②④. (D) ③④.

解 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解, 则可以认为前者的基础解系是后者基础解系的一部分, 从而 $n - R(\boldsymbol{A}) \leqslant n - R(\boldsymbol{B})$, 得 $R(\boldsymbol{A}) \geqslant R(\boldsymbol{B})$. 所以 ① 正确.

若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解, 则可以认为两者的基础解系相同, 所以 $n - R(\boldsymbol{A}) = n - R(\boldsymbol{B})$, 得 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$. 知 ③ 正确. (这可以作为一个小的结论.) 选 (B).

②和④犯的是一样的错误. 因为, 由系数矩阵秩的关系, 不能得到方程组解之间的关系.

例 4.25 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a, b, c), a, b, c 不全为零, 矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ (k 为常数), 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 求线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解.

解 a, b, c 不全为零, 则 $R(\boldsymbol{A}) \geqslant 1$. 又 $1 \leqslant R(\boldsymbol{B}) \leqslant 3 - R(\boldsymbol{A})$, 所以 $1 \leqslant R(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$.

(1) 若 $R(\boldsymbol{A}) = 2$. 则 $R(\boldsymbol{B}) = 1$, $k = 9$, 这时 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 于是通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$ (k_1 是任意实数).

(2) 若 $R(\boldsymbol{A}) = 1$. 则 $R(\boldsymbol{B}) = 1$ 或 2.

(i) $R(\boldsymbol{B})=2$, 则 $k\neq 9$, 这时 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 于是通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$, k_1, k_2 是任意实数.

(ii) $R(\boldsymbol{B})=1$, 则 $k=9$, 这时 $\boldsymbol{B}$ 的列向量不能构成方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 由 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$, 得 $ax_1+bx_2+cx_3=0$, 不妨设 $a\neq 0$, 得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 于是通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$, k_1, k_2 是任意实数.

例 4.26 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量, 若 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})$, 则线性方程组 【 】

(A) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有无穷多个解.

(B) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有唯一解.

(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.

(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

解 已知 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})$, 而 $R(\boldsymbol{A})\leqslant n$, 所以 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}<n+1$, 得 $n+1$ 元齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 选 (D).

另外, 由 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\geqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha})\geqslant R(\boldsymbol{A})$, 可得 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha})=R(\boldsymbol{A})$, 只能说明方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 有解, 不能断定解是否唯一, 选项 (A), (B) 都是不恰当的.

§4.2.3 矩阵的秩

例 4.27 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 试证: $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\geqslant n$.

证明 注意到 $R(\boldsymbol{A})=R(-\boldsymbol{A})$, 有

$$\begin{aligned}R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})&=R(-\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\\&\geqslant R\big((-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\big)\\&=R(\boldsymbol{E})=n.\end{aligned}$$

例 4.28 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$. 试证: $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

证明 注意到 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$, 有

$$\begin{aligned}R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})&=R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\\&\geqslant R\big((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\big)\\&=R(2\boldsymbol{E})=n.\end{aligned}$$

又 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, 得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$, 所以

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n.$$

综上得证: $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

例 4.29 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times k$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $k\times m$ 矩阵, 试证: (1) 若 $R(\boldsymbol{A})=k$, 则 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$; (2) 若 $R(\boldsymbol{B})=k$, 则 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{A})$.

证明 (1) 若 $R(\boldsymbol{A})=k$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{m\times m}$, $\boldsymbol{Q}_{k\times k}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}.$$

注意到 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 可逆, 则

$$R(\boldsymbol{AB})=R\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{QB}\right)=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{QB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{QB})=R(\boldsymbol{B}).$$

(2) 同理.

注 4.7 这里的 $\boldsymbol{A}$ 可以称为列满秩矩阵, $\boldsymbol{B}$ 称为行满秩矩阵. 上述结论是矩阵秩的性质 4 的推广.

例 4.30 已知矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$ 及 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$, 则 【　】

(A) $t=6$ 时, $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1.　　(B) $t=6$ 时, $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2.

(C) $t\neq 6$ 时, $\boldsymbol{P}$ 的秩必为‘1.　　(D) $t\neq 6$ 时, $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2.

解 由 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$ 知, $R(\boldsymbol{P})+R(\boldsymbol{Q})\leqslant 3$.

因 $\boldsymbol{Q}$ 是非零矩阵, 且第 1 行和第 3 行线性相关, 知 $R(\boldsymbol{Q})$ 只能是 1 或 2:

$t=6$ 时, $R(\boldsymbol{Q})=1$, $R(\boldsymbol{P})\leqslant 2$;

$t\neq 6$ 时, $R(\boldsymbol{Q})=2$, $R(\boldsymbol{P})\leqslant 1$. 又 $\boldsymbol{P}$ 为非零矩阵, $R(\boldsymbol{P})>0$, 故选 (C).

例 4.31 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1, 则必有 【　】

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$.　　(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$.

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$.　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$.

解 由关系式

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & \text{当 } R(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & \text{当 } R(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & \text{当 } R(\boldsymbol{A})\leqslant n-2.\end{cases}$$

已知 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$, 得 $R(\boldsymbol{A})=2$, 则 $|\boldsymbol{A}|=0$. 计算得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2,$$

所以 $a=b$ 或 $a+2b=0$.

而 $a=b$ 时, 有 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 1$, 不合题意, 所以要求 $a\neq b$. 选 (C).

另解. 直接计算得

$$\boldsymbol{A}^* = (a-b)\begin{pmatrix} a+b & -b & -b \\ -b & a+b & -b \\ -b & -b & a+b \end{pmatrix},$$

当 $a=b$ 时, $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$, 不合题意, 所以必须 $a \neq b$. 故排除 (A), (B). 当 $a=-2b$ 时, 易知 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$. (注意这里的 $a \neq b$ 且 $a+2b=0$, 确保了 $\boldsymbol{A}^*$ 不会是零矩阵.)

第五章　相似矩阵及二次型

矩阵乘以向量, 在功能上相当于把一个向量变换为另一个向量. 一个矩阵的特征向量是这样一种特定的向量, 它经过这种变换后方向不变(或正好反向), 只发生长度上的伸缩. 特征值则反映了特征向量的伸缩倍数(及方向).

§5.1　内容小结

§5.1.1　重点释疑

(一) 怎么理解特征值、特征向量.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘向量 $\boldsymbol{x}$, 其结果是一个同维数的向量, 比如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{Ax}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix},$$

可见矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘向量 $\boldsymbol{x}$, 相当于把向量 $\boldsymbol{x}$ 作了一个变换, 把 $\boldsymbol{x}$ 转到了一个新的位置, 而且长度也发生了变化. 这里 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 与变换之后的结果 $(3,4,7)^{\mathrm{T}}$ 看不出有什么关联, 但是, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘某些特定的向量 $\boldsymbol{x}$, 会出现比较特别的现象, 就是乘积的结果相当于把向量 $\boldsymbol{x}$ 在原方向伸缩或反方向伸缩, 即

$$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x},$$

具有这种特点的向量, 就称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 数 λ 反映了伸缩的倍数及方向, 称为与 $\boldsymbol{x}$ 对应的特征值.

比如 $\boldsymbol{x}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量:

$$\boldsymbol{Ax_1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\boldsymbol{x}_1,$$

$$\boldsymbol{Ax_2}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{x}_2.$$

一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一旦产生, 那么 n 维空间[1] 的某处就存在着一些向量, 它们与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有着一种天然的内在联系: $\boldsymbol{A}$ 乘以这些向量相当于只是把这些向量在原方向或反方向上伸长或缩短.

特征值、特征向量的专业词汇分别是 eigenvalue, eigenvector. eigen 是德文词汇, 意思是自己的, 特有的. eigen 一词很恰当地反映了矩阵和其特征向量的天然联系和隶属性. 特征值在一些教材里称为"本征值", 这个翻译比较贴近 eigenvalue 的本意.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘零向量总是等于零向量的, 所以, 讨论特征向量时, 是把零向量排除在外的. 请牢记: 零向量不是特征向量; 特征向量是非零向量.

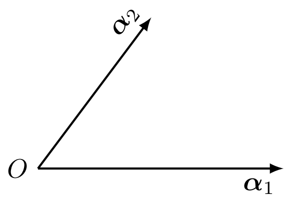
---

[1]准确地讲, 应该是 n 维复向量空间. 因为方阵在实数域上不一定总有特征值. 比如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\lambda^2+1$, 在实数域上无根, 故 $\boldsymbol{A}$ 在实数域上无特征值. 教材也讲明了: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在复数范围内有 n 个特征值.

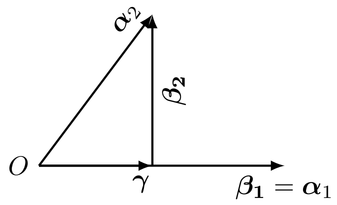
(二) 施密特正交化方法怎么理解.

以三维空间为例. 设有不共面的三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$, 由这三个向量, 我们构造一组两两正交的向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$.

设有两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 如图 5.1(a).



(a)



(b)

图 5.1

先直接取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$, 如图 5.1(b).

记 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影向量为 $\boldsymbol{\gamma}$, 则可令 $\boldsymbol{\beta}_2 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\gamma}$, 使得 $\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1$. 下面给出 $\boldsymbol{\gamma}$ 的表达式.

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影为:

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1} \boldsymbol{\alpha}_2 = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}) = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \frac{[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \frac{[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影向量为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1} \boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \frac{[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \frac{[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1]}\boldsymbol{\alpha}_1. \tag{5.1}$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1]}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1.$$

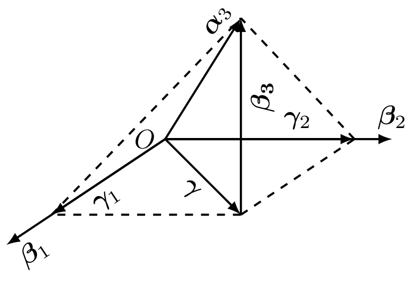


图 5.2

记 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在平面的投影向量为 $\boldsymbol{\gamma}$, 若令 $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$, 则 $\boldsymbol{\beta}_3$ 垂直于 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在的平面, 从而 $\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_2$, 如图 5.2.

记 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 上的投影向量分别为 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$, 则 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2$. 与 (5.1) 式同理有

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1, \qquad \boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2.$$

对一般的 n 维空间, 其施密特正交化公式可以类似地理解和记忆.

(三) 为什么要强调正交变换.

本章的知识是为二次型化标准形服务的. 线性代数主要讨论线性函数, 二次型按理不在讨论之列, 但二次型化标准形可以转化为矩阵的问题, 是矩阵的一个应用.

把二次型化为标准形, 可以方便地研究其性质. 例如中心是原点的二次曲线 $x^2-xy+y^2=4$, 让曲线绕原点旋转适当角度, 令

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

可以使它化为标准形

$$\frac{x'^2}{8}+\frac{y'^2}{\frac{8}{3}}=1,$$

从这个标准形, 我们容易识别曲线的类别, 研究曲线的性质. 为使曲线在旋转过程中保持形状不变, 要求使用正交变换.

不使用正交变换, 也可以把二次型 x^2-xy+y^2 标准化. 比如, 由 $x^2-xy+y^2=(x-\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2$, 令 $x'=(x-\frac{1}{2}y)$, $y'=\frac{\sqrt{3}}{2}y$, 得 $x'^2+y'^2=4$. 很显然, 这种非正交的变换, 改变了曲线的形状.

(四) 特征值性质的证明.

下面证明重要性质: $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$; $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$.

在特征多项式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

的展开式中, 有一项是主对角线上元素的连乘积:

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda),$$

展开式中的其余各项, 至多包含 $n-2$ 个主对角线上的元素, 它们对 λ 的次数最多是 $n-2$.

因此特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现, 它们是

$$(-1)^n\lambda^n+(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})(-\lambda)^{n-1}.$$

因此, 如果只写出特征多项式展开式的前两项与常数项, 则有

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+|\boldsymbol{A}|.$$

令 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$, 则

$$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|=0. \tag{5.2}$$

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程的根, 则

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=0, \tag{5.3}$$

如果只写出 (5.3) 式前两项与常数项, 则有

$$\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=0. \tag{5.4}$$

比照 (5.4) 式与 (5.2) 式, 得

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn};\qquad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|.$$

(五) 例题 12 的说明.

教材 P.125 例题 12 给出了对称矩阵正交对角化的示例. 这是本章基本而重要的题型, 强调几点要注意的事项. 为表述方便, 把例题的主要内容罗列如下:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},$$

特征值为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

对应 $\lambda_1=-2$ 的特征向量取为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的线性无关的特征向量取为 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 正交化得 $\boldsymbol{\eta}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{2}(1,1,2)^{\mathrm{T}}$. 再单位化得 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

取正交矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, 得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}.$$

(1) 要看清楚题目的要求. 如果没有要求 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 则作一般的对角化即可, 即取

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}.$$

(2) 正交化过程只出现在重根特征值对应的特征向量. 因为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是正交的, 所以只需要将重根特征值对应的特征向量进行施密特正交化, 而无需将 $\boldsymbol{A}$ 所有的特征向量放在一起正交化.

(3) $\boldsymbol{P}$ 中 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 的排列顺序要和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角元素 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的排列顺序一致. 比如若取

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

则由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_3)=(\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_3\boldsymbol{p}_3)=(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_3)\,\mathrm{diag}(\lambda_2,\lambda_1,\lambda_3)$, 得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}.$$

(4) 正交化过程其实是可以避免的: 对重根求对应方程组的基础解系时, 可以直接凑出一组正交的基础解系. 对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$, 求解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时, 得同解方程 $x_1+x_2-x_3=0$(见教材 P.125), 下面构造一组正交的基础解系: 若取 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,\square,-1)^{\mathrm{T}}$, 又要满足方程, 所以 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$, 从而得到一组正交的基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}.\tag{5.5}$$

类似地, 还可以取

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\xi}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}.\tag{5.6}$$

或者 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(-2,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 等等.

(5) 满足条件的正交阵不是唯一的(即便我们忽略 $\boldsymbol{P}$ 中 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 的排列顺序). 把 (5.5) 式中的向量单位化得

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)^{\mathrm{T}},$$

从而得满足条件的正交阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

把 (5.5) 式中的向量单位化得满足条件的正交阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

§5.1.2 重要结论

(一) 特征值、特征向量的性质.

(1) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值, 则
  (a) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;
  (b) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$.

(2) 设 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的特征向量, 则
  (a) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\lambda_0\neq 0$, 且 $\dfrac{1}{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值; $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.
  (b) $k\lambda_0$ 为 $k\boldsymbol{A}$ 特征值; λ_0^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 特征值.
  (c) $\varphi(\lambda_0)$ 是矩阵多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 其中

$$\varphi(\lambda_0)=a_m\lambda_0^m+\cdots+a_1\lambda_0+a_0,$$

$$\varphi(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}.$$

而且 $\boldsymbol{x}$ 仍然是矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^*$, $k\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^m$, $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的分别对应于特征值 $\dfrac{1}{\lambda_0}$, $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$, $k\lambda_0$, λ_0^m, $\varphi(\lambda_0)$ 的特征向量.

(3) 特征向量之间的关系:
  (a) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的. (教材 P.120 定理 2.)
  (b) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异特征值, 对应于 λ_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 的线性无关的特征向量有 r_i 个, 则由所有这些特征向量(共 $r_1+r_2+\cdots+r_m$ 个)构成的向量组是线性无关的. (后文的例题 5.9 是这个的结论的简单情形.)

(c) 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是两两正交的. (教材 P.124 定理 6.)

(4) 特征值所对应的特征向量的个数:

(a) 每个特征值都对应着至少一个特征向量.

(b) k 重特征值对应的线性无关的特征向量的个数不超过 k.

(c) 若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值对应的线性无关特征向量的个数恰好等于该特征值的重数.(教材 P.124 定理 7 的推论.)

这几个结论可用来初步排除计算中的错误, 比如单根却对应着多个线性无关的特征向量, 或者 $(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中向量的个数超过了 λ_0 的重数, 等等.

(5) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 0 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(二) 正交矩阵的性质.

$$
\begin{aligned}
&\text{方阵 } \boldsymbol{A} \text{ 为正交矩阵}\\
\Longleftrightarrow\ & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\\
\Longleftrightarrow\ & \boldsymbol{A} \text{ 可逆, 且 } \boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}\\
\Longleftrightarrow\ & \boldsymbol{A} \text{ 的行(列)向量组两两正交, 且都是单位向量}\\
\Longleftrightarrow\ & \boldsymbol{A} \text{ 的行(列)向量组是一组规范正交基.}
\end{aligned}
$$

若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$; 其特征值 λ 满足 $|\lambda|=1$. 正交变换具有保持向量的内积、长度、夹角不变的特性.

(三) 矩阵对角化.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值对应的线性无关特征向量的个数等于该特征值的重数.

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化. 此条件是充分的, 但不是必要的.

矩阵对角化这个问题非常重要. 教材上的例题和习题已经很好了(P.123 例题 11, P.135 习题 15, 16, 20, 21, 22), 后面不再给出相应的题型.

(四) 对称矩阵正定的充要条件.

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的 $\Longleftrightarrow$ 二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式都为正.

(五) 等价、相似、合同、正交相似.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Longleftrightarrow$ 存在 m 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵,

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似 $\Longleftrightarrow$ 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同 $\Longleftrightarrow$ 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交相似 $\Longleftrightarrow$ 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

等价、相似、合同、正交相似的区别和联系:

- 等价的矩阵不必是方阵, 后面三个都是方阵之间的关系.
- 相似、合同、正交相似都是等价的一种; 正交相似关系最强, 等价关系最弱.
- 相似与合同没有什么关系, 仅当 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵时, 有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, 这时相似与合同是一致的.

§5.2 题型举例

§5.2.1 特征值与特征向量

例 5.1 判断正误:

(i) 设 λ_0 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 如果方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(ii) 矩阵的特征向量不是零向量, 同样地, 矩阵的特征值也不为零.

(iii) 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 重特征值, 对应于 λ 的线性无关的特征向量的个数一定也为 k.

(iv) 相似的矩阵有相同的特征值, 所以它们的特征向量也相同.

(v) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值.

(vi) 所有 n 阶正定矩阵都是合同的.

解 (i) 错. 必须指明 k_1, k_2 不全为零. (很小的一个细节, 但是很多人解题时忘了加这句话, 以为只是在解方程组.)

(ii) 错. 特征向量不是零向量, 但特征值有可能为零(当矩阵不可逆时).

(iii) 错. 每个特征值对应的线性无关特征向量的个数小于等于该特征值的重数.

(iv) 错. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}^{-1}\lambda_0\boldsymbol{x}=\lambda_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}),$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$. (注意这个结论.)

(v) 错. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量. 若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则可对角化. 反之不成立. 见教材 P.123 定理 4 的推论.

(vi) 对. 因它们都合同于 n 阶单位矩阵.

例 5.2 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 3, λ. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}|=-48$, 则 $\lambda=$____________.

解 $|2\boldsymbol{A}|=2^3|\boldsymbol{A}|=8\times(2\times3\times\lambda)=-48$, 所以 $\lambda=-1$.

例 5.3 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 2, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 则 $\left|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}\right|=$____________.

解 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值, $4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\frac{4}{\lambda}-1$. 所以 $4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 的全部特征值为 3, 1, 1. 得 $\left|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}\right|=3\times1\times1=3$.

例 5.4 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同. 若行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为____________.

解 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化, 即 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 相似, 进而, $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$, $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\Lambda})$.

行列式 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$, 则 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 至少有一个为零, 而这三者互不相同, 所以只有一个为零. 不妨设 $\lambda_3=0$, 则 $\lambda_1\neq0$, $\lambda_2\neq0$, 得 $R(\boldsymbol{\Lambda})=2$. 所以 $R(\boldsymbol{A})=2$.

例 5.5 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

证明 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似, 所以 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

例 5.6 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量, 试证:

(1) $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值, 这里假定 $\boldsymbol{A}$ 可逆;

(2) λ^m 是矩阵 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值; $\boldsymbol{A}^m$ 对于 λ^m 特征向量是 $\boldsymbol{x}$.

证明 (1) 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x},\quad 即\quad |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{x},$$

即 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

(2) 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}^{n-1}$, 反复利用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 得到

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{m-1}\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\big) = \lambda\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{x} = \cdots = \lambda^m\boldsymbol{x}.$$

上式表明 λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值; $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量 $\boldsymbol{x}$ 同时是 $\boldsymbol{A}^m$ 的属于 λ^m 的特征向量.

例 5.7 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, 其行列式 $|\boldsymbol{A}| = -1$, 又 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0, 属于 λ_0 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha} = (-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 求 a,b,c 和 λ_0 的值.

解 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}$ 两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \quad 即 \quad |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},$$

得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}\boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{\lambda_0}\boldsymbol{\alpha}$, 即

$$\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+c+1 \\ -b-2 \\ -a+c-1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\lambda_0}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

得

$$\frac{-a+c+1}{-1} = \frac{-b-2}{-1} = \frac{-a+c-1}{1},$$

所以 $a = c$, 且 $b = -3$. 代入 (5.7), 得 $\lambda_0 = 1$. 代入 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 得

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1-a & 1-a & -a \end{vmatrix} = a-3 = -1,$$

所以 $a = c = 2$. 因此 $a = 2$, $b = -3$, $c = 2$, $\lambda_0 = 1$.

例 5.8 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 -1, 1 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(II) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

解 (I) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}. \tag{5.8}$$

在上式两边左乘 $\boldsymbol{A}$, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 得 $-x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{0}$, 即

$$-x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_2 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}. \tag{5.9}$$

将 (5.9) 式减去 (5.8) 式, 得

$$-2x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_3\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0}.$$

$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值对应的特征向量, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 得 $x_1 = x_3 = 0$. 代入 (5.8) 式, 得 $x_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$.

注意到特征向量是非零向量, $\boldsymbol{\alpha}_2 \neq \mathbf{0}$, 所以只能是 $x_2 = 0$.

得证 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(II) 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3) = (-\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3)\\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 知 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆, 所以

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

注 5.1 注意题目没有说向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 否则会设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \lambda\boldsymbol{\alpha}_3$ 导致错误的思路.

例 5.9 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个实特征值 λ_1, λ_2, λ_3, 且满足 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, 如果 λ_1 对应两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$, λ_3 对应一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$, 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证明 设有 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{5.10}$$

则 $\boldsymbol{A}k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{A}k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{A}k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$, 即

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}. \tag{5.11}$$

用 λ_1 乘以 (5.10) 式, 然后与 (5.11) 式相减, 并注意到 $\lambda_1 = \lambda_2$, 得

$$k_3(\lambda_3 - \lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{5.12}$$

因 $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$, 特征向量为非零向量, 则 (5.12) 式中 $k_3 = 0$. 再返回 (5.10) 式, 得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则 $k_1 = k_2 = 0$, 于是 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. 即 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

另证 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{5.13}$$

假设 $k_3 \neq 0$. 则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合, 不妨记 $\boldsymbol{\alpha}_3 = c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2) = c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = c_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2) = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_3,$$

得 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 λ_1 所对应的特征向量. 与题设矛盾, 所以假设不成立. 即只能是 $k_3 = 0$, 代入 (5.13) 式得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 又 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 得 $k_1 = k_2 = 0$.

综上, 要使 (5.13) 式成立, 只能是 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 得证 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

§5.2.2 实对称矩阵的特征值和特征向量

例 5.10 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 特征向量. 记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 (I) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$, 知

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=(\lambda_1^5-4\lambda_1^3+1)\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征向量.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_1, λ_2, λ_3, 则 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $\lambda_i^5-4\lambda_i^3+1$ $(i=1,2,3)$, 即 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $-2,1,1$.

前面已经验证了 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -2 的一个特征向量, 故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -2 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$, 其中 k_1 是不为零的常数.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{B}$ 也是实对称矩阵. 设 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的属于 1 的特征向量. 因为实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交, 所以 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0$, 即

$$x_1-x_2+x_3=0.$$

解得该方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 1 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 其中 k_2, k_3 是不全为零的常数.

(II) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 得

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(-2,1,1)$, 所以

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

例 5.11 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$, 求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量.

解 若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 相似, 二者特征值相同. 进而, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2$. 由于

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&2\\2&3-\lambda&2\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}(7-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\1&3-\lambda&2\\1&2&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-r_1]{r_3-r-1}(7-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=7$, $\lambda_2=\lambda_3=1$, 且 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=7$. 得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相应为: 1, 7, 7. $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值相应为: 3, 9, 9.

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{Ax}=\lambda_0\boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}),$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$, 进而, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的对应于特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}+2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$.

当 $\lambda_1=7$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-7\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-7\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\overset{r_3+r_1+r_2}{\underset{r_1+2r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}0&-6&6\\2&-4&2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1+2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-7\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

又

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的对应于 $\lambda=3$ 的全部特征向量为 $k_1(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, k_1 为非零常数; $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的对应于 $\lambda=9$(二重) 的全部特征向量为 $k_2(1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, k_2, k_3 是不全为零的常数.

例 5.12 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(I) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(II) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解 (I) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 即

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以 3 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 3 的特征向量.

又 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0 的特征向量.

因此, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3, 0, 0. $\lambda=3$ 对应的特征向量为 $k(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, k 为非零常数; $\lambda=0$ 对应的特征向量为 $k_1(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$, k_1, k_2 不全为零.

(II) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 要得到一组正交向量, 只需要将 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化. 取

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

单位化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}$.

例 5.13 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 已知 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}) = 2$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

(2) 当 k 为何值时, 矩阵 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

解 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应于 λ 的特征向量, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$, 则 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = \lambda^2\boldsymbol{\alpha}$, 由 $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 得

$$(\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = (\lambda^2 + 2\lambda)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}.$$

注意到 $\boldsymbol{\alpha}$ 是特征向量, $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, 所以

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0,$$

得 $\lambda = -2$ 或 $\lambda = 0$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 必可以相似对角化, 设 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则 $R(\boldsymbol{\Lambda}) = R(\boldsymbol{A}) = 2$, 进而有

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & 0\end{pmatrix}.$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$.

(2) 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $-2,-2,0$, 相应地 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $-2+k$, $-2+k$, k. 对称矩阵 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵的充要条件是特征值全为正, 所以 $k > 2$ 时 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

§5.2.3 判别正定性

例 5.14 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵, 证明 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| > 1$.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 的全部特征值为 $\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \cdots, \lambda_n + 1$. 由 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 故特征值全大于 0, 所以

$$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)\cdots(\lambda_n + 1) > 1.$$

例 5.15 若 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 正定, 则 $a_{ii} > 0$, $i = 1,2,\cdots,n$. 若 $\boldsymbol{A}$ 是负定矩阵, 则 $a_{ii} < 0$, $i = 1,2,\cdots,n$.

证明 若 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定, 则二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定. 取 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, 则

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=a_{ii}>0.$$

同理可证 $\boldsymbol{A}$ 是负定矩阵, 则 $a_{ii}<0$.

例 5.16 已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 是实反对称矩阵, 即满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 试证 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵.

证明 先说明 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2$ 为实对称矩阵. 事实上

$$\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-(-\boldsymbol{A})(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2.$$

又对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,$$

得二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{x}$ 为正定, 所以矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2$ 为正定矩阵.

§5.2.4 正交矩阵

例 5.17 已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 求向量 $(a,b,c,d,e)^{\mathrm{T}}$.

解 答案: $\left(-\frac{6}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7},\frac{3}{7},-\frac{6}{7}\right)^{\mathrm{T}}$ 或 $\left(-\frac{6}{7},\frac{2}{7},-\frac{6}{7},-\frac{3}{7},-\frac{6}{7}\right)^{\mathrm{T}}$. 解题依据: 正交矩阵的各行(列)为单位向量, 而且两两正交.

§5.3 矩阵简史

“矩阵”(matrix)这个词是由西尔维斯特(J. J. Sylvester, 1814–1897, 英国) 在 1848 年首先使用的, 他是为了将数字的矩形阵列区别于行列式而引入了这个术语. matrix 一词来源于拉丁语, 代表一排数.

凯莱(Arthur Cayley, 1821–1895, 英国) 一般被认为是矩阵论的创立者, 他首先把矩阵作为一个独立的数学概念提出来, 并发表了关于这个问题的一系列文章. 凯莱研究了线性变换的组成并提出了矩阵乘法的定义, 使得复合变换 $\boldsymbol{ST}$ 的系数矩阵变为矩阵 $\boldsymbol{S}$ 和矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的乘积. 1858 年, 他发表了关于矩阵的第一篇论文《矩阵论的研究报告》, 系统地阐述了关于矩阵的理论. 文中他定义了矩阵的相等、矩阵的运算法则、矩阵的转置以及矩阵的逆等一系列基本概念, 指出了矩阵加法的可交换性与可结合性. 另外, 凯莱还给出了方阵的特征方程、特征值的一些基本结果, 提出著名的 Cayley-Hamilton 理论: 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程中, 以 $\boldsymbol{A}$ 代替变量, 则得到一个零矩阵.[2]

在矩阵论的发展史上, 弗罗贝纽斯(F. G. Frobenius, 1849–1917, 德国) 的贡献是不可磨灭的. 他讨论了最小多项式问题, 引进了矩阵的秩、不变因子和初等因子、正交矩阵、矩阵的相似变换、合同矩阵等概念, 以合乎逻辑的形式整理了不变因子和初等因子的理论, 并讨论了正交矩阵与合同矩阵的一些重要性质. 1854 年, 约当(C. Jordan, 1838–1922, 法国) 研究了矩阵化为约当标准型的问题.

矩阵本身所具有的性质依赖于元素的性质, 矩阵由最初作为一种工具经过两个多世纪的发展, 现在已成为独立的一门数学分支 —— 矩阵论.

矩阵的发展是与线性变换密切相连的. 到 19 世纪它还仅占线性变换理论中有限的空间. 二次世界大战后随着现代数字计算机的发展, 矩阵又有了新的含义, 特别是在矩阵的数值分析等方面. 由于计算机的飞速发展和广泛应用, 许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决. 作为处理离散问题的线性代数, 成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础.

[2]见教材 P.122 提到的“一个很有趣的结论”.

第六章　总结

如果非要给这本书加一个副标题, 我希望是 ——《一个方程组引发的故事》.

§6.1　全书概览

我们现在使用的教材是工程数学《线性代数》, 是线性代数学科的比较基础的部分. 这一部分的中心是围绕"用高斯消元法求解线性方程组"的问题展开的. 全书中心的例子其实是第三章的 P.57 的引例.

第一章的中心可以认为是克拉默法则, 前面的行列式讨论是为克拉默法则作铺垫的.

高斯消元法的过程, 可以简单地表示为方程组的增广矩阵的初等行变换, 这自然引出了对矩阵的专门讨论. 方程组经过高斯消元法总是会稳定地保留一定数量的方程, 这就对应着秩的问题. 矩阵的细部是向量, 更进一步讨论向量的线性表示、线性相关性才说明了, 为什么矩阵的初等行变换中有一些行会被变为零, 为什么消元法解方程时有的方程会被消掉. 最大无关组的概念才真正解释了, 为什么消元法解方程组时保留下来的方程个数是稳定不变的.

既然中心的议题是解方程组, 那么关于线性方程组解的理论要非常清楚, 比如"$n-r$"的含义, 有解无解的充要条件.

§6.2　要点 TOP 10

下面的要点列为 TOP 10 是因为其理论重要性、易错等原因.

(I) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

(II) 矩阵乘法不满足交换律、消去律.

(III) 矩阵秩的性质 $5 \sim 8$.

(IV) 特征值性质: $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$; $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \big|\boldsymbol{A}\big|$.

(V) 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则矩阵多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $\varphi(\lambda)$.

(VI) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-r$ 个线性无关的解构成.

(VII) 线性方程组有解、无解的充要条件.

(VIII) 矩阵对角化的充要条件.

(IX) 伴随矩阵的定义, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

(X) 初等变换不改变矩阵的秩.

§6.3　例题 TOP 5

教材上的例子, 如下几个在方法上特别重要:

(I) P.75 第三章例题 13, 带参量的线性方程组解的讨论. 特别重视解法二.

(II) P.123 第四章例题 11, 矩阵对角化. 综合了矩阵对角化的充要条件、"$n-r$"结论.

(III) P.65 第三章例题 3, 用初等变换法解矩阵方程. 题目没有难度, 但是很多人没有接受这个简便的解法.

(IV) P.100 第四章例题 13, 证明矩阵秩的性质 8. $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 则视 $\boldsymbol{B}$ 的列为方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解, 这个观念很重要.

(V) P.120 第五章例题 9, 特征值性质的应用. 或见 P.135 习题 12, 13, 是近些年考研极常见的题型.

§6.4 综合题型

例 6.1 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 且 $|\boldsymbol{A}|=5$, 又设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_3,5\boldsymbol{\alpha}_2)$, 则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

解 $|\boldsymbol{B}|=\big|\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_3,5\boldsymbol{\alpha}_2\big|=5\big|\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2\big|=5\big|\boldsymbol{\alpha}_1,3\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2\big|=5\big|\boldsymbol{\alpha}_1,4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2\big|=20\big|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2\big|=-20\big|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\big|=-100$.

例 6.2 设 $\boldsymbol{A}=(2\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$, $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 为 4 维列向量, 已知 $|\boldsymbol{A}|=4$, $|\boldsymbol{B}|=1$, 则 $|\boldsymbol{C}|=$________.

解 行列式 $|\boldsymbol{C}|$ 按第一列裂开, 得 $|\boldsymbol{C}|=\big|(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)\big|=\big|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)\big|+\big|(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)\big|$. 而 $|\boldsymbol{A}|=\big|(2\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4)\big|=2^4\big|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)\big|$, 所以 $\big|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)\big|=\frac{1}{4}$, 得 $|\boldsymbol{C}|=\frac{5}{4}$.

例 6.3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\qquad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$, 那么 $|\boldsymbol{B}|=$________.

解 因为

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},$$

所以

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&3&8\end{vmatrix}=2.$$

例 6.4 设 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为常数 a, 试证: (1) $a\neq 0$; (2) 逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的各行元素之和为 $\frac{1}{a}$.

证明 (1) 因 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为常数 a, 把行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的各列加到第一列, 则第一列元素全为 a, 且行列式的值不变. 若 $a=0$, 会导致 $|\boldsymbol{A}|=0$, 与 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵矛盾, 所以 $a\neq 0$.

(2) 用 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 表示行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 对应的代数余子式, 有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{21}&\cdots&\boldsymbol{A}_{n1}\\\boldsymbol{A}_{12}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{1n}&\boldsymbol{A}_{2n}&\cdots&\boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 i 行元素之和为 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}_{1i}+\boldsymbol{A}_{2i}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ni})$. 下面证明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第一行元素之和为 $\frac{1}{a}$, 其它各行同理. 由

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}a\begin{vmatrix}1&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\1&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{展开}c_1}a(\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21}+\cdots+\boldsymbol{A}_{n1}),$$

得 $\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21}+\cdots+\boldsymbol{A}_{n1}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{a}$, 所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第一行元素之和为

$$\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\left(\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21}+\cdots+\boldsymbol{A}_{n1}\right)=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\frac{|\boldsymbol{A}|}{a}=\frac{1}{a}.$$

例 6.5 若 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则行列式 $\left|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}\right|=$________.

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则特征值相同. 所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的特征值为 2, 3, 4, 5. 从而 $\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为 1, 2, 3, 4. 得 $\left|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}\right|=1\times 2\times 3\times 4=24$.

例 6.6 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵, 当 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 时, 证明 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

证明 由于 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 根据 $\boldsymbol{A}^*$ 的定义有

$$\boldsymbol{A}_{ij}=a_{ij},\quad i, j=1,2,\cdots,n.$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵, 至少有一个元素非零, 不妨设第 i 行有元素 $a_{ij}\neq 0$, 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 i 行展开, 得

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2>0,$$

得证 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

例 6.7 计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

解

$$D^2=D\cdot D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \delta & & & \\ & \delta & & \\ & & \delta & \\ & & & \delta \end{vmatrix}=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4.$$

其中 $\delta=a^2+b^2+c^2+d^2$, 所以

$$D=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2.$$

例 6.8 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}|<0$, 求 $\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|$.

解 因为

$$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|=\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=\left|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|\cdot\left|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|\cdot\left|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|\cdot\left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right|,$$

所以

$$\left(1-|\boldsymbol{A}|\right)\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|=0.$$

又 $|\boldsymbol{A}|<0$, 则 $\left(1-|\boldsymbol{A}|\right)\neq 0$, 所以 $\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|=0$.

例 6.9 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实方阵, 证明: 若 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$, 而 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 不相似于对角阵.

证明 设 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 则 λ^k 为矩阵 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值, 对应的特征向量也为 $\boldsymbol{x}$, 即有

$$\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x} = \lambda^k \boldsymbol{x}. \tag{6.1}$$

若 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{O}$, 代入 (6.1) 得 $\lambda^k \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 而特征值为非零向量, 所以只能有 $\lambda^k = 0$, 得 $\lambda = 0$.

当 $\lambda = 0$ 时, 对应的特征方程为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 因 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$, $R(\boldsymbol{A}) > 0$, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系包含的向量个数为 $n - R(\boldsymbol{A}) < n$, 所以对应于 $\lambda = 0$ 的特征向量不到 n 个, 从而 $\boldsymbol{A}$ 没有 n 个线性无关的特征向量, 得证 $\boldsymbol{A}$ 不相似于对角阵.

例 6.10 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{E}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 是正定的矩阵.

证明 设 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 则 $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 3$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有

$$(\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

注意到特征向量是非零向量, 则只能有

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 3 = 0, \quad 即 \quad (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 3) = 0.$$

因实对称矩阵的特征值为实数, 所以只能有 $\lambda = 1$. 得 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda = 1$(n 重).

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为正数, 得证 $\boldsymbol{A}$ 是正定的矩阵.

本文档使用 LaTeX 软件排版制作. 秉承自由软件之精神, 请您确认该文档的获得, 无需支付任何形式的费用或虚拟货币.

本文的更新下载地址: http://aff.whu.edu.cn/huangzh/.

HUANG Zhenghua
Email: huangzh@whu.edu.cn