第三讲　函数的单调性与值域

KE QIAN XUE SHENG DU YU CE

课前学生读与测

读　知识与方法梳理

1．单调性的定义

一般地，设函数$f(x)$的定义域为Ⅰ.

如果对于定义域Ⅰ内某个区间D上的<u>任意两个自变量的值x_1，x_2</u>，当$x_1<x_2$时，都有<u>$f(x_1)<f(x_2)$</u>，那么就说函数$f(x)$在区间D上是增函数.

如果对于定义域Ⅰ内某个区间D上的__任意两个自变量的值x_1，x_2__，当$x_1 < x_2$时，都有__$f(x1) > f(x2)$__，那么就说函数$f(x)$在区间D上是减函数.

如果函数$y=f(x)$在区间D上是__增函数或减函数__，那么就说函数$y=f(x)$在这一区间具有(严格的)__单调性__，区间D叫做$f(x)$的单调区间.

2．函数单调性的应用

(1)比较大小；　　(2)求函数的值域或最值；

(3)解、证不等式；　　(4)作函数的图象．

3．证明函数单调性的方法

(1)定义法(基本方法)：其一般步骤是：①取值：设x_1、x_2为所给区间内D的任意两个值，且$x_1 < x_2$；②作差(正值可作商)：$f(x_1)-f(x_2)$；③变形；④定号；⑤结论．

(2)导数法：①求导$f'(x)$；②判断$f'(x)$在区间Ⅰ上的符号；③结论：$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$在Ⅰ上为＿＿增函数＿＿，$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$在Ⅰ上为＿＿＿＿．减函数

4．判断函数单调性的方法

(1)定义法；

(2)求导法；

(3)利用已知函数的单调性；

(4)利用图象．

5．复合函数的单调性

对于复合函数$y=f[g(x)]$，若$t=g(x)$在区间$(a，b)$上是单调函数，且$y=f(t)$在区间$(g(a)，g(b))$或者$(g(b)，g(a))$上是单调函数；若$t=g(x)$与$y=f(t)$的单调性相同(同时为增或减)，则$y=f[g(x)]$为__增函数__；若$t=g(x)$与$y=f(t)$的单调性相反，则$y=f[g(x)]$为__减函数__．简称为：同增异减．

6．函数的最大(小)值

(1)定义：设函数$y=f(x)$的定义域为I，如果存在实数M满足：

①对于任意的$x\in I$，都有$f(x)\leq M(f(x)\geq M)$.

②存在$x_0\in I$，使得$f(x_0)=M$.那么，我们称M是函数$y=f(x)$的最大值(最小值).

(2)求法：

①配方法；②判别式法；③不等式法；④换元法；⑤数形结合；⑥单调性法.

(3)求最值时注意的问题

①求函数最值的方法，实质与求函数值域的方法类似，只是答题方式有差异.

②无论何种方法求最值，都要考虑“＝”能否成立.

7．函数的值域

(1)函数的值域的概念

在函数$y=f(x)$中，与自变量x的值对应的y的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域.

(2)确定函数值域的原则

①当函数$y=f(x)$用列表法给出时，函数的值域是指表格中实数y的集合.

②当函数$y=f(x)$由图象给出时，函数的值域是指图象在y轴上的投影所覆盖的实数y的集合.

③当函数$y=f(x)$用解析式给出时，函数的值域由函数的定义域及其对应法则唯一确定.

④当函数由实际问题给出时，函数的值域还应考虑问题的实际意义.

测

1．如果函数$f(x)=x^2+2(a-1)x+2$在区间$(-\infty，4]$上是减函数，则实数a的取值范围是(　　)

A．$[-3，+\infty)$　　B．$(-\infty，-3]$

C．$(-\infty，5]$　　D．$[3，+\infty)$

[解析]　$f(x)=x^2+2(a-1)x+2$的对称轴为$x=1-a$，

∴$f(x)$在$(-\infty，1-a]$上是减函数，

要使$f(x)$在区间$(-\infty，4]$上是减函数，

则只需$1-a\geq 4$，即$a\leq -3$.

[答案]　B

2．(2010·广州一模)已知函数 $f(x)=\begin{cases}(a-2)x-1, & x\leqslant 1, \\ \log_a x, & x>1.\end{cases}$ 若 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，则实数 a 的取值范围为(　　)

A．$(1,2)$　　B．$(2,3)$

C．$(2,3]$　　D．$(2,+\infty)$

[答案]　C

3．(2010·山东文数)函数$f(x)=\log_2(3^x+1)$的值域为(　　)

A．$(0,+\infty)$　　B．$[0,+\infty)$

C．$(1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

[答案]　A

KE NEI SHI SHENG JIANG YU XUE

课内师生讲与学

主要题型研究

题型1 判断或证明函数的单调性

例1 用函数单调性的定义证明 $f(x)=x+\frac{2}{x}$在$(\sqrt{2}，+\infty)$上是增函数.

[证明]　任取 x_1，$x_2 \in (\sqrt{2}，+\infty)$，且 $x_1 < x_2$，

则 $f(x_1) - f(x_2) = x_1 + \frac{2}{x_1} - x_2 - \frac{2}{x_2}$

$= (x_1 - x_2) + 2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_2 x_1} = (x_1 - x_2)(1 - \frac{2}{x_1 x_2})$.

$\because x_2 > x_1 > \sqrt{2}$　$\therefore x_1 - x_2 < 0$，$x_1 x_2 > 2$

$\therefore 1 - \frac{2}{x_1 x_2} > 0$

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$

$\therefore f(x)$在$(\sqrt{2}，+\infty)$上是增函数.

[点评与警示]　用定义证明函数的单调性就是在定义域内取任意两数x_1，$x_2(x_1<x_2)$，再证$f(x_1)-f(x_2)<0$或$f(x_1)-f(x_2)>0$.这通常需要将$f(x_1)-f(x_2)$分解成几个可判断符号的式子的乘积.

◆变形思考1

讨论函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$的单调性.

[解]　$f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$

∵定义域为$\{x|x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 0\}$，

且 $f(-x)=-x+\frac{a}{-x}=-(x+\frac{a}{x})=-f(x)$.

∴$f(x)$为奇函数，所以先讨论 $f(x)$在$(0,+\infty)$上的单调性.

设 $x_2>x_1>0$，则

$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{a}{x_1}-x_2-\frac{a}{x_2}$

$=(x_1-x_2)(1-\frac{a}{x_1x_2})$.

∵当 $0<x_1<x_2\leqslant\sqrt{a}$时，恒有$\frac{a}{x_1x_2}>1$，则 $f(x_1)-f(x_2)>0$，∴$f(x_1)>f(x_2)$故 $f(x)$在$(0,\sqrt{a}]$上是减函数.

当 $x_2>x_1\geqslant\sqrt{a}$时，恒有 $0<\frac{a}{x_1x_2}<1$，则 $f(x_1)-f(x_2)<0$.∴$f(x_1)<f(x_2)$故 $f(x)$在$[\sqrt{a},+\infty)$上是增函数.

∵$f(x)$是奇函数

∴$f(x)$分别在$(-\infty,-\sqrt{a}]$，$[\sqrt{a},+\infty)$上为增函数；$f(x)$分别在$[-\sqrt{a},0)$，$(0,\sqrt{a}]$上为减函数.

题型2　利用单调性求参数的值或取值范围

例2　已知函数$f(x)=x^3-ax$.

(1)若$f(x)$在实数集$\mathbf{R}$上单调递增，求实数a的取值范围；

(2)是否存在实数a，使$f(x)$在$(-1,1)$上单调递减？若存在，求出a的取值范围；若不存在，请说明理由.

[解]　(1)解法一：(定义法)．设$x_1<x_2$，由$f(x)$为增函数，得$f(x_1)-f(x_2)<0$，所以$x_1^3-ax_1-x_2^3+ax_2<0$，即

$(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2+x_1x_2-a)<0$.

由于$x_1-x_2<0$，得$x_1^2+x_2^2+x_1x_2-a>0$，即$a<x_1^2+x_2^2+x_1x_2$对一切$x_1<x_2$都成立，而$x_1^2+x_2^2+x_1x_2=(x_1+x_2)^2+x_2^2>0$，

所以只需$a\leq 0$.

即$a\leq 0$时，函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增.

解法二：(导数法)，因为$f'(x)=3x^2-a$，若$f(x)$在$\mathbf{R}$上递增，则由$f'(x)>0$，得$3x^2-a>0$，即$a<3x^2$在$\mathbf{R}$上总成立．所以$a<0$.

又容易知道，当$a=0$时，$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数，所以$a\leq0$为所求.

(2)由于$3x^2-a<0$在$(-1,1)$上总是成立，所以$a>3x^2$.

而$x\in(-1,1)$时，$0\leq3x^2<3$，所以$a\geq3$，即当$a\geq3$时，$f(x)$在$(-1,1)$上单调递减.

[点评与警示]　(1)讨论函数的单调性应在其定义域内进行.

(2)利用定义证明函数单调性的一般步骤要熟悉.

(3)利用导数判断或证明函数单调性的依据是：在某个区间上，若$f'(x)>0$，则$f(x)$递增；若$f'(x)<0$.则$f(x)$递减.

◆变形思考2　已知函数$f(x)=x^3-3ax$.

(1)若$f(x)$在实数集**R**上单调递增，求实数a的取值范围；

(2)是否存在实数a，使$f(x)$在$(-1,1)$上单调递减？若存在，求出a的取值范围；若不存在，请说明理由.

[解]　定义法(导数法)

(1)$a\leq 0$

(2)$a\geq 1$时

题型3　函数单调性的应用

例3　已知函数 $f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$．当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，且 $f(xy)=f(x)+f(y)$．

(1)求 $f(1)$；

(2)证明 $f(x)$在定义域上是增函数；

(3)如果 $f(\frac{1}{3})=-1$，求满足不等式 $f(x)-f(\frac{1}{x-2})\geqslant 2$ 的 x 的取值范围．

[分析]　(1)的求解可用赋值法；对于(2)，应利用单调性定义来证明，其中应注意$f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$的应用；对于(3)，应利用(2)中所得的结果及$f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$进行适当配凑．将所给不等式化为$f[g(x)]\geq f(a)$的形式，再利用$f(x)$的单调性脱去符号“f”求解．

[解]　(1)令 $x=y=1$，得 $f(1)=2f(1)$，故 $f(1)=0$.

(2)令 $y=\frac{1}{x}$，得 $f(1)=f(x)+f(\frac{1}{x})=0$，故 $f(\frac{1}{x})=-f(x)$.

任取 x_1，$x_2\in(0，+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(\frac{1}{x_1})=f(\frac{x_2}{x_1})$

由于$\frac{x_2}{x_1}>1$，故 $f(\frac{x_2}{x_1})>0$.从而 $f(x_2)>f(x_1)$.

$\therefore f(x)$在$(0，+\infty)$上是增函数.

(3)由于 $f(\frac{1}{3})=-1$，而 $f(\frac{1}{3})=-f(3)$．故 $f(3)=1$.

在 $f(x\,y)=f(x)+f(y)$中，令 $x=y=3$，得 $f(9)=f(3)+f(3)=2$.

又$-f(\frac{1}{x-2})=f(x-2)$．故所给不等式可化为 $f(x)+f(x-2)\geqslant f(9)$

$$\therefore\begin{cases}x>0\\x-2>0\\x(x-2)\geqslant 9.\end{cases}$$ 解得 $x\geqslant 1+\sqrt{10}$.

所以 x 的取值范围是$[1+\sqrt{10}，+\infty)$.

[点评与警示]　本题中的函数是抽象形式的函数，涉及了函数在某点处的值，函数单调性的证明、不等式的求解．在本题的求解中，一个典型的方法技能是根据所给式子$f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$进行适当的赋值或配凑.

◆变形思考3

$f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的增函数，且$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$.

(1)求$f(1)$的值；

(2)若$f(6)=1$，解不等式$f(x+3)-f(\frac{1}{x})<2$.

[解] (1)令$x=y$，得 $f(1)=0$.

(2)由$f(6)=1$及$f(x+3)-f(\frac{1}{x})<2$.

得$f[x(x+3)]<2f(6)$.

即$f[x(x+3)]-f(6)<f(6)$．亦即$f[\frac{x(x+3)}{6}]<f(6)$.

因为$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

$\therefore \begin{cases} x+3>0. \\ \frac{1}{x}>0. \\ \frac{x(x+3)}{6}<6. \end{cases}$ 解得 $0<x<\frac{-3+3\sqrt{17}}{2}$.

所以不等式的解是$\{x \quad 0<x<\frac{-3+3\sqrt{17}}{2}\}$

题型4 关于函数的值域问题

例4 求下列函数的值域

(1) $y=\dfrac{x}{2x+1}$；

(2) $y=4-\sqrt{3+2x-x^2}$；

(3) $y=x-\sqrt{1-2x}$.

[解]　(1)(分离常数法)

$$y=\frac{x}{2x+1}=\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2(x+\frac{1}{2})}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{2x+1}.$$

$\because \frac{1}{2(2x+1)}\neq 0$　$\therefore$函数的值域为$\{y|y\neq\frac{1}{2},\ y\in\mathbf{R}\}$.

(2)(配方法)．由 $3+2x-x^2\geqslant 0$.得 $-1\leqslant x\leqslant 3$.

$\because y=4-\sqrt{-(x-1)^2+4}$,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$y_{\min}=4-2=2$.当 $x=-1$ 或 3 时，$y_{\max}=4$.

$\therefore$ 值域为 $y\in[2,4]$.

(3)**解法一**：(单调性法)．定义域为$\{x|x\leqslant\frac{1}{2}\}$．函数 $y=x$ 与 $y=-\sqrt{1-2x}$均在$(-\infty,\frac{1}{2}]$上递增，则 $y=x-\sqrt{1-2x}$在$(-\infty,\frac{1}{2}]$上递增，故 $y\leqslant\frac{1}{2}-\sqrt{1-2\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.所以函数的值域为 $y\in(-\infty,\frac{1}{2}]$.

解法二：(换元法)．令$\sqrt{1-2x}=t$.则 $t\geqslant0$.且 $x=\frac{1-t^2}{2}$.

$\therefore y=-\frac{1}{2}(t+1)^2+1\leqslant\frac{1}{2}.(t\geqslant0)$．$\therefore y\in(-\infty,\frac{1}{2}]$.

◆变形思考4

求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}$；(2) $y=2x+\sqrt{1-2x}$；

(3) $y=2x-1-\sqrt{13-4x}$.

[解]　(1)(配方法). $\because y=\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}=1-\dfrac{1}{x^2-x+1}$.

而 $x^2-x+1=(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}\geqslant\dfrac{3}{4}$.

$\therefore 0<\dfrac{1}{x^2-x+1}\leqslant\dfrac{4}{3}$.

$\therefore -\dfrac{1}{3}\leqslant y<1$.

$\therefore$值域为$[-\dfrac{1}{3}，1)$.

(2)(换元法). 令 $t=\sqrt{1-2x}(t\geqslant 0)$，则 $x=\frac{1-t^2}{2}$.

$\because y=-t^2+t+1=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$,

当 $t=\frac{1}{2}$即 $x=\frac{3}{8}$时,

$y_{\max}=\frac{5}{4}$，无最小值.

$\therefore$函数值域为$(-\infty，\frac{5}{4}]$.

(3)(单调性法)．因为函数在其定义域 $(-\infty, \frac{13}{4}]$内单调递增．所以，当 $x=\frac{13}{4}$时，$y_{\max}=2\times\frac{13}{4}-1=\frac{11}{2}$.故函数的值域为$(-\infty, \frac{11}{2}]$.

JIE TI JING YAN GONG XIANG

解题经验共享

1．求函数的值域、最值、单调区间，要特别注意函数的定义域制约作用，要树立“定义域优先”的意识．

2．函数的单调性是对某一个区间而言的．例如，函数 $f(x)$在区间$(-1,0)$上是减函数，在$(0,1)$上是减函数，但在$(-1,0)\cup(0,1)$上却不一定是减函数，类似函数有 $f(x)=\frac{1}{x}$.

3．函数的单调性可以借助函数的图象来研究．具有单调性的图象特征：增函数的图象是上升曲线，减函数的图象是下降曲线．

4．函数的最值求法

(1)若函数是二次函数或可化为二次函数型的函数，常用配方法．

(2)函数单调性的变化是求最值和值域的主要依据，函数的单调区间求出后，再判断其增减性是求最值和值域的前提，当然，函数图象是函数单调性的最直观体现．

(3)基本不等式法：当函数是分式形式且分子分母不同次时常用此法．

(4)导数法：当函数结构形式较复杂(如指数、对数函数与多项式等的组合式)时，一般采用此法.

(5)数形结合法：画出函数图象，找出坐标的范围或分析条件的几何意义，在图上找其变化范围.

KE WAI XUE SHENG LIAN YU WU

课外学生练与悟