中等职业教育规划教材

数学

第一册

教师教学用书

山东省职业教育教材编写组　编著

人民教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

中等职业教育规划教材数学第一册教师教学用书 / 山东省职业教育教材编写组编著. —3 版 . —北京：人民教育出版社，2012（2019.7 重印）

ISBN 978-7-107-19731-4

Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①山… Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—教学参考资料 Ⅳ. ① G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 036370 号

中等职业教育规划教材 数学 第一册 教师教学用书

出版发行 人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081）
网 址 http://www.pep.com.cn
经 销 全国新华书店
印 刷 山东汇文印务有限公司
版 次 2009 年 6 月第 3 版
印 次 2019 年 7 月第 16 次印刷
开 本 787 毫米 ×1 092 毫米 1/16
印 张 5.5
字 数 100 千字
定 价 7.50 元

版权所有 · 未经许可不得采用任何方式擅自复制或使用本产品任何部分 · 违者必究

如发现内容质量问题，印装质量问题，请与本社联系。电话：400-810-5788

说　明

本册教师教学用书是根据《中等职业学校数学教学大纲》和山东省中等职业学校数学教科书第一册编写的. 本册教师教学用书由山东省教学研究室组织编写.

本套教师教学用书编写的原则是：

1. 努力体现中等职业教育数学教材编写的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图.

2. 明确各章的教学要求以及要达到的教学目标，帮助教师完成“教学大纲”中规定的教学任务.

3. 指出相关内容的教学重点、难点以及教学方法，帮助教师克服教学中的一些困难.

4. 努力吸取中等职业学校的数学教师优秀的教学经验，使本书能更好地为教学服务.

这本教学参考书每章包括知识框图；教学要求；教材分析和教学建议；参考教案；习题答案、提示和解答等 5 部分.

知识框图，直观地揭示了各知识点之间的联系，主要是为了让教师在整体上对本章的知识结构以及各知识点之间的关系有一个整体的认识.

教学要求的确定，主要依据《中等职业学校数学教学大纲》中的相关必修内容的教学要求，考虑到本套教材选修内容的教学要求，对必修内容的教学要求做了一些调整. 教材编写时，充分考虑学生的不同需求，为学生的发展提供了较为宽泛的选择空间，以适应不同程度学生的个性发展. 本教材的出版说明指出了教材编写的原则与教学指导思想；本教材的编者寄语目的是展示数学的美，以激起学生学习数学的欲望；每章都有内容较浅、贴近学生生活的背景，这个背景引出的数学知识是本章内容的知识原型、核心知识；每章的卷首语、名人名言概述本章的主要内容及学习本章的意义，激励学生不断进取、不断创新；每节引入的问题，是本章知识的增长点，是本节核心内容或研究方法的出发点，激发学生探究新知的欲望、引发学生的思考；增加“想一想”、“练一练”、“试一试”、“议一议”等栏目来不断启迪学生的思维、不断向深层次思维过渡，达到较高的教学要求；习题、练习题立足于“起点低、台阶密、坡度小、过程简、思想高”；每章最后的阅读与实践能够使学生了解数学发现的历程、品尝数学大师们的甘苦、体验解趣味数学题的乐趣.

在教材分析和教学建议中，首先分析了本章的内容结构，知识间的递进关系和作用地位，指出本章内容的重点、难点，为了教学过程中能够突出重点、突破难点，本书给出了本章总体的教学建议，接着给出了本章参考教学课时分配，最后按节分析教学内容，并针对各节内容给出了较为具体的教法与学法建议.

为了帮助教师理解教材的编写意图，更加卓有成效地进行教学，每章都给出了教学案例供教师参考.

每章给出了练习与习题的参考答案与提示. 一般简单题只给答案；中等难度题只给提示；难题给出解答——通常只给出常规解法.

第一册教材共分六章. 各章知识有一定的独立性，但就整体而言存在一定的逻辑联系. 下面就第一册中如何贯彻这套教材的指导思想，再作如下说明，以帮助教师理解教材.

第一章学习集合，它为中等职业学校学生精确地使用数学语言打下坚实的基础. 第二章是方程与不等式，它为第三章学习函数准备了数学工具，还可巩固第一章学到的集合知识. 第三章学习函数的基础知识及二次函数的性质，它又为学习其他函数打下基础. 第四章学习指数函数与对数函数，这两个函数在实际生活和生产中有着广泛的应用. 第五章学习数列，是按照“教学大纲”的要求，通过对日常生活中实际问题的分析，建立等差数列和等比数列这两种模型，通过这两种数列模型的应用，使学生更深刻地理解数列的概念. 第六章学习空间几何体，呈现直观几何，并介绍求几何体的表面积和体积的方法.

这套教材，把学习数学的基本思想方法与数学知识放在同样重要的地位. 第一册教材涉及到的数学方法有：配方法，待定系数法，数形结合，函数关系的建立与研究等方法. 教师要重视上述基本思想方法的教学，要在教学中经常有意识地讲解上述方法的应用.

在教学中，要贯彻“温故而知新”的原则. 中等职业学校贯彻这一原则有一定的困难. 但要使学生学好数学，教学中要切实贯彻这一原则. 数学教学对基础知识的要求较高，基础不好难于继续学习，而中等职业学校学生的数学基础往往较差，因此，在教材编写中主要采取循环上升的方式来贯彻这一原则. 又由于单纯复习效果一般较差，对学生的心理也有不利影响，所以，教材采用了在讲新内容的同时，紧密结合新知识复习旧知识. 教师在教学中还要根据学生的具体情况，灵活地设计教案，以旧引新，以新带旧，努力提高教学质量.

第一册教材十分重视贯彻数形结合的思想，基本上做到，有数必有形，有形必有数. 华罗庚先生对数形结合在学习数学中的作用作了这样的阐述：“数与形本是相倚依，焉能分作两边飞，数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事非，切莫忘，几何代数统一体，永远联系、切莫分离.”这段分析精辟地阐述了数与形之间的密切关系和相互作用. 为学生理解数学知识提供了好的方法，例如，第一章中的文氏图，第二章中的数与数轴，不等式的解集与区间表示，第三、四章中的函数与图象等.

第一册要达到教学要求，总课时数约为 64 课时. 各类专业，都要完成教学大纲规定的必学内容，但教学要求可以不同，对于数学要求较高的专业，也可适当增加课时，拓宽、加深本册内容的教学.

本书由高存明、孙明红主编，副主编为：李励信、陆泽贵，参加编写的还有：王智海、李增华、徐刚、杜红梅、闫桂明、刘明远、聂鲁菊、祁志卫、鹿继梅、王程、于永强、刘学卫、李长林、于莺彬.

责任编辑：龙正武.

由于编者水平所限，这本教学参考书一定存在一些缺点和错误，恳切希望广大教师、教研人员和有关专家提出宝贵意见，以便再版时修改、订正.

山东省中等职业学校数学教材编写组

目　录

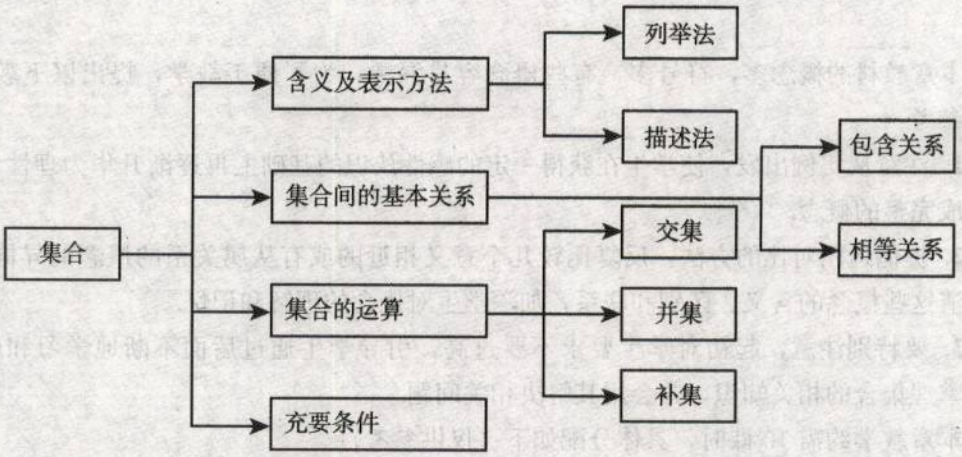
人教版®

人教版®

第一章 集 合

> 思想火花：
>
> 种花须知百花异，育人要懂百人心.

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 理解集合的概念；会用符号表示元素与集合的关系.

2. 掌握表示集合的方法.

3. 理解空集、子集、真子集、全集和补集的概念；掌握集合的相等与包含关系，理解集合的交、并、补的基本运算.

4. 了解子集与推出的关系；了解充分条件、必要条件和充要条件.

Ⅲ 教材分析和教学建议

本章主要内容包括：集合的概念，集合的表示方法，集合之间的关系，集合的交、

并、补等运算，充要条件.

通过义务教育阶段的数学学习，学生对基本数集（自然数集，整数集，有理数集，实数集）和点集（几何图形）已有基本的感性认识，在此基础上，本章正式介绍了集合的概念，集合的表示方法，讨论了两个集合之间的关系，介绍了集合的交、并、补运算以及这些运算的性质，最后介绍了子集与推出的关系，充分条件、必要条件和充要条件.

集合知识是数学的基础之一. 集合的术语是数学的通用语言，是自然语言的提高和抽象，它的涵义比自然语言更确切，应用更广泛. 它可以帮助学生更准确、更深刻地理解有关数学知识，为学好数学打下基础，许多重要的数学分支，如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计等，都建立在集合理论的基础上. 随着基础数学的发展和计算机的广泛应用，集合已逐渐成为人们工作和学习的通用语言. 学好本章内容对学生继续学习及今后参加工作都有重要作用.

本章重点是集合的表示方法、集合之间的关系及集合的运算.

本章难点是集合的性质描述法和子集与推出的关系、充分条件、必要条件、充要条件.

本章教材的概念多，符号多，有些概念容易混淆，为了便于教学，提出以下教学建议供参考：

1. 注意从实例出发，使学生在获得一定的感性认识的基础上再逐渐升华为理性认识，以形成完整的概念.

2. 提倡运用对比的方法，反复比较几个意义相近的或有从属关系的概念的异同，从而弄清这些概念的含义、区别和联系，加深学生对概念的理解和记忆.

3. 要特别注意，起初对学生要求不要过高，引导学生通过后面不断地学习和应用，逐步掌握集合的相关知识，并会用其解决相关问题.

本章教学约需 10 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1 集合及其表示	2 课时
1.2 集合之间的关系	2 课时
1.3 集合的基本运算	3 课时
1.4 充要条件	1 课时
小结与复习	2 课时

1.1 集合及其表示

1.1.1 集合

1. 本小节内容的重点是集合的概念，难点是集合的元素必须具备确定性和互异性，以及借此进一步理解集合是由它的元素所唯一确定的.

2. 集合是数学中最原始的概念之一，和几何中的点、线、面等概念一样，只能做描述性说明，不能用其他更基本的概念给它下定义，所以叫它为不定义的概念或原始概念.

虽然学生在初中已接触过集合的概念，但不太了解这个词的意义．为了便于学生接受集合的概念，教学时应从学生已有的知识出发，多举实例来说明集合的概念如同其他数学概念一样，也是从现实世界中来的．

3. 要理解集合的“确定性”和“互异性”，这是正确理解集合概念的关键．关于集合元素的确定性和互异性可以这样来理解：

确定性：设 A 是一个给定的集合，x 是某一具体对象，则 x 或者是集合 A 的元素，或者不是集合 A 的元素，二者必居其一，不允许模棱两可．例如，教材中所举的班上高个子同学的全体就不能构成集合，这是因为“高个子”没有确定的标准．

互异性：互异性是指属于同一个集合的元素必须互不相同．因此，集合中相同的对象应看作是同一元素，列举时不应重复出现．例如，五位数 23 243 中所用阿拉伯数字全体构成的集合应写成 $\{2, 3, 4\}$，而不能写成 $\{2, 3, 2, 4, 3\}$．

在教学中，教师要注意引导学生在列举大量实例的基础上展开讨论、研究和交流．

4. 教材中明确地介绍了“属于”和“不属于”这两个概念．$a\in A$ 还是 $a\notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 的元素．根据集合中元素的确定性，可知对任何元素 a 和集合 A，在 $a\in A$ 与 $a\notin A$ 这两种情况中有且只有一种成立．应使学生初步掌握符号 $a\in A$ 和 $a\notin A$ 的意义．

5. 教师借助实例“由平方小于 0 的所有实数组成的集合”帮助学生理解 $\varnothing$ 的概念，并引导学生举例加深理解．

6. 以数或点为元素的集合，分别叫做数集或点集．这是中学数学中研究的两个主要集合，教材中所列举的 $\mathbf{N}$，$\mathbf{N}_+$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 等符号所代表的数集是最重要、最常用的数集．对它们各自代表的意义，应要求学生熟记．

1.1.2 集合的表示方法

1. 本小节的主要内容是表示集合的列举法和性质描述法．难点是理解集合的特征性质．在本小节中，只要求学生理解什么是集合的特征性质和性质描述法的意义，在以后的应用中再要求学生巩固与掌握．

2. 用描述法表示集合的常用形式是

$$A=\{x\in U \mid p(x)\}.$$

竖线前面的 $x\in U$ 表示该集合中的元素，及元素 x 的取值范围，竖线后面的 $p(x)$ 表示元素 x 所具有的特征性质，即上述形式表示在集合 U 中，由所有具有特征性质 $p(x)$ 的那些元素构成的集合．换句话说，属于集合 A 中的元素 x 具有性质 $p(x)$，集合 A 外的元素都不具有性质 $p(x)$．

教材中为了使学生更容易掌握集合的性质描述法，在不产生歧义的前提下，把 $p(x)$ 简记成 p．教学中可以根据学生的实际情况灵活处理．

在教学中，一定要讲清一个集合的特征性质的意义．通过这一内容的学习使学生懂得，认识事物的关键是抓住事物的本质属性．在教学中应通过列举适量的例子，引导学

生讨论，并创设适当的情境，让学生自主探索一些常见的集合的特征性质，以加深学生对集合特征性质的理解.

在某种约定下，x 的取值范围可略去不写. 例如在实数集 $\mathbf{R}$ 中，就常常略去不写，$\{x|p(x)\}$ 表示在实数集 $\mathbf{R}$ 中，具有特征性质 $p(x)$ 的元素构成的集合.

3. 一个集合是用列举法表示还是用性质描述法表示，一般要看我们研究问题的性质与可能而定. 当要着重研究集合的特征性质时，用性质描述法比较好. 当只是观察集合的一些元素，又可方便的列出该集合的元素时，则可用列举法. 习题中，要求学生用适当的方法表示集合，就是要求学生用两种方法中较好的一种来表示集合. 但学生不论用哪种方法表示集合，都应当算正确. 这里要求不要过高.

4. 在教学中，随时纠正学生常犯的一些错误. 例如，集合 $\{x|x$ 是整数$\}$ 不应写成 {全体整数}，因为大括号“{}”已表示“全体”的意思；实数集 $\mathbf{R}$，不能写成 $\{\mathbf{R}\}$ 等.

5. 有时为了形象、直观地表示一个集合，可用平面上的一条封闭曲线所包含的区域表示一个集合. 这种方法，通常称作**文氏图法**. 还可以用这种方法表示集合之间的关系.

6. 例 1 中的第（3）题是一个点集，在讲课时一定要给学生们讲清楚为什么要这样表示. 讲完后可针对课后的练习 1-2 进行巩固.

7. 帮助学生正确理解 0 与 $\{0\}$ 的关系. 0 是一个数，它可以是一些集合的元素，如 $0\in\{0, 1\}$，$0\in\{5, 0, 7\}$ 等；而 $\{0\}$ 是一个集合，它只含有一个元素 0.

1.2 集合之间的关系

1. 本节内容是两个集合之间的包含关系和相等关系，其中最重要的是包含关系. 子集是本节的重点.

2. 要正确阐述子集的概念，防止偏差.“A 是 B 的子集”的意义是，A 的任意元素都是 B 的元素，即由 $x\in A$，可推出 $x\in B$，不能把 A 是 B 的子集解释成 A 是由 B 中的部分元素所构成的集合. 因为 B 的子集也包括它本身，而这个子集是由 B 的全体元素构成的. 要讲清子集和真子集的区别. 真子集的特征性质“A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A”中的两个条件是缺一不可的. 在子集的教学中，对概念的解释，语言必须确切.

3. 要注意区别包含于、包含、真包含于、真包含这些概念不同的含义和不同的表示方法. $A\subseteq B$ 是 $A\subsetneqq B$ 的必要条件而非充分条件. 而 $A\subseteq B$ 与 $B\supseteq A$ 是同义的. $A\subseteq B$ 包括 $A\subsetneqq B$ 与 $A=B$ 两种情况，其中有且必有一种成立. $A\subseteq B$ 与 $A\supseteq B$ 如果同时成立，则 $A=B$.

4. 关于“两个集合相等”这一概念，教材中是通过两个集合的元素完全相同的例子来说明的. 用“如果两个集合的元素完全相同，那么我们就说这两个集合相等”来描述两个集合相等比较直观，容易理解. 实际上，因为 $A\subseteq B$，所以 A 的元素都是 B 的元素；又因为 $B\subseteq A$，所以 B 的元素又都是 A 的元素. 这就是说，集合 A 与集合 B 的元素完全

相同，因而我们说 A 与 B 是相等的集合．这样将有利于学生理解两个集合相等的合理性．由此，我们还可以得到一种证明方法：如果要证明 $A=B$ 只要证明 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 都成立即可．但一般不要求学生使用上述方法证明两集合相等，只要求学生明白两个集合相等的含义即可．

5. 教学中要提醒学生注意“$\in$”与“$\subseteq$”这两种符号的不同含义．其中，“$\in$”是属于符号，只能用在元素与集合的关系上，表示元素与集合间的从属关系；而符号“$\subseteq$”只能用在两个集合之间，表示集合间的包含关系．对此必须引起学生的注意，不要用错．教师要帮助学生区分 $\{0\}$ 与 $\varnothing$，$\{0\}$ 是只含有一个数 0 的集合，而 $\varnothing$ 是不含任何元素的集合．

6. 对于空集 $\varnothing$，它是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集．

1.3 集合的基本运算

本小节重点内容是集合的交、并、补运算，难点是补集的概念和集合的运算．

1.3.1 交集

1. 教材首先用实例给出两个集合的交集，进而用文字叙述给出了交集的定义．对于两个集合交集的理解，不仅要会用自然语言描述，还要学会用符号表示，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

2. 由交集的定义，教材又给出了以下性质：

(1) $A\cap B=B\cap A$；(2) $A\cap A=A$；(3) $A\cap\varnothing=\varnothing$；(4) 如果 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$.

3. 对交集概念和性质的教学可通过图示引导学生讨论：

当集合 A，B 都不是空集时，它们之间的关系如图 1-1 所示：

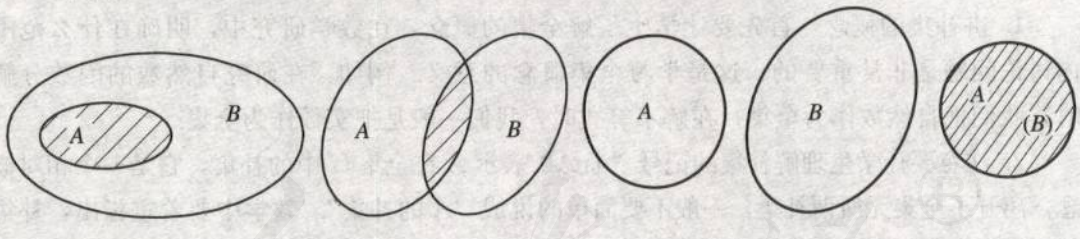


图 1-1

当集合 A 或 B 是空集时，教师可通过实例引导学生讨论．

1.3.2 并集

1. $A\cup B$ 是由属于集合 A 或 B 的所有元素组成的集合．A 与 B 的公共元素在 $A\cup B$ 中只能出现一次．对于两个集合并集的理解，不仅要会用自然语言描述，还要学会用符号表示，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

2. 由并集的定义可直接推出以下性质：

(1) $A\cup B=B\cup A$；(2) $A\cup A=A$；(3) $A\cup\varnothing=A$；(4) 如果 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$.

3. 对并集概念和性质的教学也可以通过图示引导学生讨论：

当集合 A，B 都不是空集时，它们之间的关系如图 1-2 所示：

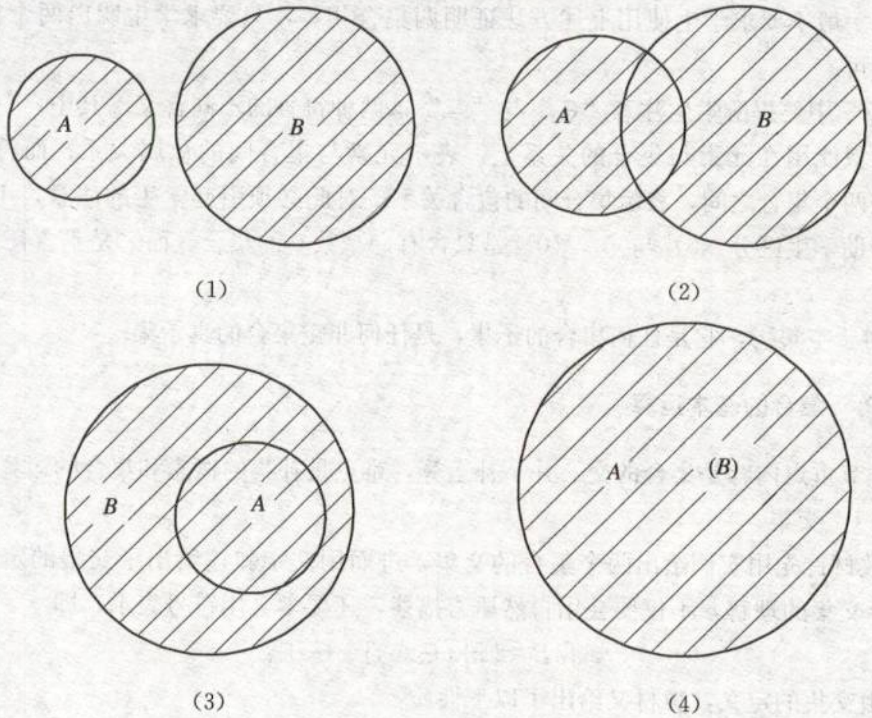


图 1-2

当集合 A 或 B 为空集时，教师可通过实例引导学生讨论.

1.3.3 补集

1. 讲补集的概念，首先要让学生了解全集的概念. 在数学研究中，明确在什么范围内讨论问题是非常重要的，这是学习全集概念的意义. 例如，在研究自然数的因数分解时，我们把自然数作为全集；在解不等式时，我们一般是把实数作为全集.

2. 注意要让学生理解补集的记号“$\complement_U A$”表示 A 在全集 U 中的补集，它是一个相对概念，离开了全集无所谓补集，一般不要简单的说成“A 的补集”. 教学中要着重指出，补集的运算是全集 U 和集合 A 之间的运算. 运算条件是 $A \subseteq U$，并让学生理解“$\complement_U A \cup A = U$”这条性质.

对于补集的定义可以这样来理解，如果从全集 U 中取出它的一个子集 A 的全部元素，则所剩下来的元素组成的集合就是 $\complement_U A$. 由此，我们很容易想起“差”的概念，事实上，补集 $\complement_U A$ 就是全集 U 与它的一个子集 A 的差集. 教学时可多用 Venn 图的直观性帮助学生理解.

1.4 充要条件

1. 本小节的重点是充分条件与必要条件，教材在给出了充分条件和必要条件的概念

之后，讨论了“子集”与“推出”的关系. 本节的难点是了解“推出”与判断“子集”关系.

2. 本小节要求学生理解充分条件、必要条件和充要条件的概念，并能正确地将“如果 p，那么 q”形式的真命题改写为用充分条件或必要条件表述的命题. 能对命题的同一逻辑关系作不同形式的表达. 要注意，在本教材中命题“如果 p，那么 q”为真时，才与“p 推出 q”、“p 是 q 的充分条件”和“q 是 p 的必要条件”是同一逻辑关系.

3. 在学生已学过的知识范围内，要求学生能根据给出的条件，判断一个命题是另一个命题的什么条件，但一般不要求证明. 判断 p 是 q 的什么条件，主要根据是“$p\Rightarrow q$”或“$q\Rightarrow p$”是否成立. 若“$p\Rightarrow q$”为真，则 p 是 q 的充分条件或 q 是 p 的必要条件. 如果“$p\Rightarrow q$”且“$q\Rightarrow p$”同时成立，则 p 与 q 互为充要条件或 p 与 q 等价.

4. 充分条件和必要条件不是新的知识，只是“推出”的另一种说法. 教学开始时，只要求学生能把形如“$p\Rightarrow q$”的正确命题改用“p 是 q 的充分条件”或“q 是 p 的必要条件”来叙述就可以了. 不要在“充分”和“必要”两个词上作过多地解释. 这两个词在日常生活中也经常用到，并且表达的意义与数学上的意义相同. 即使如此，学生也未必对这两个词有清楚的理解. 如果过多地用自然语言进行解释，反而会使学生糊涂. 教师只要指出，“$p\Rightarrow q$”与“p 是 q 的充分条件”、“q 是 p 的必要条件”这三句话表达的是同一逻辑关系就可以了. 经过一段时间的学习，学生能逐步加深对充分条件、必要条件的理解.

5. 教材分析了“子集”与“推出”的关系. 设

$$A=\{x\mid p\},$$

$$B=\{x\mid q\}.$$

则 $A\subseteq B$ 与 $p\Rightarrow q$ 不过是同一逻辑关系的两种不同说法，是从不同的侧面反映事物之间的关系. 教学时，“子集”与“推出”的关系可先用文氏图说明，然后通过例子巩固，使学生掌握这两者之间的关系. 例如，因为所有山东公民构成的集合是所有中国公民构成的集合的子集，所以，由“我是山东公民”可推出“我是中国公民”的结论. 这个关系可帮助学生理解推理的基本原则.

Ⅳ 参考教案

课题：1.1.1 集合

教学目标：

1. 初步理解集合概念. 理解集合中元素的性质.
2. 理解集合与元素的关系.
3. 培养学生分析、比较、归纳的逻辑思维能力.

教学重点：

集合概念.

教学难点：

正确理解集合概念.

教学方法：

问题教学法.

教学过程：

一、创境导入

1. 俗话说“物以类聚，人以群分”，“西藏高原上的所有藏羚羊”，“中国的所有大熊猫”……这些都给我们以集合的印象.

2. 引导学生回顾初中学过的集合：

问题 1：初中学过哪些集合？

问题 2：初中哪些几何图形是用点的集合来定义的？

给出一些例子，师生一起分析，为给出集合的定义做好准备.

(1) 某中等职业学校高一年级学生的全体；

(2) 方程 $x^2=4$ 的所有实数根；

(3) 所有的平行四边形；

(4) 平面上到一条线段的两个端点距离相等的点的全体.

那么，集合的含义是什么呢？

二、提出问题、自学阅读

(1) 什么叫集合、元素？

(2) 元素与集合之间的关系是什么？用什么符号来表示？

(3) 集合中元素有什么性质？

(4) 集合的分类有哪些？

(5) 特殊数集用什么符号来表示？

三、师生互动、提炼知识

1. 集合与元素：

(1) 什么叫集合、元素？

一般地，把一些能够确定的对象看成一个整体，我们就说，这个整体是由这些对象的全体构成的**集合**（简称为**集**）. 构成集合的每个对象都叫做集合的**元素**.

(2) 集合与元素的表示方法：

一个集合，通常用大写英文字母 A，B，C，…表示，它的元素通常用小写英文字母 a，b，c，…表示.

(3) 请同学举出一些集合的例子，教师板书，并让学生说出上面所给例子中的元素.

注：教师要在学生自学的基础上把集合与元素的定义讲透彻.

2. 元素与集合之间的关系：

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$，读作“a 属于 A”.

如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$，读作“a 不属于 A”.

强调个体与整体之间的关系，用符号“$\in$”，“$\notin$”表示，由学生结合前面的例子用符号“$\in$”，“$\notin$”表示元素与集合之间的关系．要着重指出符号联结的是元素与集合.

3. 集合元素的性质：

关于数学中的集合概念，再作如下说明：

(1) 确定性：作为集合的元素，必须是能够确定的．这就是说，不能确定的对象，就不能构成集合．例如，高一（1）班高个子同学的全体，就不能构成集合．这是由于没有规定多高才算是高个子，因而“高个子同学”不能确定.

(2) 互异性：由一些元素组成集合时，每个元素不能重复出现．这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象，相同的对象归入同一个集合时只能算作集合的一个元素.

4. 集合的分类：

按元素的个数进行分类.

含有有限个元素的集合叫做**有限集**，含有无限个元素的集合叫做**无限集**.

特别地，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记为$\varnothing$．例如，由平方等于-1的所有实数组成的集合就是$\varnothing$．你能举几个空集的例子吗？

5. 常用的数集：

我们约定用一些大写英文字母，表示数学中一些常用的数集.

常用数集及其记号

常用数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
记号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

四、演练反馈（题组练习）

题组一：

说出下面集合中的元素：

(1) 大于 2 小于 7 的偶数构成的集合；

(2) 平方等于 1 的实数构成的集合.

题组二：

用下列符号表示的关系是否正确？

(1) $0\in\mathbf{N}_+$；　(2) $-\frac{3}{2}\in\mathbf{Q}$;　(3) $\pi\notin\mathbf{Q}$;

(4) $\sqrt{2}\in\mathbf{R}$;　(5) $-3\notin\mathbf{Z}$;　(6) $0\in\mathbf{N}$;

(7) $0\in\varnothing$；　(8) $-3\in\varnothing$.

题组三：

下列语句描述的对象是否能构成一个集合?

(1) 小于10的自然数的全体;

(2) 某校高一(2)班所有性格开朗的男生;

(3) 英文的26个字母;

(4) 非常接近1的实数;

(5) 小于2且大于3的自然数的全体;

(6) 中国所有的小河流.

题组四:

用符号“∈”或“∉”填空:

(1) 1____**N**, 0____**N**, -4____**N**, 0.3____**N**, $\sqrt{2}$____**N**;

(2) 1____**Z**, 0____**Z**, -4____**Z**, 0.3____**Z**, $\sqrt{2}$____**Z**;

(3) 1____**Q**, 0____**Q**, -4____**Q**, 0.3____**Q**, $\sqrt{2}$____**Q**;

(4) 1____**R**, 0____**R**, -4____**R**, 0.3____**R**, $\sqrt{2}$____**R**;

(5) 1____$\varnothing$, 0____$\varnothing$, -4____$\varnothing$.

五、小结

与学生一起对本节课进行总结.

本节课学习了一始(原始概念),二集(有限集、无限集);三符号(“∈”、“∉”),四性(确定性、互异性),五数集(**N**、$\mathbf{N}_+$或$\mathbf{N}^*$、**Z**、**Q**、**R**).

六、作业

《指导与训练》中集合的练习题.

七、板书设计

1.1.1 集合	
1. 集合	4. 集合的分类
2. 元素与集合之间的关系	5. 特殊数集的表示
3. 集合中元素的性质	

V 习题答案、提示和解答

练习 1-1

1. (1) {4, 6}; (2) {−1, 1}.

2. (1) ∈∈∉∉∉; (2) ∈∈∈∉∉;

(3) ∈∈∈∈∉; (4) ∈∈∈∈∈;

(5) ∉∉∉.

3. (1) 能；(2) 不能；违背集合元素的确定性；
(3) 能；(4) 不能；违背集合元素的确定性；
(5) 能；(6) 不能；违背集合元素的确定性.

练习 1-2

1. (1) $\{4, 6, 8\}$；(2) $\{-1, 1\}$；(3) $\{5\}$；
(4) {1月，3月，5月，7月，8月，10月，12月}；
(5) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

2. (1) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$；
(2) $\{(0, 0), (2, 0), (0, 3), (1, 2), (-2, 3), (-1, -2), (2, -3)\}$.

3. (1) $\{x|x$ 是山东省省会$\}$；
(2) 略；
(3) $\{x|x=2n-1, n\in\mathbf{N}_+\}$；或 $\{x|x=2n+1, n\in\mathbf{N}\}$；
(4) $\{x|\ |x|=3\}$；
(5) $\{x|4x-5<3\}$；
(6) $\{x|x$ 是邻边相等的矩形$\}$.

练习 1-3

1. (1) $A=B$；(2) $A\subsetneqq B$；(3) $A\supsetneqq B$.

2. (1) $\in$；(2) $=$；(3) $\subsetneqq$；
(4) $\supsetneqq$；(5) $\subsetneqq$；(6) $\supsetneqq$；
(7) $\in$；(8) $\subsetneqq$；(9) $\subsetneqq$；
(10) $\notin$.

3. 集合 A 的所有子集为：$\varnothing$，$\{s\}$，$\{t\}$，$\{s, t\}$.
在上述子集中，除去集合 A 本身，即 $\{s, t\}$，剩下的都是 A 的真子集.

练习 1-4

1. $A\cap B=\{5, 7\}$，$A\cup B=\{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

2. $A\cap B=\{b, d\}$，$A\cup B=\{a, b, c, d, e, f\}$.

3. $A\cap B=\{x|x<-1\}$，$A\cup B=\{x|x<3\}$.

4. $A\cap B=\{x|2<x<6\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$.

5. $A\cap B=\{3\}$，$A\cup B=\{-3, 3\}$.

6. $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\{1, 2\}$.

练习 1-5

1. $\complement_U A=\{4, 5, 6, 7, 8\}$，$\complement_U B=\{1, 2, 7, 8\}$.

2. $\complement_U A=\{x|x\geqslant 0\}$.

3. $\complement_U A=\{3, 4, 6\}$，$\complement_U B=\{1, 6\}$，$\complement_U A\cap\complement_U B=\{6\}$，$\complement_U A\cup\complement_U B=\{1, 3, 4, 6\}$.

4. $\complement_U A=B$，$\complement_U B=A$.

练习 1-6

1. (1) 充要； (2) 略； (3) 略.

2. (1) 充分条件； (2) 充分条件；

(3) 充要条件； (4) 必要条件.

3. (1) “x 是 12 的约数”是“x 是 36 的约数”的充分条件，“x 是 36 的约数”是“x 是 12 的约数”的必要条件；

(2) “$x^2=y^2$”是“$x+y=0$”的必要条件，“$x+y=0$”是“$x^2=y^2$”的充分条件.

4. 略.

习题一

1. (1) {红色，黄色}； (2) {珠穆朗玛峰}；

(3) $\{x\in \mathbf{Z} \mid 1<x<100\}$； (4) $\{x \mid x=4n,\ n\in \mathbf{N}\}$；

(5) $\{0\}$； (6) $\{-2,\ 2\}$；

(7) $\{(x,\ y) \mid y=x\}$； (8) $\{-3,\ 3\}$.

2. (1) 错误； (2) 正确；

(3) 错误； (4) 错误；

(5) 错误； (6) 正确.

3. (1) $A\cap B=\{3,\ 4\}$，$B\cap C=\{6,\ 7\}$，$A\cap C=\varnothing$；

(2) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$，

$B\cup C=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$，

$A\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.

4. $A\cap B=B$，$A\cup B=A$.

5. (1) $\complement_U A=\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$，$\complement_U B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$，

$\complement_U A\cap \complement_U B=\{1,\ 2,\ 6\}$，$\complement_U A\cup \complement_U B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$；

(2) 略.

6. (1) $\notin$； (2) $\in$；

(3) $\supsetneqq$； (4) $\subsetneqq$；

(5) $=$； (6) $\subsetneqq$.

7. (1) 充分条件； (2) 必要条件；

(3) 必要条件； (4) 充要条件；

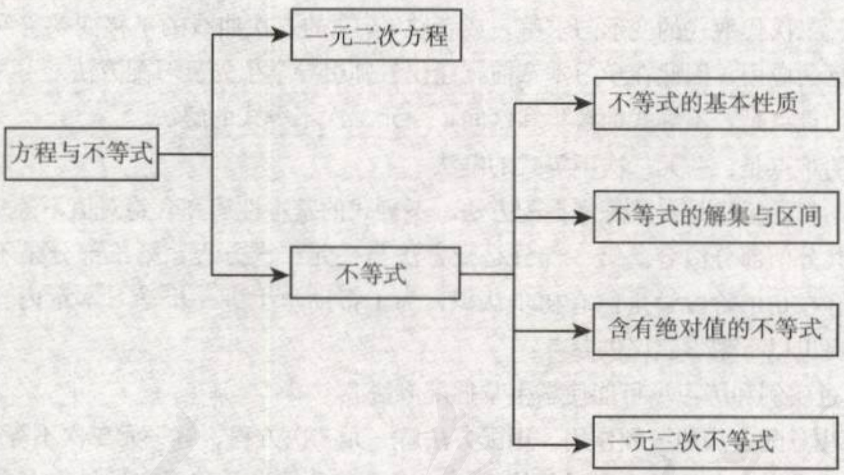
(5) 充分条件； (6) 充分条件.

第二章　方程与不等式

思想火花：

身教胜于言教，蛮教不如不教.

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 掌握用配方法解一元二次方程，并能熟练地解一元二次方程.

2. 理解实数大小的基本性质和不等式的基本性质.

3. 掌握用作差比较法判断实数大小的基本方法.

4. 明确不等式与集合的联系，掌握一元一次不等式（组）的解法；掌握区间的概念，会用区间和集合的描述法表示不等式的解集.

5. 掌握简单的含有绝对值的不等式以及一元二次不等式的解法.

III 教材分析和教学建议

本章主要内容包括：一元二次方程的解法，不等式的基本性质，含绝对值不等式与一元二次不等式的解法.

本章教材复习了用配方法解一元二次方程；通过实例介绍了实数大小的基本性质，并要求掌握作差比较的方法，然后给出不等式的基本性质，为下面解不等式打下基础；通过复习初中学过的一元一次不等式（组），介绍用区间表示解集的方法；最后是含有绝对值的不等式的解法，并把一元二次不等式通过配方法转化为等价的含有绝对值的不等式，从而得到不等式的解集.

不等式与方程、函数密不可分，它们都是反映客观事物变化规律及其关系的模型. 不等关系是现实世界中的一种基本数量关系. 建立不等观念，处理不等关系与处理相等关系是同样重要的. 不等式的解法是数学教学的重点之一，涉及的知识较多且应用广泛，它可渗透到中学数学的几乎所有领域中，涉及到数形结合、类比、分类讨论等数学思想，对数学教学产生广泛而深远的影响.

配方法是中学数学的一种重要数学方法，它主要适用于：二次方程、二次不等式、二次函数、二次代数式的变形与求解，或者缺 xy 项的二次曲线的平移变换等问题，在数学中有广泛的应用，因此在学习本章前，建议教师引导学生先复习配方法.

本章的重点是：不等式的解集和区间，一元二次不等式的解法.

本章的难点是：一元二次不等式的解法.

学好本章的关键是：熟练掌握配方法、不等式的基本性质和含绝对值不等式的解法.

本章共分两部分内容. 第一部分是配方法与一元二次方程，第二部分是不等式。这两部分内容在初中阶段学生已有初步认识，为了帮助学生进一步学习本章内容，便于教师教学，提出以下教学建议供参考：

1. 通过实例和练习尽可能使学生掌握配方法.

2. 要注意配方法的统领作用，用配方法解一元二次方程、解一元二次不等式.

3. 本章教学中，让学生通过具体情境，感受在日常生活和现实世界中存在大量的不等关系，理解不等式对于刻画不等关系的意义和价值.

4. 要注意在表示区间时体现数形结合的思想方法.

本章教学约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1 一元二次方程	1 课时
2.2 不等式	
2.2.1 不等式的基本性质	1 课时
2.2.2 不等式的解集与区间	2 课时
2.2.3 含有绝对值的不等式	1 课时

2.2.4　一元二次不等式　　2 课时

小结与复习　　1 课时

2.1 一元二次方程

1. 本节的主要内容是解一元二次方程．重点要求学生能熟练、准确地用配方法解简单的一元二次方程．这是以后学习用配方法解一元二次不等式的基础．

2. 本节的教学要求是：掌握用配方法解一元二次方程，体会化归的数学思想．

3. 这一节首先用实例引入一元二次方程，旨在给学生呈现数学建模的思想，在本节中要求学生了解这种建模思想．通过讲解例题使学生能够熟练地应用配方法解一元二次方程．教师可根据学生的实际水平增加或减少例题．教学中要注意引导学生分析、总结一元二次方程解的情况．对于因式分解法解一元二次方程，这里不做要求．

4. 在本节教学中应该注意下面的问题：

对于缺少一次项或常数项的一元二次方程，用直接开平方或因式分解的方法解方程，而不用配方法或求根公式来解．如果学生基础较差，不会用直接开平方法解类似于 $x^2=4$ 或 $(x-1)^2=4$ 的一元二次方程，则应该在本节课的开始增设部分例题加以讲解．

一元二次方程的实数根或者有两个，或者没有，在解一元二次方程时注意不要失根．例如 $x^2=2x$，不能把 x 从等号的两边消去，否则会丢失 $x=0$ 这一个根．

5. 本节中体现了把未知转化为已知的化归思想，在用配方法解方程中把二次问题转化成一次问题，就是化归思想的具体体现．

2.2 不等式

2.2.1　不等式的基本性质

1. 本节的主要内容是比较两个实数的大小和不等式的基本性质．重点是作差比较法．

2. 本节的教学要求是：(1) 理解实数大小的基本性质，并掌握用作差比较法来比较两个实数的大小；(2) 进一步巩固配方法；(3) 掌握不等式的三个基本性质以及推论．

3. 这一节首先用实例引入比较实数的大小，旨在引起学生的兴趣，并让学生体会到数学与生活联系的紧密性．同时让学生了解数学建模的思想．然后通过实例的解决引出用作差比较的方法判断两个实数的大小，要求学生能判断简单的实数或代数式值的大小，对于在化简过程中需要用到配方的题目，要作为重点讲解，以便使学生继续巩固配方法．教师可根据学生水平增加这部分的例题和练习．最后把不等式的基本性质呈现给学生，对于不等式的基本性质，本节只是回顾初中所学知识，对不等式的基本性质的证明不作要求，教学中要求学生掌握性质的简单应用．有关不等式的其他性质如下（供教师参考）：

(1) 对称性：如果 $a>b$，则 $b<a$；

(2) 传递性：如果 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$；

(3) 如果 $a+c>b$，则 $a>b-c$；

(4) 如果 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$；

(5) 如果 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$；

(6) 如果 $a>b>0$，则 $a^n>b^n(n\in\mathbf{N}_+，n>1)$；

(7) 如果 $a>b>0$，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}_+，n>1)$；

(8) 如果 $a>b$，$ab>0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

教师要注意教材中的推论，这是讲解一元二次不等式解法的理论依据，要让学生掌握.

4. 本节例 1 (2)(3)(4) 是比较两个代数式的大小，教学时应该指出比较两个代数式的大小，实际上是比较它们值的大小，而这又归结为判断它们差的符号.

讲解例 1 (3)(4) 时，应该强调变形的方法：配方法. 将两个代数式的差进行配方转化为几个非负项的和或差，然后判断正负. 教学中应注意强调，代数式中的配方与解方程中的配方略有不同：代数式中的配方是恒等变形，为把二次项系数化为 1，各项都提出二次项系数，而不应该各项都除以二次项系数；解方程中的配方是同解变形，为把二次项系数化为 1，各项都除以二次项系数即可，没有必要提出二次项系数.

5. 在教学中要注意下面的几个问题：

关于糖水例子中所涉及的作差比较，在化简过程中注意分式的通分，让学生复习初中所学的知识，练习分式通分.

要明确"大于"、"小于"、"不大于"、"不小于"、"不超过"、"至多"、"至少"等等这些描述不等关系的语言所对应的不等号各是什么. 正确的理解和使用表示不等关系的关键词语.

在教学时，教师也可以先结合数轴介绍实数大小的性质，再介绍开始的例题和作差比较法. 参考内容如下：

我们在这里用数轴这一工具进行分析：

数轴就是规定了原点，正方向和单位长度的直线. 如图 2-1.

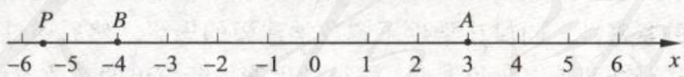


图 2-1

我们知道，实数与数轴上的点之间可以建立一一对应关系. 例如，点 A 与数 3 对应，点 B 与数 -4 对应等. 可以看到，当数轴上一动点 P 从左向右移动时，它对应的实数就从小到大变化. 即数轴上的任意两点中，右边的点对应的实数比左边的点对应的实数大.

在数轴上，如果点 A 在点 B 的右边，点 A 对应的实数为 a，点 B 对应的实数为 b，那么，b 需要加上一个正数才能得到 a，即 a 减去 b 的差是一个正数，因此，要比较两个实数的大小，只要考察它们的差就可以了. 于是我们得到实数大小的性质.

2.2.2　不等式的解集与区间

1. 本节的主要内容是一元一次不等式（组）的解法，用解集描述不等式的解和区间的概念．重点是一元一次不等式（组）的解法，难点是用区间表示不等式的解集．

2. 本节的教学要求是：(1) 掌握一元一次不等式（组）的解法，明确它们与方程的解的区别，会利用数轴表示（确定）不等式解集；(2) 掌握用区间表示一元一次不等式（组）解集的方法；(3) 体会数形结合、类比等数学思想方法．

3. 本节首先通过实例建立学生所熟知的一元一次不等式，根据不等式的基本性质，类比方程的解法来研究不等式的解法，然后给出了一元一次不等式组概念，并研究了它的解法，最后介绍了用区间表示不等式解集的方法．在教学过程中，穿插介绍了如何在数轴上表示（确定）不等式解集．

4. 解不等式就是以不等式的基本性质为依据，利用数与式的运算法则，对所给的不等式进行变形、化简，直到能表明未知数的取值范围为止．解不等式组的基本思路是先求出组成这个不等式组的各个不等式的解集，再求它们的交集．这部分内容虽然在初中学过，但学生不一定完全掌握，我们要通过复习和练习，力求使学生达到熟练掌握的程度．

5. 区间是一种集合的表示方法，教学时要紧密结合不等式的表达方法，加以理解记忆．

6. 通过例题分析，有意识地向学生渗透数形结合、类比、分类讨论等重要的数学思想，培养学生的数学思维能力和数学语言表达能力．

2.2.3　含有绝对值的不等式

1. 本节的重点是含有绝对值的不等式的解法．难点是理解绝对值的几何意义．熟练掌握含绝对值不等式的解法是学习下一节解一元二次不等式的基础．

2. 本节的教学要求是：(1) 理解绝对值的定义以及几何意义；(2) 掌握含有绝对值不等式的等价形式$|x|\leqslant m\Leftrightarrow -m\leqslant x\leqslant m$；$|x|\geqslant m\Leftrightarrow x\leqslant -m$ 或 $x\geqslant m(m>0)$；(3) 掌握简单的含有绝对值不等式的解法．

3. 本节首先复习初中所学实数绝对值的定义和几何意义，然后由特殊到一般给出了含有绝对值的不等式的等价形式．给出含有绝对值不等式的解集．在教学中，不要加深题目的难度，只限于形如$|ax+b|<c$的题目．

4. 解含有绝对值不等式的关键是，把含有绝对值的不等式转化为不含绝对值的不等式，这样就把解含有绝对值的不等式归结为解一般的一次不等式．

5. 教材在本节中，把不等式的解集都用数轴表示出来，旨在让学生体会数形结合的思想，并从几何的角度理解含有绝对值不等式解集的意义．

2.2.4　一元二次不等式

1. 本节的重点是掌握一元二次不等式的解法．

2. 本节的教学要求是：(1) 了解绝对值不等式与一元二次不等式的联系，在此基础上，掌握用配方法解一元二次不等式的方法；(2) 进一步理解用数轴表示不等式解集的

方法；(3) 体会类比、转化等数学思想方法.

3. 本节首先给出一元二次不等式的定义，然后给出了一个等价不等式的结论：

$$x^2 \leqslant m^2 \Leftrightarrow |x| \leqslant m;\ x^2 \geqslant m^2 \Leftrightarrow |x| \geqslant m(m>0).$$

教学时，要进行简要的证明并说明它是把一元二次不等式转化为含有绝对值不等式的依据.

4. 教材中的例 8 (1) (2) 是直接利用 $x^2 \leqslant m^2 \Leftrightarrow |x| \leqslant m$；$x^2 \geqslant m^2 \Leftrightarrow |x| \geqslant m(m>0)$进行解题，为下面解一般形式的一元二次不等式打基础. 建议让学生练习熟练之后，再进行下面的例题讲解. 而例 9 (1) (2) 和例 10 的题目，教师可以对比用配方法解一元二次方程的步骤进行讲解，得到 $(x+s)^2>t$ 或 $(x+s)^2<t$ 的形式后，如果 $t>0$，转化成等价的含有绝对值的不等式，然后解含有绝对值的不等式. 当 $t=0$ 或 $t<0$ 时教师要注意有意识的把下面的情况给学生讲解清楚：

	$(x+s)^2>t$	$(x+s)^2 \geqslant t$	$(x+s)^2<t$	$(x+s)^2 \leqslant t$
$t=0$	$(-\infty, -s) \cup (-s, +\infty)$	$\mathbf{R}$	$\varnothing$	$\{x \mid x=-s\}$
$t<0$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\varnothing$	$\varnothing$

但这个表格不要求学生识记，而是根据实数的特点，理解上面的 8 种情况，从而熟练地得到正确的解集.

用配方法解一元二次不等式不用讨论 $\Delta>0$、$\Delta<0$、$\Delta=0$ 三种不同情况，只要看 t 的符号即可.

5. 用配方法解一元二次不等式 $x^2+bx+c>0(b\neq 0)$的一般步骤为：

(1) 移项，配方得$\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2>\dfrac{b^2-4c}{4}$；

(2) 如果$\dfrac{b^2-4c}{4}>0$，则等价于$\left|x+\dfrac{b}{2}\right|>\dfrac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$，即

$$x+\frac{b}{2}<-\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2} \text{或} x+\frac{b}{2}>\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2},$$

解得 $x<-\dfrac{b}{2}-\dfrac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$或 $x>-\dfrac{b}{2}+\dfrac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$，得出原不等式的解集；

(3) 如果$\dfrac{b^2-4c}{4}=0$，则原不等式的解集为$\left\{x \middle| x\neq -\dfrac{b}{2}\right\}$；

(4) 如果$\dfrac{b^2-4c}{4}<0$，则原不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

如果二次项系数不为 1，则首先把两边同除以二次项系数，使其变为 1. 对于一元二次不等式的其他情况，可以采取与此类似的办法求解. 这个一般步骤教师不必要求学生掌握，让学生在以后的学习中自己来总结.

6. 在本节中只介绍用配方法解一元二次不等式，其他方法不再向学生介绍．在第三章中运用二次函数的知识，介绍用“图象法”解一元二次不等式，可以简化解一元二次不等式（$\Delta>0$）的步骤．这样的安排，既承前启后，又分散了难点．

Ⅳ　参考教案

课题：2.2.4　一元二次不等式（一）

教学目标：

1. 理解一元二次不等式的概念．
2. 能通过配方把一元二次不等式转化为同解的含有绝对值的不等式，并求其解集．
3. 进一步理解用数轴表示不等式解集的方法．
4. 体会数形结合、转化、分类讨论等数学思想方法，提高运算能力和逻辑思维能力．

教学重点： 掌握一元二次不等式的解法，并准确地求出一元二次不等式的解集．

教学难点： 将一元二次不等式转化为同解的含有绝对值的不等式．

教学方法： 启发式、讲练结合．

教学过程：

一、复习回顾

1. 用配方法解一元二次方程：$x^2-2x-3=0$．
2. 不等式的性质推论：如果 $a>0$，$b>0$，那么 $a>b\Leftrightarrow a^2>b^2$．
3. 填空：如果 $a>0$，那么 $|x|>a\Leftrightarrow$______________．

二、引入新课

用一堆木板制成 8 米长的栅栏，围成一个矩形的院子 $ABCD$（如图 2-2），院子的一侧 CD 是房屋的墙（足够长），不必再用栅栏去围，如果要使围成的矩形院子面积不小于 6 平方米，请问与墙正对的栅栏材料 AB 的长度取值的范围应是多少米？

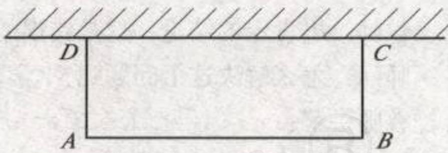


图 2-2

教师引导学生回答以下各个小问题：

(1) 矩形面积公式 $S_{ABCD}=AB\times BC$；

(2) $AB+BC+AD=8$ 米；

(3) 如果设 AB 的长度是 x 米，那么 BC 的长度是 $\frac{8-x}{2}$ 米；

(4) 用含有 x 的代数式表示出矩形 $ABCD$ 的面积是 $x\times\frac{8-x}{2}$ 米．

学生口答，教师板书，进行解题．

解 设与墙正对的栅栏材料 AB 长度为 x 米，则 BC 的长度是$\frac{8-x}{2}$米，

由矩形院子面积不小于 6 平方米可得：

$$x\times\frac{8-x}{2}\geqslant 6,$$

$$8x-x^2\geqslant 12,$$

$$x^2-8x+12\leqslant 0.$$

教师设疑，如何解这个不等式，引出一元二次不等式.

三、讲授新课

1. 一元二次不等式的概念

只含有一个未知数，未知数的最高次项的次数是 2，且系数不为 0 的整式不等式叫做**一元二次不等式**. 它的一般形式是

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0(a\neq 0).$$

教师给出下列式子，判断式子是否是一元二次不等式？（学生口答）

(1) $x^2-3x+5\leqslant 0$；　(2) $x^2-9\geqslant 0$；　(3) $3x^2-2x>0$；　(4) $x^2+5<0$；

(5) $x^2-2x\leqslant 3$；　(6) $3x+5>0$；　(7) $(x-2)^2\leqslant 4$；　(8) $x^2<4$.

2. 解形如 $x^2\leqslant m^2$ 或 $x^2\geqslant m^2(m>0)$ 的一元二次不等式

(1) 师问：你能写出 $x^2<4$ 的解集吗？（学生思考，尝试回答）

师问：$x^2<4$ 和 $|x|<2$ 的解集相同吗？（学生思考，教师让学生讨论，并让学生说出自己所得到的结论，并说明为什么）

教师提示：不等式的性质的推论：如果 $a>0$，$b>0$，那么 $a>b\Leftrightarrow a^2>b^2$.（学生继续讨论）

师问：$x^2<4\Leftrightarrow x^2<2^2\Leftrightarrow x<2$ 正确吗？（学生发表不同的意见）

教师给出肯定的结论：这是错误的. 原因是忽略了条件“$a>0$，$b>0$”.

师问：怎么解决这个问题呢？（学生思考）教师提示：用绝对值解决.

教师讲解：$x^2<4\Leftrightarrow |x|^2<2^2\Leftrightarrow |x|<2$.（学生得到正确的答案：解 $|x|<2$ 得 $-2<x<2$，所以原不等式的解集为 $(-2,2)$. 学生在数轴上表示出解集.）

(2) 师问：你能写出 $x^2\geqslant 9$ 的解集吗？（学生仿照上问，自己独立解决）

教师给出正确答案：原不等式等价于 $|x|\geqslant 3$，得到原不等式的解集为 $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

一般情况：当 $m>0$ 时，$x^2\leqslant m^2\Leftrightarrow |x|\leqslant m$；

$$x^2\geqslant m^2\Leftrightarrow |x|\geqslant m.$$

课堂练习：练习 2-6　1. (1) (2)

3. 解一般形式的一元二次不等式

例 8　(1) $(x+2)^2<4$；　　(2) $(x-1)^2\geqslant 9$.

(1) 教师给出解题步骤；

(2) 学生自行尝试解决，部分学生板演. 教师给予指导.

课堂练习：练习 2-6　2. (1) (2)

例 8　(3) $x^2-2x-3\leqslant 0$；

教师分析：怎样转化成类似于例 1 的形式？

类比用配方法解一元二次方程，学生口答，教师板演.

解：原不等式左边配方，得

$$x^2-2x+1^2\leqslant 3+1^2.$$

即

$$(x-1)^2\leqslant 4.$$

学生独立完成题目的后半部分. 并在数轴上表示解集.

课堂练习：解决本节课引入的问题，解不等式 $x^2-8x+12\leqslant 0$，得到与墙正对的栅栏材料 AB 的长度取值的范围 $[2, 6]$.

例 8　(4) $2x^2-5x-3>0$.

学生口答，教师板演，共同完成题目.

教师提示学生第一步应该两边除以 2，得到等价不等式.

课堂练习：练习 2-6　2. (3) (4)

四、课堂小结

本节课主要针对 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$ 的 $b^2-4ac>0$ 的情况进行求解：

(1) 两边同除以 a，得到二次项系数为 1 的不等式；

(2) 移项，配方得到 $(x+s)^2>t$ 或 $(x+s)^2<t(t>0)$ 的形式；

(3) 等价于 $|x+s|>\sqrt{t}$ 或 $|x+s|<\sqrt{t}$；

(4) 解绝对值不等式，得到原不等式的解集.

五、课外作业

1. 预习内容：

教材上的例 9

2. 习题二　6. (3) (4)

六、板书设计

2.2.4　一元二次不等式	
1. 一元二次不等式的概念 2. 当 $m>0$ 时 $x^2\leqslant m^2\Leftrightarrow \lvert x\rvert\leqslant m$； $x^2\geqslant m^2\Leftrightarrow \lvert x\rvert\geqslant m$.	3. 求解的一般步骤

V 习题答案、提示和解答

练习 2-1

1. (1) $x_1=2$，$x_2=-2$； (2) $x_1=0$，$x_2=3$；
   (3) $x_1=-1$，$x_2=2$； (4) $x_1=x_2=1$；
   (5) 无实数根； (6) 无实数根.
2. (1) $x_1=-3+\sqrt{2}$，$x_2=-3-\sqrt{2}$； (2) $x_1=-1$，$x_2=8$；
   (3) $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=3$； (4) $t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$t_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$；
   (5) $x_1=x_2=3$； (6) 无实数根.
3. (1) $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$； (2) $x_1=-9$，$x_2=0$；
   (3) $x_1=-1$，$x_2=\frac{3}{5}$； (4) $x_1=-1$，$x_2=7$；
   (5) $x_1=1$，$x_2=5$； (6) $x_1=-\frac{1}{3}$，$x_2=1$.
4. $a=0$ 或 $a=4$.

练习 2-2

1. (1) 正确； (2) 不正确； (3) 不正确； (4) 正确.
2. (1) $-\frac{1}{2}<-\frac{1}{3}$； (2) $a+3<a+6$；
   (3) $2x^2+3x+4>x^2+3x+3$； (4) $a^2+10>6a$；
   (5) $2a^2-a+2>a^2-3a$； (6) $(x-1)(x+2)-3<(2x-3)(x+1)$.
3. (1) $<$； (2) $>$； (3) $>$； (4) $>$； (5) $<$； (6) $<$.
4. a，ab^2，ab.

练习 2-3

1. (1) $(1, +\infty)$； (2) $(-\infty, 3)$；
   (3) $[2, +\infty)$； (4) $(-\infty, -3)$；
   (5) $(-\infty, 2]$； (6) $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.
2. (1) $(2, +\infty)$； (2) $(-\infty, 3)$；
   (3) $(-2, 4)$； (4) $\varnothing$；
   (5) $\{1\}$； (6) $(-1, 1)$.
3. (1) $(-3, +\infty)$； (2) $(2, +\infty)$；
   (3) $(-\infty, 4]$； (4) $(-\infty, -36)$.
4. (1) $(-\infty, -4)$； (2) $\varnothing$；

(3) $\left(-\frac{5}{3}, 5\right]$；　(4) $\left(\frac{1}{12}, +\infty\right)$.

5. 略.

练习 2-4

1. (1) $(-1, 1)$；　(2) $(-\infty, -5]\cup[5, +\infty)$；

(3) $(-\infty, -2)\cup(2, +\infty)$；　(4) $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$；

(5) $(-\infty, -1)\cup(-1, +\infty)$；　(6) $\varnothing$.

2. (1) $(-5, 13)$；　(2) $(-\infty, 0)\cup(4, +\infty)$；

(3) $[-1, 2]$；　(4) $(-\infty, -4]\cup[3, +\infty)$.

3. $[0, 1]\cup[3, 4]$.

4. $a=3$，$b=6$.

练习 2-5

1. (1) $(-4, 4)$；　(2) $(-\infty, -4)\cup(4, +\infty)$；

(3) $\{x \mid x\neq 3\}$；　(4) $\varnothing$；

(5) $\mathbf{R}$；　(6) $\varnothing$.

2. (1) $(-9, 7)$；　(2) $(-\infty, -8)\cup(12, +\infty)$；

(3) $(-\infty, -2)\cup(5, +\infty)$；　(4) $(-7, 2)$.

3. (1) $\{x \mid x=-2\}$；　(2) $(-\infty, -2)\cup(-2, +\infty)$；

(3) $\varnothing$；　(4) $\mathbf{R}$.

4. $(-\infty, -1)\cup(5, +\infty)$.

5. $(-\infty, -2\sqrt{2}-1)\cup(2\sqrt{2}-1, +\infty)$.

习题二

1. (1) $x_1=-\frac{3}{2}$，$x_2=\frac{3}{2}$；　(2) $x_1=0$，$x_2=1$；

(3) $x_1=-3$，$x_2=-2$；　(4) $x_1=-1$，$x_2=6$；

(5) $x_1=x_2=-1$；　(6) $x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=1$；

(7) $x_1=1$，$x_2=3$；　(8) $x_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

2. 提示：用作差法判断.

(1) $-\frac{8}{9}<-\frac{7}{8}$；　(2) $(x+5)(x+7)<(x+6)^2$；

(3) $(x+1)^2\geqslant 2x+1$；　(4) $2a^2-7a+2>a^2-6a+1$.

3. (1) $\{x \mid x>2\}$；　(2) $\{x \mid x>1\}$；

(3) $\{x \mid -2<x<9\}$；　(4) $\{x \mid -1<x\leqslant 0\}$；

(5) $\{x \mid x \leqslant -6\}$；　(6) $\{x \mid x \geqslant 8\}$.

4. (1) $\left\{x \mid x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$；　(2) $\left\{x \mid x > -\frac{2}{5}\right\}$；

(3) $\{x \mid 4 < x < 5\}$；　(4) $\left\{x \mid -\frac{28}{3} < x < -2\right\}$.

5. 略.

6. (1) $[-2, 1)$，$\{x \mid -2 \leqslant x < 1\}$；　(2) $(-1, +\infty)$，$\{x \mid x > -1\}$；

(3) $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$，$\{x \mid x < 1$ 或 $x \geqslant 2\}$；

(4) $[-2, -1] \cup (0, +\infty)$，$\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant -1$ 或 $x > 0\}$.

7. (1) $\left[-\frac{4}{3}, 2\right]$；　(2) $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$；

(3) $\left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$；　(4) $\left[-1, \frac{13}{3}\right]$；

(5) $(4, 10) \cup (-4, 2)$；　(6) $\mathbf{R}$.

8. (1) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$；　(2) $(-1, 11)$；

(3) $(-\infty, -6) \cup (-6, +\infty)$；　(4) $\varnothing$；

(5) $\mathbf{R}$；　(6) $\varnothing$.

9. $(-\infty, 0) \cup (0, 4)$.

10. 解：设李明同学数学考了 x 分.

由题意得

$$92 \times 2 + x \geqslant 90 \times 3,$$

解得

$$x \geqslant 86.$$

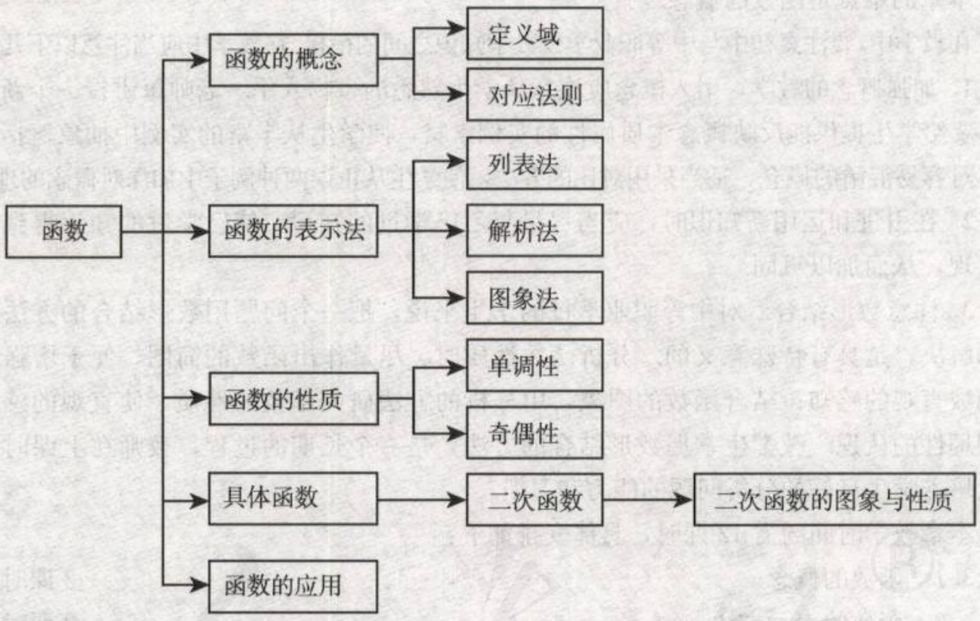
答：李明同学数学至少考了 86 分.

第三章　函　　数

思想火花：

至乐莫如读好书，至要莫如教学子.

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 通过同一过程中的变量关系理解函数的概念，会用集合与对应的语言来刻画函数，了解构成函数的要素．会求一些简单函数的定义域及值域.

2. 掌握函数的表示方法，会画一些简单函数的图象.

3. 理解函数的单调性和奇偶性的概念，能判断一些简单函数的单调性和奇偶性.

4. 掌握二次函数的图象和性质，会利用函数的图象来理解和研究二次函数的性质.

5. 会运用函数知识解决一些简单实际问题.

III 教材分析和教学建议

本章主要内容包括：函数的概念及其表示方法、函数的性质（单调性和奇偶性）、一元二次函数的图象和性质等.

本章教材在两个实例的基础上，给出了函数的概念；教材通过实例介绍了函数的列表法、图象法及解析法等表示方法，进一步刻画了函数的概念；教材以具体的函数为例，定义了函数的单调性和函数的奇偶性；在学习了函数的概念及其表示方法，函数的单调性、奇偶性的基础上，以初中已经学过的一元二次函数为载体，进一步研究函数的图象和性质.

函数与方程的思想是中学数学的一种重要的思想. 函数能够刻画事物之间对应变化的过程，是数学中最重要的基本概念之一. 本章出现的概念、定理、推论和符号较多，是数学中最基本和最重要的内容之一. 学生学好这一章，对学好以下各章有重要的意义.

本章的重点是函数的概念及其性质.

本章的难点是函数的概念.

在教学中，要注意初中与中等职业学校数学知识之间的衔接. 在教学中应当注意以下几点：

1. 加强概念的教学，引入概念应注意从学生熟悉的事物入手. 老师每讲授一个新概念时，要给学生提供能反映概念本质属性的实例素材，使学生从丰富的实例中抽象概括出概念. 对容易混淆的概念，适当采用对比的方法，使学生从正误两种例子中加深对概念的理解.

2. 在引进和运用新知识时，应当尽量复习已学过的知识，使已学过的知识得到不断的重现，从而加以巩固.

3. 注意数形结合. 对中等职业学校的学生来说，把一个问题用数形结合的方法来分析和解决，是具有特殊意义的. 分析函数性质时，尽量作出函数的简图，便于增强学生对函数直观的感知；结合函数的图象，用分析的方法研究函数的性质，使直观的感知上升到理性的认识. 教学生掌握数形结合的方法，是一个长期的过程，教师在上课时应当尽量培养学生良好的分析问题的能力和习惯.

本章教学时间约需 12 课时，具体安排如下：

3.1 函数的概念	2 课时
3.2 函数的表示方法	2 课时
3.3 函数的单调性	2 课时
3.4 函数的奇偶性	2 课时
3.5 二次函数的图象和性质	2 课时
3.6 函数的应用	1 课时
小结与复习	1 课时

3.1 函数的概念

1. 本小节的重点是在理解初中变量的基础上，理解集合对应观点下函数的概念，难

点是对函数符号 $y=f(x)$ 的理解.

2. 本节通过例子让学生用对应的观点来理解函数，从初中学过的函数概念说起，通过列举实际生活中的常见的问题，把问题中两个变量存在的依赖关系抽象为一种对应关系，然后用集合的语言来进行刻画，得到了函数的更为确切的定义. 在这一小节，教师可适当引导学生举一些实际例子以帮助学生理解对应观点下的函数定义.

3. 函数的近代定义是这样叙述的：设 A，B 都是非空数集，如果按某个对应关系 f，使集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 与它对应，那么就称 f：$A\to B$ 为从 A 到 B 的函数，记作

$$y=f(x),$$

其中 $x\in A$，$y\in B$. 集合 A 叫做函数 $f(x)$ 的定义域，函数值的集合 C 叫做函数 $f(x)$ 的值域，显然 $C\subseteq B$.

这个定义与教材上的定义在叙述上有一定的区别，教材之所以不采用函数的近代定义主要有两个原因，一是本教材没有映射的内容；二是为了降低难度，本教材采用了一个折衷的定义，即在教材中的函数定义中只出现了一个非空的数集 A，而没有交待非空数集 B.

对于教材中“函数的关系实质上是表达两个数集的元素之间按照某种法则确定的一种对应关系.”这一句话，有同学可能对“两个数集”产生疑问，教师可以在讲解完函数的概念后，结合定义域和值域进行分析说明.

函数的近代定义与传统定义（用变量叙述的定义）在实质上是一致的，两个定义中的定义域和值域完全相同，两个定义中的对应法则实际上也一样，只不过叙述的出发点不同，传统定义是从变化的观点出发，其中的对应法则是将自变量 x 的每一取值与唯一确定的函数值对应起来；近代定义的对应法则是从集合与对应的观点出发，其中的对应法则是将原象集合中的任一元素与象集合中的唯一确定的元素对应起来. 从历史上来看，传统定义来源于物理公式，最初的函数概念几乎等同于解析式. 后来，人们逐渐意识到定义域与值域研究受到了不必要的限制. 如果只根据变量观点，有些函数就很难进行深入研究. 例如

$$f(x)=\begin{cases}1, x\text{ 是有理数}\\0, x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

对于这个函数，如果用变量的观点来解释，会显得十分勉强，也说不出 x 的物理意义是什么，但是用集合与对应的观点来解释，就十分自然，从这个意义上来说，函数的近代定义更具有一般性. 实际上，我们在这里说的传统定义，已经渗透了集合与对应的观点. 如“按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值和它对应”，已经十分接近近代定义了. 不过，由于用变量观点描述函数比较生动、直观，所以现在仍然广泛使用着传统定义. 今后，为了方便，我们有时也仍然使用传统定义. 为了使学生理解引入新定义的必要性，可以采用比较的方式，引导学生分析实例，获得体验.

4. 定义域、对应法则是函数的两个要素.

一般地说，在函数记号 $y=f(x)$中，f 代表对应法则，等式 $y=f(x)$ 表明，对于定

义域中的任意 x，在“对应法则 f”的作用下，即可得到 y. 当然，情况比较简单时，对应法则 f 可用一个解析式来表示. 但在不少问题中，对应法则 f 也可能不便用或不能用一个解析式来表示，这时就必须采用其他方式，如数表或图象等.

定义域是自变量 x 的取值范围，它是函数的一个不可缺少的组成部分. 定义域不同而解析式相同的函数要看作不同的函数. 例如，二次函数 $y=x^2$，它的定义域通常是实数集；但当考察正方形的边长与面积的关系时，它的定义域是正实数集. 显然，这两个函数是不同的函数. 它们的不同也可从图象相异来得到验证. 又如 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$，同样可由它们的定义域与图象来验证它们是不同的函数. 在中学阶段所研究的函数，通常都可用解析式来表示. 如果未加特别说明，函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数 x 的集合. 在实际问题中，还必须考虑自变量 x 代表的具体量的允许取值范围.

5. 函数符号 $y=f(x)$ 是学生学习的难点. 这是一个抽象的数学符号，教学时首先要强调符号“$y=f(x)$”为“y 是 x 的函数”这句话的数学表示，它仅仅是函数的符号，不是表示“y 等于 f 与 x 的乘积”，$f(x)$ 也不一定是解析式；其次要用具体的函数来说明符号 $y=f(x)$ 的含义，符号 $f(a)$ 与 $f(x)$ 既有区别，又有联系，$f(a)$ 表示当自变量 $x=a$ 时函数 $y=f(x)$ 的值，它是一个常量；而 $f(x)$ 是自变量 x 的函数，在一般情况下，它是一个变量.

教材中选用的两个例子：函数 $f(x)=x^3+x$ 与 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，一个是奇函数，一个是偶函数，其目的是为函数的奇偶性一节打下基础.

6. 计算器的应用是数学教学的一项内容，本节练习第 4 题的目的就是为了让学生熟悉计算器的使用.

3.2 函数的表示方法

1. 本节主要介绍三种函数表示的方法，即解析法、列表法和图象法. 本节重点是函数的解析法和图象法，难点是对分段函数的理解.

2. 解析法就是将两个变量的函数关系，用一个式子表示. 解析法有两个优点：一是简明、全面地概括了两个变量之间的关系，函数关系清楚；二是可以通过解析式求出任意一个自变量的值所对应的函数值.

列表法就是列出表格表示两个变量的函数关系. 这种方法学生是比较熟悉的，如银行利率表、平方根表、立方根表等，都是用列表法表示的. 列表法的优点是不需要计算就可以直接得到与自变量的值对应的函数值.

图象法就是用图象来表示两个变量的函数关系. 这种方法的优点是能够直观地表示与自变量的变化相应的函数值的变化趋势，使得我们可以通过图象来研究函数的性质. 图象法也常常用到生产和生活中去，如工厂的生产进度图、股市的股价指数走向图等都是这样的例子.

对于一个具体的问题，应当教会学生选择恰当的方法来表示问题中的函数关系.

3. 函数的图象是一种特殊的图形. 根据函数的定义，自变量 x 在定义域内取每一个

值时，相应的函数值 y 是唯一的，反映到图象上是，与 y 轴平行的直线与函数的图象至多有一个交点. 如果有两个或两个以上的交点，则这个图形必定不是函数的图象. 教材中设计的“想一想”的问题，能够帮助学生认清函数图象的本质特征.

4. 例 1、例 3 是两个特殊的函数，可以向学生进一步说明，函数的图象不一定是一条或几条无限长的平滑曲线，也可以是一些点，一些线段，一段曲线等. 针对学生的情况，教师可以再选取几个例子讲解.

5. 在讲解本节例 2 时，教师应先由函数解析式分析图象的大体位置与总体趋势，然后再列表、描点，以克服作图的盲目性. 教学中，应通过类似题目培养学生分析问题、解决问题的能力. 有两点需要提醒学生注意：一是 x 的取值分布要恰当，二是连线时要用光滑的曲线连接，不能把光滑的曲线画成锯齿状.

6. 教学时教师应注重本节课的教学，避免将本节内容简单化. 通过教学和课后练习，使学生熟悉一次函数、二次函数、反比例函数的图象，便于以它们为载体，研究函数的单调性和奇偶性. 另外，图象是数形结合的反映，教学时应尽量培养学生利用数形结合的思想和方法来观察、分析和解决问题的习惯和能力.

教师应在指导学生分析图象上多下功夫，如图象中反映出来的最值、变化趋势（单调性）、对称问题等，为以后学习函数的性质以及指数函数、对数函数与三角函数的图象与性质打下基础.

3.3 函数的单调性

1. 本节的内容是函数的单调性的概念和判断某些函数的单调性的方法，它是这一章的一个重点内容. 由于判断或证明函数的单调性时，常常要综合运用一些知识，如不等式、配方法及数形结合的思想方法，因此函数的单调性的判断或证明也是本节的一个难点.

2. 为了研究函数的单调性，教材先给出了学生较熟悉的函数 $y=2x$，$y=-2x$，$y=x^2$ 的图象，本节的教学应以这些基本的函数图象为素材，逐步由形到数，引导学生发现函数图象上升或下降时函数值的变化规律，然后再推广到一般函数，从而得出增、减函数的定义.

3. 函数的单调性是对某个区间而言的，应从以下两个方面来理解：

(1) 对于单个的点，不存在单调性问题. 另一方面，对于闭区间上的连续函数来说，只要在开区间上单调，它在闭区间上也就单调. 因此，在考虑它的单调区间时，包括不包括端点都可以，但习惯上，我们在讲函数的单调区间时，一般是指保持函数单调性的最大区间. 但需要注意的是，对于在某些点上不连续的函数，单调区间不包括不连续点. 例如函数

$$y=\begin{cases} x+1 & (x>0) \\ -x-1 & (x\leqslant 0) \end{cases}$$

在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数，而不说成函数在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

(2) 有些函数是在整个定义域内具有单调性，如例 2；有些函数在整个定义域上不单调，只有在定义域的某些区间上是单调函数，如例 1；也有的函数没有严格单调区间，如

$f(x)=2$；或者有的函数的定义域根本就不是区间，如上节 3.2 函数的表示方法中的例 1.

4. 在判断函数的单调性时，我们可以借助函数的图象、函数值的变化情况等多方面进行. 但要证明一个函数的单调性时，仅由函数的图象或一些函数值的变化情况来说明是不够的，最终应当根据单调性的定义来加以证明.

5. 为了有利于以后利用函数单调性比较有关数值大小的教学，建议教学中除了讲清增、减函数的定义外，再明确一下它们的等价说法，即增函数是在给定的区间上随着自变量的增大（减小）而增大（减小）；减函数是随着自变量的增大（减小）而减小（增大）.

3.4 函数的奇偶性

1. 本节重点是函数奇偶性的判断，难点是函数奇偶性概念的理解.

2. 奇、偶函数的解析定义与图象性质的紧密结合，是本小节教学奇、偶函数的主要特点. 奇函数与中心对称、偶函数与轴对称密切相关. 从代数、几何两个方面描述函数的性质，可强化学生对奇、偶函数性质的理解.

3. 教材在给出奇函数和偶函数定义之前，先通过两个函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=x^2$，引导学生发现规律 $f(-x)=-\dfrac{1}{x}=-f(x)$，$g(-x)=x^2=g(x)$，由此再给出奇函数和偶函数的定义. 讲完奇函数和偶函数的定义后，可让学生再列举一些奇函数和偶函数的例子.

4. 在讲授奇函数与偶函数的定义时，要引导学生充分理解定义，教师可采用设问等多种形式，使学生理解以下几个问题：

（1）函数的奇偶性是函数一个整体性质，不同于函数的单调性. 函数的单调性在某一区间上可以是增函数，而在另一个区间上可以是减函数；函数的奇偶性是指函数在整个定义域上的一种性质.

（2）函数的奇偶性，是指一个函数自身具有的一种性质，不能说两个函数之间是否具有奇偶性.

（3）函数的定义域是否关于原点对称，是判断一个函数是不是奇函数或偶函数的必要条件. 考察一个函数的奇偶性一定要先来考察它的定义域是不是关于原点对称. 如果定义域关于原点不对称，那么该函数就没有奇偶性可言.

事实上，在奇函数或偶函数的定义中，已经隐含了函数的定义域关于原点对称这一条件，这一条件在式子 $f(-x)=-f(x)$和 $f(-x)=f(x)$中. 如果定义域关于原点不对称，那么对于定义域内的自变量 x，一定有一个 $-x$ 不在其定义域内，此时对于 $f(-x)$ 就失去了存在的意义，也就不能满足 $f(-x)=-f(x)$ 和 $f(-x)=f(x)$ 中的任一个.

5. 教材中“奇函数的图象关于原点成中心对称，偶函数的图象关于 y 轴成轴对称”这两个结论是通过观察图象得出的，因此，引导学生读图是一个很重要的过程.

对于教材中“研究函数的奇偶性对了解函数的性质非常重要，如果我们知道一个函数是奇函数或偶函数，则只要把这个函数的定义域分成关于坐标原点对称的两部分，得

出函数在其中一部分上的性质和图象，就可得出这个函数在另一个部分上的性质和图象.”这一段话，要引导学生，结合本节的“想一想”，通过图象来理解. 但在讲解本节“想一想”中的内容时，不必给出严格的证明过程.

6. 对于教材中函数 $f(x)=0$ 的奇偶性的认识，教师可以通过函数图象（即 x 轴）的对称性来加以说明，不必给出严格的证明过程.

如果一个函数既是奇函数又是偶函数，那么这个函数在其定义域内恒为 0. 因为对于定义域内的任一个 x，由于 $f(-x)=f(x)$，且 $f(-x)=-f(x)$，可得 $f(x)=0$.

7. 对于一个函数的奇偶性来说，有四种可能：

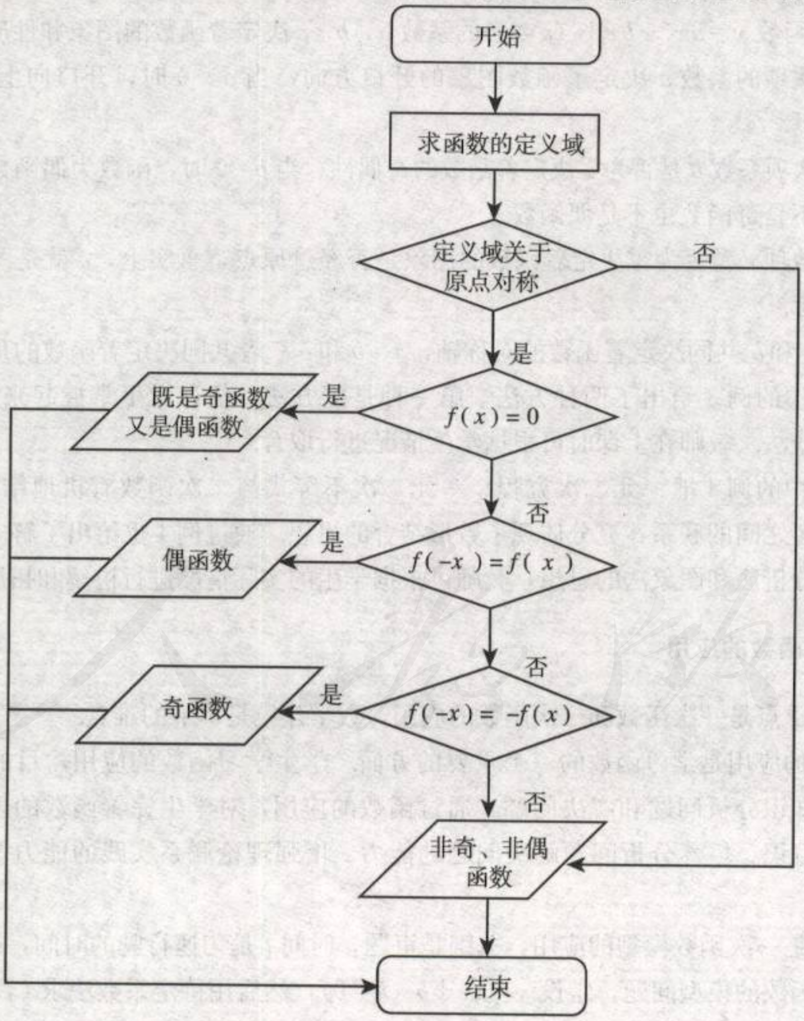
是奇函数但不是偶函数；

是偶函数但不是奇函数；

是偶函数又是奇函数；

既不是奇函数也不是偶函数.

8. 教师在讲授完本节内容后，可以结合下面的流程图来理顺判断函数奇偶性的步骤：



3.5 二次函数的图象和性质

1. 本节的重点是二次函数的图象与性质，难点是数形结合思想的应用.

2. 学生在初中已学习过二次函数，当时主要是通过观察函数的图象得出二次函数的性质的. 也就是说，当时学生的认识还是感性的，到了高中有重新研究二次函数性质的必要. 二次函数不仅是进一步学习数学的基础，并且应用也相当广泛. 熟练掌握二次函数的性质以及研究方法，对提高学生的数学素养非常重要.

3. 教材先给出了二次函数的定义，然后通过两个具体的例子，讲了二次函数图象的画法. 利用配方变形，对函数式进行分析，得出它的最大值或最小值，然后以取得最值时 x 的值为中心来对称取自变量的值，进行列表，作函数图象. 运用数形结合的方法，推广得出一般二次函数的图象和性质.

4. 在本节的教学中，应当突出数形结合的思想，要强调制作对应值表及描点作图，配合代数分析，使学生掌握数形结合研究函数性质的方法.

5. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的系数 a，b，c 决定着函数的图象和性质.

(1) 二次项的系数 a 决定了函数图象的开口方向，当 $a>0$ 时，开口向上；当 $a<0$ 时，开口向下.

(2) 一次项系数 b 是否为零决定着函数的奇偶性. 当 $b=0$ 时，函数为偶函数；当 $b\neq0$ 时，函数既不是奇函数也不是偶函数.

(3) 常数项 c 是否为零决定着函数的图象是否经过原点，事实上，c 就是图象与 y 轴交点的纵坐标.

另外，a 和 b 共同决定着函数的对称轴，a、b 和 c 三者共同决定着函数的顶点位置.

6. 教材中的例 3 给出了两种方法，第一种是配方法，估计学生掌握起来难度较大；第二种是公式法. 教师在上课时可根据学生情况进行取舍.

7. 教材中的例 4 把一元二次方程、一元二次不等式与二次函数有机地结合在一起，揭示了这三者之间的联系，充分体现了数形结合的思想. 通过例 4 也给出了解一元二次不等式的区间分析法和图象法的思想，教师可根据学生的实际情况进行讲解和拓展.

3.6 函数的应用

1. 教学重点是一次函数和二次函数的应用，数学建模是本节的难点.

2. 函数的应用是学习函数的一个重要的方面. 学生学习函数的应用，目的就是利用已有的函数知识分析问题和解决问题. 通过函数的应用，对学生完善函数的思想、激发应用数学的意识、培养分析问题解决问题的能力、增强理论联系实践的能力等，都有很大的帮助.

3. 例 1 是一次函数模型的应用，关键是审题，时间 t 是匀速行驶的时间，$s_0=13$. 一般地，一次函数的模型问题，常设 $y=kx+b$ ($k\neq0$)，然后用待定系数法求 k，b 的值.

4. 例 2 是客房租金如何定价，收入才能最高的实际应用问题，是二次函数模型的应用，解题的关键是读懂题意，合理设出未知量，列出函数关系式. 利用二次函数求极值的问题，正确地列出函数解析式是解决此问题的关键.

Ⅳ 参考教案

课题：3.4　函数的奇偶性

教学目标：

知识目标：使学生理解奇函数、偶函数的概念，学会运用定义判断函数的奇偶性.

能力目标：通过设置问题情境培养学生判断、推理的能力.

情感目标：通过绘制和展示优美的函数图象来陶冶学生的情操. 通过组织学生分组讨论，培养学生主动交流的合作精神. 使学生学会认识事物的特殊性与一般性之间的关系，培养学生善于探索的思维品质.

教学重点、难点：

重点是函数的奇偶性的判断；难点是函数奇偶性概念的理解.

教学方法：

观察、归纳、启发、探究.

教学过程：（用多媒体辅助教学）

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	复习前面所学求函数值的知识.	教师提出问题，学生回答.	为学生理解奇、偶函数的定义做好准备.
概念形成	1. 在多媒体屏幕上展示函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 与 $g(x)=x^2$ 的图象.	1. 让学生观察函数的图象并回答，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的图象关于原点中心对称，函数 $g(x)=x^2$ 的图象关于 y 轴对称.	1. 要求学生观察图象以锻炼学生的观察、发现等实践能力，为下一步问题的提出和解决做好准备. 让学生通过观察能够发现两个已学函数的对称性.
	2. 引领学生分别求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 与 $g(x)=x^2$ 在 $-x$ 与 x 处的函数值.	2. 教师巡回观察学生求函数值的过程，选择适当的学生准备回答求解的结果.	2. 学生通过计算两个函数的函数值，能够进一步明确函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 与 $g(x)=x^2$ 在 $-x$ 与 x 处的函数值的关系.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	3. 让学生求出 $x=\pm3$，$x=\pm2$，$x=\pm1$，…时的函数值，同时让两个函数图象上对应的点在两个函数图象上闪现，让学生发现两个函数的奇偶性反映到函数值上的具有的特性：$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$，然后通过解析式给出证明，进一步说明这两个特性对定义域内的任意一个 x 都成立.	3. 老师边让学生计算相应的函数值，边操作课件，引导学生发现规律，总结规律，然后要求学生给出证明；学生通过观察和运算逐步发现两个函数具有的不同特性：$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$.	3. 通过特殊值让学生认识两个函数各自的对称性实质：自变量互为相反数时，函数值互为相反数或相等这两种关系.
概念形成	4. 奇函数、偶函数的定义：奇函数：如果对于函数 $f(x)$ 定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数；偶函数：如果对于函数 $f(x)$ 定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数.	4. 教师引导归纳：这时我们称像函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 这样的函数是奇函数，像函数 $g(x)=x^2$ 这样的函数为偶函数，请同学们根据对奇函数和偶函数的初步认识来加以推广，给奇函数和偶函数分别下一个定义. 学生讨论后回答，然后老师引导使定义完善. 在屏幕展示奇函数和偶函数的定义. 老师：根据定义，哪位同学能举出另外一些奇函数和偶函数的例子？ 学生回答.	4. 通过引例使学生对奇函数和偶函数的形和数的特征有了初步的认识，此时再让学生给奇函数和偶函数下定义应是水到渠成.
	(1) 强调定义中“任意”二字，说明函数的奇偶性是函数在定义域上的一个整体性质，它不同于函数的单调性.	教师设计以下问题组织学生讨论思考回答. 问题 1：奇函数、偶函数的定义中有“任意”二字，说明函数的奇偶性是怎样的一个性质？与单调性有何区别？	通过对两个问题的探讨，引导学生认识以下两点：(1) 函数的奇偶性是一个整体性质，它不同于单调性. (2) 函数的定义域关于原点对称是一个函数为奇函数或偶函数的必要条件.
	(2) 奇函数与偶函数的定义域的特征是关于原点对称.	问题 2：$-x$ 与 x 在几何上有何关系？具有奇偶性的函数的定义域有何特征？	教师层层深入地提出问题，学生根据教师的诱导，思考问题并积极回答问题，加深对定义的理解.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	(3) 奇函数与偶函数图象的对称性： 一个函数是奇函数的充要条件是，它的图象是以坐标原点为对称中心的中心对称图形； 一个函数是偶函数的充要条件是，它的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形.	问题 3：结合函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的图象回答以下问题：(1) 对于任意一个奇函数 $f(x)$，图象上的点 $P(x, f(x))$ 关于原点的对称点 P' 的坐标是什么？点 P' 是否也在函数 $f(x)$ 的图象上？由此可得到怎样的结论？(2) 如果一个函数的图象是以坐标原点为对称中心的中心对称图形，能否判断它的奇偶性？ 学生通过回答问题 3 可以把奇函数图象的性质总结出来，然后老师让学生自己研究一下偶函数图象的性质.	(3) 由于学生对函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 和函数 $g(x)=x^2$ 的图象的对称性已有所认识，在此加以推广得到奇函数和偶函数的图象的性质是比较容易的，经过由形到数再由数到形的过程，可使学生加深对本节内容的理解.
应用举例	例　判断下列函数是否具有奇偶性： (1) $f(x)=x+x^3+x^5$； (2) $f(x)=x^2+1$； (3) $f(x)=x+1$； (4) $f(x)=x^2$，$x\in[-1, 2]$.	1. 在黑板上板书例子来示范解题的步骤，教师要适时引导学生做好总结归纳. 2. 可让学生来设计如何研究函数的性质和图象的方案，并根据学生提供的方案，点评方案的可行性，并比较哪个方案简单. 3. 做完例题后要求学生做练习，及时巩固，在学生练习过程中，教师做好巡视指导.	1. 通过例题的讲解解决如下问题：①根据定义判断一个函数是奇函数还是偶函数的方法和步骤是：第一步先判断函数的定义域是否关于原点对称；第二步判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系. ②通过例题中的第 (3) 小题说明有的函数既不是奇函数也不是偶函数. ③例题中的第 (4) 小题说明判断函数的奇偶性先要看一下定义域是否关于原点对称. ④$f(x)=0$ 既是奇函数又是偶函数，前提是定义域关于原点对称. ⑤总结：对于一个函数来说，它的奇偶性有四种可能：是奇函数但不是偶函数；是偶函数但不是奇函数；既是奇函数又是偶函数；既不是奇函数也不是偶函数.
归纳小结	从知识、方法两个方面来对本节课的内容进行归纳总结.	让学生谈本节课的收获，并进行思考.	关注学生的自主体验和对本堂课的收获.

V 习题答案、提示和解答

练习 3-1

1. 答：(1) 自变量是 x，因变量是 y，定义域为 $[0, 3]$；

(2) -1；

(3) 定义域和对应法则.

2. (1) $y=4x$，$x\in\mathbf{N}$；其中 x 是自变量，y 是因变量；

(2) $S=\pi r^2$，$r\in(0, +\infty)$；其中 r 是自变量，S 是因变量.

3. (1) $f(1)=1$，$f(-1)=1$，$f(0)=-1$，$f(b)=2b^2-1$；

(2) $f(0)=\dfrac{1}{2}$，$f(3)=4, f(-2)=-\dfrac{1}{4}$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{5}$.

4. $f(-1.2)=-7.168$；$f(3.7)=32.963$.

5. (1) $\{x \mid x\neq 5\}$；

(2) $\{x \mid x\geqslant 1\}$.

练习 3-2

1. 答：(1) 列表法、解析法和图象法.

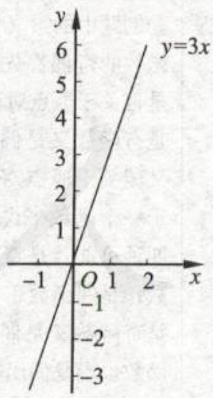
(2) 定义域是 $[-1, 2]$，值域是 $[-1, 2]$，$f(0)=1$.

2. (1) 图如下 (1)；定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{R}$；

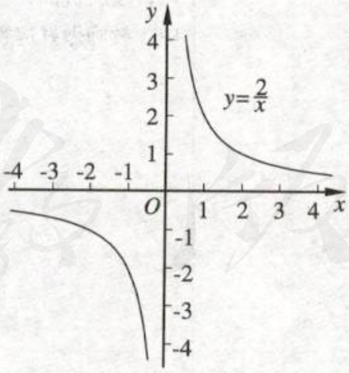
(2) 图如下 (2)；定义域为 $\{x \mid x\neq 0\}$，值域为 $\{y \mid y\neq 0\}$；

(3) 图如下 (3)；定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\{y \mid y\geqslant 0\}$；

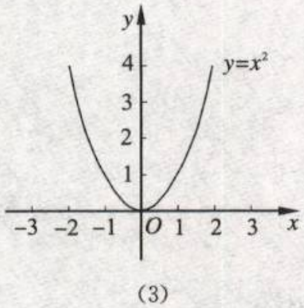
(4) 图如下 (4)；定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{R}$.



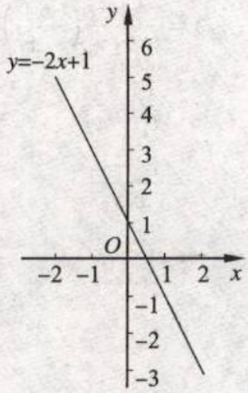
(1)



(2)



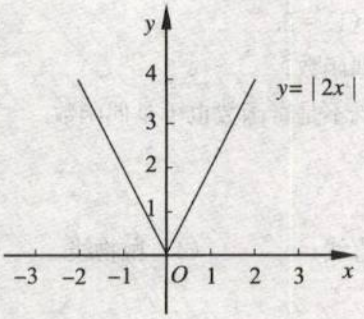
(3)



(4)

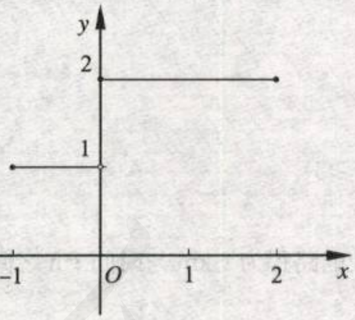
(第 2 题)

3.



(第 3 题)

4.



(第 4 题)

练习 3-3

1. 答：函数 $y=f(x)$ 的单调区间有：$[-4, -1)$，$[-1, 0)$，$[0, 1)$，$[1, 3]$. 函数在区间 $[-1, 0)$，$[1, 3]$ 上是增函数，在区间 $[-4, -1)$，$[0, 1)$ 上是减函数.

函数 $y=g(x)$ 的单调区间有：$[-3, -1.5)$，$[-1.5, 1.5)$，$[1.5, 3]$. 函数在区间 $[-1.5, 1.5)$ 上是增函数，在区间 $[-3, -1.5)$，$[1.5, 3]$ 上是减函数.

2. (1) 增函数；(2) 增函数.

3. 证明：设 x_1、x_2 是任意两个不相等的负实数，则

$$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=-\frac{1}{x_2}-\left(-\frac{1}{x_1}\right)$$
$$=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$$
$$=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$$
$$=\frac{\Delta x}{x_1x_2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x_1x_2}>0.$$

因此函数 $f(x)=-\frac{1}{x}$在区间（$-\infty$，0）上是增函数.

练习 3-4

1. 答：(1) 是；　(2) 偶函数；　(3) $h(1)=2$.

2. (1) 奇函数；　(2) 偶函数；

(3) 既不是奇函数也不是偶函数；　(4) 既不是奇函数也不是偶函数.

3. $f(-2)=-2$，$g(1)=1$. 图略.

练习 3-5

1. 答：(1) 直线；　(2) 抛物线；　(3) 直线；　(4) 抛物线.

2. (1) $y_{\min}=-4$；　(2) $y_{\max}=-\frac{7}{8}$.

3. (1) 对称轴 $x=1$；顶点坐标（1，-4）；函数在区间（1，$+\infty$）上是增函数，在区间（$-\infty$，1）上是减函数；

(2) 图略；

(3) $(-\infty, -1)\cup(3, +\infty)$.

4. (1) $(-1, 2)$；　(2) $\{x \mid x\leqslant-4$ 或 $x\geqslant3\}$.

练习 3-6

1. 解：设汽车行驶的时间为 t h，则汽车行驶的路程为 s km与时间 t h之间的函数关系为

$$s=vt.$$

当 $t=1.5$ 时，$s=90$，则 $v=60$，因此所求的函数关系为

$$s=60\ t.$$

当 $t=3$ 时，$s=180$，所以汽车 3 h所行驶的路程为 180 km.

2. 解：设售出件数与定价之间的函数关系为 $y=kx+b$.

由于直线过点（80，30），（120，20），代入上式，可得

$$k=-\frac{1}{4},\ b=50.$$

即 $y=-\frac{1}{4}x+50$，$x\in(0, 200)$.

3. $l=60g+7.7$.

4. 解：设矩形的长为 x m，则宽为

$$\frac{1}{2}(24-2x)=(12-x)\ \text{m},$$

得矩形场地的面积为

$$\begin{aligned}S&=x(12-x)=-x^2+12x\\&=-(x^2-12x+6^2-6^2)\\&=-(x-6)^2+36.\end{aligned}$$

由此可得，该函数在 $x=6$ m 时取最大值，且 $S_{\max}=36\ \text{m}^2$.

即当长、宽各为 6 m 时围成的矩形面积最大，最大面积是 36 m^2.

5. 解：设商品价格提高 x 元，则销售数量就减少 10 x 个，利润为 y 元，则每天销售额为

$$(10+x)(100-10x)\ \text{元},$$

进货总价为 $8(100-10x)$，故 $0\leqslant x\leqslant 10$.

则利润为

$$\begin{aligned}y&=(10+x)(100-10x)-8(100-10x)\\&=(2+x)(100-10x)\\&=-10(x-4)^2+360,\end{aligned}$$

其中 $0\leqslant x\leqslant 10$.

当 $x=4$ 时，$y_{\max}=360$.

故当售出价每件 14 元时，每天所赚利润最大为 360 元.

习题三

1. $f(-2)=-\frac{1}{7}$，$f(0)=-1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

2. (1) $\{x \mid x\neq-4\}$；　(2) $\{x \mid x\geqslant 1\}$；

(3) $\{x \mid x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -3\}$；　(4) $\{x \mid x>-2\}$.

3. (1) 增函数；　(2) 减函数.

4. (1) 奇函数；　(2) 既不是奇函数也不是偶函数；

(3) 偶函数；　(4) 既不是奇函数也不是偶函数.

5. 图象略.

6. (1) $a=\pm 1$；　(2) $a=0$.

7. 解：设矩形的垂直于墙的边长为 x m，则平行于墙的边长为

$$(300-2x)\ \text{m},$$

所以矩形面积为

$$S=x(300-2x)=-2x^2+300x$$
$$=-2(x-75)^2+11\ 250.$$

所以，当 $x=75$ 时，$S_{\max}=11\ 250$.

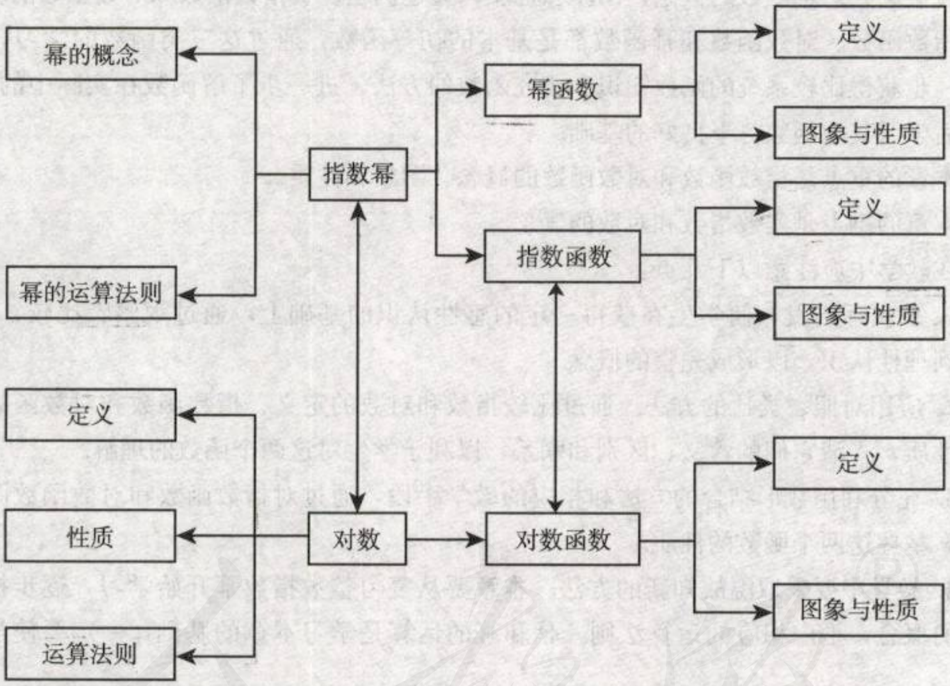
即当长为 150 m，宽为 75 m 时，这块菜地的面积最大，最大面积是 11 250 m^2.

第四章　指数函数与对数函数

思想火花：

要纠正别人之前，先反省自己有没有犯错误.

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 理解实数指数幂的概念，掌握实数指数幂的运算法则，会进行实数指数幂的运算，会利用计算器求 $a^b(a>0)$ 的值.

2. 理解指数函数的概念、图象和性质，并运用它们解决问题.

3. 掌握对数的概念和性质，理解常用对数、自然对数，会利用计算器求 $\lg N$，$\ln N$.

4. 理解对数的运算法则，理解对数的换底公式，会利用计算器求 $\log_a b$ 的值.

5. 掌握对数函数的概念、图象和性质.

6. 了解幂函数的概念、图象和基本性质.

7. 初步了解指数函数和对数函数在实际中的应用，了解和体会函数模型的广泛应用.

Ⅲ 教材分析和教学建议

本章的主要内容包括：指数和对数的概念及其运算法则；指数函数与对数函数的概念、图象、性质等.

本章教材在推广指数概念的基础上，给出了指数函数的概念、图象和性质；在指数的基础上，给出了对数的概念及其运算，进而给出了对数函数的概念、图象和性质；最后通过实例介绍幂函数的概念、图象和性质；通过例题说明指数函数和对数函数的应用.

指数函数、对数函数和幂函数都是基本的初等函数，通过这三类函数的学习，学生可进一步获得比较系统的函数知识和研究函数的方法，进一步了解函数在实际中的应用，为今后学习其他函数打下良好的基础.

本章的重点是指数函数和对数函数的概念、图象和性质.

本章的难点是实数指数和对数的概念.

在教学中应注意以下几点：

1. 从实际出发，使学生在获得一定的感性认识的基础上，通过观察、比较、归纳，提高到理性认识，以形成完整的概念.

2. 应用对照、类比的方法．通过比较指数和对数的定义、指数函数和对数函数的图象、性质，弄清它们的含义、区别和联系，以利于学生对这两个函数的理解.

3. 充分利用数形结合的方法和相应的教学手段，通过对指数函数和对数函数图象的认识，掌握这两个函数的性质.

4. 教学中要采取温故知新的方法．本章要从复习整数指数幂开始学习，逐步扩大指数幂的概念，推广相应的运算法则．幂和幂的运算是学习本章的基础，一定要使学生掌握好.

本章教学安排 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

4.1	实数指数	1 课时
4.2	指数函数	2 课时
4.3	对数及其运算	4 课时
4.4	对数函数	2 课时
4.5	幂函数	1 课时
4.6	指数函数与对数函数的应用	1 课时

小结与复习　　1课时

4.1 实数指数

1. 本节的重点是实数指数幂的概念及运算法则，难点是指数幂运算法则的应用.

2. 实数指数幂及其运算法则是在复习整数指数幂及其运算法则的基础上进行学习的，它是学习指数函数和对数函数的基础.

3. 本小节主要讲有理指数，根据学生的学习兴趣和愿望，也可介绍无理指数幂的含义，如 $3^{\sqrt{2}}$ 是一个确定的实数，它可通过两列有理指数幂的近似值，即

指数取$\sqrt{2}$的不足近似值 $3^{1.4}$，$3^{1.41}$，$3^{1.414}$，…

指数取$\sqrt{2}$的过剩近似值 $3^{1.5}$，$3^{1.42}$，$3^{1.415}$，…

去无限地逼近 $3^{\sqrt{2}}$.

4. 通过适当的练习，要使学生熟练掌握分数指数幂的意义.

5. 本章为避免讨论，定义分数指数幂时，要求底数 $a>0$，并且分数指数的最后结果一般要求化成既约分数.

6. 会利用计算器计算有理指数幂的值.

4.2 指数函数

1. 本节的重点是指数函数的图象与性质，难点是指数函数性质的应用.

2. 教材是从一个关于细胞分裂的具体问题引入指数函数的概念，既说明指数函数的概念来自实践，也便于学生接受. 教材主要通过两个具体例子 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象归纳出指数函数的性质. 因此，要紧密联系实数指数幂的性质与指数函数的图象学习指数函数的性质.

3. 学习指数函数可引导学生从定义域、值域、单调性、奇偶性、最值等方面去研究，逐步使学生掌握研究函数性质的一般方法.

4. 指数函数的定义，要求底数 a 是一个大于零且不等于 1 的常量. 这一点，学生容易忽略，教学中可引导学生讨论这一规定，理解为什么这样规定，以加深学生的印象.

规定底数 a 大于零且不等于 1 的理由：

$$\text{如果 } a=0,\begin{cases}\text{当 } x>0 \text{ 时，} a^x \text{ 恒等于 } 0\\ \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时，} a^x \text{ 无意义}\end{cases}$$

如果 $a<0$，比如 $y=(-2)^x$，这时对于 $x=\frac{1}{4}$，$x=\frac{1}{2}$…等，$(-2)^x$都无意义.

如果 $a=1$，对于任意实数 x，$y=1^x=1$ 是一个常量，对它就没有研究的必要.

5. 考虑到职业学校学生的实际，建议从指数函数的图象着手研究指数函数的性质. 指数函数的图象可用描点法画出. 在列对应值表时，可使用计算器. 为了使图象较为准

确，所描的点可多取一些．教学时，教师可以利用计算机展示一些指数函数的图象，也可以与学生互动完成一些指数函数的图象．要引导学生研究 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况下的图象特征，并能迅速正确地画出草图．

6. 为了研究指数函数的一般性质，按照从特殊到一般的规律，先在同一坐标系中，画出几个（至少两个）指数函数的图象．由于 a 是不等于 1 的正数，既应取 a 为大于 1 的正数（如 $a=2$），也应取 a 为小于 1 的正数$\left(\text{如 } a=\frac{1}{2}\right)$，这样有利于引导学生观察、比较所画的图象，归纳出图象所具有的特征，并由图象的特征得出相应函数的性质，也有利于帮助学生理解记忆指数函数的性质，因此，掌握函数图象的特征是非常重要的．这样的方法也适用于以后各类函数的教学．

7. 在指数函数性质的教学中，应强调对于底数 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情况，函数具有不同的性质．

8. 指数函数的图象特征和性质可列表如下：

图象的特征	函数的性质
（1）图象向左、向右无限延伸	（1）定义域：$\mathbf{R}$
（2）图象在 x 轴的上方，向上无限伸展，向下无限趋近于 x 轴	（2）值域：$(0，+\infty)$
（3）图象都经过点 $(0，1)$	（3）过定点 $(0，1)$
（4）$a>1$，从左向右看，图象逐渐上升 $0<a<1$，从左向右看，图象逐渐下降	（4）当 $a>1$ 时，函数单调递增 当 $0<a<1$ 时，函数单调递减

9. 本节要强化对运算、作图、处理数据、科学计算器的使用等基本技能的训练．

10. 充分利用本节内容，加强数形结合、分类讨论等数学思想的渗透．

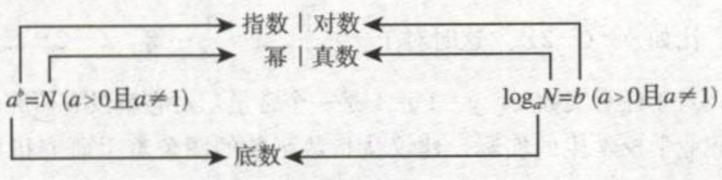
4.3 对数及其运算

1. 本节的重点是对数的概念、性质、运算法则及换底公式，难点是理解对数概念．

2. 引进对数的定义后，要说明两点：

（1）要让学生弄清楚对数式 $b=\log_a N$ 的含义．要清楚指数式 $a^b=N$ 与对数式 $b=\log_a N$ 是同一关系的两种不同表达形式，它们是等价的．

对数式与指数式的关系如下：



(2) 注意对数式 $b=\log_a N$ 中字母的取值范围 ($a>0$ 且 $a\neq 1$，$N>0$)，这些条件在解题或变形中常常用到.

在 $b=\log_a N$ 中，必须 $N>0$，这是由于在实数范围内，正数的任何次幂都是正数. 因而，$a^b=N$ 中，N 总是正数. 因此要特别强调：零和负数没有对数.

教材通过大量的例子和练习，促使学生认识由指数形式向对数形式转化.

3. 要求学生记住常用对数和自然对数，并熟练利用计数器求 $\lg N$ 和 $\ln N$ 的值. 其中 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$，e 与 π 一样是无理数. 由上式可求 e 的具有确定精确度的近似值.

4. 要求学生熟练掌握由对数定义推出的对数的三个性质.

5. 对数运算法则的推导方法是把对数式转化为指数式，再应用指数运算法则去证明对数的运算法则，要求学生了解其推导过程.

6. 对数运算法则，其实可归纳为 (1) (3) 两条，第 (2) 条可由 (1) (3) 两条得到：

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a(M\cdot N^{-1})=\log_a M+\log_a N^{-1}=\log_a M+(-1)\log_a N=\log_a M-\log_a N.$$

为了使用方便，教材仍保留了第 (2) 条.

7. 利用对数的运算法则时，要注意各个字母的取值约束：$M>0$，$N>0$，$a>0$，$a\neq 1$. 要注意只有所列等式中的对数都存在时，等式才有意义. 如：$\log_2(-3)(-5)$是存在的，但 $\log_2(-3)$ 和 $\log_2(-5)$ 都不存在，因此，不能得出 $\log_2(-3)(-5)=\log_2(-3)+\log_2(-5)$.

8. 学生初学这四个运算法则时，容易出现下面的错误：

$$\log_a(M\pm N)=\log_a M\pm\log_a N;$$

$$\log_a(MN)=\log_a M\cdot\log_a N;$$

$$\log_a \frac{M}{N}=\frac{\log_a M}{\log_a N}.$$

产生这些错误的原因是将积、商、幂的对数与对数的积、商、幂混淆起来，把对数符号当成表示数的字母进行运算了. 所以，在教对数运算法则时，宜训练用语言叙述运算法则，这样有利于学生正确理解和应用对数运算法则，也容易讲清楚产生错误的根源，防止出现错误.

9. 针对职业学校学生的实际，教学时要求学生主要掌握对数的运算法则，并强调法则的逆向运用.

10. 利用对数的运算法则，可把两数积的运算转化为对数和的运算，把幂的运算转化成其底的对数与幂指数的乘法运算，从而简化运算. 对数的发明曾被恩格斯列为 17 世纪数学的三大成就之一. 作为计算方法，在历史上起着重要的作用. 由于计算器和计算机的普及，数学中大量的对数计算工作，可由计算机代劳. 因而教学重点应放在学生掌握

对数的计算原理上，对数计算的训练可适当减弱．为掌握对数的性质，让学生进行适当的对数运算练习还是必要的．

11. 换底公式的引入，应使学生明确它是出自实际运算的需要，以提高学生的学习兴趣和学习的主动性．在对数计算中，常常需要把底数不同的对数化为底数相同的对数才能进行．由于对数的底数可为不等于 1 的任意正数，一般对数表或计算器没有计算任意正数为底的对数的功能，所以在计算不是以 10 或 e 为底的对数时，常常需要把它转化为以 10 或 e 为底的对数，这就要借助于换底公式来完成．

12. 换底公式的证明如下：

设 $\log_b N=x$，则

$$b^x=N,$$

两边取以 a 为底的对数，得

$$x\log_a b=\log_a N,$$

所以

$$x=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

即

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

教师教学时可根据学生情况灵活掌握．要求学生理解换底公式的意义，并运用换底公式进行较简单的计算和化简．

4.4 对数函数

1. 本节的重点是对数函数的图象与性质，难点是对数函数性质的应用．

2. 教材从一个细胞分裂的具体问题引出对数式 $n=\log_2 w$，然后根据对数式 $n=\log_2 w$ 的意义及函数的概念给出对数函数定义．

3. 在对数函数的定义中，$a>0$ 且 $a\neq 1$ 的条件，要向学生作适当的说明，以加深学生对对数函数的理解．

4. 函数图象是研究函数性质的直观工具，利用图象便于学生理解并掌握函数的性质和变化规律．所以首先要通过计算列出对数函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的对应值表．然后用描点法画它们的图象，通过对图象的观察，得到对数函数的性质．教学中，教师可以利用计算机展示一些对数函数的图象，也可以与学生互动完成一些对数函数的图象．要引导学生研究 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况下的图象特征，并能迅速正确地画出草图．

对数函数的图象特征和性质可列表如下：

图象特征	函数性质
(1) 图象都在 x 轴的右边	(1) 定义域是 $(0, +\infty)$
(2) 图象都经过点 $(1, 0)$	(2) 1 的对数是 0
(3) 当底数 $a>1$ 时，图象在 $(1, 0)$ 点右边的纵坐标都大于零；在 $(1, 0)$ 点左边的纵坐标都小于零；当底数 $0<a<1$ 时，图象在 $(1, 0)$ 点右边的纵坐标都小于零；在 $(1, 0)$ 点左边的纵坐标都大于零	(3) 当底数 $a>1$ 时，$\begin{cases} x>1，则 \log_a x>0 \\ 0<x<1，则 \log_a x<0 \end{cases}$ 当底数 $0<a<1$ 时，$\begin{cases} x>1，则 \log_a x<0 \\ 0<x<1，则 \log_a x>0 \end{cases}$
(4) 从左向右看，当底数 $a>1$ 时，图象逐渐上升；当底数 $0<a<1$ 时，图象逐渐下降	(4) 当底数 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是增函数；当底数 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是减函数

在教学中，还应结合解析式、函数对应值表进行分析，以加深学生对对数函数性质的理解.

5. 在对数函数性质的教学中，应强调，对于对数底数 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情况，函数具有不同的性质，以利于对比、区别记忆. 同时用语言表达和用数学符号表达某些性质，以加深学生对对数函数性质的理解.

6. 教材没有讲复合函数的概念，对于 $y=\log_2(4-x)$，$y=\log_2 x^2$ 等函数的理解，仍按函数的定义，$y=\log_2(4-x)$表示该函数在 $(4-x)$ 处的值，应让学生注意到，在式中的 x 已不是对数函数 $y=\log_2 x$ 中的自变量. 求涉及此类函数的定义域问题，可根据对数函数的定义域化为不等式问题.

7. 充分利用本节内容强化计算、作图等基本技能的训练，同时要注意渗透类比、数形结合、分类讨论等数学思想方法.

4.5 幂函数

1. 本节的重点是幂函数的定义、图象和性质，难点是幂函数图象的位置和形状变化.

2. 教材从学生已掌握的最简单的函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=\dfrac{1}{x}$ 出发引入幂函数的定义. 这里只讨论指数为有理数的比较简单的幂函数，至于指数为无理数的幂函数，在中学阶段不做研究. 教学中应注意把握好这个尺度.

3. 并不是任意的一个一次函数和二次函数都是幂函数，例如 $y=x+1$，$y=x^2+2x$ 都不是幂函数，因为它不符合幂函数的定义. 不过它们可以看作是由幂函数与常数经过算数运算而得到的初等函数.

4. 幂函数与指数函数学生容易混淆，教学时应注意强调它们之间的区别.

5. 教材分 $\alpha>0$ 与 $\alpha<0$ 两种情况来研究幂函数的图象和性质. 幂函数图象的位置和

形状变化复杂，只要指数稍有不同，图象的位置和形状就可能发生很大的变化. 因此教材中画幂函数的图象就先从列对应值表开始，再用描点法画图. 教学中，可以利用教学软件展示一些幂函数的图象，也可以与学生互动完成一些幂函数的图象，加深学生对幂函数的图象和基本性质的了解.

6. 幂函数的内容属于了解内容，教学时不要盲目增加难度.

4.6 指数函数与对数函数的应用

1. 本节的重点是指数函数与对数函数的应用，难点是建立函数模型.

2. 本节的两个例题，主要涉及人口增长率和放射性物质衰变方面的内容. 教学时，教师可根据学生所学专业，适当地再选几个例子说明这两个函数在其他方面的应用.

3. 根据已知条件建立函数模型是来解决实际问题的关键，教师要注重培养学生建立数学模型的意识.

4. 函数模型 $y=ca^x$ 叫做指数模型. 当 $a>1$ 时，叫做指数增长模型；当 $0<a<1$ 时，叫做指数衰减模型.

5. 例 2 是介绍放射性物质的半衰期问题. 计算 $0.9^t=0.5$ 时，教材利用对数的定义得到 $t=\log_{0.9}0.5$，然后用换底公式计算. 也可以在等式 $0.9^t=0.5$ 两边取对数的方法得到 $\lg 0.9^t=\lg 0.5$，其理论根据是，如果两个对数的底相等，真数相等，那么这两个对数相等.

6. 在函数应用的教学中，教师要引导学生体验函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，体验指数函数、对数函数与现实世界的密切联系及其在刻画现实问题中的作用，注重培养学生分析问题、解决问题的能力.

Ⅳ 参考教案

课题：4.2 指数函数

教学目标：

知识目标：掌握指数函数的定义、图象、性质及其简单应用.

能力目标：培养学生观察、分析、归纳等思维能力，增强学生的应用意识.

情感目标：通过多媒体演示，利用图象，探讨指数函数的性质，渗透数形结合、分类讨论的思想，激发学生学习数学的兴趣，增强学生的创新意识.

教学重点：指数函数的图象与性质.

教学难点：指数函数性质的应用.

教学方法：启发、诱导、探究、讲授法.

教学手段：采用多媒体课件辅助教学.

课时安排：2 课时.

教学过程：

一、实例引入

某种细胞分裂的问题.（$y=2^x$）

（利用多媒体课件演示细胞的分裂过程）

（板书：指数函数）（利用多媒体课件突出大号的课题标题：4.2 指数函数）

二、讲授新课

1. 定义：一般地，形如 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的函数叫做指数函数，其中 x 是自变量. 函数的定义域是 **R**.（利用多媒体课件演示指数函数的定义，特别用加粗的表示 $a>0$ 且 $a\neq1$）

此处向学生说明，为什么底数 $a>0$ 且 $a\neq1$.

问：指数函数的图象与性质是怎样的?

我们不妨先来看两个例子：$y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

2. 图象与性质

（1）列表：（给出 x 的取值，让学生填表）

（2）用描点法画出图象

教师用电子表格软件作 $y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的函数图象，学生仿照教师的操作步骤作 $y=3^x$，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的函数图象，引起学生的兴趣，然后让学生观察图象，并且在教师的引导下完成课本表 4-2.

由特殊指数函数的图象与性质归纳出一般指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图象与性质.（利用课件体现性质的直观性，主要使图象特征与性质对应.）

3. 例题讲解

例 1　比较下列各题中两个值的大小：（用计算器验证）

（1）$1.7^{2.5}$ 与 1.7^3；

（2）$0.8^{-0.1}$ 与 $0.8^{-0.2}$.

分析：对于比较大小的问题，若是底数相同，则用指数函数的性质——单调性.

教师板书解题过程.

例 2　求下列函数的定义域：

（1）$y=3^{\frac{1}{x}}$；　　　　（2）$y=5^{\sqrt{x-1}}$.

教师板书解题过程.

三、课堂练习

课本练习 4-2　1，2，3.

四、归纳小结

将本堂课的内容归纳成一个表格形式，便于学生掌握.

五、布置作业

习题四 6.（1）（2） 7.（1）（2）

六、板书设计

4.2 指数函数	
一、定义	例 2
二、图象与性质	解：（1）
例 1	（2）
解：（1）	
（2）	

V 习题答案、提示和解答

练习 4-1

1. 略.

2. （1）9； （2）$\frac{125}{8}$； （3）$2^{\frac{15}{8}}$； （4）$3^{\frac{4}{3}}$.

3. （1）$x^{\frac{2}{3}}$； （2）$a^{-\frac{1}{3}}$； （3）$x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$； （4）$(a+b)^{\frac{3}{4}}$.

4. （1）$-64x^6$； （2）$a^{\frac{5}{3}}$； （3）x^3y^{-2}； （4）$4a$.

5. （1）0.895； （2）1.421； （3）1.256； （4）1.016.

练习 4-2

1. （1）5，单调递增； （2）$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$，**R**，$(0, +\infty)$.

2. （1）$3^{0.8}>3^{0.7}$； （2）$1.1^{-2.1}<1.1^{-2}$；

（3）$0.7^{0.1}<0.7^{-0.1}$； （4）$0.618^{1.8}>0.618^{1.9}$.

3. （1）$x\in\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$； （2）$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

练习 4-3

1. 略.

2. （1）$\log_6 36=2$； （2）$\log_5 125=3$；

（3）$\log_2 \frac{1}{8}=-3$； （4）$\log_{\frac{1}{2}} 16=-4$；

（5）$\log_{27} 3=\frac{1}{3}$； （6）$\log_{7.6} 1=0$；

（7）$\log_{81} \frac{1}{27}=-\frac{3}{4}$； （8）$\lg 0.001=-3$；

(9) $\ln 6=x$；　(10) $\log_4 y=x$.

3. (1) $3^2=9$；　(2) $2^{-3}=\frac{1}{8}$；

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$；　(4) $10^3=1\,000$；

(5) $2^5=32$；　(6) $3^{-4}=\frac{1}{81}$；

(7) $8^{\frac{4}{3}}=16$；　(8) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}=1\,000$；

(9) $e^x=10$；　(10) $10^x=7$.

4. (1) 2.598；　(2) −0.209；　(3) 3.250；　(4) −2.882.

练习 4-4

1. 略.

2. (1) $\lg x+\lg y+\lg z$；　(2) $\lg x+2\lg y-\frac{1}{2}\lg z$；

(3) $\lg x+\frac{1}{3}\lg y-\frac{2}{3}\lg z$；　(4) $\frac{1}{2}\lg x-2\lg y-\lg z$.

3. (1) 7；　(2) 4；　(3) $\frac{5}{4}$；　(4) $\frac{2}{3}$；

(5) $\frac{7}{3}$；　(6) 0；　(7) −1；　(8) 2.

4. 1.

5. (1) −1.366；　(2) 1.892.

6. 证明：(1) $\log_{a^n}b^n=\frac{\log_a b^n}{\log_a a^n}=\frac{n\log_a b}{n\log_a a}=\log_a b$；

(2) $\log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{1}{\log_b a}$.

练习 4-5

1. (1) $y=\log_{\frac{1}{3}}x$，$(0,+\infty)$，$\mathbf{R}$；　(2) 4，单调递增.

2. (1) $\lg 6<\lg 8$；　(2) $\log_{0.5}6<\log_{0.5}4$；

(3) $\log_{\frac{2}{3}}0.5>\log_{\frac{2}{3}}0.6$；　(4) $\log_{1.5}1.6>\log_{1.5}1.4$.

3. (1) $x\in(-1,+\infty)$；　(2) $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

练习 4-6

1. 函数 $y=x^{-3}$，$y=x^{\frac{2}{3}}$，$y=\sqrt{x}$，$y=\frac{1}{x^2}$是幂函数.

2. 略.

练习 4-7

1. 设 x 年后产量为 y，则 $y=a(1+p\%)^x$，$x\in\mathbf{N}^*$ 且 $x\leqslant m$.

2. 解：设该市国民生产总值在 2000 年后的第 x 年为 y 亿元，则：

第 1 年（即 2001 年），

$$y=20+20\times8\%=20(1+8\%);$$

第 2 年（即 2002 年），

$$y=20(1+8\%)+20(1+8\%)\times8\%=20(1+8\%)^2;$$

……

所以，第 x 年，

$$y=20(1+8\%)^x=20\times1.08^x.$$

当 $x=10$ 时，$y=20\times1.08^{10}\approx43.2$（亿元）.

即该市 2010 年国民生产总值预计可达到 43.2 亿元.

3. 解：设该物质最初的质量为 1，衰变 x 年后，该物质残留一半，则

$$0.84^x=0.5,$$

所以

$$x=\log_{0.84}0.5=\frac{\lg0.5}{\lg0.84}\approx4\text{（年）}.$$

即该物质的半衰期约为 4 年.

习题四

1. (1) 8；　(2) 10；　(3) $\frac{3}{2}ab^2$；　(4) 1；

(5) $a+2\sqrt{ab}+b$；　(6) $-\frac{1}{8}a^{-3}$.

2. (1) $x=\log_4 2$；　(2) $x=\lg 25$；　(3) $4^x=3$；　(4) $10^x=0.3$.

3. (1) $\frac{2}{3}$；　(2) 0；　(3) 2；　(4) 2；

(5) $\frac{5}{6}$；　(6) $\frac{4}{3}$.

4. (1) $a+b$；　(2) $\frac{1}{2}b$；　(3) $2a+b$；　(4) $5a$.

5. 1.544 1.

6. (1) $\left\{x \mid x\neq-\frac{1}{2}\right\}$；　(2) $\{x \mid x\geqslant0\}$；

(3) $\left\{x \mid x>\frac{3}{4}\right\}$；　(4) $\{x \mid x\geqslant2\}$.

7. (1) $1.7^{a+1}>1.7^a$；　(2) $0.9^{a-1}>0.9^a$；

(3) $\log_{0.9}(a^2+1)<\log_{0.9}a^2$；　(4) $\log_{1.2}a^2>\log_{1.2}(a^2-1)$.

8. (1) $m<n$；　(2) $m<n$；　(3) $m<n$；　(4) $m<n$.

9. 略.

10. 略.

11. 设 x 年后产品成本为 y 元，则 $y=a(1-p\%)^x$，$x\in\mathbf{N}^*$ 且 $x\leqslant m$.

12. 解：设约经过 x 年，它的价值降为 20 万元，依题意，得

$$50(1-4.5\%)^x=20,$$

$$0.955^x=0.4,$$

所以

$$x=\log_{0.955}0.4=\frac{\lg 0.4}{\lg 0.955}\approx 20\ (\text{年}).$$

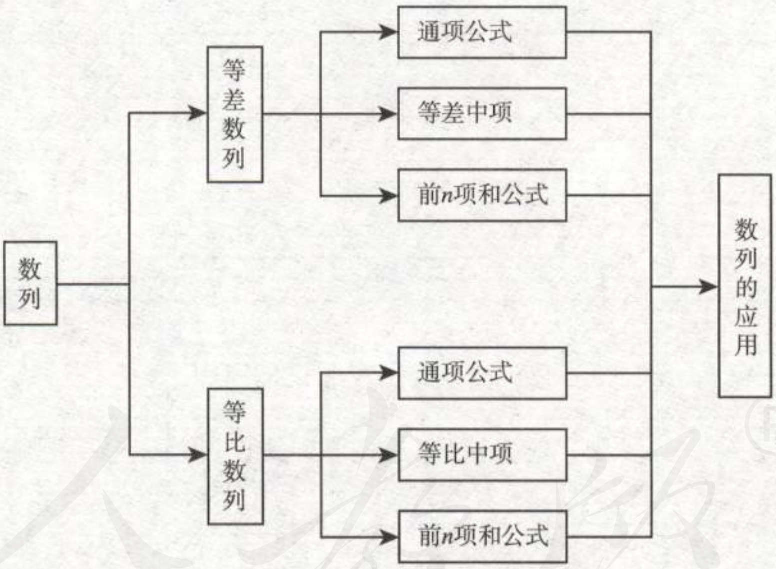
即约经过 20 年，它的价值降为 20 万元.

第五章　数　　列

思想火花：

培养人，就是培养他对前途的希望.

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 了解数列的有关概念和通项公式的意义，会求常见数列的通项公式.

2. 理解等差数列的定义、公差、通项公式、等差中项及前 n 项和公式.

3. 理解等比数列的定义、公比、通项公式、等比中项及前 n 项和公式.

4. 了解等差数列与等比数列的实际应用.

III 教材分析和教学建议

本章主要内容包括：数列的概念，等差数列，等比数列，等差、等比数列的应用.

本章教材通过用围棋子排“T”字小游戏引出了数列概念. 有意识地引导学生发现数列的序号与项之间的关系，从而探索出数列的通项公式等有关概念. 通过用积木垒楼梯的游戏，借助楼梯台阶离地面的高度抽象出等差数列模型，给出等差数列的概念、通项公式，通过求积木的块数的倒序相加法推导出前 n 项和公式，并针对这些基本量进行技能训练. 通过在国际象棋棋盘的方格内放麦粒的故事抽象出等比数列模型，给出等比数列的概念、通项公式，通过错位相减法推导出前 n 项和公式，并针对这些基本量进行技能训练.

数列是一个重要的概念，它在工农业生产以及经济生活中都有广泛的应用，而且是培养学生发现、认识、分析、综合等能力的重要题材，同时也是今后学习微积分知识的一个基础.

本章教材的重点是：等差数列与等比数列的概念、通项公式和前 n 项和公式.

本章教材的难点是：等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和公式的推导以及它们的综合运用.

教学建议如下：

1. 要注意在教学中从具体实例出发，关注学生的兴趣，引导学生逐渐发现数学知识.

2. 为较好地解决难点，建议在讲解求数列的通项时，由浅入深，由有限项到无限项，引导学生发现规律，写出数列的通项.

3. 等差数列前 n 项和公式的推导要结合实例，由特殊到一般，让学生理解倒序相加的方法.

4. 等比数列前 n 项和公式的推导只要求学生了解，不要求学生掌握.

本章教学约需 10 课时，具体分配如下：

5.1　数列	2 课时
5.2　等差数列	3 课时
5.3　等比数列	3 课时
5.4　等差数列与等比数列的应用	1 课时
小结与复习	1 课时

5.1 数列

1. 本节重点为数列的通项公式，难点是对数列通项公式的理解.

2. 本节教学中，由棋子排“T”字的游戏，学生会发现随着“T”字的变大，所用棋子数依次为 5，8，11，14，17，…自然地引出数列的定义，然后又列举了 5 个数列的实

例. 要注意引导学生通过观察、分析，找出这几个数列的特征. 例如：

(1) 数列4，5，6，7，8，9，10中的每一项都是序号加3，这列数是由有限个数组成的.

(2) 数列1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，…中的每一项都是序号的倒数，这列数是由无限个数组成的.

3. 要强调数列中数的有序性，如

$$\{4,5,6,7,8,9,10\} \text{ 和 } \{10,9,8,7,6,5,4\}$$

是两个相同的集合，而

$$4,5,6,7,8,9,10 \text{ 与 } 10,9,8,7,6,5,4$$

是两个不同的数列，尽管组成数列的数是相同的，但排列次序不同，就是不同的数列.

4. 要注意数列中的同一个数可以重复出现，这与集合中元素的互异是不同的. 如教材中的数列：−1，1，−1，1，−1，…；与数列：2，2，2，2，2，….

5. 数列是一种特殊函数的一列函数值. 它按一定次序排列，必定有开头的数，有相继的第二个数、第三个数……等等. 于是数列中的每一个数都对应于一个序号；反过来，每个序号也都对应于数列中的唯一的一个数，符合函数的定义. 因此，数列就是定义在正整数集 $\mathbf{N}_+$（或它的子集）上的函数 $f(n)$. 当自变量 n 依次取1，2，3，…时，相对应的一列函数值 $a_1=f(1)$，$a_2=f(2)$，$a_3=f(3)$，…，$a_n=f(n)$，…就构成数列.

数列通常记作 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…，或简记为 $\{a_n\}$，其中 a_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的通项.

值得注意的是：

(1) $\{a_n\}$ 与 a_n 是不同的. 前者表示数列，后者表示这个数列的第 n 项；

(2) 数列的项与它的项的序号是不同的概念，数列的项是指数列中某一确定的数，是函数值，而项的序号是指数列的项的位置序号，是自变量的值.

6. 数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与序号 n 之间的函数关系可以用一个公式 $a_n=f(n)$ 来表示时，这个公式叫做这个数列的通项公式. 应使学生注意的是，并不是所有的数列都能写出它的通项公式，如数列1，1.4，1.41，1.414，…就没有通项公式. 有的数列的通项公式，也可能不止一个，有时存在通项公式的表达形式不同，而实质是一致的情况. 如教材中的数列−1，1，−1，1，−1，…的通项公式可写成 $a_n=(-1)^n$，还可写成

$$a_n=\begin{cases}-1, & n=2k-1,\ k\in\mathbf{N}_+\\ 1, & n=2k,\quad\ \ k\in\mathbf{N}_+\end{cases}$$

如果一个数列只给出它的前面几项，并没有给出它的构成规律，那么仅由前面几项归纳出来的“通项公式”有可能是不唯一的. 如由数列2，4，8，…，可以给出 $a_n=2^n$，也可给出 $a_n=n^2-n+2$. 由于这两个通项公式本质上的不同，由此写出的后继项也不相同，前者的 $a_4=16$，后者的 $a_4=14$. 但如果知道一个数列的通项公式，这个数列就唯一确定了.

7. 关于数列的分类，教材中只按数列的项数是有限还是无限进行分类. 除有穷数列

和无穷数列外，还有按数列的项与项之间大小关系来分类的递增数列和递减数列、摆动数列、常数列，也有按照任何一项绝对值是否都小于某一正数来分类的有界数列和无界数列. 教师根据学生的实际情况可以适当的补充这些分类，但只要求学生了解.

8. 这一节教材中三个例题分属三种类型：

(1) 例 1 通过实例，进一步研究数列的项与序号的关系，熟悉通项公式，引出递推公式.

(2) 例 2 已知数列的通项公式或递推关系，写出数列某些项.

(3) 例 3 根据数列的前几项，写出满足条件的数列的一个通项公式. 这类问题是本节教学中的难点. 教学时要引导学生观察数列中各项与其序号的对应关系. 可以用分解所给数列的前几项的方法，在这几项的分解式中，看看哪些部分是变化的，哪些是不变的，再探索各项中变化部分与序号间的联系，从而归纳出规律，写出通项公式. 这里应着重培养学生的观察、分析和归纳能力.

9. 给出递推关系是给出数列的一种重要方法，由递推关系求通项公式一般难度较大. 教材中引出了数列的递推公式，但教学中只要求学生知道有这样一种方法，会根据递推公式求数列的前几项即可，不作进一步的要求.

5.2 等差数列

1. 本节教材的重点是：等差数列的概念、通项公式. 难点是等差数列前 n 项和公式的推导.

2. 等差数列的通项公式与前 n 项和公式的导出都离不开等差数列的定义，因此，教学中要自始至终紧扣这个定义.

3. 教学中要突出以下几点：

(1) "从第 2 项起每一项减去它前一项的差都等于同一个常数". 要防止在求公差时，把相邻两项相减的顺序颠倒. 虽然等差数列的前一项减去它的后一项也是一个常数，但它不是公差，而是公差的相反数.

(2) 等差数列的通项公式：

根据等差数列的定义，可得

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=\cdots=d, \quad ①$$

或

$$a_2=a_1+d,\ a_3=a_2+d,\ \cdots,\ a_n=a_{n-1}+d,\ \cdots. \quad ②$$

教材中等差数列的通项公式的推导，利用了关系②，采用不完全归纳法，目的是培养学生的归纳、猜想和推理的能力. 教学中也可以利用关系①，给出等差数列的通项公式的证明：

$$\left.\begin{array}{l} a_2-a_1=d \\ a_3-a_2=d \\ a_4-a_3=d \\ \cdots\cdots \\ a_n-a_{n-1}=d \end{array}\right\} n-1\text{ 个}$$

$n-1$ 个等式两边分别相加得：

$$a_n-a_1=(n-1)d,$$

即

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

这种方法供教师参考.

(3) 教学中应使学生明确，一个等差数列只需给出 a_1 和 d，这个等差数列就唯一确定了. 证明一个数列是等差数列，只需证明对于任意正整数 n，$a_{n+1}-a_n$是一个常数即可.

(4) 当 $d=0$ 时，等差数列是常数列.

(5) 如果已知三个数成等差数列，且公差为 d，利用对称性设这三个数分别为 $a-d$，a，$a+d$ 计算比较方便.

4. 要引导学生分析等差数列的通项公式，明确通项公式中的 4 个量 a_1，a_n，d，n 之间的关系. 要求学生灵活使用通项公式，并可将公式变形为 $a_n=a_m+(n-m)d$ 或 $\frac{a_n-a_m}{n-m}=d$. 对等差数列的图象及公差 d 的几何意义，教师可以根据学生的理解程度酌情讲解.

5. A 是 a、b 的等差中项的充要条件为 $2A=a+b$，两个数的等差中项又称为这两个数的算术平均值. 这个概念和公式在解题中常常用到，教师应注意引导.

6. 在讲解等差数列前 n 项和公式时，通过对实例的观察、分析和计算，着重讲述求和的数学方法和思路——倒序相加. 在推导求和公式后，要求学生自己推导等差数列的另一个形式的前 n 项和公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$. 在求一个等差数列前 n 项和时，根据条件的不同，要注意灵活选择公式.

7. 等差数列的前 n 项和公式共涉及 5 个变量 a_1，a_n，d，n 和 S_n，已知其中 3 个量，就可以求出另外 2 个量，应当要求学生掌握这一点.

5.3 等比数列

1. 本节教材的重点是：等比数列的概念、通项公式. 难点是等比数列前 n 项和公式的推导.

2. 其中等比数列的定义是推导通项公式、前 n 项和公式的基础. 在等比数列的教学中，教师可采用类比的方法，在复习等差数列的有关知识的同时，让学生主动地学习等比数列的相应知识.

3. 在等比数列的教学中，应突出以下几点：

(1) 强调“从它的第 2 项起每一项与它的前一项的比都等于同一常数”，要防止在求公比时，把相邻两项比的次序颠倒.

(2) 等比数列的公比 q 可正可负，但不能为 0，尤其是 q 为负值时，数列各项的符号怎样变化，可结合实例组织讨论.

(3) $q=1$ 时，等比数列是常数列.

(4) 一个等比数列只要给出 a_1 和 q，这个等比数列就唯一确定了.

若要证明一个数列是等比数列，只需证明对于任意正整数 n，$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 是一个常数.

(5) 如果已知 3 个数成等比数列，公比为 q，利用对称性可设它们分别为 $\frac{a}{q}$，a，aq（其中 q 为公比），计算比较方便.

4. 根据等比数列的通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$ 和 $a_m=a_1q^{m-1}$，两式相除并整理可得 $\frac{a_n}{a_m}=q^{n-m}$. 这一推广形式应要求学生理解并掌握.

5. G 是 a，b 的等比中项的充要条件是 $G^2=ab(ab>0)$. 任意两个同号的数的等比中项都有两个，它们互为相反数，当 $a>0$，$b>0$ 时，$G=\sqrt{ab}$ 也叫做 a，b 的几何平均数.

6. 在推导等比数列前 n 项和公式时，

$$S_n=a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1}$$

的两边分别乘以 q 这一步，学生往往不易想到，教师要注意启发和引导. 等式两边同时乘以 q 以后，可以得到

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^n.$$

因而，从前一等式的两边分别减去后一等式的两边，就可以消去相同项. 这种求和的基本方法——错位相减法，不要求学生掌握. 对于另一形式的求和公式

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q},$$

教师可引导学生自己推出. 教学中注意组织学生讨论，如何灵活运用这两个求和公式. 特别注意告诉学生使用求和公式时，q 不能为 1，指出当 $q=1$ 时，它的前 n 项和为 $S_n=na_1$.

7. 等比数列的通项公式及前 n 项和公式共涉及 5 个变量 a_1，a_n，q，n 和 S_n，已知其中 3 个量，就可以通过解方程或方程组求出另外 2 个量. 求解过程中要提醒学生注意，不要丢根.

5.4 等差数列与等比数列的应用

1. 本节列举了等差数列和等比数列在工农业生产中的应用，使学生了解数列应用的广泛性. 同时，通过实例讲解可对前面所学知识进一步的复习、巩固.

2. 针对实际应用中的“增长”与“减少”问题，要进行具体分析. 一般地说，当“增长”或“减少”的是具体数量时，常用等差数列的有关知识去解决；当“增长”或“减少”的是倍数、百分数时，则常用等比数列的有关知识去解决.

3. 在应用等差数列公式时，公差就是题中的增长或减少量；应用等比数列公式时，若所涉及的增长率或降低率（百分率）为 x，则公比应是 $(1+x)$ 或 $(1-x)$.

4. 要分清是求 a_n 还是 S_n. 关键是弄懂题意，分析各个量在所构建的数列中所表示的意义，切忌不加分析，盲目套用公式.

Ⅳ 参考教案

课题：5.2.2　等差数列的前 n 项和

教学目标：

1. 通过对等差数列求和公式的推导，使学生能掌握“倒序相加”的数学方法.

2. 使学生掌握等差数列求和公式，并能利用它求和.

教学重点：等差数列的前 n 项和公式.

教学难点：等差数列的前 n 项和公式的推导.

教学方法：发现、探究.

教学过程设计：

一、复习巩固

(1) 什么叫等差数列？

(2) 等差数列的通项公式是什么？

二、创设情景，引入新知

介绍一个“小故事”：

高斯是伟大的数学家，天文学家，高斯十岁时，有一次老师出了一道题目：

$$1+2+3+\cdots+100=?$$

过了两分钟，正当同学们在：$1+2=3$，$3+3=6$，$4+6=10$，…算得不亦乐乎时，高斯站起来回答说：

“$1+2+3+\cdots+100=5\,050$.”

你知道高斯是如何这么快得出答案吗？(故事的引入，激发学生的兴趣和求知欲)

三、引入实例、发现新知

问题 2　求问题 1 中所用积木的块数.(多媒体演示)

如何用最快的方法求得所用积木的块数？(请同学们相互讨论)

在同学们讨论的基础上，发现并提炼如下方法：

把图 5-3 上下倒置后放在原模型上，得到图 5-4，我们发现共有 6 层，每一层的积木都是 7 块. 所以，所用积木的块数是 $(6\times7)\div2=21$.

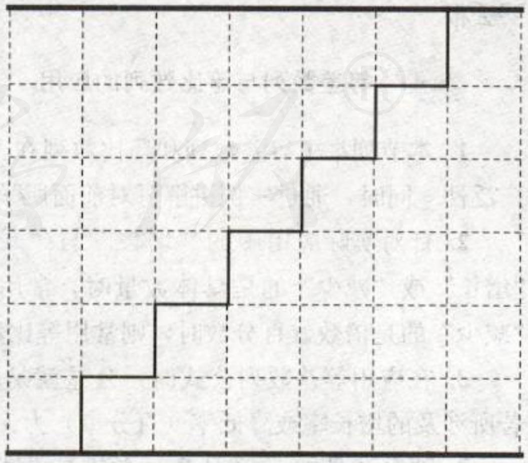


图 5-4

指出这种方法为：倒序相加法.

再看引入的问题，当年的高斯就是用这种方法，迅速地得出了从1加到100的结果.

四、探究规律，升华新知

学生分组探究**试一试**中的结论：

在等差数列 $\{a_n\}$ 中：$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$.（多媒体呈现问题）

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n，则

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n,$$

倒序：
$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1,$$

相加：
$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1),$$

即
$$2S_n=n(a_1+a_n),$$

则
$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

再组织学生探究：把 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入上式，

可得
$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

五、知识应用，巩固新知

例6　如图5-5所示，一个堆放铅笔的V形架的最下面一层放一支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放一支，最上面放120支，这个V形架上共放多少支铅笔？

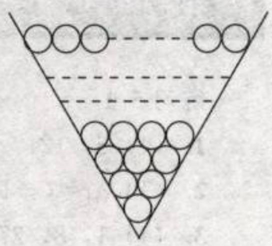


图5-5

解：由题意可知，这个V形架上共放120层铅笔，且自下而上各层的铅笔数组成等差数列，记为 $\{a_n\}$，其中 $a_1=1$，$d=1$，$a_{120}=120$.

易知，$n=120$. 根据等差数列前 n 项和公式，得

$$S_{120}=\frac{120\times(1+120)}{2}=7\ 260.$$

即V形架上共放着7 260支铅笔.

例7　在小于100的正整数的集合中，有多少个数是7的倍数？并求它们的和.

解：在小于100的正整数的集合中，7的倍数7，14，21，…从小到大构成等差数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=7$，$d=7$，由教材中分析知 $n=14$.

由等差数列的前 n 项和公式得

$$S_{14}=14\times7+\frac{14\times(14-1)}{2}\times7=735,$$

即在小于100的正整数的集合中，有14个数是7的倍数，它们的和等于735.

六、课堂小结

等差数列 $\{a_n\}$ 它的前 n 项和：

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\text{和 }S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

（1）上面公式的推导方法：倒序相加.

（2）能根据已知条件，灵活选择公式.

七、课堂练习：练习 5-3 1，2（1），3.

八、作业：练习 5-3 2（2），4，5.

九、板书设计

5.2.2 等差数列的前 n 项和
一、积木块数的求法：倒序相加. 二、等差数列前 n 项和公式的推导过程. 三、课堂小结： （1）公式的两种形式； （2）推导方法：倒序相加； （3）根据条件，灵活选择.

Ⅴ 习题答案、提示和解答

练习 5-1

1. （1）6，12；（2）8，64.

2. （1）$a_n=(-1)^{n+1}$；（2）$a_n=10^n-1$.

3. （1）1，8，27，64，125；

（2）5，−5，5，−5，5；

（3）1，4，7，10，13；

（4）2，4，8，16，32.

4. （1）$a_7=63$，$a_{10}=120$；

（2）$a_7=\frac{1}{7}$，$a_{10}=-\frac{1}{10}$.

5. （1）$a_n=3n$；（2）$a_n=\frac{n+1}{n}$.

练习 5-2

1. 略.

2. （1）$a_n=4n-1$，$a_4=15$，$a_7=27$，$a_{10}=39$；

（2）$a_n=12-2n$，$a_{20}=-28$.

3. （1）$a_1=10$；（2）$d=-1$；

（3）$n=10$；（4）$a_n=-2n+8$.

4. （1）$A=298$；（2）$A=\frac{133}{4}$.

5. (1) $a_4=14.6$;

(2) 由 $a_1+2d=9$，$a_1+8d=3$，解得

$a_1=11$，$d=-1$. 所以 $a_{12}=0$.

6. 设所求的 3 个数为 $a-d$，a，$a+d$，则

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=18,\\(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=116,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}a=6,\\3a^2+2d^2=116,\end{cases}$

解得　$a=6$，$d=\pm2$.

因此所求的 3 个数是 4，6，8 或 8，6，4.

练习 5-3

1. 略.

2. (1) $S_{10}=500$;　(2) $S_{50}=2\ 550$.

3. $S_{500}=250\ 500$.

练习 5-4

1. 略.

2. (1) $a_4=-135$，$a_8=-10\ 935$;　(2) $a_4=9.6$，$a_8=153.6$;

(3) $a_4=\frac{9}{32}$，$a_8=\frac{729}{8\ 192}$;　(4) $a_4=\frac{1}{2}$，$a_8=\frac{1}{8}$.

3. (1) $a_1=2\ 916$;　(2) $a_1=5$，$a_4=40$.

4. $q=3$.

5. $n=9$.

6. (1) $G=\pm8$;　(2) $G=\pm\sqrt{21}$.

7. 由 $a_5=405$，得 $5q^4=405$，$q=\pm3$，

因此，所求的三个数是 15，45，135；或 -15，45，-135.

练习 5-5

1. 略.

2. (1) $S_6=189$;　(2) $S_5=\frac{31}{2}$.

3. (1) $S_{10}-S_4=1\ 008$;　(2) $S_7-S_2=\frac{93}{128}$.

4. $q=\pm\frac{1}{2}$. 当 $q=\frac{1}{2}$时，$S_5=\frac{279}{4}$；当 $q=-\frac{1}{2}$时，$S_5=\frac{99}{4}$.

5. $n=4$.

练习 5-6

1. $a_1=38$，$d=2$，$n=20$，$S_{20}=1\ 140$（个）.

2. $a_1=21$，$d=1$，$n=19$，$S_{19}=570$（块）.

3. 设所求的百分率为 x，那么从 2005 年到 2008 年每年降价后的每件产品的成本可组成一个等比数列

$$100，100\times(1-x)，100\times(1-x)^2，100\times(1-x)^3，$$

其中 $a_1=100$，$q=1-x$，依题意得

$$100\times(1-x)^3=51.20.$$

解这个方程

$$1-x=\sqrt[3]{\frac{51.20}{100}}=\sqrt[3]{0.512}=0.8.$$

所以 $x=0.2$.

即所求的百分率是 20%.

习题五

1. (1) $a_n=\frac{1}{5n}$；　(2) $a_n=-2n+2$；

(3) $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$；　(4) $a_n=\frac{(-1)^n}{2n}$；

(5) $a_n=\frac{1}{n^2}$；　(6) $a_n=(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}$.

2. (1) $a_{10}=110$，$a_{31}=992$，$a_{48}=2\,352$；

(2) 由 $a_n=n(n+1)$，$420=n(n+1)$，解得 $n=20$.

3. 1，2，-1，3，-4.

4. (1) $A=771$；　(2) $A=90$.

5. 设公差为 d，由已知得

$$\begin{cases}a_1+5d=5\\2a_1+9d=5\end{cases}$$

解此方程组，得 $a_1=-20$，$d=5$.

所以 $a_9=a_1+(9-1)d=20$.

6. (1) $d=2$，$n=10$；　(2) $a_1=7$，$a_n=-7$；

(3) $n=5$，$a_n=17$；　(4) $a_1=-38$，$S_n=-360$.

7. 其余各齿轮的齿数分别是 27，30，33，36，39，42.

8. (1) $a_7=-729$；

(2) 因为$\frac{a_4}{a_2}=q^2$，所以 $q=\pm\frac{2}{3}$，

所以 $a_1=27$，$q=\frac{2}{3}$或 $a_1=-27$，$q=-\frac{2}{3}$.

9. (1) $G=\pm60$；　(2) $G=\pm2$.

10. 两个数是 27，81.

11. 设所求的三个数为$\frac{a}{q}$，a，aq，

则$\frac{a}{q}+a+aq=14$，$\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=64$.

解得　$a=4$，$q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$.

因此所求的三个数是 2，4，8 或 8，4，2.

12. 设三个正数为 $a-d$，a，$a+d$，

由$(a-d)+a+(a+d)=15$，得 $a=5$.

又$(5-d+1)(5+d+9)=(5+3)^2$，得 $d=2$ 或 $d=-10$（舍去）.

因此三个正数为 3，5，7.

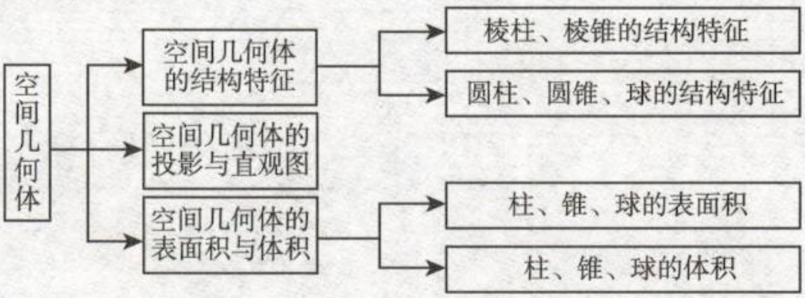
第六章　空间几何体

思想火花：

给我最大快乐的，不是已获得的知识，而是不断地学习；不是已有的东西，而是不断地获取；不是已经达到的高度，而是继续不断地攀登.

——高斯

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 了解多面体和旋转体的基本概念，对它们的有关性质不作要求.

2. 掌握平行投影的特性，了解空间图形的不同表现形式，会用斜二测画法画出简单空间图形的直观图，能画出柱、锥、球的直观图.

3. 掌握柱、锥、球的表面积和体积公式；了解有关侧面积公式的推导过程及其主要思想，渗透把有关立体几何问题转化为平面几何问题来处理的数学思想. 能用公式计算简单组合体的表面积和体积.

4. 培养和发展学生的空间想象力、运用图形语言进行交流的能力、几何直观能力.

Ⅲ 教材分析和教学建议

本章主要内容包括：空间几何体，直观图，空间几何体的表面积和体积.

本章第一大节的主要内容是认识空间几何体.

教材首先呈现空间几何体，通过对这些空间几何体的整体观察，帮助学生认识其结构特征，运用这些特征描述现实生活中的一些简单物体的结构，帮助学生运用平行投影，进一步掌握在平面上表示空间图形的方法和技能.

我们生活在图形的世界里. 引言中展示的图片，主要用以体现我们生活的空间离不开丰富多彩的几何图形.

复杂图形是由简单图形组合成的，在教学时应引导学生注意柱、锥、球等空间几何体的作用. 几何作为一种直观、形象的数学模型，在发展学生的直觉能力，培养学生的创新精神方面具有独特的价值. 教师可利用计算机、多媒体、实物向学生展示更加丰富多彩的几何图形. 让学生获得视觉上的愉悦，能增强探究的好奇心，感悟其中的数学美，激发出潜在的创造力.

本章第二大节的主要内容是：柱、锥、球的表面积和体积计算公式.

侧面积公式的推导. 教材只是给出了侧面展开图供学生领会思路，了解立体问题（求侧面积）转化为平面问题（展开图面积）的思想方法. 而有关体积和球的表面积的计算，则只给出了公式，要求学生会用即可.

面积和体积的计算着重让学生把柱、锥、球的表面积和体积计算公式统一起来认识，加强联系和对比. 要求学生学会一些简单几何体的表面积与体积的计算方法.

本章的重点是：空间几何体的概念，空间几何体的表面积和体积.

本章的难点是：空间几何体的表面积和体积.

学好本章的关键是：深刻认识和区别各种几何体，熟练识记和运用柱、锥和球的表面积与体积计算公式.

本章教学约需 9 课时，具体分配如下（仅供参考）：

6.1　认识空间几何体	
6.1.1　认识多面体与旋转体	1 课时
6.1.2　棱柱、棱锥	1 课时
6.1.3　圆柱、圆锥、球	1 课时
6.2　空间几何体的表面积和体积	
6.2.1　空间几何体的表面积	2 课时
6.2.2　空间几何体的体积	2 课时
小结与复习	2 课时

6.1　认识空间几何体

6.1.1　认识多面体与旋转体

1. 本节主要内容是多面体和旋转体的有关概念. 本节是为学习立体几何的初步知识作的铺垫，是学习立体几何的基础. 重点是多面体和旋转体的有关概念.

2. 教材给出多面体和旋转体的概念，目的是为了让学生能够清楚地分清两类几何体，为以后的教学打下基础.

3. 本节涉及的空间几何体，学生在小学、初中都有初步的认识，只是没给它们严格定义，教师教学时应尽量结合教具和多媒体，使学生对有关概念有形象生动的认识.

6.1.2 棱柱、棱锥

1. 本节主要内容是棱柱、棱锥的有关概念，让学生直观理解，不要求学生对线面关系作深刻的理解. 本节的重点是棱柱、棱锥的有关概念.

2. 教材先让学生将棱锥和棱柱进行比较，然后用收缩的方法引出棱锥的概念，这样有利于学生用运动变化的观点去认识棱柱、棱锥的辩证关系. 教师要通过实物模型或多媒体演示，引导学生在理解定义的基础上，区分各种棱柱和棱锥，并归纳它们的结构特征.

3. 多面体的高的概念是通过铅垂线给出的，在教学中，可以用一根细绳下面系一个重物给学生演示，让学生理解高的概念，并直观地认识到直线和底面垂直，这条直线就和底面的任何一条直线垂直. 从而为讲解例 1 和例 2 打基础.

6.1.3 圆柱、圆锥、球

1. 本节主要内容是圆柱、圆锥的有关概念，让学生直观理解，不要求学生对线面关系作深刻的理解. 本节的重点是圆柱、圆锥的有关概念.

2. 教材先让学生思考圆柱、圆锥的生成规律，然后给出它们的定义. 主要是让学生初步理解旋转体的概念. 教学中要结合实物模型或多媒体演示，引导学生思考它们的结构特征.

3. 对于旋转体，重点介绍了球、圆柱、圆锥. 球是一种常见的几何体，它是一种旋转体，教材是由它引入旋转体的定义的. 圆柱、圆锥都是特殊的旋转体. 教学时最好结合多媒体加以形象演示，让学生体会到旋转体的动态形成过程.

4. 在讲授球的有关概念时，应注意球体和球面的联系和区别. 本节中球面距离不易理解，教师可以结合地球仪进行讲解，也可根据学生情况补充地球有关的概念，如经线、纬线等.

6.2 空间几何体的表面积和体积

6.2.1 空间几何体的表面积

1. 本节的主要内容是柱、锥、球的表面积计算公式（不要求记忆公式），了解有关侧面积公式的推导过程及其主要思想. 渗透把有关立体几何问题转化为平面几何问题来处理的数学思想和类比的思想方法. 本节的重点是培养学生运用公式进行计算的能力.

2. 柱、锥的侧面积公式没有列出详细的推导过程，而是只提供了直观形象的侧面展开图，在直观上用实验对公式加以验证，着重于体现空间问题向平面问题转化的思想. 教学时可以通过演示一些多面体的平面展开图的过程，让学生了解平面展开图的概念.

3. 几种多面体和旋转体的表面积，除球面外，都是通过它们的侧面展开图求得的．教学中应运用多种媒体，再现展开过程，激发学生学习兴趣，也便于知识的理解、记忆和迁移．对部分基础比较好的学生，教师可引导学生对公式进行推导．另外，要让学生理解斜高和高的概念，为后面作好铺垫．

4. 对于例题，由于学生没有学习点、线、面的位置关系，在讲解中，一些定义、定理，例如直线和平面垂直的定义等，只是让学生直观的理解，教师可以用教具进行辅助说明，不要求说明理由．

5. 对于球面的表面积公式是直接给出的，对这个公式的证明教师可以根据学生的情况进行简要的说明．

球的表面积公式的推导如下：

设球 O 的半径为 R，我们把球面任意分割为一些“小球面片”，如图 6-1，它们的面积分别用 ΔS_1，ΔS_2，…，ΔS_i，…表示，则球的表面积

$$S=\Delta S_1+\Delta S_2+\cdots+\Delta S_i+\cdots.$$

以这些“小球面片”为底，球心为顶点的“小锥体”的体积和等于球的体积，这些“小锥体”可近似地看成棱锥，“小锥体”的底面积 ΔS_i 可近似地等于相应的棱锥的底面积，球的半径 R 近似地等于棱锥的高 h_i．因此，第 i 个棱锥的体积 $V_i=\frac{1}{3}h_i\cdot\Delta S_i$，当“小锥体”的底面非常小时，“小锥体”的底面几乎是“平的”，于是球的体积

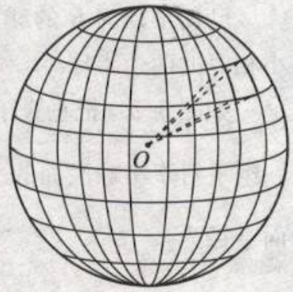


图 6-1

$$V\approx\frac{1}{3}(h_1\cdot\Delta S_1+h_2\cdot\Delta S_2+\cdots+h_i\cdot\Delta S_i+\cdots),$$

又因为 $h_i\approx R$，且 $S=\Delta S_1+\Delta S_2+\cdots+\Delta S_i+\cdots$，所以可得

$$V\approx\frac{1}{3}R\cdot S,$$

又因为 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，所以 $\frac{1}{3}R\cdot S=\frac{4}{3}\pi R^3$，所以

$$S=4\pi R^2$$

即为球的表面积公式．

6.2.2　空间几何体的体积

1. 本节的主要内容是柱、锥、球的体积计算公式（不要求记忆公式）．本节的重点是培养学生运用公式解决一些实际问题的能力．

2. 柱、锥、球的体积的计算公式，教材是直接给出的，没有在理论上进行证明，只要求学生理解公式所表示的意义，着重让学生把柱、锥、球的体积计算公式统一起来认识，加强联系和对比，会利用公式进行计算．

3. 柱、锥体积公式的引出，是从学生熟悉的长方体入手，运用祖暅原理，采用由特殊到一般的方法类比给出棱柱和圆柱的体积公式．而锥体的体积，是通过“切割法”得到的，教师可以结合模具或多媒体进行讲解．

4. 对于圆柱、圆锥的体积公式：$V_{圆柱}=\pi R^2h$，$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi R^2h$，没有在教材中给出，原因是为了降低难度，让学生掌握通性通法．教师可以根据学生实际情况进行补充．

5. 例题的选取尽量体现在实际生活中的运用，以激发学生学习的兴趣，增强数学的应用意识．在教学中，教师可结合日常生活中的具体例子，让学生明白体积在实际生活中的运用．

6. 对于球的体积公式，传统教材是利用分割，先近似求和，再精确求和的极限思想方法来推导的，这里结合祖暅原理对球的体积公式进行简要的推导．然后着重解决一些简单的应用问题．有条件的学校可让学生查阅资料了解相关公式的推导．

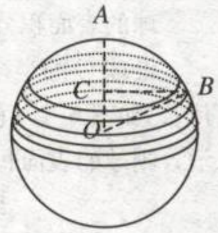


图 6-2

已知半径为 R 的球，用过球心的平面去截球，球被截面分成大小相等的两个半球．

如图 6-2，把垂直于底面的半径 OA 作 n 等分，经过这些分点用一组平行于半球底面的平面把半球切割成 n 层，每一层都近似于一个高为$\frac{R}{n}$，第 i 层的底面半径为

$$r_i=\sqrt{R^2-\left[\frac{R}{n}(i-1)\right]^2}，(i=1，2，3，\cdots)（由下向上数）$$

的圆柱，这些圆柱的体积之和就是半球的体积．

而 $V_i\approx\pi r_i^2\,\frac{R}{n}=\frac{\pi R^3}{n}\left[1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right]$ $(i=1，2，3，\cdots)$，所以

$$\begin{aligned}V_{半球}&=V_1+V_2+\cdots+V_n\\&\approx\frac{\pi R^3}{n}\left\{1+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]\right\}\\&=\pi R^3\left[1-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right]\\&=\pi R^3\left[1-\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6}\right].\end{aligned}$$

当所分的层数不断增加，不断变大时，上式的精确度越来越高，若 n 变为无穷大，就得到 V 半球的准确值．因为 n 趋向无穷大时，$\frac{1}{n}$趋向 0，所以 $V_{半球}=\frac{2}{3}\pi R^3$，则有

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ⅳ 参考教案

课题：6.2.2　空间几何体的体积（一）

教学目标：

(1) 理解祖暅原理的含义以及利用祖暅原理计算几何体体积的方法；

(2) 在运用祖暅原理的过程中，体会祖暅原理的由"面积都相等"推出"体积相等"的辩证法的思想；

(3) 在推导棱柱体积公式的过程中，体会从特殊到一般，从一般到特殊的归纳演绎的数学思想方法；

(4) 识记并掌握棱柱、圆柱的体积公式，并灵活运用体积公式解决实际问题；

(5) 通过介绍我国古代数学家体积研究的成果，激发学生的民族自豪感，提高学生学习数学的兴趣.

教学重点：

祖暅原理和棱柱、圆柱的体积公式.

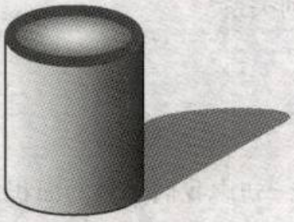
教学难点：

祖暅原理的运用.

教学过程：

一、实例引入，提出问题

在生产实际中，经常遇到体积的计算问题，如兴修水利、修建道路需要计算土方，修建粮仓、水池需要计算建材数量和容积. 因此有必要研究几何体的体积计算.




提问：

(1) 上图的左侧是一个圆柱形的器皿，底面半径为 3 cm，高度为 8 cm，那么怎样计算它的容积呢？

(2) 上图的右侧是一个长方体的游泳池，长是 50 米，宽是 21 米，深是 2 米，那么这个游泳池能容纳多少立方米水？

(用多媒体展示生活中的圆柱形的水桶，瓶子，游泳池等图片，显示问题.)

这都涉及棱柱、圆柱的体积如何计算的问题.

二、探究棱柱、圆柱的体积公式

1. 从已知到未知，从特殊到一般

首先想到已经学过的长方体的体积公式，然后探究一般棱柱的体积公式.

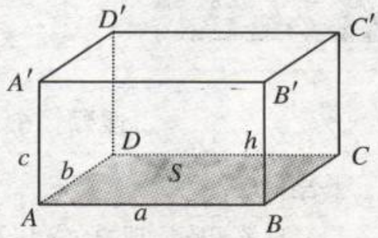


图 1

初中学过的计算长方体的体积公式（图 1）：

$$V_{长方体}=abc \text{ 或 } V_{长方体}=Sh.$$

其中 a 为长，b 为宽，c 和 h 为高，S 为底面积

（多媒体展示图 1 的长方体.）

问题　底面积相等、高也相等的棱柱、圆柱，它们的体积是否一样？

（多媒体展示图 2 的三个几何体，并且用动画演示界面上下运动.）

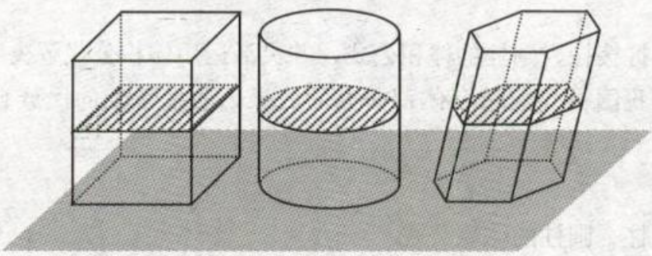


图 2

体积公式 $V=Sh$ 对其他两个几何体是否成立？

请学生谈谈对体积的理解，并小结：几何体占空间部分的大小叫做它的体积.

2. 从平面到空间的类比猜想

提问：

（1）等底等高的长方形和平行四边形的面积有何关系？

（2）等底等高的三角形的面积有何关系？

（3）等底等高的梯形的面积有何关系？

（利用几何画板的动态演示）

结论：根据面积公式我们可以得到面积均相等. 初中我们学过的面积公式的推导是因为任意平面多边形都可以用割补的方法转化为长方形的面积得到. 在利用几何画板动态演示的过程中，我们发现，用平行于底边的任意直线截两个平面图形得到的截线长度总相等.

启发思考：

这是否可以成为两个平面图形面积相等的条件呢？

继续探究：

线是由无穷多个点构成的，面是由无穷多条线构成的，立体是由无穷多个平面构成的. 因此我们可以得到：夹在两条平行直线之间的两个平面图形，被平行于这两条

直线的任意直线所截，如果所得的两条截线长度相等，那么，这两个平面图形的面积相等.

猜想：

类比到两个空间图形体积相等的条件有什么相似的结论呢？用平行于底面的任意平面截两个空间图形得到的截面面积总相等，则这两个空间图形的体积相等.

3. 进行数学实验，引入祖暅原理

取一摞面积相等的课本堆放在水平桌面上，然后用手推一下以改变其形状.

启发思考：

(1) 推斜以后体积变化了吗?

(几何体所占空间的大小不变)

(2) 推斜前后的两个几何体（前为长方体，后为平行六面体）还有什么共同之处?这种共同之处是不是就是两个几何体体积相等的条件呢?

(高度没有改变，每页纸张的顺序和面积也没有改变)

由学生总结归纳出祖暅原理的大致内容.

4. 屏幕显示祖暅原理：“幂势既同，则积不容异”

内容解释：

这里的“幂”是指水平截面的面积，“势”是指高.

即体积可看成是由面积叠加而成，用一组平行平面截两个空间图形，若在任意等高处的截面面积都对应相等，则两空间图形的体积必然相等.

还可表达为：夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等（如图 3).

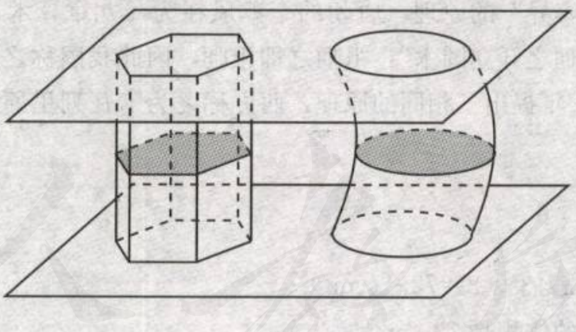


图 3

说明：

祖暅原理实际上是一个定理，但证明它需要用到高等数学的相关知识，中学阶段不能证明. 它只能判定两个几何体是否等积，不能用它具体求出某几何体的体积. 要想完成求体积的任务，还必须已知一个几何体的体积作为基础.

(用几何画板动态演示任意一个平面截两个几何体所得截面的各种位置.)

5. 利用祖暅原理推导棱柱、圆柱的体积公式

如果一个棱柱、一个圆柱与一个长方体的高相同（都为 h）且底面面积相等（都为 S），那么当我们用一个与底面平行的平面去截它们时，可以证明截面的面积都等于各自底面的面积 S，根据祖暅原理可知，棱柱、圆柱的体积与长方体的体积相等（如图 4），即

$$\boxed{V_{柱体}=Sh.}$$

其中 $V_{柱体}$ 表示柱体的体积，S 表示柱体底面的面积，h 表示柱体的高.

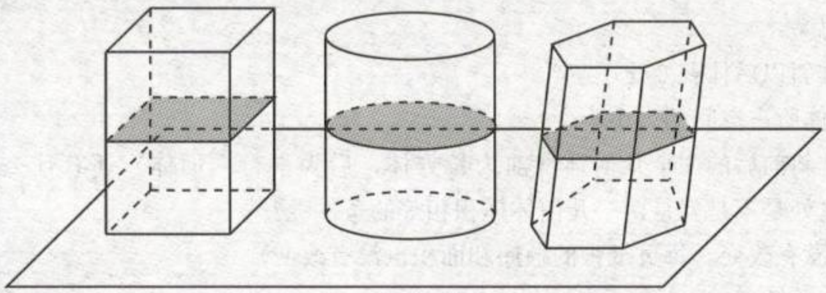


图 4

（用多媒体演示这个动画过程.）

6. 介绍祖冲之父子及我国古代数学家几何体体积的研究

中国古代数学，在魏晋南北朝达到新的高峰. 这一时期的代表人物是刘徽、祖冲之和他的儿子祖暅. 刘徽为《九章算术》作注，祖冲之父子在此基础上撰写了《缀术》等著作. 祖冲之精确地计算圆周率，提出约率和密率，是世界数学史上的重大成就. 他们三人还先后研究并最终给出了球的体积公式. 在这过程中，他们利用了“夫叠棊成立积，缘幂势既同，则积不容异”的原理，唐朝的李淳风在为《九章算术》作注时称求球体体积公式的方法是“祖暅之开立圆术”，祖暅之即祖暅，因此我国称之为祖暅原理. 意大利数学家卡瓦列里 1635 年提出了相同的原理，西方称之为卡瓦列里原理，为微积分学的创立作了准备.

三、巩固与应用

1. 引例的解答：

(1) $V_{圆柱}=Sh=\pi\times3^2\times8=72\pi\ (\mathrm{cm}^3)$.

所以圆柱形器皿的体积是 $72\pi\ \mathrm{cm}^3$.

(2) $V_{棱柱}=Sh=50\times21\times2=2\ 100\ (\mathrm{m}^3)$.

那么这个游泳池能容纳 $2\ 100\ \mathrm{m}^3$ 水.

（教师引导学生完成以上两个引例.）

2. 讲解例题：

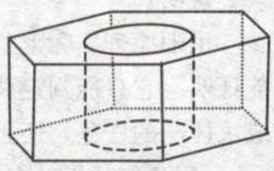


图 5

例 4　有一堆相同规格的六角螺帽毛坯共重 5.8 kg. 已知底面六边形边长是 12 mm，高是 10 mm，内孔直径是 10 mm. 如图

5 所示，那么约有毛坯多少个？（铁的密度是 7.8 g/cm³）

分析　六角螺帽毛坯的体积是一个正六棱柱的体积与一个圆柱的体积的差，再由铁的密度算出一个六角螺帽毛坯的重量即可.

解：因为

$$V_{正六棱柱}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times12^2\times6\times10\approx3\ 741\ (\text{mm}^3),$$

$$V_{圆柱}=\pi\times5^2\times10\approx785\ (\text{mm}^3),$$

所以一个毛坯的体积为

$$V=3\ 741-785=2\ 956\ (\text{mm}^3)=2.956\ (\text{cm}^3).$$

约有毛坯

$$5\ 800\div(7.8\times2.96)\approx251\ (个).$$

答：这堆毛坯约有 251 个.

四、课堂练习

1. 要求学生用第二种解决方法做例 4：先求出六角螺帽毛坯的底面面积，再用公式 $V=Sh$ 求出螺帽毛坯的体积.

2. 已知长方体的铁块长、宽、高分别是 2，4，8，将它熔化后铸成一个正方体形的铁块（不计损耗），求铸成的铁块的棱长.

五、课堂小结

1. 本节课的主要内容有两个：一是棱柱、圆柱的体积公式的推导，二是应用棱柱、圆柱的体积公式解决实际问题.

2. 本节课的数学思想方法主要体现在：由特殊长方体的体积推导一般棱柱、圆柱的体积，再根据一般棱柱的体积公式去解决具体问题中的特殊棱柱的体积，这种从特殊到一般，再从一般到特殊的归纳演绎的数学思想方法常常是学习数学概念的方法.

在祖暅原理的理解中，体会由“截线都相等”推出“面积相等”，由“面积都相等”推出“体积相等”的辩证法的思想，实际上就是微积分的思想.

六、布置作业

习题六　1，2，10.

七、板书设计

6.2.2　空间几何体的体积		
1. 长方体的体积	3. 棱柱、圆柱的体积	例 4
2. 祖暅原理		练习

Ⅴ 习题答案、提示和解答

练习 6-1

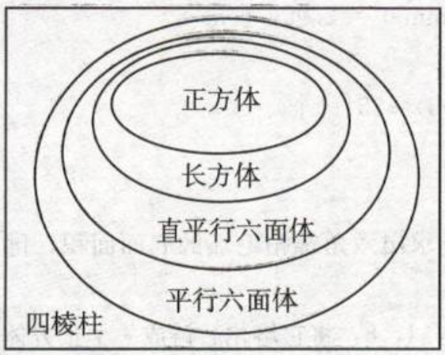
1. 5，5，8；8，6，12；24，14，36.

2. 略.

练习 6-2

1. （1）×；（2）×.

2.



3. 相等，证明略.

4. （1）$5\sqrt{2}$；（2）$\sqrt{186}$.

5. 3 cm.

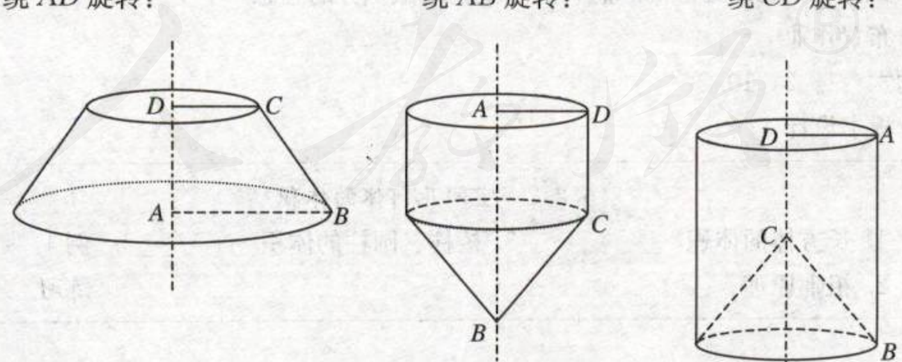
练习 6-3

1. （1）√；（2）√；（3）×.

2. （1）2 cm；（2）4 cm；（3）πR^2；（4）$\frac{\sqrt{3}}{2}R$；（5）$\frac{n\pi R}{180}$.

3. 圆锥和圆柱.

4. 绕 AD 旋转：　　绕 AB 旋转：　　绕 CD 旋转：



5. 半球和圆柱；棱柱和棱柱；棱柱和圆柱.

6. 4 cm.

7. 2 cm.

练习 6-4

1. $60°$（提示：在正方体中，$\triangle ABC$ 是正三角形).

2. $2\sqrt{6}$ 或 $\sqrt{66}$（提示：有两种折法).

3. 它的侧面积是 $12\sqrt{3}$，全面积是 $16\sqrt{3}$.

4. 制造这种塔顶需要 3.40 m^2 铁板.

练习 6-5

1. 54π.　2. $\frac{64}{9}\pi$.　3. 4.　4. 64π.　5. 576.

练习 6-6

1. $6\sqrt{3}$.　2. 4.　3. $144\sqrt{3}$.　4. $\frac{3\pi}{2}$.　5. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

练习 6-7

1. 36π.　2. 100π，$\frac{500}{3}\pi$.

3. 1∶2∶3.

习题六

1. 8 cm，6 cm，24 cm.

2. $\sqrt{5}$ cm，$\sqrt{3}$ cm.

3. 3.

4. 2 cm.

5. 略.

6. $4+4\sqrt{3}$.

7. 4π.

8. 2∶1.

9. 侧面积是 24π，体积是 36π 或 48π.

10. $4\sqrt{2}\pi$，$\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.

11. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

12. 提示：因为

$$V_{半球}=\frac{128\pi}{3}\ \text{cm}^3,\ V_{圆锥}=64\pi\ \text{cm}^3.$$

所以 $V_{半球}<V_{圆锥}$.

即冰淇淋融化了，不会溢出杯子.

13. $\frac{8\sqrt{3}}{9}R^3$.

14. $\frac{5}{3}$ cm.

人教版®