中等职业教育规划教材

数 学

第二册

教师教学用书

山东省职业教育教材编写组 编著

人民教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

中等职业教育规划教材数学第二册教师教学用书 / 山东省职业教育教材编写组编著. —3 版. —北京：人民教育出版社，2014（2019.1 重印）

ISBN 978-7-107-20212-4

Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①山… Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—教学参考资料 Ⅳ. ① G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 036384 号

中等职业教育规划教材　数学　第二册　教师教学用书

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　址　http://www.pep.com.cn
经　销　全国新华书店
印　刷　山东汇文印务有限公司
版　次　2009 年 12 月第 3 版
印　次　2019 年 1 月第 13 次印刷
开　本　787 毫米 ×1 092 毫米　1/16
印　张　6.5
字　数　127 千字
定　价　8.60 元

说　明

本册教师教学用书是根据《山东省中等职业教育数学课程标准》和《中等职业教育规划教材　数学》第二册编写的．本册教师教学用书由山东省教学研究室组织编写．

本套教师教学用书编写的原则是：

1．努力体现中等职业教育数学教材编写的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图．

2．明确各章的教学要求以及要达到的教学目标，帮助教师完成课程标准中规定的教学任务．

3．指出相关内容的教学重点、难点以及教学方法，帮助教师克服教学中的一些困难．

4．努力吸取中等职业学校数学教师优秀的教学经验，使本书能更好地为教学服务．

这本教师教学用书每章包括知识框图，教学要求，教材分析和教学建议，参考教案，习题答案、提示和解答等五部分．

知识框图，直观地揭示了各知识点之间的联系，主要是为了让教师在整体上对本章的知识结构以及各知识点之间的关系有一个整体的认识．

教学要求的确定，主要依据《山东省中等职业教育数学课程标准》中的相关必修内容的教学要求，为了适应对学生加强技能训练的需要，我们对必修内容的教学要求做了一些调整．教材编写时，充分考虑学生的不同需求，为学生的发展提供了较为宽泛的选择空间，以适应不同程度学生的个性发展．本教材每章添设内容较浅、贴近学生生活背景的问题，这个问题引出的数学知识是本章内容的知识原型、核心知识；每章的卷首语、名人名言概述本章的主要内容及学习本章的意义，激励学生不断进取、不断创新；每节引入的问题，是本章知识的增长点，是本节核心内容或研究方法的出发点，激发学生探究新知的欲望、引发学生的思考；增加“想一想”、“练一练”、“试一试”、“议一议”等栏目，引导学生动手、动脑，强化训练，启迪学生思维、使之不断向深层次发展，达到较高的教学要求；习题、练习题立足于“起点低、台阶密、坡度小、过程简、思想高”；每章最后的阅读与实践能够使学生了解数学发展的历程、品尝数学大师们的甘苦、体验做趣味数学题的乐趣．

在教材分析和教学建议中，首先分析了本章的内容结构，知识间的递进关系和作用地位，指出本章内容的重点、难点，为了教学过程中能够突出重点，突破难点，本书给出了本章总体的教学建议，接着给出了本章教学的参考课时，最后分节进一步分析教学内容，并针对各节内容给出了较为具体的教法与学法建议．

为了帮助教师理解教材的编写意图，更加有效地进行教学，每章都给出了教学案例

供教师参考.

每章给出了练习与习题的参考答案与提示. 一般来讲，简单题只给出答案，中等难度题给出提示，难题给出解答——通常只给出常规解法.

第二册教材共分五章. 各章知识有一定的独立性，但就整体而言存在一定的逻辑联系. 下面就第二册中如何贯彻这套教材的指导思想，再作如下说明，以帮助教师理解教材.

第七章学习三角函数，它是中学阶段的基本初等函数之一，除具备其他初等函数的一般性质以外，三角函数是研究周期变化规律、函数变换的载体，同时为机电专业学生学习专业课提供知识准备；第八章学习平面向量，它是后继研究直线方程、距离问题等的有效工具；第九章学习直线与圆的方程，它是解析几何的初步知识，借助于直角坐标系用代数的方法研究曲线的方程，发现曲线的几何性质，为研究几何问题开辟新的研究途径；第十章学习立体几何初步，给出了点、线、面的位置关系，为建筑、机械等专业提供数学基础；第十一章学习概率与统计初步，这部分内容相对独立，它的研究思路和方法与以前的数学内容有着很大的区别，而且与现实生活的联系非常密切，是概率论和数理统计的基础知识.

这套教材，把学习数学的基本思想方法与数学知识放在同样重要的地位. 第二册的内容本身突出了函数的思想、方程的思想、转化的思想、分类讨论的思想，在教材的设计上特别突出了数形结合的思想方法. 例如第七章的三角函数、第八章的平面向量、第九章的直线与圆的方程等，基本上做到：有数必有形，有形必有数. 第二册教材涉及的数学方法有：坐标法，向量法，类比法，换元法，归纳法，演绎法，待定系数法，观察、发现法等. 同时第一册所涉及的配方法，设未知数列方程、不等式及求解问题，待定系数法，数形结合，函数关系的建立与研究方法等数学方法在第二册教材中都得到了加强. 教师要重视上述基本思想方法的教学，要在教学中经常有意识地讲解上述数学思想和数学方法的应用.

在教学中，要贯彻“温故而知新”的原则. 中等职业学校贯彻这一原则有一定的困难. 但要使学生学好数学，教学中要切实贯彻这一原则. 数学教学对基础知识的要求较高，基础不好难以继续学习，而中等职业学校学生的数学基础往往较差，因此，在教材编写中主要采取循环上升的方式来贯彻这一原则. 又由于单纯复习效果一般较差，对学生的心理也有不利影响，所以，教材采用了在讲新内容的同时，紧密结合新知识复习旧知识. 教师在教学中还要根据学生的具体情况，灵活地设计教案，以旧引新，以新带旧，努力提高教学质量.

第二册要达到教学要求，课时数应不少于 71. 各类专业，教学要求可以不同，对于数学要求较高的专业，可适当增加课时，拓宽、加深对本册内容的学习.

本书由高存明、孙明红主编，副主编为：李励信，陆泽贵，参加编写的还有：李增华，徐刚，王智海，刘学卫，李长林，刘树凤，彭晋顺，祁志卫，杜红梅，闫桂明.

责任编辑：龙正武.

由于编者水平所限，这本教师教学用书一定存在一些缺点和错误，恳切希望广大教师、教研人员和有关专家提出宝贵意见，以便再版时修改、订正.

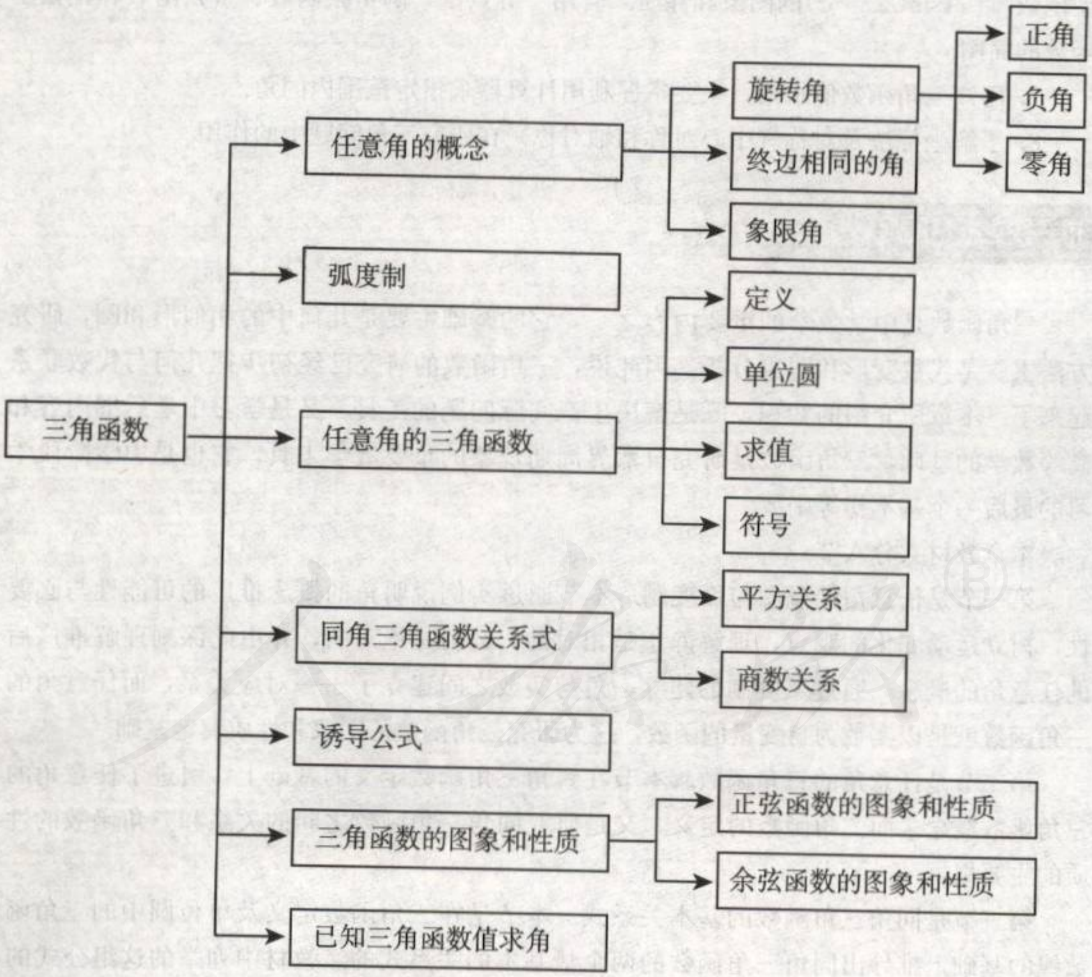
山东省中等职业学校数学教材编写组
2007年1月

目　录

第七章　三角函数

> 思想火花：
>
> 教育成功的秘密在于尊重学生.

知识框图



II 教学要求

1. 了解正角、负角、零角、终边相同的角、象限角等概念，熟练掌握角的加、减运算.

2. 理解弧度的意义，掌握弧度和角度的换算，熟练掌握特殊角的弧度和角度的换算，并会用计算器进行弧度和角度的换算.

3. 理解任意角的三角函数的正弦和余弦的概念，熟记其在各象限的符号，会用计算器求任意角的正弦、余弦和正切值.

4. 熟练掌握同角三角函数间的两个基本关系式，并会用这组公式“知一求二”.

5. 了解诱导公式，并会用诱导公式进行简单的求值与化简.

6. 熟练掌握正弦函数的图象和性质，了解余弦、正切函数的图象和性质. 掌握正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象和性质. 会用“五点法”画正弦函数、余弦函数和正弦型函数的简图.

7. 已知三角函数值求角，主要掌握利用计算器求指定范围内的角.

8. 了解坐标法及对称（中心对称和轴对称）在研究三角问题中的作用.

III 教材分析和教学建议

三角函数是中学数学的重要内容之一，它的基础主要是几何中的相似形和圆，研究方法主要是代数变形和图象分析. 因此说，三角函数的研究已经初步把几何与代数联系起来了. 本章所介绍的知识，既是解决生产实际问题的工具，又是学习中学后继内容和高等数学的基础，三角函数是研究自然界周期现象的重要数学工具，它也是中学阶段学习的最后一个基本初等函数.

本章教材共分六节.

第一节是任意角的概念与弧度制. 本节通过实例说明角的概念推广的可能性与必要性，树立运动变化的观点，理解静止是相对的，运动是绝对的，并由此深刻理解推广后的任意角的概念. 通过弧度制的建立，角与实数之间建立了一一对应关系，而任意角的三角函数就是以实数为自变量的函数，这为研究三角函数的图象和性质奠定基础.

第二节是任意角的三角函数. 本节在锐角三角函数定义的基础上，引进了任意角的三角函数概念. 而三角函数的定义，又是研究同角三角函数之间的关系和三角函数的性质的主要根据.

第三节是同角三角函数的基本关系式. 本节是在三角函数定义及单位圆中的三角函数线的基础上推导出同角三角函数的两个最基本的关系式的. 教材中列举的这组公式的主要作用是：已知 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 中的任意一个，可以求出其余的两个.

第四节是三角函数诱导公式. 本节课的所有诱导公式，都是在三角函数的定义、单位圆中的三角函数线及对称（中心对称和轴对称）的基础上推导出来的. 学好本节内容，主要是为后面学习三角函数的图象和性质以及由值求角等内容打下基础.

第五节是三角函数的图象和性质. 三角函数的图象和性质是本章的主体内容，它是以前学过的函数的重要补充. 通过这节课的学习，了解它们的图象的特征，会正确使用“五点法”作出 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象，并依据图象得出它们的性质. 正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 是这里研究的又一个重点，除了会用“五点法”画出它的简图外，还要从三种基本的图象变换（平移变换、伸缩变换和对称变换）的角度认识它与 $y=\sin x$ 的图象的关系.

第六节是已知三角函数值求角. 本节教材内容主要是学习利用计算器由三角函数值求角. 学好本节内容，是为后面学习解三角形的内容服务.

本章中最重要的数学思想是等价转化的化归思想，主要的数学方法是数形结合. 通过本章的学习，要逐步学会换元法及探索、归纳、类比、分析、综合等常用的基本数学方法.

本章的重点是：

(1) 任意角的三角函数的概念；

(2) 同角三角函数的两个基本关系式；

(3) 正弦函数的图象和性质.

本章的难点是：

(1) 弧度制的概念；

(2) 由三角函数值求角.

使学生熟练、牢固掌握三角函数的定义及正弦函数的图象与性质，是本章教学的关键.

三角函数把数与形结合了起来，在教学中应尽量多用图象帮助学生理解、记忆，并尽量使用单位圆的三角函数线进行教学.

本章教学约需 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

7.1　任意角的概念与弧度制	
7.1.1　任意角的概念	2 课时
7.1.2　弧度制	1 课时
7.2　任意角的三角函数	
7.2.1　任意角的三角函数的定义	1 课时
7.2.2　单位圆与正弦、余弦线	1 课时
7.2.3　利用计算器求三角函数值	1 课时
7.2.4　三角函数值在各象限的符号	1 课时
7.3　同角三角函数基本关系式	3 课时

7.1 任意角的概念与弧度制

7.1.1 任意角的概念

1. 学生已熟悉有理数的运算，在此基础上，定义正、负角的概念学生是容易理解的. 角由不超过 360°的正角转化到任意角（正角、负角和零角），学生有一个适应过程. 本小节的主要任务是帮助学生理解，并掌握正、负角的概念.

2. 教师应当理解，角的概念在几何教学中是最难定义的概念之一，通常根据用途不同，对角采用不同的定义. 初中几何给出的角的定义是：具有公共端点的两条射线构成的图形叫做角. 这个定义在一定范围内是非常有用的，它直观、形象、度量方便，但在更广泛的范围内解决问题却有局限性. 于是初中几何又给出了角的另一个定义：角可以看成是一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形. 本小节正、负角的定义是由第二种定义引申出来的.

3. 应向学生强调，角的大小表示旋转量的大小.

4. 在理解正角、负角和零角概念时，关键是抓住终边的旋转方向是按逆时针、顺时针还是没有转动.

5. 在讲解角的加减运算时，一是要与旋转之间建立联系，二是可用正、负数的运算作类比.

6. 理解象限角的概念，要注意把一个角放在平面直角坐标系中的标准位置，即角的始边与 x 轴的正半轴重合. 象限角及终边相同角的集合的表述，都是为下一节定义任意角的三角函数作准备. 使角的始边处于同一个位置，这样才便于比较和研究各角之间的关系.

7. 准确区分 0°～90°的角，锐角，小于 90°的角，第一象限角：

0°～90°的角是指满足 $0°\leqslant x<90°$的角 x；

锐角是指满足 $0°<x<90°$的角 x；

小于 90°的角是指满足 $x<90°$的角 x，它包括锐角、零角和负角；

第一象限角集合是$\{x|k\cdot 360°<x<90°+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

锐角一定是第一象限角，而第一象限角不全是锐角，如$-330°$和 750°都是第一象限角，但它们都不是锐角.

8. 教师讲解与角 α 终边相同角的集合 $S=\{x|x=\alpha+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 时，应指出：

(1) k 是任意整数；

(2) α 是任意角（包括正角、负角和零角）；

(3) α 与 $k\cdot 360^\circ$ 之间是用"+"号连接的，如 $\alpha-k\cdot 360^\circ$ 应看成 $\alpha+(-k)\cdot 360^\circ$；

(4) 终边相同的角不一定相等，终边相同的角有无数多个，它们相差 360° 的整数倍.

9. 要求学生熟练写出各象限角的集合和轴线角（终边在坐标轴上的角）的集合.

(1) 象限角的集合如下.

象限角	角的集合
第一象限角	$\{x\mid k\cdot 360^\circ<x<90^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$
第二象限角	$\{x\mid 90^\circ+k\cdot 360^\circ<x<180^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$
第三象限角	$\{x\mid 180^\circ+k\cdot 360^\circ<x<270^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$
第四象限角	$\{x\mid 270^\circ+k\cdot 360^\circ<x<360^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$

(2) 终边在坐标轴上的角的集合如下.

终边位置	角的集合
终边在 x 轴的正半轴上	$\{x\mid x=k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$
终边在 x 轴的负半轴上	$\{x\mid x=180^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$
终边在 x 轴上	$\{x\mid x=k\cdot 180^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$
终边在 y 轴的正半轴上	$\{x\mid x=90^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$
终边在 y 轴的负半轴上	$\{x\mid x=-90^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$
终边在 y 轴上	$\{x\mid x=90^\circ+k\cdot 180^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$
终边在坐标轴上	$\{x\mid x=k\cdot 90^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$

需要指出，象限角集合和轴线角集合的表示形式不是唯一的，它们还有其他的表示形式. 如：第四象限角的集合还可以表示为 $\{x\mid -90^\circ+k\cdot 360^\circ<x<k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$；终边在 y 轴的负半轴上角的集合还可以表示为 $\{x\mid x=270^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 等.

还要指出，每个象限角集合中，既有正角，也有负角.

10. 本节例、习题的类型有：

(1) 写出与角 α 终边相同的角的集合，即

$$S=\{x\mid x=\alpha+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

(2) 写出终边在坐标轴上的角的集合.

在讲解例 3 时，要强调当 $k\in\mathbf{Z}$ 时，$2k$ 是偶数，$2k+1$ 是奇数，且{偶数}∪{奇数}={整数}.

因为将终边在 x 轴上的角旋转 90° 就得到终边在 y 轴上的角，所以终边在 y 轴上的角的集合是 $S=\{x\mid x=90^\circ+k\cdot 180^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$；同理得到终边在直线 $y=x$ 上的角的集合是

$S=\{x \mid x=45°+k\cdot 180°, k\in \mathbf{Z}\}$.

(3) 怎样确定任意角 x 在哪个象限?

方法一：先把任意角 x 写成 $x=\alpha+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z}, 0°\leqslant\alpha<360°)$ 的形式，然后根据 α 所在象限确定 x 所在的象限；

方法二：先把任意角 x 写成 $x=\alpha+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z}, -180°\leqslant\alpha<180°)$ 的形式，然后根据 α 所在象限确定 x 所在的象限；

方法三：以例 2 中的第 (3) 小题为例. 与 $-950°$ 终边相同的角，用计算器加整数倍的 $360°$，直至使角出现在 $0°\sim360°$ 之间，即变为 $130°$. 因此，它是第二象限角.

7.1.2 弧度制

1. 教材在复习角度制的基础上引出了弧度制的概念. 教师有必要引导学生回顾初中学过的角度制，规定周角的 $\frac{1}{360}$ 为 1 度角，记作 $1°$. 且规定，$1°=60'$，$1'=60''$.

2. 弧度制是本章的难点之一，其中讲清 1 弧度角的含义是建立弧度制概念的关键. 定义的基础是对于任何一个圆心角 α，所对弧长与半径的比值是一个仅与角 α 的大小有关的常数. 因此，弧长等于半径的弧所对的圆心角的大小不随半径的变化而变化，而是一个大小确定的角，可以取为度量角的标准.

3. 要注意引导学生进行弧度制与角度制的比较：

(1) 弧度制是以“弧度”为单位度量角的度量制度，角度制是以“度”为单位度量角的制度；

(2) 1 rad 是等于半径长的圆弧所对的圆心角的大小，而 $1°$ 是圆周的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角的大小；

(3) 不管是以“弧度”为单位还是以“度”为单位，角的大小都是一个与半径的大小无关的定值；

(4) 用弧度为单位表示角的大小时，“弧度”二字可以省略不写，这时弧度数在形式上虽是一个不名数，但我们应当把它理解为名数，如 $\sin 2$ 是指 $\sin(2\text{ rad})$，$\pi=180°$ 是指 $\pi\text{ rad}=180°$，但如果以度 (°) 为单位表示角时，度 (°) 就不能省去；

(5) 用弧度为单位表示角时，常常把弧度数写成多少 π 的形式，如无特殊要求，不必把 π 写成小数，如 $45°=\frac{\pi}{4}$ 弧度，不必写成 $45°\approx0.785$ 弧度；

(6) 无论是利用角度制还是利用弧度制表示角的集合，整个表达式采用的度量制必须一致，切不可角度制与弧度制混用. 例如只能写成 $\{x \mid x=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$ 或 $\{x \mid x=45°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$ 的形式，不能写成 $\{x \mid x=45°+2k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$ 或 $\{x \mid x=\frac{\pi}{4}+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$ 的形式.

4. 用公式 $\alpha=\frac{l}{r}$ 求圆心角时，应强调其结果是圆心角的弧度数的绝对值. 教材中，此公式的主要作用是用来推导角度制与弧度制的互化公式，而它的另外两个推导式$\left(l=|\alpha|\cdot r\right.$ 和 $\left.r=\frac{l}{|\alpha|}\right)$的应用不作要求.

5. 一个角的弧度数与角度数的互化，教学时应抓住

$$360^\circ=2\pi\ \text{rad}\Rightarrow 180^\circ=\pi\ \text{rad}$$

这个关键. 记住了这个关系，角的弧度数与角度数的互化就不困难了.

6. 本节例、习题主要是角度制与弧度制的换算练习，其中又以特殊角的换算为主，同时还应掌握利用计算器进行换算的方法. 应通过练习让学生做到熟练、准确地进行角度制与弧度制的互化，要熟记特殊角的角度与弧度的对应值.

7.2　任意角的三角函数

7.2.1　任意角的三角函数的定义

1. 教材在复习锐角三角函数的基础上，直接定义了任意角的三角函数. 在定义任意角的三角函数之后，首先证明了比值$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{r}$，$\frac{y}{x}$与角 α 终边上点 $P(x,\ y)$ 的位置无关. 也就是说无论点 $P(x,\ y)$ 在角 α 终边上位置怎样变化，比值$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{r}$都分别等于角 α 终边与单位圆交点的横坐标 l 和纵坐标 m. 教材这样编写，一方面为定义三角函数提供理论根据，另一方面为利用单位圆研究三角函数性质作准备.

2. 教材在定义任意角的三角函数时，定义了余弦、正弦和正切，而把正割、余割和余切作为阅读材料，这样就突出了余弦、正弦和正切函数的重要地位.

3. 在定义三角函数后，要强调三角函数记号的意义，三角函数的记号 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 是一个整体，不能分离. sin，cos，tan 等是英语 sine（正弦），cosine（余弦），tangent（正切）的缩写.

4. 在给出三角函数的定义后，引导学生根据定义得出终边相同的角的各个三角函数值分别对应相等，为进一步学习三角函数的图象与性质作准备.

5. 结合本节例 2 和练习题，引导学生总结下表.

角 α	度	0°	90°	180°	270°	360°
	弧度	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$		1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$		0	不存在	0	不存在	0

这几个特殊角的三角函数值非常重要，应当让学生掌握推证方法，并让学生记住结果. 因为利用“五点法”作正弦（或正弦型）函数和余弦函数的图象时要用到这些特殊值.

6. 本节的例、习题主要有：

（1）已知角 α 终边上一点的坐标，求 α 的三角函数值；

（2）求特殊角的三角函数值.

7.2.2 单位圆与正弦、余弦线

1. 本小节在定义三角函数后，把正弦值和余弦值转化为用单位圆中的有向线段表示，使数与形结合起来，以加强学生对三角函数的理解. 三角函数线是本章讲解很多知识的基础. 例如，有些公式的导出和记忆，正弦函数的图象，是建立在三角函数线的基础之上. 务必使学生掌握好这些三角函数线的概念和性质.

2. 讲清单位圆在平面直角坐标系下的标准位置：单位圆的圆心与坐标原点重合.

3. 讲清角 α 在以原点为圆心的单位圆中的标准位置：角 α 的顶点在圆心 O，始边与 x 轴的正半轴重合，终边与单位圆相交于点 P.

4. 讲清单位圆中的三角函数线：角 α 的余弦线是有向线段$\overrightarrow{OM}$，正弦线是有向线段$\overrightarrow{MP}$. 要注意它们的方向，分清始点和终点，书写顺序不能颠倒. 教师要知道，有向线段$\overrightarrow{OM}$和$\overrightarrow{MP}$的数量（坐标）分别是 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$，而这些有向线段的长度分别是$|\overrightarrow{OM}|=|\cos\alpha|$和$|\overrightarrow{MP}|=|\sin\alpha|$. 由于学生还未学习向量及其在轴上（或直角坐标系中）的坐标，所以教材根据三角函数的定义得到：角 α 的余弦和正弦分别等于角 α 终边与单位圆交点 P 的横坐标和纵坐标. 这样就使数与形之间的关系更直观，更具体.

5. 本节的例、习题主要有：

（1）求已知角 α 与单位圆交点的坐标；

（2）求作已知角 α 的三角函数线.

7.2.3 利用计算器求三角函数值

1. 三角诱导公式的主要作用是用来求任意角的三角函数值，而随着科学技术的进步与发展，计算机（和计算器）的应用越来越广泛，且计算机（和计算器）在运算方面的方便、快速、简捷、准确的特点显现得越来越突出. 为了减轻学生负担，突出数学知识的实际应用，本教材删除了诱导公式而增加了此小节内容.

2. 本教材主要介绍函数型计算器在求任意角三角函数值方面的应用方法. 利用计算器求三角函数值其主要步骤为：

（1）调整计算器的使用状态.

如果是求以度为单位的三角函数值，计算时应将计算器置于 DEG（以度为单位的计算）状态. 如果是求以弧度为单位的三角函数值，计算时应将计算器置于 RAD（以弧度为单位的计算）状态.

（2）正确掌握运算程序. 教材通过例 1 和例 2 分别介绍了利用计算器求以“度”为单

位和以“弧度”为单位的任意角的三角函数值的方法.

3. 不同的计算器有着不同的使用程序，无论使用哪种计算器，都要教给学生正确的使用方法. 本教材介绍的是北雁牌的 CZ－1206H 型函数计算器在求三角函数时的应用方法.

4. 正确掌握利用计算器求任意角的三角函数值的方法，为后面学习三角函数值的符号及三角函数的图象和性质作准备.

7.2.4　三角函数值在各象限的符号

1. 三角函数值在各象限内的符号是根据三角函数的定义和各象限内点的横、纵坐标的符号导出的. 根据三角函数线可知：正弦的符号取决于纵坐标 y 的符号；余弦的符号取决于横坐标 x 的符号；正切的符号取决于纵坐标 y 和横坐标 x 是同号还是异号. 在讲本小节的内容时，建议先复习点 $P(x, y)$ 在各象限内的坐标的符号，再复习上节课学过的三角函数线概念.

2. 教材主要研究正弦、余弦和正切的符号，根据倒数关系，余割、正割和余切的符号分别与正弦、余弦和正切的符号相同.

3. 由于三角函数值在各象限内的符号至关重要，必须要求学生在理解的基础上牢记. 可以借助歌谣“正弦一二全是正，余弦偏在一四中，正切余切全不然，斜插一三象限中”加强记忆.

4. 课本例题研究.

例 1 是如何确定已知角的三角函数值的符号. 它有两种解法：方法一是，先确定已知角所在的象限，再确定三角函数值的符号；方法二是，直接利用计算器确定三角函数值的符号.

例 2 是“已知角 α 的两个三角函数的符号，确定角 α 的范围”. 此题要用求两个集合的交集的观点和方法来处理. 要特别注意，当 $\sin\theta<0$ 时，θ 是第三或第四象限角，或终边在 y 轴的负半轴上，千万不要漏掉“终边在 y 轴的负半轴上”这部分.

5. 本节的例、习题主要有：

（1）确定三角函数的符号；

（2）根据所给条件，确定角的终边所在的象限.

7.3　同角三角函数的基本关系式

1. 教材从三角函数线的概念出发，利用几何中的勾股定理导出了同角三角函数间的两个主要公式.

2. 讲同角三角函数基本关系式时，应突出“同角”两字，并提醒学生注意，这些关系式都是对使它们有意义的那些角而言的. 如在 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 中，$\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 以后遇到的关系式也应作同样理解.

3. $\sin^2\alpha=(\sin\alpha)^2$，读作“角 α 正弦的平方”．但 $\sin^2\alpha\neq\sin\alpha^2$，后者是“角 α 平方的正弦”．应使学生弄清它们的区别．

4. 教材通过3个例题的分析和讲解，主要介绍了这组公式在求值方面的应用．教师应该清楚，三角函数求值问题，就是把 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 当作未知数，根据已知条件与三角恒等式建立方程组的求解问题．通过例4与例5的学习，介绍了这组公式在三角函数化简与三角恒等式证明方面的应用．编写教材时，化简与证明的题目已作了精简，建议教师在教学过程中不要再补充精简掉的一些三角函数化简与三角恒等式证明的练习题目，以免加深学习内容，加重学生负担．

5. 课本例题研究：

（1）讲解例1时，对照已知和这组公式，引导学生找出解题过程：已知正弦（或余弦）$\xrightarrow{\text{根据平方关系}}$求余弦（或正弦）$\xrightarrow{\text{根据商数关系}}$求正切．并指出：由于角 α 所在的象限确定，因此只有一组解．

“想一想”的问题要与例1进行比较，找出它们的异同．例1有“α 是第二象限角”这个条件限制，它的解是唯一的，“想一想”中没有具体给出 α 是哪个象限的角，它的解需要讨论，它有两组解．

（2）在讲解例2时，一定要引导学生把 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 当作未知数，利用方程组来解．要特别强调题目中的隐含条件：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，并指出由于角 α 所在象限确定，应当只有一组解．

本题如果没有“α 是第四象限角”这个条件，则由 $\tan\alpha=-\sqrt{5}$ 可知，α 是第二或第四象限角，结果应有两组解：

当 α 是第二象限角时，$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，$\sin\alpha=-\sqrt{5}\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$；

当 α 是第四象限角时，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，$\sin\alpha=-\sqrt{5}\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{30}}{6}$．

（3）在解答例3时，学生很容易想到利用例2的方法，先分别求出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值，再求出 $2\sin\alpha\cos\alpha$ 的值．这种方法学生容易想到，但解答起来也容易出错，错误的原因是，对角 α 所在象限讨论不全，容易漏解．而教材中介绍的方法非常简捷，也不易出错，但刚开始也不易接受．要强化教材中的解题方法，并强调它在求某些三角函数式的值时的简捷性．

例3还有一种比较简单的方法，就是把 $2\sin\alpha\cos\alpha$ 恒等变形为只含有 $\tan\alpha$ 的三角函数式，然后代数求值，解法如下：

$$2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2\times(-3)}{1+(-3)^2}=-\frac{3}{5}.$$

（4）讲完前3个例题后，要引导学生总结归纳出“已知角 α 的一个三角函数值，求其他三角函数值”的方法和步骤：

ⅰ. 看符号（根据已知三角函数值的符号），定象限（确定角 α 所在象限），定解数（确定几组解）；

ⅱ. 知正弦（或余弦）$\xrightarrow{\text{根据平方关系}}$求余弦（或正弦）$\xrightarrow{\text{根据商数关系}}$求正切；

ⅲ. 知正切$\xrightarrow{\text{解方程组}}$求余弦（或正弦）$\xrightarrow{\text{根据商数关系}}$求正弦（或余弦）.

(5) 已知角 α 的一个三角函数值，怎样求其他三角函数值？教材主要介绍已知角 α 的正弦、余弦或正切中的一个，求其余两个. 教师应该知道，若已知余割、正割或余切，则可利用倒数关系 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\csc\alpha}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sec\alpha}$ 和 $\tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha}$，把它们转化为已知角 α 的正弦、余弦或正切中的一个，求其余三角函数值，但这种情况教材不作要求.

(6) 例 4 是化简三角函数式，一般遵循“切割化弦”这一原则.

(7) 例 5 是三角恒等式的证明. 教材要求学生掌握下列证明方法：

ⅰ. 从它的任意一边开始，推出它等于另一边，一般情况下遵循“由繁到简”的原则；

ⅱ. 用“作差法”，先证左右两边的差为零，从而得出左右两边相等的结论；

ⅲ. 分别证明左、右两边都等于同一个三角函数式（或数）.

例 6 中第 (3) 小题也可从一边证到另一边，证明如下：

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{\cos^2 x}{(1-\sin x)\cos x}=\frac{1-\sin^2 x}{(1-\sin x)\cos x}\\&=\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)\cos x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}=\text{右边}.\end{aligned}$$

同理，也可从右边证到左边，当然还有其他证明方法.

7.4 三角函数的诱导公式

1. 教材中主要介绍了四个诱导公式，而“$\pi-\alpha$”和“$2\pi-\alpha$”这两组公式分别作为例题和习题呈现，可以告诉学生这两个也可作为公式运用. 设计本节内容，主要是为学习三角函数的图象和性质、由三角函数值求角以及解三角形等内容作准备.

2. 教材中，诱导公式的推导是以几何的中心对称和轴对称为基础的，充分体现了诱导公式的几何意义. 本节前三个公式都是利用单位圆导出的，利用单位圆推导记忆诱导公式是本节教材的主要方法，体现了“数形结合”的数学思想.

3. 这些诱导公式实际上是中心对称、轴对称和旋转对称的表达式，揭示的是角的终边所在的直线关于原点对称和坐标轴对称的两个角之间的三角函数关系.

4. 教师应注意，在推导“$\pi-\alpha$”和“$2\pi-\alpha$”两组公式时，要提醒学生把它转化成“$-\alpha$”角的诱导公式来进行. 例如 $\sin(2\pi-\alpha)=\sin[2\pi+(-\alpha)]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

5. 所有诱导公式中的 α 表示的是任意角.

6. 诱导公式一是根据三角函数的定义直接得到的，它揭示正弦函数和余弦函数的周

期性质．若要用旋转对称的观点讲公式一，角 $2k\pi+\alpha$ 的含义是，以任意角 α 的终边为始边，旋转 $2k\pi$ 后得到的角 $2k\pi+\alpha$，其终边与角 α 的终边重合．

7. $-\alpha$ 角的诱导公式是用关于 x 轴对称的两点坐标之间的关系推出的，它揭示了正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数的重要性质．讲解此公式的关键是紧密结合单位圆，使学生理解以下三点：

（1）点 P 的坐标是 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$，点 P' 的坐标是 $(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$；

（2）点 P 与点 P' 关于 x 轴对称；

（3）点 P 与点 P' 坐标之间的关系是横坐标相等，纵坐标互为相反数．

8. $\pi+\alpha$ 的诱导公式，是用关于坐标原点成中心对称的两点坐标之间的关系推出的．讲此公式的关键是紧密结合单位圆，使学生理解以下三点：

（1）点 P 的坐标是 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$，点 P' 的坐标是 $(\cos(\pi+\alpha), \sin(\pi+\alpha))$；

（2）点 P 与点 P' 关于原点成中心对称；

（3）点 P 与点 P' 坐标之间的关系是横、纵坐标都互为相反数．

9. 受学生所学知识的限制，诱导公式"$\frac{\pi}{2}+\alpha$"的推导会有很大的困难．教材把此公式的推导过程当作阅读内容，教师课堂上可不推导，重要的是让学生记住公式．

在推证这个关系式时，要注意以下几点：

（1）正确写出点 $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$，点 $Q\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$；

（2）推证 $\triangle QNO\cong\triangle OMP$，由此得到 $|OM|=|NQ|$，$|MP|=|ON|$；

（3）得到 $|\cos\alpha|=\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right|$，$|\sin\alpha|=\left|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right|$；

（4）如果 α 是某个象限（如第一象限）的角，容易看到 $\alpha+\frac{\pi}{2}$ 就一定是下一个象限（如第二象限）的角，且 $\cos\alpha$ 与 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ 同号，$\sin\alpha$ 与 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ 异号，由此得到 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$．

10. 本节教材例、习题的设置紧紧围绕诱导公式，其目的就是让学生记住诱导公式，而用诱导公式求任意角的三角函数值不作要求，因为利用计算器来求既快又准．

7.5 正弦、余弦函数的图象和性质

7.5.1 正弦函数的图象和性质

1. 本大节主要学习三角函数的图象和性质．教学时，要集中精力和时间讲清正弦函数的图象和性质，进而让学生掌握它的图象和性质．通过本节课的学习，使学生进一步熟悉和掌握研究函数的过程和方法，为学生了解余弦函数、正切函数提供

基础和方法．由于我们主要是利用正弦函数图象的特征来研究正弦函数的性质，因此迅速正确地画出正弦函数的大致图象，既是教学的重点，也是教学的难点．由于在用几何法作正弦函数图象时，利用了正弦线，因此在教学时应简单扼要地复习三角函数线．

2. 教材介绍了两种正弦函数图象的画法：几何法与描点法．两种作图方法各有其优缺点，前者较精确，但过程繁复；后者学生比较熟悉，易于接受但不够精确．教学时，只需让学生了解几何法作图的原理和过程，学生作图还是用描点法为好．

3. 在画正弦函数 $y=\sin x$ 的图象时，用横轴上的量表示 x，它一般用带 π 的弧度数表示，纵轴上的量表示角 x 的正弦值 y．只是因为在单位圆中，角 x 的弧度数与其所对的弧长数值相同，此时自变量 x 的值与函数值都为实数．

在纯数学问题中，一般两个坐标轴上所取的量的单位长度应该相同（为方便起见，在横轴上取 $\pi\approx3.1$，$2\pi\approx6.2$），否则所画曲线的形状会各不相同（因为每点处的曲率发生了变化），从而影响学生对曲线形状的正确认识．但在实际教学中，为了方便起见，有时两个坐标轴上所取的单位长度不一样．不过，教师应尽量避免这一点．

由于学生是第一次遇到三角函数图象，特别要讲清横轴上单位的取法及表示（一般先在 y 轴上取定单位长 1，再在 x 轴上自原点起，用 3.1 为单位长连续取得等分点，并顺次在第 1 个单位长处标上 π，第 2 个单位长处标上 2π……）．教师宜边讲边画，力求准确，以起到示范作用．

4. 画出正弦函数的图象后，可引导学生观察，并找出确定图象形状时起关键作用的五个点：$(0,0)$，$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，$(\pi,0)$，$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$，$(2\pi,0)$．这五点也可列表记忆如下．

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0

其中有三个点是正弦曲线与坐标轴的交点，另两个点分别是正弦曲线的最高点和最低点，这五个点描出后，图象的大致形状就基本确定了．通常，在精度要求不高时，可用这种“五点法”作图．应适当加强练习，要求学生熟练掌握．

5. 让学生根据正弦函数图象，说出正弦函数的定义域，值域，在 $[0,2\pi]$ 内的单调性、奇偶性、最大值和最小值后，再通过分析公式 $\sin(x+2k\pi)=\sin x(k\in\mathbf{Z})$，引导学生发现，每隔 2π，图象会周而复始地重复出现，这样便可得出正弦函数在整个定义域上的图象，再根据正弦函数的图象深入研究正弦函数的性质．教材结合正弦函数给出了一般周期函数的定义，引出周期函数的概念后再说明：由于正弦函数是周期函数，我们只要研究它在一个周期内的性质，加以推广后就可得出正弦函数的一般性质．教材主要是根据正弦函数的定义和图象，归纳得到正弦函数的性质．

正弦函数的图象特征	正弦函数的性质
1. 图象向左、向右无限延展；	1. 定义域：**R**；
2. 图象最高点$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ 1\right)$，最低点$\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ -1\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$；	2. 值域$[-1,\ 1]$； 当$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$时，$y_{\max}=1$，当$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$时，$y_{\min}=-1$，其中$k\in\mathbf{Z}$；
3. 图象在$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$上升，在$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$下降，其中$k\in\mathbf{Z}$；	3. 单调增区间$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，单调减区间$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$，其中$k\in\mathbf{Z}$；
4. 图象关于原点对称；	4. 奇函数；
5. 图象每隔2π重复出现.	5. 周期$T=2\pi$.

通过学习正弦函数，又一次巩固了研究函数的过程和方法.

6. 利用正弦曲线在$[0,\ 2\pi]$内的图象和正弦函数的周期性，把正弦函数在$[0,\ 2\pi]$的性质推广到$(-\infty,\ +\infty)$，这是学生学习中的难点. 学生对于如何写正弦函数的单调区间、正弦函数取得最大值或最小值时所对应的自变量的集合以及正弦函数值为正、为负或为零时所对应的自变量的集合会产生困难，可紧密结合图象对照讲解.

7. 教材中为了研究三角函数的完整性质，引出了周期函数的概念，建议教师教学时不要补充有关周期函数的习题了，重要的是，让学生掌握正弦函数是以2π为周期的周期函数.

8. 关于周期函数，作如下解释（仅供教师参考）：

(1) 周期函数也可直观地理解为：对于函数$f(x)$的自变量的一切值，每增加一个定值$T(T\neq 0)$，函数值就重复出现时，函数$f(x)$就是周期函数.

(2) 周期函数的定义中，$f(x+T)=f(x)$要对自变量x的每一个值都成立，对其中的“每一个值”尤其要引起注意. 如果$f(x+T)=f(x)$不是对自变量的每一个值都成立，T就不是周期.

(3) 由正弦函数$f(x)=\sin x$的周期是$2k\pi(k\neq 0)$可知，周期函数的周期是不唯一的，若T为$f(x)$的周期，则$nT(n\in\mathbf{Z}$，且$n\neq 0)$也应是$f(x)$的周期，即

$$f(x+T)=f(x)\Rightarrow f(x+nT)=f(x).$$

(4) 周期函数不一定有最小正周期. 如常值函数$f(x)=C$，对于定义域**R**内的任何x值，函数值都是C，即$f(x+T)=f(x)$对于$x\in\mathbf{R}$都成立，且T可为任何不等于零的常数. 由于正实数集中无最小值，故函数$f(x)=C$没有最小正周期.

(5) 我们以前学过的函数大多都不是周期函数，含有三角符号的复合函数也不都是

周期函数.

9. 例题分析：

通过例 1 的学习，让学生掌握利用“五点法”作形如 $y=a\pm\sin x$ 的函数图象的方法.

通过例 2 的学习，让学生会求形如 $y=a\pm\sin x$ 的函数的最大值、最小值及周期，并会求使函数取得最大值、最小值的 x 的集合. 讲解此例题一定要做到“数形结合”.

通过例 3 的学习，让学生掌握比较两个正弦值大小的方法：如果两个角是在同一个单调区间内，可利用正弦函数的单调性直接比较这两个角的正弦值的大小；利用计算器可以比较任意两个角的正弦值的大小.

利用计算器比较两个正弦函数值的大小也有两种方法：一种是直接求出这两个角的正弦值，然后比较它们的大小；另一种是利用“作差法”.

例如，因为 $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\approx 0.0024>0$，所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)>\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$.

7.5.2　余弦函数的图象和性质

1. 关系式 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，揭示了正弦函数与余弦函数的内在联系，它们实际上是同一类函数. 把正弦函数 $y=\sin x$（$x\in\mathbf{R}$）的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位就可得到正弦型函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$（$x\in\mathbf{R}$）的图象，也就是余弦函数 $y=\cos x$（$x\in\mathbf{R}$）的图象. 这样我们就可以由正弦函数 $y=\sin x$（$x\in\mathbf{R}$）的图象变换而得到余弦函数 $y=\cos x$（$x\in\mathbf{R}$）的图象.

2. 余弦函数 $y=\cos x$ 的图象的几何画法，可让学生当作课后研究题目，了解一下即可，着重讲“五点法”. 而 $(0,1)$，$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ $(\pi,-1)$，$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$，$(2\pi,1)$ 是图象上起着关键作用的五点，这五点也可列表记忆如下.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\cos x$	1	0	-1	0	1

3. 画出余弦曲线后，要引导学生与正弦曲线相比较，得出以下结论：

(1) 余弦函数的图象可由正弦函数的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位而得到；

(2) 正弦函数 $y=\sin x$ 的图象通过原点，并且关于原点成中心对称，但余弦函数 $y=\cos x$的图象通过点 $(0,1)$，且关于 y 轴成轴对称.

4. 仿照正弦函数，让学生自行归纳余弦函数的图象特征和函数性质，如下表所示.

余弦函数的图象特征	余弦函数的性质
1. 图象向左、向右无限延展；	1. 定义域：**R**；
2. 图象最高点 $(2k\pi, 1)$，最低点$((2k+1)\pi, -1)$，其中 $k\in\mathbf{Z}$；	2. 值域 $[-1, 1]$； 当 $x=2k\pi$ 时，$y_{\max}=1$，当 $x=(2k+1)\pi$ 时，$y_{\min}=-1$，其中 $k\in\mathbf{Z}$；
3. 图象在$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 上升，在 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 下降，其中 $k\in\mathbf{Z}$；	3. 单调增区间 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$，单调减区间 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$，其中 $k\in\mathbf{Z}$；
4. 图象关于 y 轴对称；	4. 偶函数；
5. 图象每隔 2π 重复出现.	5. 周期 $T=2\pi$.

5. 由于学生对正弦型函数已经比较熟悉，本节内容重点是理解和记忆余弦函数的图象和性质.

6. 本节例、习题的类型主要有：

(1) 作函数 $y=a+b\cos x$ 的简图；

(2) 求函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的最大值、最小值和周期；

(3) 利用余弦函数的图象和性质（或利用计算器）比较两个余弦值的大小.

7.6 已知三角函数值求角

1. 本节的重点是已知正弦值求$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$范围内的角；已知余弦值求 $[0, \pi]$ 范围内的角；已知正切值求$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$范围内的角. 难点是已知三角函数值求给定范围内的角.

2. 本节教材是已知角求三角函数值的逆运算，为以后学习解三角形、已知直线的斜率求倾斜角奠定基础.

3. 教材首先利用正弦函数的图象，分析 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$与 $y\in[-1, 1]$ 是一一对应的，给出了 $x=\arcsin y$ 的定义. 其次根据余弦函数的图象，分析 $x\in[0, \pi]$ 与 $y\in[-1, 1]$ 是一一对应的，给出 $x=\arccos y$ 的定义. 而对于正切则直接给出了在 $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上，若 $\tan x=y$，则 $x=\arctan y$ 的定义. 教材这样编写，突出了利用计算器根据已知三角函数值求角过程中的一一对应，突出了本章教材的重点.

4. 对于 $\arcsin y$，$\arccos y$，$\arctan y$ 的符号引入，是为了更好地与有关专业接轨，

只要求学生了解记法. 教学中切不要讲解反三角函数，以免加重学生负担.

5. 对于已知三角函数值求给定范围上的角，教材中只要求推广到 $[0, 2\pi]$ 的范围，对于任意区间上的角不作过高要求. 对于已知三角函数值求 $[0, 2\pi]$ 范围内的角的方法，教材介绍了在单位圆中首先找到相应的正弦线或余弦线，进而作出满足条件的角的终边，运用角的旋转直接写出所给范围内的角.

6. 教材中的例 2，教师也可以引导学生利用诱导公式推出 $0°\sim360°$范围内的角，巩固诱导公式的应用.

7. 教材中练习第 3 题，学生求解可能有困难，教师要给予提示，可以使用诱导公式推导，也可给学生补充正切线的知识，适当扩充学生的知识面.

Ⅳ 参考教案

课题：7.3　同角三角函数的基本关系式（第一课时）

教学目标：

1. 知识目标：

了解公式的来源，熟练掌握同角三角函数间的两个基本关系式，并会用这组公式求三角函数值.

2. 能力目标：

通过设置问题情景，培养学生的判断、归纳和推理能力.

3. 情感目标：

(1) 通过自主探究，激发学生学习数学的兴趣；

(2) 通过分组讨论，培养学生主动交流的合作精神；

(3) 通过对数学问题的讨论，培养学生严谨的科学态度；

(4) 通过本节课的学习，培养学生善于探索的思维品质.

教学重点：

熟练掌握同角三角函数两个基本关系式，并会用这组公式求三角函数值.

教学难点：

应用平方关系时，三角函数值符号的确定.

教学方法：

本节课采用观察、归纳、启发探究相结合的教学方法，并运用现代化教学手段进行教学活动. 通过设置问题，引导学生观察分析归纳，形成概念（公式），使学生在独立思考的基础上进行合作交流，在思考、探究和交流的过程中获得对概念（公式）的全面体验和理解. 对于这组公式的运用，采取了“教师提出问题、学生积极思考、师生合作解

答、共同归纳步骤”的方法进行，并使学生边学边练，及时巩固，深化对概念（公式）的理解.

教学过程：

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
（一）复习引入	1. 复习.	1. 教师提问：正弦线和余弦线的定义是什么？ 学生回答，教师作出图形.	1. 为推证公式作准备.
	2. 教师提出猜想内容.	2. 教师提出猜想. 根据图形请你猜想（屏幕显示）： $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=?$ $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=?$ 学生积极思考.	2. 提出猜想，激发学生的求知欲望； 通过自我推导，锻炼学生的观察、发现等实践能力.
（二）概念（公式）形成	3. 归纳形成公式.	3. 师生共同归纳公式（屏幕显示）： $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ① $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ②	3. 通过共同归纳，既让学生自我体验成就感，同时也让学生体验数学公式的“简美”，更重要的是可以加深对这组公式的理解与记忆.
（三）概念深化	4. 分析公式特点，指出公式的作用.	4. 共同分析公式：公式①称为平方关系式，它指出角 α 的正弦的平方与角 α 余弦的平方和等于1，并且知道 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 中的任意一个，可以求出另一个；公式②称为商数关系式，它指出角 α 的正切可以用角 α 的正弦与角 α 的余弦的商来表示，并且知道 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 与 $\tan\alpha$ 中的任意两个可以求出另一个；如果将公式①和公式②联立成方程组，那么已知 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 与 $\tan\alpha$ 中的任意一个可以求出另外两个.	4. 通过分析公式，既让学生深化对公式的理解，更重要的是让学生熟练掌握这组公式的应用.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
(四) 应用举例	5. 讲解例 1 (屏幕显示)： 例 1　已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，求角 α 的余弦值和正切值. 共同分析题意，指出解题思路，学生自己解答，集体对照答案.	5. 引领学生认真审题，对照公式和已知条件集体分析： (1) 三角函数在各象限的符号? (2) 题目已知 $\sin\alpha$，利用哪个公式求 $\cos\alpha$? (3) 用哪个公式求 $\tan\alpha$? 理清解题思路后，让学生在练习本上写出解答过程. 教师巡回观察学生解答过程，及时提醒应注意的问题. 集体对照 (屏幕显示)： 解：由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. 因为 α 是第二象限角，$\cos\alpha<0$， 所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}$ $=-\frac{3}{5}$， $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$. 屏幕显示正确答案后，让学生对照答案检查自己的解答过程.	5. 通过分析和指导，帮助学生理清解题思路，培养学生分析问题和解决问题的能力. 通过集体对照，培养学生规范的解题步骤和严谨的科学态度.
	6. 分析解决教材中的"想一想"提出的问题 (屏幕显示)： 想一想：本题如果没有"α 是第二象限角"这个条件，应怎样解答?	6. 对照题目，教师提出以下问题，引导学生分析讨论： (1) 由 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ 你能判断出 α 是哪个象限的角吗? (2) 根据哪个公式可以求出 $\cos\alpha$? 它应该有几个值? (3) 根据哪个公式可以求出 $\tan\alpha$? 它应该有几个值? 通过分析教师应指出，本题的解答分两种情况，然后让学生自己完成. 在学生解答过程中，教师要巡回观察，发现问题，及时予以纠正. 学生解答完成后，屏幕显示出正确的解答.	6. 通过集体分析和学生自主解答，让学生逐步学会讨论数学问题的方法，养成分析事物的周密性与严谨性.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	7. 展示解答过程（屏幕显示）.	7. 教师对照屏幕，说出正确的解答过程. 解：由 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ 可知，α 是第一或第二象限角，所以 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\pm\frac{3}{5}$. 当 α 是第一象限角时， $\cos\alpha=\frac{3}{5}$， $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$； 当 α 是第二象限角时， $\cos\alpha=\frac{3}{5}$， $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$.	7. 通过集体对照，培养学生解题的科学性、规范性和严密性.
（五）归纳小结	8. 屏幕显示： “已知角 α 的正弦（或余弦）值，求其他三角函数值”的方法和步骤： （1）看符号（根据已知三角函数值的符号），定象限（确定角 α 所在象限），定解数（确定几组解）； （2）知正弦（或余弦）$\xrightarrow{\text{根据平方关系}}$ 求余弦（或正弦）$\xrightarrow{\text{根据商数关系}}$ 求正切.	8. 教师通过引导学生反思本节课的教学内容，集体归纳出解题步骤，然后将结果用屏幕显示出来.	8. 学生通过体验和反思，可以逐步提高自主探究的能力.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
（六）巩固练习	9. 题组练习： 1. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，且 α 是第二象限角，求角 α 的余弦值和正切值； 2. 已知 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，且 α 是第三象限角，求角 α 的正弦值和正切值； 3. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，求角 α 的余弦值和正切值；	9. 学生自己解答，教师巡回观察，最后分别将三名同学的答案用投影机在屏幕上显示出来，并集体评析.	9. 通过题组练习，让学生熟练掌握解答此类问题的方法和步骤.
（七）布置作业	10. 课后作业： 练习 7-7　1.（1），（2），（3）；3.	10. 简单给予提示.	10. 通过学生课后作业，反馈教学效果.

V　习题答案、提示和解答

练习 7-1

1. （1）$\{x \mid x=60°+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$，都是第一象限角；

（2）$\{x \mid x=120°+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$，都是第二象限角；

（3）$\{x \mid x=225°+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$，都是第三象限角；

（4）$\{x \mid x=-45°+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$，都是第四象限角；

（5）$\{x \mid x=-120°+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$，都是第三象限角；

（6）$\{x \mid x=-300°+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$，都是第一象限角.

2. （1）315°，第四象限角；

（2）40°，第一象限角；

（3）240°，第三象限角；

（4）150°，第二象限角.

3. $\{x|x=k\cdot 90°,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

4.

象限角	角的集合
第一象限角	$\{x \mid k\cdot 360^\circ<x<90^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$
第二象限角	$\{x \mid 90^\circ+k\cdot 360^\circ<x<180^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$
第三象限角	$\{x \mid 180^\circ+k\cdot 360^\circ<x<270^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$
第四象限角	$\{x \mid 270^\circ+k\cdot 360^\circ<x<360^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$

练习 7-2

1. (1) $\frac{3\pi}{4}$； (2) 6π； (3) $-\frac{3\pi}{2}$； (4) $-\frac{11\pi}{6}$.
2. (1) 60°； (2) 90°； (3) 150°； (4) -120°.
3. (1) 57.30°； 171.89°； 286.48°； 458.37°；
   (2) 1.45； 2.41； 4.85； 6.42.
4. 1.05 rad.
5. 相等. 因为这两个比值都等于这个圆心角的弧度数.

练习 7-3

1. (1) α 是第一象限角.

$$\sin\alpha=\frac{1}{2},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) α 是第二象限角.

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \tan\alpha=-1.$$

(3) α 是第三象限角.

$$\sin\alpha=-\frac{4}{5},\ \cos\alpha=-\frac{3}{5},\ \tan\alpha=\frac{4}{3}.$$

(4) α 是第四象限角.

$$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\alpha=\frac{1}{2},\ \tan\alpha=-\sqrt{3}.$$

2. 填表.

角 α	度	0°	90°	180°	270°	360°
	弧度	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$		1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$		0	不存在	0	不存在	0

3. 略解：设 $P(8, y)$，由 $|OP|=17$，得

$8^2+y^2=289$，解得 $y=-15$（因为 α 为第四象限角）. 于是

$\sin\alpha=-\frac{15}{17}$，$\cos\alpha=\frac{8}{17}$，$\tan\alpha=-\frac{15}{8}$.

4. 提示：在角 α 的终边上取一点 $P(-a, a)$（$a>0$），则 $r=\sqrt{2}a$，得

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

练习 7-4

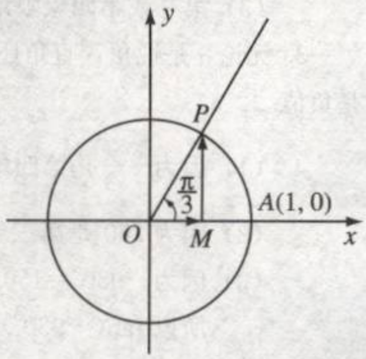
1. (1) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

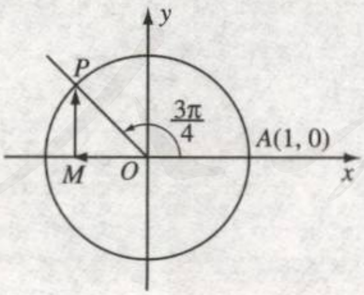
(3) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha=\frac{1}{2}$；

(4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

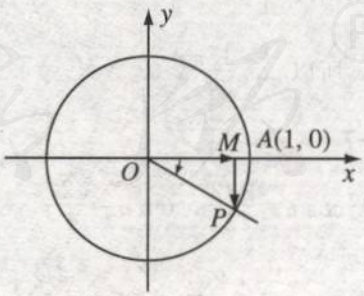
2. (1) 在平面直角坐标系中作单位圆. 以 Ox 轴的正方向为始边作角 $\frac{\pi}{3}$，它的终边与单位圆相交于点 P，过点 P 作 PM 垂直于 x 轴于点 M，则有向线段 $\overrightarrow{OM}$ 就是角 $\frac{\pi}{3}$ 的**余弦线**，有向线段 $\overrightarrow{MP}$ 就是角 $\frac{\pi}{3}$ 的**正弦线**. 点 P 的坐标是 $\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$.



(2)，(3) 步骤略，三角函数线见下图：



(2)



(3)

3. (1) 在以原点为圆心的单位圆中，因为 0 角的终边与单位圆的交点坐标是（1，0），所以 $\cos 0=1$，$\sin 0=0$；

同理可以求得：

(2) $\cos\frac{\pi}{2}=0$，$\sin\frac{\pi}{2}=1$；

(3) $\cos\pi=-1$，$\sin\pi=0$；

(4) $\cos\frac{3\pi}{2}=0$，$\sin\frac{3\pi}{2}=-1$.

练习 7-5

1. (1) 0.35； (2) 0.26； (3) 0.50； (4) −0.23；

(5) −0.35； (6) 0.61； (7) −1.73； (8) 0.71.

2. (1) −4.57； (2) −0.67.

练习 7-6

1. (1) 第一，第二，终边在 y 轴的正半轴上的角；

(2) 第一，第四，终边在 x 轴的正半轴上的角；

(3) 第一，第三；

(4) 二；(5) 二；(6) 三.

2. (1) 第三或第四象限角；(2) 第一或第二象限角；

(3) 第二或第四象限角；(4) 第一或第四象限角.

3. 无论 α 是锐角，直角还是钝角，$\sin\alpha$ 一定是正值；当 α 是钝角时，$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 是负值.

4. (1) 因为$-\frac{\pi}{3}$是第四象限角，所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)<0$；

(2) 因为 $260°$是第三象限角，所以 $\cos 260°<0$；

(3) 因为$-930°=150°-3\times360°$，所以$-930°$是第二象限角.

所以 $\tan(-930°)<0$；

(4) 因为$\frac{15\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+4\pi$，所以$\frac{15\pi}{4}$是第四象限角.

所以 $\cos\frac{15\pi}{4}>0$.

练习 7-7

1. (1) $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$；

(2) $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$；

(3) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$；

(4) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

2. (1) 解方程组$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-4\end{cases}$ 得

$\cos^2\alpha=\frac{1}{17}$.

所以 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{16}{17}$;

(2) $3\sin\alpha\cos\alpha=3(-4\cos\alpha)\cos\alpha=-12\cos^2\alpha=-\frac{12}{17}$;

(3) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\frac{1}{17}-1=-\frac{15}{17}$;

(4) $\frac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{3\sin\alpha+5\cos\alpha}=\frac{-16\cos\alpha-2\cos\alpha}{-12\cos\alpha+5\cos\alpha}=\frac{-18\cos\alpha}{-7\cos\alpha}=\frac{18}{7}$.

此小题还可以这样解：

$\frac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{3\sin\alpha+5\cos\alpha}=\frac{4\tan\alpha-2}{3\tan\alpha+5}=\frac{-16-2}{-12+5}=\frac{18}{7}$.

3. $\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm\frac{4}{5}$,

当 θ 是第一象限时，$\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\tan\theta=\frac{4}{3}$;

当 θ 是第四象限时，$\sin\theta=-\frac{4}{5}$，$\tan\theta=-\frac{4}{3}$.

4. (1) $\cos^2x$; (2) 1.

5. (1) 左边 $=\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

$=1=$ 右边；

(2) 左边 $=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$

$=1+2\sin\alpha\cos\alpha$

$=1+2\sin^2\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=1+2\sin^2\alpha\cot\alpha=$ 右边.

练习 7-8

1. (1) 1;　(2) -1;　(3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;　(4) $\frac{1}{2}$;

(5) -1;　(6) $-\frac{1}{2}$;　(7) $\frac{1}{2}$;　(8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(9) $\frac{1}{2}$;　(10) $-\frac{1}{2}$.

2. (1) C;　(2) D;　(3) B;　(4) A.

3. (1) -1； (2) 0； (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$； (4) $-\frac{1}{2}$；

(5) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$； (6) $\frac{1}{2}$； (7) $\frac{1}{2}$； (8) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 列表.

α	30°	45°	60°	120°	135°	150°
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. (1) $\sin(2\pi-\alpha)=\sin[2\pi+(-\alpha)]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$；

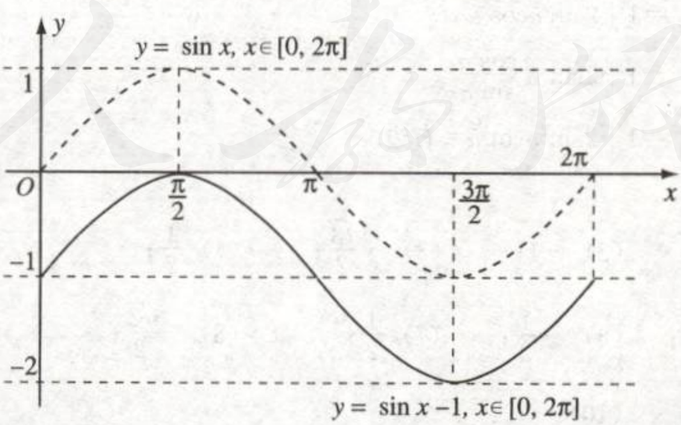
其余略.

练习 7-9

1. (1) 列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\sin x-1$	-1	0	-1	-2	-1

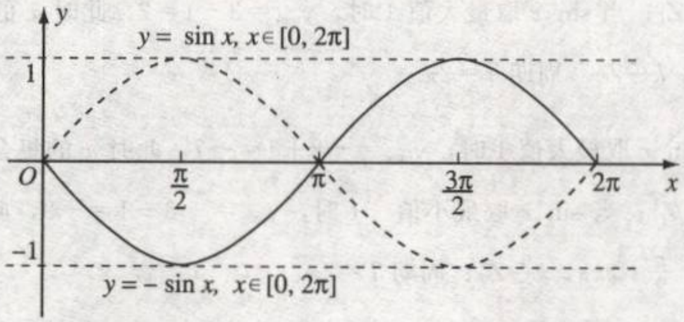
描点作图，得到函数 $y=\sin x-1$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图象.



（2）列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$-\sin x$	0	-1	0	1	0

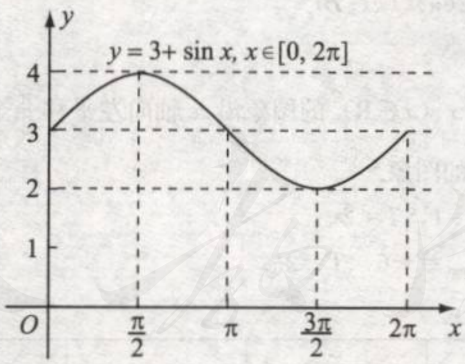
描点作图，得到函数 $y=-\sin x$，$x\in[0，2\pi]$ 的图象.



2. 列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$3+\sin x$	3	4	3	2	3

描点作图，得到函数 $y=3+\sin x$，$x\in[0，2\pi]$的图象.



3. （1）函数 $y=\sin x$ 与 $y=-\sin x$ 的图象关于 x 轴对称；

（2）函数 $y=3+\sin x$ 的图象可由函数 $y=\sin x$ 的图象沿 y 轴向上平移 3 个单位而得到.

练习 7-10

1. (1) 当 $\sin x$ 取最大值 1 时，$y_{\max}=3+1=4$，此时 x 的集合是 $\{x|x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；当 $\sin x$ 取最小值 -1 时，$y_{\min}=3-1=2$，此时 x 的集合是 $\{x|x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$. 周期 $T=2\pi$.

(2) 当 $\sin x$ 取最小值 -1 时，$y_{\max}=3-(-1)=4$，此时 x 的集合是 $\{x|x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；当 $\sin x$ 取最大值 1 时，$y_{\min}=3-1=2$，此时 x 的集合是 $\{x|x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$. 周期 $T=2\pi$.

(3) 当 $\sin x$ 取最大值 1 时，$y_{\max}=-8+1=-7$，此时 x 的集合是 $\{x|x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；当 $\sin x$ 取最小值 -1 时，$y_{\min}=-8-1=-9$，此时 x 的集合是 $\{x|x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；周期 $T=2\pi$.

(4) 当 $\sin x$ 取最小值 -1 时，$y_{\max}=-8-(-1)=-7$，此时 x 的集合是 $\{x|x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；当 $\sin x$ 取最大值 1 时，$y_{\min}=-8-1=-9$，此时 x 的集合是 $\{x|x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；周期 $T=2\pi$.

2. (1) $\sin 250°>\sin 260°$；(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)<\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

3. (1) $(2k\pi, (2k+1)\pi)\ (k\in\mathbf{Z})$；

(2) $((2k-1)\pi, 2k\pi)\ (k\in\mathbf{Z})$.

练习 7-11

1. 把正弦函数 $y=\sin x\ (x\in\mathbf{R})$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位就可得到余弦函数 $y=\cos x\ (x\in\mathbf{R})$ 的图象.

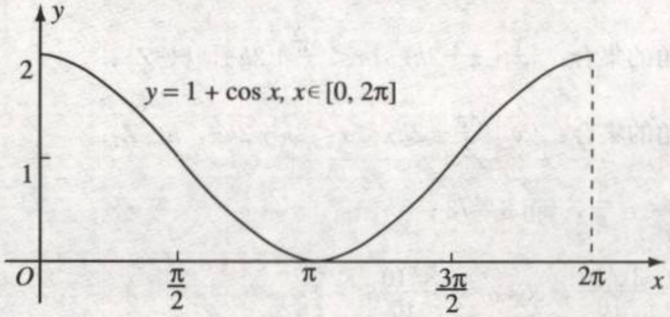
2. (1) $y_{\max}=3$，$y_{\min}=1$，$T=2\pi$；

(2) $y_{\max}=-4$，$y_{\min}=-6$，$T=2\pi$.

3. (1) 列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$1+\cos x$	2	1	0	1	2

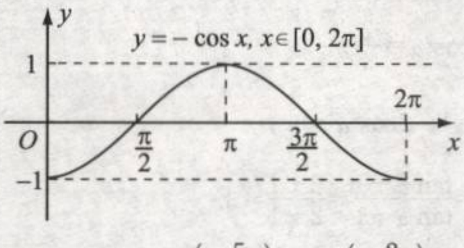
描点作图，得到函数 $y=1+\cos x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的简图.



（2）列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$-\cos x$	-1	0	1	0	-1

描点作图，得到函数 $y=-\cos x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的简图.



4. （1）$\cos 125°>\cos 156°$；（2）$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)<\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

练习 7-12

1. （1）0.85；　　（2）1.94；　　（3）$-85.4°$.

2. （1）205.6°或 334.4°；　　（2）53.1°或 306.9°.

3. $\frac{3\pi}{4}$.

习题七

1. （1）$\{x \mid x=2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；$\{x \mid x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；$\{x \mid x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

（2）$\{x \mid x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；$\{x \mid x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；$\{x \mid x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

（3）$\{x \mid x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\}$.

2. 第一象限角的集合：$\{x \mid 2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

第二象限角的集合：$\{x \mid \frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

第三象限角的集合：$\{x \mid \pi+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

第四象限角的集合：$\{x \mid \frac{3\pi}{2}+2k\pi<x<2\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

3. (1) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=\sqrt{3}$；

(2) $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$；

(3) $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，$\tan\alpha=-\frac{5}{12}$；

(4) 当 α 是第三象限角时：$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 α 是第四象限角时：$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. (1) 由 $\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\end{cases}$ 得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$；

(2) $\sin\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha=\frac{2}{5}$；

(3) $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=1-2\cos^2\alpha=\frac{3}{5}$；

(4) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{2+1}{2-1}=3$.

或 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha-\cos\alpha}=3$.

5. (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$；(2) $-\frac{1}{2}$；

(3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$；(4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. (1) $\{x|x\neq-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

(2) $\{x|x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

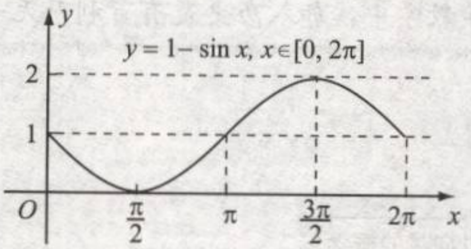
(3) $\{x|2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

(4) $\{x|-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

7. (1) 列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1-\sin x$	1	0	1	2	1

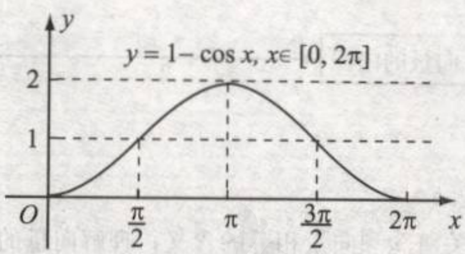
描点作图，得到函数 $y=1-\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的简图.



（2）列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$1-\cos x$	0	1	2	1	0

描点作图，得到函数 $y=1-\cos x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的简图.



8. 将函数 $y=\sin x$ 的图象向上平移 2 个单位，就可得到函数 $y=\sin x+2$ 的图象.

9. （1）当 $x\in\{x|x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 时，$y_{\max}=-2$；当 $x\in\{x|x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 时，$y_{\min}=-4$；

（2）当 $x\in\{x\mid x=2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$时，$y_{\max}=-3$；当 $x\in\{x\mid x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 时，$y_{\min}=-5$.

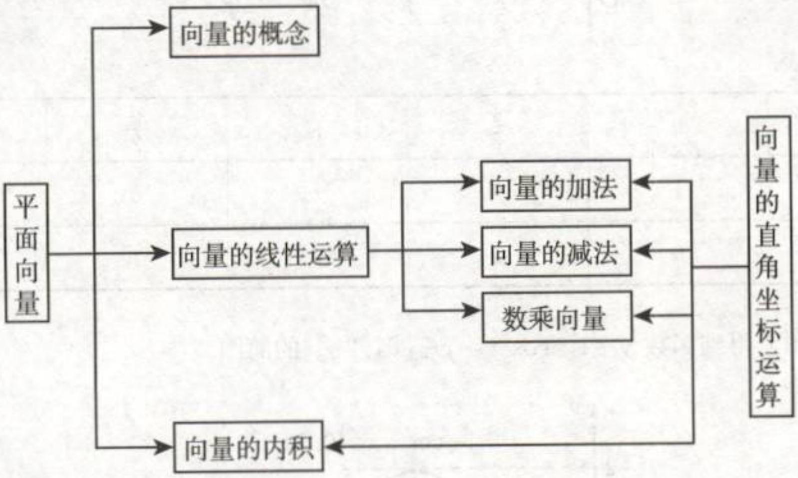
10. （1）$x=\frac{\pi}{6}$；（2）$x=\frac{\pi}{4}$或 $x=\frac{3\pi}{4}$；（3）$x=\frac{\pi}{6}$或 $x=\frac{11\pi}{6}$.

第八章　平面向量

思想火花：

在数学教学中，加入历史是有百利而无一弊的.

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 了解平面向量的有关概念和向量相等的含义，理解向量的几何表示.

2. 通过实例掌握向量加法、减法运算，并理解其几何意义.

3. 通过实例掌握数乘向量运算，并理解其几何意义，理解两个向量平行（或共线）的含义，理解平行向量基本定理.

4. 了解向量的线性运算性质及其几何意义.

5. 理解平面向量的直角坐标的概念，掌握平面向量的直角坐标运算. 了解线段中点坐标公式和平面内两点间的距离公式.

6. 能够根据平面向量的直角坐标，判断两向量是否平行.

7. 了解平面向量的数量积的概念、平面向量的内积的重要性质及运算律，并能运用

这些性质与运算律进行简单的运算.

8. 了解向量垂直的充要条件，了解用平面向量内积来处理有关长度、角度和垂直的问题的方法.

9. 理解平面向量内积的坐标表示和运算，了解向量垂直的坐标表示的充要条件.

Ⅲ 教材分析和教学建议

本章主要内容包括：向量的概念，向量加法、减法运算，数乘向量运算，平面向量的坐标运算，平面向量内积等.

本章教材是从物理背景和几何背景入手（物理背景是位移、力、速度等概念；几何背景是射线、有向线段等），抽象出既有大小又有方向的量——向量，然后介绍了向量的长度、零向量、单位向量、相等向量、向量的平行等有关概念及向量的几何表示方法；研究了向量加法的三角形法则、平行四边形法则及向量加法的运算律；通过向量加法引入向量的减法，把向量的减法与加法统一起来；借助物理现象，通过向量加法引入向量的数乘运算，并给出相应的运算律；通过实例引出平面向量直角坐标的概念，并给出向量坐标运算公式、线段中点坐标公式和平面内两点间距离公式；对于向量内积的讲解是先给出向量夹角的定义，然后直接呈现向量内积的计算公式，并给出向量内积的坐标计算公式、性质、运算律.

本章的重点是：

(1) 向量的概念、向量的几何表示和向量的直角坐标表示；

(2) 向量的代数运算、向量的内积运算和直角坐标运算；

(3) 线段的中点公式、长度公式.

本章的难点是：

(1) 熟练运用向量的概念、向量的几何表示和坐标表示；

(2) 理解和运用向量的运算法则.

本章教学约需 10 课时，具体分配如下（仅供参考）：

8.1　向量的概念	1 课时
8.2　向量的线性运算	
8.2.1　向量的加法	1 课时
8.2.2　向量的减法	1 课时
8.2.3　数乘向量	1 课时
8.3　平面向量的直角坐标运算	
8.3.1　平面向量的直角坐标及其运算	1 课时
8.3.2　平面向量平行的坐标表示	1 课时
8.3.3　向量的长度公式和中点公式	1 课时

8.4 向量的内积

8.4.1 向量的内积 1课时

8.4.2 向量内积的直角坐标运算 1课时

小结与复习 1课时

8.1 向量的概念

1. 本节的主要内容是向量的概念，有向线段的概念，向量的表示等.

2. 本节的教学要求是：了解向量的有关概念、有向线段的概念和向量相等的含义，了解向量的几何表示. 重点是向量的几何表示.

3. 本节以实例引入，通过物理学中的力、速度和位移，建立起学习向量的认知基础. 教师还可以引导学生举出物理学中其他一些实例，更好地为理解向量做好铺垫.

4. 在本节教学中教师应该注意引导学生共同分析有关力、速度和位移等例子，从中归纳出这些量的共同特征：既有大小又有方向，使学生对向量的概念形成从感性到理性进行理解.

5. 向量可以用几何中的有向线段来表示，由于向量仅有大小和方向，而与始点位置没有关系，因此向量与有向线段是有区别的，只不过当我们用有向线段来表示向量时，已约定有向线段的始点的选取是任意的，向量和表示它的有向线段是可以平移的.

6. 向量的模能够比较大小，$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$是有意义的，但是向量还有方向，而方向是不能比较大小的，因此，$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$是没有意义的.

7. 在印刷当中，向量是用黑体小写字母如$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$来表示的，要注意，在手写时应该用$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$来表示. 比如实数0和向量$\boldsymbol{0}$（手写时应该用$\vec{0}$来表示）是两个不同的量，它们是有区别的.

8.2 向量的线性运算

8.2.1 向量的加法

1. 本节的主要内容是向量加法的三角形法则和平行四边形法则及运算律.

2. 本节的教学要求是：通过实例掌握向量加法运算，并理解其几何意义，掌握向量加法的运算律.

3. 向量加法遵循三角形法则和平行四边形法则，向量加法的三角形法则和平行四边形法则实际上就是向量加法的几何意义. 对于向量加法的三角形法则，当向量所在的直线平行时也是成立的，而对于向量加法的平行四边形法则，当向量所在的直线平行时就不成立了.

4. 平面向量的线性运算包括向量加法、向量减法、数乘向量运算，以及它们之间的混合运算. 在平面向量的线性运算中，向量的加法运算是最基本、最重要的运算，减法运算、数乘向量运算都是以加法运算为基础，都可以归结为加法运算.

8.2.2 向量的减法

1. 本节的主要内容是向量减法运算及其几何意义，相反向量.

2. 本节的教学要求是：掌握向量减法运算，理解其几何意义，理解相反向量.

3. 关于向量的减法，通常有两种定义方法.

第一种是将向量的减法定义为向量加法的逆运算，即：如果 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$，那么向量 $\boldsymbol{x}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 其几何意义就是在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$（如图 8-1），则由向量加法的定义知 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$，即 $\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$，所以 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

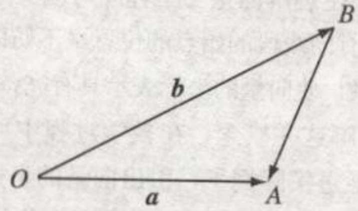


图 8-1

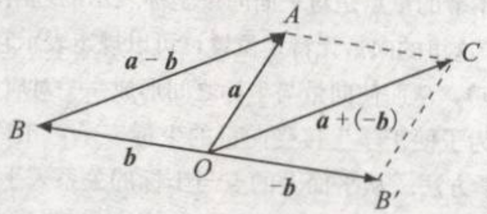


图 8-2

第二种方法是先定义相反向量，再将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差定义为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量的和，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 求向量差的运算，就叫做向量的减法. 其几何意义就是在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB'}=-\boldsymbol{b}$（如图 8-2），由向量加法的平行四边形法则可知

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

比较这两种方法，它们没有实质的区别.

4. 向量与实数一样，满足所谓“三角不等式”，即

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

8.2.3　数乘向量

1. 本节的主要内容是数乘向量运算及运算律，平行向量基本定理.

2. 本节的教学要求是：通过实例掌握数乘向量运算，理解其几何意义，掌握数乘向量运算的运算律，理解平行向量基本定理.

3. 本节通过物理学中的实例和向量加法的运算，逐步引导出实数与向量的积的运算. 然后过渡到一般的数乘向量运算的定义. 教学时要注意强调 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，并详细分析其大小和方向.

4. 数乘向量运算满足的运算律的严格证明有相当的难度，不要求学生掌握，教材亦没有给出证明，降低了难度，只要求学生理解并能运用就可以了.

5. 由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 是平行的，由此可得出平行向量基本定理. 根据平行向量基本定理，可以判断几何中三点是否共线和两条直线是否平行等问题.

例如，不重合的三点 A，B，C，如果已知 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$，那么可知 $AB/\!/AC$，进而可知这三点 A，B，C 共线.

教学时要特别强调，向量平行与直线平行是有区别的，直线平行不包括重合的情况.

8.3 平面向量的直角坐标运算

8.3.1 平面向量的直角坐标及其运算

1. 本节的主要内容是理解平面向量的坐标表示，平面向量的坐标运算．向量的坐标表示为用“数”的运算处理“形”的问题搭起了桥梁，向量的坐标表示实际是向量的代数表示，使向量的运算完全代数化，为几何问题的解决又提供了一种方法．

2. 本节的重点是对平面向量坐标表示的理解．学生理解向量与坐标间对应关系有些困难，由于这里的向量无特定位置，可以规定表示它的有向线段的始点的位置（不妨以坐标原点为始点），从而使向量与坐标之间形成一一对应关系，使向量的坐标表示具有完备性．

3. 为了便于学生接受向量的坐标表示，正确理解这一概念，在教学过程中可采用类比的教学方法．从平面上的点与坐标的关系入手，通过实际例子，引出向量的坐标问题．

4. 通过学习向量的坐标表示，使学生进一步了解数形结合思想，认识事物之间的相互联系，培养学生辩证思维能力．向量是数形结合的一个典范．学好向量坐标表示这一内容，能进一步促进学生对代数与几何之间关系的理解．在研究向量坐标运算及其简单应用时，教师应有意识地向学生渗透数形结合的思想．

5. 教学中应使学生明确任意向量都与唯一的实数对一一对应，这不仅使向量的坐标表示成为可能，也使表示向量的坐标与向量的始点和终点的具体位置没有关系．

6. 本节教学中，教师应注意让学生区别点的坐标和向量坐标的关系，学生在学习过程中，常常混淆这两种坐标的表示，如 $A(a_1, a_2)$ 错写为 $A=(a_1, a_2)$，$\vec{a}=(a_1, a_2)$ 错写为 $\vec{a}(a_1, a_2)$．另外 $(a_1, a_2)-(b_1, b_2)=(a_1-b_1, a_2-b_2)$ 和 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ 这两种情况学生常常计算错误，教师要加强练习，使学生区分这两种情况．

8.3.2 平面向量平行的坐标表示

1. 本节的主要内容是通过向量的坐标来判断两个或多个向量是否共线．给出向量共线的充要条件的坐标表示．

2. 本节的教学要求是能够根据平面向量的坐标，判断向量是否共线．

3. 在本节讲解过程中，教师可以充分发挥学生的主体作用，开展自学活动，通过类比、联想，发现问题，解决问题．教师可以引导学生自主探索研究向量共线的坐标表示．

4. 在讲解向量共线的坐标表示时，首先要掌握好向量平行的充要条件，再根据相等向量坐标相同得出关系式．为此可先通过复习让学生掌握好向量共线的充要条件，相等向量的坐标关系，为新知识的学习做好铺垫．

8.3.3 向量的长度公式和中点公式

1. 本节的主要内容是识记平面上两点间的距离公式和线段的中点公式，并应用这两个公式解决相应的问题．

2. 本节的重点是应用平面上两点间的距离公式和线段的中点公式．通过一个军事上的实例引入两个公式，要求学生体会其中的证明过程，并对公式进行灵活运用．这两个

公式在以后的学习中会大量地用到，教师要让学生熟练地使用.

3. 在讲平面上两点间距离公式时，用 Δx，Δy 来表述，这里是为了让学生在学习函数单调性之后，对增量有更深刻的理解，为以后的学习打下基础.

4. 本章并没有明确给出公式 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，教师在讲解例题中，可以让学生探究学习，并结合平行四边形法则，得出结论. 但只是让学生了解，不作为学习的要求.

5. 对于线段中点坐标公式，通过讲解具体例题，得到公式的一般情况，要求学生识记公式. 中点公式蕴涵着对称的思想，在教学中教师要注意引导学生初步掌握这种思想，根据学生的实际情况，可以适当补充点关于坐标原点中心对称，关于 x 轴，y 轴的轴对称的情形.

8.4 向量的内积

8.4.1 向量的内积

1. 本节主要内容是平面向量内积的概念及其性质、运算律，向量垂直的条件. 平面向量的内积是处理几何中有关长度、角度和垂直等问题的又一种有效方法，特别是证明垂直关系的重要手段.

2. 本节教学重点是平面向量内积的概念，平面向量内积的重要性质及运算律，以及平面向量内积的应用.

3. 本节从力的做功问题引入向量的内积. 由于学生的物理知识可能比较贫乏，教师首先应讲解什么是功，让学生对功有个基本了解，然后通过作用于物体上的力与物体的位移这两个向量求出对物体所做的功. 此引例体现了数学知识与其他学科的联系，让学生了解所学内容在实际生活中的具体运用.

4. 在定义了向量的数量积的运算后，启发学生由实数乘法的运算性质猜想向量内积的运算性质，进一步引导学生自主探索研究其运算性质.

5. 两向量的内积是两向量间乘法的一种，是学生以前所未接触到的一种乘法，与以前数量间的乘法、实数与向量间的乘法有很大区别，因此运算法则、运算律都要重新建立，学生对于概念和运算法则的理解和掌握有些困难. 它与实数乘法的概念、性质及运算律有联系也有区别，这一区别是教学的重点也是学生学习的难点. 比如，实数乘法满足结合律：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$，而向量的内积不满足结合律；实数乘法满足：若 $c\neq0$，则 $a\cdot c=b\cdot c\Rightarrow a=b$，而向量的内积不满足这种推出关系，如图 8-3，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 是成立的，但显然 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$.

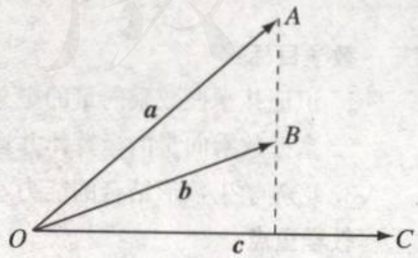


图 8-3

6. 引导学生观察平面向量的内积公式的结构特征，归纳其功能——知三求一，从而发现其应用类型，即求长度或角度，特殊情况下就是垂直关系的证明依据.

8.4.2 向量内积的直角坐标运算

1. 本节的主要内容是向量内积的坐标表达式、向量垂直的充要条件及向量夹角的计算公式.

2. 本节的重点是向量内积的坐标表达式、向量垂直的充要条件、向量夹角的计算公式的应用. 难点是向量内积的坐标表达式的推导，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$与$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2$两个式子的内在联系.

3. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$与$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2$这两个式子表明了向量是数与形的结合体，它们互相渗透，彼此作用，而学生对它们的联系是陌生的，在理解上有一定的难度，特别地，根据已知条件，如何选择恰当的形式解决问题也是学生学习的一个难点.

4. 向量内积的坐标表达式，是向量运算内容与形式的统一. 无论是向量的线性运算还是向量的内积运算，最终都归结为坐标运算. 教学中教师要引导学生抓住这条线索，不断使学生的平面向量知识系统化、条理化，这样有利于学生知识体系的形成.

5. 本节课在引入时应向学生指出：对平面向量的内积的研究不能仅仅停留在几何角度，还要寻求其坐标表示. 教学中要重视培养学生数形结合的思想方法，用向量内积的坐标表示来解决问题，不但重视学生的解题能力，而且注重数学思想方法的渗透. 同时，因为知识跨度较大，在引入新知识之前应复习前面的有关知识，如两个向量线性坐标运算、垂直的充要条件等内容.

6. 本节的内容对以后的数学学习是非常重要的，教师在教学中应向学生讲明. 其中根据向量的坐标计算它们的内积，并由内积的坐标形式求两个向量的夹角；运用向量垂直的坐标表示的充要条件解决有关问题；根据已知条件灵活运用平面内两点间的距离公式，这些都可以在以后的学习中应用.

Ⅳ 参考教案

课题：8.2.3 数乘向量（第一课时）

教学目标：

1. 识记并掌握数乘向量的定义，理解数乘向量的几何意义；

2. 掌握数乘向量的运算律并运用其解决相关的数学问题；

3. 培养学生数形结合的能力，渗透类比的数学思想.

教学重点：

数乘向量的定义以及运算律.

教学难点：

数乘向量的几何意义.

教学方法：

启发式教学法，讲练结合法，多媒体辅助教学法.

教学过程：

一、复习回顾，引入新课

一架飞机从 A 地出发，向东飞行了 10 km 到 P 地，继续向东飞行了 10 km 到 Q 地，又继续向东飞行了 10 km 到 B 地：

1. 求这架飞机的位移，并作图；

2. 如果这架飞机从 B 地返回到 A 地，求这架飞机的位移，并作图；

3. $\overrightarrow{AP}=$________$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=$________$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BQ}=$________$\overrightarrow{AB}$.

教师引导学生在复习旧知识的同时，让学生自主探索新知识，发现新知识，引出课题.

二、讲授新课

1. 数乘向量的定义.

定义：实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，这种运算叫做数乘向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$.

向量 $\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq 0)$ 的长度与方向规定为：

（1）$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

（2）当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

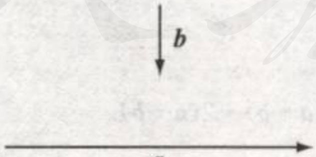
当 $\lambda=0$ 时，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

$\lambda\boldsymbol{a}$ 中的实数 λ，叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的系数.

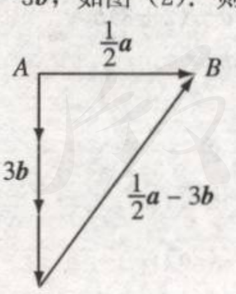
教师结合屏幕演示的图象强调其中的重点部分，尤其是数乘向量的方向，并要求学生识记.

例 1　如图（1），已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作向量 $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

作法：在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{AC}=3\boldsymbol{b}$，如图（2）. 则



（1）



（2）

练习一：

已知：向量 $\boldsymbol{a}$.

求作：向量 $-3\boldsymbol{a}$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$.

2. 数乘向量的几何意义.

教师通过例题 1 以及练习一，一方面巩固数乘向量的定义，另一方面引出数乘向量的几何意义，并利用多媒体动画演示，加深学生对数乘向量几何意义的理解.

数乘向量的几何意义就是把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着 $\boldsymbol{a}$ 的方向或 $\boldsymbol{a}$ 的反方向，长度放大或缩小.

如：$2\boldsymbol{a}$ 的几何意义就是向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向，长度放大到原来的 2 倍.

3. 数乘向量的运算律.

教师先设置疑问，引发学生思考，借此验证数乘向量的运算律.

问题 1：飞机甲向东飞了 20 km 后，又继续向东飞了 30 km；飞机乙向东飞了 50 km. 若在纸上以 1 cm 线段表示 10 km 的实际长度，试用有向线段分别表示出这两架飞机的位移并进行比较.

问题 2：已知向量 $\boldsymbol{a}$，求作 $2(3\boldsymbol{a})$ 和 $6\boldsymbol{a}$.

数乘向量运算满足下列运算律：

设 λ，$\mu\in\mathbf{R}$，有

(1) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

特别地，我们有

$$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(-\boldsymbol{a});$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}.$$

教师用图象演示分析两个向量的关系，学生积极思考，发现与多项式运算类似之处，教师引导学生与之对比，由特殊到一般得到结论. 得出第一个分配律与结合律.

例 2 计算：$2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解：$2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{b}$

$=(2-3)\boldsymbol{a}+(2+3)\boldsymbol{b}$

$=-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$.

练习二：

教材练习 8-4.

1.（口答）化简：

(1) $\dfrac{1}{4}\times(2\boldsymbol{a})$；　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

2. 化简：

(1) $4(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})+5(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$；　　(2) $\dfrac{1}{4}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-\dfrac{1}{4}(5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.

教师在教学中提醒学生注意：不要漏掉向量的箭头符号、细心计算.

通过两个例题及四个练习，能使学生既发现数乘向量运算律与多项式运算的相似之

处，又能注意与多项式运算的不同，从而较好地掌握数乘向量的运算律.

三、课堂小结

采用填制表格的方法，教师提问，学生回答，填制表格，对本节课所学进行总结，有利于学生系统地掌握本节课的内容.

四、课外作业

教材习题八的第 3 题.

五、板书设计

8.2.3　数乘向量
1. 数乘向量的定义.
2. 数乘向量的几何意义.
3. 数乘向量的运算律.

V　习题答案、提示和解答

练习 8-1

1. $|\overrightarrow{AB}|$；$|\overrightarrow{BA}|$；这两个向量的长度相等；这两个向量不相等.

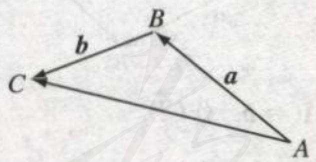
2. (1) 相同；(2) 不相同.

3. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FC}$；$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DA}$；$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EB}$.

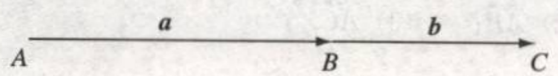
练习 8-2

1. (1) $\overrightarrow{MN}$；(2) $\mathbf{0}$；(3) $\overrightarrow{AD}$；(4) $\overrightarrow{A_1A_4}$.

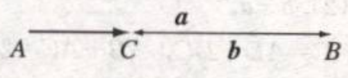
2. (1) 作法：作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$. 作$\overrightarrow{AC}$.
则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



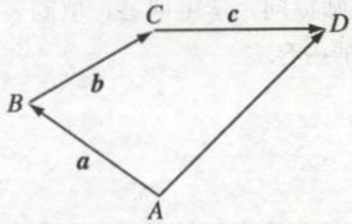
(2) 作法：作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$. 作$\overrightarrow{AC}$.
则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



(3) 作法：作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$. 作$\overrightarrow{AC}$.
则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



3. 作法：作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$. 作$\overrightarrow{AD}$.
则$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.



4. 如图，$\overrightarrow{AB}$表示航速，$\overrightarrow{BC}$表示水速.

则$\overrightarrow{AC}$表示轮渡的实际的航速.

由题意知，$\angle ABC$ 是直角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=24$，$|\overrightarrow{BC}|=7$，所以

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}|&=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2}\\&=\sqrt{24^2+7^2}\\&=25.\end{aligned}$$

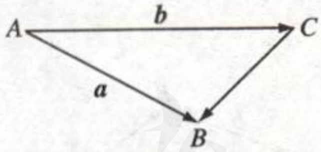
因为 $\tan\angle BAC=\dfrac{7}{24}$，由计算器得$\angle BAC\approx16°$.

即轮渡的实际航行速度的大小约为 25 km/h，方向为北偏东约 16°.

练习 8-3

1. (1) $\overrightarrow{DB}$;　　(2) $\overrightarrow{CA}$;　　(3) $\overrightarrow{BA}$;　　(4) $\overrightarrow{DA}$.

2. (1) 作法：作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$. 作$\overrightarrow{CB}$.
则$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.



(2) 作法：作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$. 作$\overrightarrow{CB}$.
则$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

3. (1) $\mathbf{0}$;　　(2) $\overrightarrow{AB}$;　　(3) $\overrightarrow{AC}$.

练习 8-4

1. (1) $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$;　　(2) $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

2. (1) $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$;　　(2) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

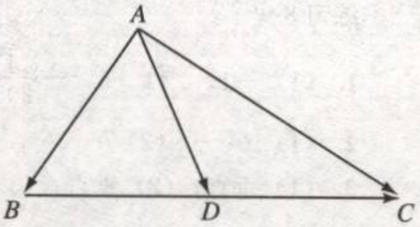
3. (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$.

因为 D 为边 BC 的中点，所以$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$.

从而$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$.

(2) 因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，所以

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}&=3\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$



4. $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$; $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

练习 8-5

1. 略.
2. (1) (4, 6), (2, 2), (6, 8), (−3, −6);　(2) $x=2$, $y=1$;　(3) (2, 2).
3. (3, −5), (−7, −1), (4, −13).
4. (1) (9, −6), (−9, 6);　(2) (−5, 12), (5, −12);
   (3) (−3, −7), (3, 7);　(4) (−8, −15), (8, 15).
5. $x=3$, $y=-1$.

练习 8-6

1. (1) 不共线；(2) 共线；(3) 共线；(4) 共线.
2. $x=4$.
3. $x=-1$.
4. 略证：$\overrightarrow{AB}=(2, -6)$，$\overrightarrow{CD}=(-4, 12)=-2(2, -6)=-2\overrightarrow{AB}$，
   所以 AB 平行 CD.
5. $C(6, 1)$.

练习 8-7

1. (1) 3, 5; (2) 2, (3, 1); (3) 4, (7, 1).
2. $-\sqrt{5}$, 5.
3. (1) (−1, −3), $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10}$;　(2) (−12, −5), $|\overrightarrow{AB}|=13$;
   (3) (8, −15), $|\overrightarrow{AB}|=17$;　(4) (4, 4), $|\overrightarrow{AB}|=4\sqrt{2}$.
4. (−2, 0) 或 (6, 0).
5. (1) $\left(3, \frac{1}{2}\right)$;　(2) $\left(\frac{5}{2}, -2\right)$;　(3) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$;　(4) (−6, 7).
6. (5, −2).

练习 8-8

1. (1) 4;　(2) −32;　(3) 0;　(4) $-30\sqrt{3}$.
2. (1) 0.5;　(2) −0.5;　(3) −1;　(4) 0.
3. −93.
4. 148, $2\sqrt{37}$.

练习 8-9

1. (1) -1，$\sqrt{41}$，5，$-\dfrac{\sqrt{41}}{205}$；(2) 2，13，$\sqrt{5}$，$\dfrac{2\sqrt{5}}{65}$.

2. (1) 10；　(2) 7.

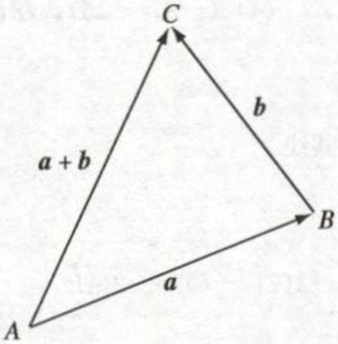
3. (1) 垂直；(2) 垂直；(3) 垂直；(4) 不垂直.

4. $\dfrac{2}{3}$.

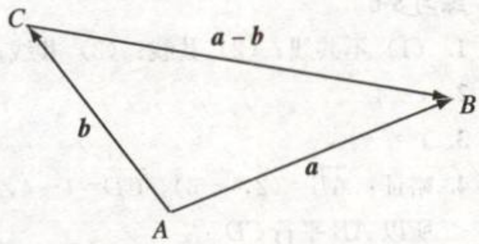
习题八

1. (1) 作法：在平面内任取一点 A，作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，作向量$\overrightarrow{AC}$（如图 (1)）. 则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；

(2) 作法：在平面内任取一点 A，作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，作向量$\overrightarrow{CB}$（如图 (2)）. 则$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；

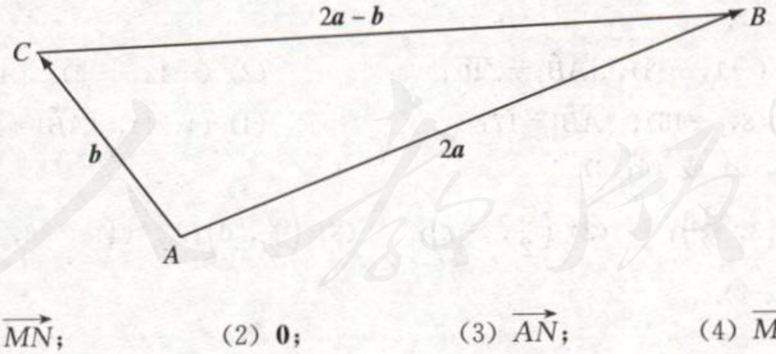


(1)



(2)

(3) 作法：在平面内任取一点 A，作向量$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，作向量$\overrightarrow{CB}$. 则$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.



2. (1) $\overrightarrow{MN}$；　(2) $\boldsymbol{0}$；　(3) $\overrightarrow{AN}$；　(4) $\overrightarrow{MB}$.

3. (1) $-10\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$；　(2) $-\boldsymbol{a}$；　(3) $\dfrac{5}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{4}{3}\boldsymbol{b}$；　(4) $8\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$.

4. (1) (2，0)，(3，5)，2；　(2) (0，6)，(−2，−1)，6；

(3) (12，5)，$\left(-2，\dfrac{7}{2}\right)$，13；　(4) (3，4)，$\left(\dfrac{9}{2}，-2\right)$，5.

5. $(-1,\ -1)$ 或 $(13,\ 13)$.

6. a，b 的值分别是 12，-5.

7. (1) $(-4,\ 11)$；(2) $(5,\ -12)$；(3) -19；(4) $\sqrt{5}$.

8. (1) 垂直；　　(2) 平行；　　(3) 平行；　　(4) 垂直.

9. (1) 1；　　(2) -1；　　(3) $\frac{\sqrt{26}}{26}$；　　(4) 0.

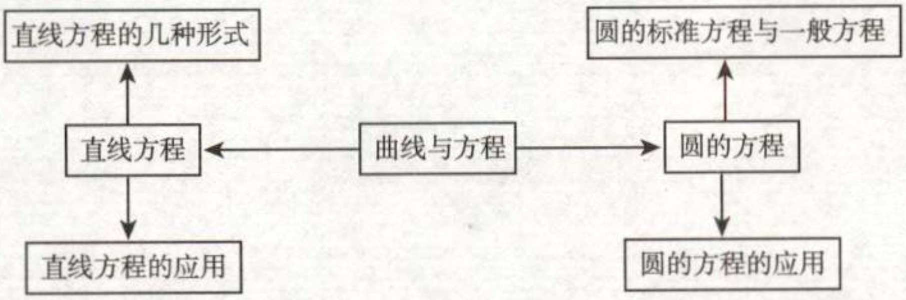
10. 略证：$\overrightarrow{AB}=(1,\ -3)$，$\overrightarrow{DC}=(1,\ -3)$，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

第九章　直线与圆的方程

思想火花：

课——是点燃求知欲和道德信念的火把的第一颗火星.

Ⅰ 知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 了解直线的方程与方程的直线的概念.

2. 理解直线的方向向量、斜率、法向量等概念，会由方向向量求直线的斜率.

3. 掌握直线方程的点向式、点法式和一般式，了解直线方程的点斜式和斜截式，能根据条件，熟练地求出直线的方程.

4. 理解直线与二元一次方程的关系，理解直线的一般式方程的一次项系数的几何意义.

5. 掌握两条直线平行和垂直的条件，能利用直线方程来讨论两条直线的位置关系，会求两条直线的交点.

6. 会求点到直线的距离.

7. 掌握圆的标准方程和圆的一般方程．会判断圆和直线的位置关系.

8. 通过本章的学习，使学生初步了解如何应用解析法研究几何问题.

III 教材分析和教学建议

本章是平面解析几何的基础部分，通过本章的学习，将使学生初步掌握用解析法研究几何问题的方法.

解析几何产生于 17 世纪初．法国数学家笛卡尔和费马是解析几何的创始人，他们在平面上引进坐标，把平面上的点与实数对（x，y）建立一一对应，然后在点动成线的思想下，进一步将曲线与方程建立一一对应，从而可以通过方程来研究曲线．解析几何的产生在数学史上是一重大进展，它用变量的观点研究曲线，使得数学研究从常量的观念为中心转变为以变量的观念为中心；同时它又将原来彼此独立发展的代数和几何通过坐标巧妙地结合在一起，开创了用代数方法研究几何问题的新途径．解析几何的产生还为数学的进一步发展——微积分的诞生创造了条件.

解析几何是数形结合的典范，向量是数形结合的有力工具．我们在本章教材中将充分应用数形结合和向量工具来处理问题.

本章内容包括：直线方程、圆的方程.

“直线方程”这部分，抓住“一点和一个方向确定一条直线”这一主线，利用向量这一工具，推导了直线的点向式方程、点法式方程和点斜式方程．直线的方向向量、法向量和斜率都是描述方向的量，教材强调了这些概念之间的联系，使学生能对直线的各种方程有一个整体的概念．在导出直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$ 的同时，得出向量（A，B）是该直线的一个法向量，于是，运用向量运算，容易得出直线方程的一系列应用，如平行、垂直和距离等.

直线是最简单的几何图形，是解析几何的入门，通过直线与方程的教学，使学生从感性上认识直线与二元一次方程的关系，学习如何根据已知条件求出直线的方程，又如何运用直线的方程研究有关直线的几何问题的方法，为下面进一步学习圆锥曲线打下基础.

“圆的方程”这部分，建立了圆的标准方程、一般方程．并对圆的方程进行了相关应用，为以后进一步研究其他二次曲线打下基础.

本章的重点是：

（1）直线的方程及其应用；

（2）圆的方程及其应用；

（3）学习解析几何的基本思想方法——建立坐标系，用代数方程表示曲线，通过对方程的讨论来研究曲线的性质．其中，理解曲线与方程的对应关系是关键.

本章的难点是：

通过曲线方程研究曲线的性质.

直线和圆的方程及其应用是本章教学的重点.

建议教师在本章教学中注意以下几点：

(1) 教师在教学时，应当不断地强调数形结合的数学思想．并结合学生所学专业，适当运用本章知识，解决一些实际问题．

(2) 培养学生对公式的灵活运用，教学过程中要重视直线方程的推导过程，不要只让学生死记公式，要根据不同的条件，灵活选择方程的形式．

(3) 在教学中要特别注意培养学生的计算能力和表达能力．解计算题既要求计算准确无误，又要注意解题规范化．训练学生严谨的学习态度．

(4) 要培养学生在解题时画图的习惯，要使学生明确，正确地画出图形，不仅有助于理解题意，找到解题方法，而且能够直观判断计算结果是否正确．

本章教学约需 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

9.1 直线的方程	
9.1.1 直线的方向向量与点向式方程	2 课时
9.1.2 直线的斜率与点斜式方程	1 课时
9.1.3 直线的法向量与点法式方程	2 课时
9.1.4 直线的一般式方程	1 课时
9.2 两条直线的位置关系	
9.2.1 两条直线的平行	1 课时
9.2.2 两条直线的交点与垂直	1 课时
9.3 点到直线的距离	1 课时
9.4 圆的方程	
9.4.1 圆的标准方程	2 课时
9.4.2 圆的一般方程	2 课时
小结与复习	3 课时

9.1 直线的方程

9.1.1 直线的方向向量与点向式方程

1. 本小节的重点是掌握直线的点向式方程．难点是当方向向量平行于坐标轴时，即 v_1，v_2 中有一个为零的情况下，准确写出直线方程．

2. 本小节的教学要求是：

(1) 通过讲解直线的点向式方程，使学生初步了解直线的点集与方程的解集之间的一一对应关系．这是解析几何的精髓和灵魂．

(2) 利用向量平行的基本定理，得到直线的点向式方程．

(3) 教材中的方程①或②都是直线的点向式方程，两个方程相比较，方程②容易记忆，但应当注意其适用的条件．

3. 几何公理中有“两点确定一条直线”，而且直线上任意两点可以构成一簇非零共线向量．因此可以说“一点和一个非零向量确定一条直线”．这个与直线平行的非零向量就

叫做这条直线的一个方向向量．显然直线的方向向量不是唯一的，教学中应使学生对直线的方向向量有准确的理解．

4. 教材对直线的点向式方程 $v_2(x-x_0)-v_1(y-y_0)=0$ 分情况进行了讨论，并且将直线分为方向向量不平行于坐标轴和平行于坐标轴两类分别举例．教学中，对于方向向量平行于坐标轴，即 v_1，v_2 中有一个为零的情况，应训练学生的直观判断能力，结合图形，直接判断直线平行于哪一个坐标轴（或在哪一个坐标轴上）．

5. 已知直线上两点的坐标，可以写出直线的一个方向向量，从而可以写出直线的点向式方程，不必再出现直线的两点式方程．

9.1.2　直线的斜率与点斜式方程

1. 直线的倾斜角和斜率也是确定直线的方向的量，直线的斜率是个重要的概念，平面曲线在某点的切线的斜率就是相应函数在该点的导数，表示函数在该点的变化率．因此在学习直线方程时，应当让学生掌握好这一概念，为以后进一步学习导数打下基础．

2. 学习直线的倾斜角概念时，要强调定义中的三个要点：直线向上的方向、x 轴正方向、最小的正角．由定义可得倾斜角 α 的取值范围是 $0\leqslant\alpha<\pi$. 这个定义保证了任何一条直线都有唯一的倾斜角．

3. 直线的方向向量、倾斜角和斜率都是确定直线方向的量，要使学生在理解概念的基础上，熟练掌握它们之间的互化．需要说明的是，倾斜角为 90°时，直线的斜率不存在，无法用点斜式写出直线方程，其和点向式中方向向量横坐标为 0 相对应．

4. 对于基础好的学生，可要求他们根据斜率的定义，自己推出斜率与倾斜角的关系．

5. 由直线上一点的坐标和直线的斜率，可以写出直线的点斜式方程．若已知点是直线与 y 轴的交点，则可得到直线的斜截式方程，应向学生指明它就是初中学过的一次函数．

6. 已知直线上两点的坐标，可以求出直线的斜率，从而可以写出直线的点斜式方程．可让学生总结已知直线上两点的坐标写出直线方程的方法，也可引导学生写出直线的方向向量，再由直线的点向式方程求出这条直线的方程．

9.1.3　直线的法向量与点法式方程

1. 由于平面上过一点且与一个非零向量垂直的直线有且只有一条，因此，平面直线的法向量也是能够确定直线的一个方向的量．根据直线的方向向量与直线的法向量垂直，通过内积运算，容易导出直线的点法式方程．

2. 利用直线的方向向量与直线的法向量的垂直关系，已知其一，可得其二．要使学生能够熟练地由直线的一个方向向量写出它的一个法向量，或者由直线的一个法向量写出它的一个方向向量．

3. 由于直线的点法式方程在推导直线的一般式方程中起了重要的作用，因此，教材给出了点法式方程．

9.1.4　直线的一般式方程

1. 这小节的重点是建立直线与二元一次方程的对应关系，使学生明确每一个二元一

次方程都对应着坐标平面的一条直线．向学生证明这个事实是必要的．建议教师重视这一节的教学．特别要说明对应的两个方面．每一条直线的方程都是二元一次方程，这一结论可以通过每一条直线都可以写出它的点向式方程而得以证明，而每一个二元一次方程都表示一条直线是通过将二元一次方程同解变形成一个直线的点法式方程而证明的，证明中实际上用到了以方程的解（x_0，y_0）为坐标的点 $P_0(x_0, y_0)$ 在方程的图象上这一概念.

2. 证明“每一个二元一次方程都表示一条直线”的同时，还得到了直线的一般式方程中一次项系数的几何意义．即直线 $Ax+By+C=0$ 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(A, B)$，而 $\boldsymbol{v}=(B, -A)$ 或 $\boldsymbol{v}=(-B, A)$ 是一个方向向量．这个结论十分重要，是直线方程的一系列应用的基础.

3. 至此，学习过的各种直线方程的系数，都有了明显的几何意义．教学中反复强调各种直线方程中的具有方向意义的系数，可以使学生对“一点和一个方向确定一条直线”有深刻的认识，从而对各类直线方程有一个整体的认识.

4. 这一小节中的最后一个例题，教材设计的是画直线．画直线只要找出直线上任意两点，通常是求出直线与坐标轴的交点，求曲线与坐标轴的交点坐标是基本训练内容之一.

9.2 两条直线的位置关系

9.2.1 两条直线的平行

1. 由于直线的一般方程 $Ax+By+C=0$ 的一次项系数有明显的几何意义，直线的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(A, B)$，因此两条直线的平行、垂直问题可转化为它们的法向量平行、垂直问题．本节知识的基础是两个向量的平行（共线）、垂直的充要条件，教师应根据学生的实际做适当的复习.

2. 判断两条直线的位置关系，可归结为分析两条直线方程的系数．一次项系数是表示方向的，因此，一般情况下，如果一次项系数对应成比例，则两条直线平行或重合，否则相交；在一次项系数对应成比例的条件下，两条直线方程的所有系数对应成比例，两条直线重合，否则平行．教学重点可放在训练分析方程的系数是否对应成比例，当系数有为零的情况时，提倡直观判断.

3. 根据这小节的知识，求过一点且平行于已知直线的直线方程就可以用待定系数法（如例 3）.

9.2.2 两条直线的交点与垂直

1. 两条直线垂直的问题转化为两条直线法向量垂直的问题．这小节的学习基础是向量垂直的充要条件及向量内积的坐标运算，教学中要注意回顾平面向量的相关知识.

2. 根据这小节的知识，求过一点且垂直于已知直线的直线方程就可以用待定系数法（如例 6）.

3. 在求出两条直线的交点之前，首先应判断两条直线是否相交，即分析一次项系数是否对应成比例.

4. 教材简明地论证了两条直线的交点坐标就是直线方程构成的方程组的解. 因此，求两条直线的交点问题就转化为求方程组的解的问题. 这是代数与几何相互联系的又一体现.

9.3 点到直线的距离

1. 教材用射影的观点求点到直线的距离，这是比较直观的解法.

2. 射影的问题往往与向量的内积联系在一起. 教材把向量作为工具计算正射影的长度. 事实上，这里有以下两个重要的知识点可供教师参考.

(1) 由向量的内积定义可得：如果 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}\rangle,$$

等号右端是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 方向上的正射影数量. 上式说明 $\boldsymbol{a}$ 在某方向上的正射影数量等于 $\boldsymbol{a}$ 与该方向上的单位向量的内积.

(2) 任意一非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

3. 点到直线的距离公式有多种证法，教材中的向量证法较为直观、简单.

4. 点到直线的距离公式适用于任何情况，但当直线平行于坐标轴时，建议用直观的方法. 例如，如果 l 是平行于 x 轴的直线，方程为 $y=y_1$，则点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 到直线 l 的距离 $d=|y_1-y_0|$.

5. 求两条平行直线的距离，一般的方法是在一条直线上任取一点，求该点到另一条直线的距离，也可以引导学生推导公式.

9.4 圆的方程

9.4.1 圆的标准方程

1. 本小节推导圆的标准方程，研究怎样根据各种条件建立圆的标准方程，并研究圆与直线的位置关系.

2. 要求学生能够用圆心坐标、半径长熟练地写出圆的标准方程，已知圆的标准方程熟练地写出圆心坐标和半径长.

3. 例 2 中，根据已知条件，先求圆心坐标，从而写出圆的标准方程；例 2 运用了待定系数法，方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 有三个参数，因此必须具备三个独立条件才能确定一个圆.

4. 例 3 是求过圆上一点的切线. 须提醒的是，题目给出的是圆心在原点的圆. 即过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $M(x_0,\ y_0)$ 的切线方程为

$$x_0x+y_0y=r^2.$$

一般地，过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点 $M(x_0,\ y_0)$ 的切线方程为：

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2.$$

5. 例 4 是直线与圆的位置关系的讨论题. 直线与圆相割、相切和相离的三种位置关系问题可以归结为直线与圆的交点个数问题. 解法 1 根据直线与圆的交点的个数问题等于

它们的方程组的实数解的个数问题，通过解方程组导出判别式，进行讨论．这是讨论直线与二次曲线交点个数问题常用的方法；解法 2 将问题转化为圆心到直线的距离与圆的半径进行比较来解，这更为直观、简捷．

9.4.2　圆的一般方程

1. 本节教学要求学生掌握圆的一般方程的特点；能将圆的一般方程化为圆的标准方程，从而求出圆的圆心坐标和半径；能用待定系数法，由已知条件求出圆的方程．

2. 教材说明了圆的标准方程与圆的一般方程之间的对应关系．首先，通过圆的标准方程推知，所有圆的方程都可以写成

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \qquad ①$$

然后，在研究方程①是否一定表示圆时，通过配方，将方程①化为

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}, \qquad ②$$

此时，引导学生讨论方程②的轨迹是什么？通过讨论得知它的轨迹可能是圆、点或无轨迹．最后得出，只有当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程①才表示圆．

这部分的教学重点应放在分析和推理的过程，认识圆的一般方程的特点，以及学习通过配方求出圆心坐标和半径的方法，而不必死记硬背结果．

3. 可以引导学生通过对比圆的一般方程，总结一般二元二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

表示圆的必要条件：

(1) x^2 和 y^2 的系数相同，且不等于零，即 $A=C\neq 0$；

(2) 没有 xy 这样的二次项，即 $B=0$.

4. 与方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 一样，圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 也有三个参数，因此必须具备三个独立条件才能确定一个圆．当已知曲线是圆时，通常用待定系数法求出方程中的未知参数．如果已知条件与圆心坐标、半径有关，往往将方程设为标准方程，否则设为圆的一般方程．

Ⅳ 参考教案

课题：9.4.1　圆的标准方程

教学目标：

1. 知识与技能目标：

(1) 理解并掌握圆的标准方程，会根据不同条件求得圆的标准方程，能从圆的标准方程熟练地写出它的圆心坐标和半径；

(2) 运用圆的标准方程解决一些简单的实际问题.

2. 过程与方法目标：

(1) 通过对圆的标准方程的推导，渗透数形结合、待定系数等数学思想方法，进一步提高学生的观察、比较、分析、概括等思维能力；

(2) 学会借助实例分析、探究数学问题.

3. 情感与价值观目标：

(1) 通过学生的主动参与，老师与学生、学生与学生之间的合作交流，提高学生的学习兴趣，激发其求知欲，培养探索精神；

(2) 树立事物之间相互联系、相互转化的辩证唯物主义观点.

教学重点：

圆的标准方程的推导以及根据具体条件正确写出圆的标准方程.

教学难点：

运用圆的标准方程解决一些简单的实际问题.

教学方法：

数学学习不是一个“授予—吸收”的过程，而是学习者主动的建构过程，而且高一学生已具备了一定的基础知识和技能，因此，本节课主要采用了“诱思探究”的教学方法，借助学生已有的知识引出新知；在方程的推导过程中，以一系列的问题为主线，采用讨论式，引导学生主动探索，自己构建新知识；通过层层深入的例题配置，使学生思路逐步开阔，提高解决问题的能力.

借助多媒体，增强教学的直观性，有利于渗透数形结合的思想，同时增大课堂容量，提高课堂效率.

教学过程：

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
复习引入	1. 引导学生回顾： 初中平面几何中所学的是以下两方面的知识：直线形和曲线形的. 在曲线形方面学习的是圆，学习解析几何以来，已讨论过直线的各种形式的方程及两直线的位置关系，从而使学生自己意识到将要研究的内容是圆的方程. 2. 具有什么性质的点的轨迹是圆？ 强调确定一个圆需要的条件——圆心与半径，它们分别确定了圆的位置和大小.	教师引导，学生回顾. 老师提问，学生回答，同时教师借助微机画出一个半径为 r 的圆 C 显示在屏幕上.	通过对初中平面几何内容的回顾，使学生理清知识脉络，自己发现需要研究的问题，可激发学生的求知欲，增强问题意识，同时使学生注意到知识之间是相互联系的. 回顾圆的定义及确定圆的几何要素，为建立圆的方程做好准备.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念的形成	1. 提出问题：求以 $C(a, b)$ 为圆心，r 为半径的圆的方程，让学生自己探究圆的方程. 设 $M(x, y)$ 是一动点，点 M 在该圆上的充要条件是 $\|CM\|=r$. 由两点间的距离公式，得 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$. 两边平方，得 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. ① 方程①就是以 $C(a, b)$ 为圆心，r 为半径的圆的方程. 2. 上述方程是圆的方程吗？ 对照直线的方程的概念，使学生意识到：若平面上一点 M 的坐标 (x, y) 适合上述方程，则 M 是圆上的点.	学生分析研究，自己解决问题. 教师巡视，加强对学生的个别指导. 由学生讲解思路，并相互补充. 根据学生的回答，教师利用多媒体展示学生的解法. 引导学生自己提出该问题并解答.	数学教学的核心是学生的“再创造”，即由学生根据自己的体验，用自己的思维方式把要学的知识重新创造出来，这种再创造积累和发展到一定的程度，就有可能产生质的飞跃，达到真正的发明、创造的高度，因此在教学中应塑造自主探索与合作交流的学习环境，让学生有充分的时间和空间去观察、分析、动手实践，从而主动发现和创造所学的数学知识. 圆的标准方程的推导是本节课的一个重点，其推导方法也是求轨迹方程的一个基本方法，把该推导过程交给学生探索，让学生经历知识的形成过程，体会数形结合的思想，可加深对知识的理解并逐步提高用代数方法解决几何问题的能力. 培养学生思维的严谨性，巩固直线方程的概念，渗透曲线方程的概念.
概念深化	1. 根据上述解法，总结求曲线方程的步骤，简单地记为：设点、列式、化简、证明（可省略，验证即可）. 2. 如何表示平面上任意一点 $M(x, y)$ 与圆的位置关系？	学生总结，教师完善. 学生解答.	提炼方法，使学生在探索中领会，在总结中提高. 该解法及结果是求圆的方程常用的两种方法（轨迹法和待定系数法），也为后面圆锥曲线方程的学习奠定基础. 发散思维，开阔视野，同时再次渗透数形结合的思想.
应用举例	练习 1　课后练习第 1 题； 练习 2　课后练习第 2 题. 例 1　根据下列条件，求圆的方程：	学生口答. 要求学生尽可能用多种方法解答各题.	巩固所学知识，熟悉圆的标准方程的特点. 使学生明确求圆的方程，必须具备三个独立的条件，确定 a，b，

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
应用举例	(1) 圆心在点 $C(-2, 1)$ 并且过点 $A(2, -2)$； (2) 圆心在点 $C(1, 3)$，并与直线 $3x-4y-6=0$ 相切. (3) 过点 $A(2, 3)$，$B(4, 9)$，以线段 AB 为直径. 例 2　求过点 $A(0, 1)$，$B(2, 1)$ 且半径为 $\sqrt{5}$ 的圆的方程. 例 3　已知圆的方程是 $x^2+y^2=25$，求经过圆上一点 $P(3, 4)$ 的圆的切线方程. 例 4　已知圆的方程是 $x^2+y^2=2$，直线 $y=x+b$，当 b 为何值时，圆与直线有两个交点？只有一个交点？没有交点？	教师将学生的解法投影，由学生点评，教师总结．	r，可以根据条件，利用待定系数法来解. 鼓励学生用多种方法解决问题，培养其发散思维能力，求解过程中，充分利用初中所学的圆的几何性质，可使思路灵活，运算简单，也可以借助“点在曲线上，点的坐标适合曲线方程”这一观点，用方程组求解. 例 1 (2) 为例 4 讨论直线与圆的位置关系作了铺垫. 例 4 的解法一是利用方程的思想，通过讨论一元二次方程解的个数问题来解决直线与圆的交点问题，揭示了解析几何的一个实质，即利用代数问题来解决几何问题；解法二是利用圆与直线的几何性质，通过比较圆心到直线的距离与圆的半径的大小来解决问题，是数形结合思想的应用.
归纳小结	1. 圆的标准方程的推导； 2. 圆的标准方程的形式； 3. 求圆的方程的方法； 4. 数学思想．	学生小结并互相补充，师生共同整理完善．	学生反思总结，可以提高学生自己获取知识的能力以及归纳概括能力，同时使自己的认知结构更完整，知识更系统化．
课后作业	练习 9-8　3. (2) (4)，6.		使学生通过课后作业来巩固所学知识.

Ⅴ　习题答案、提示和解答

练习 9-1

1. A，D 在；B，C 不在.

2. (1) $P(0, 0)$，$\boldsymbol{v}=(1, 1)$；　(2) $P(0, 0)$，$\boldsymbol{v}=(-1, 1)$；

(3) $P(0, 0)$，$\boldsymbol{v}=(0, 1)$；　(4) $P(0, 0)$，$\boldsymbol{v}=(1, 0)$；

(5) $P(3, 5)$，$\boldsymbol{v}=(4, 3)$； (6) $P(1, -2)$，$\boldsymbol{v}=(2, 3)$.

(作图略)

3. (1) $2(x-1)+3(y+3)=0$；(2) $-2(x-3)+y=0$；(3) $3(y-4)=0$；(4) $x-4=0$.

4. (1) $(x+1)-3(y-3)=0$；(2) $5(x-2)+2y=0$.

5. $b=0$.

6. $a=1$.

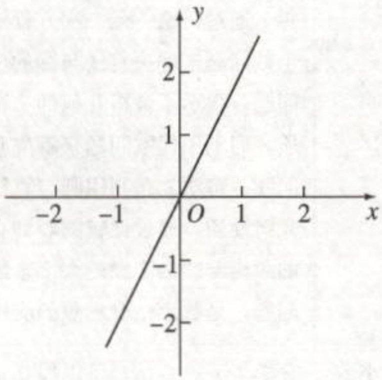
练习 9-2

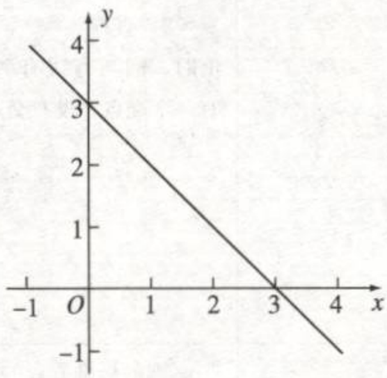
1. (1) $k=-2$，$b=4$，$\boldsymbol{v}=(1, -2)$；(2) $k=1$，$b=2$，$\boldsymbol{v}=(1, 1)$.

2. (1) 存在，$k=-\frac{3}{4}$；(2) 存在，$k=0$；(3) 不存在；(4) 存在，$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

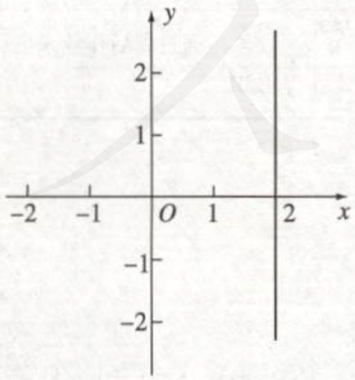
3. (1) $y-2=\frac{2}{3}(x-3)$或$2x-3y=0$；(2) $y-2=\sqrt{5}(x+3)$或$\sqrt{5}x-y+2+3\sqrt{5}=0$.

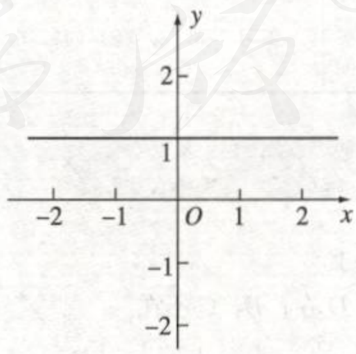
4. (1) $y=2x$； (2) $x+y-3=0$；



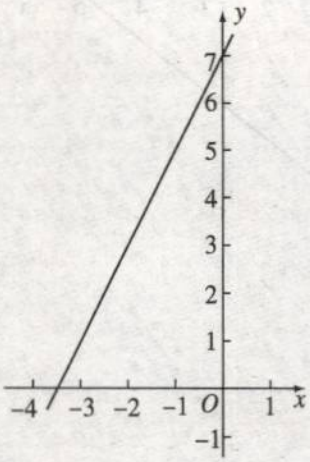


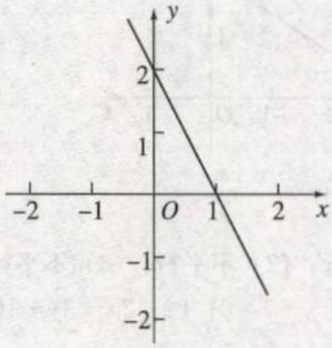
(3) $x=2$； (4) $y=1$；





(5) $2x-y+7=0$;　　　　(6) $y=-2x+2$.





5. $\frac{5}{6}$.

6. $-\frac{4}{3}$, $\frac{13}{3}$.

练习 9-3

1. (1) $\boldsymbol{v}=(-5, 3)$; (2) $\boldsymbol{v}=(5, -3)$; (3) $\boldsymbol{v}=(0, -3)$; (4) $\boldsymbol{v}=(-5, 0)$.

2. (1) $\boldsymbol{n}=(-2, 7)$; (2) $\boldsymbol{n}=(2, -7)$; (3) $\boldsymbol{n}=(0, -7)$; (4) $\boldsymbol{n}=(-2, 0)$.

3. (1) 1, $(-2, 2)$; (2) $(-1, 1)$, -1.

4. (1) $3x+4y-5=0$; (2) $3x-4y-5=0$; (3) $3x+4y+8=0$; (4) $3x-4y+3=0$;
(5) $x-2=0$; (6) $y-1=0$.

5. $2x-3y-1=0$.

6. $2x+3y-8=0$.

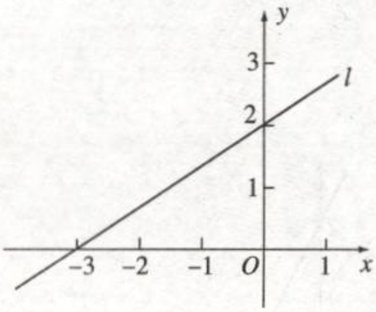
练习 9-4

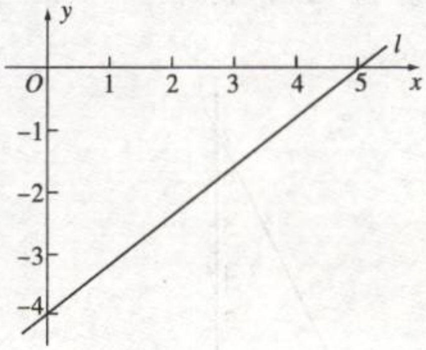
1. (1) $\boldsymbol{n}=(1, -3)$, $\boldsymbol{v}=(3, 1)$, $k=\frac{1}{3}$;　(2) $\boldsymbol{n}=(-3, 1)$, $\boldsymbol{v}=(1, 3)$, $k=3$;
(3) $\boldsymbol{n}=(2, 0)$, $\boldsymbol{v}=(0, 2)$, 斜率不存在; (4) $\boldsymbol{n}=(0, 4)$, $\boldsymbol{v}=(-4, 0)$, $k=0$.

2. (1) $-\frac{7}{8}$, $-\frac{9}{8}$;　　(2) $\frac{5}{4}$, -5.

3. (1) $4x+3y+1=0$; (2) $3x-4y-1=0$; (3) $x+4y-17=0$; (4) $y-3=0$;
(5) $x+2=0$.

4. (1) $(-3, 0)$, $(0, 2)$;　　　(2) $(5, 0)$, $(0, -4)$.





练习 9-5

1. (1) 平行；(2) 不平行；(3) 不平行；(4) 平行.

2. (1) $2x+y-7=0$；(2) $2x-3y-10=0$.

3. $a=-\frac{1}{2}$.

练习 9-6

1. (1) 相交，$(-1, -3)$；(2) 相交，$(1, -1)$；(3) 不相交.

2. (1) 不垂直；(2) 垂直；(3) 垂直；(4) 不垂直.

3. (1) $x+y-5=0$；(2) $x-y-8=0$.

4. $a=3$.

5. (1) $2x+y-5=0$；(2) $x-y-1=0$.

6. $x+y-2=0$.

练习 9-7

1. (1) 5；(2) 15；(3) 5；(4) 15.

2. (1) 1；(2) $\sqrt{2}$；(3) 0；(4) $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

3. $2\sqrt{13}$.

4. $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

练习 9-8

1. (1) $x^2+y^2=\frac{1}{4}$；(2) $(x+2)^2+(y-1)^2=7$；(3) $(x-2)^2+y^2=5$；(4) $x^2+(y-1)^2=16$.

2. (1) $(0, 0)$，$r=\sqrt{5}$；(2) $(3, -1)$，$r=2$；(3) $(0, -1)$，$r=\sqrt{2}$；(4) $(1, 0)$，$r=\sqrt{3}$.

3. (1) $x^2+(y-3)^2=13$；(2) $x^2+y^2=\frac{1}{20}$；(3) $(x-3)^2+(y+1)^2=45$；(4) x^2+

$(y-2)^2=1$.

4. $2x+\sqrt{6}y-10=0$.

5. 相交，(3，2)，(−2，−3).

6. (1) $-2\sqrt{2}<C<2\sqrt{2}$时，有两交点；(2) $C=\pm2\sqrt{2}$时，有一交点；(3) $C>2\sqrt{2}$或$C<-2\sqrt{2}$时，无交点.

练习 9-9

1. (1) $(x-3)^2+y^2=9$，$C(3,0)$，$r=3$；(2) $x^2+(y-2)^2=9$，$C(0,2)$，$r=3$；(3) $(x-2)^2+(y-3)^2=1$，$C(2,3)$，$r=1$；(4) $(x-1)^2+(y+2)^2=\frac{5}{2}$，$C(1,-2)$，$r=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

2. (1) 点；(2) 圆，圆心$C(1,1)$，$r=\sqrt{5}$.

3. $x^2+y^2+4x-\frac{25}{2}y=0$.

4. 相切.

习题九

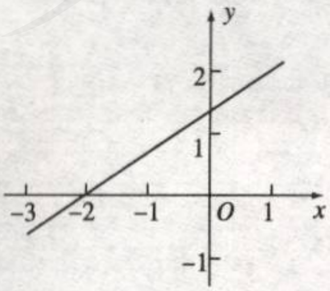
1. (1) $3x+2y-7=0$；(2) $3x-2y+21=0$；(3) $x-2y-12=0$；
(4) $7x-4y-1=0$；(5) $y-4=0$；(6) $x+2=0$.

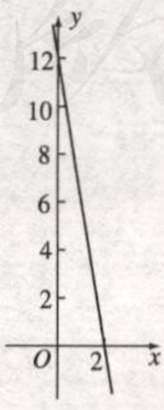
2. (1) $\boldsymbol{v}=(5,-4)$，$\boldsymbol{n}=(4,5)$，$k=-\frac{4}{5}$；(2) $\boldsymbol{v}=\left(1,-\frac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2},1\right)$，$k=-\frac{1}{2}$；

(3) $\boldsymbol{v}=(2,3)$，$\boldsymbol{n}=(3,-2)$，$k=\frac{3}{2}$；(4) $\boldsymbol{v}=(1,-1)$，$\boldsymbol{n}=(1,1)$，$k=-1$；

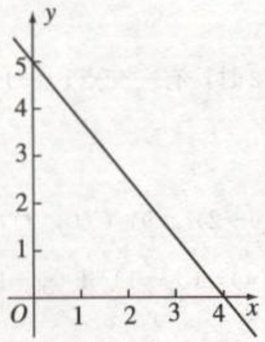
(5) $\boldsymbol{v}=(1,0)$，$\boldsymbol{n}=(0,1)$，$k=0$.

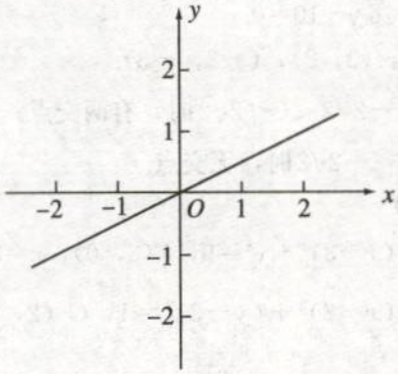
3. (1) $(-2,0)$，$\left(0,\frac{4}{3}\right)$；　　(2) $(2,0)$，$(0,12)$；





(3) (4, 0), (0, 5);　　　　(4) (0, 0).





4. (1) $x-2y-7=0$; (2) $4x+y-5=0$.

5. (1) 平行; (2) 垂直; (3) 重合; (4) 平行.

6. (1) (1, 6); (2) $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$.

7. (1) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; (2) $\frac{8\sqrt{29}}{29}$; (3) 3; (4) $\frac{1}{2}$.

8. $\frac{13}{10}$.

9. $a=-1$.

10. (1) $(x+2)^2+(y-1)^2=40$; (2) $(x-3)^2+(y-1)^2=34$; (3) $(x-3)^2+(y+5)^2=32$.

11. $x^2+(y-4)^2=10$.

12. $x^2+y^2-8x+2y+12=0$.

13. $C=\pm 5\sqrt{26}$.

14. $x-\sqrt{3}y+4=0$.

15. (1) 相离; (2) 相切.

第十章　立体几何初步

思想火花：

天行健，君子以自强不息；地势坤，君子以厚德载物.

——《周易》

Ⅰ 知识框图

- 点线面位置关系
  - 平面的基本性质
  - 直线与直线位置关系
  - 直线与平面位置关系
  - 平面与平面位置关系

Ⅱ 教学要求

1. 在观察、实验与思辨的基础上掌握平面的三个基本性质（公理）及三个推论、公理4.

2. 以长方体为载体，通过观察、实验、思辨，直观认识和理解空间直线与直线，直线与平面，平面与平面的位置关系.

3. 以长方体为载体，理解直线与平面、平面与平面的两种位置（平行、垂直）关系的判定定理与性质定理.

4. 以长方体为载体，了解点到平面的距离、直线到平面的距离、平行平面间的距离的概念.

5. 了解异面直线所成角、直线与平面所成角、二面角的平面角的概念.

6. 培养和发展学生的空间想象力、运用图形语言进行交流的能力、几何直观能力.

III 教材分析和教学建议

本章主要内容包括：平面的基本性质，直线与直线的位置关系，直线与平面的位置关系，平面与平面的位置关系.

平面是最基本的几何概念，教材通过实例，对它加以描述而不定义，并给出了平面的画法. 平面的三个基本性质即三个公理，是研究立体图形的基础. 所谓公理，就是不必证明而直接承认的真命题，它们是进一步推理的出发点和根据.

点、直线和平面是空间图形最基本的几何元素，建立空间观念，实现从认识平面图形到认识立体图形的飞跃，是非常重要的. 教材着重介绍了点、直线和平面的位置关系，加强学生的识图能力和空间想象力，通过对图形的观察、实验和讲解，使学生进一步了解平行、垂直关系的基本性质和判定方法，学会准确地使用数学语言表述几何对象的位置关系. 作为学生了解的知识，教材穿插介绍了点到平面的距离，直线与平面的距离，平行平面间的距离，以及异面直线的夹角，直线与平面的夹角，二面角等有关知识.

本章的重点是：平面的基本性质及推论，平行直线、异面直线的判定和性质，直线与平面平行、垂直的判定和性质，平面与平面平行、垂直的判定和性质.

本章的难点是：异面直线，线面、面面平行、垂直关系的判定和性质.

学好本章的关键是：把握点、直线和平面的位置关系.

本章教学约需 11 课时，具体分配如下（仅供参考）：

10.1	平面的基本性质	2 课时
10.2	空间两条直线的位置关系	2 课时
10.3	直线与平面的位置关系	3 课时
10.4	平面与平面的位置关系	3 课时
小结与复习		1 课时

10.1 平面的基本性质

1. 本节的主要内容是平面的三个基本性质（公理）及三个推论，平面的画法. 教学重点是平面的基本性质与推论. 教学难点是自然语言与数学图形语言和符号语言间的相互转化与应用.

2. 本节的教学要求是：

（1）了解平面；

（2）掌握平面的画法；

（3）理解平面的三个基本性质（公理）及三个推论；

（4）会用集合语言来描述点、直线和平面之间的关系以及图形的性质.

3. 平面是最基本的几何概念，教材通过实例，对它加以描述而不定义，教学中要指

出几何中的平面是无限伸展的，可以联系直线的无限伸展来理解.

4. 在讲授平面的画法时，要引导学生注意：

（1）用平行四边形表示整个平面；

（2）有时根据需要，可以用其他平面图形来表示平面，如图 10-1，用矩形来表示平面 β；

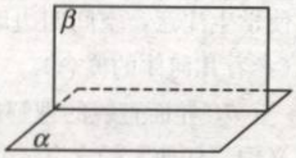


图 10-1

（3）为增强立体感，当一个平面或直线的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮住部分的线段画成虚线或不画.

教学中要特别强调：在以前的平面几何中，凡是后引的辅助线我们都画成虚线，而在立体几何中，凡是被平面遮住的线，都画成虚线，凡是不被平面遮住的线，都画成实线（无论是题中原有的，还是后引的辅助线）.

5. 用集合语言来描述点、线、面关系时，以点为元素，直线、平面都是由点构成的集合．例如：$A\in m$，$m\subset$平面 α 等．但为了方便，个别地方略有不同，例如：直线 m 与直线 n 交于点 B，记作 $m\cap n=B$，而不是 $m\cap n=\{B\}$，这里的 B 既是一个点，又可以理解为只含一个元素（点）的集合.

6. 平面的三个基本性质，即三个公理，是研究立体图形的基础．所谓公理，就是不必证明而直接承认的真命题，它们是进一步推理的出发点和根据．三个推论是定理，定理是从真命题（公理或其他已被证明的定理）出发，经过受逻辑限制的演绎推导，证明为正确的结论，即真命题.

10.2 空间两条直线的位置关系

1. 本节的主要内容是空间两条直线的位置关系的分类，空间中平行直线的基本性质（公理 4），空间四边形．教学重点是空间两条直线的位置关系的分类，教学难点是异面直线的判定.

2. 本节的教学要求是：

（1）理解空间两条直线的位置关系的分类；

（2）理解公理 4；

（3）了解空间四边形及有关概念；

（4）会判定两条直线是否是异面直线关系；

（5）了解异面直线所成的角.

3. 如不特别说明，空间两条直线是指不重合的两条直线，两点是指不重合的两点.

4. 教材以长方体为载体，介绍空间两条直线的位置关系，教学中，教师可列举生活中的实例，加深学生的理解.

5. 公理 4 是初中平面几何中的平行公理在空间中的推广，它表示在空间中，平行性具有传递性．初中平面几何中的平行公理是公理 4 的特殊情况，三条直线平行，它们既可以都在一个平面内，也可以不共面.

6. 空间四边形及其对角线，可以看作第一节所介绍的三棱锥的六条棱. 教学中，应使学生注意，空间四边形及其对角线只含六条线段，而三棱锥（或称四面体）是几何体(参看几何体的概念).

7. 异面直线的理解是本节的难点，教学中要注意结合正反两方面例子，深刻理解定义中“任何”的含义. 可以利用反证法的思想，向学生指出，两条直线是异面直线等价于这两条直线既不平行也不相交.

8. 在画异面直线时，一般要以平面为衬托，可以显得更加直观和清楚，否则，就容易画成两条直线相交的情况（如图 10-2).

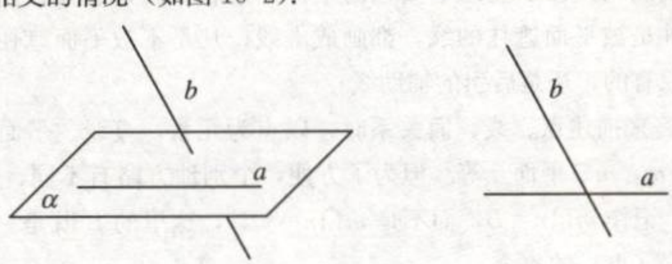


图 10-2

9. 异面直线所成的角只作为需了解的知识向学生讲解，不要求对异面直线所成角为一般角时的求解.

10.3 直线与平面的位置关系

1. 本节的主要内容是空间直线与平面的位置关系的分类，直线与平面平行、垂直的判定和性质，点到平面、直线到平面的距离，直线和平面所成的角. 教学重点是直线与平面平行、垂直的判定和性质，教学难点是直线与平面平行、垂直的判定和性质.

2. 本节的教学要求是：

(1) 理解空间直线与平面的位置关系的分类；

(2) 理解直线与平面平行、垂直的判定和性质，并会简单应用；

(3) 了解点到平面、直线到平面的距离；

(4) 了解直线和平面所成的角.

3. 空间直线与平面的位置关系根据公共点的情况进行分类，有三种情况：直线在平面内，相交，平行. 另外，还可分为以下两种情况：直线在平面内，直线在平面外. 直线在平面外，用符号表示为 $a\not\subset\alpha$，表示 $a\parallel\alpha$，$a\cap\alpha=A$ 两种情况.

4. 直线与平面平行、垂直的判定定理和性质定理，不要求学生会证明，只要求学生“直观感知，加以确认”，并能简单应用. 教学时，注意使学生掌握符号语言，并会熟练使用.

5. 判定直线与平面平行主要有以下几种方法：

(1) 利用定义；

(2) 利用直线与平面平行的判定定理，从直线与直线平行得到直线与平面平行.

另外，在学习了平面与平面平行的性质后，通过证明平面与平面平行，可得到直线与平面平行.

6. 对直线与平面平行性质的研究，就是研究在直线与平面平行的条件下，能够推出什么结论. 注意防止学生错误地认为"一条直线平行于一个平面，就平行于这个平面内的一切直线".

7. 直线与平面垂直，是直线与平面相交的一种特殊情况. 教学时，可以通过大量教材内、外的实例，让学生感知直线与平面垂直这种位置关系，从而引出相关概念.

8. 结合教材中的"试一试"，给学生充分的时间动手、动脑，进行探索，在学生"直观感知，加以确认"的基础上，归纳出直线与平面垂直的判定定理.

9. 点到平面、直线到平面的距离以及直线和平面所成的角作为只需了解的内容，着重概念的理解，不要求进行复杂计算.

10.4 平面与平面的位置关系

1. 本节的主要内容是空间平面与平面的位置关系的分类，平面与平面平行、垂直的判定和性质，两个平行平面间的距离，二面角. 教学重点是平面与平面平行、垂直的判定和性质，教学难点是二面角及其平面角.

2. 本节的教学要求是：

(1) 理解空间平面与平面的位置关系的分类；

(2) 理解平面与平面平行、垂直的判定和性质，并会简单应用；

(3) 了解两个平行平面间的距离；

(4) 了解二面角.

3. 本教材中，两个平面是指不重合的两个平面.

4. 平面与平面平行、垂直的判定定理和性质定理，不要求学生会证明，只要求学生"直观感知，加以确认"，并能简单应用. 教学时，注意使学生掌握符号语言，并会熟练使用.

5. 讲解平面与平面平行的判定定理时，引导学生注意"两条相交直线"这个条件. 教师可以通过列举正、反例子加以强调.

6. 讲解平面与平面平行的性质时，注意防止学生错误地认为"两条直线分别在两个平行平面内，这两条直线平行"，其实，它们有可能是平行直线，也有可能是异面直线，但一定不是相交直线.

7. 平面与平面垂直需要用"二面角"的概念. 教学时，教师可利用教材内、外的大量实例，增加学生对二面角的感性认识.

8. 在讲解二面角的概念时，注意以下几点：

(1) 二面角的大小是用平面角来度量的；

(2) 二面角的平面角的大小由两个面的位置唯一确定，与棱上点的选取无关；

(3) 二面角的平面角的两边分别在二面角的两个面内，且都与棱垂直. 由这个角所确定的平面与二面角的棱垂直.

9. 两个平面垂直是两个平面相交的特殊情况，通过实例让学生感知，从而引出平面与平面垂直的判定定理.

Ⅳ 参考教案

课题：10.2 空间两条直线的位置关系（一）

教学目标：

1. 掌握空间两条直线的位置关系的分类；

2. 掌握平行直线的基本性质（公理 4）；

3. 了解空间四边形及有关概念.

教学重点：

空间两条直线的位置关系的分类.

教学难点：

空间四边形及有关概念.

教学方法：

启发式教学法.

教学过程：

一、复习引入

设问 1：平面内，两条直线的位置关系有哪些？

观察图 1，直线 a 与 b ____（平行）；直线 a 与 c ____（相交）.

设问 2：在空间，两条直线的位置关系有哪些？

观察图 2，长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，直线 AB 与直线 $A'B'$ ____（平行）；直线 AB 与直线 BC ____（相交）.

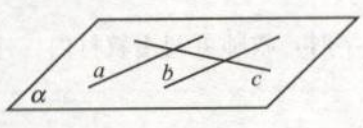


图 1

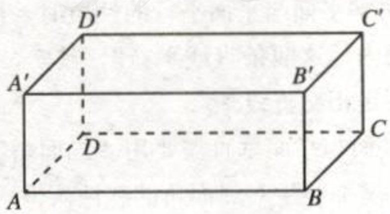


图 2

观察直线 AB 与 CC'，它们既不相交也不平行，它们不同在任何一个平面内.

二、讲授新课

定义：我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做**异面直线**.

归纳空间两条直线的三种位置关系：

位置关系	共面情况	公共点
相交	在同一平面内	有且只有一个
平行	在同一平面内	没有
异面	不同在任何一个平面内	没有

1. 平行直线

这节课我们来研究平行直线，下节课再研究异面直线.

回忆平面几何中学过的知识：

我们把在同一平面内______（不相交）的两条直线叫做平行线；

过直线外一点________（有且只有一）条直线和这条直线平行；

在同一平面内，若两条直线都和第三条直线平行，则这两条直线也互相________（平行）.

结论推广：前面两条在空间也是成立的，第三条所述平行直线的性质同样也可推广到空间，作为空间中平行直线的基本性质.

（1）平行直线的基本性质

公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

用符号表示为：若 $a /\!/ b$，$c /\!/ b$，则 $a /\!/ c$，如图 3 所示.

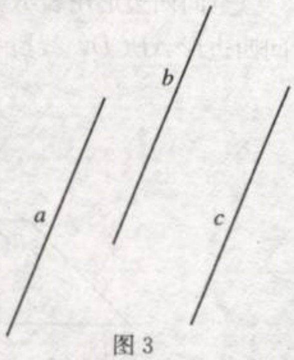


图 3

公理 4 所述的基本性质通常又叫做**空间平行线的传递性**.

如图 4，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，由 $AA' /\!/ BB'$，且 $CC' /\!/ BB'$，可知 $AA' /\!/ CC'$.

如图 5，在圆柱 OO' 中，由 $AA' /\!/ OO'$，且 $BB' /\!/ OO'$，可知 $AA' /\!/ BB'$.

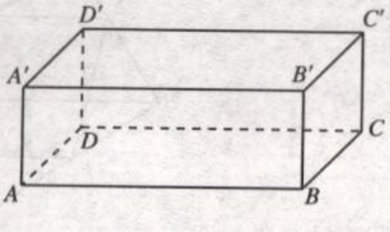


图 4

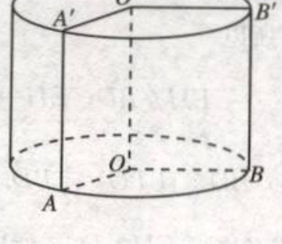


图 5

例 2 如图 6，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，已知点 E，F 分别是棱 AB，BC 上的中点，求证：$EF/\!/A'C'$.

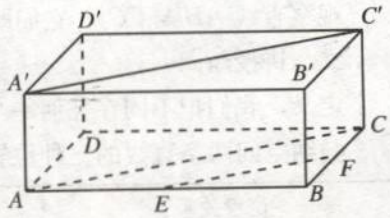


图 6

证明 连接 AC. 在$\triangle ABC$ 中，E，F 分别是 AB，BC 上的中点，所以 $EF/\!/AC$.

又因为 $AA' \mathrel{\underline{/\!/}} CC'$，所以四边形 $AA'CC'$ 是平行四边形，所以

$$AC/\!/A'C'.$$

从而 $EF/\!/A'C'$.

（2）空间四边形

如图 7（1）所示，顺次连接不共面的四点 A，B，C，D 所构成的图形，叫做**空间四边形**. 这四个点中的各个点叫做**空间四边形的顶点**；所连接的相邻顶点间的线段叫做**空间四边形的边**；连接不相邻的顶点的线段叫做这个**空间四边形的对角线**.

注：空间四边形及其对角线可以看成三棱锥的六个棱（只含六条线段），而三棱锥是几何体.

空间四边形用表示顶点的四个字母表示. 例如，图 7（2）中的四边形可以表示为空间四边形 $ABCD$，线段 AC，BD 是它的对角线.

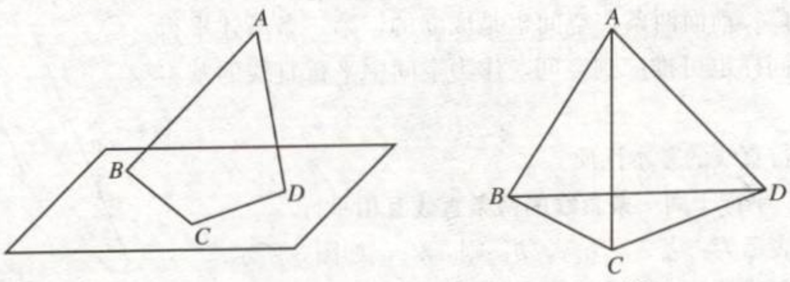


图 7

例 3 已知：空间四边形 $ABCD$，E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点.

求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形（图 8）.

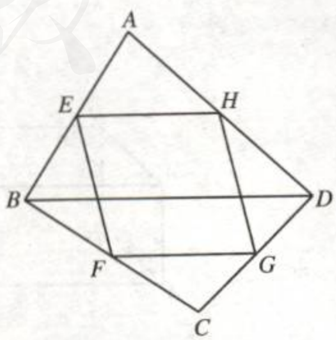


图 8

证明：连接 BD，在$\triangle ABD$ 中，因为 E，H 分别是 AB，AD 的中点，所以

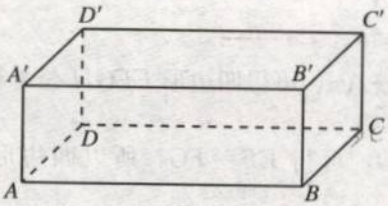
$$EH/\!/BD，EH=\frac{1}{2}BD.$$

同理 $FG/\!/BD$，且 $FG=\frac{1}{2}BD$.

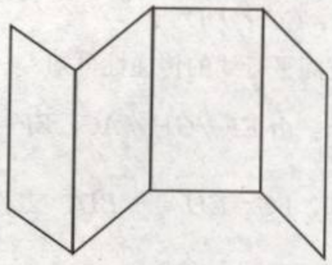
因此 $EH/\!/FG$，$EH=FG$，所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

三、课堂练习

1. 已知长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，写出在这个长方体中与 AA'平行的所有的棱.



（第 1 题）

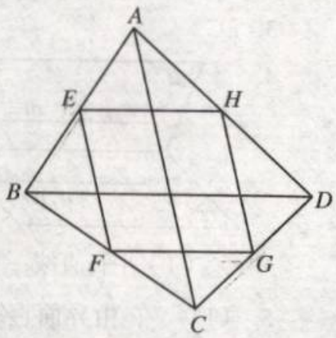


（第 2 题）

2. 把一张长方形的纸对折两次，打开后如图所示，说明为什么这些折痕是互相平行的?

3. 已知：在空间四边形 $ABCD$ 中，$AC=BD$，E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点.

求证：四边形 $EFGH$ 是菱形.



（第 3 题）

四、归纳小结

与学生一起对本节课进行总结.

注意区分空间两条直线的三种位置关系，把握平行直线的基本性质，了解空间四边形及有关概念.

五、布置作业

《学习指导与训练》中的同步训练.

六、板书设计

10.2　空间两条直线的位置关系	
空间两条直线的三种位置关系	（2）空间四边形
1. 平行直线	例 3
（1）平行直线的基本性质	作业

V　习题答案、提示和解答

练习 10-1

1. （1）√；（2）√；（3）×；（4）×；（5）√.

2. 不共线的三点确定一个平面.

3. (1) $A\in l$；(2) $B\notin l$；(3) $l\subset\alpha$；(4) $m\cap\alpha=P$.

练习 10-2

1. BB'；CC'；DD'.

2. 由空间平行线的传递性可知.

3. 提示：由 $EF/\!/GH/\!/AC$，$EF=GH=\frac{1}{2}AC$，可得四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

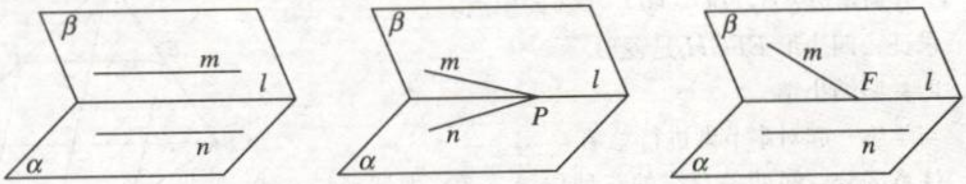
同理，$FG=EH=\frac{1}{2}BD$，又 $AC=BD$，可得 $EF=FG$，所以四边形 $EFGH$ 是菱形.

练习 10-3

1. (1) √；(2) ×；(3) √.

2. DD'；CC'；$A'D'$；$B'C'$.

3. D.

4. 

(1) 平行直线　　(2) 相交直线　　(3) 异面直线

5. (1) √；由异面直线所成角的概念可知.

(2) ×；反例，一条直线垂直于一个平面内两条相交直线.

练习 10-4

1. (1) √；(2) √；(3) ×.

2. (1) 平面 $A'B'C'D'$，平面 $CC'D'D$；(2) 平面 $BCC'B'$，平面 $CC'D'D$；

(3) 平面 $A'B'C'D'$，平面 $BCC'B'$.

3. 因为 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a/\!/b$，所以 $a/\!/\beta$，又因为 $\alpha\cap\beta=m$，所以 $a/\!/m$；同理可证 $b/\!/m$.

练习 10-5

1. 过一点有且只有一条直线与已知平面垂直，过一点有且只有一个平面与已知直线垂直.

2. (1) √；(2) ×；(3) √.

3. 由正方形 $ABCD$ 可知 $AC\perp BD$.

因为 $PA\perp\alpha$，$BD\subset\alpha$，所以

$$PA\perp BD.$$

又因为 $PA\cap AC=A$，所以 $BD\perp$平面 PAC，又因为 $PO\subset$平面 PAC，所以

$$PO\perp BD.$$

4. 因为 $PA\perp\alpha$，$l\subset\alpha$，所以 $PA\perp l$. 同理，$PB\perp l$.

又因为 $PA\cap PB=P$，所以

$$l\perp 平面 APB.$$

5. 设正方体的棱长为 1. 因为 $C'C\perp$平面 $ABCD$，所以 AC 是 AC' 在平面$ABCD$内的射影，所以$\angle C'AC$ 就是 AC' 与平面 $ABCD$ 所成的角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACC'$ 中，$CC'=1$，$AC'=\sqrt{3}$，所以

$$\sin\angle C'AC=\frac{CC'}{AC'}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

练习 10-6

1. (1) ×；(2) ×；(3) √；(4) ×.

2. 是.

在平面 α 内任取两条相交直线 a，b.

因为 $\alpha /\!/ \beta$，所以在平面 β 内存在直线 a'，b'，且 $a' /\!/ a$，$b' /\!/ b$.

同理，在平面 γ 内存在直线 a''，b''，且 $a'' /\!/ a'$，$b'' /\!/ b'$.

所以 $a /\!/ a''$，$b /\!/ b''$，所以 $\alpha /\!/ \gamma$.

3. 因为 E，E' 是正方体的棱 AB，$A'B'$ 的中点，可知

$$EB \mathrel{\underline{/\!/}} A'E',$$

所以四边形 $EBE'A'$ 是平行四边形，所以 $A'E /\!/ E'B$.

由正方体知 $A'D' /\!/ BC$. 又因为 $A'D'\cap A'E=A'$，所以

$$平面 ED' /\!/ 平面 BF'.$$

4. 因为 $AC /\!/ BD$，所以$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PC}{PD}$，即$\dfrac{4}{4+5}=\dfrac{3}{PD}$，解得

$$PD=\frac{27}{4}.$$

练习 10-7

1. (1) ×；(2) ×；(3) ×；(4) ×；(5) √.

2. 是.

3. (1) 因为平面 $ABCD\cap$平面 $A_1ABB_1=AB$，$AA'\perp AB$，$DA\perp AB$，所以$\angle A'AD$ 是平面 A_1ABB_1 与平面 $ABCD$ 所成二面角的平面角.

因为 $AA'\perp$平面 $ABCD$，$AD\subset$平面 $ABCD$，所以

$$AA'\perp AD,$$

所以平面 A_1ABB_1 与平面 $ABCD$ 所成角的大小是 90°.

(2) 因为 $C_1B=C_1D$，O 是 BD 中点，所以

$$C_1O\perp BD.$$

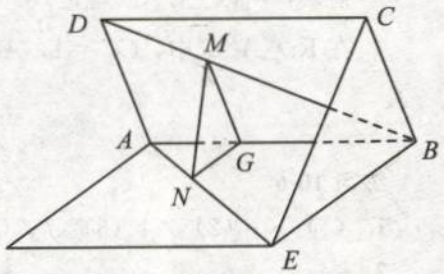
又因为 $AC\perp BD$，所以$\angle C'OC$ 是二面角 C_1-BD-C 的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle C'OC$ 中，$C'C=a$，$OC=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，所以

$$\tan\angle C'OC=\frac{C'C}{OC}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\sqrt{2}.$$

习题十

1. 过点 M 作 $MG /\!/ AD$，交于点 G，连接 NG.



（第 1 题）

在$\triangle ABD$ 中，$\frac{DM}{MB}=\frac{AG}{GB}$.

因为 $AN=DM$，$BD=AE$，所以

$$\frac{DM}{MB}=\frac{AN}{NE},$$

所以$\frac{AG}{GB}=\frac{AN}{NE}$，即$\triangle ABE$ 中，$NG /\!/ BE$.

又因为 $MG\cap NG=G$，所以平面 $MGN /\!/$ 平面 CBE，所以

$$MN /\!/ \text{平面 } BCE.$$

2. 在$\triangle ABD$ 中，OE 为中位线，即

$$OE /\!/ CP.$$

3. 因为 $PC\perp PA$，$PC\perp PB$，所以

$$PC\perp \text{平面 } PAB,$$

又因为 $AB\in$ 平面 PAB，所以 $PC\perp AB$. 又因为 $CH\perp AB$，所以 $AB\perp$ 平面 PHC，所以

$$PH\perp AB,$$

同理 $PH\perp BC$，所以

$$PH\perp \text{平面 } ABC.$$

4. 如图，旗杆 $PO=12$，绳子 $PE=PF=13$，$OE=OF=5$. 在$\triangle POE$ 中，

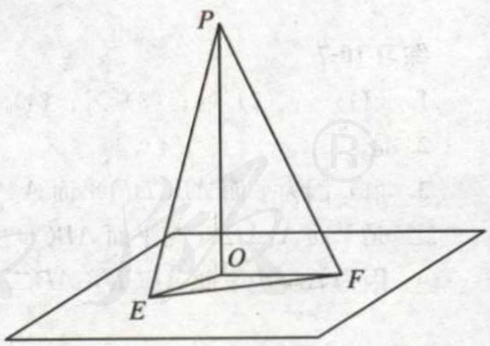
$$PO^2+OE^2=12^2+5^2=13^2=PE^2,$$

所以$\angle POE=90°$，即 $PO\perp OE$.

同理 $PO\perp OF$，又 O，E，F 三点不共线，所以

$$PO\perp \text{平面 } OEF,$$

即该旗杆与地面垂直.



（第 4 题）

5. 连接 AH，CH，因为 H 为$\triangle ABC$ 的垂心，所以

$$AH\perp BC,$$

又 $PH\perp BC$，可知，$BC\perp$ 平面 APH，则有 $PA\perp BC$.

同理 $PC\perp AB$.

又$\angle APB=90°$，即 $PA\perp PB$，所以 $PA\perp$平面 PBC，所以

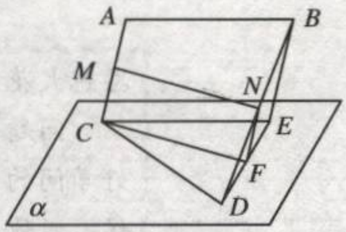
$$PA\perp PC.$$

$PA\cap AB=B$，所以 $PC\perp$平面 PAB，所以

$$PC\perp PB.$$

6. 过点 B 作 $BE/\!/AC$，交平面 α 于点 E，连接 CE，DE，取 DE 的中点 F，连接 CF，NF. 则 $NF \underline{\parallel} CM$，所以 $CF/\!/MN$，所以

$$MN/\!/\text{平面 }\alpha.$$



（第 6 题）

7. 因为 $SA\perp BC$，$AB\perp BC$，所以

$$BC\perp\text{平面 }SAB,$$

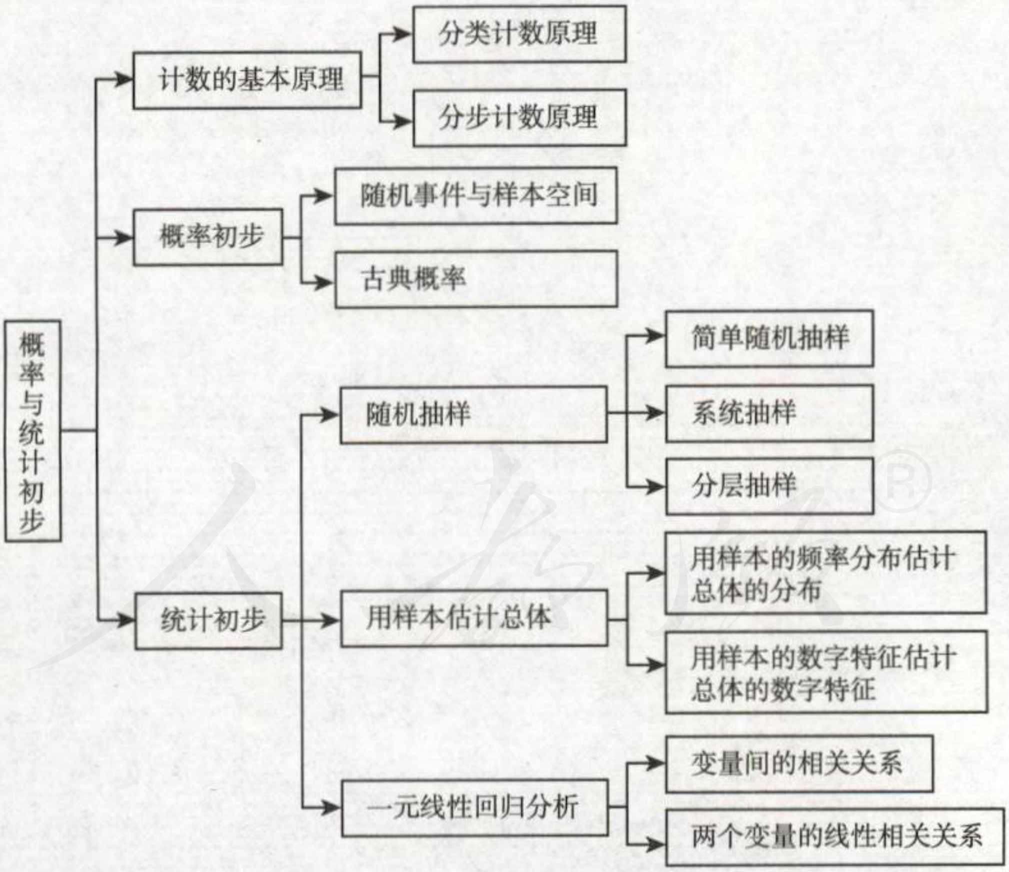
所以平面 $SAB\perp$平面 SBC.

8. 分别在 α，β 内作直线 $m\perp a$，$n\perp b$，则 $m/\!/n$，所以 $\alpha/\!/\beta$.

第十一章　概率与统计初步

> 思想火花：
>
> 问题不在于教他各种学问，而在于培养他爱好学问的兴趣，而且这种兴趣充分增长起来的时候，教他以研究学问的方法．
>
> ——卢梭

知识框图



Ⅱ 教学要求

1. 掌握分类计数原理及分步计数原理，会用这两个原理解决一些简单问题.

2. 了解随机现象、随机试验的概念. 理解样本空间、基本事件和随机事件的概念.

3. 理解古典概率，了解概率的性质. 会应用古典概率解决一些简单的实际问题.

4. 能从现实生活或其他学科中提出具有一定价值的统计问题.

5. 结合具体的实际问题情景，了解随机抽样的必要性和重要性.

6. 在参与解决统计问题的过程中，学会用简单随机抽样方法从总体中抽取样本；通过对实例的分析，了解分层抽样和系统抽样方法.

7. 通过实例体会分布的意义和作用，在表示样本数据的过程中，初步学习列出频率分布表、画频率分布直方图，了解频率分布直方图、频率折线图、茎叶图表示的意义.

8. 通过实例理解样本数据标准差的意义和作用. 学会计算样本的标准差.

9. 能根据实际问题的需求合理地选取样本. 从样本数据中提取基本的数字特征.

10. 在解决统计问题的过程中，进一步体会用样本估计总体的思想，初步学会用样本的基本数字特征估计总体的基本数字特征.

11. 通过收集现实问题中两个有关联变量的数据作出散点图，并利用散点图直观认识两变量的相关关系.

12. 会使用计算器计算出具有线性相关关系的两个变量的线性回归方程的系数，从而建立线性回归方程.

Ⅲ 教材分析和教学建议

本章主要内容包括：分类计数原理，分步计数原理，古典概率，随机抽样，用样本估计总体及一元线性回归分析.

本章教材从实例出发，首先引出了分类计数原理和分步计数原理，然后在这两个计数原理的基础上，教材通过几个简单具体现象的归类分析，引出了概率统计研究的对象——随机现象，目的是使初学者明确概率学与前面所学的数学在研究对象上的区别. 然后，通过对简单的随机现象进行分析，引入了随机试验、样本空间、基本事件、随机事件、古典概型的定义. 教材在统计初步中，首先介绍了简单随机抽样、系统抽样、分层抽样这三种常用的抽样方法. 在学生学会用随机抽样的方法在总体中抽取样本后，接着介绍如何用样本估计总体，一是如何用样本的频率分布估计总体分布；二是如何用样本的某种特征数去估计总体的相应的特征数，其中用样本平均数估计总体平均数的问题在初中已作介绍，而本章内容的介绍完全是初中相关内容的继续和深入. 最后，介绍了两个变量之间的相关关系，除了函数关系这种确定性的关系以外，还存在大量因变量的

取值带有一定随机性的两个变量之间的关系——两个变量之间的相关关系，重点介绍了一元线性回归分析.

概率这部分内容是概率论的初步知识，概率论是研究随机现象规律性的数学学科.在现实世界中，随机现象广泛存在，而随机现象中存在着数量规律性，从而使我们可以运用数学方法来定量地研究随机现象. 在当前，概率与统计在工农业生产和科学技术中都得到越来越广泛的应用，成为研究自然现象和规律、处理工程乃至公众事业问题的有利工具. 统计是研究如何合理地收集、整理、分析数据的学科，它可以为人们制定决策提供依据. 在日常生活中，人们常常需要收集数据，根据所获得的数据提取有价值的信息，作出合理的决策. 统计基础知识已经成为一个未来公民的必备常识，本章通过对数据的收集、整理和分析，增强学生的社会实践能力，培养学生解决问题的能力，增强学生学习的兴趣. 在现代社会中，虽然还不能确切地预知未来，然而学习本章知识有利于初步处理各种不确定的因素，这对于中等职业学校的学生毕业后参加工作或进一步学习都将有所裨益.

本章的重点是：

(1) 分类计数原理、分步计数原理的意义及其计算；

(2) 概率的相关概念、古典概率的计算；

(3) 抽样方法和用样本估计总体的均值以及求回归方程.

本章的难点是：

(1) 正确熟练地运用两个原理分析解决应用题；

(2) 对概率统计定义的理解，利用概率知识解决实际问题的方法；

(3) 对方差、标准差意义的理解，会用计算器以及统计知识解决实际问题.

为了便于教学，提出以下教学建议：

1. 为使学生正确理解分类计数原理及分步计数原理，清楚二者的区别，应对学生说明：应用两个计数原理解决实际问题时，关键在于判断完成该事件的办法是分类还是分步. 分类与分步的区别在于，分类中的每一种方法都能独立地完成这件事；分步中的每一步都只能完成这件事的一部分，需完成所有各步后，才能完成整个事件. 教学中注意使用日常生活中的实例对学生进行训练，以达到熟练地掌握两个原理的应用.

2. 概率初步的教学要坚持从具体到抽象的思路和方法. 对每一个新概念都要努力做到用学生熟悉的例子顺理成章地引入，以克服教学内容的抽象给学生学习带来的困难.

3. 在概率初步的教学中，要注意让学生弄清问题所涉及的基本事件及样本空间是什么，能用文字正确地写出所讨论的随机事件，并能用适当的大写英文字母表示，要充分利用图表，加强直观教学.

4. 关于概率初步方面的内容，教师可以参看有关书籍，扩充自己这方面的知识，以更好、更准确地在基本概念的理解上给学生进行指导，但不要求给学生扩充.

5. 在统计初步的教学中，让学生明白完全统计与不完全统计的优缺点，当完全统计

不容易做到时，我们往往要采用不完全统计，从而就需要在总体中进行抽样.

6. 一定让学生明确，抽签法、随机数表法、系统抽样、分层抽样的意义，使学生明白不科学的抽样会导致不良的后果.

7. 让学生明白两变量的一次函数关系不同于两变量的线性相关关系，让学生会用计算器求出一元线性回归方程的系数.

本章教学约需 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

11.1　计数的基本原理	2 课时
11.2　概率初步	
11.2.1　随机事件与样本空间	1 课时
11.2.2　古典概率	2 课时
11.3　随机抽样	
11.3.1　简单随机抽样	1 课时
11.3.2　系统抽样	0.5 课时
11.3.3　分层抽样	0.5 课时
11.4　用样本估计总体	
11.4.1　用样本的频率分步估计总体的分布	2 课时
11.4.2　用样本的数字特征估计总体的数字特征	2 课时
11.5　一元线性回归分析	3 课时
小结与复习	2 课时

11.1　计数的基本原理

1. 本小节内容的重点是分类计数原理和分步计数原理及其应用.

2. 分类计数原理即加法原理，如果完成一件事有 n 类办法，这 n 类办法之间是相互独立的，不论用哪一类办法中的哪一种方法，都能单独完成这件事，那么求完成这件事有多少种方法，就应该用分类计数原理，把每类办法中的所有方法数相加. 教学时，为使学生理解 n 类办法之间的相互独立性，可以类比物理教材电学部分的“并联电路”.

分步计数原理即乘法原理，完成一件事可以分成 n 个步骤，这 n 个步骤之间是相互关联的，缺少其中的任何一个步骤，这件事都无法完成，只有依次完成所有的步骤，才能完成这件事，而完成每一个步骤各有若干种不同的方法，求完成这件事有多少种方法，就应该用分步计数原理，把每一个步骤的所有方法数相乘. 教学时，为使学生理解 n 个步骤之间的相互关联性，可以类比物理教材电学部分的“串联电路”.

3. 要理解分类计数原理，需要注意的是，“做一件事，完成它有 n 类办法”，这是对能够完成这件事所有方法的分类. 分类时，首先要根据这件事的特点确定一个分类的标准，然后在所确定的标准下进行分类；其次，分类需满足如下要求：完成这件事的任何

一种方法必须包含于某一类之中，且仅包含于该类之中．只有满足这些条件，才能使用分类计数原理．

要理解分步计数原理，需要注意的是，“做一件事，完成它需要分成 n 个步骤”，这是指完成这件事的任何一种方法都要分成 n 个步骤．分步时，首先要根据这件事的特点确定一个分步的标准；其次，分步要满足如下要求：完成这件事必须且只需完成这 n 个步骤．只有满足这些条件，才能运用分步计数原理．

在教学中，教师要注意引导学生在列举大量实例的基础上展开讨论、研究和交流，以加深对分类计数原理和分步计数原理的理解．同时，引导学生正确区分两个计数原理．

4. 和提高版的教材相比较，删掉了用集合的观点来理解分类计数原理和分步计数原理，降低了知识的难度，更有利于学生对知识的理解和掌握．

11.2 概率初步

11.2.1 随机事件与样本空间

1. 本小节的主要内容是讲述随机现象、随机事件和样本空间这三个基本概念．随机现象是概率和统计研究的对象．随机事件和样本空间再加上后一节要学的概率，它们就可以全面地描述一个随机现象，它们是概率论中最基本、最重要的概念．学好它们是学习概率部分的关键．

2. 教材首先列举四个实例，由此让学生发现现实世界中不仅存在着确定性现象，而且还有大量的不确定性现象，从而引出了随机现象这一概念．这里可以让学生再举出一些随机现象的例子，以加深对随机现象概念的理解和认识，使他们清楚地认识到，概率部分所研究的对象不同于以前各章所研究的对象，且与它们有本质的区别．

所谓随机现象，就像做一个试验，这个试验有 $n(n>1)$ 种可能的结果，但每做一次试验，只出现这 n 种可能的结果中的一种，至于出现哪一种结果，在试验前是无法确定的．这是随机现象的一个重要特征，同时，这也说明随机现象这个名称中“随机”二字的含义．

3. 随机现象除了具有定义中所说的“事前不能完全确定，事后会出现各种可能结果之一”的特征外，它还有另一重要的特征，即“大数属性”．这一点教师应该清楚，以便更好地指导教学．

初学概率的人，对概率容易产生两个错觉：一个是把随机现象看成一种莫名其妙的现象，它有时出现这个结果，有时出现那个结果，毫无规律可言；另一个错觉是用一次预测的结果来衡量概率的功效．其实这两个错觉是出于同一根源，就是没有掌握随机现象的大数属性．由于过去学习、接触较多的是确定性现象，习惯于用确定性现象的思想方法思考问题，现在转入随机现象，必须用新的思想方法思考问题，思想上一时还没有转过来，以致产生这些错觉．

随机现象是有规律的，不过它的规律不是做一次、两次或少数几次的试验（或观察）

就能觉察出来，必须做“大数”次才能发现．上述第一个错觉就是因为没有从大数次观点观察问题，以致把随机现象看成毫无规律可言的现象．

在概率中，我们是用大数次观点观察问题、思考问题和理解问题的．概率的功效也应从大数次观点来理解．例如从一批次品率（次品出现的概率）为 0.03 的产品中任抽一件，在没察看以前，预测它是合格品，其准确性一般很高的．这是因为在大数次中，平均每 100 次有 97 次预测准确，而仅有 3 次不准确．再以掷一枚骰子为例，掷得 4 点的概率为$\frac{1}{6}$，预测一次掷得 4 点，在大数次中，平均每 6 次有 1 次准确，而有 5 次不准确．从以上两个例子来看，预测的准确性与随机现象本身的概率有关，若从大数次观点来理解，我们对概率的功效是没有怀疑的．

4. 在教学中不能把以上所说的随机现象的两个特征生硬地原原本本地教给学生，而应该让学生透彻地了解随机现象具有这两个特征及其特征的含义．初学概率的人往往觉得它不好懂，很难学，其实往往就是因为他没有很好地掌握这两个特征．

5. 一个样本空间是一个随机试验的一切可能结果的集合．对于这一概念，由于学生已具备了集合知识，学习起来不会有多少困难．关键是要使学生正确确定样本空间中所包含的元素，要做到既不重复也不遗漏．“样本空间”由试验的条件和试验的目的所确定．可以说，选择样本空间是建立一个概率模型的第一步．

例如，同时抛掷两枚质地均匀的硬币，若把两枚硬币看成一个是第一枚，另一个是第二枚，得样本空间

$$\Omega=\{(\text{正}，\text{正})，(\text{正}，\text{反})，(\text{反}，\text{正})，(\text{反}，\text{反})\}.$$

若不考虑两枚硬币的顺序问题，只考察两枚硬币的朝上一面的结果，其不同的结果只有 3 个，样本空间

$$\Omega=\{(\text{正}，\text{正})，(\text{正}，\text{反})，(\text{反}，\text{反})\}.$$

如果仅仅是要写抛掷两枚均匀硬币的样本空间，以上两种样本空间都应该是对的，但两个样本空间的本质是不同的．需要指出的是，第一个样本空间是古典概型，则第二个样本空间不是古典概型．

6. 本教材对随机事件的定义使用了集合语言，充分直观地揭示了随机事件与样本空间（随机试验的所有可能结果的集合）之间的关系．在这里随机事件不是最原始的概念，而是由更初级的概念所构成．

7. 如果一个事件包含了它所在的随机试验中所有可能的结果，那么这个事件肯定是必然事件．若一个事件不包含它所在的随机试验中的任何结果，那么这个事件就是不可能事件．我们把随机试验的结果定义为随机事件，实际上已经把必然事件和不可能事件看做随机事件的两种特殊情况了．

8. 学好随机试验、样本空间和随机事件是以后学习概率的基础，因此本小节的重点是样本空间和随机事件．难点是正确确定样本空间和随机事件中所包含的元素，要做到

不重复不遗漏.

11.2.2 古典概率

1. 古典概型是人们最早研究的一种概率模型. 它也是最简单，而且是最常用的一种基本概型，同时它又是解决某些较复杂概率问题的基础. 因此，古典概率是本小节，也是概率这一部分的重点，教学中必须给予充分重视.

最简单的古典概率问题可以用数数来解决，用它作为学习随机数学的起点是适宜的. 但由于本小节概念与学生原有知识、经验和思维习惯（或者说原有的认知结构）有较大的差距，因而，对古典概率有关概念的理解是难点.

2. 教材首先给出了两个简单具体的问题，引导学生从中分析、归纳、总结出一类具有共同特征的问题，引入古典概型. 这样安排的目的，一是便于学生理解有关概念；二是说明古典概率问题来源于实际，用以增强学生对数学理论来源于实践的认识，同时体现了数学建模思想，以培养学生应用数学的意识.

3. 判断一个随机试验是否为古典概型有两个条件：(1) 结果有限；(2) 各结果出现的机会均等. 特别是 (2) 这个等可能性，往往容易被忽视，从而得出错误的结果. 解决这一问题的办法是引导学生使用如下的解题步骤：

(1) 找出欲求其概率的事件 A，这一步要注意纠正把“事件”与“事件的概率”相混淆与表述上的错误；

(2) 弄清“试验”是什么；

(3) 判断试验的样本空间的是什么，基本事件个数是否有限，是否具有等可能性；

(4) 求试验的基本事件总个数；

(5) 求 A 包含的基本事件个数；

(6) 用定义求概率.

在教学中，最好结合例题加以讲解，引导学生自己总结出以上步骤.

4. 正确地确定样本空间是求古典概率的关键.

5. $P(A)=\frac{m}{n}$既是古典概率的定义，又是计算这种概率的基本方法，根据这个公式计算时，关键是判定产生事件 A 的随机试验是否是古典型的，即它所包含的基本事件是否有限、均等，然后再求出 n，m.

6. 概率客观地反映了随机事件发生的可能性的大小，这一结论应在给出古典概率的定义并讲解了几个例题之后，在学生对概率有了一定感性认识的基础上告诉学生. 实际上，事件的概率就是事件发生的可能性大小的一个数量刻画. 概率大，发生的可能性就大，概率小，发生的可能性就小. 这个数量是客观存在的，它反映了随机现象的本质属性，因此它又制约着随机事件发生的可能性的大小.

11.3 随机抽样

11.3.1 简单随机抽样

1. 教材在本小节的序言中通过具体的例子给学生介绍了样本、随机抽样的概念，并说明了抽样方法在统计学中所占的重要地位.

2. 在统计中涉及的抽样方法很多，教学时可通过学生熟知的实例，让学生了解抽样方法，在简单随机抽样中，可分为不放回抽样和放回抽样. 本章介绍的是不放回抽样.

3. 在学习简单随机抽样的定义时，应注意以下特点：

(1) 它要求被抽取样本的总体的个体数有限；

(2) 它是从总体中逐个地进行抽取，这样，就便于在抽样实践中进行操作；

(3) 它是一种不放回抽样. 由于抽样实践中多采用不放回抽样，使其具有较广泛的实用性，而且由于所抽取的样本中没有被重复抽取的个体，便于进行有关的分析和计算.

4. 当用简单随机抽样从含有 N 个个体的总体中抽取一个容量为 n 的样本时，在整个抽样过程中每个个体被抽到的可能性是相等的.

对于上面结论的一般情况，在教材中，只要求学生知道此结论，在教学中可不作引申.

5. 实施简单随机抽样，主要有两种方法：抽签法和随机数表法. 抽签法比较简单，学生比较熟悉，教材中介绍了用随机数表进行抽样的三个步骤：

第一步：将总体中的个体编号. 这里所谓的编号，实际上就是编数字号码. 例如将100个个体编号成00，01，02，…，99，而不是编号成0，1，2，…，99，以便于运用随机数表，此外，将起始号选为00，而不是01，可使100个个体都可用两位数字号码表示，否则将会出现三位数字号码100. 可见，这样确定起始号便于我们使用随机数表.

第二步：选定开始的数字. 为了保证所选定的数字的随机性，应在面对随机数表之前就指出开始数字的位置.

第三步：获取样本号码. 为便于操作，避免号码重复，可将总体中所有个体的数字号码先按顺序列出. 每抽出一个号码时，就在其中的相应号码中做一个记号，这样就知道后面得到的号码是否曾被取出.

11.3.2 系统抽样

1. 本小节的重点是通过实例了解系统抽样的方法.

2. 关于系统抽样，在教学中可强调如下几点：系统抽样适合于总体中的个体数较多的情况，因为这时采用简单随机数表很不方便；系统抽样与简单随机抽样之间存在着密切的关系，即在将总体中的个体均分后的每一段进行抽样时，采用的是简单随机抽样；与简单随机抽样一样，系统抽样也属于等可能抽样.

3. 在教科书的练习11-5中第2题涉及总体中的个体数不能被样本容量整除时，可先用简单随机抽样从总体中剔除几个个体，使剩下的个体能被样本容量整除，然后再按系统抽样进行.

11.3.3 分层抽样

1. 本小节的重点是通过实例了解分层抽样的方法.

2. 分层抽样在内容上与系统抽样是平行的. 在教学过程中强调：分层抽样适用于总

体由差异明显的几部分组成的情况；在每一层进行抽样时，采用简单随机抽样或系统抽样；分层抽样也是等可能抽样.

3. 建议将三种抽样方法的联系和区别作个总结．见下表：

类别	共同点	各自的特点	相互联系	使用范围
简单随机抽样	抽样过程中每个个体被抽到的可能性相等	从总体中逐个抽取		总体中的个体较少
系统抽样		将总体均分成几部分，按事先确定的规则在各部分抽取	在起始部分抽样时采用简单随机抽样	总体中的个体数较多
分层抽样		将总体分成几层，分层进行抽样	各层抽样时采用简单随机抽样或系统抽样	总体由差异明显的几部分组成

11.4 用样本估计总体

11.4.1 用样本的频率分布估计总体的分布

1. 本小节的重点是通过实例体会分布的意义和作用，在表示样本数据的过程中，学会列举出频率分布表、画频率折线图、茎叶图，体会它们各自的特点.

2. 在初中已经学习过把样本数据表示成频率分布表和频率分布直方图这样的图、表形式，从图表形式上直观地看出样本数据的分布情况．在教科书中，给出了列出频率分布表、频率分布直方图的步骤：

(1) 计算极差

教科书提供的样本数据中，最大值是 25.56，最小值是 25.24，它们的差为 25.56－25.24＝0.32，所以极差为 0.32.

(2) 决定组数与组距

课本上将 100 个样本数据分成 11 组，实际上分为 8～12 组均可，这样一来组距会发生变化.

(3) 决定分点

使分点与样本数据不重合，一般使分点比数据多一位小数，并且把第 1 小组的起点稍微小一点，那么，所分的 11 个小组可以是 [25.535，25.565]，[25.565，25.595] ……

(4) 列频率分布表

(5) 绘制频率分布直方图

3. 关于频率分布表和频率分布直方图，应向学生指出频率分布表中列出的是在各个不同小组内的取值频率，相应的直方图是用图形面积的大小来表示在各个小组内取值的频率.

4. 在得到上述一组数据的频率分布后，教科书介绍了频率分布与相应的总体分布的关系. 即频率分布将随着样本容量的增大更加接近总体分布，当样本容量无限增大且分组的组距无限缩小时，频率分布直方图就会演变成一条光滑的曲线——反映总体分布的总体密度曲线. 在教学中，可强调出，基于频率分布与相应的总体分布的关系，且通常我们并不知道一个总体的分布，因此我们往往是从总体中抽取一些样本，用样本的频率分布去估计相应的总体分布.

5. 在例题中还介绍了茎叶图，并指出了茎叶图的优点：一是从统计图上没有原始信息的损失，所有的数据信息都可以从茎叶图中得到；二是茎叶图可以在比赛时随时记录，方便记录与表示.

11.4.2　用样本的数字特征估计总体的数字特征

1. 本小节的重点是通过实例理解样本标准差的意义和作用，学会计算样本标准差. 本小节的难点是理解样本标准差的意义和作用，形成对数据处理过程进行初步评价的意识.

2. 在初中已经学过，平均数描述了数据的平均水平，定量的反映了数据的集中趋势所处的水平. 教科书以实例的方式解释了如何用样本的平均数估计总体的平均数.

3. 样本的频率分布直方图和样本的平均数都是用来估计总体的，它们之间的联系是，在频率分布直方图中，平均数是直方图的平衡点.

4. 标准差、方差都是估计总体的数字特征之一，它反映了数据的离散、波动的程度. 如果标准差较大，表明数据的波动程度较大，数据离散程度较大；如果标准差较小，数据离散程度较小.

5. 教科书中给出了标准差的算法，使学生养成分步计算的良好习惯. 同时，通过例题演示了如何借助计算器计算样本平均数和样本标准差. 在探索与研究中鼓励学生尝试使用软件来计算样本的数字特征，培养学生的动手操作能力和实践能力.

11.5　一元线性回归分析

一、两个变量间的相关关系

1. 本小节的重点是通过收集显示问题中两个有关联变量的数据作出散点图，并利用散点图直观认识变量间的相关关系.

2. 变量之间存在着两种关系：一类是函数关系，这是确定性的关系，例如正方形面积 S 与边长 x 之间的关系 $S=x^2$；一类是相关关系，这是非确定性关系，例如教科书中的家庭的年收入和年饮食支出的关系为不确定的随机变量相关关系，又如当研究一个学生的数学成绩和物理成绩的关系时，这两个变量也是不确定的随机变量相关关系. 本节主要研究两个变量间的相关关系.

3. 在现实生活中，相关关系是大量存在的. 从某种意义上看，函数关系是一种理想的关系模型，而相关关系是一种更为一般的情况，因此研究相关关系，不仅可使我们处理更为广泛的数学问题，还可使我们对函数关系的认识上升到一个新的高度.

4. 散点图直观的描述了两个变量之间有没有相关关系，教学中要指导学生作出散点图，并利用散点图直观认识两变量的相关关系.

二、两个变量的线性相关关系

1. 本小节的重点是经历用不同估算方法描述两个变量线性相关的过程. 能根据给出的线性回归方程系数公式建立线性回归方程.

2. 用具体的例子来解释线性回归容易理解，所以建议以实际例子引入，让学生用散点图直观认识两变量的相关关系，让学生尝试找到最佳的近似直线.

3. 求回归直线方程时，我们使用了配方法（最小二乘法）. 进一步说明，配方法在解决一些涉及二次多项式的问题时有着重要的作用.

4. 求回归直线方程，通常是用计算器来完成的. 在很多函数型科学计算器中，可通过直接按键得出线性回归方程的系数，教科书中给出了操作过程，而如果要用一般的科学计算器进行计算，则要像例 2 一样先列出相应的表格.

5. 回归一词是英国科学家高尔顿（Golton，1822—1911）于 1877 年第一次当成统计概念加以应用的. 高乐顿进行了一项研究，他统计了大量父母身高对子女身高的关系，其结果表明，高身材父母所生儿童的身高将回降到人的平均身高，因而，他选用了 Regression（回归）一词，统计学家采用它来描述根据已知变量预测另一变量的方法.

Ⅳ 参考教案

课题：11.3.1 简单随机抽样

教学目标：

知识目标：理解什么是简单随机抽样；会用简单随机抽样从总体中抽取样本.

能力目标：通过学习本节知识，提高学生对统计的认识，学生对应用教材知识解决实际问题的能力.

情感目标：结合教学内容培养学生学习数学的兴趣以及“用数学”的意识，激励学生勇于创新.

教学重点：

理解简单随机抽样的定义、掌握简单随机抽样的方法.

教学难点：

简单随机抽样的定义和特点.

教学方法：

从学生的认知规律出发进行启发、诱导、探索，运用讲授法、讨论法，阅读指导法等充分调动学生的积极性，发挥学生的主体作用. 在讲授过程中要善于解疑、设疑.

教学过程：

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
提出问题	同学们在小学和初中已经学过统计知识，这一章我们将进一步学习统计的有关内容，下面我们通过具体问题来学习. ［问题 1］某职业中专学生有 900 人，校医务室想对全校学生身高情况作一次调查，为了不影响正常教学，准备抽取 50 名学生作为调查对象. 你能帮助医务室设计一个抽取方案吗？	学生思考，讨论，看书研究. 教师根据学生的回答，恰当的启发，引导.	在感性认识基础上学习新的知识总是不完整、不全面，从具体问题入手有利于学生主动参与. 并为下面知识的进一步拓宽打下基础. 问题 1 有利于引导学生参与到教学中来，还提高了学生学习数学的兴趣. 并注意与平时抽样方法的类比，能确切地了解彼此之间的联系与区别.
概念引入	通过此例让学生回答以下几个问题： 什么是总体？个体？什么是样本？样本容量？ 我们一般把所考察对象的某一数值指标的全体构成的集合看做总体，构成总体的每一个元素作为个体. 从总体中抽出若干个体所组成的集合叫做样本. 样本中个体的数量叫做样本容量.	教师提出问题，铺垫复习学生思考、积极回答，允许相互讨论.	因为学生的学习是建立在认知结构上的，因此，新课前的复习既可加深对学过的知识的理解，又可为学习新知识埋下伏笔. 问题 1 旨在回忆以前学习的知识，使学生沉浸在老师提供的情景中.
概念形成	什么是抽样方法？ 抽样方法的本质就是从总体中抽取样本，使所抽取的样本能够更充分地反映总体的情况. ［问题 2］逐一检验小包装巧克力在实际操作中适合吗？能随便抽取吗？随便抽取的小包装巧克力得到的数据能客观地反映全部小包装巧克力的情况吗？ 如何抽取样本，直接关系到对总体估计的准确程度，因此抽样时要保证每一个个体都可能被抽到，即每一个个体被抽到的机会是均等的，满足这样条件的抽样是随机抽样. 通过此问题引出下一个问题：	让学生通过看书独立回答此问题. 教师追问，让学生独立处理，讨论解决此问题的方法，教师点拨、完善.	对从总体中抽取样本的概念应作广义理解：抽产品、调查学生的身高、抛硬币、射击等也应理解为抽样. 这样一方面破除学生的错误思考，另一方面容易继续思考以求得正确答案.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
概念形成	什么是简单随机抽样和简单随机样本？ 一般地，设一个总体含有 N 个个体，从中逐个不放回地抽取 n 个个体作为样本 ($n\leqslant N$)，如果每次抽取时总体中的各个个体被抽到的机会都相等，就把这种抽样方法叫做简单随机抽样．这样抽取的样本，叫做简单随机样本．	让学生思考、讨论、尝试，教师适时进行启发．	教师启发学生思考，一方面可以进一步明白简单随机抽样，另一方面加深对这类抽样方法的认识，有利于学生更好的理解．为后面进一步学习其他抽样方法打下基础．
应用举例	[问题 3] 介绍常用的简单随机抽样方法，用抽签法、随机数表法解决问题： (1) 抽签法 对个体编号，并把号码写在相同的号签上，后将号签放入盒中，从中抽取号签． (2) 随机数表法 事先制好随机数表，表中随机出现 0，1，2，…，9 十个数字，且表中每个位置上的数字都是等可能出现的． 分别用抽签法和随机数表法做本节课开始时提出的问题．	学生口答，教师对学生的回答进行评价． 学生练习，在整个练习过程中，教师做好课堂巡视，加强对学生个别指导．	通过这一例题，使学生明白，简单随机抽样为什么是公平的，使学生建立起完整、准确的知识结构． 在讨论的过程中，使学生领会客观世界处于运动、变化的无限发展过程中，培养学生的逻辑思维能力和语言表达能力．
概念深化	[问题 4] 请你归纳简单随机抽样的特点． 根据简单随机抽样的定义，可以看到有以下特点： (1) 它要求被抽取样本的总体的个体数有限．这样，便于通过随机抽取的样本对总体进行分析． (2) 它是从总体中逐个地进行抽取．这样，便于在抽样实践中进行操作． (3) 它是一种不放回抽样．由于抽样实践多采用不放回抽样，使其具有较广泛的实用性，而且由于所抽取的样本中没有被重复抽取的个体，便于进行有关的分析和计算．	教师讲授，让学生思考． 让学生自行总结，教师补充．	对简单随机抽样有一个较为深刻的认识，明确此概念的内涵与外延，否则会产生歧义．讲解此概念的特点便于及时巩固．

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
归纳总结	（1）简单随机抽样的定义； （2）简单随机抽样的特点； （3）简单随机抽样的实施方法和步骤.	先请一位同学总结，其他同学补充，教师完善，用多媒体展示出来.	巩固本节课所学知识，培养学生运用所学知识、方法解决实际问题的能力，并使学生对本节课的知识研究线索有一个全面的认识，掌握研究方法，为今后学习其他知识奠定基础.
课后作业	练习 11-4　1，2，3.		（1）巩固知识，发现和弥补教学中的不足； （2）培养学生自觉学习的习惯和探索精神，提高学生综合运用数学知识的能力； （3）通过练习，主要发现学生掌握新知识的程度，教师及时调控、讲评，帮助学生完善认知结构.

Ⅴ　习题答案、提示和解答

练习 11-1

1. （1）9；　（2）7；　（3）15；　（4）6.

2. 120.

3. 24.

4. 12.

5. （1）6；　（2）20；　（3）25.

练习 11-2

1. （1）{发芽，不发芽}；　（2）{胜，负}；　（3）{0，1，2，3，4，5}.

2. （1）36；

（2）包含三个基本事件：（4，6），（6，4），（5，5）；

（3）包含三个基本事件：（5，6），（6，5），（6，6）.

练习 11-3

1. （1）$\frac{1}{2}$；　（2）$\frac{1}{6}$.

2. (1) $\frac{7}{15}$； (2) $\frac{7}{15}$； (3) $\frac{8}{15}$.

3. $\frac{3}{5}$.

练习 11-4

1. (1) 抽签法能够保证总体中任何个体都以相同的概率被选到样本之中，因此保证了样本的代表性；

(2) 随机数表法能代替抽签法；

(3) 与抽签法相比，随机数表法抽取样本的主要优点是节省人力、物力、财力和时间，缺点是所产生的样本不是真正的简单样本；

(4) 抽样调查和普查的比较见下表：

抽样调查	普查
节省人力、物力和财力	需要大量的人力、物力和财力
可以用于带有破坏性的检查	不能用于带有破坏性的检查
结果与实际情况之间有误差	在操作正确的情况下，能得到准确结果

抽样调查的好处是节省人力、物力和财力，可能出现的问题是推断的结果与实际情况之间有误差. 如抽取的部分个体不能很好地代表总体，那么我们分析出的结果就会有偏差.

2. (1) 抽签法：对职业中专一年级全体学生 500 人进行编号，将学生的名字和对应的编号分别写在卡片上，并把 500 张卡片放入一个容器中，搅拌均匀后，每次不放回地从中抽取一张卡片，连续抽取 50 次，就得到参加这项活动的 50 名学生的编号.

(2) 随机数表法：

第一步：先将 500 名学生编号，可以编为：000，001，…，499.

第二步：在随机数表中任选一个数，例如选出第 2 行第 7 列的数 2（为了便于说明，下面摘录了附表的第 2～7 行）.

43 021	92 980	27 768	26 916	27 783	84 572	78 483	39 820
61 459	39 073	79 242	20 372	21 048	87 088	34 600	74 636
63 171	58 247	12 907	50 303	28 814	40 422	97 895	61 421
42 372	53 183	51 546	90 385	12 120	64 042	51 320	22 983
81 500	13 219	57 941	74 927	32 798	98 600	55 225	42 059
59 408	66 368	36 016	26 247	25 967	49 487	26 968	86 021

第三步：从选定的数 2 开始向右读，得到一个三位数 298，由于 298<499，说明号码 298 在总体内，将它取出；继续向右读，得到 027，由于 027<499，说明号

码 027 在总体内，将它取出；继续向右读，得到 768，由于 768>499，说明号码 768 不在总体内，将它去掉. 按照这种方法继续向右读，读出的三位数不大于 499 且不与前面取出的数重复，就把它取出，否则就跳过不取，依次下去，直到样本的 50 个号码全部取出，这样我们就得到了参加这项活动的 50 名学生.

3. 随机数表法：(用教材附表)

第一步：先将 730 名居民编号，可以编为：001，002，…，730.

第二步：在随机数表中任选一个数，例如选出第 2 行第 2 列的数 3（为了便于说明，下面摘录了附表的第 2～7 行).

43 021	92 980	27 768	26 916	27 783	84 572	78 483	39 820
61 459	39 073	79 242	20 372	21 048	87 088	34 600	74 636
63 171	58 247	12 907	50 303	28 814	40 422	97 895	61 421
42 372	53 183	51 546	90 385	12 120	64 042	51 320	22 983
81 500	13 219	57 941	74 927	32 798	98 600	55 225	42 059
59 408	66 368	36 016	26 247	25 967	49 487	26 968	86 021

第三步：从选定的数 3 开始向右读，得到一个三位数 302，由于 302<730，说明号码 302 在总体内，将它取出；继续向右读，得到 192，由于 192<730，说明号码 192 在总体内，将它取出；按照这种方法继续向右读，读出的三位数不大于 730 且不与前面取出的数重复，就把它取出，否则就跳过不取，依次下去，得数据：302，192，277，682，691，627，727，339，614，593，379，242，203，722，104，088，346，007，463，663，171，582，471，290，303，编号为以上所选的 25 个号码的居民被选中.

练习 11-5

1. 系统抽样的优点是：

(1) 简便易行；

(2) 当对总体结构有一定了解时，充分利用已有信息对总体中的个体进行排队后再抽样，可提高抽样效率；

(3) 当总体中的个体存在一种自然编号（如生产线上产品的质量控制）时，便于实施系统抽样法.

系统抽样的缺点是在不了解样本总体的情况下，所抽出的样本可能有一定的偏差.

2. (1) 对 120 名教师进行编号；

(2) 计算间隔 $k=\dfrac{120}{14}\approx 8.57$，由于 k 不是一个整数，我们从总体中随机剔除 8 个样本，再进行系统抽样. 例如我们随机剔除了 2，44，51，56，117，90，119，15 这 8 名教师，然后再对剩下的 112 名教师进行编号，计算间隔 $k=8$；

(3) 在 1～8 之间随机选取一个数字，例如 3，将 3 加上间隔 8 得到第 2 个个

体编号 11，再加 8 得到第 3 个个体编号 19，依次进行下去，直到获取整个样本.

3. 由于身份证（18 位）的最后一位表示性别，后三位 321 的观众全部是男性，所以这样获得的调查结果不能代表女性观众的意见，因此缺乏代表性.

练习 11-6

1. （1）略；

（2）这种说法有道理. 因为一个好的抽样方法应该能够保证随着样本容量的增加，抽样调查结果会接近于普查的结果. 因此，只要根据误差的要求取相应容量的样本进行调查，就可以节省人力、物力和财力.

2. 能够发现结果大致相同.

3. 第一步，在城市、县镇、农村按比例分层抽样；

第二步，分别在城市、县镇、农村按照系统抽样（也可以按照简单随机抽样）.

这样获得样本即可.

4. 可以用分层抽样的方法进行抽样. 将玉米地按照气候、土质、田间管理水平的不同而分成不同的层，然后按照各层玉米地的面积比例及样本容量确定各层抽取的面积，再在各层中抽取个体（这里的个体是单位面积的一块地）.

练习 11-7

1. （1）略；（2）略；（3）65%；（4）与图 11-4 相比，形状大体一致（都是正态分布）.

2.

甲		乙
6	7	499
76654321	8	024599
0	9	1

甲小组的成绩更整齐些.

3. 略.

练习 11-8

1. $s^2=3.8$，$s=1.949\,35$.

2. $\overline{x}=99.92$，$s=1.129$.

3. $\overline{x}=22.351$，$s=0.017$.

4. $s_{\text{甲}}=0.103\,966\,34$，$s_{\text{乙}}=0.156\,0$. 甲比较稳定.

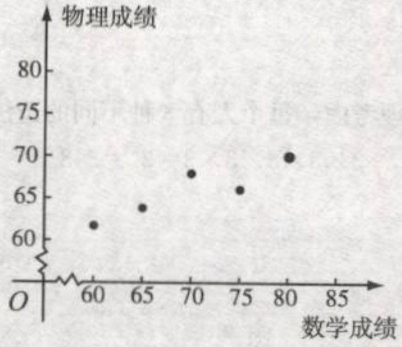
5. （1）由于学生分组不同，直方图有所不同. 频率分布直方图略.

（2）$\overline{x}=170.1$，$s=5.608$.

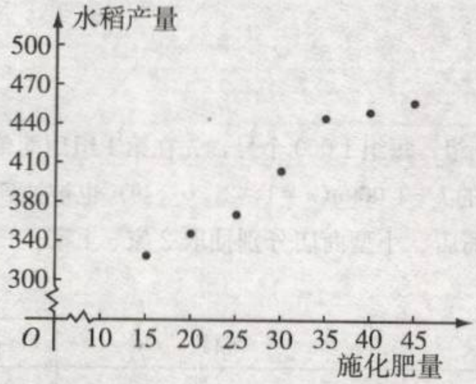
（3）落入区间的数据是 36 个，约占 72%.

练习 11-9

1. 具有相关关系.



2. 具有相关关系.



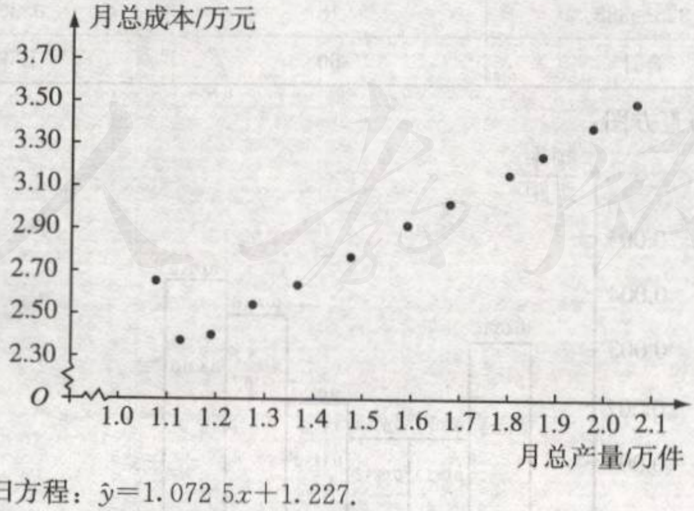
3. 散点图略. 不具有相关关系.

练习 11-10

1. b 意义是：变量 x 每增加一个单位，变量 y 的平均增加量.

2. $\hat{y}=3.474x+0.89$.

3. (1) 散点图如图：



(2) 回归方程：$\hat{y}=1.0725x+1.227$.

4. 回归方程：$\hat{y}=-0.1024x+206.43$.

习题十一

1. （1）12；（2）35.

2. 提示：按分步计数原理考虑，每个人有 3 种不同的选法.

$$3\times3\times3\times3\times3=3^5=243.$$

3. 100.

4. 6 720.

5. 7 200.

6. $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

7. $\frac{1}{3}$.

8. 略.

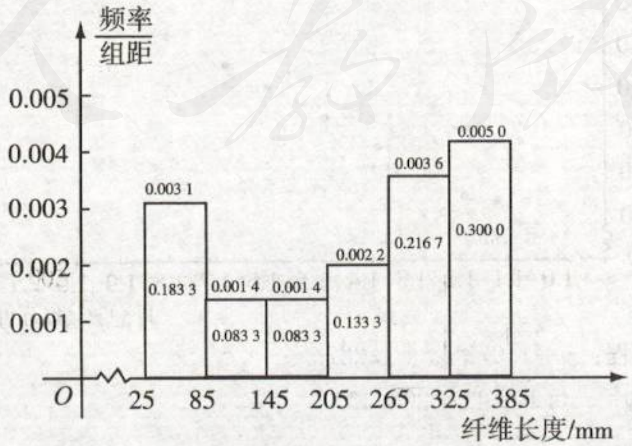
9. 按编号顺序分成 10 组，每组 1 000 个号，先在第 1 组用简单随机抽样方式抽出 $k(0\leqslant k\leqslant 999)$ 号，其余的 $k+1\ 000n(n=1, 2, \cdots, 9)$ 也被抽到，即可得所需样本.

10. 大型商店、中型商店、小型商店分别抽取 2 家、4 家、15 家.

11. 频率分布表：

分组	频数	频率
25～85	11	0.183 333
85～145	5	0.083 333
145～205	5	0.083 333
205～265	8	0.133 333
265～325	13	0.216 667
325～385	18	0.300 000
合计	60	1.000 00

频率分布直方图：



12. $\overline{x}=206.45$，$s=10.632$.

13. （1）这批炮弹的射程，每个炮弹的射程，这 10 发炮弹的射程，10；

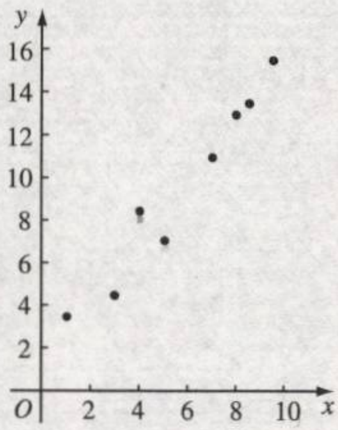
（2）$\overline{x}=5\ 319.1$，$s=18.239\ 79$.

14. （1）按照学生不同的分组情况，直方图有所不同，直方图略；

（2）$\overline{x}=159.6$，$s=4.7$；

（3）落入区间的数据是 48 个．约占 96%.

15. （1）散点图如图：



（2）回归方程：$\hat{y}=1.437\ 5x+1.296\ 9$.