职　业　教　育　规　划　教　材
三年制中职

数　学

人民教育出版社　课程教材研究所
职业教育课程教材研究开发中心　编著

第二册

人民教育出版社
·北京·

主　　编：龙正武
本册主编：刘心灵　祁志卫
本册副主编：李增华　崔东芳　杜红梅　张新敏
其他参编人员：王　琳　臧会圣　宋晓君　李宗芹　孙　傈　姜永靓
尉玉杰　马小燕

美术编辑：李　媛
书籍设计：李　媛

图书在版编目(CIP)数据

三年制中职数学. 第二册/人民教育出版社课程教材研究所职业教育课程教材研究开发中心编著. —北京：人民教育出版社，2020.1
ISBN 978-7-107-34469-5

Ⅰ. ①三…　Ⅱ. ①人…　Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—教材　Ⅳ. ①G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 015145 号

职业教育规划教材　三年制中职　数学　第二册

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　×××印装
版　　次　　年　月第 1 版
印　　次　　年　月第　次印刷
开　　本　毫米×　毫米　1/16
印　　张
字　　数　　千字
定　　价　　元

出版说明

为了贯彻全国职业教育工作会议精神，落实《教育部关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见》《教育部关于深化职业教育教学改革全面提高人才培养质量的若干意见》等文件的要求，遵照山东省教育厅关于教材开发的有关规定，人民教育出版社课程教材研究所职业教育课程教材研究开发中心发扬科学、严谨的传统作风，组织职教专家、教研员和有丰富教学实践经验的教师，对山东省职业教育教材进行了规划和建设，以适应山东省职业教育改革和发展的需要.

本套教材是严格按照山东省教育厅组织专家制定的课程标准编写的，从 2018 年秋季开学起，陆续提供给山东省的职业院校选用.

本套教材的开发坚持贯彻“以立德树人为根本、以服务发展为宗旨、以促进就业为导向”的职业教育理念，力图将职业道德、工匠精神和企业文化等融入教材当中. 教材编写过程中，坚持体现学生的主体地位，使教材内容的呈现方式符合学生的认知规律和职业成长规律，有关栏目设置符合学生的能力水平和教学需要，从而达到激发学生学习兴趣的目的，使得学生想学、乐学、能学、会学.

希望各地、各有关职业院校在使用本套职业教育规划教材的过程中，注意总结经验，及时提出修改意见和建议，使教材不断得到完善和提高.

2018 年 3 月

编者寄语

亲爱的同学，欢迎你步入一个新的学习阶段！

著名数学家华罗庚曾经说过：宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在，凡是出现量的地方就少不了用数学. 马克思说：一种科学只有成功地运用数学时，才算到达完美的地步. 从古希腊的巴特农神庙，到米洛斯的维纳斯雕塑，再到大自然的艺术品——海螺、蜗牛的外形，无不展示着黄金分割的美；从遗传学的生命奥秘，到社会经济的发展，再到海王星的发现、哈雷彗星的登场、空间站的建立……处处散发着数学的芬芳.

社会的发展和科技的进步，需要必要的数学知识和技能，更需要我们高尚的道德情操、浓烈的家国情怀. 让我们从大处着眼、小处入手，对生活中的现象进行数学抽象和直观想象，经过逻辑推理、数据分析、数学运算和数学建模，在解决问题的同时，不断提升自己的数学素养. 数学能集中、强化人的注意力，帮助大家养成独立思考的习惯、锻炼独立工作的能力、开发自主创新的意识. 数学的精神、数学的思维、数学的研究方法，已成为人们认识世界的基本素养和关键能力之一.

本套教材不仅告诉你数学的基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验，而且能帮助大家获得运算和处理数据的能力、识读空间图形位置关系的能力、逻辑推理能力和抽象概括能力. 所有这些，将为你学习专业知识和专业技能奠定基础.

亲爱的同学们，数学本身与大自然一样，充满着神奇与奥秘. 让我们怀着求知与探索的欲望，投入有关数学学习的活动中吧！只要你不忘初心，持之以恒，数学的美就会展现在你的眼前，探究的愉悦会让你欲罢不能，醍醐灌顶的体验会让你兴奋不已. 俗话说，“好的开端，就是成功的一半”，让我们满怀信心，共同努力，一起步入数学的殿堂，体验学习数学的快乐吧！

2018 年 3 月

目 录

第七章
三角函数

当你坐上匀速转动的摩天轮，尽情享受其中的乐趣时，你有没有想过：在摩天轮周而复始的转动中，包含着哪些数学知识？

数学是一种别具匠心的艺术.

——哈尔莫斯

缺乏必要的数学知识，就无法理解最简单的自然现象；若要深入洞察自然奥秘，那就非得同时研究数学方法不可.

——杨格

现实世界中的许多运动和变化周而复始，呈现出一定的周期性，如四季轮回、日夜更替、潮汐变化等等. 三角函数是研究周期变化现象的重要工具，同时，它在力学、工程学及无线电学等领域中也有着广泛的应用.

7.1 任意角的概念与弧度制

初中我们学习了角的概念，角的大小一般不超过一个周角（即 360°）. 但在现实生活中，有很多角超出了 [0°，360°) 这一范围，为了描述这些角，我们把角的概念加以推广.

7.1.1 任意角的概念

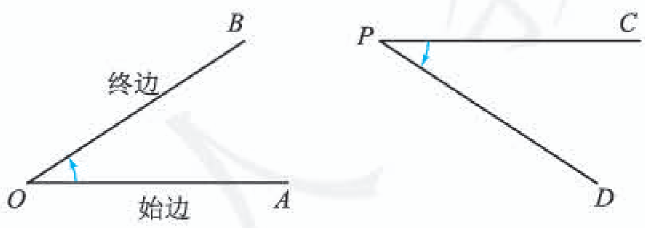
问题　观察钟表的指针（如图 7－1 所示）：

(1) 从上午 10 点到中午 12 点，钟表的分针转过了多少度？

(2) 若钟表快了 1 小时，你如何转动分针，将其校准呢？

图 7－1

我们知道，角可以看作平面内一条射线绕着它的端点旋转而成的图形. 射线的端点称为角的**顶点**，在旋转开始位置处的射线称为角的**始边**，在旋转终止位置处的射线称为角的**终边**. 在平面内，如图 7－2 (1) 所示，射线 OA 绕其端点 O 逆时针旋转到 OB 的位置所形成的角记作$\angle AOB$，其中点 O 是角的顶点，射线 OA 是角的始边，射线 OB 是角的终边.



(1)　　　　(2)

图 7－2

> **想一想**
>
> 如图 7－2 (2) 所示，射线 PC 绕其端点 P 按顺时针方向旋转到 PD 的位置所形成的角应怎样记？这个角的始边和终边分别是什么？

在平面内，一条射线绕着它的端点旋转时有两个方向，即顺时针方向和逆时针方向. 一般地，平面内一条射线绕着它的端点，逆时针方向旋转而成的角称为**正角**；顺时针方向旋转而成的角称为**负角**；当射线没有旋转时，我们也把它看成一个角，称为**零角**.

这样，我们就把角的概念推广到了任意角，包括正角、负角和零角.

在上述问题中，从 10 点到 12 点，钟表的分针转过的角度为－720°；若钟表快了 1 小时，可将分针逆时针旋转一周进行校准，分针转过的角度为 360°.

在作图时，我们常用带箭头的弧来表示旋转生成的角. 例如，图 7－3 中，$\alpha=$

$450°$，$\beta=-630°$.

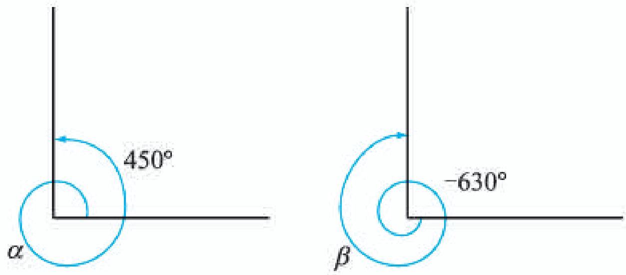


图 7-3

我们通常在平面直角坐标系中讨论角，且认为角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合. 那么，角的终边落在第几象限，我们就说这个角是第几象限角. 如果角的终边落在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限. 如图 7-4 所示，$120°$角是第二象限角，$-30°$角是第四象限角，$90°$角不属于任何象限.

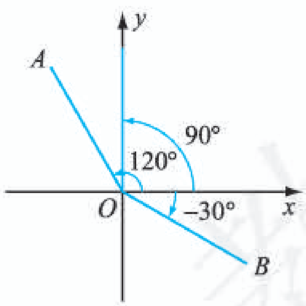


图 7-4

试一试

在平面直角坐标系中分别作出 $225°$和 $-60°$角，并指出它们是第几象限角.

问题 如图 7-5 所示，在同一平面直角坐标系中分别作出了 $30°$，$390°$，$-330°$角，观察这三个角，它们有什么共同的特征?

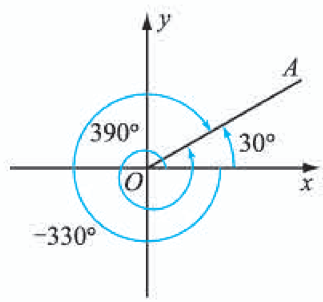


图 7-5

可以看出，$390°$，$-330°$角的终边与 $30°$角的终边相同. 同样，我们还可以作出 $750°$，$-690°$角，等等，它们的终边也与 $30°$角的终边相同.

注意到

$$390°=30°+1\times360°,$$
$$750°=30°+2\times360°,$$
$$-330°=30°+(-1)\times360°,$$
$$-690°=30°+(-2)\times360°,$$

可以归纳得到，与 $30°$角的终边相同的角组成的集合为

$$S=\{x\,|\,x=30°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

一般地，与角 α 的终边相同的角组成的集合为

$$S=\{x \mid x=\alpha+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

试一试

请你再举出几个与 30° 角的终边相同的角.

例 1 写出与下列各角终边相同的角的集合，并指出它们是哪个象限的角：

(1) 58°； (2) -225°.

解：(1) 与 58°角终边相同的角的集合为

$$S_1=\{x \mid x=58^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\},$$

因为 58°角是第一象限角，所以集合 S_1 中的角都是第一象限角.

(2) 与-225°角终边相同的角的集合为

$$S_2=\{x \mid x=-225^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\},$$

因为-225°角是第二象限角，所以集合 S_2 中的角都是第二象限角.

例 2 在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 内，找出与下列各角终边相同的角，并分别判定它们各是哪个象限的角：

(1) -120°； (2) 640°； (3) -950°.

解：(1) 因为$-120^\circ=240^\circ-360^\circ$，所以$-120^\circ$角与 240°角的终边相同，它是第三象限角.

(2) 因为 $640^\circ=280^\circ+360^\circ$，所以 640°角与 280°角的终边相同，它是第四象限角.

(3) 因为$-950^\circ=130^\circ-3\times 360^\circ$，所以$-950^\circ$角与 130°角的终边相同，它是第二象限角.

例 3 写出第一象限角的集合.

解：因为在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 内，第一象限角的取值范围是 $0^\circ<x<90^\circ$，所以第一象限角的集合是 $\{x \mid k\cdot 360^\circ<x<90^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

练习 7.1.1

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 第一象限角是锐角；

(2) 第一象限角是正角；

(3) 锐角是第一象限角；

(4) 小于 90°的角是锐角；

*(5) 终边相同的角相等.

2. 从中午 12 点到下午 3 点，钟表的时针和分针分别旋转了多少度？

3. 在平面直角坐标系中分别作出下列各角，并指出它们是哪个象限的角：

(1) $60°$；　(2) $-120°$；　(3) $420°$；

(4) $-300°$；　(5) $-210°$；　(6) $690°$.

*4. 写出与下列各角终边相同的角组成的集合，并指出它们是哪个象限的角：

(1) $45°$；　(2) $-50°$；　(3) $-135°$.

*5. 在 $[0°, 360°)$ 内，找出与下列各角终边相同的角，并判定它们是哪个象限的角：

(1) $-45°$；　(2) $760°$；　(3) $-480°$；　(4) $1\,230°$.

*6. 填写下表.

	角的集合
第一象限角	
第二象限角	
第三象限角	
第四象限角	

*7. 写出终边分别在 x 轴和 y 轴上的角的集合.

7.1.2　弧度制

度量长度可以用米、尺、码等不同的单位，度量速度可以用米/秒、千米/小时、海里/小时等不同的单位，不同的单位制为解决问题带来了方便.

在角度制中，把圆周等分成 360 份，则每一份圆弧所对的圆心角是 1 度的角. 在数学和其他学科中还有另一种度量角的制度——弧度制.

在弧度制中，我们把等于半径长的圆弧所对的圆心角称为 **1 弧度**的角.

> **读一读**
>
> 在角度制中，规定：$1° = 60'$，$1' = 60''$.

例如，如图 7－6（1）所示，$\overset{\frown}{AB}$的长等于半径 r，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角就是 1 弧度的角，弧度记作 rad，即$\angle AOB = 1$ rad. 这种以弧度为单位来度量角的制度称为**弧度制**.

若圆的半径为 r，$\overset{\frown}{AB}$的长等于 $2r$，如图 7－6（2）所示，则$\angle AOB = 2$ rad.

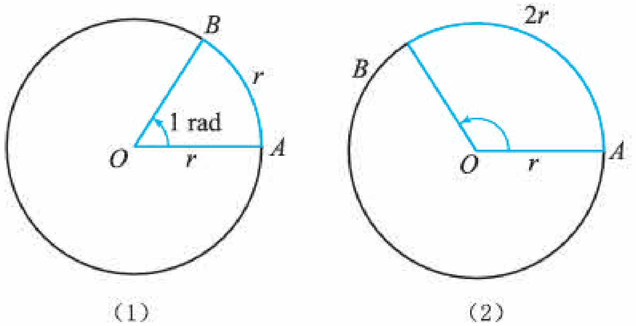


图 7-6

读一读

公元 6 世纪，印度人在制作正弦表时，曾用同一单位度量半径和圆周，孕育着最早的弧度制的思想. 欧拉是明确提出弧度制思想的数学家.

设在半径为 r 的圆中，长为 l 的弧所对的圆心角（正角）为 α rad，则

$$\alpha=\frac{l}{r}.$$

由于角有正负之分，我们规定：**正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零.**

想一想

在半径不同的同心圆中，同一个圆心角所对的圆弧长与相应的半径之比是否相等?

因为半径为 r 的圆的周长为 $2\pi r$，所以周角的弧度为

$$\frac{2\pi r}{r}=2\pi \text{ rad},$$

又因为周角的大小为 360°，于是

$$360^\circ=2\pi \text{ rad},$$
$$180^\circ=\pi \text{ rad}.$$

从上述关系出发，我们可以得到角度制与弧度制之间的换算关系为

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{ rad}\approx 0.017\ 45 \text{ rad},$$

$$1 \text{ rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57.3^\circ=57^\circ 18'.$$

角的概念推广后，在弧度制下，每一个角都有唯一的一个实数（即这个角的弧度数）与其对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角与其对应.

例 4 把下列各角度化为弧度：

(1) 75°； (2) -120°； (3) $67^\circ 30'$.

解：(1) $75^\circ=75\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{12}$ rad.

(2) $-120^\circ=-120\times\frac{\pi}{180}=-\frac{2\pi}{3}$ rad.

(3) 因为 $67^\circ 30'=\left(\frac{135}{2}\right)^\circ$，所以

$$67°30' = \frac{135}{2} \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{8}\ \text{rad}.$$

今后我们在用弧度制表示角的时候，“弧度”二字或 rad 通常可以略去不写．例如，$\alpha=2$ 表示 $\alpha=2$ rad.

例 5 把下列各弧度化为角度：

(1) $\frac{3\pi}{5}$；　　(2) $-\frac{5\pi}{4}$.

解：(1) $\frac{3\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=108°$.

(2) $-\frac{5\pi}{4}=-\frac{5\pi}{4}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=-225°$.

一些常用特殊角的角度与弧度的对应值表如下：

角度	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

例 6 使用函数型计算器，把下列角度化为弧度（精确到 0.01）：

(1) $67°$；　　(2) $-86°$.

解：首先将计算器置于 RAD（以弧度为单位）的计算状态：

操作	显示
SHIFT 设置 2 2	R

(1)

操作	显示
67 OPTN 2 1 = S⇔D	1. 169370599

所以$67°\approx1.17$.

(2)

操作	显示
−86 OPTN 2 1 = S⇔D	−1. 500983157

所以$-86°\approx-1.50$.

例 7 使用函数型计算器，把下列弧度化为角度（精确到 $0.01°$）：

（1）1.2；（2）-3.5.

解： 首先将计算器置于 DEG（以度为单位）的计算状态：

操作	显示
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{设置}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$	$\boxed{\text{D}}$

（1）

操作	显示
1.2 $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$	68.75493542

所以 $1.2\approx 68.75°$.

（2）

操作	显示
-3.5 $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$	-200.5352283

所以 $-3.5\approx -200.54°$.

练习 7.1.2

1. 将下列角度化为弧度：

（1）$135°$；（2）$1\ 080°$；（3）$-270°$；（4）$-330°$.

2. 将下列弧度化为角度：

（1）$\frac{\pi}{3}$；（2）$-\frac{\pi}{2}$；（3）$\frac{5\pi}{6}$；（4）$-\frac{2\pi}{3}$.

3. 使用函数型计算器，将下列弧度化为角度或把角度化为弧度（结果保留两位小数）：

（1）1 rad，3 rad，5.2 rad；（2）$83°$，$138°$，$278°$.

4. 圆的一条弦的长度等于半径，这条弦所对的圆心角（正角）是多少度？是多少弧度（精确到 0.01）？

7.2　任意角的三角函数

在初中，我们已经学过用直角三角形定义锐角的三角函数．如图 7－7 所示，在 Rt△OAB 中，已知 $OA=\sqrt{3}$，$AB=1$，$OB=2$，设$\angle AOB=\alpha$，则

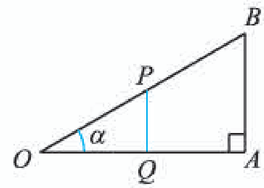


图 7－7

$$\sin\alpha=\frac{AB}{OB}=\frac{1}{2}，\cos\alpha=\frac{OA}{OB}=\frac{\sqrt{3}}{2}，$$

$$\tan\alpha=\frac{AB}{OA}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

如果在斜边 OB 上取一点 P，使 $OP=1$，过点 P 向 OA 引垂线，垂足为 Q，因为 Rt△OQP 与 Rt△OAB 相似，所以 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值不发生变化.

1. 任意角的三角函数的定义

问题　在平面直角坐标系中，如何用锐角的终边上点的坐标来表示其三角函数呢？

如图 7－8 所示，在锐角 α 的终边上取点 $P(a，b)$，使$|OP|=1$，我们不难发现

$$\sin\alpha=\frac{|PQ|}{|OP|}=\frac{b}{1}=b，$$

$$\cos\alpha=\frac{|OQ|}{|OP|}=\frac{a}{1}=a，$$

$$\tan\alpha=\frac{|PQ|}{|OQ|}=\frac{b}{a}.$$

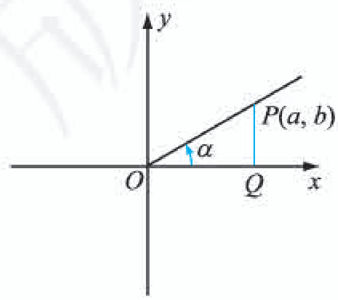


图 7－8

我们把半径为 1 的圆称为**单位圆**.

上述点 P 就是角 α 的终边与单位圆的交点，因此，锐角三角函数可以用单位圆上点的坐标表示.

同样地，我们可以利用单位圆定义任意角的三角函数.

设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x，y)$，如图 7－9 所示，那么：

(1)　y 称为角 α 的**正弦**，记作 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=y$；

(2)　x 称为角 α 的**余弦**，记作 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=x$；

(3)　$\frac{y}{x}$称为角 α 的**正切**，记作 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$ $(x\neq0)$.

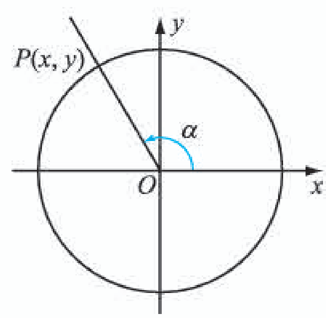


图 7－9

依据上述定义，对于每一个确定的角 α，都分别有唯一确定的正弦和余弦与之对应；当 α 的终边在 y 轴上，也就是 $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\tan\alpha$ 没有意义，除此以外，对于每一个确定的角 α，

都有唯一确定的正切与之对应.

以上这三个对应法则都是以角 α 为自变量的函数，分别称为角 α 的**正弦函数**、**余弦函数**和**正切函数**.

读一读

1631 年，邓玉函、汤若望与徐光启编译的《大测》一书，将 sinus 译成正半弦或前半弦，简称正弦，此即我国正弦一词的来源.

例 1 求下列角的正弦、余弦和正切值：

(1) $\frac{\pi}{2}$； (2) π.

解：(1) 如图 7-10 所示，角 $\frac{\pi}{2}$ 的终边与 y 轴的正半轴重合，它与单位圆的交点为 $A(0, 1)$. 这时 $x=0$，$y=1$，所以

$$\sin\frac{\pi}{2}=y=1,\ \cos\frac{\pi}{2}=x=0,\ \tan\frac{\pi}{2}\text{不存在}.$$

(2) 如图 7-11 所示，角 π 的终边与 x 轴的负半轴重合，它与单位圆的交点为 $B(-1, 0)$. 这时 $x=-1$，$y=0$，所以

$$\sin\pi=y=0,\ \cos\pi=x=-1,\ \tan\pi=\frac{y}{x}=0.$$

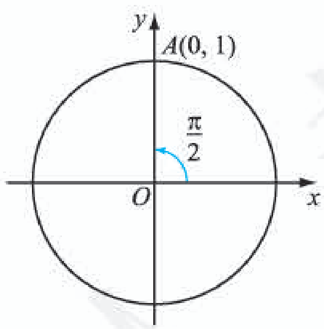


图 7-10

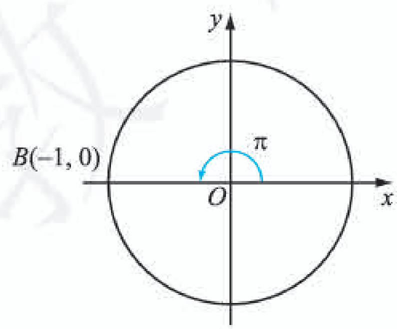


图 7-11

例 2 已知角 α 的终边经过点 $P(-3, 4)$，求角 α 的正弦、余弦和正切值.

分析：如图 7-12 所示，由 $\triangle POM \backsim \triangle P_0OM_0$，可求出相应的三角函数值.

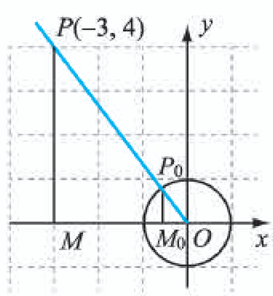


图 7-12

解：由已知可得

$$|OP|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5.$$

如图 7-12 所示，设角 α 的终边与单位圆交于点 $P_0(x, y)$，分别过点 P，P_0 作 x 轴的垂线 PM，P_0M_0，则

$$|PM|=4,\ |P_0M_0|=y,$$
$$|OM|=3,\ |OM_0|=-x,$$

且有

$$\triangle POM \backsim \triangle P_0OM_0,$$

于是

$$\sin\alpha=y=\frac{y}{1}=\frac{|M_0P_0|}{|OP_0|}=\frac{|MP|}{|OP|}=\frac{4}{5};$$

$$\cos\alpha=x=\frac{x}{1}=\frac{-|OM_0|}{|OP_0|}=-\frac{|OM|}{|OP|}=-\frac{3}{5};$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}.$$

用函数型计算器可以方便、准确、快速地求出任意角的三角函数值. 但需要注意的是，如果求以度为单位的三角函数值，应将计算器置于 DEG（以度为单位）的计算状态；如果求以弧度为单位的三角函数值，应将计算器置于 RAD（以弧度为单位）的计算状态.

例 3 利用函数型计算器求下列三角函数值（精确到 0.01）：

（1）$\sin 405°$；（2）$\cos 63°52'41''$；（3）$\tan(-400°30')$.

解： 首先将计算器置于 DEG（以度为单位）的计算状态：

操作	显示
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{设置}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$	$\boxed{\text{D}}$

（1）

操作	显示
$\boxed{\sin}$ 405 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{S}\Leftrightarrow\text{D}}$	0.707106781

所以 $\sin 405°\approx 0.71$.

（2）

操作	显示
$\boxed{\cos}$ 63 $\boxed{°\ '\ ''}$ 52 $\boxed{°\ '\ ''}$ 41 $\boxed{°\ '\ ''}$ $\boxed{=}$	0.440283085

所以 $\cos 63°52'41''\approx 0.44$.

（3）

操作	显示
$\boxed{\tan}$ -400 $\boxed{°\ '\ ''}$ 30 $\boxed{°\ '\ ''}$ $\boxed{=}$	-0.854080685

所以 $\tan(-400°30') \approx -0.85$.

例 4 利用函数型计算器求下列三角函数值（精确到 0.01）：

(1) $\sin 1.2$； (2) $\cos\left(-\dfrac{27\pi}{4}\right)$； (3) $\tan \dfrac{19\pi}{6}$.

解： 首先将计算器置于 RAD（以弧度为单位）的计算状态：

操作	显示
SHIFT 设置 2 2	R

(1)

操作	显示
sin 1.2 =	0.932039086

所以 $\sin 1.2 \approx 0.93$.

(2)

操作	显示
cos −27 SHIFT ×10ˣ ÷ 4 = S⇔D	−0.707106781

所以 $\cos\left(-\dfrac{27\pi}{4}\right) \approx -0.71$.

(3)

操作	显示
tan 19 SHIFT ×10ˣ ÷ 6 = S⇔D	0.577350269

所以 $\tan \dfrac{19\pi}{6} \approx 0.58$.

试一试

利用函数型计算器验证一下例 1 的结果.

2. 三角函数在各象限的符号

由三角函数的定义可知，角 α 的终边与单位圆交点的纵坐标的符号与 $\sin\alpha$ 的符号相同，横坐标的符号与 $\cos\alpha$ 的符号相同，由此可以确定三角函数在各象限的符号，如图 7－13 所示.

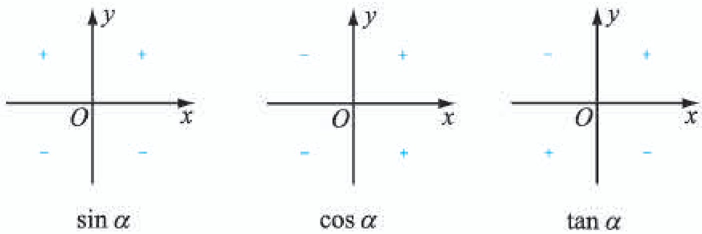


图 7 - 13

想一想

$\tan\alpha$ 在各个象限的符号是如何判断出来的？

例 5 确定下列三角函数值的符号：

(1) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $\cos 256°$；

(3) $\tan(-600°)$；　　(4) $\cos\dfrac{11\pi}{3}$.

试一试

利用函数型计算器完成例 5.

解：(1) 因为$-\dfrac{\pi}{4}$是第四象限角，所以 $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)<0$.

(2) 因为 $256°$是第三象限角，所以 $\cos 256°<0$.

(3) 因为$-600°=120°-2\times360°$，所以$-600°$是第二象限角，因此 $\tan(-600°)<0$.

(4) 因为$\dfrac{11\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}+4\pi$，所以$\dfrac{11\pi}{3}$是第四象限角，因此 $\cos\dfrac{11\pi}{3}>0$.

例 6 已知 $\sin\theta<0$，且 $\tan\theta>0$，试确定 θ 是第几象限角.

解：因为 $\sin\theta<0$，所以 θ 是第三或第四象限角，或它的终边与 y 轴的负半轴重合.

因为 $\tan\theta>0$，所以 θ 是第一或第三象限角.

所以满足 $\sin\theta<0$，且 $\tan\theta>0$ 的 θ 是第三象限角.

3. 正弦线与余弦线

如图 7 - 14 所示，将单位圆的圆心与坐标原点重合，设角 α 的终边与单位圆相交于点 P，由三角函数的定义可知，角 α 的余弦和正弦分别是点 P 的横坐标和纵坐标，即点 $P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$.

过点 P 作 PM 垂直 x 轴于点 M，则有向线段(具有方向的线段) $\overrightarrow{OM}$ 称为角 α 的**余弦线**，有向线段 $\overrightarrow{MP}$ 称为角 α 的**正弦线**.

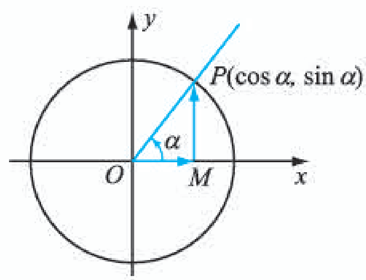


图 7 - 14

练习 7.2

1. 填空：

(1) 已知角 α 的终边与单位圆的交点为 $P\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则

$\cos\alpha=$________，$\sin\alpha=$________，$\tan\alpha=$________；

（2）已知角 α 的终边与单位圆的交点为 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则

$\cos\alpha=$________，$\sin\alpha=$________，$\tan\alpha=$________；

（3）已知 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，则角 α 的终边与单位圆的交点 P 的坐标是________；

（4）已知 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则角 α 的终边与单位圆的交点 P 的坐标是________.

2. 填写下表.

角 α	角度	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	弧度					
$\sin\alpha$						
$\cos\alpha$						
$\tan\alpha$						

3. 已知角 α 的终边经过点 P，判定角 α 所在的象限，并求角 α 的正弦、余弦和正切：

（1）$P(\sqrt{3},\ 1)$；（2）$P(-2,\ 2)$；

（3）$P(-3,\ -4)$；（4）$P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. 求值：

（1）$5\sin 90°-2\cos 180°+\sqrt{3}\tan 0°-6\cos 270°$；

（2）$\tan\pi-3\sin\frac{3\pi}{2}+\cos 0+7\cos\frac{\pi}{2}$.

5. 利用函数型计算器，求下列各值（精确到 0.01）：

（1）$\sin 380°21'$；（2）$\cos(-345°)$；

（3）$\tan\frac{11\pi}{3}$；（4）$\sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

6. 确定下列各值的符号：

（1）$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$；（2）$\cos 260°$；

（3）$\tan(-930°)$；（4）$\cos\frac{15\pi}{4}$.

7. 根据下列条件，确定 θ 是第几象限角：

(1) $\sin\theta<0$，且 $\cos\theta>0$；

(2) $\tan\theta>0$，且 $\cos\theta<0$；

(3) $\sin\theta$ 与 $\tan\theta$ 异号；

(4) $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 同号.

7.3 同角三角函数的基本关系式

问题　由任意角三角函数的定义，你可以发现 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 三者之间有什么关系吗?

如图 7-15 所示，在以原点为圆心的单位圆中，角 α 的终边与单位圆的交点 P 的坐标为 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. 过点 P 作 PM 垂直于 x 轴，垂足为 M，在 Rt$\triangle OMP$ 中，由勾股定理得

$$|MP|^2+|OM|^2=1,$$

即

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

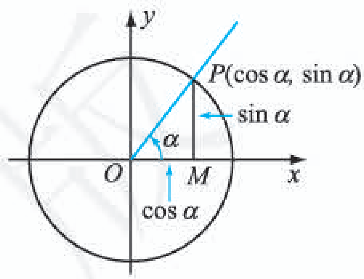


图 7-15

显然，当角 α 的终边与坐标轴重合时，此公式也成立.

由三角函数的定义，我们知道，当 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，有

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

这两个关系式是同角三角函数两个基本的关系式，当我们知道一个角的某一个三角函数值时，就可求出这个角其余的三角函数值. 此外，还可以用它们化简代数式等.

例 1　已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，求角 α 的余弦和正切值.

解：由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

因为 α 是第二象限角，$\cos\alpha<0$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5},$$

因此

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}.$$

想一想

例 1 中如果没有“α 是第二象限角”这个条件，应怎样解答?

例 2　已知 $\tan\alpha=-\sqrt{5}$，且 α 是第四象限角，求角 α 的余弦值.

分析：我们把 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 看成两个未知数，这样只要列出两个关于 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的方程，通过解方程组即可.

解：由题意和同角三角函数基本关系式，得

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, & ①\\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\sqrt{5}. & ②\end{cases}$$

由②式得 $\sin\alpha=-\sqrt{5}\cos\alpha$，代入①式整理得

$$6\cos^2\alpha=1,\ \cos^2\alpha=\frac{1}{6}.$$

因为 α 是第四象限角，所以

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

例 3　已知 $\tan\alpha=-3$，求 $\dfrac{\sin\alpha+4\cos\alpha}{2\cos\alpha-\sin\alpha}$ 的值.

解：由 $\tan\alpha=-3$，得 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-3$，即 $\sin\alpha=-3\cos\alpha$，所以

$$\frac{\sin\alpha+4\cos\alpha}{2\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{-3\cos\alpha+4\cos\alpha}{2\cos\alpha-(-3\cos\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{5\cos\alpha}=\frac{1}{5}.$$

> **议一议**
>
> 对于例 3，还有其他的解决方法吗？

练习 7.3

1. 根据下列条件，求角 α 的指定的三角函数值：

(1) 已知 $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，且 α 是第四象限角，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值；

(2) 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$，且 α 是第三象限角，求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值；

(3) 已知 $\tan\alpha=-3$，且 α 是第二象限角，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值；

(4) 已知 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

2. 已知 $\tan\alpha=4$，求下列各式的值：

(1) $\dfrac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{3\sin\alpha-5\cos\alpha}$；　　(2) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$；

(3) $2\sin\alpha\cos\alpha$.

7.4 三角函数的诱导公式

我们已经会求锐角的三角函数值，这一节我们将讨论任意角的三角函数值之间的一些特殊关系.

1. 角 $2k\pi+\alpha$ $(k\in \mathbf{Z})$ 与角 α 的三角函数值之间的关系

在平面直角坐标系中，角 $2k\pi+\alpha$ $(k\in \mathbf{Z})$ 与角 α 的终边相同，根据三角函数的定义，它们的同名三角函数值相等（“同名”指同是正弦、余弦或正切，下同）. 由此，当 k 为整数时，可以得到一组公式：

$$\begin{aligned}\sin(2k\pi+\alpha)&=\sin\alpha,\\ \cos(2k\pi+\alpha)&=\cos\alpha,\\ \tan(2k\pi+\alpha)&=\tan\alpha.\end{aligned} \qquad \text{（公式一）}$$

利用公式一，可以把绝对值大于 2π 的任意角的三角函数值问题转化为 $[0, 2\pi)$ 内的角的同名三角函数值问题.

> **想一想**
>
> 公式一为弧度制形式，你能否写出其角度制形式？

例 1 求下列各值：

(1) $\sin\dfrac{13\pi}{2}$；　(2) $\cos\dfrac{13\pi}{3}$；　(3) $\tan 405°$.

解： (1) $\sin\dfrac{13\pi}{2}=\sin\left(6\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$.

(2) $\cos\dfrac{13\pi}{3}=\cos\left(4\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\tan 405°=\tan(360°+45°)=\tan 45°=1$.

2. 角 $-\alpha$ 与角 α 的三角函数值之间的关系

如图 7-16 所示，设单位圆与角 α 和角 $-\alpha$ 的终边的交点分别为点 P 和点 P'. 由三角函数的定义可知，点 P 的坐标是 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$，点 P' 的坐标是 $(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$. 容易看出，点 P 和点 P' 关于 x 轴对称，它们的横坐标相同，纵坐标互为相反数，即

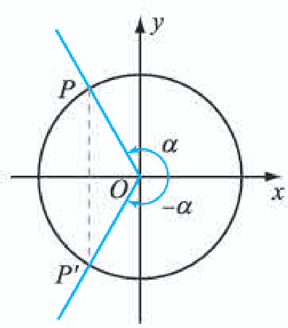


图 7-16

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$

又由同角三角函数的基本关系式，得

$$\tan(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha.$$

因此，可以得到下面一组公式：

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha)&=-\sin\alpha,\\ \cos(-\alpha)&=\cos\alpha,\\ \tan(-\alpha)&=-\tan\alpha.\end{aligned} \qquad \text{（公式二）}$$

利用公式二，可以用正角的三角函数值表示负角的三角函数值.

例 2 求下列各值：

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$； (2) $\cos\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$； (3) $\tan(-45°)$.

解：(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$.

(2) $\cos\left(-\frac{19\pi}{3}\right)=\cos\frac{19\pi}{3}=\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

(3) $\tan(-45°)=-\tan 45°=-1$.

3. 角 $\pi+\alpha$ 与角 α 的三角函数值之间的关系

如图 7 - 17 所示，设单位圆与角 α 和角 $\pi+\alpha$ 的终边的交点分别为点 P 和点 P'. 由三角函数的定义可知，点 P 的坐标是 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$，点 P'的坐标是 $(\cos(\pi+\alpha), \sin(\pi+\alpha))$. 容易看出，点 P 和点 P'关于原点对称，它们的横坐标和纵坐标都互为相反数，即

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$

又由同角三角函数的基本关系式，得

$$\tan(\pi+\alpha)=\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\tan\alpha.$$

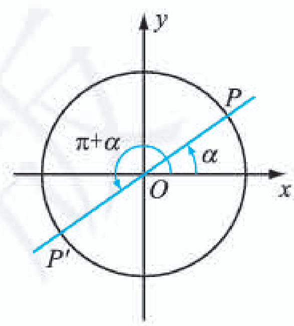


图 7 - 17

因此，可以得到下面一组公式：

$$\begin{aligned}\sin(\pi+\alpha)&=-\sin\alpha,\\ \cos(\pi+\alpha)&=-\cos\alpha,\\ \tan(\pi+\alpha)&=\tan\alpha.\end{aligned}\qquad \text{（公式三）}$$

例 3 求下列各值：

(1) $\sin 225°$； (2) $\cos\frac{4\pi}{3}$； (3) $\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$.

解：(1) $\sin 225°=\sin(180°+45°)=-\sin 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) $\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

(3) $\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=-\tan\frac{7\pi}{6}=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. 角 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 与角 α 的三角函数值之间的关系

由图 7 - 18 可以得到下面一组公式：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.$$
（公式四）

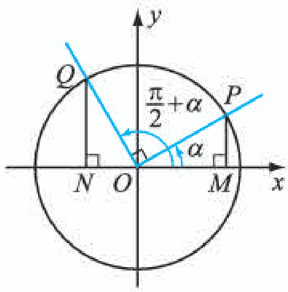


图 7－18

读一读

如图 7－18 所示，角 α 的终边与单位圆的交点为 P，角 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 的终边与单位圆的交点为 Q，则点 P 的坐标是 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$，点 Q 的坐标是 $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$. 过点 P 作 PM 垂直 x 轴于点 M，过点 Q 作 QN 垂直 x 轴于点 N，易证 $\triangle QNO \cong \triangle OMP$，由此可证明公式四.

例 4 求下列各值：

(1) $\cos\frac{2\pi}{3}$；　　(2) $\sin 150°$.

解： (1) $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$.

(2) $\sin 150°=\sin(90°+60°)=\cos 60°=\frac{1}{2}$.

想一想

例 4 中的各题你还有其他的方法求解吗？

公式一、二、三、四都称为三角函数的**诱导公式**，利用这些公式可以把任意角的三角函数转化为锐角的三角函数.

例 5 求下列各值：

(1) $\sin 300°$；　　(2) $\cos\frac{11\pi}{4}$；　　(3) $\tan(-480°)$.

解： (1) $\sin 300°=\sin(360°-60°)=\sin(-60°)=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\cos\frac{11\pi}{4}=\cos\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) $\tan(-480°)=-\tan 480°=-\tan(360°+120°)=-\tan 120°$
$=-\tan(180°-60°)=\tan 60°=\sqrt{3}$.

例 6 已知 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，且 α 是第四象限角，求 $\frac{\sin(-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\tan(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\tan(2\pi-\alpha)}$ 的值.

解：原式$=\dfrac{-\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha}{-\cos(-\alpha)\tan(-\alpha)}$

$=\dfrac{-\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha}{\cos\alpha\tan\alpha}$

$=-\sin\alpha$.

因为 α 是第四象限角，$\sin\alpha<0$，所以

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13},$$

所以原式$=\dfrac{5}{13}$.

练习 7.4

1. 填空：

(1) $\sin(360^\circ+90^\circ)=$________；　(2) $\cos 7\pi=$________；

(3) $\sin(-60^\circ)=$________；　(4) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=$________；

(5) $\tan(180^\circ+45^\circ)=$________；　(6) $\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=$________；

(7) $\sin(90^\circ+30^\circ)=$________；　(8) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=$________.

2. 利用诱导公式求下列各值：

(1) $\sin(-780^\circ)$；　(2) $\sin 135^\circ$；　(3) $\tan(-240^\circ)$；

(4) $\cos\dfrac{11\pi}{2}$；　(5) $\cos\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)$；　(6) $\tan\dfrac{25\pi}{6}$.

3. 填写下表.

角 α	角度	30°	45°	60°	120°	135°	150°
	弧度						
$\sin\alpha$							
$\cos\alpha$							
$\tan\alpha$							

*4. 化简：

(1) $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)\tan(\alpha-2\pi)}{\sin(\pi+\alpha)}$；

(2) $\dfrac{\cos(\alpha+2\pi)\tan(\pi+\alpha)\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)\tan(3\pi-\alpha)}$.

*5. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 α 是第一象限角，求$\dfrac{2\sin(2\pi-\alpha)-3\cos(-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)+5\sin(3\pi+\alpha)}$的值.

7.5 正弦函数与余弦函数的图像和性质

7.5.1 正弦函数的图像和性质

光波、声波、电磁波等传播的波动图，都与我们学习的三角函数有密切的关系. 下面我们学习正弦函数的有关知识.

1. 正弦函数的图像

在研究三角函数的图像和性质时，我们通常采用弧度制来度量角，用 x 表示自变量，用 y 表示函数值. 于是，正弦函数可以表示为

$$y=\sin x.$$

由正弦函数的定义可知，正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域是 **R**. 下面我们利用正弦线，作出正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图像.

如图 7－19 所示，在平面直角坐标系的 x 轴上任取一点 O_1，以 O_1 为圆心作单位圆，从这个圆与 x 轴的交点 A 起，把圆 O_1 分为 12 等份（等份越多，作出的图像越精确）. 过圆上各分点分别作 x 轴的垂线，可以得到弧度为 0，$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}$，…，2π 的角的正弦线（如 $\overrightarrow{O_1B}$ 对应于角$\dfrac{\pi}{2}$的正弦线）. 相应地，再把 x 轴上从 0 到 2π 这一段（$2\pi\approx6.28$）分成 12 等份，各分点分别对应于 $x=0$，$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}$，…，2π，过这些分点分别作与这些弧度数对应的正弦线，再用光滑的曲线把这些正弦线的终点连接起来，即可得到正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图像.

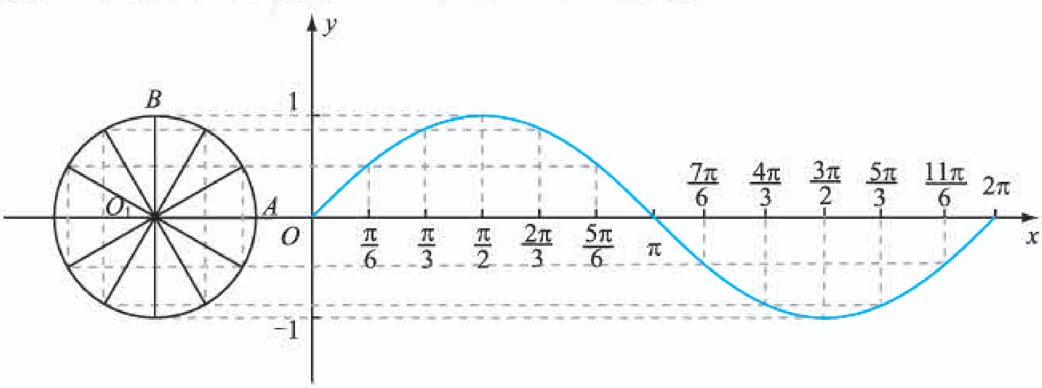


图 7－19

因为

$$\sin(2k\pi+x)=\sin x, \quad k\in\mathbf{Z},$$

所以正弦函数 $y=\sin x$ 在…，$[-4\pi, -2\pi]$，$[-2\pi, 0]$，$[2\pi, 4\pi]$，$[4\pi, 6\pi]$，…上的图像与在 $[0, 2\pi]$ 上的图像形状完全一样，只是位置不同. 因此，我们把 $y=\sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图像，沿 x 轴分别向左、向右平移 2π，4π，…，就可得到正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图像，如图 7-20 所示.

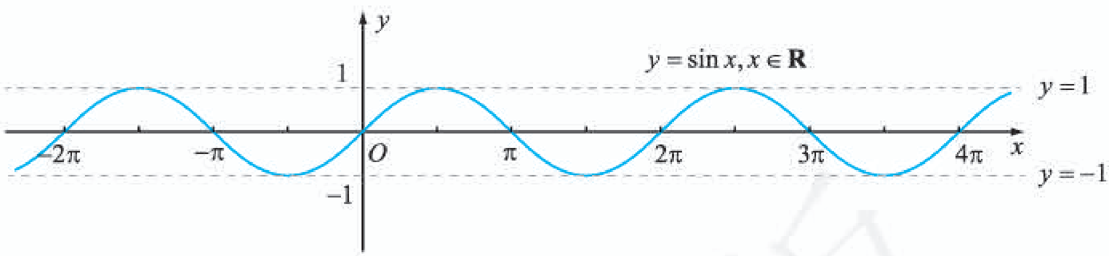


图 7-20

正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图像称为**正弦曲线**.

由图 7-20 可以看出，在函数 $y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图像上，起关键作用的点有以下五个：

$$(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0).$$

事实上，将这五个点描出后，正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图像的形状就基本上确定了. 因此，在精确度要求不太高时，我们常常先描出这关键的五个点，然后用光滑的曲线将它们连接起来，就能得到 $[0, 2\pi]$ 上的正弦函数的图像.

议一议

观察图 7-20，函数 $y=\sin x$ 的图像中有哪几个点对图像的形状起着关键的作用？它们的坐标是什么？

我们作正弦函数的图像时，一般都可以像这样先找出确定图像形状的关键的五个点，然后描点作图. 这种作图方法称为**五点法**.

例 1 作出下列函数的图像：

(1) $y=1+\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$；

(2) $y=-\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$.

解：(1) 列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=1+\sin x$	1	2	1	0	1

描点并用光滑的曲线连接，得到函数 $y=1+\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图像，如图 7-21 所示.

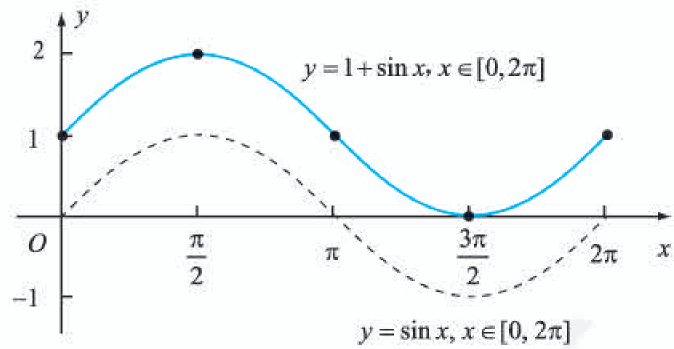


图 7-21

(2) 列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=-\sin x$	0	-1	0	1	0

描点并用光滑的曲线连接，得到函数 $y=-\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$ 的图像，如图 7-22 所示.

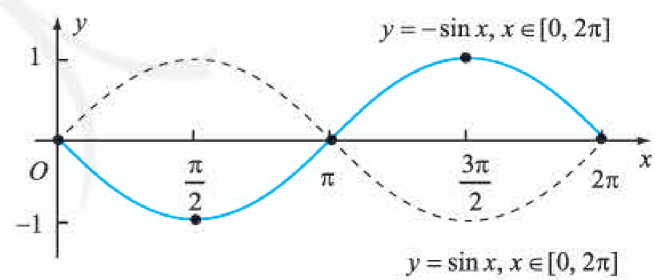


图 7-22

2. 正弦函数的性质

根据正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图像，可以得出正弦函数有以下性质.

(1) 定义域

因为任意角都有正弦，所以正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

(2) 值域

从正弦函数的图像可以看出，正弦曲线分布在两条平行直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间，因此 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，也就是说，正弦函数的值域是 $[-1, 1]$.

当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，正弦函数取得最大值 1，即 $y_{\max}=1$；当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，正弦函数取得最小值 -1，即 $y_{\min}=-1$.

(3) 周期性

一般地，对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得定义域内的每一个 x，都满足

$$f(x+T)=f(x),$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**，非零常数 T 称为这个函数的**周期**.

正弦函数 $y=\sin x$ 是周期函数，-2π，-4π，…；2π，4π，…都是它的周期. 事实上，常数 $2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$，$k\neq 0$）都是它的周期.

对于一个周期函数来说，如果在它的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小的正数就称为这个函数的**最小正周期**.

试一试

请举出两个具有周期性质的实例，并指出相应的周期.

以后我们说到的周期，如果不加特殊说明，指的都是最小正周期.

(4) 奇偶性

观察正弦曲线，可以发现正弦曲线关于原点 O 对称.

根据诱导公式，对于任意 $x\in\mathbf{R}$，都有

$$\sin(-x)=-\sin x,$$

由奇函数的定义可知，正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 是奇函数.

(5) 单调性

因为正弦函数 $y=\sin x$ 是周期函数，所以我们只需要研究其在一个周期上的单调性，就可以得出该函数在 $\mathbf{R}$ 上的单调性.

在正弦函数的一个周期 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 中，由正弦曲线可得，当自变量 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时，函数值 y 由 -1 增加到 1；当自变量 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，函数值 y 由 1 减小到 -1. 即正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数，在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上是减函数.

所以正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）上是增函数；在区间 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）上是减函数.

例 2 比较下列各组正弦值的大小：

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)$与$\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$；　　(2) $\sin\frac{2\pi}{3}$与$\sin\frac{3\pi}{4}$.

解：(1) 因为$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<0$，且正弦函数在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，所以

$$\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)>\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right).$$

(2) 因为$\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{3}<\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}$，且正弦函数在区间$\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$上是减函数，所以

$$\sin\frac{2\pi}{3}>\sin\frac{3\pi}{4}.$$

试一试

请使用函数型计算器求值，完成例 2.

例 3 求下列函数的最大值、最小值和周期，并求出使函数取最大值和最小值时 x 的集合.

(1) $y=2+\sin x$；　　(2) $y=1-2\sin x$.

解：(1) 因为$-1\leqslant\sin x\leqslant1$，所以：

当 $\sin x=1$ 时，$y_{max}=2+1=3$，此时 x 的集合为 $\{x\mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\}$；

当 $\sin x=-1$ 时，$y_{min}=2+(-1)=1$，此时 x 的集合为 $\{x\mid x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\}$.

函数 $y=2+\sin x$ 与函数 $y=\sin x$ 的周期相同，周期为 2π.

(2) 因为$-1\leqslant\sin x\leqslant1$，所以：

当 $\sin x=-1$ 时，$y_{max}=1-2\times(-1)=3$，此时 x 的集合为 $\{x\mid x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\}$；

当 $\sin x=1$ 时，$y_{min}=1-2\times1=-1$，此时 x 的集合为 $\{x\mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\}$.

函数 $y=1-2\sin x$ 与函数 $y=\sin x$ 的周期相同，周期为 2π.

练习 7.5.1

*1. 作出下列函数在 $[0,\ 2\pi]$ 上的图像：

（1） $y=2+\sin x$；　　（2） $y=2\sin x$；

（3） $y=-1+\sin x$；　　（4） $y=\frac{1}{2}\sin x$.

*2. 求下列各函数的最大值、最小值和周期，并求出使函数取最大值和最小值时 x 的集合：

（1） $y=3+\sin x$；　　（2） $y=-2\sin x$；

（3） $y=-1+2\sin x$；　　（4） $y=3-2\sin x$.

3. 比较下列各组正弦值的大小：

（1） $\sin 250°$与 $\sin 260°$；　　（2） $\sin 310°$与 $\sin 326°$；

（3） $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$与 $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$；　　（4） $\sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$与 $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$.

7.5.2 余弦函数的图像和性质

如果用 x 表示自变量，用 y 表示函数值，则余弦函数可以表示为

$$y=\cos x.$$

由诱导公式

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

可知，余弦函数 $y=\cos x$ 的图像与函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ 的图像完全相同. 正弦函数 $y=\sin x$ 的图像向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位，可得到函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ 的图像，也就是余弦函数 $y=\cos x$ 的图像，如图 7－23 所示.

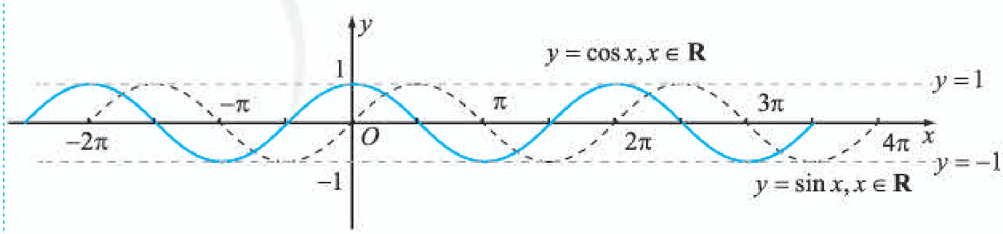


图 7－23

余弦函数的图像称为**余弦曲线**.

由余弦函数的图像可以看出，函数 $y=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图像上起着关键作用的五个点为：

$$(0,1),\ \left(\frac{\pi}{2},0\right),\ (\pi,-1),\ \left(\frac{3\pi}{2},0\right),\ (2\pi,1).$$

因此我们也可以用五点法作出余弦函数的图像.

由余弦函数的定义和图像，可以得到余弦函数的性质如下.

(1) **定义域**：**R**.

(2) **值域**：$[-1, 1]$.

当 $x=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y_{\max}=1$；当 $x=(2k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y_{\min}=-1$.

(3) **周期**：$T=2\pi$.

(4) **奇偶性**：由图 7-23 知，余弦函数的图像关于 y 轴对称. 事实上，对于 $x\in\mathbf{R}$，都有 $\cos(-x)=\cos x$，所以函数 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 是偶函数.

(5) **单调性**：观察发现，余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上是增函数；在区间 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上是减函数.

议一议

对比正弦函数的性质，讨论一下余弦函数和正弦函数的性质有哪些区别和联系.

例 4 作出函数 $y=1+\cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图像，并求出函数的最大值、最小值和周期.

解：列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$y=1+\cos x$	2	1	0	1	2

描点，用光滑的曲线连接，得到函数 $y=1+\cos x$ 的图像，如图 7-24 所示.

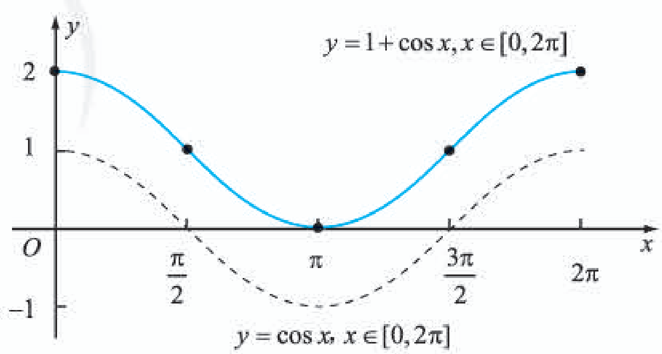


图 7-24

因为$-1\leqslant \cos x\leqslant 1$，所以：

当 $\cos x=1$ 时，$y_{\max}=2$；

当 $\cos x=-1$ 时，$y_{\min}=0$.

周期 $T=2\pi$.

例 5 比较下列各组余弦值的大小：

(1) $\cos\frac{5\pi}{4}$和$\cos\frac{7\pi}{5}$；　　(2) $\cos\frac{\pi}{4}$和$\cos\frac{3\pi}{5}$.

解：(1) 因为$\pi<\frac{5\pi}{4}<\frac{7\pi}{5}<2\pi$，且函数 $y=\cos x$ 在区间 $[\pi, 2\pi]$ 上是增函数，所以

$$\cos\frac{5\pi}{4}<\cos\frac{7\pi}{5}.$$

(2) 因为$0<\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{5}<\pi$，且函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上是减函数，所以

$$\cos\frac{\pi}{4}>\cos\frac{3\pi}{5}.$$

试一试

作出函数 $y=-2\cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图像，并求出它的最大值、最小值和周期.

试一试

请使用函数型计算器求值，完成例 5.

练习 7.5.2

*1. 求下列各函数的最大值、最小值和周期：

(1) $y=3+\cos x$；　　(2) $y=2\cos x$；

(3) $y=3-\cos x$；　　(4) $y=-1-\frac{1}{2}\cos x$.

*2. 在长度为一个周期的闭区间上，作出下列函数的图像：

(1) $y=-1+\cos x$；　　(2) $y=-\cos x$.

*3. 比较下列各对余弦值的大小：

(1) $\cos 125°$和$\cos 155°$；　　(2) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$和$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$；

(3) $\cos 515°$和$\cos 535°$；　　(4) $\cos\left(-\frac{15\pi}{8}\right)$和$\cos\left(-\frac{14\pi}{9}\right)$.

*4. 分析余弦函数 $y=2\cos x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的单调性.

7.6 正弦型函数的图像和性质

在物理和工程等学科的研究中，经常会遇到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 A，ω，φ 都是常数，且 $A\neq 0$，$\omega\neq 0$）的函数，这种函数通常称为**正弦型函数**. 下面我们根据正弦函数的图像与性质来研究这类函数.

我们可用几何画板作出函数 $y=2\sin x$，$y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图像，如图 7-25 所示.

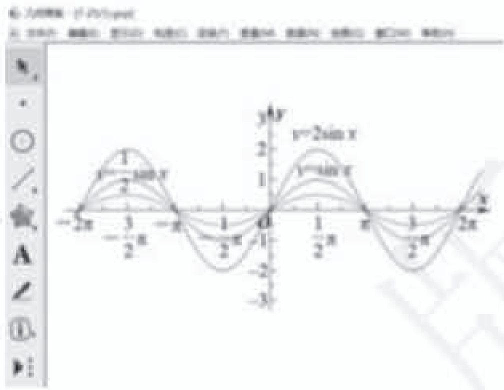


图 7-25

观察图 7-25，可发现这些函数图像之间有如下关系：

函数 $y=\sin x$ 的图像上所有点的横坐标不变，纵坐标变为原来的 2 倍，可得到函数 $y=2\sin x$ 的图像；

函数 $y=\sin x$ 的图像上所有点的横坐标不变，纵坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$，可得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图像.

一般地，函数 $y=A\sin x$（其中 $A>0$ 且 $A\neq 1$）的图像，可由函数 $y=\sin x$ 的图像上所有点的横坐标不变，纵坐标变为原来的 A 倍得到.

我们可用几何画板作出函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$，$y=\sin 2x$ 的图像，如图 7-26 所示.

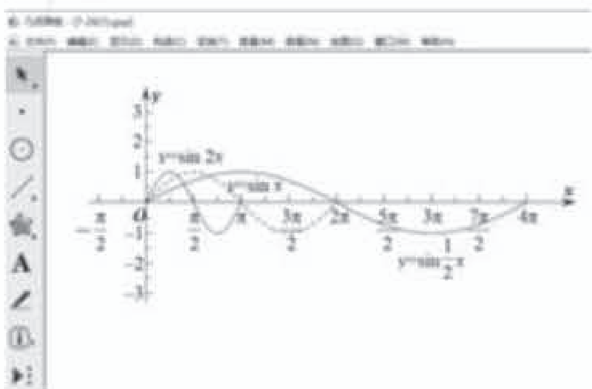


图 7-26

观察图 7－26，可发现这些函数图像之间有如下关系：

函数 $y=\sin x$ 的图像上所有点的纵坐标不变，横坐标变为原来的 2 倍，可得到函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图像；

函数 $y=\sin x$ 的图像上所有点的纵坐标不变，横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，可得到函数 $y=\sin 2x$ 的图像.

一般地，函数 $y=\sin\omega x$（其中 $\omega>0$）的图像，可由函数 $y=\sin x$ 的图像上所有点的纵坐标不变，横坐标变为原来的$\frac{1}{\omega}$得到.

我们可用几何画板作出函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像，如图 7－27 所示.

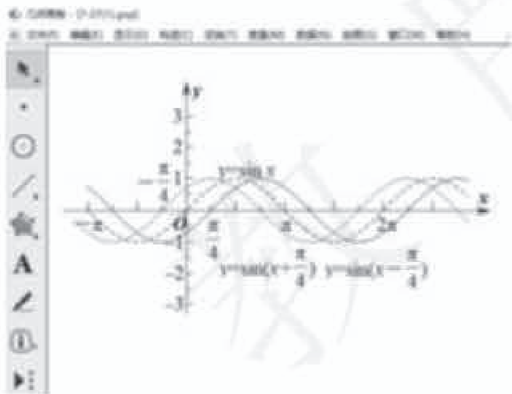


图 7－27

观察图 7－27，可发现这些函数图像之间有如下关系：

函数 $y=\sin x$ 的图像向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位，可得到函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像；

函数 $y=\sin x$ 的图像向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，可得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像.

一般地，函数 $y=\sin(x+\varphi)$（其中 $\varphi\neq 0$）的图像，可由函数 $y=\sin x$ 的图像沿 x 轴向左（$\varphi>0$ 时）或向右（$\varphi<0$ 时）平移 $|\varphi|$ 个单位得到.

我们可用几何画板作出函数 $y=\sin 2x$，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像，如图 7－28 所示.

观察图 7－28，可发现这些函数图像之间有如下关系：

函数 $y=\sin 2x$ 的图像向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位，可得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像；

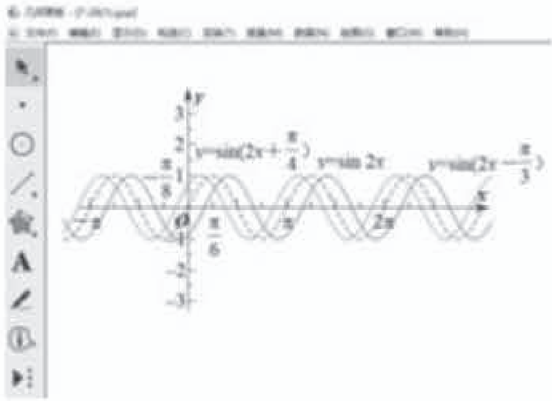


图 7－28

函数 $y=\sin 2x$ 的图像向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位，可得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像.

一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $\omega\neq0$，$\varphi\neq0$）的图像，可由函数 $y=A\sin\omega x$ 的图像沿 x 轴向左（$\varphi>0$ 时）或向右（$\varphi<0$ 时）平移$\frac{|\varphi|}{\omega}$个单位得到.

我们也可以利用五点法作正弦型函数的图像.

例 1 作出函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$在一个周期内的图像.

分析： 令 $2x+\frac{\pi}{3}=0$，得 $x=-\frac{\pi}{6}$；令 $2x+\frac{\pi}{3}=2\pi$，得 $x=\frac{5\pi}{6}$. 因此，当 x 由$-\frac{\pi}{6}$变到$\frac{5\pi}{6}$时，$2x+\frac{\pi}{3}$由 0 变到 2π，函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$取到一个周期内的所有值. 由此可见，函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期是 π. 因此，可以作函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$的图像.

解： 列表如下.

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	3	0	-3	0

描点，用光滑的曲线连接，得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$的图像，如图 7－29 所示.

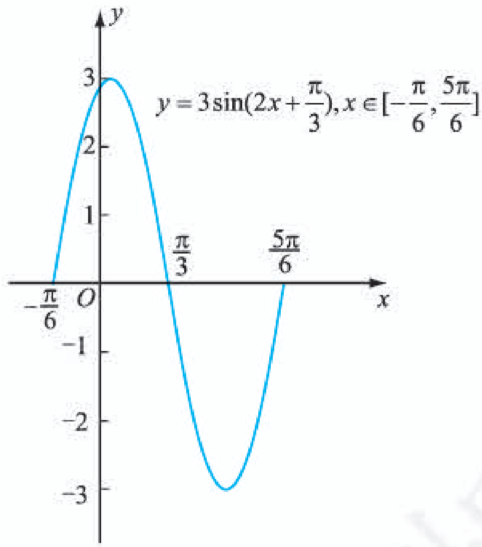


图 7-29

正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像，可用五点法作出，也可以通过函数 $y=\sin x$ 的图像变换得到.

正弦型函数

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)\ (A>0,\ \omega>0)$$

的一些主要性质如下.

定义域：**R**.

值域：$[-A, A]$，最大值为 A，最小值为 $-A$.

周期：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

例 2 如图 7-30 所示，某地一天 6 时到 14 时的温度变化曲线满足函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\ \omega>0,\ 0<\varphi<\pi)$.

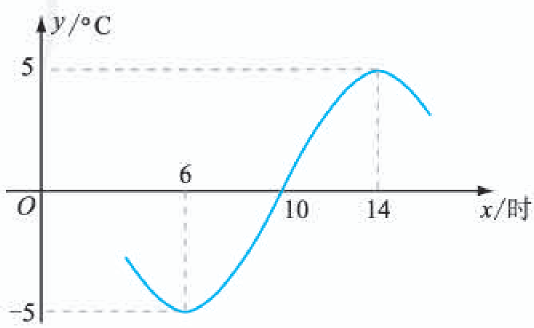


图 7-30

(1) 试说出该地这天 6 时到 14 时的最低温度、最高温度和最大温差；

(2) 求该函数的解析式.

解：（1）由图像可知，该地这天 6 时到 14 时的最低温度是 -5 ℃，最高温度是 5 ℃，最大温差是 $5-(-5)=10$ ℃.

（2）观察曲线可知，$A=5$，设周期为 T，则 $\frac{T}{2}=14-6=8$，所以 $T=16$，因此 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{16}=\frac{\pi}{8}$.

因为函数 $y=5\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\varphi\right)$ 经过点（6，-5），即 $\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=-1$，所以 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=-\frac{5\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=1$ 时，$\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

所以该函数解析式为 $y=5\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)$，$x\in[6，14]$.

练习 7.6

*1. 求下列函数的最大值、最小值和周期：

（1）$y=\frac{3}{4}\sin x$；（2）$y=8\sin 2x$；

（3）$y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$；（4）$y=5\sin\left(\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{5}\right)$.

*2. 作出下列函数在一个周期内的图像：

（1）$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$；（2）$y=4\sin 2x$；（3）$y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

*3. 函数 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像可由函数 $y=\sin x$ 的图像如何变换得到？

*4. 函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像可由函数 $y=\sin x$ 的图像如何变换得到？

*5. 已知函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

（1）求函数的最小正周期；

（2）求函数的单调增区间.

7.7 已知三角函数值求角

问题 如果 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，那么 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$；反之，如果 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，那么 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 吗？

由图 7-31 可知，直线 $y=\frac{1}{2}$ 与正弦曲线的交点有无数多个，即满足 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 的角 α 有无数多个，如 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，….

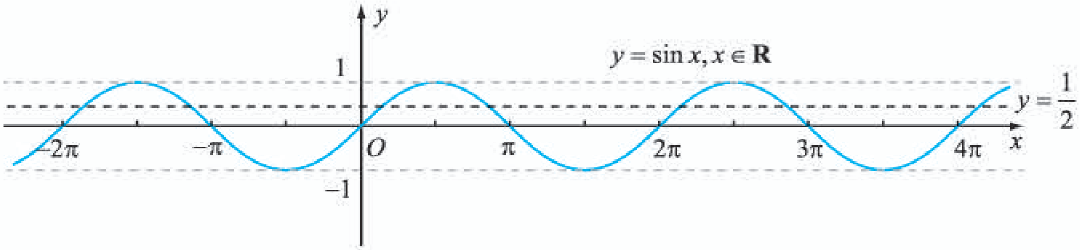


图 7-31

1. 已知正弦值求角

根据正弦函数 $y=\sin x$ 的图像知，给定 $y\in[-1, 1]$，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，满足 $\sin x=y$ 的 x 是唯一的.

已知正弦值求角时，我们可以利用函数型计算器求解. 在 RAD（以弧度为单位）的计算状态下，计算器默认的角 x 的范围是 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，在 DEG（以角度为单位）的计算状态下，$x$ 满足 $-90°\leqslant x\leqslant 90°$.

例 1 已知 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，求满足下列条件的 x 值（精确到 0.01）：

（1）$\sin x=0.9$；　　　　（2）$\sin x=-0.7$.

解：（1）使用函数型计算器计算时，首先将计算器置于 RAD（以弧度为单位）的计算状态下，然后进行如下操作：

操作	显示
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ 0.9 $\boxed{=}$	1.119769515

所以 $x\approx 1.12$.

（2）

操作	显示
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ −0.7 $\boxed{=}$	−0.775397497

所以 $x\approx -0.78$.

例 2 已知角 A 是 $\triangle ABC$ 的一个内角，且 $\sin A=\frac{4}{5}$，求角 A 的度数.

解： 因为角 A 是 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $0^\circ<A<180^\circ$.

将计算器置于 DEG（以角度为单位）的计算状态下，并进行如下操作：

操作	显示
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{(}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{5}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$	53.13010235

所以 $A\approx53.13^\circ$ 时，满足题意. 又因为 $\sin(180^\circ-A)=\sin A=\frac{4}{5}$，因此满足条件的角 A 为 53.13° 或 126.87°.

2. 已知余弦值或正切值求角

根据余弦函数 $y=\cos x$ 的图像知，给定 $y\in[-1,1]$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，满足 $\cos x=y$ 的 x 是唯一的.

对于任意 $y\in\mathbf{R}$，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$时，满足 $\tan x=y$ 的 x 是唯一的.

这些角也可以通过函数型计算器求出，已知余弦值求角时，在 RAD（以弧度为单位）的计算状态下，计算器默认的角 x 的范围是 $[0,\pi]$，在 DEG（以角度为单位）的计算状态下，x 满足 $0^\circ\leqslant x\leqslant180^\circ$；已知正切值求角时，在 RAD（以弧度为单位）的计算状态下，计算器默认的角 x 的范围是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，在 DEG（以角度为单位）的计算状态下，$x$ 满足 $-90^\circ<x<90^\circ$.

例 3 用函数型计算器求出满足下列条件的 x 值（精确到 0.01°）：

(1) $\cos x=-0.4$，$0^\circ\leqslant x\leqslant180^\circ$；　　(2) $\tan x=-2$，$-90^\circ<x<90^\circ$.

解： 将计算器置于 DEG（以角度为单位）的计算状态下，并进行如下操作：

(1)

操作	显示
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos}$ -0.4 $\boxed{=}$	113.5781785

所以 $x\approx113.58^\circ$.

(2)

操作	显示
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan}$ -2 $\boxed{=}$	−63.43494882

所以 $x\approx-63.43°$.

例 4 用函数型计算器求满足下列条件的 x 值（精确到 0.01）：

(1) $\sin x=\dfrac{3}{4}$；　　　　(2) $\cos x=-0.6$.

解： 将计算器置于 RAD（以弧度为单位）的计算状态下，并进行如下操作：

(1)

操作	显示
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{(}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{4}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$	0.848062079

令

$$\alpha=0.848,$$

因为 $\sin x=\dfrac{3}{4}>0$，所以 x 是第一象限角或第二象限角，则：

当 $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$x=\alpha=0.848\approx0.85$；

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 时，$x=\pi-\alpha\approx3.141-0.848\approx2.29$.

所以满足 $\sin x=\dfrac{3}{4}$ 的解约为 $2k\pi+0.85$ 或 $2k\pi+2.29$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)

操作	显示
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos}$ -0.6 $\boxed{=}$	2.214297436

令

$$\alpha=2.214,$$

因为 $\cos x=-0.6<0$，所以 x 是第二象限角或第三象限角，则：

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 时，$x=\alpha=2.214\approx2.21$；

当 $x\in\left(\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时，$x=2\pi-\alpha\approx2\times3.141-2.214\approx4.07$.

所以满足 $\cos x=-0.6$ 的解约为 $2k\pi+2.21$ 或 $2k\pi+4.07$，$k\in\mathbf{Z}$.

练习 7.7

1. 用函数型计算器求满足下列条件的角 x（精确到 0.01）：

(1) 已知 $\sin x=0.75$，且 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$；

(2) 已知 $\cos x=-0.36$，且 $x\in[0,\ \pi]$；

(3) 已知 $\tan x=-1.5$，且 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

*2. 用函数型计算器求满足下列条件的角 x（精确到 $0.1°$）：

(1) 已知 $\sin x=-0.432\ 1$，且 $0°\leqslant x\leqslant 360°$；

(2) 已知 $\cos x=\frac{1}{6}$，且 $-180°\leqslant x\leqslant 180°$.

*3. 求满足下列条件的角 x（$0°\leqslant x\leqslant 360°$）：

(1) $\sin x=-0.5$；　　(2) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

*4. 已知 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$，求满足 $\tan x=-3$ 的 x 值（精确到 0.01）.

习题七

1. 在平面直角坐标系中分别作出下列各角，并指出它们是第几象限角：

(1) $780°$；　　(2) $-\frac{7\pi}{6}$；

(3) $-300°$；　　(4) $\frac{5\pi}{4}$.

2. 已知航海罗盘将圆周分为 32 等份，把每一等份所对圆心角（正角）的度数分别用角度和弧度表示出来（结果保留两位小数）.

3. 已知角 α 的终边经过点 P，判定角 α 所在的象限，并求角 α 的正弦、余弦和正切：

(1) $P\left(\frac{5}{13},\ -\frac{12}{13}\right)$；　　(2) $P(-1,\ 2)$.

4. 确定下列三角函数的符号，然后使用函数型计算器进行验证：

(1) $\sin 7.6\pi$；　　(2) $\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$；　　(3) $\tan 505°$.

5. 已知 α 是三角形的一个内角，在 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 中，哪些可能取负值？

6. 根据下列条件，求角 α 的指定的三角函数值：

(1) 已知 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 α 是第三象限角，求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$；

(2) 已知 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，且 α 是第四象限角，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$；

(3) 已知 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$；

(4) 已知 $\tan\alpha=4$，且 α 是第三象限角，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$.

7. 已知 $\tan\alpha=2$，求下列各式的值：

(1) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$；　(2) $\cos^2\alpha$；　(3) $\sin\alpha\cos\alpha$.

8. 利用诱导公式求下列各值：

(1) $\sin(-300^\circ)$；　(2) $\cos\frac{17\pi}{6}$；　(3) $\tan(-1\ 470^\circ)$.

*9. 作出下列函数在 $[0, 2\pi]$ 上的图像：

(1) $y=1-\sin x$；　(2) $y=3\cos x$；

(3) $y=\frac{1}{2}\sin x-1$；　(4) $y=2\cos x+1$.

*10. 求下列函数的最大值和最小值，并求使函数取得这些值时 x 的集合：

(1) $y=1-5\sin x$；　(2) $y=2-\frac{1}{2}\cos x$.

11. 比较下列两个值的大小：

(1) $\sin 100^\circ$和 $\sin 121^\circ$；　(2) $\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)$和 $\sin\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$；

*(3) $\cos 600^\circ$和 $\cos(-612^\circ)$；　*(4) $\cos\frac{43\pi}{10}$和 $\cos\frac{47\pi}{9}$.

*12. 在长度为一个周期的闭区间上，作下列函数的图像：

(1) $y=2\sin\frac{1}{2}x$；　(2) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

*13. 试说明函数 $y=\sin x$ 的图像经过怎样的变换可得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像.

*14. 求下列函数的最大值和最小值，并求使函数取得这些值时 x 的集合：

(1) $y=4\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$；　(2) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

15. 求满足下列条件的角 x：

(1) 已知 $\sin x=0$，且 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$；

(2) 已知 $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 $x\in[0,\ \pi]$；

(3) 已知 $\tan x=-1$，且 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

16. 求满足下列条件的角 x（精确到 0.01）：

(1) 已知 $\sin x=0.235$，且 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$；

(2) 已知 $\cos x=-0.54$，且 $x\in[0,\ \pi]$；

(3) 已知 $\tan x=1.5$，且 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

*17. 求满足下列条件的角 x（精确到 $0.01°$）：

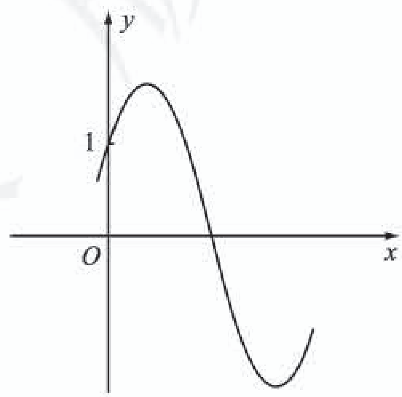
(1) 已知 $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{5}$，且 $-180°\leqslant x\leqslant 180°$；

(2) 已知 $\cos x=\frac{1}{3}$，且 $-180°\leqslant x\leqslant 180°$.

*18. 已知函数 $y=2\sin(2x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，其部分图像如图所示. 求：

(1) 函数的最小正周期 T 及 φ 的值；

(2) 函数的单调增区间.



（第 18 题）

*19. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 写出函数的值域；

(2) 若 α 是三角形的一个内角，且 $f\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$，求出 α 的值.

阅读与实践

陈子测日

据中国古算书《周髀算经》记载，约与泰勒斯同时代的陈子已经测量了太阳的高度，其方法后来被称为“重差术”.

西周开国时期，周公善演《周易》，是智者的化身，他很想知道太阳的高度，但终其一生也未能实现这个愿望. 他的后人荣方为实现先人的遗愿，找到当时在数学研究方面很有成就的陈子（约公元前六七世纪），陈子通过

研究找到了测量太阳高度的方法.

如图 1 所示，S 表示太阳，O 表示日下点，AA' 和 BB' 均表示髀——测量用的标杆. O，A，B 在同一直线上. AC 是髀 AA' 的影长，BD 是髀 BB' 的影长，两髀的日影差为 d（$d=BD-AC$），两髀之间的距离为 AB，其中髀高 h 是已知的，AC，BD，AB 均可实际测量.

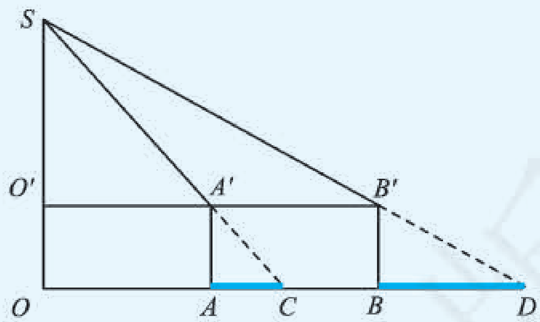


图 1

由$\triangle SO'A'\backsim\triangle A'AC$，$\triangle SO'B'\backsim\triangle B'BD$，可以得到日高公式为

$$SO=SO'+OO'=\frac{h\cdot AB}{d}+h.$$

求得了日高 SO 及髀到日下点的距离 OA 之后，陈子还得出了日远（髀到太阳的距离）的计算方法："若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并开方而除之，得邪至日者."

古汉语中的"邪"也作"斜"解，上述计算方法是指，将勾、股各平方后相加，再开方，就得到弦长（图 2）. 陈子的这段话，不仅解决了日远的计算问题，而且还表述了勾股定理的内容. 这充分证明，我国至迟在陈子所处年代，已经发现并运用了勾股定理.

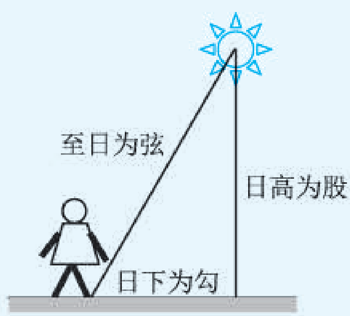


图 2

由于陈子受当时科学水平的限制，误把椭球形的地球当作平面. 所以，求出的日高与实际距离相差很远. 然而，他的测日法所反映的数学思想及测量水平在当时却是遥遥领先的，而且他的测量方法（即重差术）至今仍被使用着，所以人们称陈子为测量学之祖，毫不为过.

弧度制的由来

18世纪以前，人们一直是用线段的长来定义三角函数的. 1748年，瑞士数学家欧拉在他出版的一部划时代的著作《无穷小分析概论》中，提出三角函数是对应的三角函数线与圆半径的比值，并令圆的半径为1. 这一概念的提出使得三角函数相关的研究大为简化，是欧拉在数学上的重要功绩之一.

欧拉在上述著作的第八章中提出了弧度制的思想. 他认为，如果把半径作为1个单位长度，那么半圆的长就是π，所对圆心角的正弦是0，即$\sin\pi=0$. 同理，圆的$\frac{1}{4}$的长是$\frac{\pi}{2}$，所对圆心角的正弦是1，可记作$\sin\frac{\pi}{2}=1$. 这一思想将线段与弧的度量单位统一起来，大大简化了某些三角公式及计算.

1873年6月5日，数学教师汤姆生在北爱尔兰首府贝尔法斯特女王学院的数学考试题目中创造性地使用了“弧度”一词. 当时，他将“半径”(radius)的前四个字母与“角”(angle)的前两个字母合在一起，构成radian，这一记法被人们广泛接受和引用. 我国学者曾把radian译成“弪”(分别由“弧”与“径”两个字的一部分拼成). 后来，中学数学教科书中把radian译作“弧度”.

值得指出的是，1735年，欧拉右眼失明，《无穷小分析概论》这部著作出版于这之后. 但他的著作，在样式、范围和记号方面仍堪称典范，因此被许多大学作为教科书采用. 1766年，他回到圣彼得堡研究院后不久双目失明，他以惊人的毅力，在圣彼得堡用口述的方式工作了近17年，直到1783年不幸逝世. 他一生发表过几百部(篇)著作和论文，还留下大量手稿.

第八章

平面向量

火箭升空，把卫星送入预定的运行轨道，飞弹出膛，直奔瞄准的射击目标，它们不但急速飞行，而且有着自己的目标方向.

任何一门数学分支，不管它如何抽象，总有一天会在现实世界中找到应用.

——罗巴切夫斯基

数学发明创造的动力不是推理，而是想象力的发挥.

——德 · 摩根

向量是近代数学的基本概念之一，向量的有关知识是进一步学习数学、物理等学科的有效工具．本章我们将通过具体实例抽象出向量的概念及有关运算法则，感受数形结合的思想，体会向量联系代数与几何的纽带作用，加强对数学整体性的理解．

8.1　向量的概念

问题　学校正在进行紧张的拔河比赛，如图 8－1 所示，参赛双方势均力敌．你注意到作用在绳子上的力，既有大小又有方向了吗？

图 8－1

在上面的问题中，参赛的双方在绳子上分别施加了向左和向右的力，哪一边用的力大，中间的标志就向哪一边的方向移动，这说明力不仅有大小而且有方向．

行驶中的汽车既可以调整行驶的快慢，又可以调整行驶的方向，这说明汽车的速度也有大小和方向两个特征．

汽车从 A 地行驶到 B 地，无论沿着什么路径，位移的大小都是线段 AB 的长度，方向是由 A 指向 B，如图 8－2 所示．

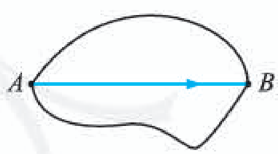


图 8－2

读一读

质点从一个位置（起点）运动到另一个位置（终点）的位置变化称为质点在这一运动过程中的位移．位移的大小是两个位置的直线距离，其方向是从起点指向终点．

我们把既有大小又有方向的量称为**向量**，如力、速度、位移等．只有大小没有方向的量称为**数量**，如身高、体重、温度等．

向量可以用黑体小写英文字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…来表示，手写时应在字母上面加箭头，如 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，…．

具有方向的线段称为**有向线段**．以 A 为始点、B 为终点的有向线段记作 $\overrightarrow{AB}$，如图 8－3 所示．我们通常用有向线段来表示向量，用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示向量 $\boldsymbol{a}$ 时，向量 $\boldsymbol{a}$ 也称为向量 $\overrightarrow{AB}$．向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小也就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长

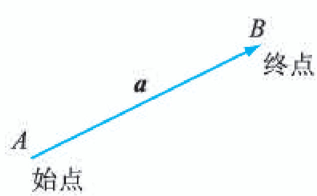


图 8－3

度（或称**模**），记作$|\boldsymbol{a}|$或$|\overrightarrow{AB}|$.

长度为0的向量称为**零向量**，记作$\mathbf{0}$. 零向量的方向是不确定的. 长度为1的向量称为**单位向量**.

我们把大小相等且方向相同的向量称为**相等向量**. 向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为相等向量，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 例如，在图8－4所示的平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

读一读

最先使用有向线段表示向量的是英国著名科学家牛顿.

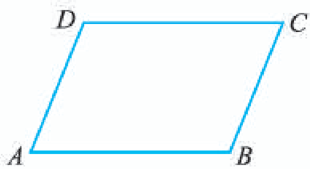


图8－4

如果两条有向线段所在的直线平行或重合，那么这两条有向线段的方向相同或相反；反之，如果两条有向线段的方向相同或相反，那么它们所在的直线平行或重合.

如图8－5所示，有向线段$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$在直线l_1上，$\overrightarrow{EF}$在直线l_2上，且$l_1 /\!/ l_2$，可以看出：有向线段$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$的方向相同，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{EF}$的方向相反.

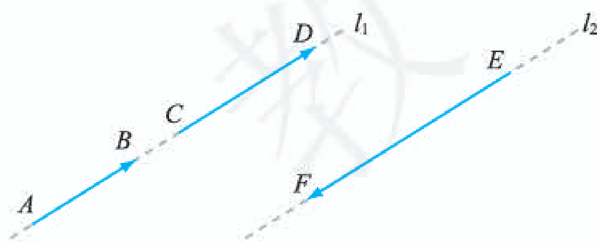


图8－5

我们把方向相同或相反的向量称为**平行向量**（也称**共线向量**）. 向量$\boldsymbol{a}$平行于向量$\boldsymbol{b}$，记作$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$.

规定：零向量与任意一个向量平行，即对任意向量$\boldsymbol{a}$，都有$\mathbf{0} /\!/ \boldsymbol{a}$.

例 如图8－6所示，设O是正六边形$ABCDEF$的中心，写出图中符合下列要求的所有向量：

（1）与向量$\overrightarrow{OA}$相等的向量；

（2）与向量$\overrightarrow{OB}$共线的向量.

解：（1）与向量$\overrightarrow{OA}$相等的向量有$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{CB}$.

（2）与向量$\overrightarrow{OB}$共线的向量有$\overrightarrow{FA}$，$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{EO}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CD}$.

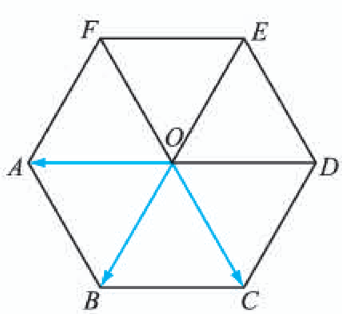


图8－6

练习 8.1

1. 非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度怎样表示？非零向量 $\overrightarrow{BA}$ 的长度怎样表示？这两个向量的长度相等吗？这两个向量相等吗？

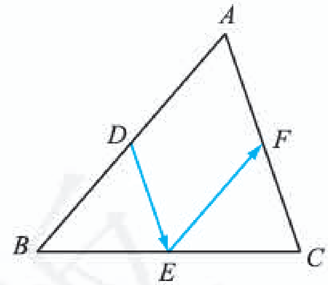
2. （1）用两条有向线段分别表示两个相等的向量，如果这两条有向线段的始点相同，那么它们的终点是否相同？

（2）用两条有向线段分别表示两个方向相同但长度不同的向量，如果这两条有向线段的始点相同，那么它们的终点是否相同？

3. 如图，已知点 D，E，F 分别是△ABC 的边 AB，BC，CA 的中点，写出图中符合下列要求的所有向量：

（1）与向量 $\overrightarrow{DE}$ 相等的向量；

（2）与向量 $\overrightarrow{EF}$ 共线的向量.



（第 3 题）

8.2 向量的线性运算

我们知道实数的运算遵从算术运算法则，类似地，向量也能运算，但向量是既有大小又有方向的量，那么向量的运算遵从怎样的运算法则呢？

8.2.1 向量的加法

问题　如图 8－7 所示，小明放学后，先从教室（点 A）到餐厅（点 B），再从餐厅（点 B）到宿舍（点 C），两次位移（即 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$）的结果，与从教室（点 A）直接到宿舍（点 C）的位移（即 $\overrightarrow{AC}$）是否相同？

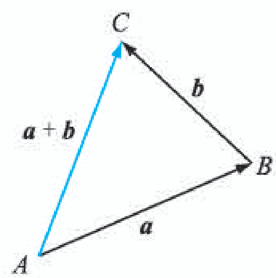


图 8－7

答案是相同的，事实上，$\overrightarrow{AC}$ 可以看成 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的和.

求两个向量和的运算，称为**向量的加法**.

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，作向量 $\overrightarrow{AC}$，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

如图 8－8 所示，这种求两个向量和的作图法则称为**向量加法的三角形法则**.

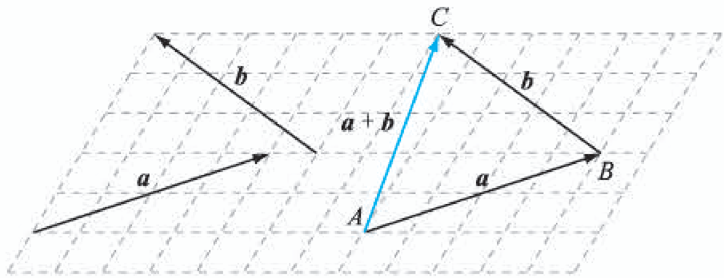


图 8 - 8

如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，我们还可以在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，则对角线上的向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

如图 8 - 9 所示，我们把这种求两个向量和的作图法则称为**向量加法的平行四边形法则**.

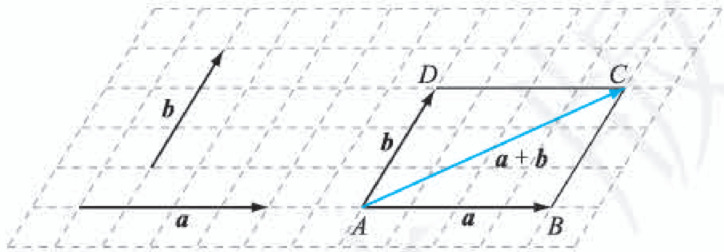


图 8 - 9

对于零向量与任意向量 $\boldsymbol{a}$，都有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

例 1 如图 8 - 10 所示，已知下列各组向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

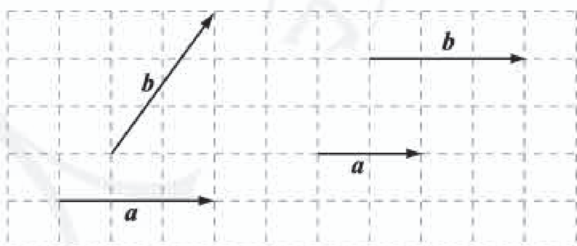


图 8 - 10

解：(1) 在平面内任取一点 A，作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 8 - 11 (1) 所示.

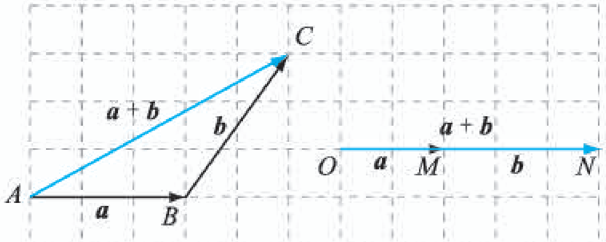


图 8 - 11

(2) 在平面内任取一点 O，作向量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{MN}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 8-11 (2) 所示.

向量的加法满足如下运算律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

例 2 如图 8-12 所示，已知平行四边形 $ABCD$，求：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$；

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$；

(3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{CD}$.

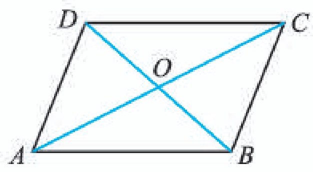


图 8-12

解： (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

(3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}$.

例 3 某人先向东走 3 km，接着向北走 3 km. 求这个人的位移.

解： 设向量 $\boldsymbol{a}$ 为“向东 3 km”，向量 $\boldsymbol{b}$ 为“向北 3 km”，则这个人的位移为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

选择适当的比例尺，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，如图 8-13 所示，则

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

而且

$$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}\ \text{km},$$

又因为 $\angle AOB=45^\circ$，所以这个人的位移是“东北方向 $3\sqrt{2}$ km”.

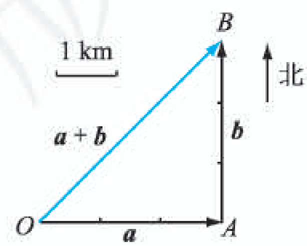


图 8-13

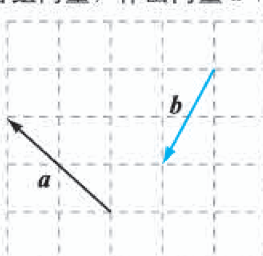
练习 8.2.1

1. 化简：

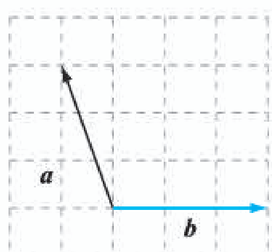
(1) $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}$；　　(2) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}$；

(3) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$；　　(4) $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}$.

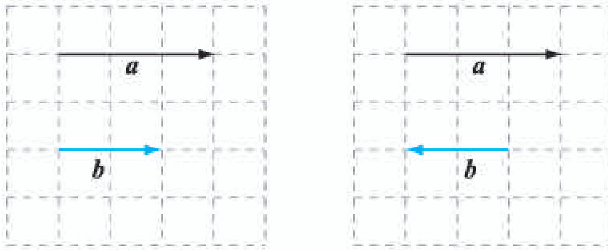
2. 已知下列各组向量，作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



(1)



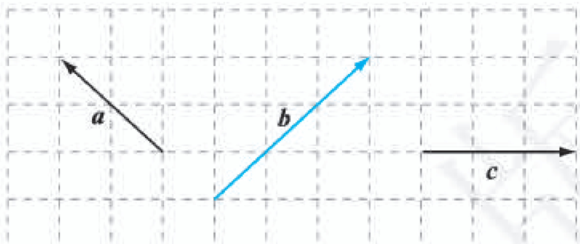
(2)



（3）　　　　（4）

（第 2 题）

3. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

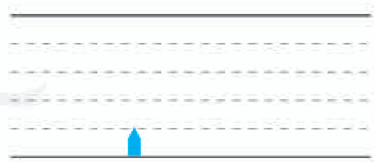


（第 3 题）

4. 河水从西向东流，流速为 10 km/h，小船沿垂直于水流的方向向北横渡，已知小船在静水中的速度为 10 km/h.

（1）试用向量表示船速、水速以及船的实际航行速度；

（2）求船的实际航行速度的大小和方向.



（第 4 题）

8.2.2　向量的减法

在实数的运算中，我们知道减法是加法的逆运算．下面我们类比实数的减法运算来定义向量的减法运算.

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，如图 8－14 所示，则由向量加法的三角形法则，得

$$\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a},$$

我们把向量 $\overrightarrow{BA}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}.$$

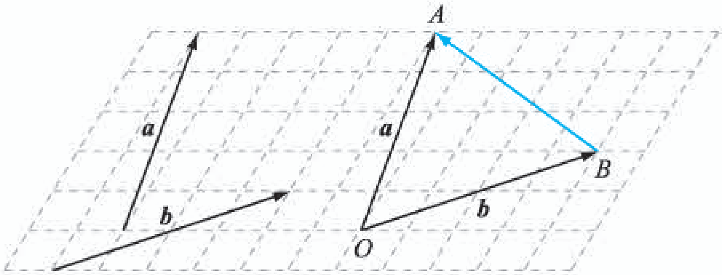


图 8－14

这种求两个向量差的运算，称为**向量的减法**.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 等长且方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**相反向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$.

零向量的相反向量是它本身.

显然，一个向量与其相反向量的和向量是零向量，即

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

因为在 $\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$ 的两边同时加上（$-\boldsymbol{b}$），得

$$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

所以

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

这说明，在向量的减法中，**减去一个向量等于加上这个向量的相反向量**，如图 8－15 所示.

想一想

“相反向量就是方向相反的向量”，这种说法对吗？

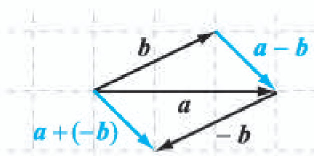


图 8－15

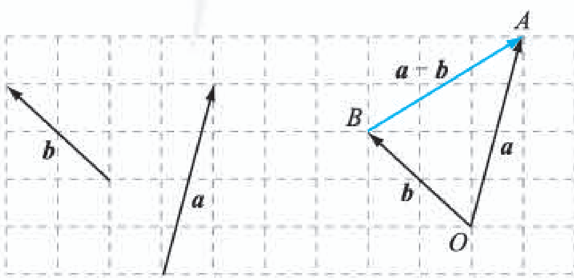
例 4 如图 8－16（1）所示，已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，作出向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

解： 在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，作向量 $\overrightarrow{BA}$，如图 8－16（2）所示，则

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

想一想

根据例 4 的条件，你能作出 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 吗？它与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的关系是什么？



（1）　　　　（2）

图 8－16

例 5 如图 8－17 所示，已知平行四边形 $ABCD$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{DB}$.

解：连接 AC，DB，由向量求和的平行四边形法则，有

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b};$$

由向量减法的定义，得

$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

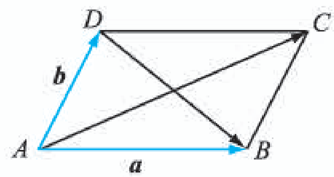


图 8－17

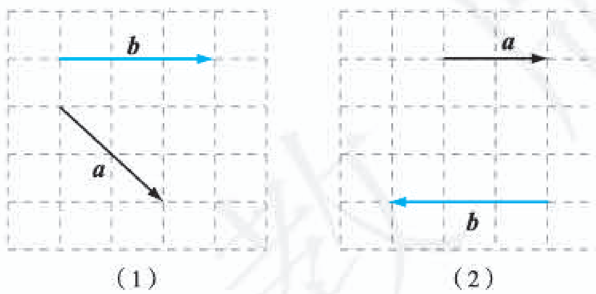
练习 8.2.2

1. 口答：

(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$；　(2) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$；

(3) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$；　(4) $\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{AO}$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作出向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$：



（第 2 题）

3. 化简：

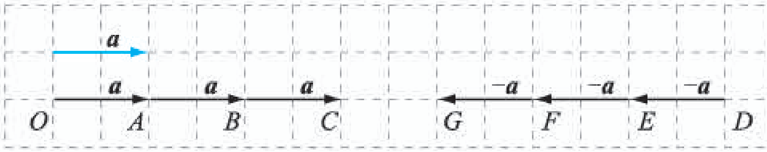
(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}$；　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}$；

(3) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}$；　(4) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}$.

8.2.3　数乘向量

问题　已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 和 $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$，它们的长度、方向与 $\boldsymbol{a}$ 的有什么关系？

如图 8－18 所示，我们可以看到，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OC}$，它的长度等于 $3|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；$(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})=\overrightarrow{DG}$，它的长度同样等于 $3|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.



（1）　　　　　　　　　　（2）

图 8 - 18

对于向量 $\boldsymbol{a}$，我们把 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 记作 $3\boldsymbol{a}$，把 $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$ 记作 $-3\boldsymbol{a}$.

一般地，实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，称为**数乘向量**，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的长度与方向规定如下：

（1）$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

（2）当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

显然，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

数乘向量的几何意义就是把向量沿着它的方向或反方向放大或缩小. 如 $2\boldsymbol{a}$ 的几何意义就是沿着向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向，长度放大为原来的 2 倍.

做一做

任作向量 $\boldsymbol{a}$，作出向量 $-2\boldsymbol{a}$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，并说出它们的几何意义.

设 λ，$\mu\in\mathbf{R}$，可以验证，数乘向量运算满足下列运算律：

（1）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

（2）$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（3）$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

例 6　计算：

（1）$(-2)\times3\boldsymbol{a}$；

（2）$2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解：（1）原式 $=(-2\times3)\boldsymbol{a}=-6\boldsymbol{a}$.

（2）原式 $=2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(2-3)\boldsymbol{a}+(2+3)\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$.

例 7　如图 8 - 19 所示，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作出向量 $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

解：在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{AC}=3\boldsymbol{b}$，如图 8 - 20 所示. 则

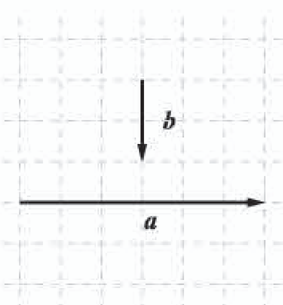


图 8 - 19

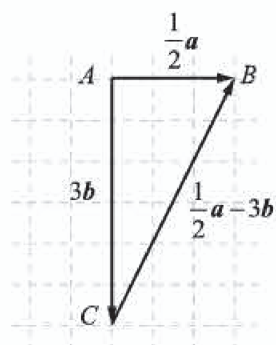


图 8 - 20

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}.$$

根据向量平行和数乘向量的定义可以直接得到以下结论：

平行向量基本定理　如果向量 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是，存在唯一的实数 λ，使

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}.$$

如图 8-21 所示，若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，并且两者的方向相同，$\boldsymbol{a}$ 的长度是 $\boldsymbol{b}$ 的 2 倍，则 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$.

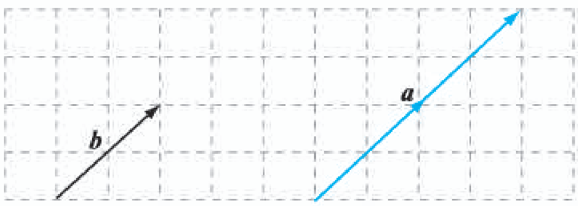


图 8-21

读一读

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量是指与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量，通常记作 $\boldsymbol{a}_0$，则 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0$ 或 $\boldsymbol{a}_0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

例 8　已知 $\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为非零向量，判断下列各题中向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是否平行.

(1) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}$；

(2) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.

解：(1) 因为 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

(2) 因为 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

例 9　如图 8-22 所示，已知点 E，F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 的中点.

求证：$\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{EF}$.

证明：因为点 E，F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 的中点，所以

$$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AF},$$

又因为

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})=2\overrightarrow{EF},$$

所以

$$\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{EF}.$$

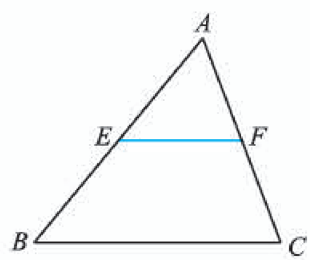


图 8-22

练习 8.2.3

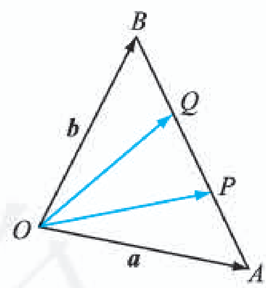
1. 化简：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(2) $4(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})+5(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$；

(3) $\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-\frac{1}{4}(5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.

2. 如图所示，已知点 P 和点 Q 是线段 AB 的三等分点，点 O 是线段 AB 外任意一点，如果 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$.



（第 2 题）

*3. 已知点 O 为平面内任意一点，且 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量. 求证：A，B，C 三点共线.

8.3 向量的内积

问题　在力学中，一个物体受到力的作用，并在力的方向上产生了一段位移，这个力就对物体做了功. 如果一个物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生位移 $\boldsymbol{s}$，如图 8－23 所示，那么力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角.

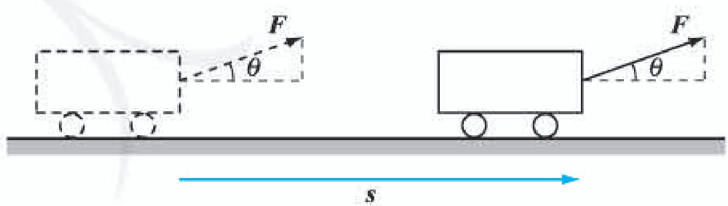


图 8－23

由上可知，功是一个数量，它由力和位移两个向量来确定. 由此我们可以思考：两个向量之间是否存在一种新的运算呢？

为了解决上述问题，我们引入向量内积的概念.

首先我们给出两个向量的夹角的定义. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，如图 8－24 所示，则 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

一般地，规定 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$.

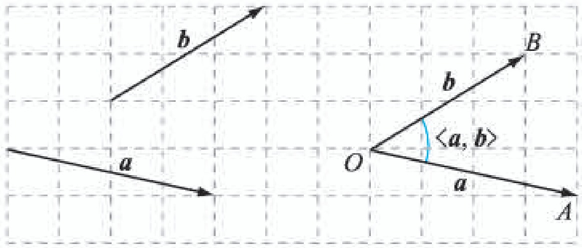


图 8－24

当 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=0$ 时，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同；

当 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\pi$ 时，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反；

当 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$ 时，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$$

称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**内积（数量积或点积）**，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

> **读一读**
>
> 美国科学家吉布斯把内积称作“点积”，并记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，这种记法流行至今.

规定：零向量与任意向量 $\boldsymbol{a}$ 的内积为 0，即 $\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

例 1 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=6$，求出下列各种情况下 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值：

（1）$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=60°$；（2）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；（3）$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

解：（1）因为 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=60°$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°\\&=3\times6\times\frac{1}{2}\\&=9.\end{aligned}$$

（2）因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=90°$，于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 90°\\&=0.\end{aligned}$$

（3）因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反.

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同时，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=0°$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 0°\\&=3\times6\times1\\&=18;\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反时，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=180°$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 180°\\&=3\times6\times(-1)\\&=-18.\end{aligned}$$

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ，根据向量内积的定义可以得到如下运算律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 数乘结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

(3) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

同时，两个向量的内积有如下性质：

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，则

(1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$；

(3) $\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}$；

(4) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$.

试一试

用向量内积的定义证明这四个性质.

例 2 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$，求：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$； (2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

解： (1)

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\=&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\=&|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2\\=&4-1\\=&3.\end{aligned}$$

(2) 因为

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2\\=&(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\=&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\=&|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2\\=&4+2\times2\times1\times\cos 60^\circ+1\\=&7,\end{aligned}$$

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

例 3 证明菱形的对角线互相垂直.

证明： 如图 8-25 所示，已知菱形 $OACB$，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

因为

$$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

所以

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0,$$

故

$$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{BA}.$$

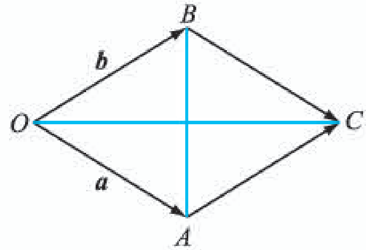


图 8－25

即菱形的对角线互相垂直.

例 4 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{2}$，求 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$.

解： 因为

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2\sqrt{2}}{2\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

由于 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$，所以

$$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}.$$

练习 8.3

1. 根据已知条件，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$：

(1) $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=7$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$；

(2) $|\boldsymbol{a}|=8$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\pi$；

(3) $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=60°$；

(4) $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=12$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=150°$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=60°$，求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=8$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=120°$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

*4. 根据已知条件，求 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$：

(1) $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$；

(2) $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-8$；

(3) $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=7$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-14$；

(4) $|\boldsymbol{a}|=14$，$|\boldsymbol{b}|=12$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

*5. 已知 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 为单位向量，且 $\langle\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}\rangle=60°$，求证：$(2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})\perp\boldsymbol{m}$.

8.4 平面向量的直角坐标及其应用

前面的内容中，我们用有向线段表示向量并研究了向量的运算. 现在，我们把向量放入平面直角坐标系中，用坐标表示向量并研究其运算和应用.

8.4.1 平面向量的直角坐标及其运算

1. 平面向量的直角坐标

问题 在图 8-26 所示的平面直角坐标系中，分别取与 x 轴和 y 轴的正方向同向的两个单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，已知点 $A(3,\ 2)$，向量 $\overrightarrow{OA}$ 如何用向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 来表示?

在图 8－26 中，$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$，根据平行向量基本定理可知，$\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{BA}=2\boldsymbol{j}$，所以

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}.$$

有序数对（3，2）可以唯一地表示向量 $\overrightarrow{OA}$.

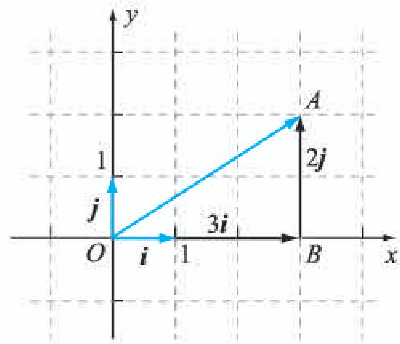


图 8－26

一般地，对于平面直角坐标系 xOy 中的任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，如图 8－27 所示，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，若点 A 的坐标为（x，y），则 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，我们把（$x$，$y$）称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在平面直角坐标系 xOy 中的坐标，记作

$$\boldsymbol{a}=(x，y).$$

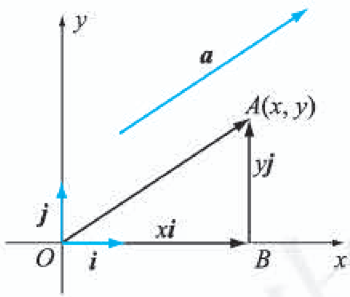


图 8－27

想一想

零向量和单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 的坐标分别是什么？

显然，若点 A 的坐标为（x，y），则 $\overrightarrow{OA}=(x，y)$.

由定义可知，如果 $\boldsymbol{a}=(x_1，y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2，y_2)$，那么

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1=x_2 \text{ 且 } y_1=y_2.$$

例 1 如图 8－28 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，用单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 分别表示向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，并求出它们的坐标.

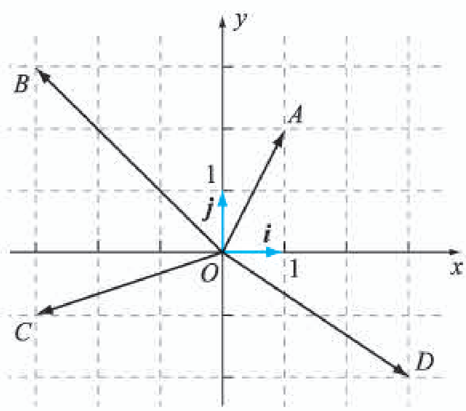


图 8－28

解： $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}=(1，2)$；

$\overrightarrow{OB}=-3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}=(-3，3)$；

$\overrightarrow{OC}=-3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}=(-3，-1)$；

$\overrightarrow{OD}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}=(3，-2)$.

2. 平面向量的坐标运算

如果 $\boldsymbol{a}=(x_1，y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2，y_2)$，那么 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}$. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+y_2\boldsymbol{j}\\&=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2).$$

我们也可以证明

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2),$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1),\ \lambda\in\mathbf{R},$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

做一做

请同学们证明左边这三个式子.

例 2 已知 $\boldsymbol{a}=(4,\ -3)$，$\boldsymbol{b}=(-6,\ 8)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$； (2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$； (3) $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$； (4) $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解：(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,\ -3)+(-6,\ 8)=(-2,\ 5)$.

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,\ -3)-(-6,\ 8)=(10,\ -11)$.

(3) $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=2(4,\ -3)-3(-6,\ 8)=(8,\ -6)-(-18,\ 24)=(26,\ -30)$.

(4) 因为 $\boldsymbol{a}=(4,\ -3)$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(4,\ -3)-(-6,\ 8)=(14,\ -14)$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=4\times14+(-3)\times(-14)=98.$$

在平面直角坐标系 xOy 中，若点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2,\ y_2)-(x_1,\ y_1)\\&=(x_2-x_1,\ y_2-y_1).\end{aligned}$$

例 3 已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点的坐标分别是 $A(5,\ -2)$，$B(0,\ 2)$，$C(-1,\ 7)$，求点 D 的坐标.

解：设点 D 的坐标是 $(x,\ y)$，因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，所以

$$(x,\ y)-(5,\ -2)=(-1,\ 7)-(0,\ 2),$$

即

$$(x,\ y)-(5,\ -2)=(-1,\ 5),$$

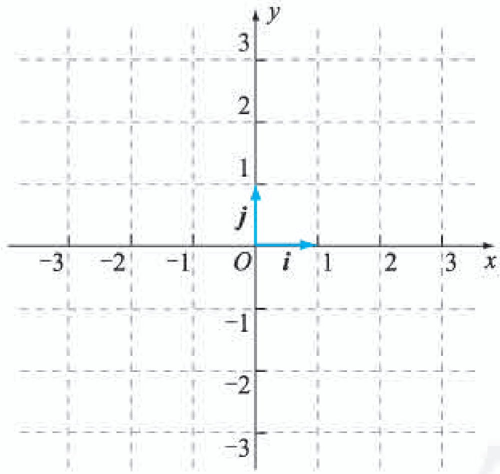
可得

$$(x,\ y)=(4,\ 3).$$

故点 D 的坐标为 $(4,\ 3)$.

练习 8.4.1

1. 在平面直角坐标系 xOy 中，作出向量 $\overrightarrow{OA}=(2,\ 3)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,\ 2)$，$\overrightarrow{OC}=(2,\ -1)$，$\overrightarrow{OD}=(-3,\ 0)$.



（第 1 题）

2. 如果向量 $\boldsymbol{a}=(1-x,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,\ y+4)$，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，求 x，y 的值.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(5,\ -2)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　　(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；

(3) $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$；　　(4) $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

4. 已知 A，B 两点的坐标，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$ 的坐标：

(1) $A(-3,\ 4)$，$B(6,\ -2)$；　　(2) $A(10,\ -8)$，$B(5,\ 4)$；

(3) $A(-5,\ 0)$，$B(-8,\ -7)$；　　(4) $A(5,\ 11)$，$B(-3,\ -4)$.

5. 已知点 $A(3,\ -2)$，$B(-5,\ -1)$，且 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，求点 M 的坐标.

6. 在梯形 $ABCD$ 中，底 DC 长是底 AB 长的 2 倍，且已知顶点 $A(-1,\ -1)$，$B(1,\ 1)$，$D(-2,\ -3)$，求点 C 的坐标.

8.4.2　平面向量平行和垂直的坐标表示

1. 平面向量平行的坐标表示

平行向量基本定理告诉我们，如果向量 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是，存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 可用坐标表示为

$$(x_1,\ y_1)=\lambda(x_2,\ y_2),$$

即

$$\begin{cases}x_1=\lambda x_2,\\ y_1=\lambda y_2,\end{cases}$$

消去 λ，得

$$x_1y_2-y_1x_2=0.$$

所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$）的充要条件是 $x_1y_2-y_1x_2=0$.

当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，易证 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件也是 $x_1y_2-y_1x_2=0$.

因此，对于任意向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，都有

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-y_1x_2=0.$$

例 4 判断下列各组向量是否平行：

(1) $\boldsymbol{a}=(-1, 3)$，$\boldsymbol{b}=(5, -15)$；

(2) $\boldsymbol{e}=(2, 0)$，$\boldsymbol{f}=(0, 3)$.

解：(1) 因为 $(-1)\times(-15)-3\times5=0$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行.

(2) 因为 $2\times3-0\times0=6\neq0$，所以向量 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 不平行.

例 5 如果向量 $\boldsymbol{a}=(-1, x)$ 与 $\boldsymbol{b}=(-x, 2)$ 平行且方向相同，求 x 的值.

解：因为 $\boldsymbol{a}=(-1, x)$ 与 $\boldsymbol{b}=(-x, 2)$ 平行，所以

$$(-1)\times2-x(-x)=0,$$

解得

$$x=-\sqrt{2}\text{或 }x=\sqrt{2}.$$

又因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同，所以 $x=\sqrt{2}$.

2. 平面向量垂直的坐标表示

我们知道，对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，有

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

如果向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，则有

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0.$$

例 6 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2, x)$，$\boldsymbol{b}=(4, 8)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 x 的值.

解：因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即

$$2\times4+8x=0,$$

解得

$$x=-1.$$

例 7 已知点 $A(1, 2)$，$B(2, 3)$，$C(-2, 5)$，求证：$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

证明：因为

$$\overrightarrow{AB}=(2-1, 3-2)=(1, 1),$$
$$\overrightarrow{AC}=(-2-1, 5-2)=(-3, 3),$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-3)+1\times3=0,$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}.$$

练习 8.4.2

1. 判断下列各组向量是否平行：

(1) $\boldsymbol{a}=(6, -2)$，$\boldsymbol{b}=(3, 1)$； (2) $\boldsymbol{c}=(-1, 0)$，$\boldsymbol{d}=(3, 0)$；

(3) $\boldsymbol{e}=(-4, -3)$，$\boldsymbol{f}=(8, 6)$； (4) $\boldsymbol{g}=(10, 5)$，$\boldsymbol{h}=(4, 2)$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2, x)$，$\boldsymbol{b}=(4, 8)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 x 的值.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1, x)$，$\boldsymbol{b}=(x, 1)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反，求 x 的值.

4. 已知点 $A(0, 3)$，$B(2, -3)$，$C(7, -8)$，$D(3, 4)$，求证：$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$.

5. 判断下面各组向量是否垂直：

(1) $\boldsymbol{a}=(-3, 2)$，$\boldsymbol{b}=(4, 6)$； (2) $\boldsymbol{a}=(7, 1)$，$\boldsymbol{b}=(-2, 14)$；

(3) $\boldsymbol{a}=(-2, 0)$，$\boldsymbol{b}=(0, 7)$； (4) $\boldsymbol{a}=(3, 5)$，$\boldsymbol{b}=(-5, -3)$.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1, x)$，$\boldsymbol{b}=(2, 3)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 x 的值.

7. 已知点 $A(7, 5)$，$B(2, 3)$，$C(4, -2)$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

8.4.3 中点公式和距离公式

1. 中点公式

问题 已知点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$，如何求线段 AB 的中点坐标呢？

如图 8－29 所示，设线段 AB 的中点为 $M(x, y)$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).\end{aligned}$$

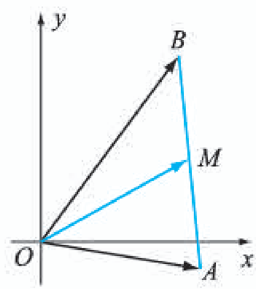


图 8－29

故有

$$(x, y)=\frac{1}{2}[(x_1, y_1)+(x_2, y_2)]=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

即

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

这就是线段中点坐标的计算公式，简称**中点公式**.

例如，若点 $A(1, 3)$，$B(5, -7)$，则线段 AB 的中点坐标为 $(3, -2)$.

例 8 求点 $A(2, 7)$ 关于点 $M(5, -2)$ 的对称点 A' 的坐标.

解： 设点 A' 的坐标是 (x, y)，由中点公式知

$$\frac{2+x}{2}=5，\frac{7+y}{2}=-2，$$

解得 $x=8$，$y=-11$. 所以点 A' 的坐标是 $(8, -11)$.

2. 距离公式

已知向量 $\boldsymbol{a}=(x, y)$，由 $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=x^2+y^2$，可得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

这就是向量长度的计算公式.

若平面内两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)，$$

于是

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

这就是平面内两点间的**距离公式**.

例 9 已知向量 $\boldsymbol{a}=(4, -3)$，$\boldsymbol{b}=(-6, 8)$，求：

(1) $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$； (2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

解：(1) $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}+\sqrt{(-6)^2+8^2}=5+10=15$.

(2) 因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4, -3)+(-6, 8)=(-2, 5)$，所以

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-2)^2+5^2}=\sqrt{29}.$$

例 10 已知点 $A(1, 2)$，$B(2, 3)$，$C(2, 1)$，求△ABC 的中线 AD 的长度.

解： 设点 $D(x, y)$，则

$$x=\frac{2+2}{2}=2，y=\frac{1+3}{2}=2，$$

因此点 D 的坐标为 $(2, 2)$.

由两点间的距离公式可得

$$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{(2-1)^2+(2-2)^2}=1，$$

故中线 AD 的长度为 1.

例 11 设向量 $\boldsymbol{a}=(3, -1)$，$\boldsymbol{b}=(1, -2)$，求 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

解： 因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1+(-1)\times(-2)=5，$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}，$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}，$$

所以

$$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

又因为 $0\leqslant\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$，所以 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$.

练习 8.4.3

1. 已知 A，B 两点的坐标，求线段 AB 的中点坐标：

(1) $A(7, -2)$，$B(-1, 3)$；　　(2) $A(0, -4)$，$B(5, 0)$；

(3) $A(-2, 0)$，$B(5, 0)$；　　(4) $A(-1, 5)$，$B(-11, 9)$.

2. 求点 $A(-2, 3)$ 关于点 $M(1, 1)$ 的对称点 A' 的坐标.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2, -1)$，$\boldsymbol{b}=(2, -4)$，求 $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

4. 求下列各组 A，B 两点之间的距离：

(1) $A(2, 6)$，$B(1, 3)$；　　(2) $A(6, 1)$，$B(-6, -4)$；

(3) $A(-7, 8)$，$B(1, -7)$；　　(4) $A(1, -2)$，$B(5, 2)$.

5. 已知 x 轴上的点 P 到点 $A(2, -3)$ 的距离是 5，求点 P 的坐标.

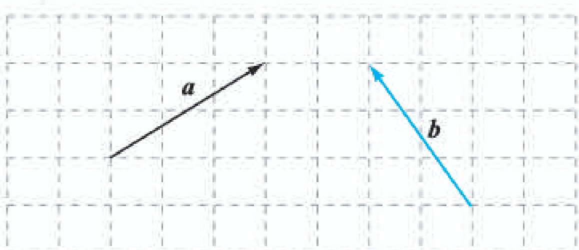
*6. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$：

(1) $\boldsymbol{a}=(1, -3)$，$\boldsymbol{b}=(2, -6)$；　　(2) $\boldsymbol{a}=(12, -5)$，$\boldsymbol{b}=(4, 3)$.

习题八

1. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作出下列向量：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　　(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；　　(3) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.



（第 1 题）

2. 化简：

(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{AO}$；　　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$；

(3) $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{AP}$；　　(4) $\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AP}$.

3. 化简：

(1) $-(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})+3(\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a})$；　　(2) $\frac{1}{2}(4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})-(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(3) $4\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}\right)-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；　　(4) $2(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})+3(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

4. 已知在$\triangle ABC$中，$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=4$，$\angle BAC=\frac{\pi}{4}$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$.

5. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　　(2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；　　(4) $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$.

6. 已知点$A(-1,\ 1)$，$B(0,\ -2)$，$C(3,\ 0)$，$D(2,\ 3)$，求证：四边形$ABCD$是平行四边形.

7. 判断下面各组向量的位置关系：

(1) $\boldsymbol{a}=(-3,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ 9)$；　　(2) $\boldsymbol{a}=(12,\ -16)$，$\boldsymbol{b}=(-6,\ 8)$；

(3) $\boldsymbol{a}=(0,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(0,\ -5)$；　　(4) $\boldsymbol{a}=(1,\ -3)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ 1)$.

8. 已知点$P(a,\ 3)$关于点$M(8,\ -1)$的对称点为$P'(4,\ b)$，求a，b的值.

9. 已知向量$\boldsymbol{a}=(-1,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,\ 5)$，求：

(1) $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　　(2) $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；　　(4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

10. 已知下列各组中点A，B的坐标，求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标以及$\overrightarrow{AB}$的长度：

(1) $A(2,\ 5)$，$B(4,\ 5)$；　　(2) $A(-2,\ -4)$，$B(-2,\ 2)$；

(3) $A(-8,\ 1)$，$B(4,\ 6)$；　　(4) $A(3,\ -4)$，$B(6,\ 0)$.

11. 已知点M在直线$y=x$上，并且到点$A(5,\ 7)$的距离是10，求点M的坐标.

*12. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$：

(1) $\boldsymbol{a}=(1,\ -3)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ -6)$；　　(2) $\boldsymbol{a}=(0,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(0,\ -1)$；

(3) $\boldsymbol{a}=(-3,\ 0)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ 1)$；　　(4) $\boldsymbol{a}=(-7,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ 7)$.

*13. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,\ 1)$，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,\ 2)$，求$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$.

阅读与实践

向量概念的推广在商店经营中的应用

本章学习的平面向量的坐标是用一个有序实数对$(x,\ y)$来表示的，这

样的向量称为二维向量. 德国数学家格拉斯曼提出，可用三个有序实数表示一个向量. 例如，用有序实数组 (a_1, a_2, a_3) 表示空间向量 $\boldsymbol{a}$，这样的向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 称为三维向量. 后来人们从这个角度把向量的维度进行拓展，四维向量表示为 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4)$，……，$n$ 维向量表示为 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，并且根据二维向量和三维向量的理论建立了 n 维向量的理论.

例如，某商店有 A，B，C，D 四种商品，它们的进价、售价和一天的销量如下表所示.

商品	A	B	C	D
进价/元	3	5	12	30
售价/元	5	10	15	32
销量/件	30	50	70	20

按商品 A，B，C，D 的顺序写出进价向量 $\boldsymbol{c}=(3, 5, 12, 30)$，售价向量 $\boldsymbol{p}=(5, 10, 15, 32)$，该天的销量向量 $\boldsymbol{q}=(30, 50, 70, 20)$，那么这一天四种商品的总利润如何计算呢？

我们可以把每件商品的利润分别求出，然后通过求和来计算总利润，即：

商品 A 的利润：$(5-3)\times30=60$ 元；

商品 B 的利润：$(10-5)\times50=250$ 元；

商品 C 的利润：$(15-12)\times70=210$ 元；

商品 D 的利润：$(32-30)\times20=40$ 元.

所以，这一天四种商品的总利润为 $60+250+210+40=560$ 元.

但当商品种类较多时，再逐一计算利润就比较烦琐. 这时，我们可以利用向量的知识，借助计算机软件来完成.

向量的维数扩展以后，向量相等的概念也随之发生变化：两个向量相等是指它们的维数相同而且对应的分量也相等.

一般地，对于两个 n 维向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，有以下结论：

(1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_i=b_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$；

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$；

(3) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, \cdots, a_n-b_n)$;

(4) $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$;

(5) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

接下来，我们用四维向量的知识求出上述商店当天的总利润：

因为 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c}=(5, 10, 15, 32)-(3, 5, 12, 30)=(2, 5, 3, 2)$，$\boldsymbol{q}=(30, 50, 70, 20)$，所以当天的总利润为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{q}&=2\times30+5\times50+3\times70+2\times20\\&=60+250+210+40\\&=560\text{ 元}.\end{aligned}$$

如果某家超市经营 1 000 种商品，按照商品的编号排序，单件商品的利润和销量分别构成向量

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_{1\,000}),$$

$$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_{1\,000}),$$

那么，该超市的总利润就是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的内积，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{1\,000}b_{1\,000}.$$

随着当今社会经济区域的集团化发展，一个企业可以有数千种产品、数以万计的进出交易记录，我们根据向量运算的原理，利用计算机软件，可帮助企业实现快捷有序的运作.

第九章

直线与圆的方程

现实世界中，宇宙飞船帮助人们实现了嫦娥奔月的梦想，网络技术满足了人们便捷沟通的愿望．而在数学世界中，笛卡儿坐标系建立了代数与几何联系的桥梁．

圆是第一个最简单、最完美的图形．

——普罗克洛斯

圆圈的里面代表我现在学到的知识，圆圈的外面仍然有着无限的空白，而且随着圆愈来愈大，圆圈所接触的空白也愈来愈大．

——爱因斯坦

直线与圆的方程是解析几何的基础内容．本章主要是通过坐标法在平面直角坐标系中得出直线和圆的方程，运用代数方法研究直线与圆的几何性质及其位置关系．需要注意从中体会数形结合的思想，初步养成用代数方法解决几何问题的习惯．

9.1　直线的方程

我们知道，在平面直角坐标系中，一次函数的图像是一条直线．例如，$y=2x+1$ 是关于 x，y 的二元一次方程，它的图像是一条直线，记作直线 l，那么，直线 l 上任意一点的坐标都满足该方程；反之，以该方程的解为坐标的点都在直线 l 上．这时，我们把二元一次方程 $y=2x+1$ 称为直线 l 的方程，简称为直线 $y=2x+1$．

9.1.1　直线的点法式方程与点向式方程

1. 直线的方向向量和法向量

问题　观察弩弓射箭（图 9－1），在不考虑重力和风力等因素的理想状态下，如何射中目标？

在这个问题中，将箭瞄准靶心，扣动扳机，箭就会沿着箭杆所指的方向射出，射中靶心．箭运动的轨迹在由靶心的位置和箭杆运动的方向所确定的直线上．我们知道，一个非零向量可以确定一个方向，如果把靶心看成一个点，那么这个点和该非零向量可以确定一条直线．

图 9－1

与一条直线平行的非零向量称为这条直线的**方向向量**，通常用 $\boldsymbol{v}$ 表示，如图 9－2 所示．显然，一条直线的方向向量不是唯一的，即如果 $\boldsymbol{v}=(v_1,\ v_2)$ 是直线的一个方向向量，则 $t\boldsymbol{v}$（$t\in\mathbf{R}$，$t\neq0$）也是这条直线的方向向量．

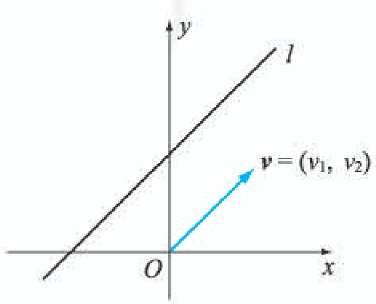


图 9－2

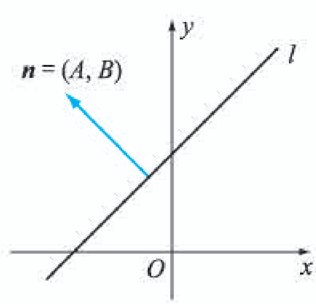


图 9－3

与一条直线垂直的非零向量称为这条直线的**法向量**，通常用 $\boldsymbol{n}$ 表示，如图 9－3 所示．一条直线的法向量也不是唯一的，即如果 $\boldsymbol{n}=(A,\ B)$ 是直线的一个法向量，

则 $t\boldsymbol{n}$ （$t\in\mathbf{R}$，$t\neq0$） 也是这条直线的法向量.

我们不难发现，一条直线的方向向量与法向量垂直.

2. 直线的点法式方程

在平面直角坐标系中，我们来求过点 $P_0(x_0, y_0)$，并且法向量为 $\boldsymbol{n}=(A, B)$ 的直线 l 的方程，如图 9-4 所示.

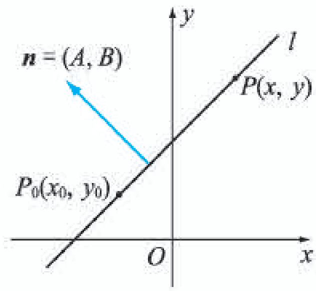


图 9-4

设点 $P(x, y)$ 是一个动点，则点 P 在直线 l 上的充分必要条件是向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，又因为

$$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,\ y-y_0),$$

所以有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad ①$$

方程①是由直线上的一点 $P_0(x_0, y_0)$ 和直线的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B)$ 确定的，所以这个方程称为直线的**点法式方程**.

例 1　已知直线 m 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(2, 1)$，且直线 m 过点 $P(3, 4)$，求直线 m 的方程.

解：由直线 m 的点法式方程，得

$$2(x-3)+(y-4)=0,$$

整理可得，所求直线方程为

$$2x+y-10=0.$$

3. 直线的点向式方程

现在我们用直线上的一点和直线的一个方向向量来推导直线的方程.

如图 9-5 所示，已知直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2)$，且直线 l 过点 $P_0(x_0, y_0)$，求直线 l 的方程.

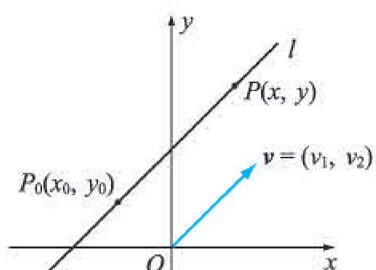


图 9-5

设点 $P(x, y)$ 是一个动点，则点 P 在直线 l 上的充分必要条件是

$$\boldsymbol{v}\,/\!/\,\overrightarrow{P_0P},$$

上述充分必要条件可用坐标表示为

$$v_2(x-x_0)-v_1(y-y_0)=0. \qquad ②$$

方程②是由直线上的一点 $P_0(x_0, y_0)$ 和直线的一个方向向量 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2)$ 确定的，因此这个方程称为直线的**点向式方程**.

特别地，如果 $v_1\neq0$，且 $v_2\neq0$，方程②还可以化为

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}. \qquad ③$$

如果 $v_1=0$，且 $v_2\neq 0$，则可得到方程

$$x=x_0,$$

该方程表示通过点 $P_0(x_0, y_0)$，且垂直于 x 轴的直线，如图 9-6 所示；

如果 $v_1\neq 0$，且 $v_2=0$，则可得到方程

$$y=y_0,$$

该方程表示通过点 $P_0(x_0, y_0)$，且垂直于 y 轴的直线，如图 9-7 所示.

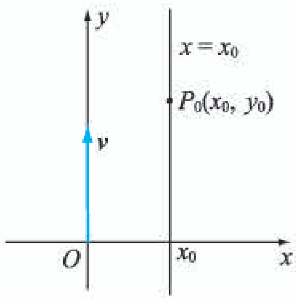


图 9-6

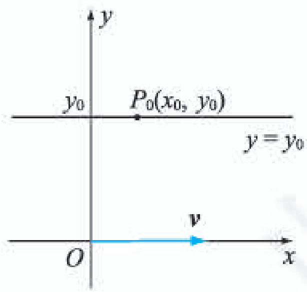


图 9-7

想一想

在平面直角坐标系中，x 轴与 y 轴所在直线的方程分别是怎样的？

例 2 求下列过点 P，且一个方向向量为 $\boldsymbol{v}$ 的直线方程：

(1) $P(1, -2)$，$\boldsymbol{v}=(-1, 3)$；

(2) $P(3, -2)$，$\boldsymbol{v}=(0, 2)$；

(3) $P(2, -1)$，$\boldsymbol{v}=(3, 0)$.

解：(1) 根据直线的点向式方程，得

$$3(x-1)-(-1)\times(y+2)=0,$$

整理可得，所求直线的方程为

$$3x+y-1=0.$$

(2) 因为 $v_1=0$，所以过点 $(3, -2)$ 的直线方程为

$$x=3.$$

(3) 因为 $v_2=0$，所以过点 $(2, -1)$ 的直线方程为

$$y=-1.$$

例 3 求过点 $A(-2, 1)$，$B(1, 3)$ 的直线方程.

解：直线 AB 的方向向量可取为 $\overrightarrow{AB}=(1, 3)-(-2, 1)=(3, 2)$，又因为直线过点 $A(-2, 1)$，根据直线的点向式方程，得

$$2(x+2)-3(y-1)=0,$$

整理可得，所求直线的方程为

$$2x-3y+7=0.$$

试一试

在例 3 中，若方向向量取为 $\overrightarrow{BA}$，你能得出怎样的直线方程？

练习 9.1.1

1. (口答) 判断点 $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, -1)$, $D(-1, -1)$ 是否在直线 $x-y=0$ 上.

2. 求过点 P, 且一个法向量为 $\boldsymbol{n}$ 的直线方程:

(1) $P(-1, 2)$, $\boldsymbol{n}=(3, 4)$;

(2) $P(-1, -2)$, $\boldsymbol{n}=(3, -4)$;

(3) $P(0, -2)$, $\boldsymbol{n}=(-3, -4)$;

(4) $P(-1, 0)$, $\boldsymbol{n}=(-3, 4)$;

(5) $P(2, -1)$, $\boldsymbol{n}=(1, 0)$;

(6) $P(-2, 1)$, $\boldsymbol{n}=(0, -3)$.

3. 已知$\triangle ABC$ 的顶点$A(-5, 6)$, $B(-1, -4)$, $C(3, 2)$, 求$\triangle ABC$ 三条高所在直线的方程.

4. 已知点 $A(-3, 2)$, $B(1, -4)$, 求线段 AB 的垂直平分线的方程.

*5. 求过点 P, 且一个方向向量为 $\boldsymbol{v}$ 的直线方程:

(1) $P(1, -3)$, $\boldsymbol{v}=(-3, 2)$;　　(2) $P(3, 0)$, $\boldsymbol{v}=(-1, -2)$;

(3) $P(-2, 4)$, $\boldsymbol{v}=(-3, 0)$;　　(4) $P(4, -2)$, $\boldsymbol{v}=(0, 1)$.

*6. 求过两点 A, B 的直线方程:

(1) $A(-1, 3)$, $B(2, 4)$;　　(2) $A(2, 0)$, $B(0, 5)$.

9.1.2　直线的点斜式方程与斜截式方程

如图 9-8 所示, 日晷的晷针是倾斜的, 港珠澳大桥的每一条拉索也是倾斜的. 在解析几何中, 如何描述平面直角坐标系中直线的倾斜程度呢?

图 9-8

1. 直线的倾斜角和斜率

一般地, 我们把一条直线向上的方向与 x 轴正方向所成的最小正角 α, 称为这条

直线的**倾斜角**. 特别地，当直线和 y 轴垂直时，我们规定这条直线的倾斜角为 0°. 如图 9 - 9（1）（2）所示，直线 l 的倾斜角是 45°，直线 m 的倾斜角是 135°.

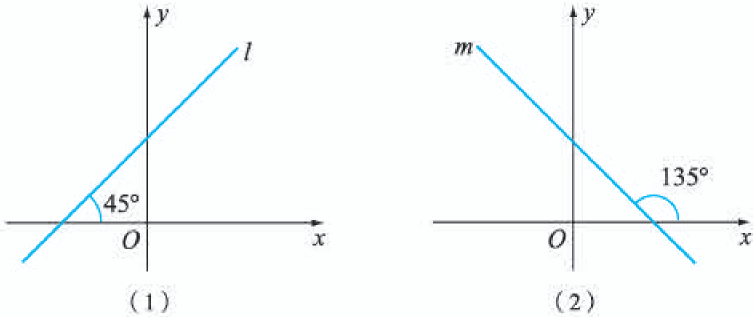


图 9 - 9

不难得出，直线的倾斜角 α 的取值范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$.

倾斜角不等于 90°的直线，它的倾斜角 α 的正切值称为这条直线的**斜率**，通常用字母 k 来表示，即

$$k=\tan\alpha.$$

倾斜角为 90°的直线，斜率不存在.

我们知道，两点确定一条直线. 在平面直角坐标系中，如果已知直线上两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，那么这条直线的倾斜角也就确定了. 如果倾斜角不是 90°，那么斜率也是确定的. 下面我们来研究点 P_1，P_2的坐标和直线 P_1P_2的斜率之间的关系.

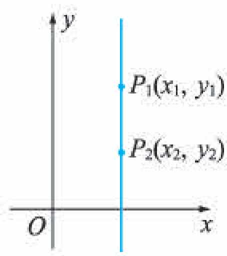


图 9 - 10

如图 9 - 10 所示，当 $x_1=x_2$时，直线 P_1P_2垂直于 x 轴，它的倾斜角为 90°，直线的斜率不存在.

如图 9 - 11 所示，当 $x_1\neq x_2$时，设直线 P_1P_2的倾斜角为 α，则直线 P_1P_2的斜率为

$$k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

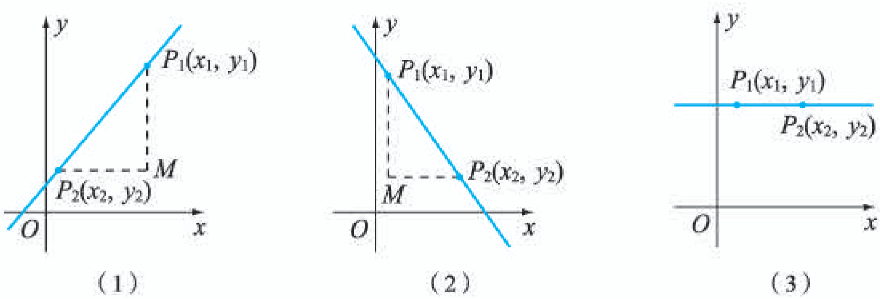


图 9 - 11

一般地，若 $x_1 \neq x_2$，则过点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

想一想

在图 9－11（3）中，直线的倾斜角是多少，斜率呢？

例 4　判断下列各组直线 P_1P_2 的斜率是否存在，若存在，求出它的值：

（1）$P_1(-2, 0)$，$P_2(-5, 3)$；

（2）$P_1(-2, 3)$，$P_2(-5, 3)$；

（3）$P_1(2, 3)$，$P_2(2, 5)$.

解：（1）因为 $-2 \neq -5$，所以直线 P_1P_2 的斜率存在，且

$$k=\frac{3-0}{-5-(-2)}=-1.$$

（2）因为 $-2 \neq -5$，所以直线 P_1P_2 的斜率存在，且

$$k=\frac{3-3}{-5-(-2)}=0.$$

（3）因为点 P_1，P_2 的横坐标相等，所以直线 P_1P_2 的斜率不存在.

2. 直线的点斜式方程与斜截式方程

已知直线 l 过点 $P_0(x_0, y_0)$，斜率为 k，如何求直线 l 的方程呢？

不妨设点 $P(x, y)$ 为直线 l 上不同于 $P_0(x_0, y_0)$ 的一动点，则

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

即

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

这个方程是由直线上的一个点 $P_0(x_0, y_0)$ 和斜率 k 所确定的，我们把这个方程称为直线的**点斜式方程**.

特别地，当 $k=0$ 时，直线的方程变为

$$y=y_0,$$

这时直线垂直于 y 轴.

若一条直线过点 $(0, b)$，且斜率为 k（如图 9－12 所示），则由直线的点斜式方程得

$$y-b=k(x-0),$$

整理得

$$y=kx+b.$$

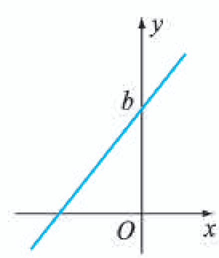


图 9－12

这种形式的方程，与我们所熟知的一次函数的解析式类似，其中 k 为直线的斜率，直线与 y 轴的交点的纵坐标 b 称为直线在 y 轴上的**截距**，这个方程称为直线的**斜截式方程**.

例 5　求下列直线的方程：

（1）过点（0，0），且斜率为 2；

（2）过点（2，−1），且斜率为 1；

（3）过点（1，2），（−3，6）；

（4）过点（1，−3），且倾斜角为 60°；

（5）在 y 轴上的截距为 −2，且倾斜角为 135°.

解：（1）由直线的点斜式方程得

$$y-0=2(x-0),$$

整理可得，所求直线方程为

$$2x-y=0.$$

（2）由直线的点斜式方程得

$$y+1=x-2,$$

整理可得，所求直线方程为

$$x-y-3=0.$$

（3）直线的斜率 $k=\dfrac{6-2}{-3-1}=-1$，由直线的点斜式方程得

$$y-2=-(x-1),$$

整理可得，所求直线方程为

$$x+y-3=0.$$

（4）直线的斜率 $k=\tan 60°=\sqrt{3}$，由直线的点斜式方程得

$$y+3=\sqrt{3}(x-1),$$

整理可得，所求直线方程为

$$\sqrt{3}x-y-3-\sqrt{3}=0.$$

（5）直线的斜率 $k=\tan 135°=-1$，由直线的斜截式方程得

$$y=-x-2,$$

整理可得，所求直线方程为

$$x+y+2=0.$$

练习 9.1.2

1. 经过下列两点的直线的斜率是否存在？如果存在，求出它的值：

（1）（1，−1），（−3，2）；　　（2）（1，−2），（5，−2）；

(3) (3，4)，(3，-1)； (4) (3，0)，(0，$\sqrt{3}$).

2. 求满足下列条件的直线方程：

(1) 过点 (2，-3)，斜率为 2；

(2) 过点 (0，3)，(2，1)；

(3) 过点 (2，3)，平行于 y 轴；

(4) 过点 (-2，1)，平行于 x 轴；

(5) 过点 (-3，1)，倾斜角为 30°；

(6) 斜率为 -2，在 y 轴上的截距为 2.

3. 填空题：

(1) 直线 l 的方程为 $y=-2x+4$，它的斜率 $k=$________，它在 y 轴上的截距 $b=$________；

(2) 直线 m 的方程为 $y+3=x-1$，它的斜率 $k=$________，倾斜角 $\alpha=$________，它在 y 轴上的截距 $b=$________.

4. 已知直线 $y-3=k(x-5)$ 过点 (-1，-2)，求 k 的值.

5. 已知直线 $y=kx+b$ 过点 $A(1，3)$，$B(-5，11)$，求 k 和 b 的值.

6. 已知△ABC 的三个顶点为 $A(-1，2)$，$B(3，4)$，$C(-2，5)$.

(1) 求直线 AB 的方程；

(2) 求 BC 边上中线所在直线的方程.

7. 已知点 $A(3，-1)$，$B(-1，1)$，$C(a，0)$ 在一条直线上，求实数 a 的值.

9.1.3 直线的一般式方程

前面我们学习了直线的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

由此可知：**任何关于 x，y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$ (A，B 不全为零) 在平面直角坐标系中，都有唯一的一条直线与之对应.**

因为在平面直角坐标系中，二元一次方程与直线是一一对应关系，这样，我们就可把研究直线的几何问题转化为研究二元一次方程的代数问题.

我们把方程

$$Ax+By+C=0 \ (A，B \text{ 不全为零})$$

称为直线的**一般式方程.**

例 6 求下列直线的一般式方程：

(1) $\boldsymbol{n}=(3，4)$ 是直线的一个法向量，且该直线经过点 (-1，-2)；

(2) 直线过点 (1，-4)，且其斜率为 2.

解：(1) 由直线的点法式方程得

$$3(x+1)+4(y+2)=0,$$

则所求直线的一般式方程为

$$3x+4y+11=0.$$

(2) 由直线的点斜式方程得

$$y-(-4)=2(x-1),$$

则所求直线的一般式方程为

$$2x-y-6=0.$$

例 7 求直线 $x+2y+6=0$ 的斜率及其在 y 轴上的截距.

解：由 $x+2y+6=0$ 可知，此直线的斜截式方程为

$$y=-\frac{1}{2}x-3,$$

因此，所求直线的斜率是 $-\frac{1}{2}$，其在 y 轴上的截距是 -3.

例 8 求直线 l：$4x-3y-12=0$ 与 x 轴和 y 轴的交点坐标，并作出直线 l.

解：在直线 l 的方程中，令 $y=0$，得 $x=3$；令 $x=0$，得 $y=-4$.

所以，直线 l 与 x 轴和 y 轴的交点可分别记为 $A(3, 0)$ 和 $B(0, -4)$. 过点 A，B 作直线，即可得到直线 l，如图9－13 所示.

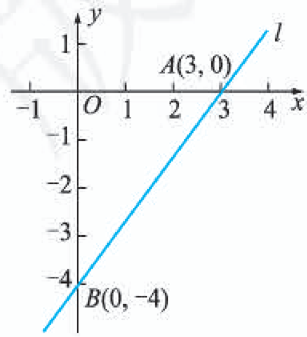


图 9－13

由直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$ 可知，向量 $\boldsymbol{n}=(A, B)$ 为直线的一个法向量，向量 $\boldsymbol{v}=(B, -A)$ 为直线的一个方向向量.

当 $B\neq 0$ 时，直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$ 可化为 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，由此可得直线的斜率 $k=-\frac{A}{B}$.

若已知直线的斜率为 k，则 $(1, k)$ 是这条直线的一个方向向量.

例 9 分别写出下列直线的一个法向量、一个方向向量和斜率（如果斜率存在的话）：

(1) $3x-4y-1=0$；　　(2) $2x-3=0$；　　(3) $3y-2=0$.

解：(1) 直线 $3x-4y-1=0$ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(3, -4)$，一个方向向量 $\boldsymbol{v}=(-4, -3)$，斜率为 $\frac{3}{4}$.

（2）直线 $2x-3=0$ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(2,0)$，一个方向向量 $\boldsymbol{v}=(0,2)$，斜率不存在.

（3）直线 $3y-2=0$ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,3)$，一个方向向量 $\boldsymbol{v}=(3,0)$，斜率为 0.

练习 9.1.3

1. 由下列条件写出直线的一般式方程：

（1）过点 $(3,2)$，法向量 $\boldsymbol{n}=(3,-4)$；

（2）过点 $(1,4)$，斜率 $k=-\dfrac{1}{4}$；

（3）过点 $(2,3)$，平行于 x 轴；

（4）过点 $(-2,-3)$，平行于 y 轴；

（5）在 y 轴上的截距是 -3，斜率 $k=2$；

*（6）过点 $(2,-3)$，方向向量 $\boldsymbol{v}=(-3,4)$.

2. 求下列直线与 x 轴和 y 轴的交点坐标，并作出直线：

（1）$2x-3y+6=0$；

（2）$4x-5y-20=0$.

*3. 填空：

（1）直线 l 的一个方向向量 $\boldsymbol{v}=(2,2)$，它的斜率 $k=$________；

（2）直线 m 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1)$，它的斜率 $k=$________.

*4. 分别写出下列直线的一个法向量、一个方向向量以及斜率（如果斜率存在的话）：

（1）$x-3y+5=0$；

（2）$y=3x+7$；

（3）$2x+5=0$；

（4）$4y+1=0$；

（5）$x=0$；

（6）$y=0$.

9.2　两条直线的位置关系

9.2.1　两条直线平行

问题　我们知道，在同一个平面中，两条不重合的直线，要么相交，要么平行. 对于平面直角坐标系中给定的两条直线，怎样借助其方程来确定它们的位置关系呢？

我们知道，假设两条直线的斜率存在，则两条直线的方程分别为

$$l_1：y=k_1x+b_1,$$
$$l_2：y=k_2x+b_2.$$

设直线 l_1 的倾斜角为 α_1，直线 l_2 的倾斜角为 α_2，如图 9－14 所示.

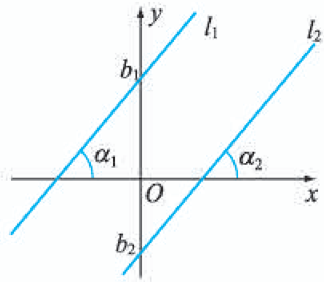


图 9－14

若 $l_1 // l_2$，则一定有 $\alpha_1=\alpha_2$，$b_1 \neq b_2$，可得

$$k_1=k_2 \text{ 且 } b_1 \neq b_2.$$

反之，若 $k_1=k_2$，则有

$$\tan \alpha_1=\tan \alpha_2.$$

又因为 $0° \leqslant \alpha_1<180°$，$0° \leqslant \alpha_2<180°$，结合正切函数的单调性可得

$$\alpha_1=\alpha_2,$$

所以当 $k_1=k_2$，$b_1 \neq b_2$ 时，有 $l_1 // l_2$.

综上可得

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2 \text{ 且 } b_1 \neq b_2.$$

不难看出，直线 l_1 与 l_2 重合的充要条件是 $k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$.

因此，当斜率存在时，对于两条直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，有

l_1 与 l_2 平行 $\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$；

l_1 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$.

如果直线 l_1 与 l_2 的斜率都不存在，如图 9－15 所示，它们都垂直于 x 轴，直线 l_1 的方程可表示为 $x=x_1$，直线 l_2 的方程可表示为 $x=x_2$. 那么：

当 $x_1=x_2$ 时，直线 l_1 与 l_2 重合；

当 $x_1 \neq x_2$ 时，直线 l_1 与 l_2 平行.

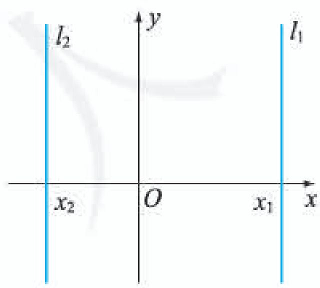


图 9－15

想一想

一条直线的斜率存在，另一条直线的斜率不存在时，这两条直线的位置关系是怎样的呢？

例 1 已知直线 l_1：$2x-4y+7=0$，l_2：$x-2y+5=0$. 求证：$l_1 // l_2$.

证明： 直线 l_1 的方程化为斜截式方程为

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{4},$$

直线 l_2 的方程化为斜截式方程为

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}.$$

因此直线 l_1 的斜率 $k_1=\dfrac{1}{2}$，截距 $b_1=\dfrac{7}{4}$，直线 l_2 的斜率 $k_2=\dfrac{1}{2}$，截距 $b_2=\dfrac{5}{2}$，因为 $k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$，所以 $l_1 /\!/ l_2$.

例 2 求过点 $(1,\ -4)$，且与直线 $2x+3y+5=0$ 平行的直线方程.

解：直线 $2x+3y+5=0$ 化为斜截式方程为 $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$.

设所求直线方程为 $y=-\dfrac{2}{3}x+b$，由于所求直线过点 $(1,\ -4)$，由此可解得 $b=-\dfrac{10}{3}$，故所求直线方程为 $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{10}{3}$，即 $2x+3y+10=0$.

> **试一试**
>
> 请你用点斜式方程求解例 2.

例 3 求证：直线 $Ax+By+C_1=0$ 与直线 $Ax+By+C_2=0$ $(C_1\neq C_2)$ 平行.

证明：(1) 若 $B=0$，两条直线可分别化为 $x=-\dfrac{C_1}{A}$，$x=-\dfrac{C_2}{A}$，因为 $C_1\neq C_2$，所以两直线平行；

(2) 若 $B\neq 0$，将两条直线分别化为斜截式方程为 $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C_1}{B}$，$y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C_2}{B}$，它们的斜率都是 $-\dfrac{A}{B}$，在 y 轴上的截距分别为 $-\dfrac{C_1}{B}$，$-\dfrac{C_2}{B}$.

因为 $C_1\neq C_2$，所以 $-\dfrac{C_1}{B}\neq-\dfrac{C_2}{B}$，所以两直线平行.

综合 (1)(2) 可知，直线 $Ax+By+C_1=0$ 与直线 $Ax+By+C_2=0$ $(C_1\neq C_2)$ 平行.

一般地，我们可以把与直线 $Ax+By+C_1=0$ 平行的直线表示为

$$Ax+By+C_2=0\ (C_1\neq C_2).$$

> **试一试**
>
> 你会用例 3 中的结论去求解例 2 吗？

练习 9.2.1

1. 判断下列各组直线是否平行：

(1) l_1：$2x-4y-7=0$，l_2：$x-2y+5=0$；

(2) l_1：$2x+y-9=0$，l_2：$2x-y+5=0$；

(3) l_1：$3x-7=0$，l_2：$2x-5=0$；

(4) l_1：$y-4=0$，l_2：$2y+6=0$.

2. 求满足下列条件的直线方程：

(1) 过点 (2，3)，且与直线 $2x+y-5=0$ 平行；

(2) 过点 (5，0)，且与直线 $2x-3y-7=0$ 平行.

3. 已知直线 $ax+y-1=0$ 与直线 $2x-4y-1=0$ 平行，求实数 a 的值.

9.2.2 两条直线相交

我们知道，同一个平面内两条既不重合也不平行的直线必定相交，两条相交直线有且只有一个交点，如何用直线的方程来求两条直线的交点呢？

1. 两条直线的交点

设两条直线的方程分别为

$$l_1：A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2：A_2x+B_2y+C_2=0.$$

如果直线 l_1 与 l_2 相交，由于交点同时在这两条直线上，因此交点的坐标一定是这两个方程构成的方程组的解；反过来，如果这两个方程构成的方程组只有唯一公共解，那么以这个解为坐标的点必是直线 l_1 与 l_2 的交点. 因此，求两条直线 l_1 与 l_2 的交点，就是解由这两个方程构成的方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0.\end{cases}$$

这个方程组的解就是两条直线交点的坐标.

例 4　已知两条直线的方程 l_1：$2x-y-5=0$，l_2：$x-3y-10=0$，判断这两条直线是否相交，如果相交，求出它们交点的坐标.

解：解方程组

$$\begin{cases}2x-y-5=0,\\x-3y-10=0,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x=1,\\y=-3,\end{cases}$$

所以直线 l_1 与 l_2 相交，交点的坐标为 $(1，-3)$.

例 5　求过直线 $x-y-1=0$ 和 $x+y-3=0$ 的交点，且与直线 $2x-y=0$ 平行的直线方程.

解：由方程组

$$\begin{cases}x-y-1=0,\\x+y-3=0,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=2, \\ y=1, \end{cases}$$

所以这两条直线的交点坐标为（2，1）.

设所求直线方程为 $2x-y+D=0$，把点（2，1）代入得

$$2\times2-1+D=0,$$

解得 $D=-3$. 则所求直线的方程为

$$2x-y-3=0.$$

2. 两条直线垂直

两条直线的方程

$$l_1: y=k_1x+b_1,$$

$$l_2: y=k_2x+b_2$$

满足什么条件时这两条直线垂直?

因为直线 $l_1\perp l_2$ 当且仅当它们的法向量相互垂直，又 $\boldsymbol{n}_1=(k_1, -1)$ 为 l_1的一个法向量，$\boldsymbol{n}_2=(k_2, -1)$ 为 l_2的一个法向量，所以

$$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0\Leftrightarrow k_1k_2+1=0\Leftrightarrow k_1k_2=-1.$$

因此，当两条直线的斜率都存在时，

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1.$$

特别地，斜率不存在的直线和斜率为 0 的直线垂直.

例 6　判断下列各组直线是否垂直：

（1）$2x-4y-7=0$ 与 $2x+y-5=0$；

（2）$2x=7$ 与 $3y-5=0$.

解：（1）将两条直线方程化为斜截式方程，分别为

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4},$$

$$y=-2x+5,$$

两条直线的斜率分别是$\frac{1}{2}$，-2.

因为$\frac{1}{2}\times(-2)=-1$，所以这两条直线垂直.

（2）直线 $2x=7$ 的斜率不存在，直线 $3y-5=0$ 的斜率为 0，所以这两条直线垂直.

例 7　求过点（1，2），且与直线 $2x+y-10=0$ 垂直的直线方程.

解：将直线 $2x+y-10=0$ 化为斜截式方程为

$$y=-2x+10,$$

斜率为-2，则所求直线的斜率$k=\frac{1}{2}$，由点斜式方程得

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1),$$

整理可得，所求直线方程为

$$x-2y+3=0.$$

例 8 求证：直线 $Ax+By+C_1=0$ 与直线 $Bx-Ay+C_2=0$ 垂直.

证明：(1) 若 $A=0$ 且 $B\neq0$ 或 $A\neq0$ 且 $B=0$，两条直线可分别化为 $y=-\frac{C_1}{B}$，$x=-\frac{C_2}{B}$，或 $x=-\frac{C_1}{A}$，$y=\frac{C_2}{A}$，可知两条直线垂直；

(2) 若 $AB\neq0$，两条直线化为斜截式方程，分别为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C_1}{B},$$

$$y=\frac{B}{A}x+\frac{C_2}{A},$$

它们的斜率分别是 $k_1=-\frac{A}{B}$，$k_2=\frac{B}{A}$.

因为 $k_1k_2=-\frac{A}{B}\times\frac{B}{A}=-1$，所以这两条直线垂直.

由 (1) (2) 可知，直线 $Ax+By+C_1=0$ 与直线 $Bx-Ay+C_2=0$ 垂直.

一般地，我们可以把与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线表示为

$$Bx-Ay+D=0.$$

试一试

你会用例 9 的结论去求解例 8 吗？

练习 9.2.2

1. 判断下列各组直线是否相交，如果相交，求出它们交点的坐标：

(1) $7x-y+4=0$，$2x+y+5=0$；

(2) $2x-y-3=0$，$4x+3y-1=0$；

(3) $6y-4y-7=0$，$3x-2y-8=0$.

2. 判断下列各组直线是否垂直：

(1) l_1：$x-y=0$，l_2：$2x+2y-7=0$；

(2) l_1：$x+4y-5=0$，l_2：$4x-3y-5=0$；

(3) l_1：$x=3$，l_2：$y=2$；

(4) l_1：$2x-y=0$，l_2：$x-2y=0$.

3. 求满足下列条件的直线方程：

(1) 过点 (2，3)，且与直线 $x-y-2=0$ 垂直；

(2) 过点 (−2，3)，且与直线 $y=\frac{1}{2}x$ 垂直.

4. 已知直线 $ax+2y-1=0$ 与 $2x-3y-1=0$ 垂直，求 a 的值.

5. 求过两条直线 $x-y-1=0$ 和 $3x-y-4=0$ 的交点，且与直线 $x-y=0$ 垂直的直线方程.

9.3 点到直线的距离

问题　如图 9－16 所示，小萌去上学的途中，要先从家门口（点）走到前方的公路边（直线）上，选择怎样的路线才能使走的路程最短？

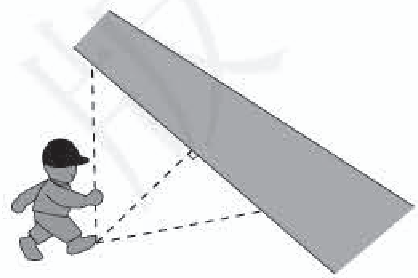


图 9－16

如果把小萌所在位置看成一个点，公路看成一条直线，那么这个最短的路程就是点到直线的距离.

已知点 $P_0(x_0, y_0)$ 和直线 l：$Ax+By+C=0$，可以得到点 P_0 到直线 l 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

例 1　求点 $P(-1, 2)$ 到下列直线的距离：

(1) $2x+y=5$；

(2) $x=2$.

解：(1) 将直线方程化为一般式为 $2x+y-5=0$，由点到直线的距离公式可得

$$d_1=\frac{|2\times(-1)+1\times2-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.$$

(2) 将直线方程化为一般式为 $x-2=0$，则

$$d_2=\frac{|1\times(-1)-2|}{\sqrt{1^2+0^2}}=3.$$

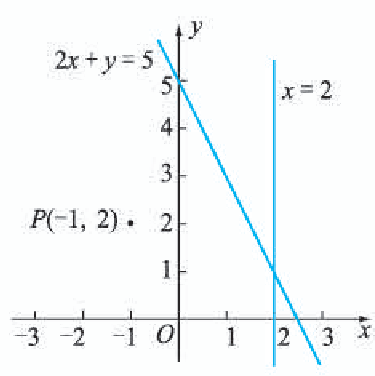


图 9－17

对于例 1 (2)，由于 $x=2$ 是平行于 y 轴的一条直线，如图 9－17 所示，通过作图也可以直接观察得到

$$d_2=|2-(-1)|=3.$$

当直线平行于 x 轴或 y 轴时，可以用数形结合的方法求点到直线的距离.

例 2 求两条平行直线 l_1：$12x-5y+2=0$ 和 l_2：$12x-5y-24=0$ 之间的距离.

解：在直线 l_2：$12x-5y-24=0$ 上取一点 $P(2,0)$，如图 9-18 所示，点 P 到直线 l_1 的距离即为直线 l_1 与 l_2 的距离，从而由点到直线的距离公式可得

$$d=\frac{|12\times2+2|}{\sqrt{12^2+5^2}}=2,$$

即两条平行直线 l_1 与 l_2 的距离为 2.

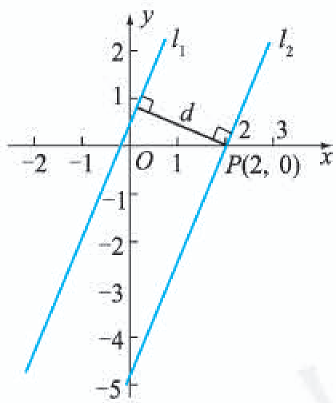


图 9-18

> **试一试**
>
> 请自己证明两平行线间的距离公式.

可以得到两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0$ $(C_1\neq C_2)$ 的距离公式为

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

练习 9.3

1. 求下列点到直线的距离：

(1) 点 $A(3,5)$，直线 $y=10$；
(2) 点 $A(3,5)$，直线 $y=-7$；
(3) 点 $B(5,2)$，直线 $x=6$；
(4) 点 $B(5,3)$，直线 $x=-8$.

2. 求下列点到直线的距离：

(1) 点 $O(0,0)$，直线 $3x+4y-5=0$；
(2) 点 $A(2,-3)$，直线 $x+y-1=0$；
(3) 点 $B(1,0)$，直线 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$；
(4) 点 $C(1,2)$，直线 $3x+y=0$.

*3. 求两条平行直线 $2x+3y-8=0$ 和 $2x+3y+18=0$ 之间的距离.

*4. 求两条平行直线 $x-3y-2=0$ 和 $2x-6y-7=0$ 之间的距离.

9.4　圆的方程

问题　圆是生活中常见的图形，如硬币、轮胎都给人们以圆的形象，如图 9－19 所示.

图 9－19

我们在前面学过，在平面内，到定点的距离等于定长的点的集合是圆. 这里的定点是圆心，定长即为圆的半径. 圆是由圆心和半径两个要素确定的. 在平面直角坐标系中，怎样用方程来表示一个圆呢?

9.4.1　圆的标准方程

已知圆 C 的圆心是 $C(a, b)$，半径为 r，如图 9－20 所示，求圆 C 的方程.

设点 $M(x, y)$ 是一个动点，点 M 在圆 C 上的充要条件是 $|CM|=r$，由两点间的距离公式可得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

两边平方，得

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad ①$$

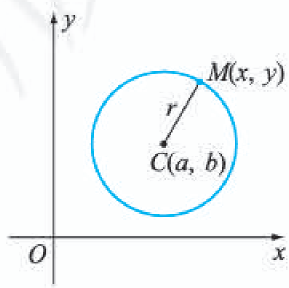


图 9－20

根据前面的推导过程可知，圆 C 上的点与方程①的解 (x, y) 之间具有一一对应关系，即圆 C 上的每一个点的坐标 (x, y) 都是方程①的解；反过来，以方程①的解 (x, y) 为坐标的点都在这个圆上，所以方程①就是以点 $C(a, b)$ 为圆心，r 为半径的圆的方程，称为**圆的标准方程**.

例如，以点 $C(-1, 3)$ 为圆心，半径为 2 的圆的标准方程为

$$(x+1)^2+(y-3)^2=4.$$

如图 9－21 所示，如果圆心在坐标原点，这时 $a=0$，$b=0$，圆的标准方程为

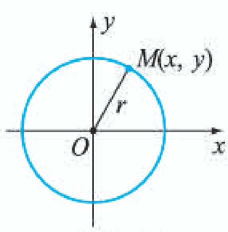


图 9－21

试一试

已知圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$，试判断点 $P_1(1, 1)$，$P_2(2, -1)$ 是否在该圆上.

$$x^2+y^2=r^2.$$

例如，圆心为坐标原点，半径为 2 的圆的标准方程为

$$x^2+y^2=4.$$

例 1　根据下列条件，求圆的标准方程：

(1) 圆心在点 $C(-2, 1)$，并且过点 $A(2, -2)$ 的圆；

(2) 以点 $A(2, 3)$，$B(4, 9)$ 为直径的两个端点的圆.

分析：圆心和半径是圆的两要素，只要确定圆心坐标和半径就可写出圆的方程.

解：(1) 所求圆的半径为

$$r=|CA|=\sqrt{(2+2)^2+(-2-1)^2}=5,$$

于是，所求圆的标准方程为

$$(x+2)^2+(y-1)^2=25.$$

(2) 设圆心坐标为 (a, b)，因为线段 AB 是圆的直径，所以圆心为线段 AB 的中点，由中点公式，得

$$a=\frac{2+4}{2}=3，b=\frac{3+9}{2}=6,$$

于是，圆心 C 的坐标为$(3, 6)$. 且所求圆的半径为

$$r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+(9-3)^2}=\sqrt{10}.$$

因此，所求圆的标准方程为

$$(x-3)^2+(y-6)^2=10.$$

练习 9.4.1

1. 写出下列圆的圆心坐标和半径：

(1) $x^2+y^2=9$；　(2) $(x-3)^2+(y+1)^2=4$；

(3) $x^2+(y+1)^2=2$；　(4) $(x-1)^2+y^2=5$.

2. 求满足下列条件的圆的标准方程：

(1) 圆心为坐标原点，半径为 4；

(2) 圆心为点 $(-2, 1)$，半径为$\sqrt{3}$；

(3) 圆心为点 $(2, 0)$，半径为$\sqrt{5}$；

(4) 圆心为点 $(0, -1)$，半径为 2.

3. 求满足下列条件的圆的标准方程：

(1) 圆心为 $(-2, 3)$，过点 $(4, 11)$；

(2) 以点 $A(-3, 2)$，$B(9, -4)$ 为直径的两个端点.

9.4.2 圆的一般方程

若已知圆的圆心为 $C(-1, 2)$，半径为 3，那么这个圆的标准方程为

$$(x+1)^2+(y-2)^2=9.$$

将上述方程左边展开，整理得

$$x^2+y^2+2x-4y-4=0,$$

这个方程也表示圆 C.

把圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

左边展开，整理得

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

事实上，任何一个圆的方程都可以写成如下形式：

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \qquad ②$$

其中 D，E，F 为常数.

那么形如②的方程所表示的曲线一定为圆吗？

将②的左边配方，得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}. \qquad ③$$

(1) 当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程③表示以 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心，以 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆；

(2) 当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程③的解为 $x=-\frac{D}{2}$，$y=-\frac{E}{2}$，它表示一个点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$；

(3) 当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程③没有实数解，它不表示任何图形.

我们把方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\ (D^2+E^2-4F>0)$$

称为**圆的一般方程**.

要写出圆的一般方程，只需要求出三个系数 D，E，F 即可.

圆的一般方程有以下特点：

(1) x^2 和 y^2 的系数相同，且均不等于 0；

(2) 没有含 xy 的二次项.

以上两点是二元二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

表示圆的必要条件，但不是充分条件.

例 2　将下列圆的一般方程化为标准方程，并写出圆的圆心坐标和半径：

（1）$x^2+y^2-4x+2y-4=0$；　　　　（2）$4x^2+4y^2+8x-4y-15=0$.

解：（1）通过配方，可得

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9.$$

因此，圆心的坐标为（2，−1），半径为 3.

（2）方程两边同时除以 4，可得

$$x^2+y^2+2x-y-\frac{15}{4}=0,$$

配方得

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=5.$$

因此，圆心的坐标为$\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$，半径为$\sqrt{5}$.

例 3　求过点 $A(0,\ 5)$，$B(1,\ -2)$，$C(-3,\ -4)$ 的圆的一般方程.

解：设所求圆的一般方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

因为点 A，B，C 都在圆上，所以它们的坐标都是此方程的解，把它们的坐标依次代入上述方程，得到方程组为

$$\begin{cases}5E+F+25=0,\\ D-2E+F+5=0,\\ 3D+4E-F-25=0,\end{cases}$$

解得

$$D=6,\ E=-2,\ F=-15.$$

因此，所求圆的方程为

$$x^2+y^2+6x-2y-15=0.$$

读一读

一般地，在求一条直线（曲线）的方程时，如果知道这条直线（曲线）的一般形式，可先把方程的一般形式写出来，其中的系数待定，然后再根据题设求出这些系数. 这种通过求待定系数来确定直线（曲线）方程的方法称为待定系数法.

练习 9.4.2

1. 将下列圆的一般方程化为标准方程，并写出圆心坐标和半径：

（1）$x^2+y^2-6x=0$；　　　　（2）$x^2+y^2-4y-5=0$；

（3）$x^2+y^2-4x-6y+12=0$；　　　　（4）$2x^2+2y^2-4x+8y+5=0$.

2. 判断下列方程是否表示圆，如果是，写出它的圆心坐标和半径：

（1）$x^2+y^2-2x-2y-3=0$；

(2) $x^2+y^2=0$;

(3) $x^2+y^2-2x-4y+6=0$.

*3. 求经过三点 (0, 0), (2, 1), (−4, 0) 的圆的一般方程.

9.5 直线与圆的位置关系

问题　推铁环是一种有趣的健身活动，观察图 9-22，我们把推杆抽象成直线，铁环抽象成圆，由此你能得出直线和圆的位置关系吗？你是根据什么判断的？

图 9-22

可以发现：

(1) 当直线和圆相离时，直线和圆没有公共点，如图 9-22 (1) 所示；

(2) 当直线和圆相切时，直线和圆只有一个公共点，如图 9-22 (2) 所示；

(3) 当直线和圆相交时，直线和圆有两个公共点，如图 9-22 (3) 所示.

问题　如何通过直线和圆的方程判断它们之间的位置关系？

设直线方程为 $Ax+By+C=0$，圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

(方法一) 利用圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系判断，其中

$$d=\frac{|aA+bB+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

由图 9-23 (1) 可知，直线和圆相离 $\Leftrightarrow d>r$；

由图 9-23 (2) 可知，直线和圆相切 $\Leftrightarrow d=r$；

由图 9-23 (3) 可知，直线和圆相交 $\Leftrightarrow d<r$.

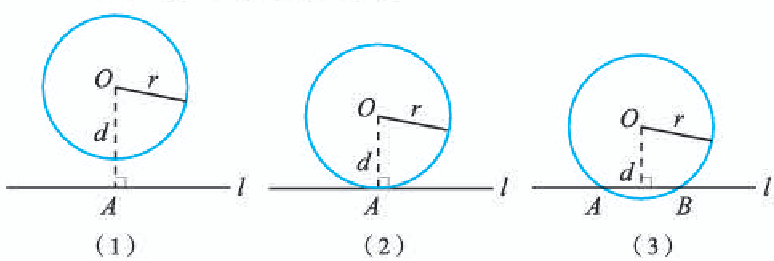


图 9-23

(方法二) 联立方程组

$$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,\end{cases}$$

根据方程组是否有解及解的个数，来判断直线与圆的位置关系.

我们可以通过消元，消去 x 或 y，使上述方程组变为一个一元二次方程，求出其判别式 Δ 的值，根据判别式的符号判断直线与圆的位置关系：

当 $\Delta<0$ 时，直线与圆相离；

当 $\Delta=0$ 时，直线与圆相切；

当 $\Delta>0$ 时，直线与圆相交.

例 1　已知圆 O：$x^2+y^2=2$，直线 l：$y=x+b$，当 b 为何值时，圆 O 与直线 l 没有交点？只有一个交点？有两个交点？

解：(方法一) 圆与直线没有交点、只有一个交点、有两个交点的问题，可转化为圆心到直线的距离大于半径、等于半径、小于半径的问题.

圆心 $O(0,0)$ 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$，圆的半径 $r=\sqrt{2}$.

当 $d>r$，即 $b<-2$ 或 $b>2$ 时，圆 O 与直线 l 相离，无交点；

当 $d=r$，即 $b=2$ 或 $b=-2$ 时，圆 O 与直线 l 相切，只有一个交点；

当 $d<r$，即 $-2<b<2$ 时，圆 O 与直线 l 相交，有两个交点.

(方法二) 联立直线 l 的方程与圆 O 的方程，可得方程组为

$$\begin{cases}x^2+y^2=2, & ①\\y=x+b, & ②\end{cases}$$

将②式代入①式，整理得

$$2x^2+2bx+b^2-2=0, \qquad ③$$

方程③是一个关于 x 的二次方程，它的判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=(2b)^2-4\times2(b^2-2)\\&=-4(b+2)(b-2).\end{aligned}$$

因此，当 $b<-2$ 或 $b>2$ 时，$\Delta<0$，方程组没有实数解，此时直线与圆没有交点；

当 $b=2$ 或 $b=-2$ 时，$\Delta=0$，方程组有两个相同的实数解，此时直线与圆只有一个交点；

当 $-2<b<2$ 时，$\Delta>0$，方程组有两个不同的实数解，此时直线与圆有两个交点.

例 2　已知圆的方程是 $x^2+y^2=25$，求经过圆上一点 $P(3,4)$ 的圆的切线方程.

解：如图 9－24 所示，$\overrightarrow{OP}=(3,4)$ 是所求圆的切线的法向量，由直线的点法式方程可得

$$3(x-3)+4(y-4)=0,$$

因此，所求圆的切线方程为

$$3x+4y-25=0.$$

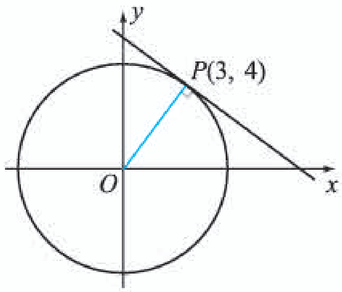


图 9－24

试一试

已知圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$，且 $P(x_0,y_0)$ 为圆上的点，求经过点 P 的圆的切线方程.

练习 9.5

*1. 判断下列直线与圆的位置关系：

(1) 直线 $3x-4y-10=0$，圆 $x^2+y^2=9$；

(2) 直线 $3x+4y+25=0$，圆 $x^2+y^2=25$；

(3) 直线 $2x-y+5=0$，圆 $x^2+y^2-4x+3=0$.

*2. 已知圆 $x^2+y^2=1$，直线 $x-y+m=0$，若直线与圆相切，求实数 m 的值.

*3. 圆 $x^2+y^2=13$ 与直线 $x-y-1=0$ 是否相交？如果相交，求交点坐标.

*4. 当 C 为何值时，直线 $x-y-C=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 有两个交点？只有一个交点？没有交点？

*5. 求过圆 $x^2+y^2=10$ 上一点 $Q(2,\sqrt{6})$ 的圆的切线方程.

习题九

1. 写出下列直线的方程，并化为一般形式：

(1) 过点 $(-5,3)$，一个法向量 $\boldsymbol{n}=(-3,2)$；

(2) 斜率是 $\frac{1}{2}$，过点 $(8,-2)$；

(3) 斜率是 1，在 y 轴上的截距是 -2；

(4) 过点 $(1, 4)$，平行于 x 轴；

(5) 过点 $(-2, 1)$，平行于 y 轴；

(6) 过点 $(-1, -2)$ 和点 $(3, 5)$；

*(7) 过点 $(1, 2)$，一个方向向量 $\boldsymbol{v}=(-2, 3)$.

2. 写出下列直线的一个方向向量、一个法向量以及斜率（如果斜率存在的话）：

(1) $y=-\frac{1}{2}x+1$；

(2) $3x-2y+5=0$；

(3) $y=7$；

(4) $2x-3=0$.

3. 求下列直线与坐标轴的交点坐标，并作出直线：

(1) $2x-3y+4=0$；

(2) $6x+y-12=0$；

(3) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$；

(4) $y=\frac{1}{2}x$.

4. 求满足下列条件的直线方程：

(1) 过点 $(1, -3)$，且与直线 $2x+y-5=0$ 垂直；

(2) 过点 $(2, -3)$，且与直线 $4x+y-2=0$ 平行.

5. 判断下列各组直线的位置关系：

(1) $3x-4y-7=0$，$12x-16y-7=0$；

(2) $2x+3y-4=0$，$3x-2y+1=0$；

(3) $2x-3y-4=0$，$4x-6y-3=0$；

(4) $2x-y-6=0$，$2x-y-7=0$.

6. 求下列各组直线的交点坐标：

(1) $x+y-7=0$，$x-y+5=0$；

(2) $x+3y-6=0$，$x-3y+8=0$.

7. 求点到直线的距离：

(1) 点 $A(2, 3)$，直线 l_1：$2x-y-4=0$；

(2) 点 $B(1, -2)$，直线 l_2：$2x+5y=0$；

(3) 点 $C(-1, 4)$，直线 l_3：$x-2=0$；

(4) 点 $D(1, -2)$，直线 l_4：$2y+3=0$.

8. 求两条平行直线 $3x+4y-10=0$ 和 $6x+8y-7=0$ 之间的距离.

9. 已知三条直线 $ax+2y+8=0$，$4x+3y-10=0$，$2x-y-10=0$ 相交于一点，

求实数 a 的值.

10. 求出下列圆的标准方程：

(1) 圆心为 $C(-2, 1)$，且经过点 $P(4, -1)$；

(2) 以点 $A(1, 2)$，$B(3, 0)$ 为直径的两个端点；

*(3) 过点 $(3, -1)$，圆心在 y 轴上，且与 x 轴相切；

*(4) 圆心为 $C(3, -5)$，且与直线 $x-7y+2=0$ 相切.

*11. 求过点 $A(1, 1)$，$B(-3, 5)$，且圆心在 y 轴上的圆的方程.

*12. 求过点 $A(6, 0)$，$B(5, -3)$，$C(3, 1)$ 的圆的方程.

*13. 判断下列各组直线与圆的位置关系：

(1) 直线 $4x-3y+6=0$，圆 $(x-4)^2+(y+1)^2=25$；

(2) 直线 $2x-y+1=0$，圆 $x^2+y^2-4x+2y+4=0$；

(3) 直线 $x+y+2=0$，圆 $x^2+y^2-4x-5=0$.

*14. 已知直线 $x+2y+C=0$ 与圆 $x^2+y^2=25$ 相切，求实数 C 的值.

*15. 求圆 $x^2+y^2-4x+4y-1=0$ 被直线 $3x-4y-4=0$ 截得的弦长.

*16. 求过点 $(-1, \sqrt{3})$ 且与圆 $x^2+y^2=4$ 相切的直线方程.

阅读与实践

笛　卡　儿

笛卡儿，法国伟大的数学家、哲学家和物理学家，1596 年 3 月 31 日出生在法国都兰的一个贵族家庭，自幼丧母，体弱多病. 笛卡儿的父亲曾希望他将来能够成为一名神学家，于是在笛卡儿 8 岁时，便将他送入拉夫勒希的教会学校接受古典教育. 他废寝忘食地阅读大量的数学和哲学书籍. 书中的知识启发了年少的笛卡儿，引起了他对经院哲学的怀疑和研究哲学、自然科学的兴趣，影响了他的人生道路. 他说：除了我能够在我自己或者“世界这本大书”里找到的科学之外，我绝不寻求别的科学……我决定研究我自己并竭尽全部精力来选择一条我应该遵循的道路.

1612 年，他进入普瓦界大学读书，四年后获得博士学位. 随后为实现少年的梦想，他背离家庭的职业传统，开始探索人生之路. 他投笔从戎，想借机游历欧洲，开阔眼界. 他随部队进入了荷兰南部的小城市布勒达，一次，笛卡儿在街上散步，偶然间看到了一张数学题悬赏征解的启事. 两天后，笛卡儿竟然把那个问题解答出来了，引起了著名学者皮克曼的注意. 皮

克曼向笛卡儿介绍了当时数学的最新发展，给了他许多有待研究的问题. 与皮克曼的交往，使笛卡儿对自己的数学和科学能力有了较充分的认识，他开始认真探寻是否存在一种类似于数学的、具有普遍适用性的方法，以期获取真正的知识.

当时，几何学的思维还在数学家的头脑中占有统治地位. 笛卡儿不断地思考，如何把代数与几何有机地结合起来，他曾说："我想去寻求一种新的、包含这两门学科的好处，而又没有它们缺点的方法." 传说，笛卡儿躺在床上看到虫子在天花板方格内爬行，产生了灵感，思想中产生了坐标的雏形.

1637 年，笛卡儿发表了《几何学》，创立了平面直角坐标系. 他用平面上的一点到两条固定直线的距离来确定点的位置，用坐标来描述平面上的点. 他进而又创立了解析几何学，表明了几何问题不仅可以归结成为代数形式，而且可以通过代数变换来发现几何性质、证明几何性质. 解析几何的出现，改变了自古希腊以来代数和几何分离的趋向，把相互对立着的"数"与"形"统一了起来，使几何曲线与代数方程相结合. 笛卡儿的这一天才创见，更为微积分的创立奠定了基础，从而开拓了变量数学的广阔领域. 正如恩格斯所说："数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要了." 恩格斯在他的著作《自然辩证法》中曾经把笛卡儿的坐标、纳皮尔的对数、牛顿和莱布尼兹的微积分共同称为 17 世纪的三大数学发明.

笛卡儿的哲学与数学思想对历史的影响是深远的. 人们在他的墓碑上刻下了这样一句话："笛卡儿，欧洲文艺复兴以来，第一个为人类争取并保证理性权利的人."

天下第一桥

赵州桥，位于历史文化名城赵县，它是世界上现存最早、保存最好的巨大石拱桥，距今已有 1 400 多年的历史，被誉为"华北四宝之一". 赵州桥

建于隋大业（605—618）年间，由著名匠师李春建造．桥长约为 64.4 m，跨径约为 37.4 m，圆拱高约为 7.2 m，是当今世界上跨径最大、建造最早的单孔敞肩型石拱桥．

你能根据上述材料，建立适当的平面直角坐标系，求出赵州桥中的大圆拱所在的圆的方程吗？

第十章

概率与统计初步

概率论的诞生，让人们对随机现象发生的可能性大小，由感性认知上升到理性分析；统计学的发展，使人们用随机样本了解的信息和规律，越来越接近总体的本质特征．

概率与统计为人类决策提供了科学的依据．

一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步.

——马克思

观察可能导致发现，观察将揭示某种规则、模式或定律.

——波利亚

概率论是一门研究随机现象的数量规律的学科，在生产实践和日常生活中，都有着重要的意义和广泛的应用. 统计学的研究对象是客观事物的数量特征和数量关系，它是关于数据的搜集、整理、归纳和分析方法的科学. 在大数据时代，统计学的应用已深入社会生活的各个领域. 本章将学习概率与统计的基础知识，在提高数学抽象、数学运算等数学素养的同时，注重增强数据分析的能力.

10.1　基本计数原理

计数也称为数数，是一种最古老、最基本的数学活动和数学过程，使用“枚举法”数数时，要做到不重不漏，一般需要制定计数的标准和策略，弄清计数的基本原理，以便准确、高效地完成计数.

> **读一读**
>
> 在进行归纳推理时，如果逐个考察了某类事件的所有可能情况，从而得出一般结论，那么该结论是可靠的，这种归纳方法称为“枚举法”.

1. 分类计数原理

问题　(1) 如图 10－1 所示，以 A，B，C，D，E，F，G 为端点，共有多少条不同的线段?

(2) 如图 10－2 所示，由若干个边长为 1 的小等边三角形构成的图中，共有多少个三角形?

在图 10－1 中，以 A 为左端点的不同线段分别为 AB，AC，AD，…，AG，有 6 条；再依次数以 B，C，D，E，F 为左端点的不同线段，分别有 5，4，3，2，1 条. 所以，共有不同的线段 $6+5+4+3+2+1=21$ 条.

图 10－1

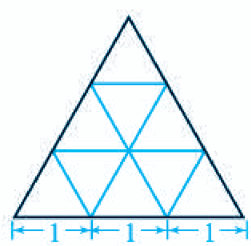


图 10－2

在图 10－2 中，我们可以这样分类计数：

第 1 类，边长为 1 的三角形，有 9 个；

第 2 类，边长为 2 的三角形，有 3 个；

第 3 类，边长为 3 的三角形，有 1 个.

所以，共有三角形 $9+3+1=13$ 个.

上述计数的过程中，我们把计数对象进行了不重不漏的分类，每一类都能得出符

合要求的对象的个数，最后把每一类的个数相加即为最终结果.

问题　某人从甲地去乙地，可以乘汽车，也可以乘火车，还可以乘轮船. 一天中，从甲地直达乙地的汽车有 3 班，火车有 5 班，轮船有 3 班. 那么，一天中此人乘坐上述交通工具从甲地到乙地，共有多少种不同的选择方法?

如图 10－3 所示，一天中，此人从甲地去乙地可以选择的交通工具有 3 类，无论选择哪类交通工具，他都可以从甲地到乙地.

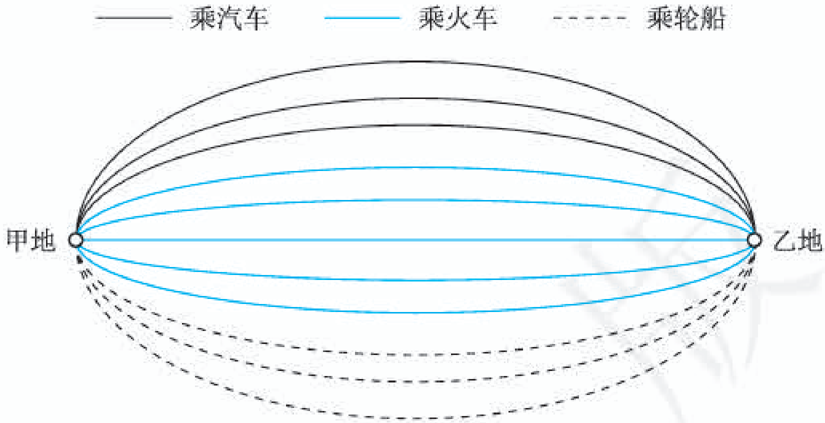


图 10－3

不难看出，此人乘坐这些交通工具从甲地到乙地，不同的选择方法数为

$$3+5+3=11.$$

一般地，有如下原理:

分类计数原理　**如果完成一件事，有 n 类办法，在第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有**

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法.

例 1　图 10－4 是由若干个正方形和一个笑脸图案构成的图形.

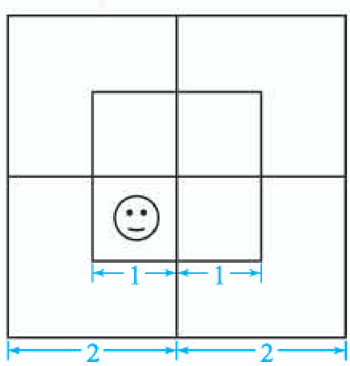


图 10－4

想一想

在图 10－4 中，笑脸图案所在的正方形是如何分类的?

(1) 图中共有多少个正方形?

(2) 笑脸图案最多可在几个正方形中?

解:(1) 将图 10-4 中的正方形按边长分为 3 类:

第 1 类,边长为 1 的正方形,有 4 个;

第 2 类,边长为 2 的正方形,有 5 个;

第 3 类,边长为 4 的正方形,有 1 个.

根据分类计数原理,共有正方形 $4+5+1=10$ 个.

(2) 根据分类计数原理,并类比 (1) 题中的分类方式可知,笑脸图案最多可在 $1+2+1=4$ 个正方形中.

例 2 书架上层有不同的数学书 15 本,中层有不同的语文书 18 本,下层有不同的物理书 7 本. 现从书架上任取 1 本书,有多少种不同的取法?

分析:从书架上任取 1 本书有 3 类办法:第 1 类,从上层取 1 本数学书,有 15 种不同的取法;第 2 类,从中层取 1 本语文书,有 18 种不同的取法;第 3 类,从下层取 1 本物理书,有 7 种不同的取法.

解:根据分类计数原理,可知从书架上任取 1 本书有 $15+18+7=40$ 种不同的取法.

2. 分步计数原理

问题 小萌同学某天要外出,如果从如图 10-5 所示的上衣、下衣中各选一件,再挑选一双鞋子,形成一种着装方案,那么共有多少种不同的着装方案呢?

图 10-5

上述问题中,我们不妨摆一摆所有不同的着装方案,可发现共有 12 种,如图 10-6 所示.

我们还可以进行这样的计算:先选上衣,有 2 种不同的选择;再选下衣,对应每一件上衣都有 3 种不同的选择;最后选鞋子,对应每一套上衣和下衣,都有 2 种不同的选择. 所以,共有 $2\times3\times2=12$ 种不同的着装方案.

图 10－6

上述计数的过程中，我们进行了分步，每一步都有相应的方法，最后把每一步的方法数相乘，就是完成这件事所有的方法数.

一般地，有如下原理：

分步计数原理　**如果完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有**

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同的方法.

例 3　如图 10－7 所示，某人从甲地去丙地，中间必须经过乙地. 已知由甲地到乙地有 3 条路通行，再由乙地到丙地有 2 条路通行. 那么此人由甲地经过乙地到丙地，共有多少种不同的走法？

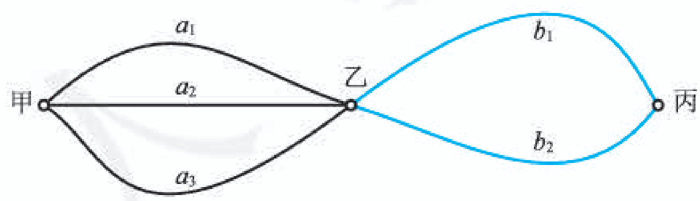


图 10－7

分析：从甲地到丙地必须分成两个步骤：第 1 步，从甲地到乙地，有 3 种不同的走法，分别用 a_1，a_2，a_3 表示；第 2 步，从乙地到丙地，有 2 种不同的走法，分别用 b_1，b_2 表示，则全部不同的走法为

$$a_1b_1，a_1b_2，a_2b_1，a_2b_2，a_3b_1，a_3b_2，$$

共计 6 种.

解：根据分步计数原理可知，此人由甲地经过乙地到丙地，不同的走法数为

$$3\times 2=6.$$

例 4　在我们的现实生活中，经常会遇到用数字设置个人密码的问题. 若要用 0～9 这 10 个数字设置一个六位数字的密码，则共能设置出多少个不同的密码？

分析： 密码设置所用数字是任意的、可以重复的．如图 10－8 所示，要设置一个由六位数字组成的密码，自前向后依次记为第 1 位，第 2 位，…，第 6 位，可以分成六个步骤完成：第 1 步，设置第 1 位数，有 10 种不同的设法；第 2 步，设置第 2 位数，有 10 种不同的设法；……；第 6 步，设置第 6 位数，有 10 种不同的设法．

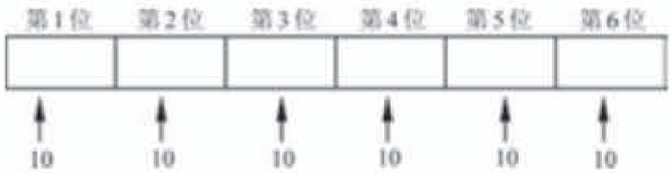


图 10－8

解： 根据分步计数原理，不同的六位数字密码的个数为

$$10\times10\times10\times10\times10\times10=10^6.$$

分类计数原理与分步计数原理统称为基本计数原理，它们的共同点是：都研究“完成一件事共有多少种不同的方法”．它们的区别在于一个与“分类”有关，另一个与“分步”有关．如果完成一件事共需分成 n 类办法，每一类办法之间是相互独立的，无论哪一类办法中的哪一种方法都能单独完成这件事，那么计算完成这件事的所有方法数可以使用分类计数原理；如果完成一件事共需分成 n 个步骤，每一个步骤之间相互关联，缺少任何一个步骤，这件事都无法完成，那么计算完成这件事的所有方法数可以使用分步计数原理．

议一议

在青岛崂山、曲阜三孔、烟台蓬莱和泰安泰山四处风景区中，甲、乙、丙三位同学每人选择一处前去观光游览，共有多少种不同的游览方案？

例 5 甲班有三好学生 8 名，乙班有三好学生 6 名，丙班有三好学生 9 名．则：

（1）从这 3 个班中任选 1 名三好学生出席表彰会，有多少种不同的选法？

（2）从这 3 个班中各选 1 名三好学生出席表彰会，有多少种不同的选法？

解：（1）根据分类计数原理，不同的选法有 $8+6+9=23$ 种，即从这 3 个班中任选 1 名三好学生，有 23 种不同的选法；

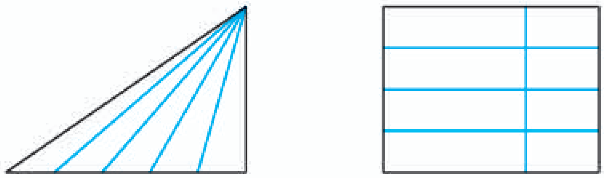
（2）根据分步计数原理，不同的选法有 $8\times6\times9=432$ 种，即从这 3 个班中各选 1 名三好学生，有 432 种不同的选法．

练习 10.1

1. 数一数：

（1）图（1）中共有多少个三角形？

（2）图（2）中共有多少个矩形？



（第 1 题）

2. 口答：

(1) 某项工作可以用两种方法完成，有 5 人会用第一种方法，另有 4 人会用第二种方法，要选出 1 人来完成这项工作，共有多少种不同的选法？

(2) 一个口袋内有 6 个不同的黑球，4 个不同的白球，5 个不同的红球，从中任取 1 个球，共有多少种不同的取法？

(3) 现有不同的饮料 3 杯，不同的甜点 5 盘，某人要取 1 杯饮料和 1 盘甜点，共有多少种不同的取法？

(4) 某商业大厦有东、南、西三个大门，某人从一个门进，从另一个门出，共有多少种不同的走法？

(5) 代数式 $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)$ 展开后共有多少项？

(6) 由数字 1，2，3，4，5 可以组成多少个无重复数字的两位数？

3. 从 2，3，5，7 这 4 个数中，任取 2 个数构成真分数，这样的真分数共有多少个？

4. 某班成立了 4 个兴趣小组，书法组有 4 人，舞蹈组有 5 人，美术组有 4 人，音乐组有 6 人. 则：

(1) 从该班 4 个兴趣小组中选派 1 人去参加某艺术活动，共有多少种不同的选法？

(2) 从该班每个兴趣小组中各选派 1 人参加某艺术活动，共有多少种不同的选法？

5. 一座山通往山顶的路中，南坡有 3 条，北坡有 2 条. 则：

(1) 通往山顶共有多少条不同的路？

(2) 从南坡上山，再由北坡下山，共有多少种不同的走法？

(3) 要求上、下山走不同的路，共有多少种不同的走法？

(4) 随意选择上、下山的路线，共有多少种不同的走法？

10.2 概率初步

10.2.1 随机事件与样本空间

问题　某商场开展“五一优惠 100%”有奖销售活动：一等奖 10 名，奖品为手机一部；二等奖 100 名，奖品为优盘一个；其余全部为三等奖，奖品为纸巾一盒. 姜丽丽在该商场的活动期间通过购物获得一次抽奖机会，她可能获得什么奖品？

在上述问题中，根据商场有奖销售方案，姜丽丽可能获得一部手机，也可能获得一个优盘，还可能获得一盒纸巾，但在抽奖前获得哪种奖品是无法确定的.

像这样，在一定条件下，具有多种结果可能发生，但事先不能确定哪一种结果将会发生的现象，称为**随机现象**.

在我们的日常生活中，随机现象普遍存在，例如：

(1) 随意打开一本数学书，翻到的页码；

(2) 一天内进入某超市的顾客数；

(3) 走到十字路口时，信号灯亮起的颜色；

(4) 甲同学排队买饭等候的时间.

试一试

举几个随机现象的例子.

在实际中，通常要通过试验来研究随机现象. 例如，为观察抛掷一枚硬币后是正面向上还是反面向上，我们可以用同一类型的硬币，在相同的高度向同一材质的地板进行多次抛掷，观察试验的结果.

在同一条件下，研究某种随机现象所做的试验称为**随机试验**，简称**试验**. 每次随机试验产生的结果都称为一个**基本事件**，所有基本事件组成的集合称为随机试验的**样本空间**，通常用大写希腊字母 Ω 表示.

例如，抛掷一枚硬币这个随机试验中，“正面向上”是一个基本事件，可简记为“正”；“反面向上”也是一个基本事件，可简记为“反”. 于是，抛掷一枚硬币的样本空间可记为

$$\Omega=\{正，反\}.$$

又如，抛掷两枚硬币这个随机试验中，“两枚硬币都正面向上”是一个基本事件，可简记为（正，正）；“第一枚正面向上，第二枚反面向上”也是一个基本事件，可简记为（正，反）；……. 于是，抛掷两枚硬币的样本空间可记为

$$\Omega=\{(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)\}.$$

再如，从包含 7 件合格品、3 件次品的 10 件产品中，任意抽取 3 件产品进行检验，观察次品个数. 这一随机试验中，出现次品的所有可能分别为：没有次品，有 1 件次品，有 2 件次品，有 3 件次品，可分别用 0，1，2，3 表示，则该随机试验的样本空间可记为

$$\Omega=\{0，1，2，3\}.$$

想一想

产品检验的随机试验中，$A=\{0，1\}$ 和 $B=\{2，3\}$ 分别表示的含义是什么？

例 1 抛掷一枚骰子，观察朝上的面的点数. 写出这一随机试验的样本空间.

解： 样本空间可记为 $\Omega=\{1，2，3，4，5，6\}$，其中 1，2，3，4，5，6 分别代表骰子朝上的面出现 1 点，2 点，3 点，4 点，5 点，6 点.

一般地，我们把样本空间的子集称为**随机事件**，简称**事件**，常用大写英文字母 A，B，C 等表示. 例如，抛掷一枚骰子的样本空间中，子集 $A=\{4，5，6\}$ 表示“骰

子朝上的面的点数大于 3”这个事件，子集 $B=\{2, 4, 6\}$ 表示“骰子朝上的面的点数为偶数”这个事件，等等.

在一定条件下，不可能发生的事件，称为**不可能事件**，用 $\varnothing$ 表示. 例如，抛掷一枚骰子，“骰子朝上的面的点数为 7”是不可能事件.

在一定条件下，必然发生的事件，称为**必然事件**，用 Ω 表示. 例如，抛掷一枚骰子，“骰子朝上的面的点数不大于 6”是必然事件.

想一想

抛掷一枚骰子的样本空间中，事件 $C=\{5\}$ 表示怎样的事件?

例 2 抛掷两枚质地均匀的骰子，观察朝上的面的点数.

(1) 在下表中列出所有的基本事件 (x, y)，其中 x 表示第一枚骰子朝上的面的点数，y 表示第二枚骰子朝上的面的点数；

y \ x	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

(2) 用集合写出事件 A：点数之和等于 7.

解：(1) 如下表所示.

y \ x	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

(2) $A=\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$.

练习 10.2.1

1. 判断下列事件是否为随机事件：

(1) 买一张福利彩票，中奖；

(2) 足球运动员射门一次，射中；

(3) 骑车回家，顺风行驶；

(4) 实心的铁球被抛入大海，下沉；

(5) 三角形内角和是 $360°$.

2. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 种下一粒种子，观察种子是否发芽；

(2) 甲、乙两队进行一场篮球比赛，观察甲队的胜或负的情况；

(3) 从含有 6 件次品的 100 件产品中任取 5 件，观察其中的次品数.

3. 甲、乙两同学做一次猜拳游戏（石头、剪刀、布），观察两人的出拳情况.

(1) 写出这一随机试验的样本空间；

(2) 求这个随机试验中所有基本事件的总数；

(3) “出现平局”这一事件包含哪几个基本事件？

10.2.2 古典概率

问题　在一次摇奖活动中，摇奖机内有 10 个编号为 1～10 的号码球，号码球的大小相同、质地均匀，从中只摇出一个号码. 这一随机试验的样本空间中，基本事件的总数是多少？每个基本事件发生的可能性相等吗？

在这个问题中，随机试验的样本空间可记为

$$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

共有 10 个基本事件. 由于号码球大小相同、质地均匀，并且被摇奖机搅拌均匀，因此每个号码球被摇出的机会是相等的.

上述随机试验具备如下两个特点：

(1) 有限性：样本空间中基本事件的总数是有限的；

(2) 等可能性：样本空间中每个基本事件出现的可能性是相等的.

通常将具有上述两个特点的随机试验模型称为**古典概型**.

例如，一个袋内装有大小相同的红、黄、白球各一个，从中任取一个球，这个随机试验的样本空间可记为

$$\Omega=\{红，黄，白\},$$

它有 3 个基本事件，每个球被取到的可能性是相等的，该随机试验的模型为古典概型.

一般地，我们有如下定义：

在古典概型中，若事件 A 所包含的基本事件数为 m，样本空间中基本事件的总数为 n，我们用 $\frac{m}{n}$ 来描述事件 A 出现的可能性大小，并称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的概率（古典概率），记作

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

显然，$0\leqslant m\leqslant n$，因此事件 A 发生的概率 $P(A)$ 满足

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

并且，必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0.

读一读

1657 年，荷兰的数学家惠更斯所著的《论掷骰子游戏中的计算》一书，被认为是概率论最早的论著.

议一议

甲、乙两同学做一次猜拳游戏（石头、剪刀、布），出现平局的概率是多少？甲获胜的概率是多少？这个游戏公平吗？

例 3　连续抛掷三枚质地均匀的硬币，求恰有两枚正面向上的概率.

分析：通过观察可以发现，样本空间的基本事件总数是有限的；由于硬币的质地是均匀的，所以该随机试验中每个基本事件发生的可能性是相等的，因此是古典概型.

解：连续抛掷三枚质地均匀的硬币，这一随机事件的样本空间可记为 $\Omega=\{$(正，正，正)，(正，正，反)，(正，反，正)，(正，反，反)，(反，正，正)，(反，正，反)，(反，反，正)，(反，反，反)$\}$，共有 8 个基本事件.

设"恰有两枚正面向上"为事件 A，则 $A=\{$(正，反，正)，(正，正，反)，(反，正，正)$\}$，含有 3 个基本事件. 所以

$$P(A)=\frac{3}{8}.$$

上述例题中，我们采用枚举法确定了样本空间和随机事件 A 中包含的基本事件的个数. 这种方法的优点是直观、清楚，但在很多问题中，由于样本空间中基本事件的总数较大，要想把它们一一列举出来，比较烦琐，这时我们往往可借助计数原理来计算.

试一试

用基本计数原理算出"连续抛掷三枚质地均匀的硬币"这个随机试验的样本空间中基本事件的总数.

例 4　抛掷两枚质地均匀的骰子，观察朝上的面的点数.

(1) 求该随机试验的样本空间中基本事件的总数；

(2) 设“点数之和不小于 9”为事件 A，求 $P(A)$.

解：(1) 设该随机试验的样本空间中基本事件为 (x, y)，其中 x 表示第一枚骰子朝上的面的点数，y 表示第二枚骰子朝上的面的点数.

第 1 步，确定 x 的取值，有 6 种不同的结果；

第 2 步，确定 y 的取值，有 6 种不同的结果.

所以该随机试验的样本空间中基本事件的总数为 $6\times6=36$.

(2) 如图 10－9 所示，分四类情况计数：

第 1 类，当 $x=3$ 时，y 取 6，有 1 种结果；

第 2 类，当 $x=4$ 时，y 取 5，6，有 2 种结果；

第 3 类，当 $x=5$ 时，y 取 4，5，6，有 3 种结果；

第 4 类，当 $x=6$ 时，y 取 3，4，5，6，有 4 种结果.

所以事件 A 中共有基本事件的个数为

$$1+2+3+4=10,$$

则

$$P(A)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}.$$

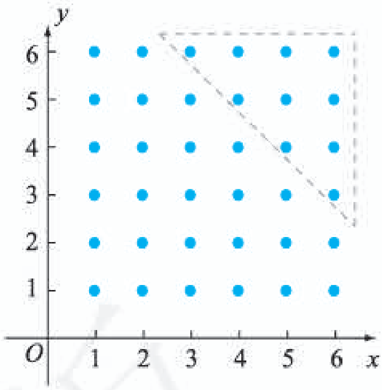


图 10－9

想一想

如果计算出买彩票中奖的概率是 $\frac{1}{1\,000}$，那么就意味着“买 1 000 张彩票一定有 1 张中奖”，正确吗？

练习 10.2.2

1. 求下列随机事件发生的概率：

(1) 抛掷两枚质地均匀的硬币，事件 A 为“恰有一枚正面向上”；

(2) 抛掷三枚质地均匀的硬币，事件 B 为“恰有一枚正面向上”；

(3) 抛掷一枚骰子，事件 C 为“朝上的面的点数为偶数”；

(4) 抛掷两枚骰子，事件 D 为“朝上的面的点数之和为 7”.

2. 盒子中有 10 个大小相同的球，分别标有号码 1，2，3，…，10，从中任取 1 个球，求此球号码数不大于 3 的概率.

3. 口袋中共有 5 个编号为 1～5 的大小相同的球，其中有 3 个是红球，2 个是黑球.

(1) 从中任取 1 个球，求此球为红球的概率；

*(2) 从中任取 2 个球，每次取 1 个（不放回），求这 2 个球都是红球的概率.

*4. 用数字 1，2，3，4，5 随机组成没有重复数字的两位数，则组成奇数的概率是多少？

10.3 随机抽样

问题　水是生命之源，是人类的宝贵资源．要唤醒人们节约用水的意识，最好先从减少家庭生活用水做起．某职业学校环保社团在本市开展“2018 年 8 月份家庭用水量调查”的活动，该如何设计调查方案呢？

在这个问题中，想要收集 2018 年 8 月份每一户家庭用水量的数据，然后对数据进行分析，得出有关的结论．若安排人员走访每一户家庭，这需要耗费大量的人力、物力和时间．当不可能或没必要对所研究的对象进行全面考察时，通常选取其中一部分对象进行考察分析，取得某些数据资料，进而推断所研究对象的整体情况．

一般地，我们把所考察对象的某一数值指标的全体称为**总体**，总体中的每一个数值指标称为**个体**，从总体中抽出的一部分称为**样本**，样本中个体的数量称为**样本容量**．

在上述问题中，该城市每户家庭在 2018 年 8 月份的用水量的全体是总体，某户家庭 8 月份的用水量是一个个体，如果要选取 1 000 户家庭 8 月份的用水量进行分析，那么这 1 000 个用水量的数据就是样本，样本容量是 1 000．

通过样本研究总体，是统计学中常用的方法．我们经常采用抽样的方法抽取样本，进行数据分析，从中获得总体的相关信息，例如：

食品、饮料中的细菌是否超标？营养物质是否达标？

城市里每天的垃圾回收量是多少？污水排放量有多大？

央视春节晚会的收视率是多少？

在获取样本的过程中，样本的选择是至关重要的，样本能否代表总体，直接影响着统计结果的可靠性．例如，1936 年，在美国总统选举前，一份颇有名气的杂志社做了一次民意测验，调查时任堪萨斯州州长兰顿和时任总统罗斯福谁将当选下一届总统．为了了解公众意向，调查者通过电话簿和车辆登记簿上的名单给一大批人发了调查表．通过分析收回的调查表，显示兰顿非常受欢迎，于是此杂志预测兰顿将在选举中获胜．然而，实际选举的结果正好相反，罗斯福在选举中获胜，有关数据如下表所示．

候选人	预测结果/%	选举结果/%
罗斯福	43	62
兰　顿	57	38

上述案例之所以成为一次失败的调查，是因为在 1936 年，美国只有少数富人拥有电话和汽车，通过电话簿和车辆登记簿获取的样本不能充分地代表总体，于是导致

调查结果失真，这次调查被称为抽样中的“泰坦尼克事件”. 由此可见，如何抽取样本，直接关系到对总体估计的准确程度.

要使抽取的样本能准确地反映总体信息、能充分地代表总体，在抽样时就要保证每一个个体被抽到的机会是相等的，满足这个条件的抽样称为**随机抽样**. 在进行抽样时，如果能将总体“搅拌均匀”，满足随机抽样的条件，那么从总体中任意抽取一部分个体组成的样本，都含有与总体基本相同的信息.

下面介绍三种经常采用的随机抽样方法.

10.3.1 简单随机抽样

问题　要对某商店内出售的小包装巧克力的含糖量进行检测，该如何获取检验的样本呢?

为保证每一块巧克力被抽到的机会相等，实践中常用的一个方法是，将这批小包装的巧克力放入一个不透明的袋子中，搅拌均匀后，从中逐一不放回地摸取一部分，作为检验的一个样本.

在设计抽样方法时，我们既要考虑每一个个体被抽到的机会相等，满足随机抽样的条件，又要使抽样过程简便易行.

一般地，设一个总体含有 N 个个体，从中逐个不放回地抽取 n 个个体作为样本($n\leqslant N$)，如果每一次抽取时总体中的每一个个体被抽到的机会都相等，就把这种抽样方法称为**简单随机抽样**. 这样抽取的样本，称为**简单随机样本**.

最常用的简单随机抽样方法有两种：抽签法和随机数表法.

1. 抽签法

问题　为调查某职业学校一年级会计班 20 名男生每天上网的时间，现从中随机选出 5 名男生，调查他们的上网时间，应如何操作?

我们可以对 20 名男生进行编号，把编号分别写在 20 张纸片上，将纸片揉成大小比较均匀（不易辨认）的小纸球，放到一个不透明的盒子里搅拌均匀，从中逐个不放回地抽取 5 个纸球，找到这 5 个纸球上的编号所对应的男生，调查他们的上网时间，这样就得到了一个简单随机样本.

一般地，将总体中的 N 个个体编号，并把号码分别写在号签上，再将号签放在一个容器中，搅拌均匀后，每次从中抽取一个号签，不放回地连续抽取 n 次，就可得到一个容量为 n 的样本，这种抽样方法就是**抽签法**.

想一想

在生活中，应用抽签法解决问题的例子有哪些?

上述问题中取得简单随机样本的方法就是抽签法.

2. 随机数表法

问题　如果要检验某品牌的饮料中微量元素的含量是否达标，欲从某商场上架的 700 罐该品牌的饮料中抽取 50 罐. 如果用抽签法获得简单随机样本，是否方

便呢？

抽签法虽然简单易行，但总体中的个体数较多时，制签的过程比较麻烦，同时将总体“搅拌均匀”也比较困难，进而容易导致样本缺乏代表性.

随机抽样中，另一种经常被采用的方法是随机数表法.

随机数表是由 0，1，2，…，9 这 10 个数字随机生成的数表，并且每一个数字在表中出现的机会是相等的，通过随机数表抽取样本的方法称为**随机数表法**.

在上述问题中，利用随机数表抽取样本时，可以按照下面的步骤进行.

第 1 步：先将 700 罐饮料编号，可以编为 000，001，002，…，699.

试一试

在 OpenOffice 软件的电子表格中，用函数 RANDBETWEEN 生成一个随机数表.

第 2 步：在随机数表中任选一个数，例如在下表中选出第 2 行第 2 列的数 1.

	第 2 列							
	43021	92980	27768	26916	27783	84572	78483	39820
第 2 行	61459	39073	79242	20372	21048	87088	34600	74636
	63171	58247	12907	50303	28814	40422	97895	61421
	42372	53183	51546	90385	12120	64042	51320	22983
	81500	13219	57941	74927	32798	98600	55225	42059
	59408	66368	36016	26247	25967	49487	26968	86021

第 3 步：从选定的数 1 开始向右读（读数的方向也可以是向左、向上、向下等），得到一个三位的号码 145，在 000～699 的范围内，将它取出；继续向右读，得到 939，不在范围内，将它跳过. 按照这种方法继续向右读，只要读出的号码在范围内且不与前面取出的数重复，就把它取出，否则就跳过不取，取到一行末尾时转到下一行从左到右继续读数. 如此下去直到得出在 000～699 范围内的 50 个号码，这些号码所对应的饮料中微量元素的含量，就组成了一个容量为 50 的样本.

试一试

在 OpenOffice 软件的电子表格中，用函数 RANDBETWEEN 生成 0～699 范围内的 50 个随机数，作为抽取的样本编号.

练习 10.3.1

1. 口答：

(1) 抽签法是如何保证样本的代表性的？

(2) 随机数表法能代替抽签法吗？

(3) 用随机数表法抽取样本有什么优点和缺点？

(4) 抽样调查的好处和可能出现的问题是什么？

2. 某职业中专二年级共有 500 名学生，从中随机抽出 50 名测试其汉字录入速度. 计划用抽签法和随机数表法进行抽样，分别写出形成简单随机样本的过程.

3. 某居民区有 730 户居民，居委会计划从中抽取 25 户调查其家庭收入情况，请帮助居委会设计抽取简单随机样本的方法.

10.3.2 系统抽样

问题 为检验某种饮料的含糖量，采取如下检测方法：在生产流水线上，随机从某一时刻开始在流水线的检测点拿下一瓶饮料，以后每间隔 10 分钟都从该检测点拿下一瓶饮料，这种抽取样本的方法是随机抽样吗？

图 10－10

在这个问题中，流水线的传送带是匀速运转的，流水线上的检测点是固定的，由于间隔的时间相同，取到的饮料之间的间隔是有规律的. 注意到第一瓶饮料是随机抽取的，从而每一瓶饮料被抽到的机会相等，因此，这种抽取样本的方法是随机抽样.

借鉴上述抽样方法，完成以下例子.

某职业中专为了了解一年级学生某项体能指标，计划从一年级 1 200 名学生中抽取 120 名进行调查.

可将这 1 200 名学生从 1～1 200 进行编号，并把编号分成 120 个号码段，由于$\frac{1\,200}{120}=10$，所以抽取的两个相邻号码的间隔为 10. 从第一个号码段（1～10）中随机地抽取一个号码，作为样本的第一个个体，以后的号码都在前一个号码的基础上加 10 即可. 例如，若在第一个号码段中抽到的是 6 号，则得到的号码依次为

$$6,\ 16,\ 26,\ 36,\ \cdots,\ 1\,196.$$

试一试

假如从第一个号码段抽到的编号是 10，样本中其他编号是怎样的？

这 120 名学生的某项体能指标构成了一个样本.

一般地，假设要从容量为 N 的总体中抽取容量为 n 的样本，我们可以按下列步骤进行抽样：

(1) 先将总体的 N 个个体编号，当个体自身所带的号码为连号时可直接利用，如学号、准考证号、门牌号等.

(2) 确定分段间隔数 k，对编号进行分段. 当 $\frac{N}{n}$ 是整数时，取 $k=\frac{N}{n}$；当 $\frac{N}{n}$ 不是整数时，取 k 为 $\frac{N}{n}$ 的整数部分，并随机地从总体中剔除 $N-kn$ 个个体，然后对余下的个体连续编号.

(3) 在第一个号码段用简单随机抽样法确定第一个个体的编号 l $(l\leqslant k)$.

(4) 依次得到其他的个体编号 $l+k$，$l+2k$，…，$l+(n-1)k$.

这种抽样方法称为**系统抽样**.

试一试

从你所在班级所有学生的某项指标构成的总体中，用系统抽样法抽取一个容量为 5 的样本.

练习 10.3.2

1. 请说出系统抽样获得的样本编号有什么特点.
2. 某校为了解学生每周课外阅读的平均时间，决定利用系统抽样的方法从该校 1 000 名学生中抽出 20 名学生进行调查，如果在第一个号码段中抽到的编号是 5，请写出样本中其他的编号.
3. 有人说，我可以借用居民身份证号码来进行中央电视台春节联欢晚会的收视率调查：在 001～999 中随机抽取一个数，比如这个数是 321，那么身份证后三位数是 321 的观众就是我要调查的对象. 请问这样所获得的样本有代表性吗？为什么？

10.3.3 分层抽样

问题　若想了解 20 个幼儿和 40 个成人的心率情况，随机抽取 6 人进行心率检测，你认为这种抽样方式合理吗？

我们知道，婴幼儿处于生长发育时期，新陈代谢旺盛，幼儿的心跳普遍比成人快，可见总体存在明显的层次差异，上述随机抽取的样本可能不会充分地反映总体的情况.

上述问题情境中，可以按抽取样本的比例 $6:60=1:10$ 分别抽取，即幼儿抽取 $\frac{1}{10}\times20=2$ 人，成人抽取 $\frac{1}{10}\times40=4$ 人.

一般地，在抽样时，将总体分成互不交叉的层，然后按照一定的比例，从各层

独立地抽取一定数量的个体，将各层取出的个体合在一起作为样本，这种抽样方法称为**分层抽样**.

> **想一想**
>
> 抽样中的“泰坦尼克事件”，如果采取分层抽样的方法进行调查，结果会失真吗?

例 假设某区有高中生 6 500 名，初中生 11 900 名，小学生 17 000 名. 当地教育部门为了了解本地区中小学生的近视情况，计划从本地区的中小学生中抽取 1%的学生进行调查. 应该怎样抽取?

分析：不同年龄阶段的学生的近视情况可能存在明显差异，因此应将全体学生分成高中生、初中生和小学生三部分，然后按比例采用分层抽样.

解：由于样本容量与总体中的个体数之比是 1∶100，因此样本中包含的各层的个体数分别为

$$6\,500\times\frac{1}{100}=65,\ 11\,900\times\frac{1}{100}=119,\ 17\,000\times\frac{1}{100}=170.$$

所以应抽取 65 名高中生、119 名初中生和 170 名小学生.

从上面的抽样过程可以看出，分层抽样充分考虑了总体中个体的差异，并能够保持样本结构与总体结构的一致性，这对提高样本的代表性是非常重要的. 因此，当总体是由差异明显的几个部分组成时，往往选用分层抽样的方法.

练习 10.3.3

1. 口答：

(1) 某学校共有职工 500 人，其中教师系列 400 人，行政职员系列 100 人. 现在用分层抽样的方法抽取 25 人对学校管理制度的满意度进行调查，请说出分层抽取的比例；

(2) 某商家新进甲地西瓜 100 个，乙地西瓜 200 个，现计划用分层抽样的方法共抽取 6 个西瓜，对这两种西瓜的含糖量进行检测，则应抽取几个乙地西瓜?

2. 某公司在甲、乙、丙、丁四个地区分别有 45，20，50，15 个销售点，公司要调查产品销售的情况，欲从这些销售点中抽取一个容量为 26 的样本，请设计一个抽样方案.

3. 某单位有职工 500 人，其中不到 35 岁的有 125 人，35 岁至 49 岁的有 280 人，50 岁及以上的有 95 人. 为了了解这个单位的职工与身体状况有关的某项指标，要从中抽取一个容量为 100 的样本，计算应在各年龄段抽取的人数.

10.4　用样本估计总体

前面我们研究了用随机抽样的方法，从总体中抽取样本. 通过对样本数据的分析，可以估计总体的特征. 下面我们将对样本数据进行分析，并作出频率分布直方图，用样本的频率分布估计总体的分布；通过样本数据计算其平均数和方差，用样本的数字特征估计总体的数字特征.

10.4.1　用样本的频率分布估计总体的分布

问题　某钢铁加工厂生产标准内径为 25.40 mm 的钢管，钢管内径的尺寸在 25.325～25.475 mm 的范围内为优等品，如何了解生产的钢管中优等品所占的比例呢?

由于产品的数量巨大，不可能一一检测所有的钢管. 如果把这些钢管的内径尺寸看成总体，从中随机抽取一定数量的钢管，如抽取 100 件进行检测，则可通过这 100 件钢管的优等品率估计总体的优等品率.

下面的数据是一次抽样中的 100 件钢管的内径尺寸（单位：mm）：

25.39	25.36	25.34	25.42	25.45	25.38	25.39	25.42	25.47	25.35
25.41	25.43	25.44	25.48	25.45	25.43	25.46	25.40	25.51	25.45
25.40	25.39	25.41	25.36	25.38	25.31	25.56	25.43	25.40	25.38
25.37	25.44	25.33	25.46	25.40	25.49	25.34	25.42	25.50	25.37
25.35	25.32	25.45	25.40	25.27	25.43	25.54	25.39	25.45	25.43
25.40	25.43	25.44	25.41	25.53	25.37	25.38	25.24	25.44	25.40
25.36	25.42	25.39	25.46	25.38	25.35	25.31	25.34	25.40	25.36
25.41	25.32	25.38	25.42	25.40	25.33	25.37	25.41	25.49	25.35
25.47	25.34	25.30	25.39	25.36	25.46	25.29	25.40	25.37	25.33
25.40	25.35	25.41	25.37	25.47	25.39	25.42	25.47	25.38	25.39

从上面的样本中，如何得出钢管中优等品所占的比例?

要想从随机抽取出来的 100 个数据中直接看出钢管质量的分布情况，需要对数据进行整理和分析. 常用的一种方法是作出数据的频率分布表和频率分布直方图，然后从表、图中直观地看出样本数据的分布情况. 具体步骤如下：

（1）求极差

极差是一组数据的最大值与最小值的差，它反映了一组数据变化的幅度. 例如，上面这组数据的最大值是 25.56，最小值是 25.24，它们的极差为

$$25.56-25.24=0.32.$$

（2）决定组数与组距

样本数据有 100 个，样本容量比较大，可以把样本分为 8～12 组，我们这里取 11 组. 上面算得极差为 0.32，因此

$$组距=\frac{极差}{组数}=\frac{0.32}{11}\approx 0.03.$$

(3) 决定分点与分组

将第 1 组的起点定为 25.235，组距为 0.03，这样所分的 11 个组是：

第 1 组：[25.235，25.265)；　第 2 组：[25.265，25.295)；

第 3 组：[25.295，25.325)；　第 4 组：[25.325，25.355)；

第 5 组：[25.355，25.385)；　第 6 组：[25.385，25.415)；

第 7 组：[25.415，25.445)；　第 8 组：[25.445，25.475)；

第 9 组：[25.475，25.505)；　第 10 组：[25.505，25.535)；

第 11 组：[25.535，25.565].

(4) 列频率分布表

把各小组内数据的个数进行累计，这个累计数称为各小组的**频数**，各小组的频数除以样本容量，得到各小组的**频率**. 列出频率分布表如下：

分组	个数累计	频数	频率	$\frac{频率}{组距}$
[25.235，25.265)	一	1	0.01	0.33
[25.265，25.295)	T	2	0.02	0.67
[25.295，25.325)	正	5	0.05	1.67
[25.325，25.355)	正正T	12	0.12	4.00
[25.355，25.385)	正正正下	18	0.18	6.00
[25.385，25.415)	正正正正正	25	0.25	8.33
[25.415，25.445)	正正正一	16	0.16	5.33
[25.445，25.475)	正正下	13	0.13	4.33
[25.475，25.505)	止	4	0.04	1.33
[25.505，25.535)	T	2	0.02	0.67
[25.535，25.565]	T	2	0.02	0.67
合计	100	100	1.00	—

(5) 绘制频率分布直方图

在平面直角坐标系中，用横轴表示钢管内径尺寸，纵轴表示频率与组距的比值，得到频率分布直方图，如图 10－11 所示.

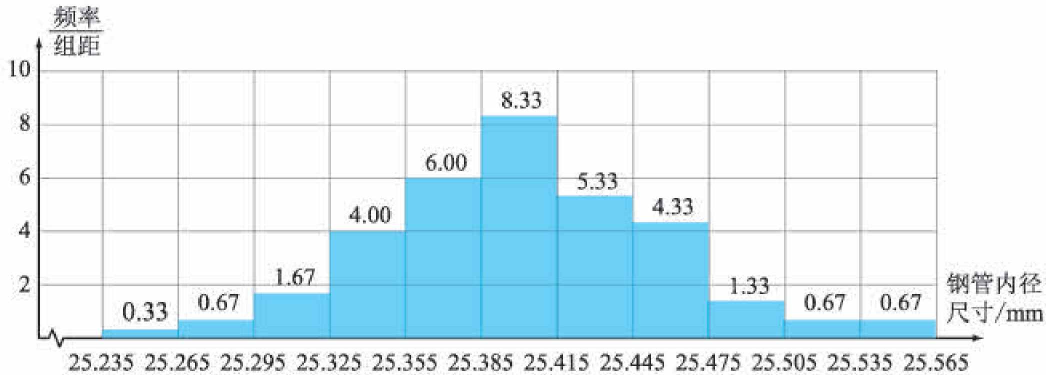


图 10－11

容易看出，在频率分布直方图中，

$$小矩形面积=组距\times\frac{频率}{组距}=频率.$$

这就是说，各小矩形的面积分别等于相应各组的频率. 显然，所有小矩形面积之和等于 1.

一般地，样本容量越大，分组数越多，图中表示的频率分布可能就越接近于总体在各组内的频率分布.

用样本的频率分布估计总体的分布时，如果随机抽取另外一个容量为 100 的样本，所形成的样本频率分布一般会与前一个样本频率分布有所不同. 但是，它们都可以近似地看成总体的分布.

做一做

观察图 10－11，计算出内径尺寸在 25.325～25.475 mm 范围内的频率.

常用的统计图表还有茎叶图. 下面我们通过一个例子来学习用茎叶图表示数据.

例如，某赛季甲、乙两名篮球运动员每场比赛的得分情况如下：

甲：12，15，24，25，31，31，36，36，37，39，44，49，50；

乙：8，13，14，16，23，26，28，33，38，39，51.

上面的数据可以用图 10－12 来表示，图的中间部分像一棵植物的茎，两边部分像这棵植物茎上生长出来的叶子，用中间的数字表示两位运动员得分的十位数，两边的数字分别表示两个人各场比赛得分的个位数. 通常把这样的图称为**茎叶图**. 根据图 10－12 可以对两名运动员的成绩进行比较.

表示甲在这场比赛中得分为15

甲		乙
	0	8
52	1	346
54	2	368
976611	3	389
94	4	
0	5	1

图 10－12

练习 10.4.1

*1. 为了解某钢铁加工厂所生产钢管的内径尺寸，抽取了一个容量为 100 的简单随机样本（单位：mm）：

25.39	25.41	25.40	25.37	25.35	25.40	25.36	25.41	25.47	25.40
25.38	25.45	25.41	25.46	25.34	25.45	25.44	25.34	25.36	25.37
25.34	25.44	25.41	25.33	25.45	25.44	25.39	25.38	25.30	25.41
25.44	25.50	25.38	25.48	25.42	25.43	25.48	25.44	25.41	25.39
25.39	25.41	25.40	25.37	25.35	25.40	25.36	25.41	25.47	25.40
25.40	25.45	25.33	25.51	25.45	25.39	25.37	25.35	25.48	25.41
25.39	25.46	25.56	25.34	25.54	25.38	25.31	25.37	25.29	25.42
25.44	25.42	25.45	25.44	25.41	25.26	25.36	25.43	25.42	25.49
25.47	25.51	25.40	25.50	25.45	25.44	25.40	25.49	25.37	25.38
25.37	25.47	25.40	25.39	25.45	25.42	25.38	25.37	25.35	25.41

根据提供的数据完成下列各题：

（1）填写样本频率分布表；

分组	个数累计	频数	频率	$\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$
[25.245，25.275)				
[25.275，25.305)				
[25.305，25.335)				
[25.335，25.365)				

续表

分组	个数累计	频数	频率	$\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}$
[25.365，25.395)				
[25.395，25.425)				
[25.425，25.455)				
[25.455，25.485)				
[25.485，25.515)				
[25.515，25.545)				
[25.545，25.575]				
合计				—

（2）作出样本频率分布直方图；

（3）根据样本频率分布直方图，估计小于 25.43 的数据所占总体的百分比.

*2. 某专业技能大赛中，甲、乙两个小组各 10 名学生的成绩如下（单位：分）：

甲组：71　74　77　79　84　88　90　92　94　95

乙组：69　72　74　78　80　83　84　89　89　97

用茎叶图表示上述成绩.

*3. 调查小区里 100 户家庭在某月的用电量，作出这组数据的频率分布表、频率分布直方图，对小区的居民在该月的用电量情况进行估计.

10.4.2　用样本的数字特征估计总体的数字特征

问题　如何知道某型号的所有导弹的平均射程？如何知道某品牌的所有听装啤酒中麦芽糖的平均含量？

要知道某型号的所有导弹的平均射程，当然不能把所有导弹逐一发射测试；要知道某品牌的所有听装啤酒中麦芽糖的平均含量，也不能把听装啤酒都打开进行检测. 在很多实际情况下，我们只能通过样本的数字特征来估计总体的数字特征.

1. 用样本平均数估计总体平均数

平均数描述了一组数据的平均水平，定量地反映了数据的集中趋势. 通常我们用样本的平均数来估计总体的平均数.

一般地，若记 n 个样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\overline{x}$，则

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}.$$

例 1 从某企业全体员工某月的月工资表中随机抽取 50 名员工的月工资，得到的数据如下（单位：元）：

2 800	2 800	2 800	2 800	2 800	3 000	3 000	3 000	3 000
3 000	3 000	3 000	3 000	3 000	3 000	3 200	3 200	3 200
3 200	3 200	3 200	3 200	3 200	3 200	3 200	3 200	3 200
3 200	3 200	3 200	3 200	3 200	3 200	3 200	3 200	3 500
3 500	3 500	3 500	3 500	3 500	4 000	4 000	4 000	4 000
4 000	4 000	4 500	4 500	4 500				

试计算这 50 名员工的月工资平均数，并估计这个企业员工的平均工资.

解： 这 50 名员工的月平均工资为

$$\frac{2\ 800+2\ 800+\cdots+4\ 500}{50}=3\ 330 \text{ 元},$$

由此可以估计这家企业员工的月平均工资为 3 330 元.

> **试一试**
>
> 在 OpenOffice 软件的电子表格中，用求平均数的 AVERAGE 函数求这组数据的平均数.

用样本平均数估计总体平均数时，如果再随机抽取 50 名员工的工资，计算得到的样本平均数一般会与例 1 中的样本平均数不同，因此样本平均数只是总体平均数的近似值.

2. 用样本标准差估计总体标准差

问题 甲、乙两名射击选手在相同的条件下各射击 10 次，命中的环数如下：

甲：7　8　6　8　6　5　9　10　7　4

乙：9　5　7　8　7　6　8　6　7　7

哪一名选手的成绩更稳定？

虽然甲、乙两名选手的平均成绩都是 7，但是直观上看还是有差异的，甲的成绩比较分散，乙的成绩比较集中. 考察样本数据分散程度的大小，最常用的统计量是标准差.

一般地，设样本中的数据为 x_1，x_2，…，x_n，样本的平均数为 $\overline{x}$，定义

$$s^2=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n},$$

$$s=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}},$$

其中 s^2 称为**样本方差**，s 称为**样本标准差**.

> **试一试**
>
> 在 OpenOffice 软件的电子表格中，用函数 STDEV. P 分别求出上述问题中数据的标准差.

标准差是反映数据离散程度的统计量，标准差越大，表示数据越分散，标准差越小，表示数据越集中.

例 2 计算数据 5，7，7，8，10，11 的标准差.

解：因为

$$\overline{x}=\frac{5+7+7+8+10+11}{6}=8,$$

所以

$$s^2=\frac{(5-8)^2+(7-8)^2+(7-8)^2+(8-8)^2+(10-8)^2+(11-8)^2}{6}=4,$$

从而

$$s=2.$$

因此这组数据的标准差为 2.

例 3 从某灯具厂生产的一批灯中随机地抽取 10 只进行寿命测试，得到数据如下（单位：h）：

7 456	7 395	7 525	7 514	7 391
7 499	7 478	7 382	7 534	7 496

使用函数型计算器求样本平均数 $\overline{x}$ 及样本标准差 s（精确到 0.01）.

解：(1) 进入统计计算状态

开启计算器，按[设置][2]（统计），按[1]（单变量统计）.

(2) 输入数据

把上述数据逐个输入计算器，每次输入一个数据后，按[=]. 逐个输入后，部分界面如图 10－13（1）所示.

（1）　　　　（2）

图 10－13

(3) 计算统计数据

按[AC]返回主界面，再按[OPTN][2]（单变量统计），界面如图 10－12（2）所示.

显示的结果中：$\overline{x}=7\ 467$ 即为样本的平均数，$\sigma x=55.094\ 464\ 33$ 就是样本的标准差，所以样本平均数 $\overline{x}=7\ 467$，样本标准差 $s\approx55.09$.

例 4 借助计算工具求“10.4.1 用样本的频率分布估计总体的分布”这一节问题背景中的样本平均数、样本标准差，并估计这批钢管内径尺寸的标准差.

解：可求出样本数据的平均数 $\overline{x}\approx25.401$，样本标准差 $s\approx0.057$. 用样本标准差可以估计出这批钢管内径尺寸的总体标准差为 0.057，也就是钢管内径尺寸对

于平均数的平均波动幅度是 0.057.

从标准差的定义可知，若个体的值与平均数的差的绝对值较大，则标准差也较大，表明数据的波动幅度较大，数据离散程度较高. 因此，标准差描述了一组数据相对平均数的离散程度.

平均数和标准差是工业生产中检测产品质量的重要指标. 当样本的平均数或标准差超过了规定界限的时候，说明这批产品的质量可能距生产要求有较大的偏离，应该进行检查，找出原因，从而及时解决问题.

样本平均数、标准差与频率分布直方图有什么关系呢？我们仍以“10.4.1 用样本的频率分布估计总体的分布”这一节的问题背景为例进行说明.

样本平均数约为 25.401，样本标准差约为 0.057. 在频率分布直方图中用虚线标出平均数所在的位置，并作出距平均数两侧各一倍标准差和两倍标准差的区间. 如图 10－14 所示，可以看到大约有 70% 的钢管内径尺寸落在区间 $[\overline{x}-s, \overline{x}+s]$ 内；大约有 95% 的钢管内径尺寸落在区间 $[\overline{x}-2s, \overline{x}+2s]$ 内. 由此我们估计总体中也有大致比例的钢管内径尺寸落入相应的区间内.

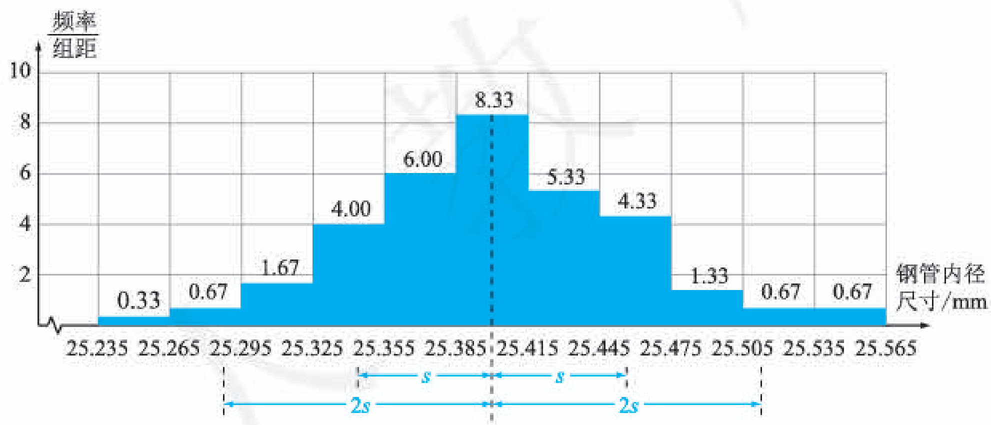


图 10－14

实际生产、生活中有大量的例子符合这样的统计规律，比如同一年龄段的人群的身高、体重，某品牌饮料中微量元素的含量，等等.

练习 10.4.2

1. 计算下列样本的方差与标准差：

28　24　25　23　27　24　22　24　25　28

2. 用自动包装机包糖，现从包装好的一批糖中任取 9 包，称得糖的质量数据如下（单位：g）：

99.2　98.6　100.3　101.3　98.3　99.8　99.4　101.9　100.5

求出这 9 包糖的平均质量和标准差，并估计包装好的这批糖的平均质量及标准差.

*3. 从 1 000 个零件中抽取 10 件，每件长度如下（单位：mm）：

22.36　22.35　22.33　22.35　22.37　22.34　22.38　22.36　22.32　22.35

使用函数型计算器计算样本的平均数和标准差，并估计总体的平均数和标准差.

4. 两名跳远运动员在 10 次测试中的成绩分别如下（单位：m）：

甲：5.85　5.93　6.07　5.91　5.99　6.13　5.89　6.05　6.00　6.19

乙：6.11　6.08　5.83　5.92　5.84　5.81　6.18　6.17　5.85　6.21

分别计算两个样本的标准差，并根据计算结果估计哪位运动员的成绩比较稳定.

*5. 为了了解中学男生的身体发育情况，对某中学同龄的 50 名男生的身高进行了测量，结果如下（单位：cm）：

175	168	170	176	167	181	162	173	171	177
179	172	165	157	172	173	166	177	169	181
160	163	166	177	175	174	173	174	171	171
158	170	165	175	165	174	169	163	166	166
174	172	166	172	167	172	175	161	173	167

(1) 列出样本的频率分布表，作出频率分布直方图；

(2) 计算样本的平均数和标准差.

习题十

1. 甲袋中有 5 个不同的红球，4 个不同的黑球；乙袋中有 7 个不同的红球，3 个不同的白球.

(1) 如果任取 1 个红球，有多少种不同的取法?

(2) 如果从两个袋中各取 1 个球，取出的恰好都是红球，有多少种不同的取法?

2. 有 5 位同学计划在假期中游览风景，有 3 处风景可供选择，而每位同学只能选取 1 处景点，共有多少种不同的游览方法?

3. 依次抛掷四枚质地均匀的硬币，一共可能出现的结果有多少种?

4. 现有 10 元、50 元、100 元的纸币各一张，可以组成多少种不同的币值?

5. 抛掷三枚硬币，求至少出现一枚正面向上的概率.

6. 现有三张卡片，上面分别写有 2，3，6 三个数字，从中任取两张，排一个两位数，若 6 能够当 9 用，求排成偶数的概率.

7. 抛掷一枚骰子，求出现 3 点或 5 点的概率.

8. 抛掷两枚骰子，求出现点数之和等于 8 的概率.

9. 为了考察某地 10 000 名高一学生的体重情况，从中抽出了 200 名学生做调查. 这里的总体、个体、样本、样本容量各是什么?

10. 某班级共有学生 46 人，为了了解学生每周的上网时间，欲用系统抽样的方法，抽取一个容量为 6 的样本.

(1) 要使分段的间隔数最大，求至少应从总体中随机剔除的个体数目；

(2) 已知 17 号在样本的编号中，求样本中其他的编号.

11. 某市有 210 家百货商店，其中大型商店有 20 家，中型商店有 40 家，小型商店有 150 家. 为了了解商店的销售情况，要从中抽取 21 家商店进行调查，应如何进行抽取.

*12. 在一批棉花中抽测了 60 根棉花的纤维长度，结果如下（单位：mm）：

82	202	352	321	25	293	293	86	28	206
323	355	357	33	325	113	233	294	50	296
115	236	357	326	52	301	140	328	238	358
58	255	143	360	340	302	370	343	260	303
59	146	60	263	170	305	380	346	61	305
175	348	264	383	62	306	195	350	265	385

列出样本的频率分布表，作出频率分布直方图.

13. 从一批零件中随机抽取 20 件，测得零件的长度如下（单位：mm）：

215	227	216	192	207	207	214	218	205	200
187	185	202	218	195	215	206	202	208	210

试估计该批零件中零件长度的平均数和标准差.

阅读与实践

概率论的起源

概率论的思想起始于意大利文艺复兴时期. 最先引起数学家们注意的是赌博中的问题. 15 世纪意大利和法国赌博盛行，而且赌法复杂、赌注大. 一些职业赌徒为增加获胜机会，迫切需要得到取胜的思路. 意大利贵族曾经请天文学家伽利略解释下列问题：掷三枚骰子，朝上的面的点数之和为 9 或为 10，各有 6 种不同的组合法，但在实际操作中，发现出现 10 点的次数多于 9 点，是何缘故？伽利略给出了使对方信服的答复.

三枚骰子朝上的面的点数之和为 9 的各种组合分别为

(1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3),

共有 6 组.

三枚骰子朝上的面的点数之和为 10 的各种组合分别为

(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4),

也是有 6 组.

但各种组合出现的机会并非相等，其中 (1, 2, 6) 这一组有 6 种可能的情况：

(1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1).

同理 (1, 3, 5) 和 (2, 3, 4) 也各有 6 种可能的情况. 其中 (1, 4, 4) 这一组有 3 种可能的情况，即

(1, 4, 4), (4, 1, 4), (4, 4, 1).

同理 (2, 2, 5) 也有 3 种可能的情况，但 (3, 3, 3) 这一组就只有一种情况，即

(3, 3, 3).

因此，朝上的面的点数之和为 9 的可能情况共有 25 种.

仿照上面的分析可知，朝上的面的点数之和为 10 的可能情况共有 27 种.

17 世纪中叶，法国的赌徒们又提出了“分赌金问题”，赌徒们自己无法给出答案，去请教当时的法国数学家帕斯卡，这个问题把帕斯卡给难住了，他冥思苦想了 3 年才想出了解决方法. 帕斯卡把他的解答寄给另一位法国数学家费马. 不久，费马在回信中给出了另一种解法. 他们频频通信，互相交流，围绕着赌博中的数学问题开始了深入细致的研究. 这些问题后来被到巴黎来的荷兰科学家惠更斯获悉，回荷兰后，他独立地对此进行研究. 帕斯卡和费马一边亲自做赌博试验，一边仔细研究赌博中出现的各种问题，终于完整地解决了“分赌金问题”，并将此题的解法向更一般的情况推广，从而建立了概率论的一个基本概念——数学期望，这是描述随机变量取值的平均水平的一个量. 而另一边惠更斯经过多年的潜心研究，解决了掷骰子中的一些数学问题. 1657 年，惠更斯将自己的研究成果写成了专著《论掷骰子游戏中的计算》. 这本书迄今为止被认为是概率论中最早的论著. 因此可以说早期概率论的真正创立者是帕斯卡、费马和惠更斯.

用统计学考证《红楼梦》的作者

“开卷不谈红楼梦，读尽诗书也枉然”.《红楼梦》以爱情故事为主线，揭

示了荣宁两府荒唐腐败的生活，描述了风土人情、诗词歌赋、衣着服饰、饮食文化、园林建筑等．作者以“草蛇灰线，伏脉千里”的手法，展现了贾、王、薛、史四大家族的衰败过程，可谓人物众多、各有其貌，内容丰富、包罗万象，堪称当时社会的“百科全书”．

《红楼梦》一书共 120 回，自胡适作《红楼梦考证》以来，普遍认为前 80 回为曹雪芹所写，后 40 回为高鹗所续．然而，长期以来这种看法一直都饱受争议．

从 1985 年开始，复旦大学的李贤平教授带领他的学生对这一问题进行了研究，他们创造性地将 120 回看成 120 个样本，然后以与情节无关的虚词出现的次数作为变量，巧妙运用数理统计的分析方法，研究哪些回目出自同一人的手笔．

一般认为，每个人使用某些词的习惯是特有的．于是在研究过程中，他们用每个回目中的 47 个虚词（之，其，或……；呀，吗，咧，罢……；可，便，就……；等等）出现的次数（频数），作为《红楼梦》各个回目的数字标志．之所以要抛开情节，是因为在一般情况下，人们对同一情节的描述是非常相似的，但由于个人写作特点和习惯的不同，所用的虚词是不会一样的．在得到每个回目中虚词出现的频数之后，利用多元分析中的聚类分析法进行聚类，果然将 120 回分成了两类，即前 80 回为一类，后 40 回为一类，很形象地证实了《红楼梦》不是出自同一人的手笔．

但人们又产生了这样的疑问：前 80 回是否为曹雪芹所写？而后 40 回是否为高鹗所写呢？

这时统计学家们又找了一本曹雪芹的其他著作，做了类似分析，结果发现用词手法完全相同，因此断定前 80 回为曹雪芹一人所写，是他根据《石头记》写成的，中间插入《风月宝鉴》中的内容．同时，论证结果推翻了后 40 回是高鹗一人所写，并推断是曹雪芹亲友依据其草稿整理而成的，其中，宝黛故事可能为一人所写，贾府衰败情景为另一人所写，等等．

这个论证在红学界影响很大，李贤平教授及其团队用多元统计分析方法支持了红学界的观点，使红学界大为赞叹．