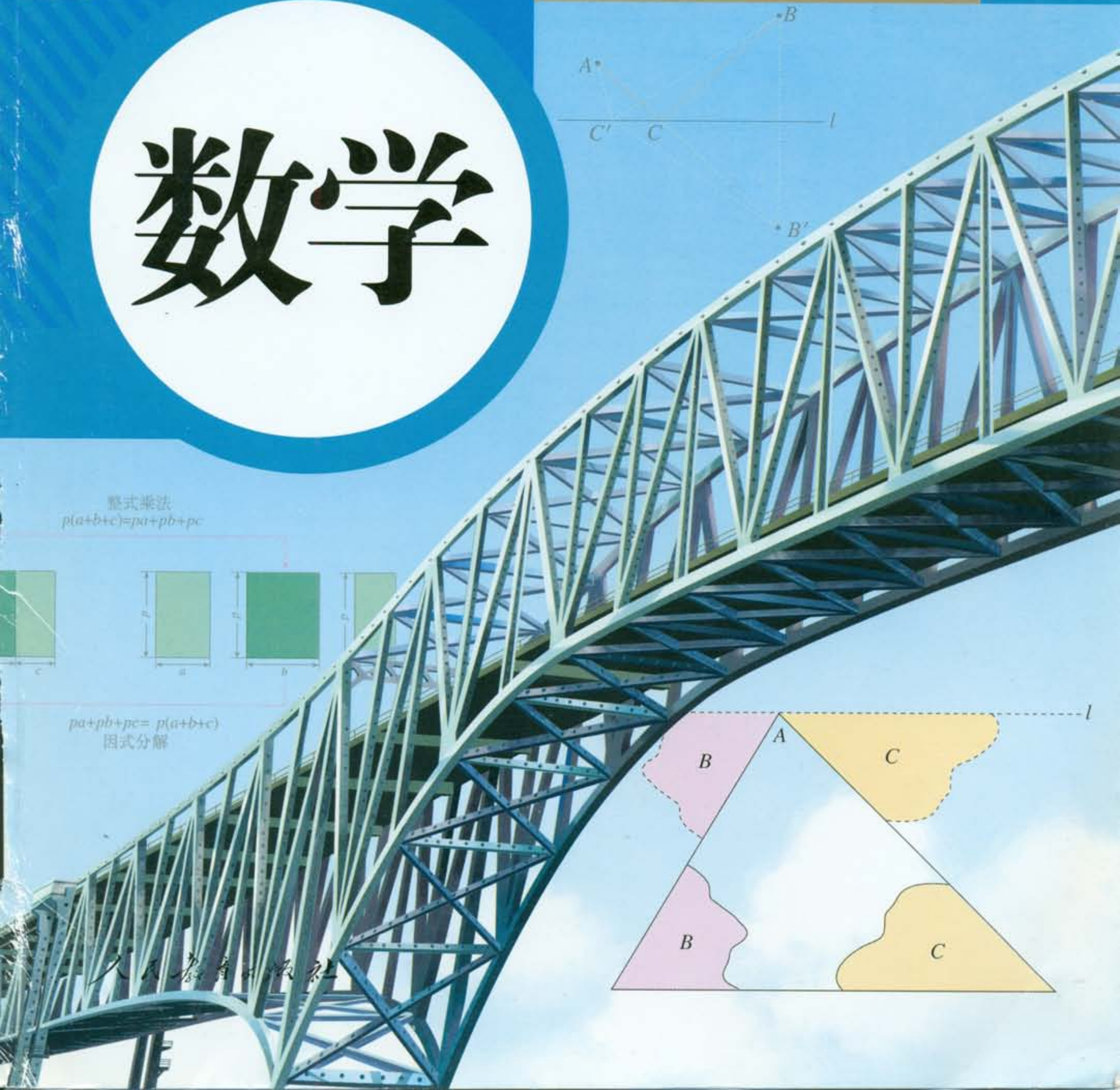
教育部审定
2013

义务教育教科书

八年级
上册

数学



人民教育出版社

义务教育教科书

数学

八年级

上册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社
·北京·

主　　编：林　群
副 主 编：田载今　薛　彬　李海东
本册主编：俞求是

主要编写人员：薛　彬　宋莉莉　刘长明　李海东　李龙才　王　冰
李　辉　李长武　任韶山　冯万绪
责任编辑：李海东
美术编辑：王俊宏

封面设计：吕　旻　王俊宏
插　　图：王俊宏　文鲁工作室（封面）

义务教育教科书
数　学
八年级　上册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著
*
人 民 教 育 出 版 社 出 版
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网址：http://www.pep.com.cn
中原大地传媒股份有限公司重印
河 南 省 新 华 书 店 发 行
河南新华印刷集团有限公司印装
*
开本：787 毫米×1092 毫米　1/16　印张：10.5　字数：170 000
2013 年 6 月第 1 版　2013 年 6 月河南第 1 次印刷
印数：1—450 000
ISBN 978-7-107-26163-3　定价：9.79 元
本书定价经豫发改收费[2006]632 号文批准。
全国举报电话：12358

印厂地址：郑州市经五路 12 号　邮编：450002　电话：0371—65957860—351

本册导引

亲爱的同学，八年级的数学学习就要开始了。

你将要学习的这本书是我们根据《义务教育数学课程标准（2011年版）》编写的教科书，这是你在七～九年级要学习的六册数学教科书中的第三册。

对三角形我们并不陌生，比如我们知道“三角形的内角和等于180°”。这个结论需要证明吗？又怎样证明呢？怎样利用这个结论求出四边形、五边形……的内角和呢？请你到**“三角形”**一章中去探索，在那里你不仅能够解决上面的问题，而且能够学到研究几何图形的重要思想和方法，并初步了解所学的图形知识在日常生活中的广泛应用。

“全等三角形”将带你认识“全等”这种图形间特殊的关系，并探索判断两个三角形形状、大小相同的条件，了解角的平分线的性质。学习了这些内容，你会对几何图形有进一步的认识，进一步学习几何证明的思想，提高推理论证和解决问题的能力。

在我们周围的世界，你会看到许多美丽的轴对称图形，在**“轴对称”**一章中我们将对轴对称图形作专门的研究，并学习画出各种轴对称图形，了解轴对称图形的知识在实践中的广泛应用。另外，在这一章，你会对等腰三角形这种重要的几何图形有进一步的认识。

我们知道，可以用字母表示数，用含有字母的式子表示实际问题中的数量关系。在**“整式的乘法与因式分解”**一章中，通过对整式的乘法运算的讨论，你将学到许多常用的重要运算性质和公式，知道更多的数量关系，加深对“从数到式”这个由具体到抽象的过程的认识。

数有整数与分数之分，式也有整式与分式之别。在**“分式”**一章你将看到，分式与分数就像姐妹一样，有很多共同的特征，在分式的身上你能很容易地找到分数的影子。学习了分式，你会认识到它是我们研究数量关系并用来解决问题的重要工具。

数学伴着我们成长，数学伴着我们进步，数学伴着我们成功，让我们一起随着这本书，继续畅游神奇、美妙的数学世界吧！

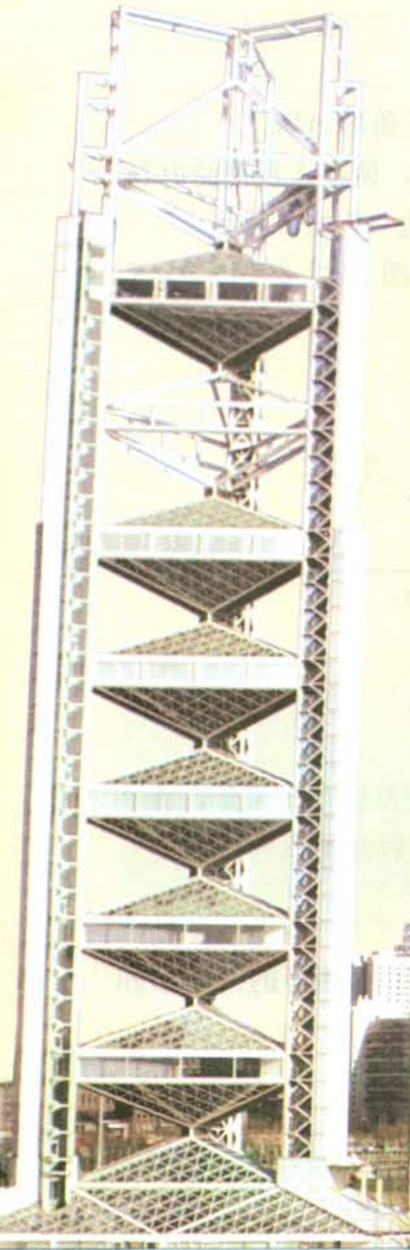
目　录

第十三章　轴对称

第十四章　整式的乘法与因式分解

第十五章　分式

第十一章　三角形



三角形是一种基本的几何图形. 从古埃及的金字塔到现代的建筑物，从巨大的钢架桥到微小的分子结构，到处都有三角形的形象. 为什么在工程建筑、机械制造中经常采用三角形的结构呢？这与三角形的性质有关.

一个三角形有三个角、三条边. 三个角之间有什么关系？三条边之间有什么关系？在小学我们通过测量得知三角形的内角和等于 $180°$，但测量常常有误差，三角形有无数多个，要说明任意一个三角形都符合这一规律，就不能只靠测量，而必须通过推理证明. 本章中，我们就来证明这个结论.

三角形是最简单的多边形，也是认识其他图形的基础. 本章将在学习与三角形有关的线段和角的基础上，学习多边形的有关知识，如借助三角形的内角和探究多边形的内角和. 学习本章后，我们不仅可以进一步认识三角形，而且还可以了解一些几何中研究问题的基本思路和方法.

11.1 与三角形有关的线段

11.1.1 三角形的边

在本章引言中，我们提到许多三角形的实际例子.

由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做**三角形**（triangle）.

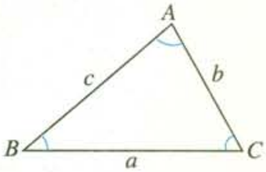


图 11.1-1

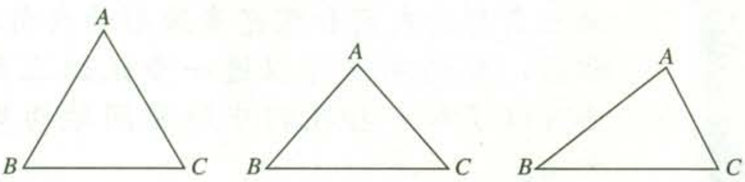
在图 11.1-1 中，线段 AB，BC，CA 是三角形的边. 点 A，B，C 是三角形的顶点. $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是相邻两边组成的角，叫做三角形的内角，简称三角形的角.

顶点是 A，B，C 的三角形，记作$\triangle ABC$，读作“三角形 ABC”.

$\triangle ABC$ 的三边，有时也用 a，b，c 来表示. 如图 11.1-1，顶点 A 所对的边 BC 用 a 表示，顶点 B 所对的边 AC 用 b 表示，顶点 C 所对的边 AB 用 c 表示.

我们知道：三边都相等的三角形叫做等边三角形（图 11.1-2（1））；有两条边相等的三角形叫做等腰三角形（图 11.1-2（2））.

图 11.1-2（3）中的三角形是三边都不相等的三角形.



（1）　（2）　（3）

图 11.1-2

思考

我们知道，按照三个内角的大小，可以将三角形分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形. 如何按照边的关系对三角形进行分类呢？说说你的想法，并与同学交流.

以“是否有边相等”，可以将三角形分为两类：三边都不相等的三角形和等腰三角形.

我们还知道：在等腰三角形中，相等的两边都叫做腰，另一边叫做底边，两腰的夹角叫做顶角，腰和底边的夹角叫做底角.

等边三角形是特殊的等腰三角形，即底边和腰相等的等腰三角形.

综上，三角形按边的相等关系分类如下：

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{三边都不相等的三角形}\\ \text{等腰三角形}\begin{cases}\text{底边和腰不相等的等腰三角形}\\ \text{等边三角形}\end{cases}\end{cases}$$

三角形

下面探究三角形三边之间的大小关系.

探究

任意画一个$\triangle ABC$，从点 B 出发，沿三角形的边到点 C，有几条线路可以选择？各条线路的长有什么关系？能证明你的结论吗？

对于任意一个$\triangle ABC$，如果把其中任意两个顶点（例如 B，C）看成定点，由“两点之间，线段最短”可得

$$AB+AC>BC. \qquad ①$$

同理有

$$AC+BC>AB, \qquad ②$$

$$AB+BC>AC. \qquad ③$$

一般地，我们有

三角形两边的和大于第三边.

由不等式②③移项可得 $BC>AB-AC$，$BC>AC-AB$. 这就是说，三角形两边的差小于第三边.

例　用一条长为 18 cm 的细绳围成一个等腰三角形.

(1) 如果腰长是底边长的 2 倍，那么各边的长是多少？

(2) 能围成有一边的长是 4 cm 的等腰三角形吗？为什么？

解：(1) 设底边长为 x cm，则腰长为 $2x$ cm.

$$x+2x+2x=18.$$

解得 $x=3.6$.

所以，三边长分别为 3.6 cm，7.2 cm，7.2 cm.

(2) 因为长为 4 cm 的边可能是腰，也可能是底边，所以需要分情况讨论.

如果 4 cm 长的边为底边，设腰长为 x cm，则

$$4+2x=18.$$

解得 $x=7$.

如果 4 cm 长的边为腰，设底边长为 x cm，则

$$2\times 4+x=18.$$

解得 $x=10$.

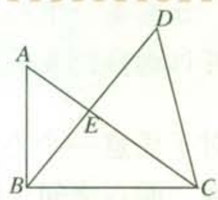
因为 $4+4<10$，不符合三角形两边的和大于第三边，所以不能围成腰长是 4 cm 的等腰三角形.

由以上讨论可知，可以围成底边长是 4 cm 的等腰三角形.

练习

1. 图中有几个三角形？用符号表示这些三角形.
2. （口答）下列长度的三条线段能否组成三角形？为什么？

   (1) 3，4，8；(2) 5，6，11；(3) 5，6，10.



（第 1 题）

11.1.2　三角形的高、中线与角平分线

与三角形有关的线段，除了三条边，还有我们已经学过的三角形的高. 如图 11.1-3，从$\triangle ABC$ 的顶点 A 向它所对的边 BC 所在直线画垂线，垂足为 D，所得线段 AD 叫做$\triangle ABC$ 的边 BC 上的**高**（altitude）.

用同样方法，你能画出$\triangle ABC$ 的另两条边上的高吗？

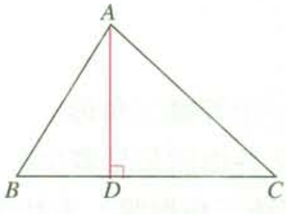
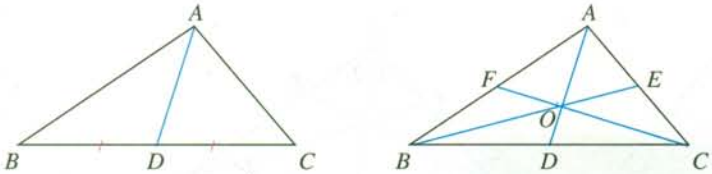


图 11.1-3

我们再来看两种与三角形有关的线段.

如图 11.1-4 (1)，连接$\triangle ABC$ 的顶点 A 和它所对的边 BC 的中点 D，所得线段 AD 叫做$\triangle ABC$ 的边 BC 上的**中线**（median）.

用同样方法，你能画出$\triangle ABC$ 的另两条边上的中线吗？



(1)　　　　　　　　(2)

图 11.1-4

如图 11.1-4（2），三角形的三条中线相交于一点. 三角形三条中线的交点叫做**三角形的重心**.

> 取一块质地均匀的三角形木板，顶住三条中线的交点，木板会保持平衡，这个平衡点就是这块三角形木板的重心.

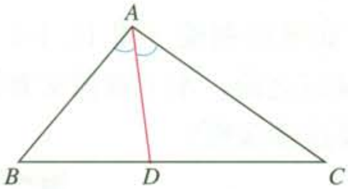


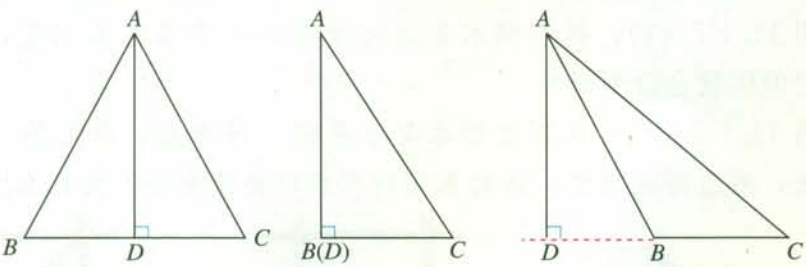
图 11.1-5

如图 11.1-5，画$\angle A$ 的平分线AD，交$\angle A$ 所对的边BC 于点D，所得线段AD 叫做$\triangle ABC$ 的**角平分线**（angular bisector）.

> 画出$\triangle ABC$ 的另两条角平分线，观察三条角平分线，你有什么发现？

练习

1. 如图，（1）（2）和（3）中的三个$\angle B$ 有什么不同？这三条$\triangle ABC$ 的边BC 上的高AD 在各自三角形的什么位置？你能说出其中的规律吗？



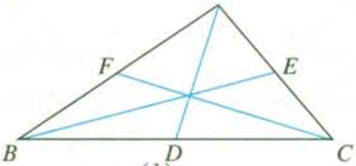
（1）　　　　（2）　　　　（3）

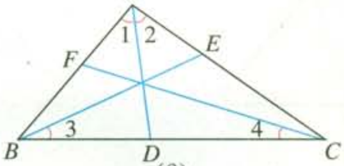
（第 1 题）

2. 填空：

（1）如下页图（1），AD，BE，CF 是$\triangle ABC$ 的三条中线，则 $AB=2\underline{\qquad}$，$BD=\underline{\qquad}$，$AE=\frac{1}{2}\underline{\qquad}$.

（2）如下页图（2），AD，BE，CF 是$\triangle ABC$ 的三条角平分线，则 $\angle 1=\underline{\qquad}$，$\angle 3=\frac{1}{2}\underline{\qquad}$，$\angle ACB=2\underline{\qquad}$.

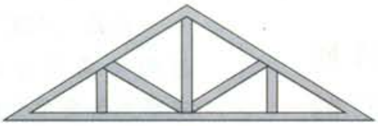




（第 2 题）

11.1.3 三角形的稳定性

工程建筑中经常采用三角形的结构，如屋顶钢架（图 11.1-6（1）），其中的道理是什么？盖房子时，在窗框未安装好之前，木工师傅常常先在窗框上斜钉一根木条（图 11.1-6（2））．为什么要这样做呢？



（1）

（2）

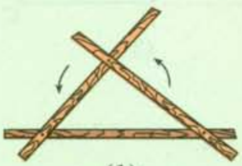
图 11.1-6

探究

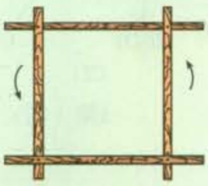
如图 11.1-7（1），将三根木条用钉子钉成一个三角形木架，然后扭动它，它的形状会改变吗？

如图 11.1-7（2），将四根木条用钉子钉成一个四边形木架，然后扭动它，它的形状会改变吗？

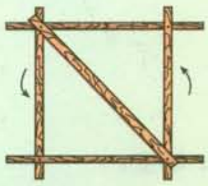
如图 11.1-7（3），在四边形木架上再钉一根木条，将它的一对顶点连接起来，然后再扭动它，这时木架的形状还会改变吗？为什么？



（1）



（2）



（3）

图 11.1-7

可以发现，三角形木架的形状不会改变，而四边形木架的形状会改变．这就是说，三角形是具有稳定性的图形，而四边形没有稳定性．

还可以发现，斜钉一根木条的四边形木架的形状不会改变. 这是因为斜钉一根木条后，四边形变成两个三角形，由于三角形有稳定性，斜钉一根木条的窗框在未安装好之前也不会变形.

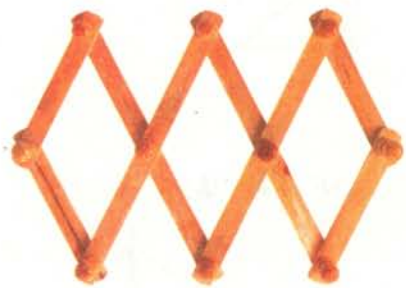
三角形的稳定性有广泛的应用，图 11.1-8 表示其中一些例子. 你能再举一些例子吗?

钢架桥

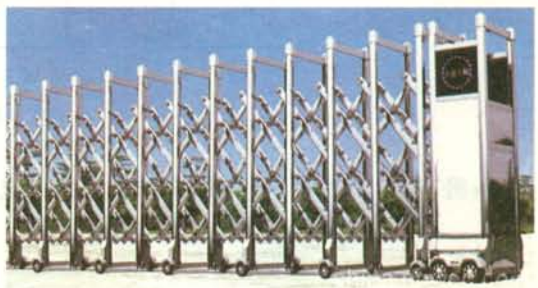
起重机

图 11.1-8

四边形的不稳定性也有广泛的应用，图 11.1-9 表示其中一些例子.



活动挂架

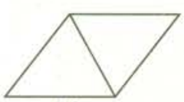


伸缩门

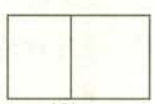
图 11.1-9

练习

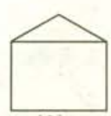
下列图形中哪些具有稳定性?



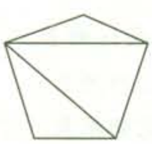
(1)



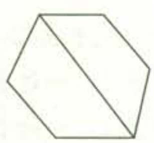
(2)



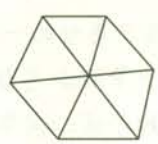
(3)



(4)



(5)

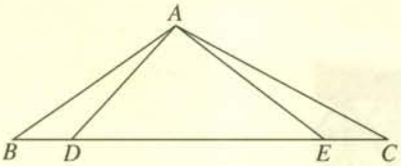


(6)

习题 11.1

复习巩固

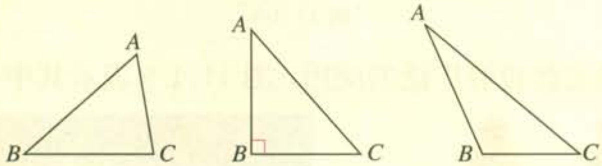
1. 图中有几个三角形？用符号表示这些三角形.



（第 1 题）

2. 长为 10，7，5，3 的四根木条，选其中三根组成三角形，有几种选法？为什么？

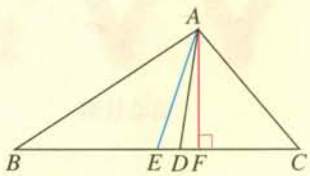
3. 对于下面每个三角形，过顶点 A 画出中线、角平分线和高.



(1)　　(2)　　(3)

（第 3 题）

4. 如图，在$\triangle ABC$ 中，AE 是中线，AD 是角平分线，AF 是高. 填空：



（第 4 题）

(1) $BE=\underline{\qquad}=\frac{1}{2}\underline{\qquad}$；

(2) $\angle BAD=\underline{\qquad\qquad}=\frac{1}{2}\underline{\qquad\qquad}$；

(3) $\angle AFB=\underline{\qquad\qquad}=90^\circ$；

(4) $S_{\triangle ABC}=\underline{\qquad\qquad}$.

5. 选择题.

下列图形中有稳定性的是（　　）.

(A) 正方形　　(B) 长方形

(C) 直角三角形　　(D) 平行四边形

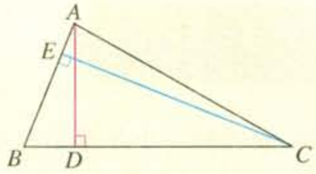
综合运用

6. 一个等腰三角形的一边长为 6 cm，周长为 20 cm，求其他两边的长.

7. (1) 已知等腰三角形的一边长等于 5，一边长等于 6，求它的周长；

(2) 已知等腰三角形的一边长等于 4，一边长等于 9，求它的周长.

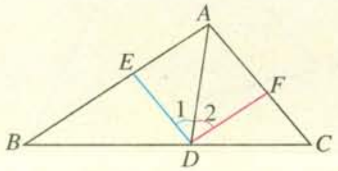
8. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$BC=4$. $\triangle ABC$的高AD与CE的比是多少？（提示：利用三角形的面积公式.）



（第8题）

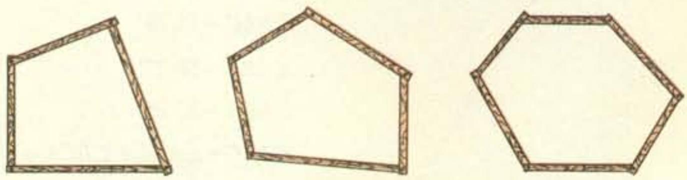
拓广探索

9. 如图，AD是$\triangle ABC$的角平分线. $DE /\!/ AC$，DE交AB于点E，$DF /\!/ AB$，DF交AC于点F. 图中$\angle 1$与$\angle 2$有什么关系？为什么？



（第9题）

10. 要使四边形木架（用4根木条钉成）不变形，至少要再钉上几根木条？五边形木架和六边形木架呢？



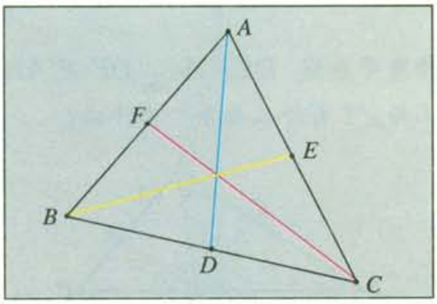
四边形木架　　五边形木架　　六边形木架

（第10题）

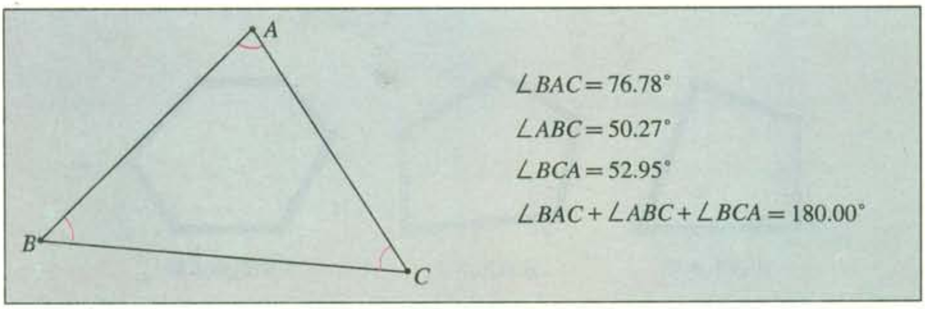
信息技术应用

画图找规律

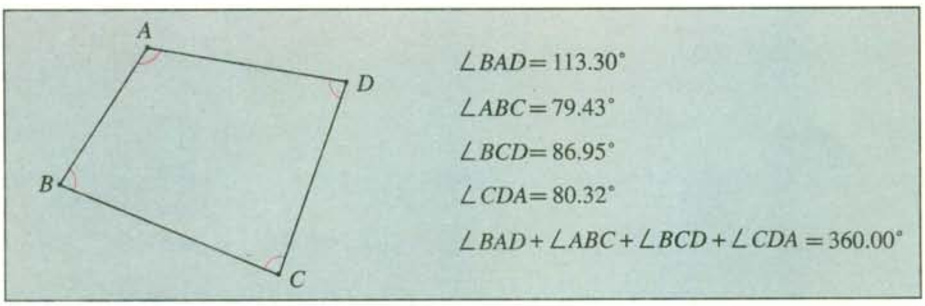
1. 在计算机上用《几何画板》软件画一个任意三角形，再画出它的三条中线，你发现了什么规律？然后随意改变所画三角形的形状，看看这个规律是否改变. 三角形的三条高有这个规律吗？三条角平分线呢？



2. 在计算机上用《几何画板》软件画一个任意三角形，量出它的各内角并计算它们的和. 然后随意改变所画三角形的形状，再量出变化后的各内角，计算内角和. 由此，你能得出什么结论？



3. 在计算机上用《几何画板》软件画一个任意四边形，量出它的各内角并计算它们的和. 然后随意改变所画四边形的形状，再量出变化后的各内角，计算内角和. 由此，你能得出什么结论？



11.2 与三角形有关的角

11.2.1 三角形的内角

我们在小学就已经知道，任意一个三角形的内角和等于 180°. 我们是通过度量或剪拼得出这一结论的.

通过度量或剪拼的方法，可以验证三角形的内角和等于 180°. 但是，由于测量常常有误差，这种“验证”不是“数学证明”，不能完全让人信服；又由于形状不同的三角形有无数个，我们不可能用上述方法一一验证所有三角形的内角和等于 180°. 所以，需要通过推理的方法去证明：任意一个三角形的内角和一定等于 180°.

探究

在纸上任意画一个三角形，将它的内角剪下拼合在一起，就得到一个平角. 从这个操作过程中，你能发现证明的思路吗？

上面的拼合中，有不同的方法. 你用了图 11.2-1 中的哪种方法？

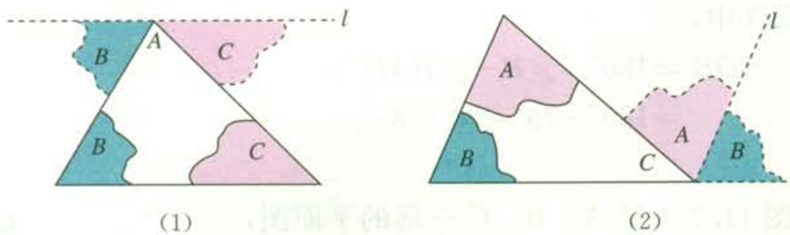


图 11.2-1

在图 11.2-1 (1) 中，$\angle B$ 和 $\angle C$ 分别拼在 $\angle A$ 的左右，三个角合起来形成一个平角，出现一条过点 A 的直线 l，移动后的 $\angle B$ 和 $\angle C$ 各有一条边在直线 l 上. 想一想，直线 l 与 $\triangle ABC$ 的边 BC 有什么关系？由这个图你能想出证明“三角形的内角和等于 180°”的方法吗？

由上述拼合过程得到启发，过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 作直线 l 平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC（图 11.2-2），那么由平行线的性质与平角的定义就能证明“三角形的内角和等于 180°”这个结论.

已知：$\triangle ABC$（图 11.2-2）.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

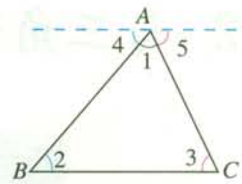


图 11.2-2

证明：如图 11.2-2，过点 A 作直线 l，使 $l/\!/BC$.

$\because$ $l/\!/BC$，

$\therefore$ $\angle 2=\angle 4$（两直线平行，内错角相等）.

同理 $\angle 3=\angle 5$.

$\because$ $\angle 1$，$\angle 4$，$\angle 5$ 组成平角，

$\therefore$ $\angle 1+\angle 4+\angle 5=180°$（平角定义）.

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$（等量代换）.

以上我们就证明了任意一个三角形的内角和都等于 180°，得到如下定理：

由图 11.2-1(2)，你能想出这个定理的其他证法吗？

三角形内角和定理 三角形三个内角的和等于 180°.

例 1 如图 11.2-3，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=40°$，$\angle B=75°$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 求 $\angle ADB$ 的度数.

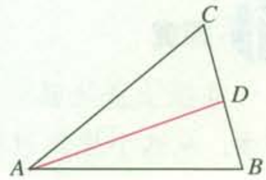


图 11.2-3

解：由 $\angle BAC=40°$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，得

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=20°.$$

在 $\triangle ABD$ 中，

$$\begin{aligned}\angle ADB &=180°-\angle B-\angle BAD\\ &=180°-75°-20°=85°.\end{aligned}$$

例 2 图 11.2-4 是 A，B，C 三岛的平面图，C 岛在 A 岛的北偏东 50°方向，B 岛在 A 岛的北偏东 80°方向，C 岛在 B 岛的北偏西 40°方向. 从 B 岛看 A，C 两岛的视角 $\angle ABC$ 是多少度？从 C 岛看 A，B 两岛的视角 $\angle ACB$ 呢？

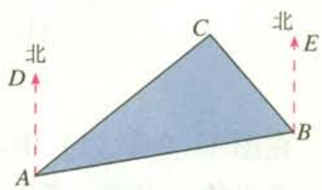


图 11.2-4

分析：A，B，C 三岛的连线构成 $\triangle ABC$，所求的 $\angle ACB$ 是 $\triangle ABC$ 的一个内角. 如果能求出 $\angle CAB$，$\angle ABC$，就能求出 $\angle ACB$.

解：$\angle CAB=\angle BAD-\angle CAD=80°-50°=30°$.

由 $AD/\!/BE$，得

$\angle BAD+\angle ABE=180^\circ$.

所以

$\angle ABE=180^\circ-\angle BAD=180^\circ-80^\circ=100^\circ$,

$\angle ABC=\angle ABE-\angle EBC=100^\circ-40^\circ=60^\circ$.

在$\triangle ABC$中,

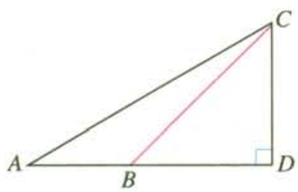
$$\begin{aligned}\angle ACB&=180^\circ-\angle ABC-\angle CAB\\&=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ.\end{aligned}$$

你还能想出其他解法吗?

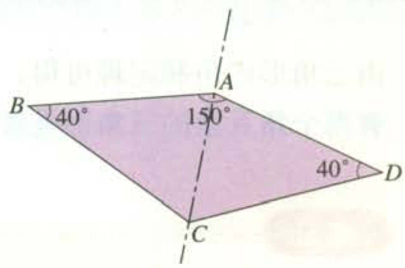
答：从 B 岛看 A，C 两岛的视角$\angle ABC$ 是 60°，从 C 岛看 A，B 两岛的视角$\angle ACB$ 是 90°.

练习

1. 如图，从 A 处观测 C 处的仰角$\angle CAD=30^\circ$，从 B 处观测 C 处的仰角$\angle CBD=45^\circ$. 从 C 处观测 A，B 两处的视角$\angle ACB$ 是多少度?



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，一种滑翔伞的形状是左右对称的四边形 $ABCD$，其中$\angle A=150^\circ$，$\angle B=\angle D=40^\circ$. 求$\angle C$ 的度数.

如图 11.2-5，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，由三角形内角和定理，得

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ,$$

即

$$\angle A+\angle B+90^\circ=180^\circ,$$

所以

$$\angle A+\angle B=90^\circ.$$

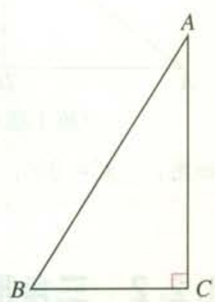


图 11.2-5

也就是说，直角三角形的两个锐角互余.

直角三角形可以用符号“Rt△”表示，直角三角形 ABC 可以写成 Rt$\triangle ABC$.

例 3 如图 11.2-6，$\angle C=\angle D=90^\circ$，$AD$，$BC$ 相交于点 E. $\angle CAE$ 与 $\angle DBE$ 有什么关系？为什么？

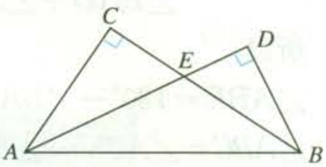


图 11.2-6

解：在 Rt$\triangle ACE$ 中，

$$\angle CAE=90^\circ-\angle AEC.$$

在 Rt$\triangle BDE$ 中，

$$\angle DBE=90^\circ-\angle BED.$$

$\because$ $\angle AEC=\angle BED$，

$\therefore$ $\angle CAE=\angle DBE$.

思考

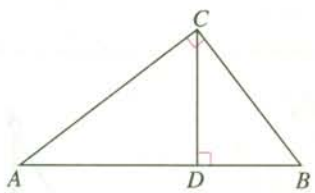
我们知道，如果一个三角形是直角三角形，那么这个三角形有两个角互余. 反过来，有两个角互余的三角形是直角三角形吗？请你说说理由.

由三角形内角和定理可得：

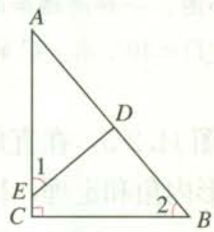
有两个角互余的三角形是直角三角形.

练习

1. 如图，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为 D. $\angle ACD$ 与 $\angle B$ 有什么关系？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$\angle C=90^\circ$，$\angle 1=\angle 2$，$\triangle ADE$ 是直角三角形吗？为什么？

11.2.2 三角形的外角

如图 11.2-7，把 $\triangle ABC$ 的一边 BC 延长，得到 $\angle ACD$. 像这样，三角形的一边与另一边的延长线组成的角，叫做三角形的外角.

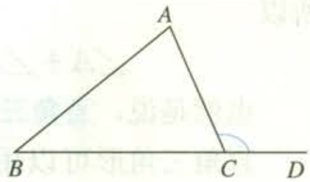


图 11.2-7

思考

如图 11.2-8，$\triangle ABC$ 中，$\angle A=70°$，$\angle B=60°$. $\angle ACD$ 是$\triangle ABC$ 的一个外角. 能由$\angle A$，$\angle B$ 求出$\angle ACD$ 吗？如果能，$\angle ACD$ 与$\angle A$，$\angle B$ 有什么关系？

任意一个三角形的一个外角与它不相邻的两个内角是否都有这种关系？

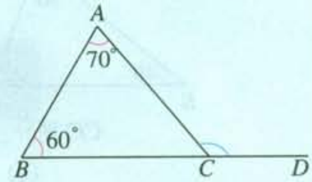


图 11.2-8

一般地，由三角形内角和定理可以推出下面的推论（请同学们自己证明）：

三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

> 推论是由定理直接推出的结论. 和定理一样，推论可以作为进一步推理的依据.

例 4 如图 11.2-9，$\angle BAE$，$\angle CBF$，$\angle ACD$ 是$\triangle ABC$ 的三个外角，它们的和是多少？

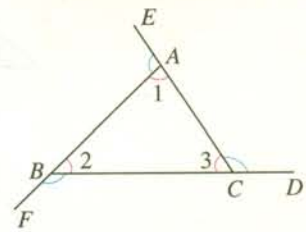


图 11.2-9

解： 由三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和，得

$$\angle BAE=\angle 2+\angle 3,$$
$$\angle CBF=\angle 1+\angle 3,$$
$$\angle ACD=\angle 1+\angle 2.$$

所以

$\angle BAE+\angle CBF+\angle ACD=2(\angle 1+\angle 2+\angle 3)$.

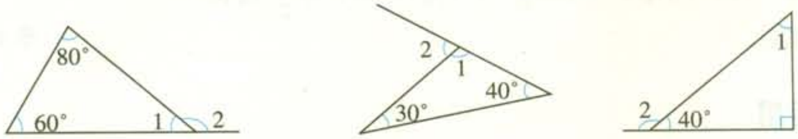
由$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$，得

$\angle BAE+\angle CBF+\angle ACD=2\times 180°=360°$.

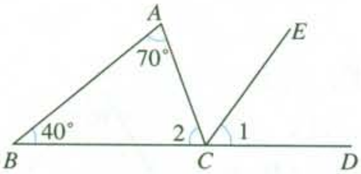
> 你还有其他解法吗？

练习

说出下列图形中$\angle 1$ 和$\angle 2$ 的度数：

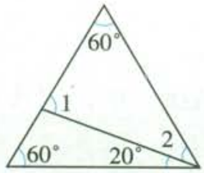


(1) (2) (3)

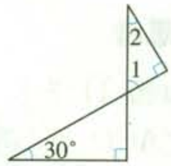


CE 平分∠ACD

(4)



(5)

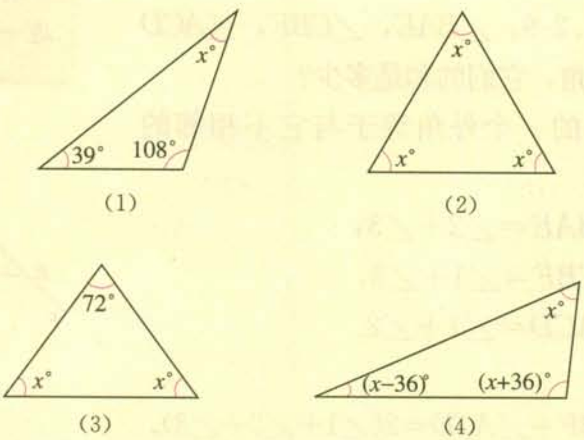


(6)

习题 11.2

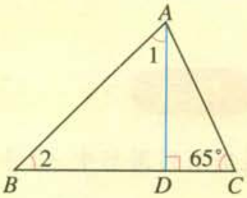
复习巩固

1. 求出下列图形中的 x 的值：



（第 1 题）

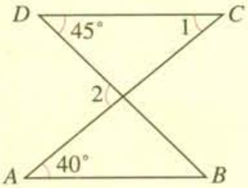
2. (1) 一个三角形最多有几个直角？为什么？
   (2) 一个三角形最多有几个钝角？为什么？
   (3) 直角三角形的外角可以是锐角吗？为什么？
3. $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle A+10°$，$\angle C=\angle B+10°$. 求 $\triangle ABC$ 的各内角的度数.
4. 如图，$AD\perp BC$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle C=65°$. 求 $\angle BAC$ 的度数.



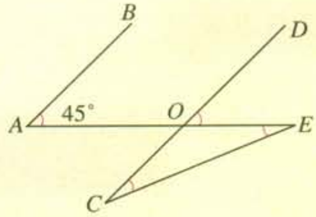
（第 4 题）

综合运用

5. 如下页图，$AB/\!/CD$，$\angle A=40°$，$\angle D=45°$. 求 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的度数.



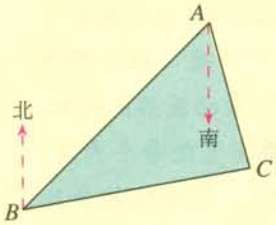
（第 5 题）



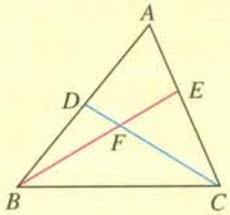
（第 6 题）

6. 如图，$AB \parallel CD$，$\angle A=45°$，$\angle C=\angle E$. 求$\angle C$ 的度数.

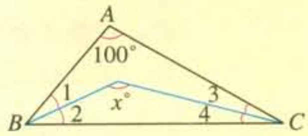
7. 如图，B 处在 A 处的南偏西 45°方向，C 处在 A 处的南偏东 15°方向，C 处在 B 处的北偏东 80°方向，求$\angle ACB$ 的度数.



（第 7 题）



（第 8 题）



（第 9 题）

8. 如图，D 是 AB 上一点，E 是 AC 上一点，BE，CD 相交于点 F，$\angle A=62°$，$\angle ACD=35°$，$\angle ABE=20°$. 求$\angle BDC$ 和$\angle BFD$ 的度数.

9. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle A=100°$. 求 x 的值.

拓广探索

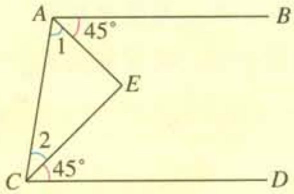
10. 如图，$AB \parallel CD$，$\angle BAE=\angle DCE=45°$. 填空：

∵ $AB \parallel CD$，

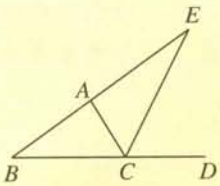
∴ $\angle 1+45°+\angle 2+45°=$______.

∴ $\angle 1+\angle 2=$______.

∴ $\angle E=$______.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 如图，CE 是$\triangle ABC$ 的外角$\angle ACD$ 的平分线，且 CE 交 BA 的延长线于点 E. 求证$\angle BAC=\angle B+2\angle E$.

阅读与思考

为什么要证明

小明：我们观察任意一个三角形，量出它的内角，都能得出它的内角和等于180°，为什么还要证明这个结论呢？

李老师：通过观察、试验等可以寻找规律，但是由于观察可能有误差，试验可能受干扰，考察对象可能不具有一般性等原因，一般说由观察、试验等所产生的“结论”未必正确．例如，让一个班的学生每人任意画一个三角形，再量出它的每个内角，计算三个内角的和，得到的结果未必全是180°，可能有的会比180°大些，有的会比180°小些．

小明：如果观察细致，仪器精确，不产生误差，还需要证明吗？

李老师：仅通过观察、试验等就下结论有时也缺乏说服力．例如，即使不考虑误差等因素，当上面观察的所有结果全是180°时，人们还会有疑问：“不同形状的三角形有无数个，我们画出并验证的只是其中有限个，其余的三角形的内角和是多少呢？能对所有的三角形都进行验证吗？”事实上，不管我们经历多长时间，画出多少个三角形，观察、试验的对象也是有限个．因此，要确认“三角形的内角和等于180°”，就不能依靠度量的手段和观察、试验、验证的方法，而必须进行推理论证——对于一般的三角形，推出它的三个内角的和等于一个平角，从而得出“无论三角形的具体形状如何，它的内角和一定等于180°”．

小明：现在我明白了，一个数学命题是否正确，需要经过理由充足、使人信服的推理论证才能得出结论．观察、试验等是发现数学公式、定理的重要途径，而证明则是确认数学公式、定理的必要步骤．

11.3 多边形及其内角和

11.3.1 多边形

观察图 11.3-1 中的图片，其中的房屋结构、蜂巢结构等给我们以由一些线段围成的图形的形象，你能从图 11.3-1 中想象出几个由一些线段围成的图形吗？

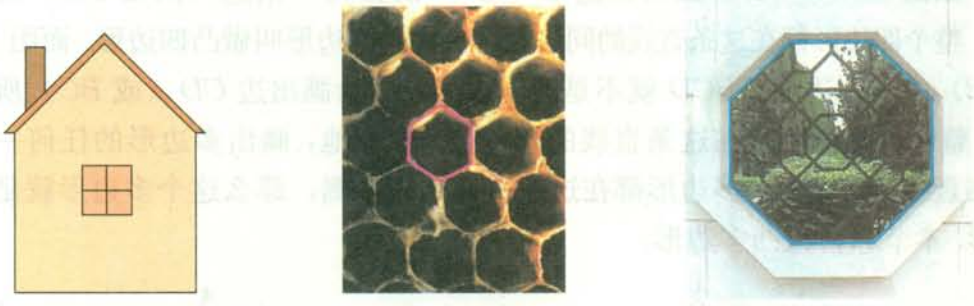


图 11.3-1

我们学过三角形. 类似地，在平面内，由一些线段首尾顺次相接组成的封闭图形叫做**多边形**（polygon).

多边形按组成它的线段的条数分成三角形、四边形、五边形……三角形是最简单的多边形. 如果一个多边形由 n 条线段组成，那么这个多边形就叫做 n 边形. 如图 11.3-2，螺母底面的边缘可以设计为六边形，也可以设计为八边形.

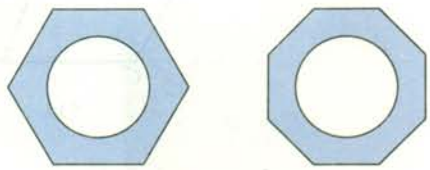


图 11.3-2

多边形相邻两边组成的角叫做它的内角. 图 11.3-3 中的 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$，$\angle E$ 是五边形$ABCDE$的 5 个内角. 多边形的边与它的邻边的延长线组成的角叫做多边形的外角. 图 11.3-4 中的$\angle 1$ 是五边形$ABCDE$的一个外角.

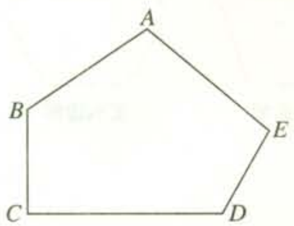


图 11.3-3

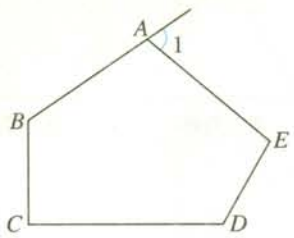


图 11.3-4

连接多边形不相邻的两个顶点的线段，叫做多边形的**对角线**（diagonal）. 图 11.3-5 中，AC，AD 是五边形 $ABCDE$ 的两条对角线.

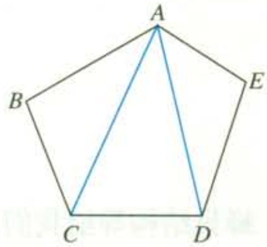
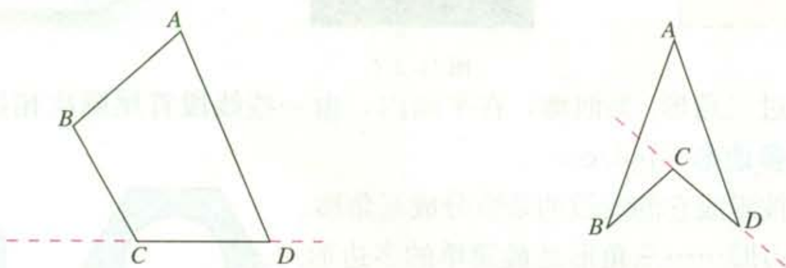


图 11.3-5

五边形 $ABCDE$ 共有几条对角线？请画出它的其他对角线.

如图 11.3-6（1），画出四边形 $ABCD$ 的任何一条边（例如 CD）所在直线，整个四边形都在这条直线的同一侧，这样的四边形叫做凸四边形. 而图 11.3-6（2）中的四边形 $ABCD$ 就不是凸四边形，因为画出边 CD（或 BC）所在直线，整个四边形不都在这条直线的同一侧. 类似地，画出多边形的任何一条边所在直线，如果整个多边形都在这条直线的同一侧，那么这个多边形就是凸多边形. 本节只讨论凸多边形.



(1)　　(2)

图 11.3-6

我们知道，正方形的各个角都相等，各条边都相等. 像正方形这样，各个角都相等，各条边都相等的多边形叫做**正多边形**（regular polygon）. 图 11.3-7 是正多边形的一些例子.

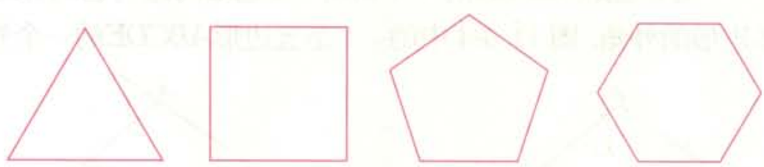

正三角形　正方形　正五边形　正六边形

图 11.3-7

练习

1. 画出下列多边形的全部对角线：

（第 1 题）

2. 四边形的一条对角线将四边形分成几个三角形？从五边形的一个顶点出发，可以画出几条对角线？它们将五边形分成几个三角形？

11.3.2 多边形的内角和

思考

我们知道，三角形的内角和等于 180°，正方形、长方形的内角和都等于 360°. 那么，任意一个四边形的内角和是否也等于 360°呢？你能利用三角形内角和定理证明四边形的内角和等于 360°吗？

要用三角形内角和定理证明四边形的内角和等于 360°，只要将四边形分成几个三角形即可.

如图 11.3-8，在四边形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC，则四边形 $ABCD$ 被分为$\triangle ABC$ 和$\triangle ACD$ 两个三角形.

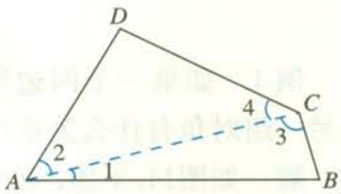


图 11.3-8

由此可得

$$\angle DAB+\angle B+\angle BCD+\angle D$$
$$=\angle 1+\angle 2+\angle B+\angle 3+\angle 4+\angle D$$
$$=(\angle 1+\angle B+\angle 3)+(\angle 2+\angle 4+\angle D).$$

$\because$ $\angle 1+\angle B+\angle 3=180^\circ$，

$\angle 2+\angle 4+\angle D=180^\circ$，

$\therefore$ $\angle DAB+\angle B+\angle BCD+\angle D=180^\circ+180^\circ=360^\circ$.

即四边形的内角和等于 360°.

类比上面的过程，你能推导出五边形和六边形的内角和各是多少吗？

观察图 11.3-9，填空：

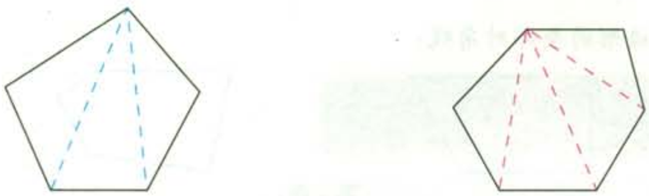


图 11.3-9

从五边形的一个顶点出发，可以作______条对角线，它们将五边形分为______个三角形，五边形的内角和等于 180°×______.

从六边形的一个顶点出发，可以作______条对角线，它们将六边形分为______个三角形，六边形的内角和等于 180°×______.

通过以上过程，你能发现多边形的内角和与边数的关系吗？

> 把一个多边形分成几个三角形，还有其他分法吗？由新的分法，能得出多边形内角和公式吗？

一般地，从 n 边形的一个顶点出发，可以作 $(n-3)$ 条对角线，它们将 n 边形分为 $(n-2)$ 个三角形，n 边形的内角和等于 $180^\circ\times(n-2)$.

这样就得出了多边形内角和公式：

n 边形内角和等于 $(n-2)\times180^\circ$.

例 1 如果一个四边形的一组对角互补，那么另一组对角有什么关系？

解： 如图11.3-10，在四边形 $ABCD$ 中，

$$\angle A+\angle C=180^\circ.$$

$$\because\ \angle A+\angle B+\angle C+\angle D=(4-2)\times180^\circ=360^\circ,$$

$$\therefore\ \angle B+\angle D=360^\circ-(\angle A+\angle C)=360^\circ-180^\circ=180^\circ.$$

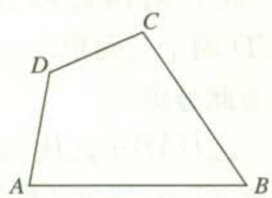


图 11.3-10

这就是说，如果四边形的一组对角互补，那么另一组对角也互补.

例 2 如图 11.3-11，在六边形的每个顶点处各取一个外角，这些外角的和叫做六边形的外角和. 六边形的外角和等于多少？

分析：考虑以下问题：

(1) 任何一个外角同与它相邻的内角有什么关系？

(2) 六边形的 6 个外角加上与它们相邻的内角，所得总和是多少？

(3) 上述总和与六边形的内角和、外角和有什么关系？

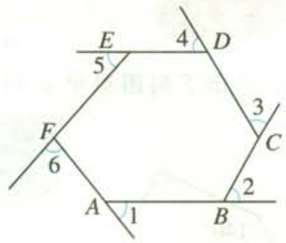


图 11.3-11

联系这些问题，考虑外角和的求法.

解：六边形的任何一个外角加上与它相邻的内角都等于 180°. 因此六边形的 6 个外角加上与它们相邻的内角，所得总和等于 $6\times180^\circ$.

这个总和就是六边形的外角和加上内角和. 所以外角和等于总和减去内角和，即外角和等于

$$6\times180^\circ-(6-2)\times180^\circ=2\times180^\circ=360^\circ.$$

思考

如果将例 2 中六边形换为 n 边形（n 是不小于 3 的任意整数），可以得到同样结果吗？

由上面的思考可以得到：

多边形的外角和等于 360°.

你也可以像以下这样理解为什么多边形的外角和等于 360°.

如图 11.3-12，从多边形的一个顶点 A 出发，沿多边形的各边走过各顶点，再回到点 A，然后转向出发时的方向. 在行程中所转的各个角的和，就是多边形的外角和. 由于走了一周，所转的各个角的和等于一个周角，所以多边形的外角和等于 360°.

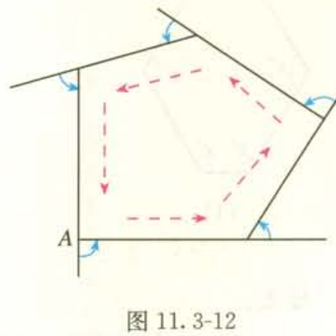
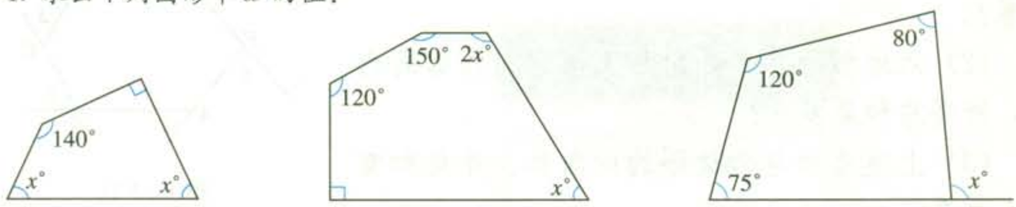


图 11.3-12

练习

1. 求出下列图形中 x 的值：



（1）　　（2）　　（3）

（第 1 题）

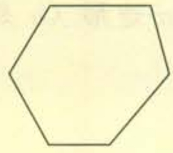
2. 一个多边形的各内角都等于 120°，它是几边形？

3. 一个多边形的内角和与外角和相等，它是几边形？

习题 11.3

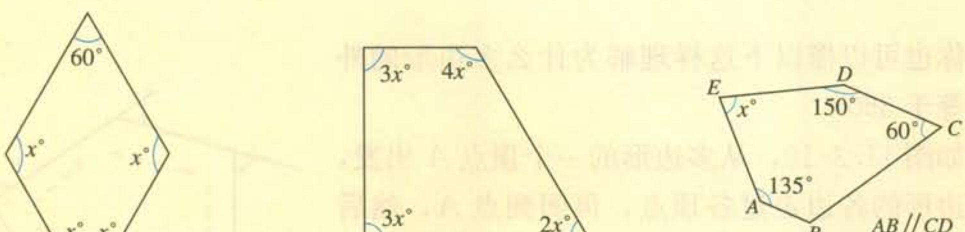
复习巩固

1. 画出下面多边形的全部对角线：



（第 1 题）

2. 求出下列图形中 x 的值：



（1）　　（2）　　（3）

（第 2 题）

3. 填表：

多边形的边数	3	4	5	6	8	12
内角和						
外角和						

4. 计算正五边形和正十边形的每个内角的度数.

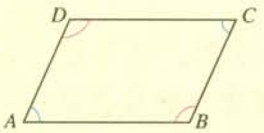
5. 一个多边形的内角和等于 1 260°，它是几边形？

6. (1) 一个多边形的内角和是外角和的一半，它是几边形？

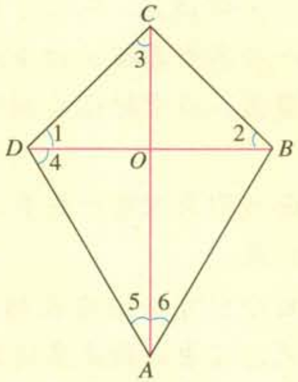
   (2) 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，它是几边形？

综合运用

7. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，AB 与 CD 有怎样的位置关系？为什么？BC 与 AD 呢？



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，$BC\perp CD$，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$\angle 4=60°$，$\angle 5=\angle 6$.

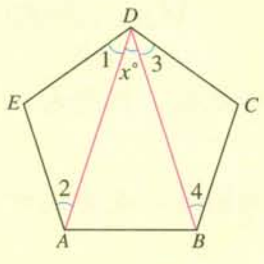
   (1) CO 是 $\triangle BCD$ 的高吗？为什么？

   (2) $\angle 5$ 的度数是多少？

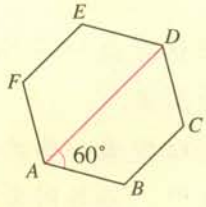
   (3) 求四边形 $ABCD$ 各内角的度数.

拓广探索

9. 如图，五边形 $ABCDE$ 的内角都相等，且 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，求 x 的值.



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等，$\angle DAB=60°$. AB 与 DE 有怎样的位置关系？BC 与 EF 有这种关系吗？这些结论是怎样得出的？

数学活动

活动1

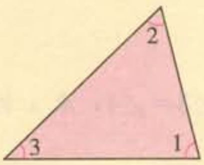
有些地板的拼合图案如图1所示，它是用正方形的地砖铺成的．用地砖铺地，用瓷砖贴墙，都要求砖与砖严丝合缝，不留空隙，把地面或墙面全部覆盖．从数学角度看，这些工作就是用一些不重叠摆放的多边形把平面的一部分完全覆盖，通常把这类问题叫做用多边形覆盖平面（或平面镶嵌）的问题．

图1

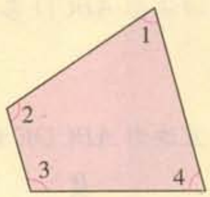
下面我们来探究一些多边形能否镶嵌成平面图案，并思考为什么会出现这种结果．

（1）分别剪一些边长相同的正三角形、正方形、正五边形、正六边形，如果用其中一种正多边形镶嵌，哪几种正多边形能镶嵌成一个平面图案？如果用其中两种正多边形镶嵌，哪两种正多边形能镶嵌成一个平面图案？

（2）任意剪出一些形状、大小相同的三角形纸板，拼拼看，它们能否镶嵌成平面图案．



三角形



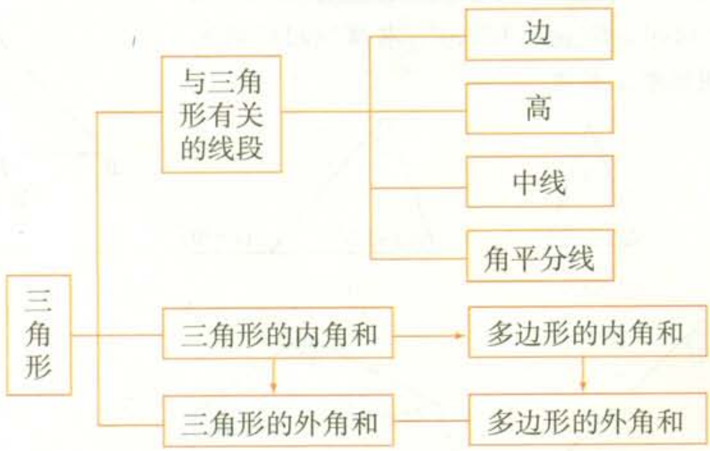
四边形

（3）任意剪出一些形状、大小相同的四边形纸板，拼拼看，它们能否镶嵌成平面图案．

你还可以搜集一些其他用多边形镶嵌的平面图案，或者设计一些地板的平面镶嵌图，并与同学互相交流．

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

在本章中，我们进一步研究了三角形，如探索并证明了三角形三边之间的关系以及三角形内角和定理. 类似地，我们研究了多边形，如探索并证明了多边形内角和公式.

三角形内角和定理是几何中一个很重要的结论，它可以由平行线的性质与平角的定义证明. 由这一定理可以进一步得出直角三角形两个锐角的关系以及三角形外角的有关结论.

三角形是最简单的多边形. 在研究多边形时，我们常常将它分为几个三角形，再利用三角形的性质得出多边形的有关结论. 例如，本章得到的多边形的内角和公式就是上述方法的应用.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 三角形的三边之间有怎样的关系？得出这个结论的依据是什么？

2. 三角形的三个内角之间有怎样的关系？如何证明这个结论？

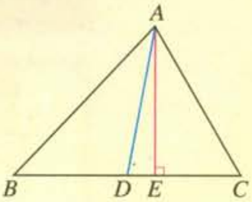
3. 直角三角形的两个锐角有怎样的关系？三角形的一个外角与和它不相邻的两个内角有怎样的关系？这些结论能由三角形内角和定理得出吗？

4. n 边形的 n 个内角有怎样的关系？如何推出这个结论？

5. n 边形的外角和与 n 有关吗？为什么？

复习题 11

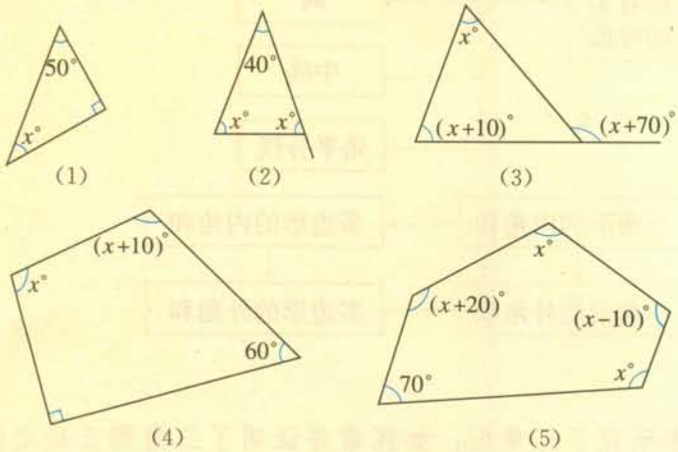
复习巩固



(第 1 题)

1. 如图，在$\triangle ABC$中，AD，AE分别是边BC上的中线和高，$AE=2$ cm，$S_{\triangle ABD}=1.5$ cm^2. 求BC和DC的长.

2. 求出下列图形中x的值.



(第 2 题)

3. 填表：

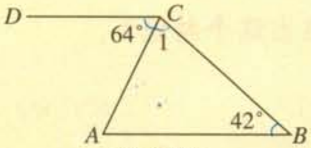
多边形的边数	7		20	
内角和		$15\times180°$		$23\times180°$
外角和				

4. 从八边形的一个顶点出发，可以作几条对角线？它们将八边形分成几个三角形？这些三角形的内角和与八边形的内角和有什么关系？

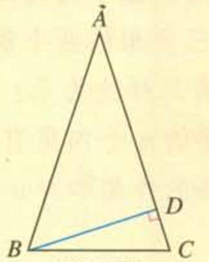
5. 一个多边形的内角和比四边形的内角和多$540°$，并且这个多边形的各内角都相等. 这个多边形的每个内角等于多少度？

综合运用

6. 如图，$\angle B=42°$，$\angle A+10°=\angle 1$，$\angle ACD=64°$. 求证$AB/\!/CD$.



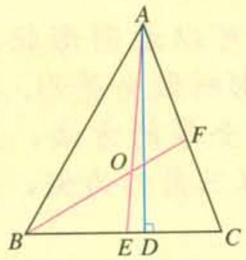
(第 6 题)



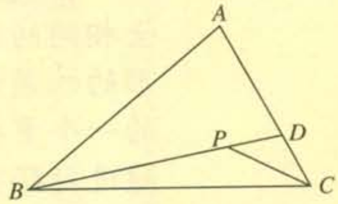
(第 7 题)

7. 如上页图，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=\angle ABC=2\angle A$，$BD$ 是边 AC 上的高．求$\angle DBC$ 的度数．

8. 如图，在$\triangle ABC$ 中，AD 是高，AE，BF 是角平分线，它们相交于点 O，$\angle BAC=50^{\circ}$，$\angle C=70^{\circ}$．求$\angle DAC$ 和$\angle BOA$ 的度数．



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，填空：

由三角形两边的和大于第三边，得

$AB+AD>$____________，

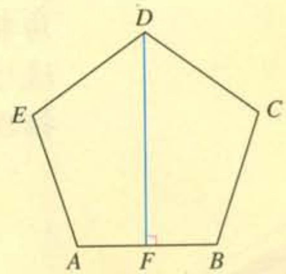
$PD+CD>$____________．

将不等式左边、右边分别相加，得

$AB+AD+PD+CD>$____________，

即 $AB+AC>$____________．

10. 如图，五边形 $ABCDE$ 的内角都相等，$DF\perp AB$．求$\angle CDF$ 的度数．



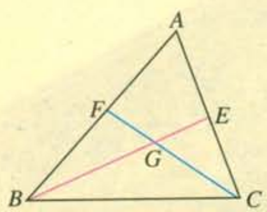
（第 10 题）

拓广探索

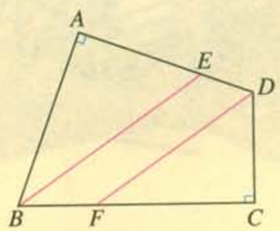
11. 如图，$\triangle ABC$ 的$\angle B$ 和$\angle C$ 的平分线 BE，CF 相交于点 G．求证：

(1) $\angle BGC=180^{\circ}-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$；

(2) $\angle BGC=90^{\circ}+\frac{1}{2}\angle A$．



（第 11 题）



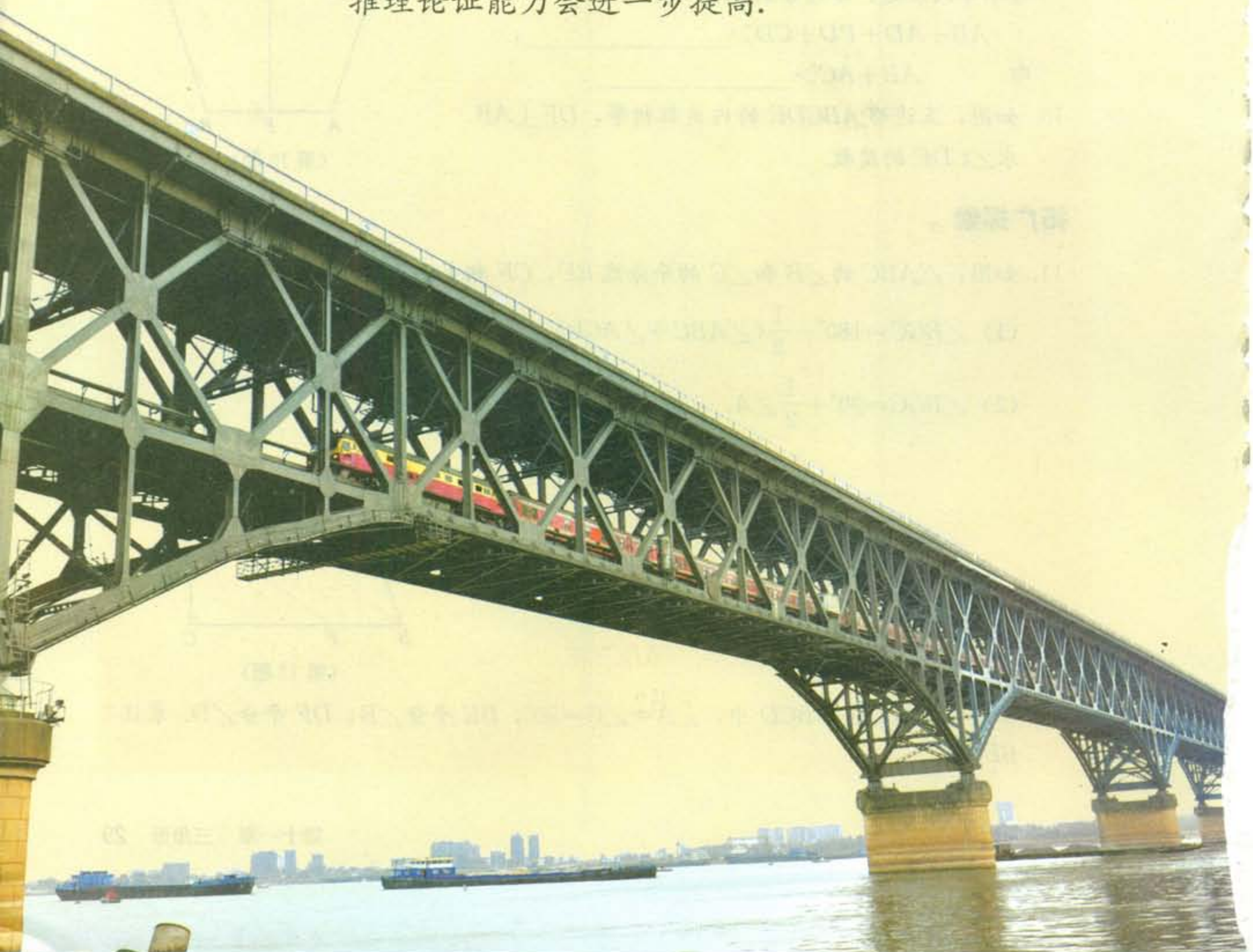
（第 12 题）

12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C=90^{\circ}$，$BE$ 平分$\angle B$，DF 平分$\angle D$．求证 $BE/\!/DF$．

第十二章 全等三角形

在我们的周围，经常可以看到形状、大小完全相同的图形，这样的图形叫做全等形. 研究全等形的性质和判定两个图形全等的方法，是几何学的一个重要内容. 本章将以三角形为例，对这些问题进行研究.

上一章我们通过推理论证得到了三角形内角和定理等重要结论. 本章中，推理论证将发挥更大的作用. 我们将通过证明三角形全等来证明线段或角相等，利用全等三角形证明角的平分线的性质. 通过本章学习，你对三角形的认识会更加丰富，推理论证能力会进一步提高.



12.1 全等三角形

图 12.1-1 所示的例子中都有形状、大小相同的图形，你能再举出一些类似的例子吗？

图 12.1-1

探究

把一块三角尺按在纸板上，画下图形，照图形裁下来的纸板和三角尺的形状、大小完全一样吗？把三角尺和裁得的纸板放在一起能够完全重合吗？从同一张底片冲洗出来的两张尺寸相同的照片上的图形，放在一起也能够完全重合吗？

可以看到，形状、大小相同的图形放在一起能够完全重合. 能够完全重合的两个图形叫做**全等形**（congruent figures）.

能够完全重合的两个三角形叫做**全等三角形**（congruent triangles）.

思考

在图 12.1-2（1）中，把$\triangle ABC$沿直线BC平移，得到$\triangle DEF$.
在图 12.1-2（2）中，把$\triangle ABC$沿直线BC翻折 180°，得到$\triangle DBC$.
在图 12.1-2（3）中，把$\triangle ABC$绕点A旋转，得到$\triangle ADE$.
各图中的两个三角形全等吗？

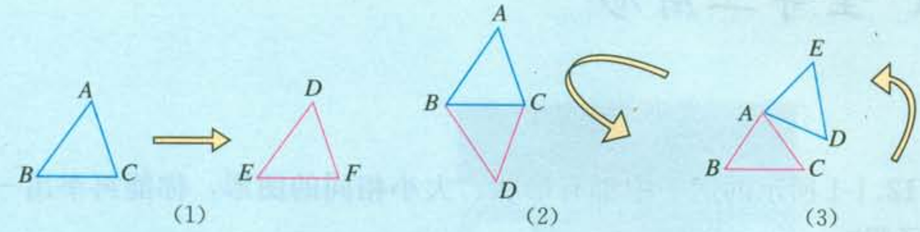


图 12.1-2

一个图形经过平移、翻折、旋转后，位置变化了，但形状、大小都没有改变，即平移、翻折、旋转前后的图形全等.

把两个全等的三角形重合到一起，重合的顶点叫做**对应顶点**，重合的边叫做**对应边**，重合的角叫做**对应角**. 例如，图 12.1-2（1）中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等，记作 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，其中点 A 和点 D，点 B 和点 E，点 C 和点 F 是对应顶点；AB 和 DE，BC 和 EF，AC 和 DF 是对应边；$\angle A$ 和 $\angle D$，$\angle B$ 和 $\angle E$，$\angle C$ 和 $\angle F$ 是对应角.

全等用符号"$\cong$"表示，读作"全等于".

记两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上. 例如，图 12.1-2（2）中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 全等，点 A 和点 D，点 B 和点 B，点 C 和点 C 是对应顶点，记作 $\triangle ABC \cong \triangle DBC$.

思考

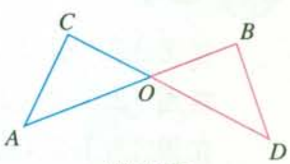
图 12.1-2（1）中，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，对应边有什么关系？对应角呢？

全等三角形有这样的性质：

全等三角形的对应边相等，全等三角形的对应角相等.

练习

1. 说出图 12.1-2（2）、图 12.1-2（3）中两个全等三角形的对应边、对应角.
2. 如图，$\triangle OCA \cong \triangle OBD$，点 C 和点 B，点 A 和点 D 是对应顶点. 说出这两个三角形中相等的边和角.

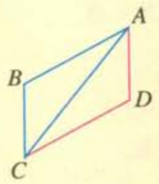


（第 2 题）

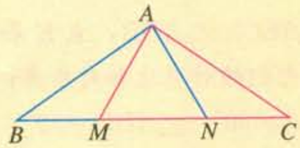
习题 12.1

复习巩固

1. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，$AB$ 和 CD，BC 和 DA 是对应边. 写出其他对应边及对应角.



（第 1 题）

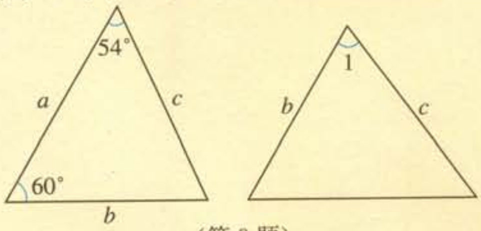


（第 2 题）

2. 如图，$\triangle ABN \cong \triangle ACM$，$\angle B$ 和 $\angle C$ 是对应角，AB 和 AC 是对应边. 写出其他对应边及对应角.

综合运用

3. 如图是两个全等三角形，图中的字母表示三角形的边长，则 $\angle 1$ 等于多少度？

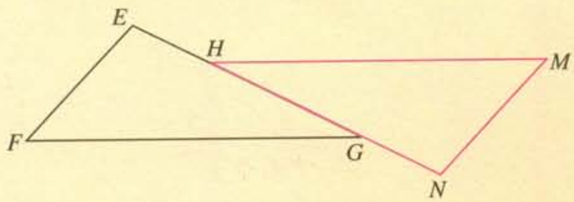


（第 3 题）

4. 如图，$\triangle EFG \cong \triangle NMH$，$\angle F$ 和 $\angle M$ 是对应角. 在 $\triangle EFG$ 中，FG 是最长边. 在 $\triangle NMH$ 中，MH 是最长边. $EF=2.1$ cm，$EH=1.1$ cm，$NH=3.3$ cm.

(1) 写出其他对应边及对应角；

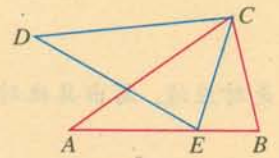
(2) 求线段 NM 及线段 HG 的长度.



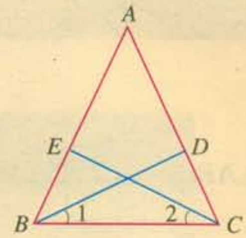
（第 4 题）

拓广探索

5. 如下页图，$\triangle ABC \cong \triangle DEC$，$CA$ 和 CD，CB 和 CE 是对应边. $\angle ACD$ 和 $\angle BCE$ 相等吗？为什么？



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，$\triangle AEC \cong \triangle ADB$，点 E 和点 D 是对应顶点.

(1) 写出它们的对应边和对应角；

(2) 若 $\angle A=50^\circ$，$\angle ABD=39^\circ$，且 $\angle 1=\angle 2$，求 $\angle 1$ 的度数.

12.2 三角形全等的判定

我们知道，如果$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，那么它们的对应边相等，对应角相等. 反过来，根据全等三角形的定义，如果$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$满足三条边分别相等，三个角分别相等，即

$$AB=A'B',\ BC=B'C',\ CA=C'A',$$
$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',$$

就能判定$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（图 12.2-1）.

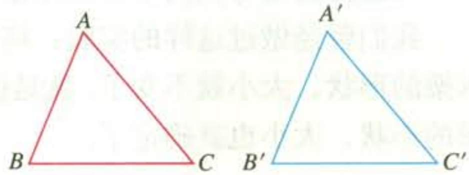


图 12.2-1

一定要满足三条边分别相等，三个角也分别相等，才能保证两个三角形全等吗？上述六个条件中，有些条件是相关的. 能否在上述六个条件中选择部分条件，简捷地判定两个三角形全等呢？

本节我们就来讨论这个问题.

探究1

先任意画出一个$\triangle ABC$. 再画一个$\triangle A'B'C'$，使$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$满足上述六个条件中的一个（一边或一角分别相等）或两个（两边、一边一角或两角分别相等）. 你画出的$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$一定全等吗？

通过画图可以发现，满足上述六个条件中的一个或两个，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$不一定全等. 满足上述六个条件中的三个，能保证$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等吗？

我们分情况进行讨论.

探究2

先任意画出一个$\triangle ABC$. 再画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$B'C'=BC$，$C'A'=CA$. 把画好的$\triangle A'B'C'$剪下来，放到$\triangle ABC$上，它们全等吗？

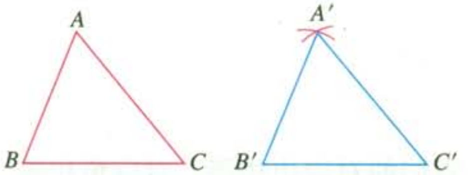


图 12.2-2

画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$B'C'=BC$：

(1) 画$B'C'=BC$；

(2) 分别以点B'，C'为圆心，线段AB，AC长为半径画弧，两弧相交于点A'；

(3) 连接线段$A'B'$，$A'C'$.

图 12.2-2 给出了画$\triangle A'B'C'$的方法，你是这样画的吗？探究 2 的结果反映了什么规律？

由探究 2 可以得到以下基本事实，用它可以判定两个三角形全等：

三边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“边边边”或“SSS”）.

我们曾经做过这样的实验：将三根木条钉成一个三角形木架，这个三角形木架的形状、大小就不变了. 就是说，三角形三条边的长度确定了，这个三角形的形状、大小也就确定了.

例 1 在如图 12.2-3 所示的三角形钢架中，$AB=AC$，AD是连接点A与BC中点D的支架. 求证$\triangle ABD\cong\triangle ACD$.

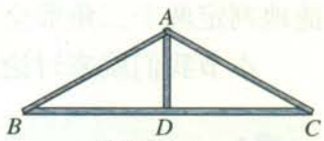


图 12.2-3

分析：要证$\triangle ABD\cong\triangle ACD$，只需看这两个三角形的三条边是否分别相等.

证明：$\because$ D是BC的中点，

$\therefore$ $BD=CD$.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

$$\begin{cases}AB=AC,\\BD=CD,\\AD=AD,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$ (SSS).

AD既是$\triangle ABD$的边又是$\triangle ACD$的边. 我们称它为这两个三角形的公共边.

由三边分别相等判定三角形全等的结论，还可以得到用直尺和圆规作一个角等于已知角的方法.

已知：$\angle AOB$.

求作：$\angle A'O'B'$，使$\angle A'O'B'=\angle AOB$.

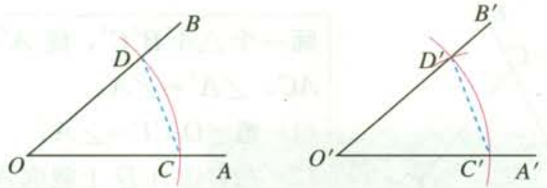


图 12.2-4

作法：（1）如图 12.2-4，以点 O 为圆心，任意长为半径画弧，分别交 OA，OB 于点 C，D；

（2）画一条射线 $O'A'$，以点 O' 为圆心，OC 长为半径画弧，交 $O'A'$ 于点 C'；

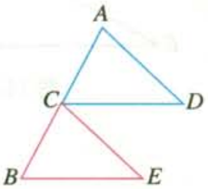
（3）以点 C' 为圆心，CD 长为半径画弧，与第 2 步中所画的弧相交于点 D'；

（4）过点 D' 画射线 $O'B'$，则 $\angle A'O'B'=\angle AOB$.

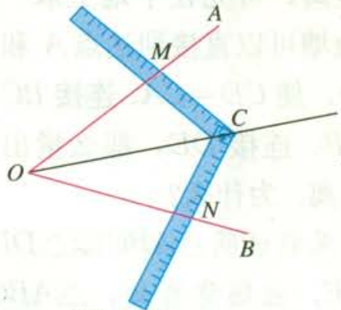
想一想，为什么这样作出的 $\angle A'O'B'$ 和 $\angle AOB$ 是相等的？

练习

1. 如图，C 是 AB 的中点，$AD=CE$，$CD=BE$. 求证 $\triangle ACD\cong\triangle CBE$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 工人师傅常用角尺平分一个任意角. 做法如下：如图，$\angle AOB$ 是一个任意角，在边 OA，OB 上分别取 $OM=ON$，移动角尺，使角尺两边相同的刻度分别与点 M，N 重合. 过角尺顶点 C 的射线 OC 便是 $\angle AOB$ 的平分线. 为什么？

探究3

先任意画出一个 $\triangle ABC$. 再画出一个 $\triangle A'B'C'$，使 $A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$\angle A'=\angle A$（即两边和它们的夹角分别相等）. 把画好的 $\triangle A'B'C'$ 剪下来，放到 $\triangle ABC$ 上，它们全等吗？

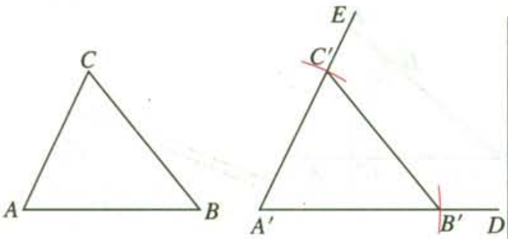


图 12.2-5

画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$\angle A'=\angle A$：

(1) 画$\angle DA'E=\angle A$；

(2) 在射线$A'D$上截取$A'B'=AB$，在射线$A'E$上截取$A'C'=AC$；

(3) 连接$B'C'$.

图 12.2-5 给出了画$\triangle A'B'C'$的方法. 你是这样画的吗？探究 3 的结果反映了什么规律？

由探究 3 可以得到以下基本事实，用它可以判定两个三角形全等：

两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等(可以简写成“边角边”或“SAS”).

也就是说，三角形的两条边的长度和它们的夹角的大小确定了，这个三角形的形状、大小就确定了.

例 2 如图 12.2-6，有一池塘，要测池塘两端A，B的距离，可先在平地上取一个点C，从点C不经过池塘可以直接到达点A和B. 连接AC并延长到点D，使$CD=CA$. 连接BC并延长到点E，使$CE=CB$. 连接DE，那么量出DE的长就是A，B的距离. 为什么？

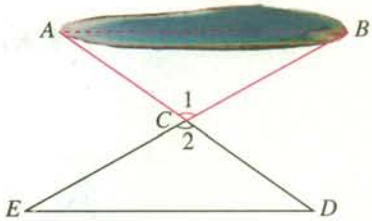


图 12.2-6

分析： 如果能证明$\triangle ABC\cong\triangle DEC$，就可以得出$AB=DE$. 由题意可知，$\triangle ABC$和$\triangle DEC$具备“边角边”的条件.

证明： 在$\triangle ABC$和$\triangle DEC$中，

$$\begin{cases}CA=CD,\\ \angle 1=\angle 2,\\ CB=CE,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle DEC$ (SAS).

$\therefore$ $AB=DE$.

想一想，$\angle 1=\angle 2$的根据是什么？$AB=DE$的根据是什么？

从例 2 可以看出：因为全等三角形的对应边相等，对应角相等，所以证明线段相等或者角相等时，常常通过证明它们是全等三角形的对应边或对应角来解决.

思考

如图 12.2-7，把一长一短的两根木棍的一端固定在一起，摆出$\triangle ABC$. 固定住长木棍，转动短木棍，得到$\triangle ABD$. 这个实验说明了什么？

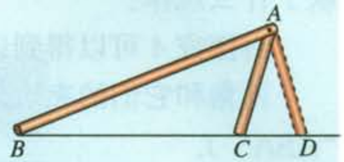


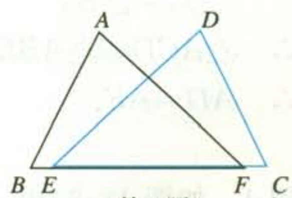
图 12.2-7

图 12.2-7 中的$\triangle ABC$与$\triangle ABD$满足两边和其中一边的对角分别相等，即$AB=AB$，$AC=AD$，$\angle B=\angle B$，但$\triangle ABC$与$\triangle ABD$不全等. 这说明，有两边和其中一边的对角分别相等的两个三角形不一定全等.

练习

1. 如图，两车从南北方向的路段 AB 的 A 端出发，分别向东、向西行进相同的距离，到达 C，D 两地. 此时 C，D 到 B 的距离相等吗？为什么？

（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，点 E，F 在 BC 上，$BE=CF$，$AB=DC$，$\angle B=\angle C$. 求证$\angle A=\angle D$.

探究4

先任意画出一个$\triangle ABC$. 再画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$\angle A'=\angle A$，$\angle B'=\angle B$（即两角和它们的夹边分别相等）. 把画好的$\triangle A'B'C'$剪下来，放到$\triangle ABC$上，它们全等吗？

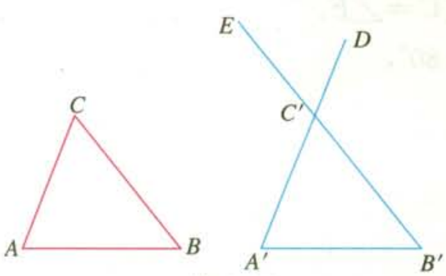


图 12.2-8

画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$\angle A'=\angle A$，$\angle B'=\angle B$：

(1) 画$A'B'=AB$；

(2) 在$A'B'$的同旁画$\angle DA'B'=\angle A$，$\angle EB'A'=\angle B$，$A'D$，$B'E$ 相交于点C'.

图 12.2-8 给出了画$\triangle A'B'C'$的方法. 你是这样画的吗？探究 4 的结果反映了什么规律？

由探究 4 可以得到以下基本事实，用它可以判定两个三角形全等：

两角和它们的夹边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“角边角”或“ASA”）.

也就是说，三角形的两个角的大小和它们的夹边的长度确定了，这个三角形的形状、大小就确定了.

例 3 如图 12.2-9，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，$AB=AC$，$\angle B=\angle C$. 求证 $AD=AE$.

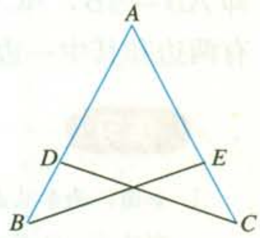


图 12.2-9

分析： 证明$\triangle ACD\cong\triangle ABE$，就可以得出$AD=AE$.

证明： 在$\triangle ACD$ 和$\triangle ABE$ 中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle A \text{（公共角）}, \\ AC=AB, \\ \angle C=\angle B,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ACD\cong\triangle ABE$（ASA）.

$\therefore$ $AD=AE$.

例 4 如图 12.2-10，在$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 中，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$BC=EF$. 求证$\triangle ABC\cong\triangle DEF$.

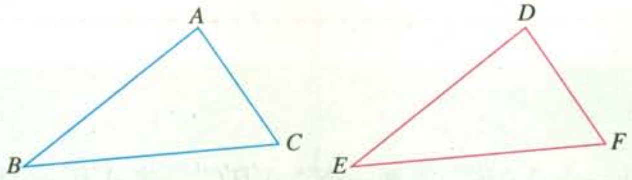


图 12.2-10

分析： 如果能证明$\angle C=\angle F$，就可以利用“角边角”证明$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 全等. 由三角形内角和定理可以证明$\angle C=\angle F$.

证明： 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，

$\therefore$ $\angle C=180°-\angle A-\angle B$.

同理 $\angle F=180°-\angle D-\angle E$.

又 $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，

$\therefore$ $\angle C=\angle F$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle E,\\ BC=EF,\\ \angle C=\angle F,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle DEF$(ASA).

因此，我们可以得到下面的结论：

两角和其中一个角的对边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“角角边”或“AAS”）.

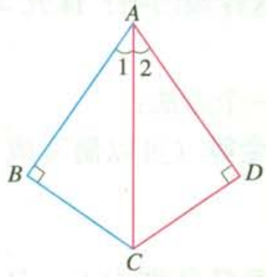
也就是说，三角形的两个角的大小和其中一个角的对边的长度确定了，这个三角形的形状、大小就确定了.

思考

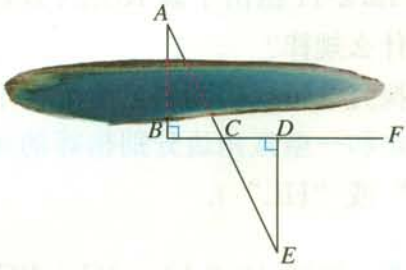
三角分别相等的两个三角形全等吗？解答上述问题后，把三角形全等的判定方法做一个小结.

练习

1. 如图，$AB\perp BC$，$AD\perp DC$，垂足分别为B，D，$\angle 1=\angle 2$. 求证$AB=AD$.



（第1题）



（第2题）

2. 如图，要测量池塘两岸相对的两点A，B的距离，可以在池塘外取AB的垂线BF上的两点C，D，使$BC=CD$，再画出BF的垂线DE，使E与A，C在一条直线上，这时测得DE的长就是AB的长. 为什么？

思考

对于两个直角三角形，除了直角相等的条件，还要满足几个条件，这两个直角三角形就全等了？

由三角形全等的条件可知，对于两个直角三角形，满足一边一锐角分别相等，或两直角边分别相等，这两个直角三角形就全等了. 如果满足斜边和一条直角边分别相等，这两个直角三角形全等吗？

探究5

任意画出一个 Rt△ABC，使$\angle C=90°$. 再画一个 Rt△$A'B'C'$，使$\angle C'=90°$，$B'C'=BC$，$A'B'=AB$. 把画好的 Rt△$A'B'C'$剪下来，放到 Rt△ABC上，它们全等吗？

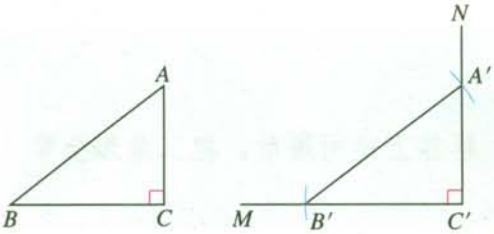


图 12.2-11

画一个 Rt△$A'B'C'$，使$\angle C'=90°$，$B'C'=BC$，$A'B'=AB$：

(1) 画$\angle MC'N=90°$；

(2) 在射线 $C'M$ 上截取$B'C'=BC$；

(3) 以点 B' 为圆心，AB 为半径画弧，交射线$C'N$于点A'；

(4) 连接 $A'B'$.

图 12.2-11 给出了画 Rt△$A'B'C'$的方法. 你是这样画的吗？探究 5 的结果反映了什么规律？

由探究 5 可以得到判定两个直角三角形全等的一个方法：

斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等（可以简写成“斜边、直角边”或“HL”）.

例 5 如图 12.2-12，$AC\perp BC$，$BD\perp AD$，垂足分别为 C，D，$AC=BD$. 求证 $BC=AD$.

证明：∵ $AC\perp BC$，$BD\perp AD$，

∴ $\angle C$ 与$\angle D$ 都是直角.

在 Rt△ABC 和 Rt△BAD 中，

$$\begin{cases} AB=BA, \\ AC=BD, \end{cases}$$

∴ Rt△ABC≌Rt△BAD（HL）.

∴ $BC=AD$.

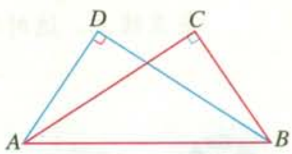
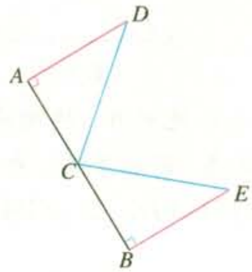


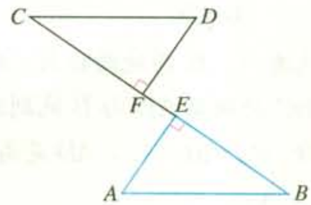
图 12.2-12

练习

1. 如图，C 是路段 AB 的中点，两人从 C 同时出发，以相同的速度分别沿两条直线行走，并同时到达 D，E 两地. $DA \perp AB$，$EB \perp AB$. D，E 与路段 AB 的距离相等吗？为什么？



（第 1 题）



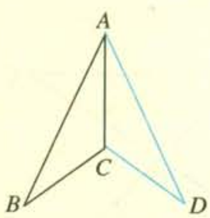
（第 2 题）

2. 如图，$AB=CD$，$AE \perp BC$，$DF \perp BC$，垂足分别为 E，F，$CE=BF$. 求证$AE=DF$.

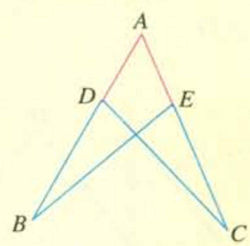
习题 12.2

复习巩固

1. 如图，$AB=AD$，$CB=CD$. $\triangle ABC$ 和$\triangle ADC$ 全等吗？为什么？

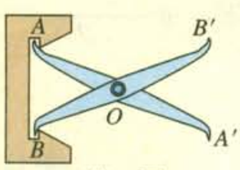


（第 1 题）

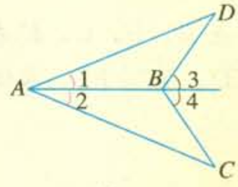


（第 2 题）

2. 如图，$AB=AC$，$AD=AE$. 求证$\angle B=\angle C$.
3. 如图，把两根钢条的中点连在一起，可以做成一个测量工件内槽宽的工具（卡钳）. 在图中，要测量工件内槽宽 AB，只要测量哪些量？为什么？



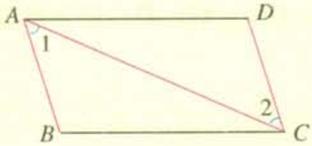
（第 3 题）



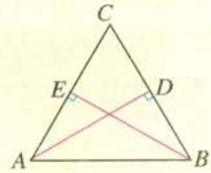
（第 4 题）

4. 如上页图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 求证 $AC=AD$.

5. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle B=\angle D$. 求证 $AB=CD$.



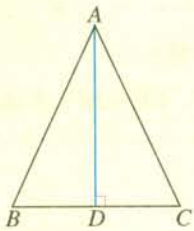
（第 5 题）



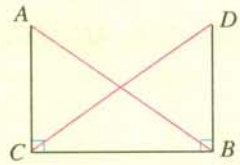
（第 6 题）

6. 如图，从 C 地看 A，B 两地的视角 $\angle C$ 是锐角，从 C 地到 A，B 两地的距离相等. A 地到路段 BC 的距离 AD 与 B 地到路段 AC 的距离 BE 相等吗？为什么？

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是高. 求证：(1) $BD=CD$；(2) $\angle BAD=\angle CAD$.



（第 7 题）

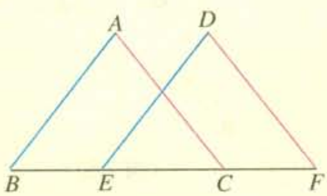


（第 8 题）

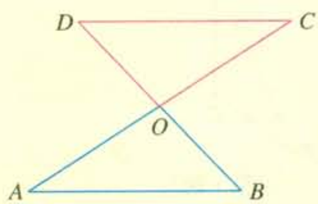
8. 如图，$AC\perp CB$，$DB\perp CB$，垂足分别为 C，B，$AB=DC$. 求证 $\angle ABD=\angle ACD$.

综合运用

9. 如图，点 B，E，C，F 在一条直线上，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$. 求证 $\angle A=\angle D$.



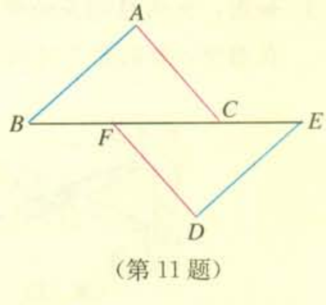
（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，AC 和 BD 相交于点 O，$OA=OC$，$OB=OD$. 求证 $DC\parallel AB$.

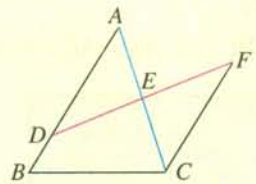
11. 如图，点 B，F，C，E 在一条直线上，$FB=CE$，$AB\parallel ED$，$AC\parallel FD$. 求证：$AB=DE$，$AC=DF$.



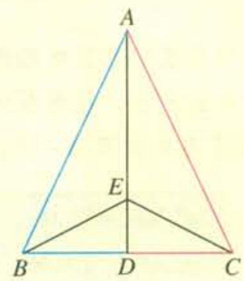
（第 11 题）

拓广探索

12. 如图，D 是 AB 上一点，DF 交 AC 于点 E，$DE=FE$，$FC /\!/ AB$. AE 与 CE 有什么关系？证明你的结论.



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 是 BC 的中点，点 E 在 AD 上. 找出图中的全等三角形，并证明它们全等.

信息技术应用

探究三角形全等的条件

用《几何画板》软件的绘图功能可以方便地根据给定条件画出三角形，还可以测量三角形中边和角的大小，从而帮助我们探究三角形全等的条件.

1. 按照下面的步骤画一个$\triangle ABC$，使得$AB=2$ cm，$BC=5$ cm，$AC=6$ cm.

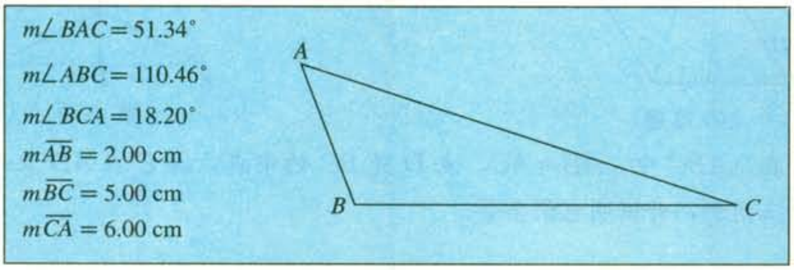


图 1

(1) 任意画一条直线l，在l上取两点B，C，使$BC=5$ cm；

(2) 以点C为圆心，6 cm为半径画一个圆；

(3) 以点B为圆心，2 cm为半径画一个圆，与半径为6 cm的圆交于两个点，取其中的一个点为A；

(4) 连接AB，BC，CA，隐藏所有的圆和直线l.

测量$\triangle ABC$的三条边的长度和三个角的大小. 你画出的三角形及测量结果与图 1 相同吗？由此你能得到什么结论？

2. 按照下面的步骤画一个$\triangle ABC$，使得$AB=4$ cm，$BC=5$ cm，$\angle ABC=75°$.

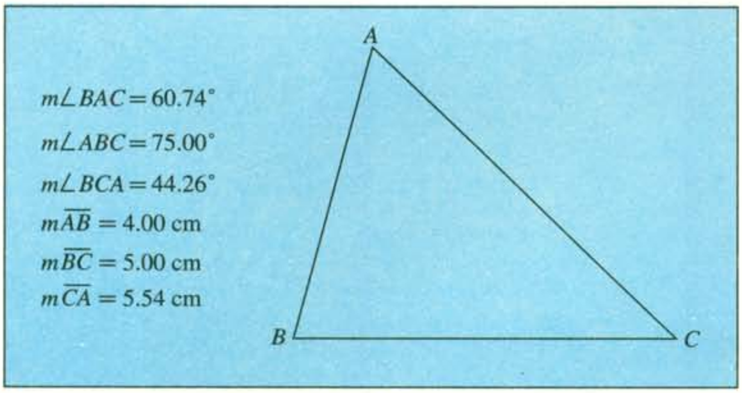


图 2

(1) 任意画一条直线l，在l上取两点B，C，使$BC=5$ cm；

(2) 连接 BC，以点 B 为中心，将 BC 逆时针旋转 $75°$，得到 BC'；

(3) 在 BC' 上取点 A，使 $AB=4$ cm；

(4) 连接 AB，CA，隐藏直线 l 和 BC'.

测量△ABC 的三条边的长度和三个角的大小. 你画出的三角形及测量结果与图 2 相同吗？由此你能得到什么结论？

3. 按照下面的步骤画一个△ABC，使得$\angle A=60°$，$\angle B=75°$，$\angle C=45°$.

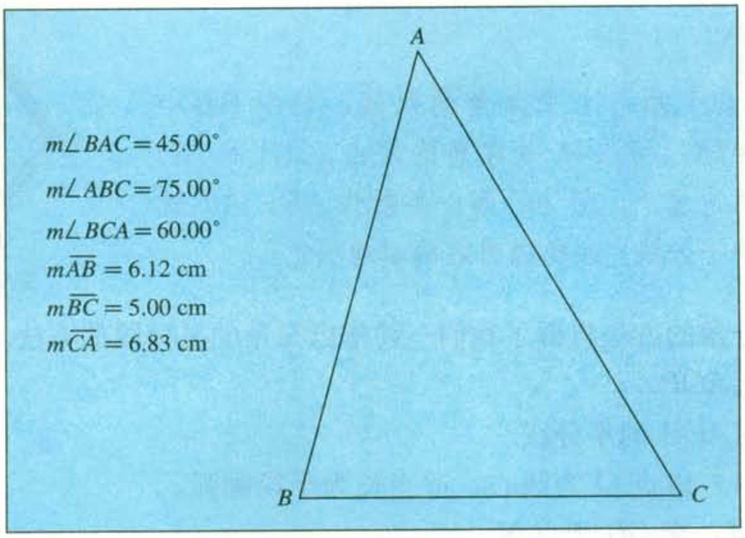


图 3

(1) 任意画一条直线 l，在 l 上任意取两点 B，C，连接 BC；

(2) 以点 B 为中心，将 BC 逆时针旋转 $75°$，得到 BC'；

(3) 以点 C 为中心，将 BC 顺时针旋转 $45°$，得到 CB'；

(4) 记 BC' 与 CB' 的交点为 A，连接 AB，CA，隐藏直线 l 和 BC'，CB'.

测量△ABC 的三条边的长度和三个角的大小. 你画出的三角形及测量结果与图 3 相同吗？由此你能得到什么结论？

4. 分别按“角边角”“角角边”和“边边角”的条件画几个三角形，每组三角形全等吗？请你总结一下判定三角形全等的条件.

12.3 角的平分线的性质

思考

图 12.3-1 是一个平分角的仪器，其中 $AB=AD$，$BC=DC$. 将点 A 放在角的顶点，AB 和 AD 沿着角的两边放下，沿 AC 画一条射线 AE，AE 就是这个角的平分线. 你能说明它的道理吗？

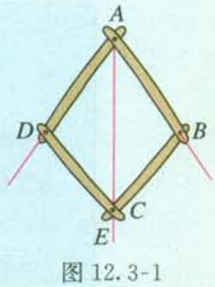


图 12.3-1

这种平分角的方法告诉了我们一种作已知角的平分线的方法.

已知：$\angle AOB$.

求作：$\angle AOB$ 的平分线.

作法：(1) 以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 OA 于点 M，交 OB 于点 N.

(2) 分别以点 M，N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在$\angle AOB$ 的内部相交于点 C.

(3) 画射线 OC. 射线 OC 即为所求（图 12.3-2）.

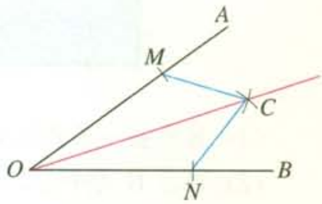


图 12.3-2

思考

如图 12.3-3，任意作一个角 $\angle AOB$，作出 $\angle AOB$ 的平分线 OC. 在 OC 上任取一点 P，过点 P 画出 OA，OB 的垂线，分别记垂足为 D，E，测量 PD，PE 并作比较，你得到什么结论？在 OC 上再取几个点试一试.

通过以上测量，你发现了角的平分线的什么性质？

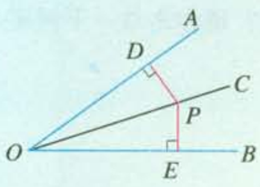


图 12.3-3

我们猜想角的平分线有以下性质：

角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

下面，我们利用三角形全等证明这个性质. 首先，要分清其中的“已知”和“求证”. 显然，已知为“一个点在一个角的平分线上”，要证的结论为“这个点到这个角两边的距离相等”. 为了更直观、清楚地表达题意，我们通常在证明之前画出图形，并用符号表示已知和求证.

如图 12.3-4，$\angle AOC=\angle BOC$，点 P 在 OC 上，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为 D，E. 求证 $PD=PE$.

证明：$\because$ $PD\perp OA$，$PE\perp OB$，

$\therefore$ $\angle PDO=\angle PEO=90°$.

在$\triangle PDO$ 和$\triangle PEO$ 中，

$$\begin{cases}\angle PDO=\angle PEO,\\ \angle AOC=\angle BOC,\\ OP=OP,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle PDO\cong\triangle PEO$(AAS).

$\therefore$ $PD=PE$.

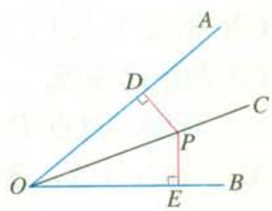


图 12.3-4

一般情况下，我们要证明一个几何命题时，可以按照类似的步骤进行，即

1. 明确命题中的已知和求证；
2. 根据题意，画出图形，并用数学符号表示已知和求证；
3. 经过分析，找出由已知推出要证的结论的途径，写出证明过程.

思考

如图 12.3-5，要在 S 区建一个集贸市场，使它到公路、铁路的距离相等，并且离公路与铁路的交叉处 500 m. 这个集贸市场应建于何处(在图上标出它的位置，比例尺为1∶20 000)？

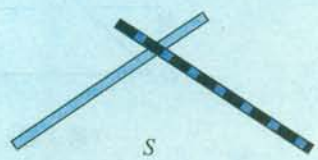


图 12.3-5

我们知道，角的平分线上的点到角的两边的距离相等. 到角的两边的距离相等的点是否在角的平分线上呢？利用三角形全等，可以得到

按照上述证明命题的步骤，自己证一证这个结论.

角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上.

根据上述结论，就知道这个集贸市场应建于何处了.

例 如图 12.3-6，$\triangle ABC$ 的角平分线 BM，CN 相交于点 P. 求证：点 P 到三边 AB，BC，CA 的距离相等.

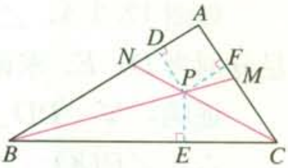


图 12.3-6

证明： 过点 P 作 PD，PE，PF 分别垂直于 AB，BC，CA，垂足分别为 D，E，F.

$\because$ BM 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 P 在 BM 上，

$\therefore$ $PD=PE$.

同理 $PE=PF$.

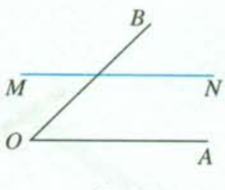
$\therefore$ $PD=PE=PF$.

即点 P 到三边 AB，BC，CA 的距离相等.

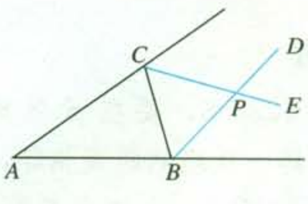
想一想，点 P 在 $\angle A$ 的平分线上吗？这说明三角形的三条角平分线有什么关系？

练习

1. 如图，在直线 MN 上求作一点 P，使点 P 到射线 OA 和 OB 的距离相等.



（第 1 题）



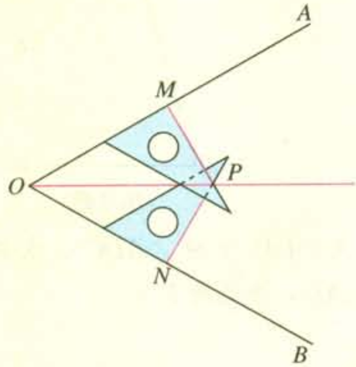
（第 2 题）

2. 如图，$\triangle ABC$ 的 $\angle ABC$ 的外角的平分线 BD 与 $\angle ACB$ 的外角的平分线 CE 相交于点 P. 求证：点 P 到三边 AB，BC，CA 所在直线的距离相等.

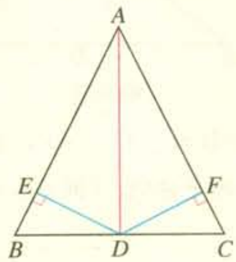
习题 12.3

复习巩固

1. 用三角尺可按下面方法画角平分线：在已知的$\angle AOB$的两边上，分别取$OM=ON$，再分别过点M，N作OA，OB的垂线，交点为P，画射线OP，则OP平分$\angle AOB$. 为什么？

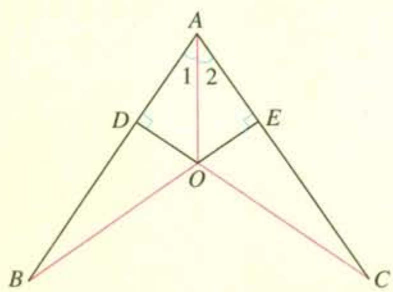


（第 1 题）

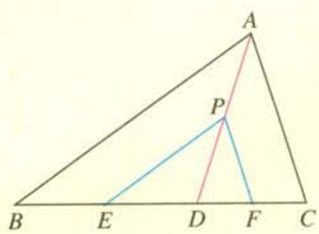


（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$中，AD是它的角平分线，且$BD=CD$，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为E，F. 求证$EB=FC$.
3. 如图，$CD\perp AB$，$BE\perp AC$，垂足分别为D，E，BE，CD相交于点O，$OB=OC$. 求证$\angle 1=\angle 2$.



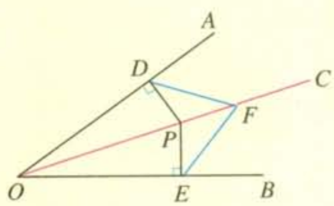
（第 3 题）



（第 4 题）

综合运用

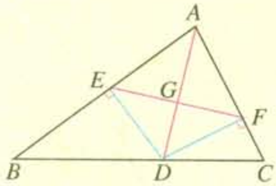
4. 如图，在$\triangle ABC$中，AD是它的角平分线，P是AD上的一点，$PE \parallel AB$，交BC于点E，$PF \parallel AC$，交BC于点F. 求证：点D到PE和PF的距离相等.
5. 如图，OC是$\angle AOB$的平分线，P是OC上的一点，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为D，E. F是OC上的另一点，连接DF，EF. 求证$DF=EF$.



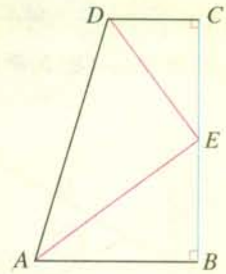
（第 5 题）

拓广探索

6. 如图，AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别是 E，F，连接 EF，EF 与 AD 相交于点 G. AD 与 EF 垂直吗？证明你的结论.



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，$\angle B=\angle C=90^\circ$，$E$ 是 BC 的中点，DE 平分$\angle ADC$．求证：AE 是$\angle DAB$ 的平分线.（提示：过点 E 作 $EF\perp AD$，垂足为 F.）

数学活动

活动1

图 1 是两个根据全等形设计的图案. 仔细观察一下，每个图案中有哪些全等形？有哪些全等三角形？

注意一下你的身边，哪些是全等形？哪些是全等三角形？各找几个例子与同学交流.

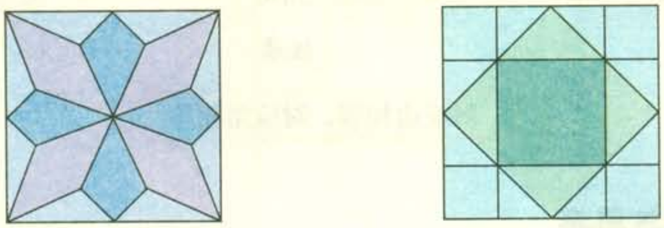


图1

活动2　用全等三角形研究“筝形”

我们把两组邻边分别相等的四边形叫做“筝形”. 如图 2，四边形 $ABCD$ 是一个筝形，其中 $AD=CD$，$AB=CB$. 请你自己画一个筝形，用测量、折纸等方法猜想筝形的角、对角线有什么性质，然后用全等三角形的知识证明你的猜想.

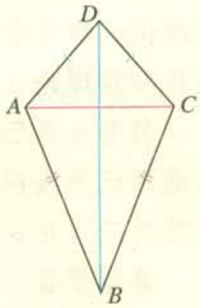
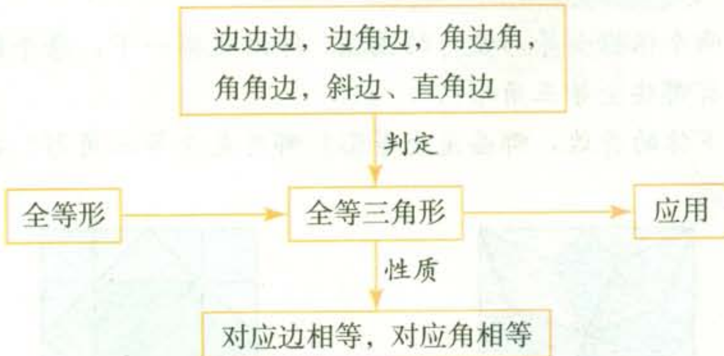


图2

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们学习了全等三角形的性质和判定方法．如果两个三角形全等，那么它们的对应元素（对应的边、角等）都相等，这就是全等三角形的性质；判定三角形全等的条件是“边边边”“边角边”“角边角”或“角角边”，而对于直角三角形的全等，还可以用“斜边、直角边”来判定．

用全等三角形的定义判定三角形全等，需要六个条件．通过画图找规律、推理论证等方法，我们减少条件，找到了更简便的判定方法．由此看出，实验操作和推理论证都能帮助我们获得新的结论．

利用全等三角形知识，通过推理论证，我们得到了角的平分线的性质．今后遇到证明线段相等或角相等的问题，可以尝试先判定两个三角形全等，再利用其对应边相等或对应角相等解决问题．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1. 你能举一些实际生活中全等形的例子吗？

2. 全等三角形有什么性质？

3. 从三角形的三条边分别相等、三个角分别相等中任选三个作为条件来判定两个三角形是否全等时，哪些是能够判定的？两个直角三角形全等的条件是什么？

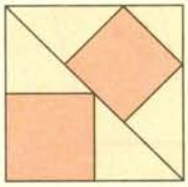
4. 学习本章后，你对角的平分线有了哪些新的认识？你能用全等三角形证明角的平分线的性质吗？

5. 你能举例说明证明一个几何命题的一般过程吗？

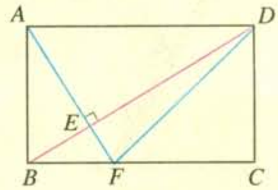
复习题 12

复习巩固

1. 图中有三个正方形，请你说出图中所有的全等三角形.



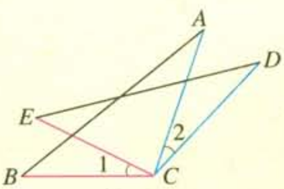
（第 1 题）



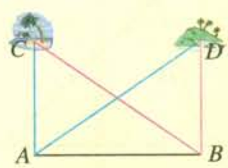
（第 2 题）

2. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AF\perp BD$，垂足为 E，AF 交 BC 于点 F，连接 DF.
   (1) 图中有全等三角形吗？
   (2) 图中有面积相等但不全等的三角形吗？

3. 如图，$CA=CD$，$\angle 1=\angle 2$，$BC=EC$. 求证 $AB=DE$.



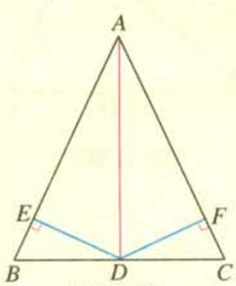
（第 3 题）



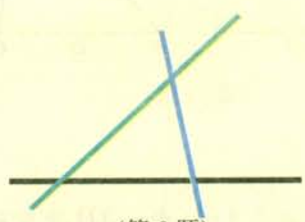
（第 4 题）

4. 如图，海岸上有 A，B 两个观测点，点 B 在点 A 的正东方，海岛 C 在观测点 A 的正北方，海岛 D 在观测点 B 的正北方. 如果从观测点 A 看海岛 C，D 的视角 $\angle CAD$ 与从观测点 B 看海岛 C，D 的视角 $\angle CBD$ 相等，那么海岛 C，D 到观测点 A，B 所在海岸的距离 CA，DB 相等. 请你说明理由.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别是 E，F，$BE=CF$. 求证：AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.



（第 5 题）

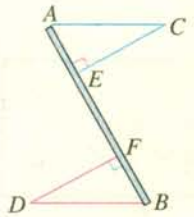


（第 6 题）

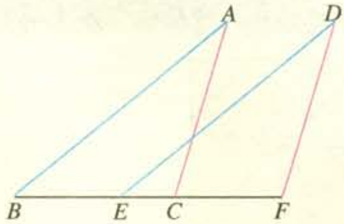
6. 如图，为了促进当地旅游发展，某地要在三条公路围成的一块平地上修建一个度假村. 要使这个度假村到三条公路的距离相等，应在何处修建？

综合运用

7. 如图，两车从路段 AB 的两端同时出发，沿平行路线以相同的速度行驶，相同时间后分别到达 C，D 两地. C，D 两地到路段 AB 的距离相等吗？为什么？



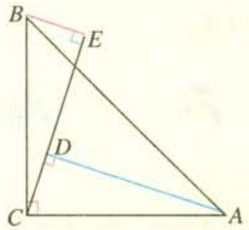
（第 7 题）



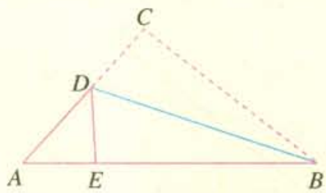
（第 8 题）

8. 如图，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$. 求证：$AB\parallel DE$，$AC\parallel DF$.

9. 如图，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，$AD\perp CE$，$BE\perp CE$，垂足分别为 D，E，$AD=2.5$ cm，$DE=1.7$ cm. 求 BE 的长.



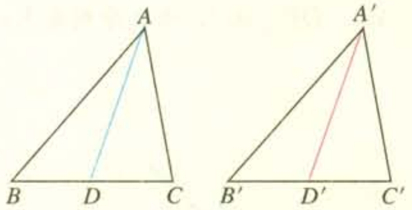
（第 9 题）



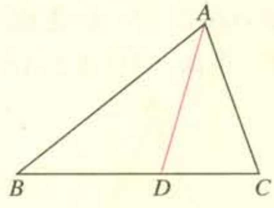
（第 10 题）

10. 如图的三角形纸片中，$AB=8$ cm，$BC=6$ cm，$AC=5$ cm. 沿过点 B 的直线折叠这个三角形，使点 C 落在 AB 边上的点 E 处，折痕为 BD. 求△AED 的周长.

11. 如图，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，$AD$，$A'D'$ 分别是△ABC，△$A'B'C'$ 的对应边上的中线. AD 与 $A'D'$ 有什么关系？证明你的结论.



（第 11 题）



（第 12 题）

拓广探索

12. 如图，在△ABC 中，AD 是它的角平分线. 求证：$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=AB:AC$.

13. 证明：如果两个三角形有两条边和其中一边上的中线分别相等，那么这两个三角形全等.

第十三章　轴对称

我们生活在一个充满对称的世界中：许多建筑都设计成对称形，艺术作品的创作往往也从对称角度考虑，自然界的许多动植物也按对称形生长，中国的方块字中有些也具有对称性……对称给我们带来多少美的感受！

轴对称是一种重要的对称．本章我们将从生活中的对称出发，学习几何图形的轴对称，并利用轴对称来研究等腰三角形，进而通过推理论证得到等腰三角形、等边三角形的性质和判定方法，由此可以体会图形变化在几何研究中的作用．

让我们一起探索轴对称的奥秘吧！

13.1 轴对称

13.1.1 轴对称

对称现象无处不在，从自然景观到艺术作品，从建筑物到交通标志，甚至日常生活用品中，人们都可以找到对称的例子（图 13.1-1）.

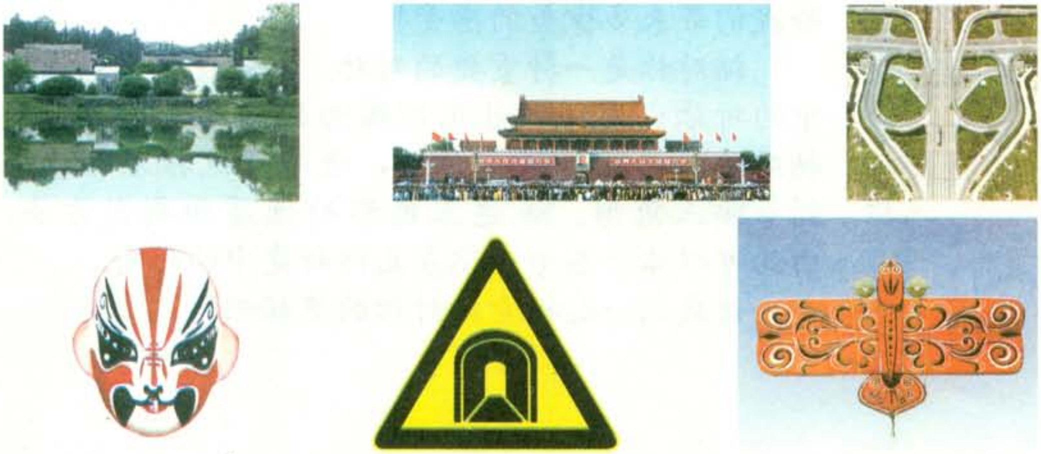


图 13.1-1

如图 13.1-2，把一张纸对折，剪出一个图案（折痕处不要完全剪断），再打开这张对折的纸，就得到了美丽的窗花. 观察得到的窗花，你能发现它们有什么共同的特点吗？

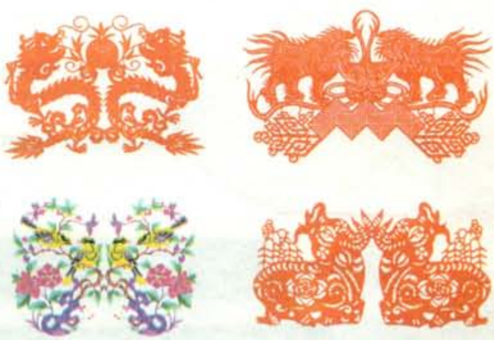


图 13.1-2

像窗花一样，如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做**轴对称图形**（axi-symmetric figure），这条直线就是它的**对称轴**（axis of symmetry）. 这时，我们也说这个图形关于这条直线（成轴）对称.

你能举出一些轴对称图形的例子吗？

思考

下面的每对图形有什么共同特点？

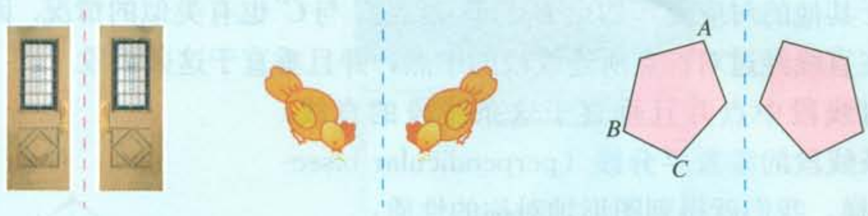


图 13.1-3

把图 13.1-3 中的每一对图形沿着虚线折叠，左边的图形能与右边的图形重合.

像这样，把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形**关于这条直线（成轴）对称**，这条直线叫做对称轴，折叠后重合的点是对应点，叫做**对称点**(symmetric points). 你能再举出一些两个图形成轴对称的例子吗？

> 请你标出图 13.1-3 中点 A，B，C 的对称点 A'，B'，C'.

思考

成轴对称的两个图形全等吗？如果把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，那么这两个图形全等吗？这两个图形对称吗？

把成轴对称的两个图形看成一个整体，它就是一个轴对称图形. 把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，这两个图形关于这条轴对称.

思考

如图 13.1-4，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 MN 对称，点 A'，B'，C' 分别是点 A，B，C 的对称点，线段 AA'，BB'，CC' 与直线 MN 有什么关系？

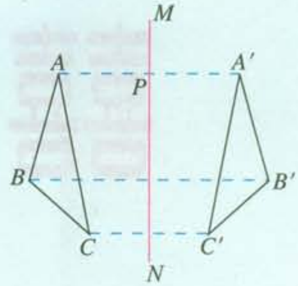


图 13.1-4

图 13.1-4 中，点 A，A' 是对称点，设 AA' 交对称轴 MN 于点 P，将 $\triangle ABC$ 或 $\triangle A'B'C'$ 沿 MN 折叠后，点 A 与 A' 重合．于是有

$$AP=PA',\ \angle MPA=\angle MPA'=90^\circ.$$

对于其他的对应点，如点 B 与 B'，点 C 与 C' 也有类似的情况．因此，对称轴所在直线经过对称点所连线段的中点，并且垂直于这条线段．

经过线段中点并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的**垂直平分线**（perpendicular bisector）．这样，我们就得到图形轴对称的性质：

如果两个图形关于某条直线对称，那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线．

类似地，**轴对称图形的对称轴，是任何一对对应点所连线段的垂直平分线．**例如图 13.1-5 中，l 垂直平分 AA'，l 垂直平分 BB'．

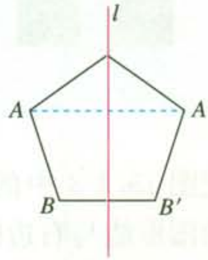


图 13.1-5

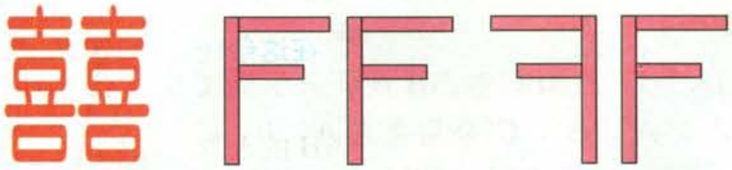
练习

1. 如图所示的每个图形是轴对称图形吗？如果是，指出它的对称轴．

(1) (2) (3) (4) (5)

（第 1 题）

2. 如图所示的每幅图形中的两个图案是轴对称的吗？如果是，指出它们的对称轴，并找出一对对称点．



(1) (2) (3)

（第 2 题）

13.1.2 线段的垂直平分线的性质

探究

如图 13.1-6，直线 l 垂直平分线段 AB，P_1，P_2，P_3，…是 l 上的点，分别量一量点 P_1，P_2，P_3，…到点 A 与点 B 的距离，你有什么发现？

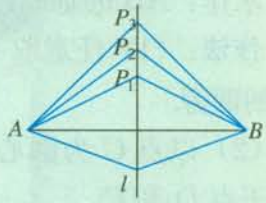


图 13.1-6

可以发现，点 P_1，P_2，P_3，…到点 A 的距离与它们到点 B 的距离分别相等. 如果把线段 AB 沿直线 l 对折，线段 P_1A 与 P_1B、线段 P_2A 与 P_2B、线段 P_3A 与 P_3B……都是重合的，因此它们也分别相等.

由此我们可以得出线段的垂直平分线的性质：

线段垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等.

利用判定两个三角形全等的方法，也可以证明这个性质.

如图 13.1-7，直线 $l \perp AB$，垂足为 C，$AC=CB$，点 P 在 l 上. 求证 $PA=PB$.

证明： $\because$ $l \perp AB$，

$\therefore$ $\angle PCA=\angle PCB$.

又 $AC=CB$，$PC=PC$，

$\therefore$ $\triangle PCA \cong \triangle PCB$ (SAS).

$\therefore$ $PA=PB$.

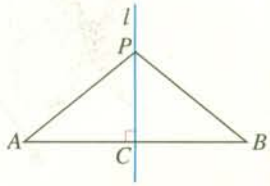


图 13.1-7

反过来，如果 $PA=PB$，那么点 P 是否在线段 AB 的垂直平分线上呢？

通过证明可以得到：

与一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

你能证明这个结论吗？

从上面两个结论可以看出：在线段 AB 的垂直平分线 l 上的点与 A，B 的距离都相等；反过来，与 A，B 的距离相等的点都在 l 上，所以直线 l 可以看成与两点 A，B 的距离相等的所有点的集合.

例 1 尺规作图：经过已知直线外一点作这条直线的垂线.

已知：直线 AB 和 AB 外一点 C（图 13.1-8）

求作：AB 的垂线，使它经过点 C.

作法：(1) 任意取一点 K，使点 K 和点 C 在 AB 的两旁.

(2) 以点 C 为圆心，CK 长为半径作弧，交 AB 于点 D 和 E.

(3) 分别以点 D 和点 E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，两弧相交于点 F.

(4) 作直线 CF.

直线 CF 就是所求作的垂线.

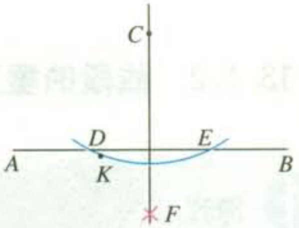
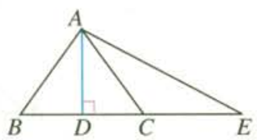


图 13.1-8

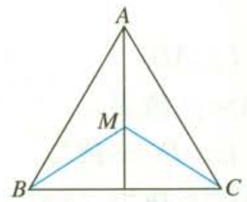
想一想，为什么直线 CF 就是所求作的垂线？

练习

1. 如图，$AD \perp BC$，$BD = DC$，点 C 在 AE 的垂直平分线上. AB，AC，CE 的长度有什么关系？$AB + BD$ 与 DE 有什么关系？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$AB = AC$，$MB = MC$. 直线 AM 是线段 BC 的垂直平分线吗？

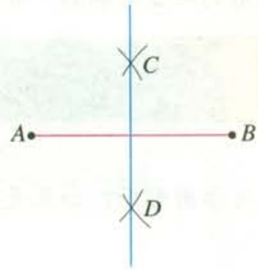
思考

有时我们感觉两个平面图形是轴对称的，如何验证呢？不折叠图形，你能准确地作出轴对称图形的对称轴吗？

如果两个图形成轴对称，其对称轴就是任何一对对应点所连线段的垂直平分线. 因此，我们只要找到一对对应点，作出连接它们的线段的垂直平分线，就可以得到这两个图形的对称轴.

例 2 如图 13.1-9(1)，点 A 和点 B 关于某条直线成轴对称，你能作出这条直线吗?

(1)



(2)

图 13.1-9

分析：我们只要连接点 A 和点 B，作出线段 AB 的垂直平分线，就可以得到点 A 和点 B 的对称轴. 为此作出到点 A，B 距离相等的两点，即线段 AB 的垂直平分线上的两点，从而作出线段 AB 的垂直平分线.

作法：如图 13.1-9(2).

(1) 分别以点 A 和点 B 为圆心，大于$\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧（想一想为什么），两弧相交于 C，D 两点；

(2) 作直线 CD.

CD 就是所求作的直线.

> 这个作法实际上就是线段垂直平分线的尺规作图. 我们也可以用这种方法确定线段的中点.

同样，对于轴对称图形，只要找到任意一组对应点，作出对应点所连线段的垂直平分线，就得到此图形的对称轴.

例如，对于图 13.1-10 中的五角星，我们可以找出它的一对对应点 A 和 A'，连接 AA'，作出线段 AA'的垂直平分线 l，则 l 就是这个五角星的一条对称轴.

类似地，你能作出这个五角星的其他对称轴吗?

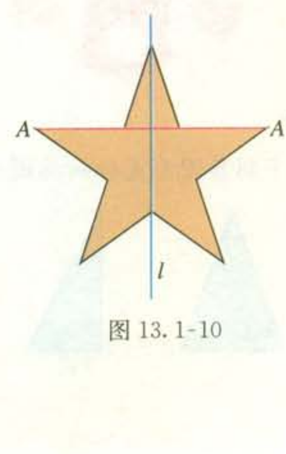
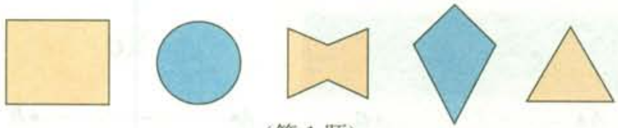


图 13.1-10

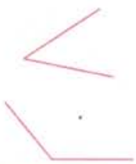
练习

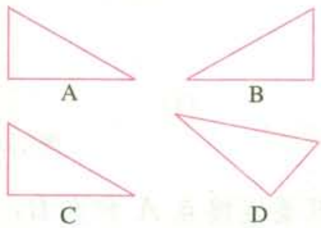
1. 作出下列各图形的一条对称轴，和同学比较一下，你们作出的对称轴一样吗？



（第 1 题）

2. 如图，角是轴对称图形吗？如果是，它的对称轴是什么？





（第 2 题）　　　　（第 3 题）

3. 如图，与图形 A 成轴对称的是哪个图形？作出它们的对称轴.

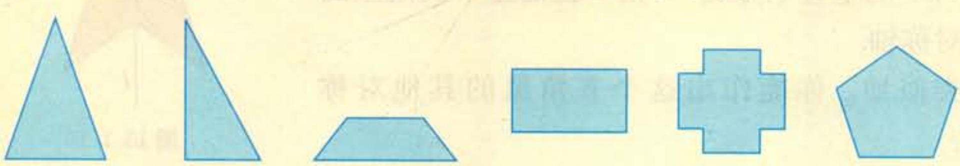
习题 13.1

复习巩固

1. 下面的图形是轴对称图形吗？如果是，你能画出它的对称轴吗？

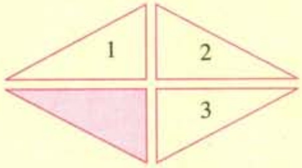
（第 1 题）

2. 下列各图形是轴对称图形吗？如果是，画出它们的一条对称轴.

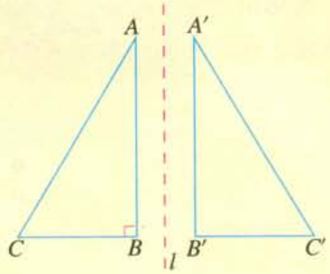


（第 2 题）

3. 图中有阴影的三角形与哪些三角形成轴对称？整个图形是轴对称图形吗？它共有几条对称轴？



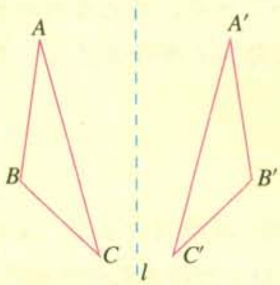
（第 3 题）



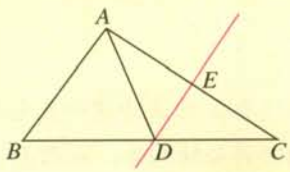
（第 4 题）

4. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，$\angle B=90°$，$A'B'=6$ cm. 求 $\angle A'B'C'$ 的度数和 AB 的长.

5. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，这两个三角形全等吗？一般地，如果两个三角形全等，那么它们一定关于某条直线对称吗？



（第 5 题）



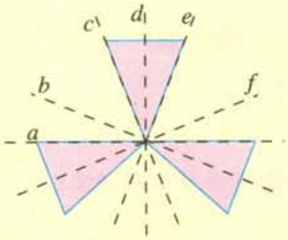
（第 6 题）

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，DE 是 AC 的垂直平分线，$AE=3$ cm，$\triangle ABD$ 的周长为 13 cm，求 $\triangle ABC$ 的周长.

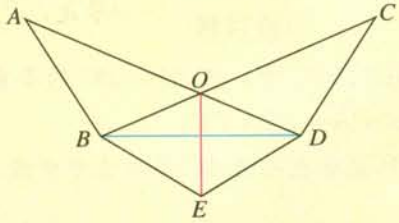
综合运用

7. 平面内不垂直的两条相交直线是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？

8. 如图所示的虚线中，哪些是图形的对称轴？



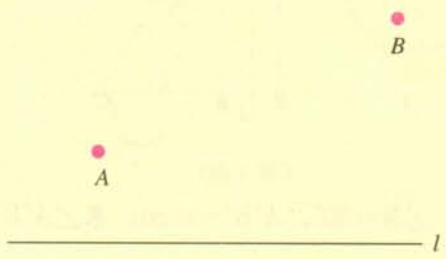
（第 8 题）



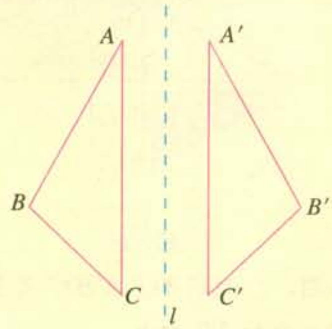
（第 9 题）

9. 如上页图，AD 与 BC 相交于点 O，$OA=OC$，$\angle A=\angle C$，$BE=DE$. 求证：OE 垂直平分 BD.

10. 如图，某地由于居民增多，要在公路 l 上增加一个公共汽车站，A，B 是路边两个新建小区，这个公共汽车站建在什么位置，能使两个小区到车站的路程一样长？



（第 10 题）

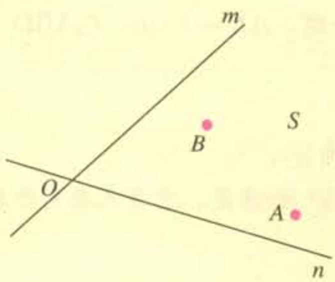


（第 11 题）

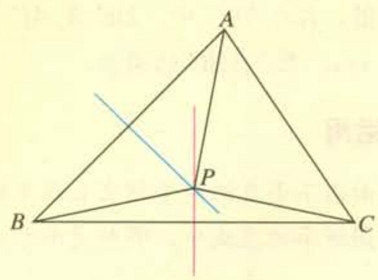
11. 如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，对应线段 AB 和 $A'B'$ 所在的直线相交吗？另外两组对应线段所在的直线相交吗？如果相交，交点与对称轴 l 有什么关系？如果不相交，这组对应线段所在直线与对称轴 l 有什么关系？再找几个成轴对称的图形观察一下，你能发现什么规律？

拓广探索

12. 如图，电信部门要在 S 区修建一座电视信号发射塔. 按照设计要求，发射塔到两个城镇 A，B 的距离必须相等，到两条高速公路 m 和 n 的距离也必须相等. 发射塔应修建在什么位置？在图上标出它的位置.



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，边 AB，BC 的垂直平分线相交于点 P.

(1) 求证 $PA=PB=PC$；

(2) 点 P 是否也在边 AC 的垂直平分线上？由此你还能得出什么结论？

13.2 画轴对称图形

如图 13.2-1，在一张半透明的纸的左边部分，画一只左脚印. 把这张纸对折后描图，打开对折的纸，就能得到相应的右脚印. 这时，右脚印和左脚印成轴对称，折痕所在直线就是它们的对称轴，并且连接任意一对对应点的线段被对称轴垂直平分. 类似地，请你再画一个图形做一做，看看能否得到同样的结论.

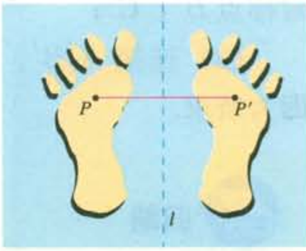


图 13.2-1

归纳

由一个平面图形可以得到与它关于一条直线 l 对称的图形，这个图形与原图形的形状、大小完全相同；新图形上的每一点都是原图形上的某一点关于直线 l 的对称点；连接任意一对对应点的线段被对称轴垂直平分.

思考

如果有一个图形和一条直线，如何画出与这个图形关于这条直线对称的图形呢？

例 1 如图 13.2-2(1)，已知△ABC 和直线 l，画出与△ABC 关于直线 l 对称的图形.

分析：△ABC 可以由三个顶点的位置确定，只要能分别画出这三个顶点关于直线 l 的对称点，连接这些对称点，就能得到要画的图形.

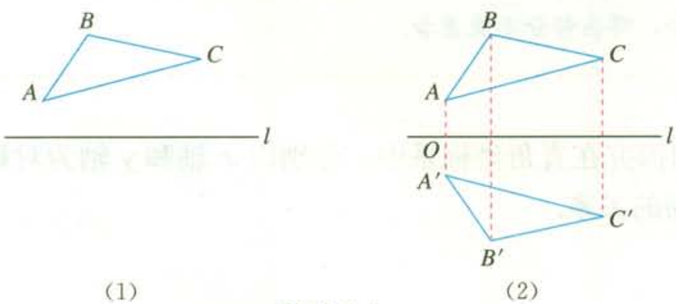


图 13.2-2

画法：(1) 如图 13.2-2(2)，过点 A 画直线 l 的垂线，垂足为 O，在垂线上截取 $OA'=OA$，A' 就是点 A 关于直线 l 的对称点；

(2) 同理，分别画出点 B，C 关于直线 l 的对称点 B'，C'；

(3) 连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，则 $\triangle A'B'C'$ 即为所求.

画好后，你也可以通过折叠的方法验证一下.

归纳

几何图形都可以看作由点组成. 对于某些图形，只要画出图形中的一些特殊点（如线段端点）的对称点，连接这些对称点，就可以得到原图形的轴对称图形.

练习

1. 如图，把下列图形补成关于直线 l 对称的图形.

（第 1 题）

2. 用纸片剪一个三角形，分别沿它一边的中线、高、角平分线对折，看看哪些部分能够重合，哪些部分不能重合.

下面，我们探究在直角坐标系中，分别以 x 轴和 y 轴为对称轴时，一对对称点的坐标之间的关系.

思考

图 13.2-3 是一幅老北京城的示意图，其中西直门和东直门是关于中轴线对称的. 如果以天安门为原点，分别以长安街和中轴线为 x 轴和 y 轴建立平面直角坐标系，根据如图所示的东直门的坐标，你能说出西直门的坐标吗？

图 13.2-3

在如图 13.2-4 的平面直角坐标系中，画出下列已知点及其关于坐标轴的对称点，并把它们的坐标填入表格中，看看每对对称点的坐标有怎样的规律，再和同学讨论一下.

已知点	$A(2, -3)$	$B(-1, 2)$	$C(-6, -5)$	$D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$E(4, 0)$
关于 x 轴的对称点	$A'(\_, \_)$	$B'(\_, \_)$	$C'(\_, \_)$	$D'(\_, \_)$	$E'(\_, \_)$
关于 y 轴的对称点	$A''(\_, \_)$	$B''(\_, \_)$	$C''(\_, \_)$	$D''(\_, \_)$	$E''(\_, \_)$

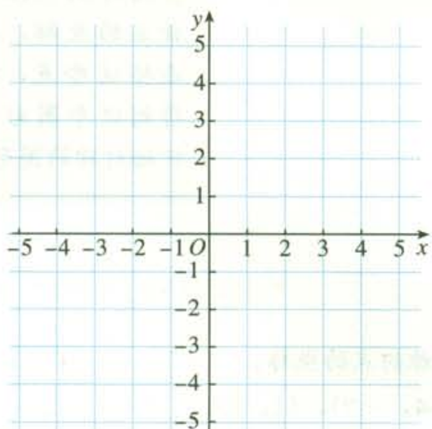


图 13.2-4

再找几个点，分别画出它们的对称点，检验一下你发现的规律.

归纳

点(x, y)关于 x 轴对称的点的坐标为$(x, -y)$；

点(x, y)关于 y 轴对称的点的坐标为$(-x, y)$.

利用上述规律，我们也可以很容易地在平面直角坐标系中画出与一个图形关于 x 轴或 y 轴对称的图形.

例 2 如图 13.2-5，四边形 $ABCD$ 的四个顶点的坐标分别为 $A(-5, 1)$，$B(-2, 1)$，$C(-2, 5)$，$D(-5, 4)$，分别画出与四边形 $ABCD$ 关于 y 轴和 x 轴对称的图形.

解： 点(x, y)关于 y 轴对称的点的坐标为$(-x, y)$，因此四边形 $ABCD$ 的顶点 A，B，C，D 关于 y 轴对称的点分别为 A'(____，____)，B'(____，____)，C'(____，____)，D'(____，____)，依次连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，就可得到与四边形 $ABCD$ 关于 y 轴对称的四边形$A'B'C'D'$.

类似地，请你在图 13.2-5 上画出与四边形$ABCD$关于 x 轴对称的图形.

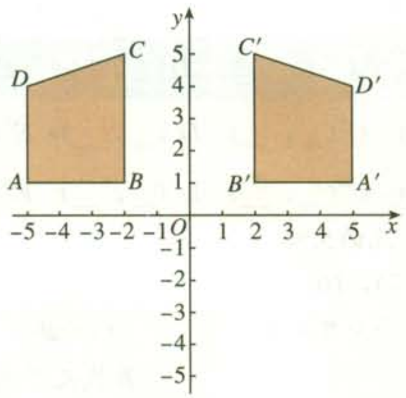


图 13.2-5

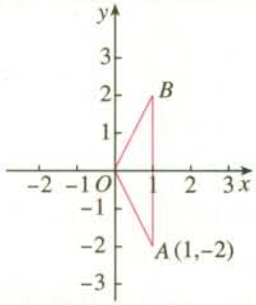
对于这类问题，只要先求出已知图形中的一些特殊点（如多边形的顶点）的对称点的坐标，描出并连接这些点，就可以得到这个图形关于坐标轴对称的图形.

练习

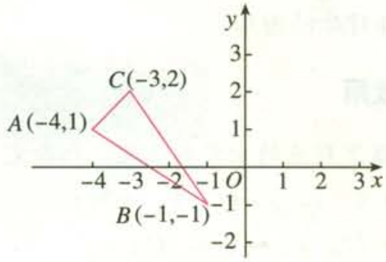
1. 分别写出下列各点关于 x 轴和 y 轴对称的点的坐标：

$(-2, 6)$，$(1, -2)$，$(-1, 3)$，$(-4, -2)$，$(1, 0)$.

2. 如图，$\triangle ABO$ 关于 x 轴对称，点 A 的坐标为$(1,\ -2)$，写出点 B 的坐标.



（第 2 题）



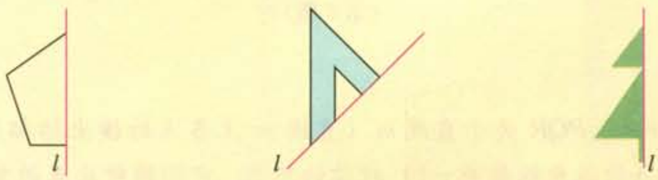
（第 3 题）

3. 如图，利用关于坐标轴对称的点的坐标的特点，分别画出与$\triangle ABC$ 关于 x 轴和 y 轴对称的图形.

习题 13.2

复习巩固

1. 如图，将各图形补成关于直线 l 对称的图形.

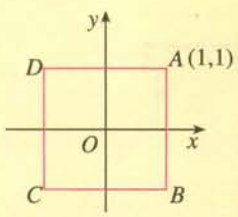


（第 1 题）

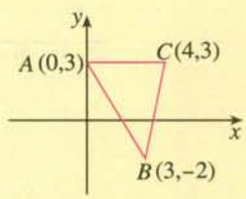
2. 分别写出下列各点关于 x 轴和 y 轴对称的点的坐标：

   $(3,\ 6)$，$(-7,\ 9)$，$(6,\ -1)$，$(-3,\ -5)$，$(0,\ 10)$.

3. 如图，以正方形 $ABCD$ 的中心为原点建立平面直角坐标系. 点 A 的坐标为$(1,\ 1)$，写出点 B，C，D 的坐标.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如上页图，利用关于坐标轴对称的点的坐标的特点，分别画出$\triangle ABC$关于x轴和y轴对称的图形．

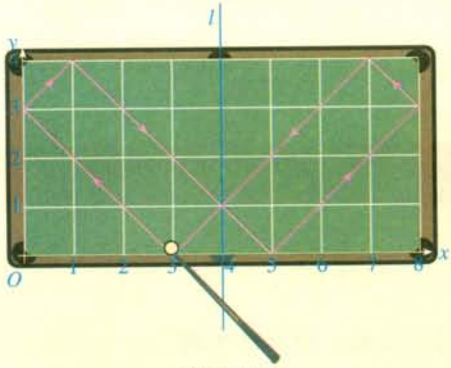
综合运用

5. 根据下列点的坐标的变化，判断它们进行了怎样的运动：

(1) $(-1, 3)\to(-1, -3)$；　　(2) $(-5, -6)\to(-5, -1)$；

(3) $(3, 4)\to(-3, 4)$；　　(4) $(-2, 3)\to(2, -3)$．

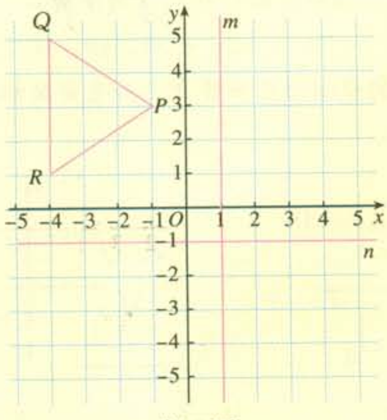
6. 如图，小球起始时位于$(3, 0)$处，沿所示的方向击球，小球运动的轨迹如图所示，用坐标描述这个运动，找出小球运动的轨迹上几个关于直线l对称的点．如果小球起始时位于$(1, 0)$处，仍按原来方向击球，请你画出这时小球运动的轨迹．



（第6题）

拓广探索

7. 如图，分别作出$\triangle PQR$关于直线m（直线m上各点的横坐标都为1）和直线n（直线n上各点的纵坐标都为-1）对称的图形．它们的对应点的坐标之间分别有什么关系？



（第7题）

信息技术应用

用轴对称进行图案设计

利用图形计算器或计算机等信息技术工具，可以直观地发现轴对称的性质，并利用轴对称进行图案设计．下面以《几何画板》软件为例说明．

如图 1，任意画一个图形，作这个图形关于直线 l 对称的图形，改变直线 l 的位置，或者改变其中一个图形的位置，通过观察可以得到对应点所连线段与对称轴的关系．

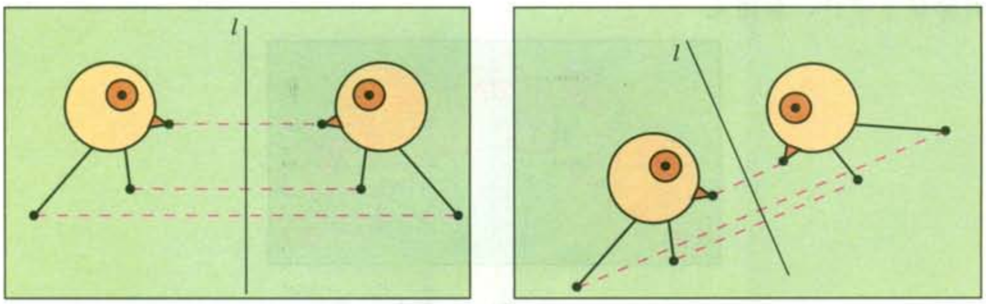


图 1

如图 2，画一个$\triangle ABC$，以 y 轴为对称轴作轴对称图形，得到$\triangle A'B'C'$，度量点 A，A'的坐标，可以观察它们的坐标有什么关系；再度量点 B，B'的坐标，同样可以观察它们的坐标有什么关系．

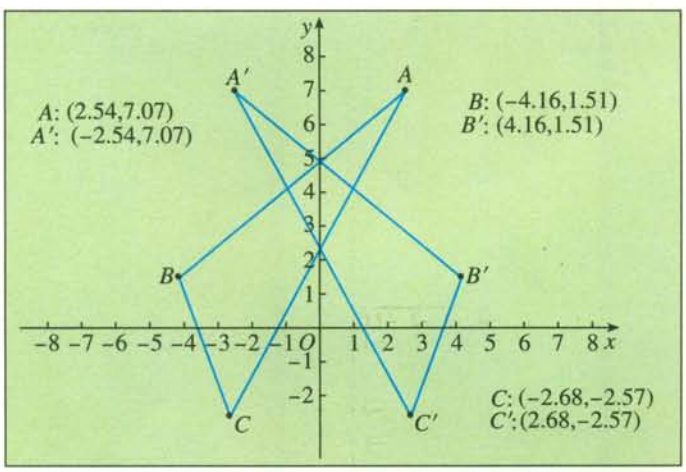


图 2

改变三角形的位置，观察它们的坐标有什么变化；再分别度量点 A，A'，B，B'的

坐标，观察它们的坐标有什么关系. 由此我们可以得到关于 y 轴对称的点的坐标的关系.

用同样的方法，可以得到关于 x 轴对称的点的坐标关系.

我们可以利用多次轴对称进行下面的图案设计:

对称轴平行，如图 3.

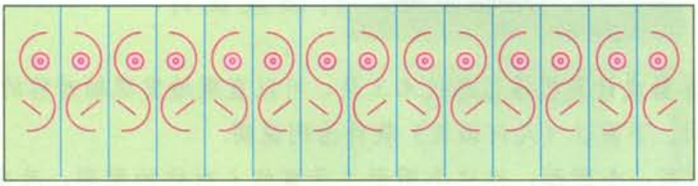


图 3

对称轴不平行，如图 4.

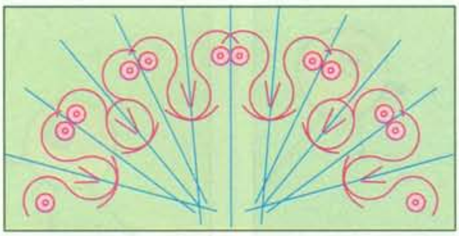


图 4

请你利用上面的方法设计一些图案，并与同学交流.

13.3 等腰三角形

13.3.1 等腰三角形

我们知道，有两边相等的三角形是等腰三角形（isosceles triangle）. 下面，我们利用轴对称的知识来研究等腰三角形的性质.

探究

如图 13.3-1，把一张长方形的纸按图中虚线对折，并剪去阴影部分，再把它展开，得到的$\triangle ABC$有什么特点？

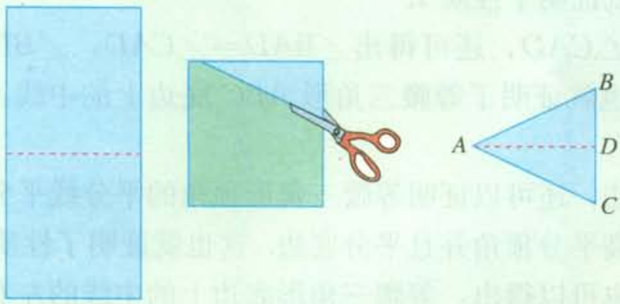


图 13.3-1

上述过程中，剪刀剪过的两条边是相等的，即$\triangle ABC$中$AB=AC$，所以$\triangle ABC$是等腰三角形.

探究

把剪出的等腰三角形ABC沿折痕对折，找出其中重合的线段和角.

由这些重合的线段和角，你能发现等腰三角形的性质吗？说一说你的猜想.

在一张白纸上任意画一个等腰三角形，把它剪下来，请你试着折一折. 你的猜想仍然成立吗？

我们可以发现等腰三角形的性质：

性质 1 **等腰三角形的两个底角相等**（简写成“等边对等角”）；

性质 2 **等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合**（简写成“三线合一”）.

由上面的操作过程获得启发，我们可以利用三角形的全等证明这些性质.

如图 13.3-2，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，作底边 BC 的中线 AD.

$\because \begin{cases} AB=AC, \\ BD=CD, \\ AD=AD, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle BAD \cong \triangle CAD$ (SSS).

$\therefore$ $\angle B=\angle C$.

这样，我们就证明了性质 1.

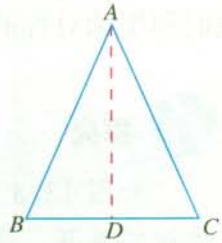


图 13.3-2

由$\triangle BAD \cong \triangle CAD$，还可得出$\angle BAD=\angle CAD$，$\angle BDA=\angle CDA$，从而 $AD \perp BC$. 这也就证明了等腰三角形 ABC 底边上的中线 AD 平分顶角$\angle A$并垂直于底边 BC.

用类似的方法，还可以证明等腰三角形顶角的平分线平分底边并且垂直于底边，底边上的高平分顶角并且平分底边. 这也就证明了性质 2.

从以上证明也可以得出，等腰三角形底边上的中线的左右两部分经翻折可以重合，等腰三角形是轴对称图形，底边上的中线（顶角平分线、底边上的高）所在直线就是它的对称轴.

例 1 如图 13.3-3，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 在 AC 上，且 $BD=BC=AD$. 求$\triangle ABC$ 各角的度数.

解：$\because$ $AB=AC$，$BD=BC=AD$，

$\therefore$ $\angle ABC=\angle C=\angle BDC$，

$\angle A=\angle ABD$（等边对等角）.

设$\angle A=x$，则

$$\angle BDC=\angle A+\angle ABD=2x,$$

从而

$$\angle ABC=\angle C=\angle BDC=2x.$$

于是在$\triangle ABC$ 中，有

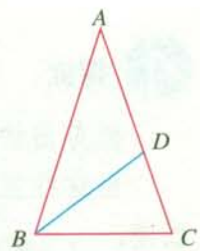


图 13.3-3

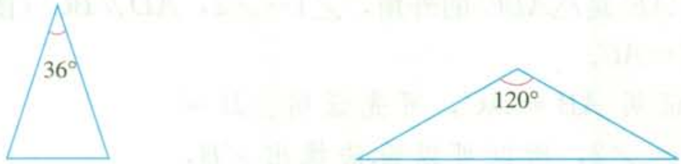
$\angle A+\angle ABC+\angle C=x+2x+2x=180°$.

解得 $x=36°$.

所以，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=36°$，$\angle ABC=\angle C=72°$.

练习

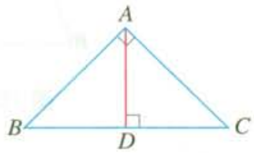
1. 如图，在下列等腰三角形中，分别求出它们的底角的度数.



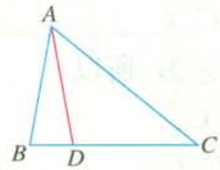
(1)　　　　(2)

（第 1 题）

2. 如图，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形（$AB=AC$，$\angle BAC=90°$），AD 是底边 BC 上的高. 标出 $\angle B$，$\angle C$，$\angle BAD$，$\angle DAC$ 的度数，并写出图中所有相等的线段.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AD=DC$，$\angle BAD=26°$. 求 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的度数.

思考

我们知道，如果一个三角形有两条边相等，那么它们所对的角相等. 反过来，如果一个三角形有两个角相等，那么它们所对的边有什么关系？

如图 13.3-4，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$.

作 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD.

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAD$ 中，

$$\begin{cases}\angle 1=\angle 2,\\ \angle B=\angle C,\\ AD=AD,\end{cases}$$

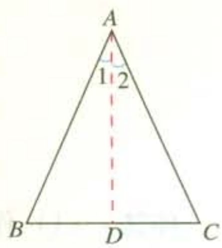


图 13.3-4

$\therefore$ $\triangle BAD\cong\triangle CAD$ (AAS).

$\therefore$ $AB=AC$.

由上面推证，我们可以得到等腰三角形的判定方法：

如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（简写成“等角对等边”）.

例 2 求证：如果三角形一个外角的平分线平行于三角形的一边，那么这个三角形是等腰三角形.

已知：$\angle CAE$ 是$\triangle ABC$ 的外角，$\angle 1=\angle 2$，$AD\parallel BC$（图 13.3-5）.

求证：$AB=AC$.

分析： 要证明 $AB=AC$，可先证明$\angle B=\angle C$. 因为$\angle 1=\angle 2$，所以可以设法找出$\angle B$，$\angle C$ 与$\angle 1$，$\angle 2$ 的关系.

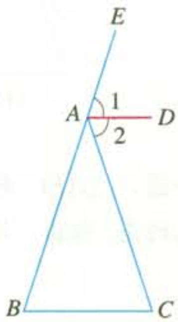


图 13.3-5

证明： ∵ $AD\parallel BC$，

∴ $\angle 1=\angle B$（________________），

$\angle 2=\angle C$（________________）.

而已知$\angle 1=\angle 2$，所以

$\angle B=\angle C$.

∴ $AB=AC$（__________）.

例 3 已知等腰三角形底边长为 a，底边上的高的长为 h，求作这个等腰三角形.

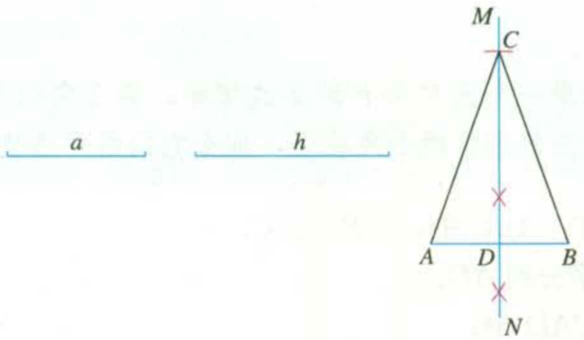


图 13.3-6

作法：（1）作线段 $AB=a$.

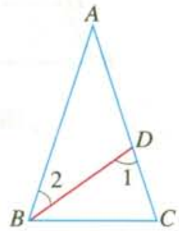
（2）作线段 AB 的垂直平分线 MN，与 AB 相交于点 D.

（3）在 MN 上取一点 C，使 $DC=h$.

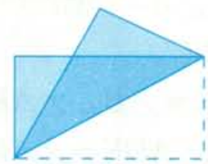
（4）连接 AC，BC，则$\triangle ABC$ 就是所求作的等腰三角形.

练习

1. 如图，$\angle A=36^\circ$，$\angle DBC=36^\circ$，$\angle C=72^\circ$. 分别计算$\angle 1$，$\angle 2$的度数，并说明图中有哪些等腰三角形.

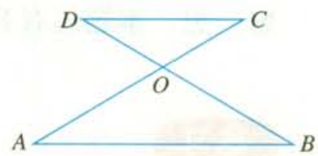


（第1题）



（第2题）

2. 如图，把一张长方形的纸沿对角线折叠，重合部分是一个等腰三角形吗？为什么？
3. 求证：如果三角形一条边上的中线等于这条边的一半，那么这个三角形是直角三角形.
4. 如图，AC和BD相交于点O，且$AB /\!/ DC$，$OA=OB$. 求证$OC=OD$.



（第4题）

13.3.2 等边三角形

我们知道，等边三角形（equilateral triangle）是三边都相等的特殊的等腰三角形.

思考

把等腰三角形的性质用于等边三角形，能得到什么结论？一个三角形的三个内角满足什么条件才是等边三角形？

由等腰三角形的性质和判定方法，可以得到：

等边三角形的三个内角都相等，并且每一个角都等于60°.

三个角都相等的三角形是等边三角形.

有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形.

请你自己证明这些结论.

例 4 如图 13.3-7，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$DE \parallel BC$，分别交 AB，AC 于点 D，E. 求证：$\triangle ADE$ 是等边三角形.

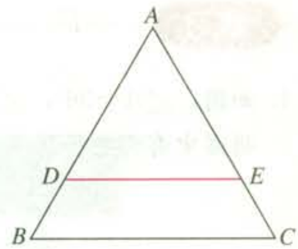


图 13.3-7

证明： $\because$ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore$ $\angle A=\angle B=\angle C$.

$\because$ $DE \parallel BC$，

$\therefore$ $\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$.

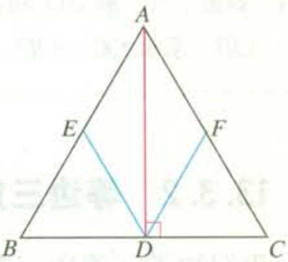
$\therefore$ $\angle A=\angle ADE=\angle AED$.

$\therefore$ $\triangle ADE$ 是等边三角形.

想一想，本题还有其他证法吗？

练习

1. 试画出等边三角形的三条对称轴. 你能发现什么？
2. 如图，等边三角形 ABC 中，AD 是 BC 上的高，$\angle BDE=\angle CDF=60^\circ$，图中有哪些与 BD 相等的线段？



（第 2 题）

探究

如图 13.3-8，将两个含 30° 角的三角尺摆放在一起. 你能借助这个图形，找到 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 BC 与斜边 AB 之间的数量关系吗？

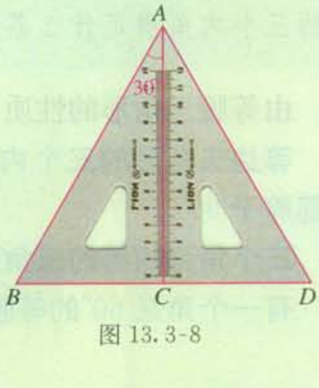


图 13.3-8

$\triangle ADC$ 是$\triangle ABC$ 的轴对称图形，因此 $AB=AD$，$\angle BAD=2\times30^\circ=60^\circ$，从而$\triangle ABD$ 是一个等边三角形. 再由 $AC\perp BD$，可得 $BC=CD=\frac{1}{2}AB$. 于是我们得到：

> 你还能用其他方法证明吗?

在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

例 5 图 13.3-9 是屋架设计图的一部分，点 D 是斜梁 AB 的中点，立柱 BC，DE 垂直于横梁 AC，$AB=7.4$ m，$\angle A=30^\circ$. 立柱 BC，DE 要多长.

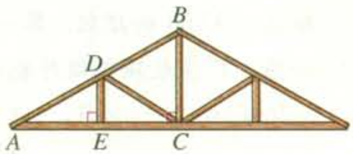


图 13.3-9

解：$\because$ $DE\perp AC$，$BC\perp AC$，$\angle A=30^\circ$，

$\therefore$ $BC=\frac{1}{2}AB$，$DE=\frac{1}{2}AD$.

$\therefore$ $BC=\frac{1}{2}\times7.4=3.7(\text{m})$.

又 $AD=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore$ $DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times3.7=1.85(\text{m})$.

答：立柱 BC 的长是 3.7 m，DE 的长是 1.85 m.

练习

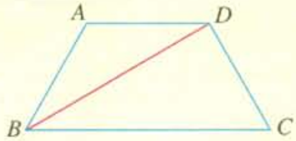
Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=2\angle A$，$\angle B$ 和$\angle A$ 各是多少度？边 AB 与 BC 之间有什么关系？

习题 13.3

复习巩固

1. (1) 等腰三角形的一个角是 110°，它的另外两个角是多少度？
   (2) 等腰三角形的一个角是 80°，它的另外两个角是多少度？

2. 如图，$AD /\!/ BC$，BD 平分 $\angle ABC$. 求证 $AB=AD$.

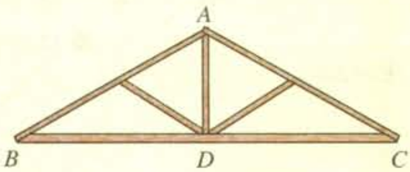


（第 2 题）

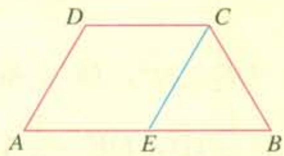
（第 3 题）

3. 如图，五角星的五个角都是顶角为 36° 的等腰三角形，为了画出五角星，还需要知道 $\angle AMB$ 的度数. 算一算 $\angle AMB$ 等于多少度.

4. 如图，厂房屋顶钢架外框是等腰三角形，其中 $AB=AC$，立柱 $AD \perp BC$，且顶角 $\angle BAC=120°$. $\angle B$，$\angle C$，$\angle BAD$，$\angle CAD$ 各是多少度？



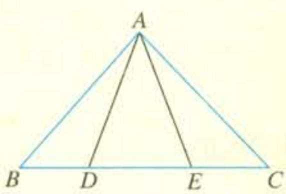
（第 4 题）



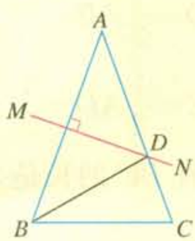
（第 5 题）

5. 如图，$\angle A=\angle B$，$CE /\!/ DA$，CE 交 AB 于点 E. 求证：$\triangle CEB$ 是等腰三角形.

6. 如图，点 D，E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，$AB=AC$，$AD=AE$. 求证 $BD=CE$.



（第 6 题）



（第 7 题）

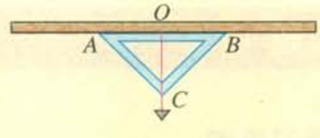
7. 如图，$AB=AC$，$\angle A=40°$，AB 的垂直平分线 MN 交 AC 于点 D. 求 $\angle DBC$ 的度数.

综合运用

8. 尺规作图：经过已知直线上的一点作这条直线的垂线.

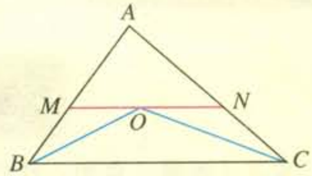
9. 某地地震过后，河沿村中学的同学用下面的方法检测教室的房梁是否水平：

在等腰直角三角尺斜边中点拴一条线绳，线绳的另一端挂一个铅锤，把这块三角尺的斜边贴在房梁上，结果线绳经过三角尺的直角顶点，同学们由此确信房梁是水平的. 他们的判断对吗？为什么？



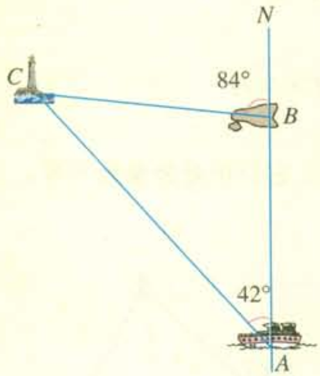
（第 9 题）

10. 如图，$\triangle ABC$ 中，BO 平分 $\angle ABC$，CO 平分 $\angle ACB$，MN 经过点 O，与 AB，AC 相交于点 M，N，且 $MN \parallel BC$. 求证：$\triangle AMN$ 的周长等于 $AB+AC$.

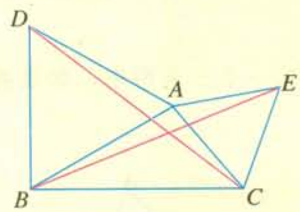


(第 10 题)

11. 上午 8 时，一条船从海岛 A 出发，以 15 n mile/h（海里/时，1 n mile=1 852 m）的速度向正北航行，10 时到达海岛 B 处. 从 A，B 望灯塔 C，测得 $\angle NAC=42°$，$\angle NBC=84°$. 求从海岛 B 到灯塔 C 的距离.



(第 11 题)



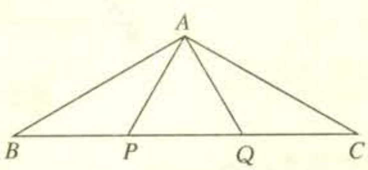
(第 12 题)

12. 如图，$\triangle ABD$，$\triangle AEC$ 都是等边三角形. 求证 $BE=DC$.

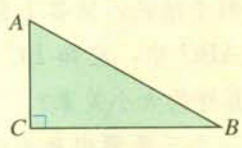
13. 等腰三角形两底角的平分线相等吗？两腰上的中线呢？两腰上的高呢？证明其中的一个结论.

拓广探索

14. 如图，P，Q 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的两点，并且 $BP=PQ=QC=AP=AQ$，求 $\angle BAC$ 的度数.



(第 14 题)



(第 15 题)

15. 如图，要把一块三角形的土地均匀分给甲、乙、丙三家农户. 如果 $\angle C=90°$，$\angle B=30°$，要使这三家农户所得土地的大小、形状都相同，请你试着分一分，并在图上画出来.

实验与探究

三角形中边与角之间的不等关系

学习了等腰三角形，我们知道：在一个三角形中，等边所对的角相等；反过来，等角所对的边也相等．那么，不相等的边（或角）所对的角（或边）之间的大小关系怎样呢？大边所对的角也大吗？

如图 1，在$\triangle ABC$中，如果$AB>AC$，那么我们可以将$\triangle ABC$折叠，使边AC落在AB上，点C落在AB上的D点，折线交BC于点E，则

$$\angle C=\angle ADE.$$

$\because$ $\angle ADE>\angle B$(想一想为什么)，

$\therefore$ $\angle C>\angle B$.

这说明，在一个三角形中，如果两条边不等，那么它们所对的角也不等，大边所对的角较大．

图 1

从上面的过程可以看出，利用轴对称的性质，可以把研究边与角之间的不等问题，转化为较大量的一部分与较小量相等的问题，这是几何中研究不等问题时常用的方法．

类似地，应用这种方法，你能说明“在一个三角形中，如果两个角不等，那么它们所对的边也不等，大角所对的边较大”吗（图 2)?

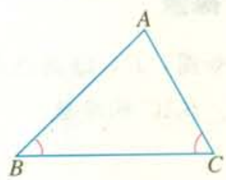


图 2

利用上面两个结论，回答下面的问题：

(1) 在$\triangle ABC$中，已知$BC>AB>AC$，那么$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$有怎样的大小关系？

(2) 如果一个三角形中最大的边所对的角是锐角，这个三角形一定是锐角三角形吗？为什么？

(3) 直角三角形的哪一条边最长？为什么？

13.4 课题学习 最短路径问题

前面我们研究过一些关于“两点的所有连线中，线段最短”“连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短”等的问题，我们称它们为最短路径问题. 同学们通过讨论下面两个问题，可以体会如何运用所学知识选择最短路径.

问题 1 如图 13.4-1，牧马人从 A 地出发，到一条笔直的河边 l 饮马，然后到 B 地. 牧马人到河边的什么地方饮马，可使所走的路径最短?

图 13.4-1

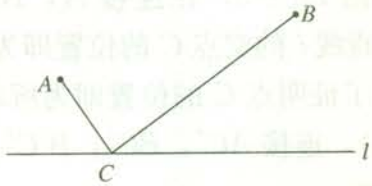


图 13.4-2

如果把河边 l 近似地看成一条直线（图 13.3-2），C 为直线 l 上的一个动点，那么，上面的问题可以转化为：当点 C 在 l 的什么位置时，AC 与 CB 的和最小. 由这个问题，我们可以联想到下面的问题：

如图 13.4-3，点 A，B 分别是直线 l 异侧的两个点，如何在 l 上找到一个点，使得这个点到点 A、点 B 的距离的和最短?

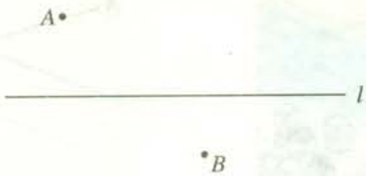


图 13.4-3

利用已经学过的知识，可以很容易地解决上面的问题，即：连接 AB，与直线 l 相交于一点，根据“两点之间，线段最短”，可知这个交点即为所求.

现在，要解决的问题是：点 A，B 分别是直线 l 同侧的两个点，如何在 l 上找到一个点，使得这个点到点 A、点 B 的距离的和最短?

如果我们能把点 B 移到 l 的另一侧 B' 处，同时对直线 l 上的任一点 C，都保持 CB 与 CB' 的长度相等，就可以把问题转化为“图 13.4-3”的情况，从而使新问题得到解决. 你能利用轴对称的有关知识，找到符合条件的点 B' 吗?

如图 13.4-4，作出点 B 关于 l 的对称点 B'，利用轴对称的性质，可以得到 $CB'=CB$. 这样，问题就转化为：当点 C 在 l 的什么位置时，AC 与 CB' 的和最小?

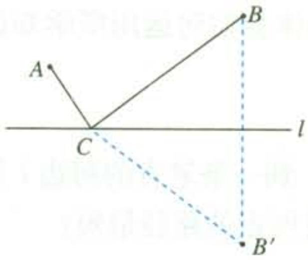


图 13.4-4

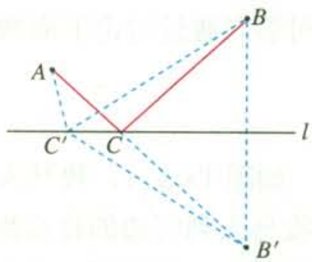


图 13.4-5

如图 13.4-5，在连接 A，B' 两点的线中，线段 AB' 最短. 因此，线段 AB' 与直线 l 的交点 C 的位置即为所求.

为了证明点 C 的位置即为所求，我们不妨在直线上另外任取一点 C'（图 13.4-5），连接 AC'，BC'，$B'C'$，证明 $AC+CB<AC'+C'B$. 你能完成这个证明吗?

问题 2 （造桥选址问题）如图 13.4-6，A 和 B 两地在一条河的两岸，现要在河上造一座桥 MN. 桥造在何处可使从 A 到 B 的路径 $AMNB$ 最短?（假定河的两岸是平行的直线，桥要与河垂直.）

图 13.4-6

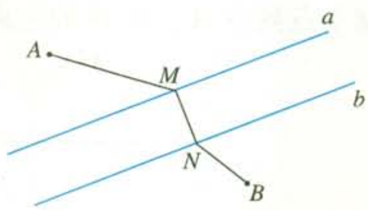


图 13.4-7

我们可以把河的两岸看成两条平行线 a 和 b（图 13.4-7），N 为直线 b 上的一个动点，MN 垂直于直线 b，交直线 a 于点 M，这样，上面的问题可以转化为下面的问题：当点 N 在直线 b 的什么位置时，$AM+MN+NB$ 最小?

由于河岸宽度是固定的，因此当 $AM+NB$ 最小时，$AM+MN+NB$ 最小. 这样，问题就进一步转化为：当点 N 在直线 b 的什么位置时，$AM+NB$ 最小？能否通过图形的变化（轴对称、平移等），把“图 13.4-7”的情况转化为“图 13.4-3”的情况？

如图 13.4-8，将 AM 沿与河岸垂直的方向平移，点 M 移动到点 N，点 A 移动到点 A'，则 $AA'=MN$，$AM+NB=A'N+NB$. 这样，问题就转化为：当点 N 在直线 b 的什么位置时，$A'N+NB$ 最小？

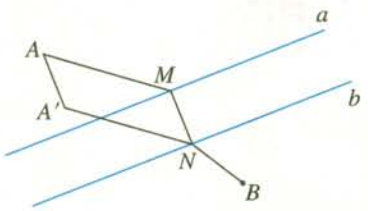


图 13.4-8

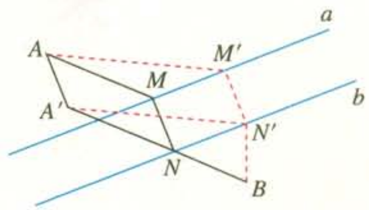


图 13.4-9

如图 13.4-9，在连接 A'，B 两点的线中，线段 $A'B$ 最短. 因此，线段 $A'B$ 与直线 b 的交点 N 的位置即为所求，即在点 N 处造桥 MN，所得路径 $AMNB$ 是最短的.

为了证明点 N 的位置即为所求，我们不妨在直线 b 上另外任意取一点 N'，过点 N' 作 $N'M'\perp a$，垂足为 M'，连接 AM'，$A'N'$，$N'B$，证明 $AM+MN+NB<AM'+M'N'+N'B$. 你能完成这个证明吗？

归纳

在解决最短路径问题时，我们通常利用轴对称、平移等变化把已知问题转化为容易解决的问题，从而作出最短路径的选择.

数学活动

活动1 美术字与轴对称

在美术字中，有些汉字、英文字母和阿拉伯数字是轴对称的. 如图 1，画出这些汉字、英文字母和数字的对称轴，或者把它们补齐.

图 1

你能再写出几个轴对称的美术字吗？画出它们的对称轴，并与同学交流.

活动2 利用轴对称设计图案

利用轴对称，我们可以由一个基本图形得到与它成轴对称的另一个图形，重复这个过程，可以得到美丽的图案（图 2，图 3）.

图 2

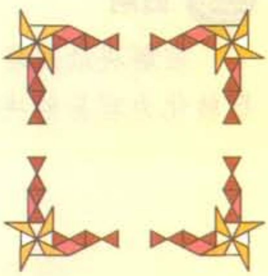


图 3

自己动手在一张半透明的纸上画一个图形，将这张纸折叠，描图，再打开纸，看看你得到了什么？改变折痕的位置并重复几次，你又得到了什么？与同学交流一下.

有时，将平移和轴对称结合起来，可以设计出更丰富的图案，许多镶边和背景的图案就是这样设计的（图 4）.

图 4

展开你的想象，从一个或几个图形出发，利用轴对称或与平移进行组合，设计一些图案，并与同学交流.

活动3 等腰三角形中相等的线段

猜想一下，等腰三角形底边中点到两腰的距离相等吗？如图 5，你可以将等腰三角形 ABC 沿对称轴 AD 折叠，观察 DE 与 DF 的关系，并证明你的结论.

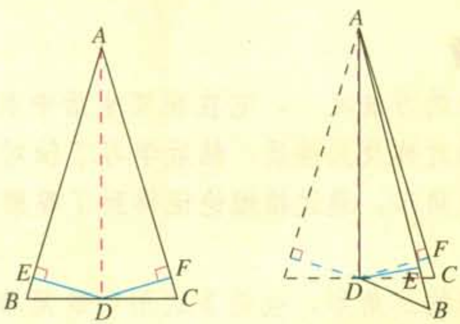


图 5

如果 DE，DF 分别是 AB，AC 上的中线或 $\angle ADB$，$\angle ADC$ 的平分线，它们还相等吗？由等腰三角形是轴对称图形，利用类似的方法，还可以得到等腰三角形中哪些线段相等？证明其中的一些结论.

小　结

一、本章知识结构图

二、回顾与思考

轴对称是图形变化的方法之一，它在现实生活中有广泛的应用．本章首先学习了轴对称图形、轴对称及其性质，然后学习了轴对称图形的画法，并利用轴对称知识研究等腰三角形，通过推理论证得到了等腰三角形及等边三角形的性质和判定方法．

等腰三角形是特殊的三角形，也是多边形中最简单的轴对称图形．利用它的轴对称性，我们不仅发现了等腰三角形的一些性质，同时还从中找到了证明这些性质的思路．借助图形的变化研究图形的性质，是几何中常用的方法．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1．在现实世界中存在着大量的轴对称现象，你能举出一些例子吗？成轴对称的图形有什么特点？

2．在我们学过的几何图形中，有哪些是轴对称图形？它们的对称轴与这个图形有怎样的位置关系？

3．对于成轴对称的两个图形，对应点所连线段与对称轴有什么关系？如何作出一个图形的轴对称图形？

4．在平面直角坐标系中，如果两个图形关于 x 轴或 y 轴对称，那么对称点的坐标有什么关系？请举例说明．

5．利用等腰三角形的轴对称性，我们发现了它的哪些性质？你能通过全等三角形加以证明吗？等边三角形作为特殊的等腰三角形，有哪些特殊性质？

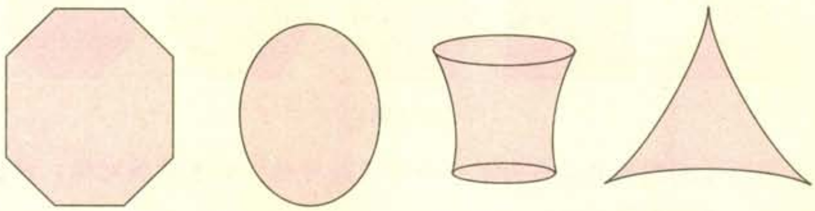
复习题 13

复习巩固

1. 下列图形是轴对称图形吗？如果是，找出它们的对称轴.

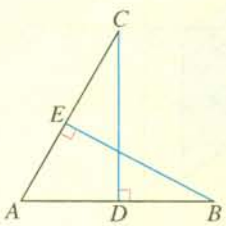
（第 1 题）

2. 画出下列轴对称图形的对称轴.

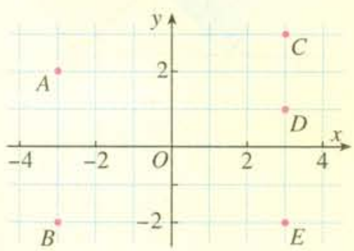


（第 2 题）

3. 如图，D，E 分别是 AB，AC 的中点，$CD\perp AB$，垂足为 D，$BE\perp AC$，垂足为 E. 求证 $AC=AB$.



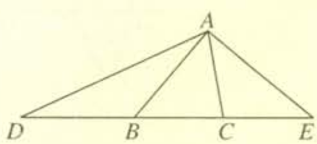
（第 3 题）



（第 4 题）

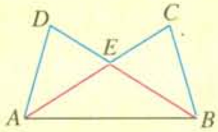
4. 如图所示的点 A，B，C，D，E 中，哪两个点关于 x 轴对称？哪两个点关于 y 轴对称？点 C 和点 E 关于 x 轴对称吗？为什么？

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=50^\circ$，$\angle ACB=80^\circ$，延长 CB 至 D，使 $DB=BA$，延长 BC 至 E，使 $CE=CA$，连接 AD，AE. 求 $\angle D$，$\angle E$，$\angle DAE$ 的度数.

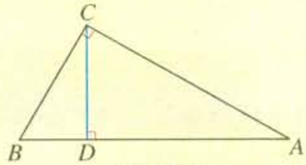


（第 5 题）

6. 如图，$AD=BC$，$AC=BD$，求证：$\triangle EAB$ 是等腰三角形.



（第 6 题）

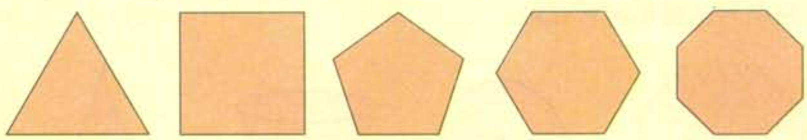


（第 7 题）

7. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 是高，$\angle A=30°$. 求证 $BD=\frac{1}{4}AB$.

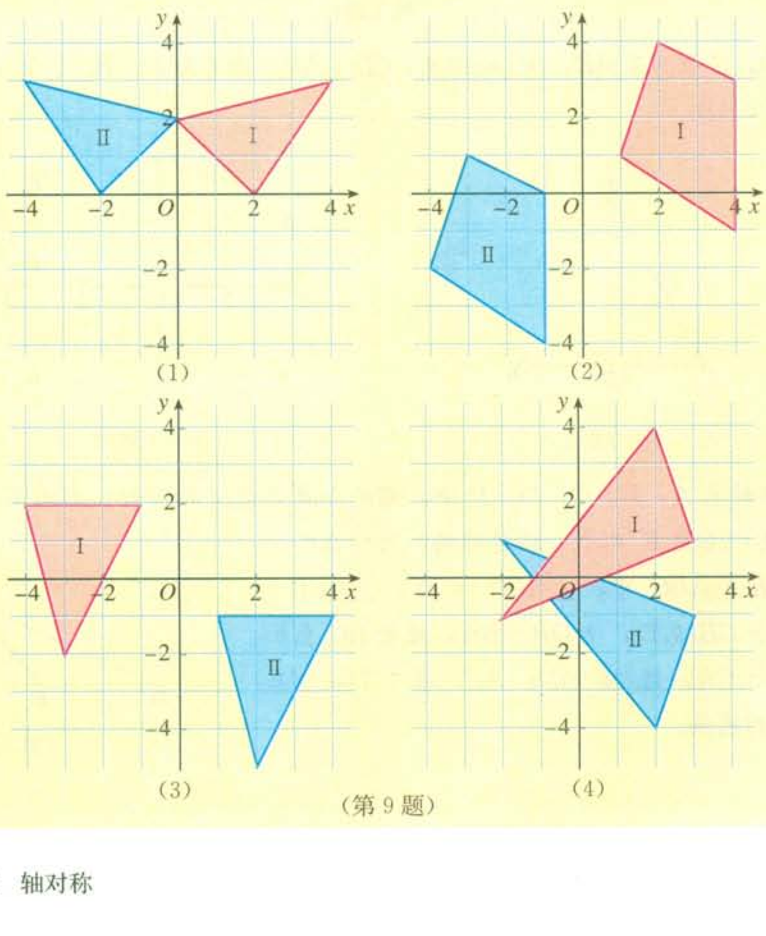
综合运用

8. 试确定如图所示的正多边形的对称轴的条数. 一般地，一个正 n 边形有多少条对称轴？



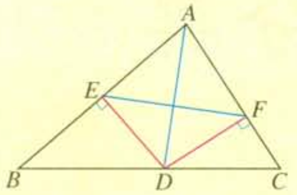
（第 8 题）

9. 如图，从图形Ⅰ到图形Ⅱ是进行了平移还是轴对称？如果是轴对称，找出对称轴；如果是平移，是怎样的平移？

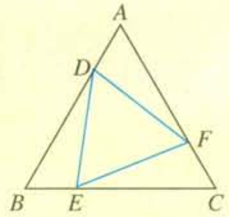


（第 9 题）

10. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，DE，DF 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的高. 求证：AD 垂直平分 EF.



（第 10 题）



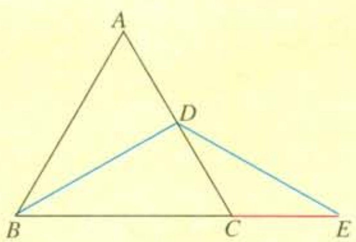
（第 11 题）

11. 如图，在等边三角形 ABC 的三边上，分别取点 D，E，F，使 $AD=BE=CF$. 求证：$\triangle DEF$ 是等边三角形.

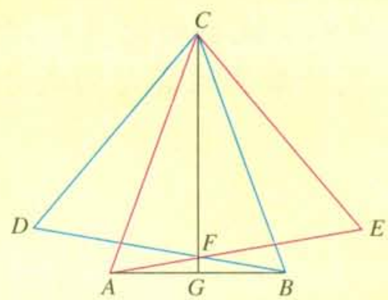
拓广探索

12. 在纸上画五个点，使任意三个点组成的三角形都是等腰三角形. 这五个点应该怎样画？

13. 如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，BD 是中线，延长 BC 至 E，使 $CE=CD$. 求证 $DB=DE$.



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，$\triangle BDC$ 和 $\triangle ACE$ 分别为等边三角形，AE 与 BD 相交于点 F，连接 CF 并延长，交 AB 于点 G. 求证：G 为 AB 的中点.

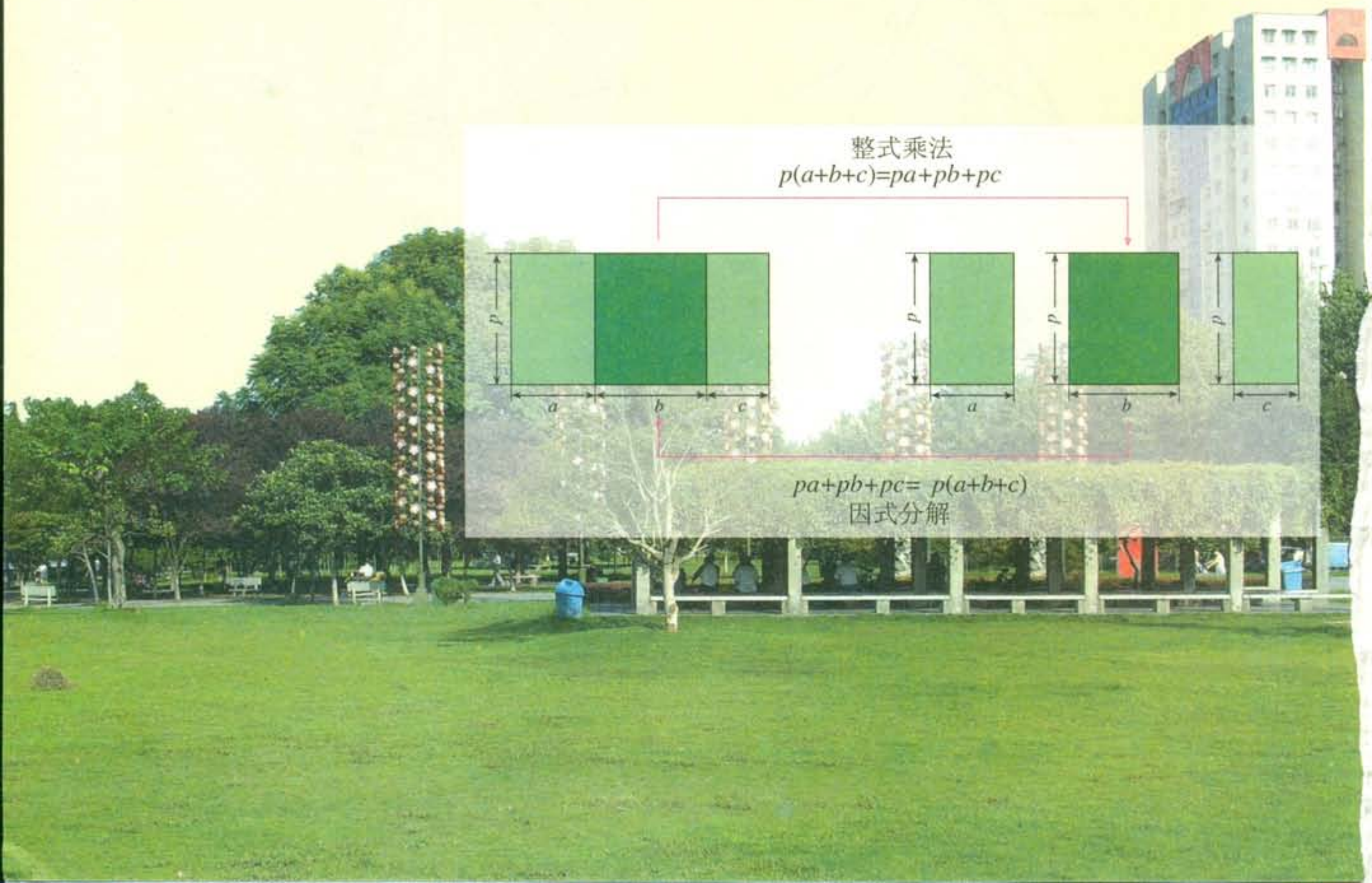
15. 如图，牧马人从 A 地出发，先到草地边某一处牧马，再到河边饮马，然后回到 B 处，请画出最短路径.

（第 15 题）

第十四章　整式的乘法与因式分解

为了扩大绿地面积，要把街心花园的一块长 p m，宽 b m 的长方形绿地，向两边分别加宽 a m 和 c m，你能用几种方法表示扩大后的绿地面积？不同的表示方法之间有什么关系？如何从数学的角度认识不同的表示方法之间的关系？

回答上面的问题，要用到整式的乘法与因式分解的知识．本章我们将在七年级学习整式的加减法的基础上，继续学习整式的乘法与因式分解，它们是代数运算以及解决许多数学问题的重要基础．我们可以类比数的运算，以运算律为基础，得到关于整式的乘法运算与因式分解的启发．



14.1 整式的乘法

14.1.1 同底数幂的乘法

问题 1　一种电子计算机每秒可进行 1 千万亿（10^{15}）次运算，它工作 10^3 s 可进行多少次运算？

在 2010 年全球超级计算机排行榜中，中国首台千万亿次超级计算机系统“天河一号”雄居第一，其实测运算速度可以达到每秒 2 570 万亿次.

它工作 10^3 s 可进行运算的次数为 $10^{15}\times10^3$. 怎样计算 $10^{15}\times10^3$ 呢？

根据乘方的意义可知

$$\begin{aligned}10^{15}\times10^3&=(\underbrace{10\times\cdots\times10}_{15\text{个}10})\times(10\times10\times10)\\&=\underbrace{10\times10\times\cdots\times10}_{18\text{个}10}\\&=10^{18}.\end{aligned}$$

探究

根据乘方的意义填空，观察计算结果，你能发现什么规律？

(1) $2^5\times2^2=2^{(\quad)}$；

(2) $a^3\cdot a^2=a^{(\quad)}$；

(3) $5^m\times5^n=5^{(\quad)}$.

一般地，对于任意底数 a 与任意正整数 m，n，

$$\begin{aligned}a^m\cdot a^n&=(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{个}a})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a})\\&=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{(m+n)\text{个}a}=a^{m+n}.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\boxed{a^m\cdot a^n=a^{m+n}\ (m,\ n\text{都是正整数}).}$$

即**同底数幂相乘，底数不变，指数相加.**

例 1 计算：

(1) $x^2 \cdot x^5$；　　(2) $a \cdot a^6$；

(3) $(-2)\times(-2)^4\times(-2)^3$；　　(4) $x^m \cdot x^{3m+1}$.

解：(1) $x^2 \cdot x^5 = x^{2+5} = x^7$；

(2) $a \cdot a^6 = a^{1+6} = a^7$；

$a = a^1$.

(3) $(-2)\times(-2)^4\times(-2)^3 = (-2)^{1+4+3} = (-2)^8 = 256$；

(4) $x^m \cdot x^{3m+1} = x^{m+3m+1} = x^{4m+1}$.

练习

计算：

(1) $b^5 \cdot b$；　　(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3$；

(3) $a^2 \cdot a^6$；　　(4) $y^{2n} \cdot y^{n+1}$.

14.1.2 幂的乘方

探究

根据乘方的意义及同底数幂的乘法填空，观察计算结果，你能发现什么规律？

(1) $(3^2)^3 = 3^2\times3^2\times3^2 = 3^{(\quad)}$；

(2) $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{(\quad)}$；

(3) $(a^m)^3 = a^m \cdot a^m \cdot a^m = a^{(\quad)}$ (m 是正整数).

一般地，对于任意底数 a 与任意正整数 m，n，

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}^{n个a^m} = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n个m}} = a^{mn}.$$

因此，我们有

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}\ (m,\ n 都是正整数).}$$

即**幂的乘方，底数不变，指数相乘.**

例 2 计算：

(1) $(10^3)^5$；　　(2) $(a^4)^4$；　　(3) $(a^m)^2$；　　(4) $-(x^4)^3$.

解：(1) $(10^3)^5=10^{3\times5}=10^{15}$；

(2) $(a^4)^4=a^{4\times4}=a^{16}$；

(3) $(a^m)^2=a^{m\times2}=a^{2m}$；

(4) $-(x^4)^3=-x^{4\times3}=-x^{12}$.

练习

计算：

(1) $(10^3)^3$；　　(2) $(x^3)^2$；

(3) $-(x^m)^5$；　　(4) $(a^2)^3\cdot a^5$.

14.1.3 积的乘方

探究

填空，运算过程用到哪些运算律？运算结果有什么规律？

(1) $(ab)^2=(ab)\cdot(ab)=(a\cdot a)\cdot(b\cdot b)=a^{(\ )}b^{(\ )}$；

(2) $(ab)^3=$______________$=$________________$=a^{(\ )}b^{(\ )}$.

一般地，对于任意底数 a，b 与任意正整数 n，

$$(ab)^n=\overbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}^{n\text{个}ab}$$

$$=\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n\text{个}a}\cdot\overbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}^{n\text{个}b}=a^nb^n.$$

因此，我们有

$$\boxed{(ab)^n=a^nb^n\ (n\text{ 为正整数}).}$$

即**积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.**

例 3 计算：

(1) $(2a)^3$；　　(2) $(-5b)^3$；

(3) $(xy^2)^2$；　　(4) $(-2x^3)^4$.

解：(1) $(2a)^3=2^3\cdot a^3=8a^3$；

(2) $(-5b)^3=(-5)^3\cdot b^3=-125b^3$；

(3) $(xy^2)^2=x^2\cdot(y^2)^2=x^2y^4$；

(4) $(-2x^3)^4=(-2)^4\cdot(x^3)^4=16x^{12}$.

练习

计算：

(1) $(ab)^4$；　　(2) $\left(-\frac{1}{2}xy\right)^3$；

(3) $(-3\times10^2)^3$；　　(4) $(2ab^2)^3$.

14.1.4　整式的乘法

问题 2　光的速度约是 3×10^5 km/s，太阳光照射到地球上需要的时间约是 5×10^2 s，你知道地球与太阳的距离约是多少吗？

地球与太阳的距离约是$(3\times10^5)\times(5\times10^2)$km.

地球与太阳的距离约是

$15\times10^7=1.5\times10^8$(km).

思考

(1) 怎样计算$(3\times10^5)\times(5\times10^2)$？计算过程中用到哪些运算律及运算性质？

(2) 如果将上式中的数字改为字母，比如$ac^5\cdot bc^2$，怎样计算这个式子？

$ac^5\cdot bc^2$ 是单项式 ac^5 与 bc^2 相乘，我们可以利用乘法交换律、结合律及同底数幂的运算性质来计算：

$$ac^5\cdot bc^2=(a\cdot b)\cdot(c^5\cdot c^2)=abc^{5+2}=abc^7.$$

一般地，**单项式与单项式相乘，把它们的系数、同底数幂分别相乘，对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式.**

例 4　计算：

(1) $(-5a^2b)(-3a)$；　　(2) $(2x)^3(-5xy^2)$.

解： (1)　$(-5a^2b)(-3a)$

$$=[(-5)\times(-3)](a^2\cdot a)\cdot b$$
$$=15a^3b;$$

(2) $(2x)^3(-5xy^2)$

$$=8x^3\cdot(-5xy^2)$$
$$=[8\times(-5)](x^3\cdot x)\cdot y^2$$
$$=-40x^4y^2.$$

练习

1. 计算：
   (1) $3x^2\cdot 5x^3$；　　(2) $4y\cdot(-2xy^2)$；
   (3) $(-3x)^2\cdot 4x^2$；　　(4) $(-2a)^3(-3a)^2$.
2. 下面的计算对不对？如果不对，应当怎样改正？
   (1) $3a^3\cdot 2a^2=6a^6$；　　(2) $2x^2\cdot 3x^2=6x^4$；
   (3) $3x^2\cdot 4x^2=12x^2$；　　(4) $5y^3\cdot 3y^5=15y^{15}$.

下面我们来看本章引言中提出的问题.

为了求扩大后的绿地面积，一种方法是先求扩大后的绿地的边长，再求面积，即为

$$p(a+b+c).\qquad ①$$

我们也可以先分别求原来绿地和新增绿地的面积，再求它们的和，即为

$$pa+pb+pc.\qquad ②$$

由于①②表示同一个数量，所以

$$p(a+b+c)=pa+pb+pc.$$

上面的等式提供了单项式与多项式相乘的方法.

你能根据分配律得到这个等式吗？

这个结果也可以由图 14.1-1 看出.

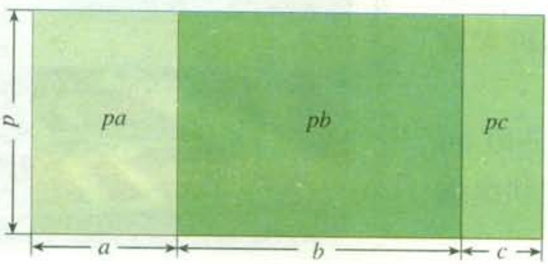


图 14.1-1

一般地，**单项式与多项式相乘，就是用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加.**

例 5 计算：

(1) $(-4x^2)(3x+1)$；

(2) $\left(\frac{2}{3}ab^2-2ab\right)\cdot\frac{1}{2}ab$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&(-4x^2)(3x+1)\\=&(-4x^2)(3x)+(-4x^2)\times 1\\=&(-4\times 3)(x^2\cdot x)+(-4x^2)\\=&-12x^3-4x^2;\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{3}ab^2-2ab\right)\cdot\frac{1}{2}ab\\=&\frac{2}{3}ab^2\cdot\frac{1}{2}ab+(-2ab)\cdot\frac{1}{2}ab\\=&\frac{1}{3}a^2b^3-a^2b^2.\end{aligned}$$

把单项式与多项式相乘的问题转化为单项式与单项式相乘的问题.

练习

1. 计算：

(1) $3a(5a-2b)$； (2) $(x-3y)(-6x)$.

2. 化简 $x(x-1)+2x(x+1)-3x(2x-5)$.

问题 3 如图 14.1-2，为了扩大街心花园的绿地面积，把一块原长 a m、宽 p m 的长方形绿地，加长了 b m，加宽了 q m. 你能用几种方法求出扩大后的绿地面积？

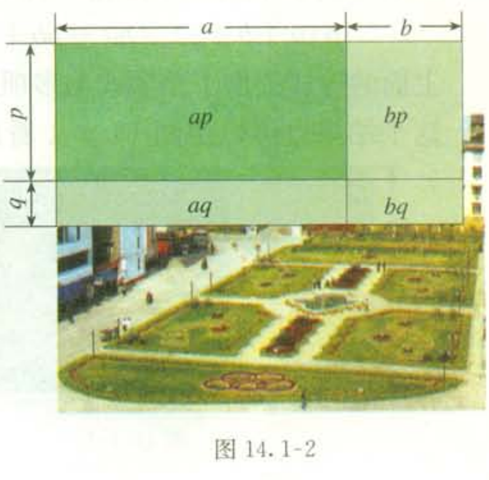


图 14.1-2

扩大后的绿地可以看成长为$(a+b)$ m，宽为$(p+q)$m 的长方形，所以这块绿地的面积（单位：m^2）为

$$(a+b)(p+q).$$

扩大后的绿地还可以看成由四个小长方形组成，所以这块绿地的面积（单位：m^2）为

$$ap+aq+bp+bq.$$

因此 $(a+b)(p+q)=ap+aq+bp+bq.$

上面的等式提供了多项式与多项式相乘的方法.

计算$(a+b)(p+q)$，可以先把其中的一个多项式，如 $p+q$，看成一个整体，运用单项式与多项式相乘的法则，得

> 把多项式相乘的问题转化为单项式与多项式相乘的问题.

$$(a+b)(p+q)=a(p+q)+b(p+q),$$

再利用单项式与多项式相乘的法则，得

$$a(p+q)+b(p+q)=ap+aq+bp+bq.$$

总体上看，$(a+b)(p+q)$的结果可以看作由$a+b$的每一项乘 $p+q$ 的每一项，再把所得的积相加而得到的，即

$$(a+b)(p+q)=ap+aq+bp+bq.$$

一般地，**多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.**

例 6 计算：

(1) $(3x+1)(x+2)$；　　(2) $(x-8y)(x-y)$；

(3) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

解：(1)

$$\begin{aligned}&(3x+1)(x+2)\\=&(3x)\cdot x+(3x)\times 2+1\cdot x+1\times 2\\=&3x^2+6x+x+2\\=&3x^2+7x+2;\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&(x-8y)(x-y)\\=&x^2-xy-8xy+8y^2\\=&x^2-9xy+8y^2;\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&(x+y)(x^2-xy+y^2)\\=&x^3-x^2y+xy^2+x^2y-xy^2+y^3\\=&x^3+y^3.\end{aligned}$$

练习

1. 计算：

(1) $(2x+1)(x+3)$；　(2) $(m+2n)(3n-m)$；

(3) $(a-1)^2$；　(4) $(a+3b)(a-3b)$；

(5) $(2x^2-1)(x-4)$；　(6) $(x^2+2x+3)(2x-5)$.

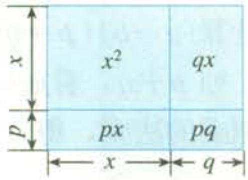
2. 计算：

(1) $(x+2)(x+3)$；　(2) $(x-4)(x+1)$；

(3) $(y+4)(y-2)$；　(4) $(y-5)(y-3)$.

由上面计算的结果找规律，观察右图，填空：

$(x+p)(x+q)=(\quad)^2+(\quad)x+(\quad)$.



（第 2 题）

至此，我们已经学习了整式的加法、减法、乘法运算. 在整式运算中，有时还会遇到两个整式相除的情况. 由于除法是乘法的逆运算，因此我们可以利用整式的乘法来讨论整式的除法.

首先来看同底数幂相除的情况.

我们来计算 $a^m \div a^n$（$a\neq 0$，m，n 都是正整数，并且 $m>n$）.

根据除法是乘法的逆运算，计算被除数除以除数所得的商，就是求一个数，使它与除数的积等于被除数. 由于式中的字母表示数，所以可以用类似的方法来计算 $a^m \div a^n$.

$\because\quad a^{m-n}\cdot a^n = a^{(m-n)+n}=a^m$，

$\therefore\quad a^m \div a^n = a^{m-n}$.

一般地，我们有

$$\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}\ (a\neq 0,\ m,\ n\text{ 都是正整数，并且 } m>n).}$$

即同底数幂相除，底数不变，指数相减.

同底数幂相除，如果被除式的指数等于除式的指数，例如 $a^m \div a^m$，根据除法的意义可知所得的商为 1. 另一方面，如果依照同底数幂的除法来计算，又有 $a^m \div a^m = a^{m-m}=a^0$.

于是规定

$$\boxed{a^0=1\ (a\neq 0).}$$

这就是说，任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1.

例 7 计算：

(1) $x^8 \div x^2$；　　(2) $(ab)^5 \div (ab)^2$.

解：(1) $x^8 \div x^2 = x^{8-2} = x^6$；

(2) $(ab)^5 \div (ab)^2 = (ab)^{5-2} = (ab)^3 = a^3b^3$.

对于单项式除以单项式，例如，计算 $12a^3b^2x^3 \div 3ab^2$，就是要求一个单项式，使它与 $3ab^2$ 的乘积等于 $12a^3b^2x^3$.

$\because$ $4a^2x^3 \cdot 3ab^2 = 12a^3b^2x^3$，

$\therefore$ $12a^3b^2x^3 \div 3ab^2 = 4a^2x^3$.

> $12a^3b^2x^3 \div 3ab^2$ 是 $(12a^3b^2x^3) \div (3ab^2)$ 的意思.

上面的商式 $4a^2x^3$ 的系数 $4=12\div3$，a 的指数 $2=3-1$，b 的指数 $0=2-2$，而 $b^0=1$，x 的指数 $3=3-0$.

一般地，**单项式相除，把系数与同底数幂分别相除作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式.**

对于多项式除以单项式，例如，计算 $(am+bm)\div m$，就是要求一个多项式，使它与 m 的积是 $am+bm$.

$\because$ $(a+b)m = am+bm$，

$\therefore$ $(am+bm)\div m = a+b$.

又 $am\div m + bm\div m = a+b$，

$\therefore$ $(am+bm)\div m = am\div m + bm\div m$.

> 把多项式除以单项式问题转化为单项式除以单项式问题来解决.

一般地，**多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加.**

例 8 计算：

(1) $28x^4y^2 \div 7x^3y$；　　(2) $-5a^5b^3c \div 15a^4b$；

(3) $(12a^3-6a^2+3a)\div 3a$.

解：(1) $28x^4y^2 \div 7x^3y$

$= (28\div7)\cdot x^{4-3}\cdot y^{2-1}$

$= 4xy$；

(2) $-5a^5b^3c\div15a^4b$

$=[(-5)\div15]a^{5-4}b^{3-1}c$

$=-\frac{1}{3}ab^2c$;

(3) $(12a^3-6a^2+3a)\div3a$

$=12a^3\div3a-6a^2\div3a+3a\div3a$

$=4a^2-2a+1$.

练习

1. 计算：

(1) $x^7\div x^5$；　　(2) $m^8\div m^8$；

(3) $(-a)^{10}\div(-a)^7$；　　(4) $(xy)^5\div(xy)^3$.

2. 计算：

(1) $10ab^3\div(-5ab)$；　　(2) $-8a^2b^3\div6ab^2$；

(3) $-21x^2y^4\div(-3x^2y^3)$；　　(4) $(6\times10^8)\div(3\times10^5)$.

3. 计算：

(1) $(6ab+5a)\div a$；　　(2) $(15x^2y-10xy^2)\div5xy$.

习题 14.1

复习巩固

1. 下面的计算对不对？如果不对，应当怎样改正？

(1) $b^3\cdot b^3=2b^3$；　　(2) $x^4\cdot x^4=x^{16}$；　　(3) $(a^5)^2=a^7$；

(4) $(a^3)^2\cdot a^4=a^9$；　　(5) $(ab^2)^3=ab^6$；　　(6) $(-2a)^2=-4a^2$.

2. 计算：

(1) $x\cdot x^3+x^2\cdot x^2$；　　(2) $(-pq)^3$；

(3) $-(-2a^2b)^4$；　　(4) $a^3\cdot a^4\cdot a+(a^2)^4+(-2a^4)^2$.

3. 计算：

(1) $6x^2\cdot3xy$；　　(2) $2ab^2\cdot(-3ab)$；

(3) $4x^2y\cdot(-xy^2)^3$；　　(4) $(1.3\times10^5)(3.8\times10^3)$.

4. 计算：

(1) $(4a-b^2)(-2b)$；

(2) $2x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$；

(3) $5ab(2a-b+0.2)$；

(4) $\left(2a^2-\frac{2}{3}a-\frac{4}{9}\right)(-9a)$.

5. 计算：

(1) $(x-6)(x-3)$；

(2) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$；

(3) $(3x+2)(x+2)$；

(4) $(4y-1)(5-y)$；

(5) $(x-2)(x^2+4)$；

(6) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

6. 计算：

(1) $(a^3)^2\div(a^2)^3$；

(2) $(ab^2)^3\div(-ab)^2$；

(3) $24x^2y\div(-6xy)$；

(4) $7m(4m^2p)^2\div7m^2$；

(5) $(6x^4-8x^3)\div(-2x^2)$；

(6) $\left(0.25a^2b-\frac{1}{2}a^3b^2-\frac{1}{6}a^4b^3\right)\div(-0.5a^2b)$.

综合运用

7. 求值：$x^2(x-1)-x(x^2+x-1)$，其中 $x=\frac{1}{2}$.

8. 计算：

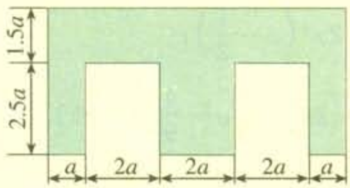
(1) $(x-3)(x-3)-6(x^2+x-1)$；

(2) $(2x+1)^2-(x+3)^2-(x-1)^2+1$.

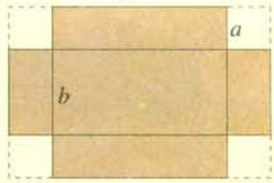
9. 信息技术的存储设备常用 B，K，M，G 等作为存储量的单位. 例如，我们常说某计算机的硬盘容量是320 G，某移动硬盘的容量是 80 G，某个文件大小是 156 K 等，其中 1 G=2^{10} M，1 M=2^{10} K，1 K=2^{10} B（字节）. 对于一个存储量为 8 G 的闪存盘，其容量有多少 B（字节）?

10. 卫星绕地球运动的速度（即第一宇宙速度）是 7.9×10^3 m/s，求卫星绕地球运行 2×10^2 s 走过的路程.

11. 计算图中阴影所示绿地的面积（长度单位：m）.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，有一张长方形纸板，在它的四角各切去一个同样的正方形，然后将四周突出部分折起，制成一个高为 a 的长方体形状的无盖纸盒. 如果纸盒的容积为 $4a^2b$，底面长方形的一边长为 b ($b<4a$)，求长方形纸板的长和宽.

拓广探索

13. 已知 $2^m=a$，$32^n=b$，m，n 为正整数，求 2^{3m+10n}.

14. 解方程与不等式：

(1) $(x-3)(x-2)+18=(x+9)(x+1)$；

(2) $(3x+4)(3x-4)<9(x-2)(x+3)$.

15. 确定下列各式中 m 的值：

(1) $(x+4)(x+9)=x^2+mx+36$；

(2) $(x-2)(x-18)=x^2+mx+36$；

(3) $(x+3)(x+p)=x^2+mx+36$；

(4) $(x-6)(x-p)=x^2+mx+36$；

(5) $(x+p)(x+q)=x^2+mx+36$，p，q 为正整数.

14.2 乘法公式

某些特殊形式的多项式相乘，可以写成公式的形式，当遇到相同形式的多项式相乘时，就可以直接运用公式写出结果.

14.2.1 平方差公式

探究

计算下列多项式的积，你能发现什么规律？

(1) $(x+1)(x-1)=$________； (2) $(m+2)(m-2)=$________；

(3) $(2x+1)(2x-1)=$________.

上面的几个运算都是形如 $a+b$ 的多项式与形如 $a-b$ 的多项式相乘. 由于

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b)&=a^2-ab+ab-b^2\\&=a^2-b^2,\end{aligned}$$

所以，对于具有与此相同形式的多项式相乘，我们可以直接写出运算结果，即

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2.}$$

也就是说，**两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差.**

这个公式叫做（乘法的）**平方差公式**（formula for the difference of squares）.

> 平方差公式是多项式乘法 $(a+b)(p+q)$ 中 $p=a$，$q=-b$ 的特殊情形.

思考

你能根据图 14.2-1 中图形的面积说明平方差公式吗？

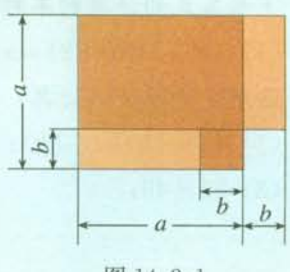


图 14.2-1

例 1 运用平方差公式计算：

(1) $(3x+2)(3x-2)$；　　(2) $(-x+2y)(-x-2y)$.

分析：在(1)中，可以把 $3x$ 看成 a，2 看成 b，即

$$\begin{array}{c}(3x+2)(3x-2)=(3x)^2-2^2.\\ \updownarrow\\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2\end{array}$$

解：(1) $(3x+2)(3x-2)$

$=(3x)^2-2^2$

$=9x^2-4$；

(2) $(-x+2y)(-x-2y)$

$=(-x)^2-(2y)^2$

$=x^2-4y^2$.

你还有其他的计算方法吗？

例 2 计算：

(1) $(y+2)(y-2)-(y-1)(y+5)$；

(2) 102×98.

解：(1) $(y+2)(y-2)-(y-1)(y+5)$

$=y^2-2^2-(y^2+4y-5)$

$=y^2-4-y^2-4y+5$

$=-4y+1$；

(2) $102\times 98=(100+2)(100-2)$

$=100^2-2^2=10\ 000-4$

$=9\ 996$.

只有符合公式条件的乘法，才能运用公式简化运算，其余的运算仍按乘法法则进行.

练习

1. 下面各式的计算对不对？如果不对，应当怎样改正？

(1) $(x+2)(x-2)=x^2-2$；　　(2) $(-3a-2)(3a-2)=9a^2-4$.

2. 运用平方差公式计算：

(1) $(a+3b)(a-3b)$；　　(2) $(3+2a)(-3+2a)$；

(3) 51×49；　　(4) $(3x+4)(3x-4)-(2x+3)(3x-2)$.

14.2.2 完全平方公式

探究

计算下列多项式的积，你能发现什么规律？

(1) $(p+1)^2=(p+1)(p+1)=$__________；

(2) $(m+2)^2=$__________；

(3) $(p-1)^2=(p-1)(p-1)=$__________；

(4) $(m-2)^2=$__________.

上面的几个运算都是形如$(a\pm b)^2$的多项式相乘，由于

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2\\&=a^2+2ab+b^2,\\(a-b)^2&=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2\\&=a^2-2ab+b^2,\end{aligned}$$

所以，对于具有与此相同形式的多项式相乘，我们可以直接写出运算结果，即

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2&=a^2+2ab+b^2,\\(a-b)^2&=a^2-2ab+b^2.\end{aligned}}$$

完全平方公式是多项式乘法$(a+b)(p+q)$中$p=a$，$q=b$的特殊情形.

也就是说，**两个数的和（或差）的平方，等于它们的平方和，加上（或减去）它们的积的2倍.**

这两个公式叫做（乘法的）**完全平方公式**(formula for the square of the sum).

思考

你能根据图14.2-2和图14.2-3中图形的面积说明完全平方公式吗？

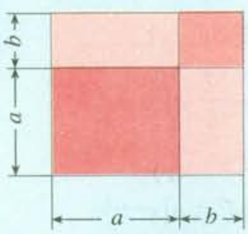


图 14.2-2

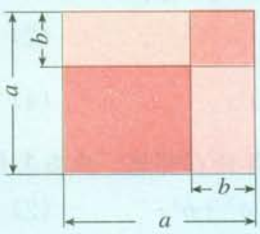


图 14.2-3

例 3 运用完全平方公式计算：

(1) $(4m+n)^2$；　　(2) $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$.

解：(1) $(4m+n)^2=(4m)^2+2\cdot(4m)\cdot n+n^2$

$=16m^2+8mn+n^2$；

(2) $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=y^2-2\cdot y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=y^2-y+\frac{1}{4}$.

例 4 运用完全平方公式计算：

(1) 102^2；　　(2) 99^2.

解：(1) $102^2=(100+2)^2=100^2+2\times100\times2+2^2$

$=10\ 000+400+4$

$=10\ 404$；

(2) $99^2=(100-1)^2=100^2-2\times100\times1+1^2$

$=10\ 000-200+1$

$=9\ 801$.

思考

$(a+b)^2$ 与 $(-a-b)^2$ 相等吗？$(a-b)^2$ 与 $(b-a)^2$ 相等吗？$(a-b)^2$ 与 a^2-b^2 相等吗？为什么？

练习

1. 运用完全平方公式计算：

(1) $(x+6)^2$；　　(2) $(y-5)^2$；

(3) $(-2x+5)^2$；　　(4) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}y\right)^2$.

2. 下面各式的计算错在哪里？应当怎样改正？

(1) $(a+b)^2=a^2+b^2$；　　(2) $(a-b)^2=a^2-b^2$.

运用乘法公式计算，有时要在式子中添括号．在第二章中，我们学过去括号法则，即

$$a+(b+c)=a+b+c;$$
$$a-(b+c)=a-b-c.$$

反过来，就得到添括号法则：

$$a+b+c=a+(b+c);$$
$$a-b-c=a-(b+c).$$

也就是说，**添括号时，如果括号前面是正号，括到括号里的各项都不变符号；如果括号前面是负号，括到括号里的各项都改变符号.**

例 5 运用乘法公式计算：

(1) $(x+2y-3)(x-2y+3)$；　　(2) $(a+b+c)^2$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&(x+2y-3)(x-2y+3)\\&=[x+(2y-3)][x-(2y-3)]\\&=x^2-(2y-3)^2\\&=x^2-(4y^2-12y+9)\\&=x^2-4y^2+12y-9;\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(a+b+c)^2\\&=[(a+b)+c]^2\\&=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\&=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.\end{aligned}$$

有些整式相乘需要先作适当变形，然后再用公式.

练习

1. 在等号右边的括号内填上适当的项，并用去括号法则检验.
   (1) $a+b-c=a+(\quad)$；　　(2) $a-b+c=a-(\quad)$；
   (3) $a-b-c=a-(\quad)$；　　(4) $a+b+c=a-(\quad)$.
2. 运用乘法公式计算：
   (1) $(a+2b-1)^2$；　　(2) $(2x+y+z)(2x-y-z)$.

习题 14.2

复习巩固

1. 运用平方差公式计算：

(1) $\left(\frac{2}{3}x-y\right)\left(\frac{2}{3}x+y\right)$；　　(2) $(xy+1)(xy-1)$；

(3) $(2a-3b)(3b+2a)$；　　(4) $(-2b-5)(2b-5)$；

(5) $2\ 001\times1\ 999$；　　(6) $998\times1\ 002$.

2. 运用完全平方公式计算：

(1) $(2a+5b)^2$；　　(2) $(4x-3y)^2$；　　(3) $(-2m-1)^2$；

(4) $\left(1.5a-\frac{2}{3}b\right)^2$；　　(5) 63^2；　　(6) 98^2.

综合运用

3. 运用乘法公式计算：

(1) $(3x-5)^2-(2x+7)^2$；　　(2) $(x+y+1)(x+y-1)$；

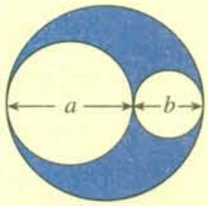
(3) $(2x-y-3)^2$；　　(4) $[(x+2)(x-2)]^2$.

4. 先化简，再求值：

$(2x+3y)^2-(2x+y)(2x-y)$，其中 $x=\frac{1}{3}$，$y=-\frac{1}{2}$.

5. 一个正方形的边长增加 3 cm，它的面积就增加 39 cm²，这个正方形的边长是多少？

6. 如图，一块直径为 $a+b$ 的圆形钢板，从中挖去直径分别为 a 与 b 的两个圆，求剩下的钢板的面积.



（第 6 题）

拓广探索

7. 已知 $a+b=5$，$ab=3$，求 a^2+b^2 的值.

8. 解不等式 $(2x-5)^2+(3x+1)^2>13(x^2-10)$.

9. 解方程组

$$\begin{cases}(x+2)^2-(y-3)^2=(x+y)(x-y),\\x-3y=2.\end{cases}$$

阅读与思考

杨辉三角

我国著名数学家华罗庚曾在给青少年撰写的“数学是我国人民所擅长的学科”一文中谈到，我国古代数学的许多创新与发展都曾居世界前列. 他说：“实际上我们祖国伟大人民在人类史上，有过无比睿智的成就.”其中“杨辉三角”（图1）就是一例.

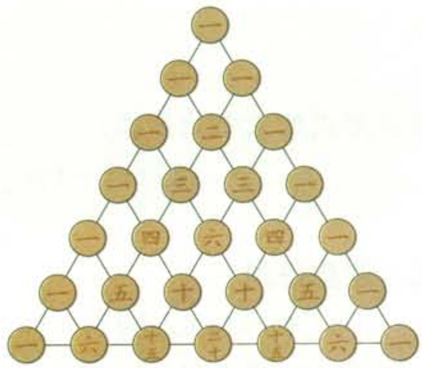


图1

在我国南宋数学家杨辉（约13世纪）所著的《详解九章算术》（1261年）一书中，用图1的三角形解释二项和的乘方规律. 杨辉在注释中提到，在他之前北宋数学家贾宪（1050年左右）也用过上述方法，因此我们称这个三角形为“杨辉三角”或“贾宪三角”.

杨辉三角两腰上的数都是1，其余每个数为它的上方（左右）两数之和. 事实上，这个三角形给出了$(a+b)^n$（$n=1, 2, 3, 4, 5, 6$）的展开式（按a的次数由大到小的顺序）的系数规律. 例如，此三角形中第3行的3个数1，2，1，恰好对应着$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$展开式中的各项的系数；第4行的4个数1，3，3，1，恰好对应着$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$展开式中各项的系数，等等.

这个三角形被欧洲学者称为“帕斯卡三角”. 法国数学家帕斯卡（Pascal，1623—1662）于1654年发现了此三角形.

利用上面的三角形，你能写出$(a+b)^6$的展开式吗？请利用整式的乘法验证你的结果.

14.3 因式分解

我们知道，利用整式的乘法运算，有时可以将几个整式的乘积化为一个多项式的形式. 反过来，在式的变形中，有时需要将一个多项式写成几个整式的乘积的形式.

探究

请把下列多项式写成整式的乘积的形式：

(1) $x^2+x=$__________；　　(2) $x^2-1=$______________.

根据整式的乘法，可以联想得到

$$x^2+x=x(x+1),$$

$$x^2-1=(x+1)(x-1).$$

上面我们把一个多项式化成了几个整式的积的形式，像这样的式子变形叫做这个多项式的**因式分解**（factorization），也叫做把这个多项式**分解因式**.

可以看出，因式分解与整式乘法是方向相反的变形，即

$$x^2-1 \underset{\text{整式乘法}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftharpoons}} (x+1)(x-1).$$

下面我们学习因式分解的两种基本方法.

14.3.1　提公因式法

我们看多项式

$$pa+pb+pc,$$

它的各项都有一个公共的因式 p，我们把因式 p 叫做这个多项式各项的**公因式**（common factor）.

由 $p(a+b+c)=pa+pb+pc$，可得

$$pa+pb+pc=p(a+b+c).$$

这样就把 $pa+pb+pc$ 分解成两个因式乘积的形式，其中一个因式是各项的公因式 p，另一个因式 $a+b+c$ 是 $pa+pb+pc$ 除以 p 所得的商.

一般地，如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提取出来，将多项式写成公因式与另一个因式的乘积的形式，这种分解因式的方法叫做**提公因式法**.

下面我们看几个利用提公因式法分解因式的例子.

例1 把 $8a^3b^2+12ab^3c$ 分解因式.

分析：先找出 $8a^3b^2$ 与 $12ab^3c$ 的公因式，再提出公因式. 我们看这两项的系数 8 与 12，它们的最大公约数是 4；两项的字母部分 a^3b^2 与 ab^3c 都含有字母 a 和 b，其中 a 的最低次数是 1，b 的最低次数是 2，因此我们选定 $4ab^2$ 为要提出的公因式. 提出公因式 $4ab^2$ 后，另一个因式 $2a^2+3bc$ 就不再有公因式了.

如果提出公因式 $4ab$，另一个因式是否还有公因式?

解：
$$\begin{aligned}&8a^3b^2+12ab^3c\\=&4ab^2\cdot 2a^2+4ab^2\cdot 3bc\\=&4ab^2(2a^2+3bc).\end{aligned}$$

例2 把 $2a(b+c)-3(b+c)$ 分解因式.

分析：$b+c$ 是这两个式子的公因式，可以直接提出.

如何检查因式分解是否正确?

解：
$$\begin{aligned}&2a(b+c)-3(b+c)\\=&(b+c)(2a-3).\end{aligned}$$

练习

1. 把下列各式分解因式：

   (1) $ax+ay$；　　(2) $3mx-6my$；

   (3) $8m^2n+2mn$；　　(4) $12xyz-9x^2y^2$；

   (5) $2a(y-z)-3b(z-y)$；　　(6) $p(a^2+b^2)-q(a^2+b^2)$.

2. 先分解因式，再求值：

   $4a^2(x+7)-3(x+7)$，其中 $a=-5$，$x=3$.

3. 计算 $5\times3^4+4\times3^4+9\times3^2$.

14.3.2 公式法

思考

多项式 a^2-b^2 有什么特点？你能将它分解因式吗？

这个多项式是两个数的平方差的形式. 由于整式的乘法与因式分解是方向相反的变形，把整式乘法的平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 的等号两边互换位置，就得到

$$\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b),}$$

即**两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积.**

例 3 分解因式：

(1) $4x^2-9$； (2) $(x+p)^2-(x+q)^2$.

分析：在(1)中，$4x^2=(2x)^2$，$9=3^2$，$4x^2-9=(2x)^2-3^2$，即可用平方差公式分解因式；在 (2) 中，把 $x+p$ 和 $x+q$ 各看成一个整体，设 $x+p=m$，$x+q=n$，则原式化为 m^2-n^2.

解：(1)
$$\begin{aligned}&4x^2-9\\=&(2x)^2-3^2\\=&(2x+3)(2x-3);\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(x+p)^2-(x+q)^2\\=&[(x+p)+(x+q)][(x+p)-(x+q)]\\=&(2x+p+q)(p-q).\end{aligned}$$

例 4 分解因式：

(1) x^4-y^4； (2) a^3b-ab.

分析：对于 (1)，x^4-y^4 可以写成 $(x^2)^2-(y^2)^2$ 的形式，这样就可以利用平方差公式进行因式分解了；对于 (2)，a^3b-ab 有公因式 ab，应先提出公因式，再进一步分解.

解：(1)
$$\begin{aligned}&x^4-y^4\\=&(x^2+y^2)(x^2-y^2)\\=&(x^2+y^2)(x+y)(x-y);\end{aligned}$$

(2) a^3b-ab

$=ab(a^2-1)$

$=ab(a+1)(a-1).$

分解因式，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

练习

1. 下列多项式能否用平方差公式分解因式？为什么？

(1) x^2+y^2； (2) x^2-y^2；

(3) $-x^2+y^2$； (4) $-x^2-y^2$.

2. 分解因式：

(1) $a^2-\frac{1}{25}b^2$； (2) $9a^2-4b^2$；

(3) x^2y-4y； (4) $-a^4+16$.

思考

多项式 $a^2+2ab+b^2$ 与 $a^2-2ab+b^2$ 有什么特点？你能将它们分解因式吗？

这两个多项式是两个数的平方和加上或减去这两个数的积的 2 倍，这恰是两个数的和或差的平方，我们把 $a^2+2ab+b^2$ 和 $a^2-2ab+b^2$ 这样的式子叫做**完全平方式**，利用完全平方公式可以把形如完全平方式的多项式因式分解.

把整式乘法的完全平方公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

的等号两边互换位置，就得到

$$\boxed{\begin{aligned}a^2+2ab+b^2&=(a+b)^2,\\ a^2-2ab+b^2&=(a-b)^2,\end{aligned}}$$

即**两个数的平方和加上（或减去）这两个数的积的 2 倍，等于这两个数的和（或差）的平方.**

例 5 分解因式：

(1) $16x^2+24x+9$； (2) $-x^2+4xy-4y^2$.

分析：在(1)中，$16x^2=(4x)^2$，$9=3^2$，$24x=2\cdot 4x\cdot 3$，所以 $16x^2+24x+9$ 是一个完全平方式，即

$$\begin{array}{cccccccccc} 16x^2+24x+9= & (4x)^2 & + & 2 & \cdot & 4x & \cdot & 3 & + & 3^2. \\ & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ & a^2 & + & 2 & \cdot & a & \cdot & b & + & b^2 \end{array}$$

解：(1)
$$\begin{aligned} & 16x^2+24x+9 \\ =& (4x)^2+2\cdot 4x\cdot 3+3^2 \\ =& (4x+3)^2; \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & -x^2+4xy-4y^2 \\ =& -(x^2-4xy+4y^2) \\ =& -[x^2-2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2] \\ =& -(x-2y)^2. \end{aligned}$$

例 6 分解因式：

(1) $3ax^2+6axy+3ay^2$； (2) $(a+b)^2-12(a+b)+36$.

分析：(1)中有公因式 $3a$，应先提出公因式，再进一步分解；(2) 中，将 $a+b$ 看作一个整体，设 $a+b=m$，则原式化为完全平方式 $m^2-12m+36$.

解：(1)
$$\begin{aligned} & 3ax^2+6axy+3ay^2 \\ =& 3a(x^2+2xy+y^2) \\ =& 3a(x+y)^2; \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & (a+b)^2-12(a+b)+36 \\ =& (a+b)^2-2\cdot(a+b)\cdot 6+6^2 \\ =& (a+b-6)^2. \end{aligned}$$

可以看出，如果把乘法公式的等号两边互换位置，就可以得到用于分解因式的公式，用来把某些具有特殊形式的多项式分解因式，这种分解因式的方法叫做**公式法**.

练习

1. 下列多项式是不是完全平方式？为什么？

(1) a^2-4a+4；　　(2) $1+4a^2$；

(3) $4b^2+4b-1$；　　(4) a^2+ab+b^2.

2. 分解因式：

(1) $x^2+12x+36$；　　(2) $-2xy-x^2-y^2$；

(3) a^2+2a+1；　　(4) $4x^2-4x+1$；

(5) $ax^2+2a^2x+a^3$；　　(6) $-3x^2+6xy-3y^2$.

习题 14.3

复习巩固

分解因式（第 1～3 题）：

1. (1) $15a^3+10a^2$；　　(2) $12abc-3bc^2$；

(3) $6p(p+q)-4q(p+q)$；　　(4) $m(a-3)+2(3-a)$.

2. (1) $1-36b^2$；　　(2) $12x^2-3y^2$；

(3) $0.49p^2-144$；　　(4) $(2x+y)^2-(x+2y)^2$.

3. (1) $1+10t+25t^2$；　　(2) $m^2-14m+49$；

(3) $y^2+y+\frac{1}{4}$；　　(4) $(m+n)^2-4m(m+n)+4m^2$；

(5) $25a^2-80a+64$；　　(6) $a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$.

综合运用

4. 利用因式分解计算：

(1) $21\times3.14+62\times3.14+17\times3.14$；

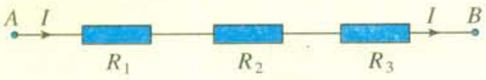
(2) 758^2-258^2.

5. 分解因式：

(1) $(a-b)^2+4ab$；　　(2) $(p-4)(p+1)+3p$；

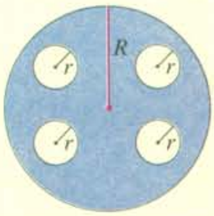
(3) $4xy^2-4x^2y-y^3$；　　(4) $3ax^2-3ay^2$.

6. 如下页图，把 R_1，R_2，R_3 三个电阻串联起来，线路 AB 上的电流为 I，电压为 U，则 $U=IR_1+IR_2+IR_3$. 当 $R_1=19.7$，$R_2=32.4$，$R_3=35.9$，$I=2.5$ 时，求 U 的值.

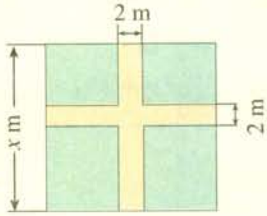


（第 6 题）

7. 如图，在半径为 R 的圆形钢板上，挖去半径为 r 的四个小圆，计算当 $R=7.8$ cm，$r=1.1$ cm 时剩余部分的面积（π 取 3.14）.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，某小区规划在边长为 x m 的正方形场地上，修建两条宽为 2 m 的甬道，其余部分种草，你能用几种方法计算甬道所占的面积？

拓广探索

9. 已知 $4y^2+my+9$ 是完全平方式，求 m 的值.

10. 观察下列式子：

$2\times4+1=9=3^2$；

$6\times8+1=49=7^2$；

$14\times16+1=225=15^2$；

……

你得出了什么结论？你能证明这个结论吗？

11. 在实数范围内分解因式：

(1) x^2-2；　　(2) $5x^2-3$.

（提示：根据平方根的意义把各式写成平方差的形式.）

阅读与思考

$x^2+(p+q)x+pq$ 型式子的因式分解

$x^2+(p+q)x+pq$ 型式子是数学学习中常见的一类多项式，如何将这种类型的式子进行因式分解呢？

在第 102 页的练习第 2 题中，我们发现，$(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$.这个规律可以利用多项式的乘法法则推导得出：

$$\begin{aligned}&(x+p)(x+q)\\=&x^2+px+qx+pq\\=&x^2+(p+q)x+pq.\end{aligned}$$

因式分解是与整式乘法方向相反的变形，利用这种关系可得

$$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q). \qquad ①$$

利用①式可以将某些二次项系数是 1 的二次三项式分解因式. 例如，将式子 x^2+3x+2 分解因式. 这个式子的二次项系数是 1，常数项 $2=1\times2$，一次项系数 $3=1+2$，因此这是一个 $x^2+(p+q)x+pq$ 型的式子. 利用①式可得 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$.

上述分解因式 x^2+3x+2 的过程，也可以用十字相乘的形式形象地表示：先分解二次项系数，分别写在十字交叉线的左上角和左下角；再分解常数项，分别写在十字交叉线的右上角和右下角；然后交叉相乘，求代数和，使其等于一次项系数（图 1).

$$\begin{array}{c}1 \qquad 1\\ 1 \qquad 2\\ \hline 1\times2+1\times1=3\end{array}$$

图 1

这样，我们也可以得到 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$.

利用这种方法，你能将下列多项式分解因式吗？

(1) $x^2+7x+10$；　　(2) x^2-2x-8；

(3) $y^2-7y+12$；　　(4) $x^2+7x-18$.

数学活动

活动1

我们在过去的学习中已经发现了如下的运算规律：

$15\times15=1\times2\times100+25=225$,

$25\times25=2\times3\times100+25=625$,

$35\times35=3\times4\times100+25=1\ 225$,

……

你能写出一般的规律吗？你能用本章所学知识证明你的结论吗？

活动2

(1) 计算下列两个数的积（这两个数的十位上的数相同，个位上的数的和等于10），你发现结果有什么规律？

$$53\times57,\ 38\times32,\ 84\times86,\ 71\times79.$$

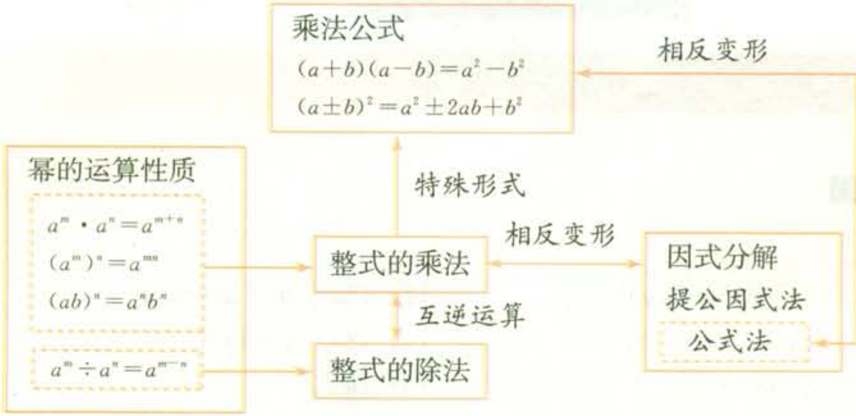
(2) 你能用本章所学知识解释这个规律吗？

(3) 利用你发现的规律计算：

$$58\times52,\ 63\times67,\ 75^2,\ 95^2.$$

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们类比数的乘法学习了整式的乘法. 整式的乘法主要包括幂的运算性质、单项式的乘法、多项式的乘法等. 利用"除法是乘法的逆运算"，学习了简单的整式除法. 并学习了因式分解这种与整式的乘法方向相反的变形. 它们都是进一步学习的重要基础.

由于整式中的字母表示数，因此数的运算律和运算性质在整式的运算中仍然成立. 在整式的乘法中，多项式的乘法要利用分配律转化为单项式的乘法，而单项式的乘法又要利用交换律和结合律转化为幂的运算. 因此，幂的运算是基础，单项式的乘法是关键. 整式的除法也与此类似.

因式分解是与整式的乘法方向相反的变形. 整式的乘法是把几个整式相乘，得到一个新的整式；而因式分解是把一个多项式化为几个整式相乘. 知道了这种关系，不仅有助于理解因式分解的意义，而且也可以把整式乘法的过程反过来，得到分解因式的方法.

某些具有特殊形式的多项式相乘，可以写成乘法公式的形式，利用它们可以简化运算. 把乘法公式的等号两边交换位置，就得到了分解因式的相应公式.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方如何运算？请举例说明.

2. 举例说明怎样将多项式乘（除以）单项式转化为单项式的乘除. 多项式乘多项式是如何转化为单项式相乘的？

3. 本章学习了哪几个乘法公式？你能说出它们的结构特点吗？你能从几何直观的角度用图形解释乘法公式吗？

4. 举例说明因式分解与整式乘法之间的关系，你学习了哪几种分解因式的方法？请举例说明.

复习题 14

复习巩固

1. 计算：

(1) $(-2x^2y^3)^2\cdot(xy)^3$；　　(2) $(2a+3b)(2a-b)$；

(3) $5x^2(x+1)(x-1)$；　　(4) $(2x+y-1)^2$；

(5) 59.8×60.2；　　(6) 198^2.

2. 计算：

(1) $(2a)^3\cdot b^4\div12a^3b^2$；　　(2) $\left(-\frac{2}{3}a^7b^5\right)\div\frac{3}{2}a^2b^5$；

(3) $\left(\frac{6}{5}a^3x^4-0.9ax^3\right)\div\frac{3}{5}ax^3$；　　(4) $(7x^2y^3-8x^3y^2z)\div8x^2y^2$.

3. 分解因式：

(1) $25x^2-16y^2$；　　(2) $(a-b)(x-y)-(b-a)(x+y)$；

(3) $a^2-4ab+4b^2$；　　(4) $4+12(x-y)+9(x-y)^2$.

4. 我国陆地面积约是 9.6×10^6 km². 平均每平方千米的陆地上，一年从太阳得到的能量相当于燃烧 1.3×10^5 t 煤所产生的能量. 求在我国陆地上，一年内从太阳得到的能量约相当于燃烧多少吨煤所产生的能量.

5. 在半径 R 为 0.5 m 的地球仪的表面之外，距赤道 1 m 拉一条绳子绕地球仪一周，这条绳长比地球仪的赤道的周长多几米？如果在地球赤道表面也同样做，情况又怎样（已知地球半径为 6 370 km，π 取 3.14）？

（第 5 题）

综合运用

6. 计算：

(1) $4(x+1)^2-(2x+5)(2x-5)$；　　(2) $2x\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)-3x\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)$；

(3) $3(y-z)^2-(2y+z)(-z+2y)$；　　(4) $[x(x^2y^2-xy)-y(x^2-x^3y)]\div3x^2y$.

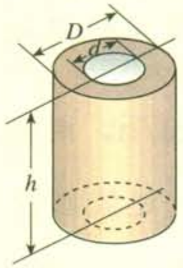
7. 分解因式：

(1) x^3-9x；　　　　　　　　　　(2) $16x^4-1$；

(3) $6xy^2-9x^2y-y^3$；　　　　　　(4) $(2a-b)^2+8ab$.

8. 已知$(x+y)^2=25$，$(x-y)^2=9$，求 xy 与 x^2+y^2 的值.

9. 如图，水压机有四根空心钢立柱，每根高都是 18 m，外径 D 为 1 m，内径 d 为 0.4 m. 每立方米钢的质量为 7.8 t，求 4 根立柱的总质量（π 取 3.14）.



（第 9 题）

2012年8月

日	一	二	三	四	五	六
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

（第 10 题）

10. 在日历上，我们可以发现其中某些数满足一定的规律，如图是 2012 年 8 月份的日历. 我们任意选择其中所示的方框部分，将每个方框部分中 4 个位置上的数交叉相乘，再相减，例如：$7\times13-6\times14=7$，$17\times23-16\times24=7$，不难发现，结果都是 7.

(1) 请你再选择两个类似的部分试一试，看看是否符合这个规律；

(2) 换一个月的月历试一下，是否有同样的规律？

(3) 请你利用整式的运算对以上的规律加以证明.

拓广探索

11. 求证：当 n 是整数时，两个连续奇数的平方差$(2n+1)^2-(2n-1)^2$ 是 8 的倍数.

12. 某种产品的原料提价，因而厂家决定对产品进行提价，现有三种方案：

(1) 第一次提价 $p\%$，第二次提价 $q\%$；

(2) 第一次提价 $q\%$，第二次提价 $p\%$；

(3) 第一、二次提价均为$\dfrac{p+q}{2}\%$.

其中 p，q 是不相等的正数. 三种方案哪种提价最多？

（提示：因为 $p\neq q$，$(p-q)^2=p^2-2pq+q^2>0$，所以 $p^2+q^2>2pq$.）

第十五章　分式

一艘轮船在静水中的最大航速为 30 km/h，它以最大航速沿江顺流航行 90 km 所用时间，与以最大航速逆流航行 60 km 所用时间相等，江水的流速为多少？

如果设江水流速为 v km/h，则轮船顺流航行 90 km 所用时间为 $\frac{90}{30+v}$ h，逆流航行 60 km 所用时间为 $\frac{60}{30-v}$ h，由方程 $\frac{90}{30+v}=\frac{60}{30-v}$ 可以解出 v 的值.

像 $\frac{90}{30+v}$ 和 $\frac{60}{30-v}$ 这样分母中含有字母的式子都是分式. 本章中，我们将类比分数学习分式，解一些分式方程，并利用分式的知识解决一些实际问题.

15.1 分式

15.1.1 从分数到分式

思考

填空：

(1) 长方形的面积为 10 cm^2，长为 7 cm，则宽为________ cm；长方形的面积为 S，长为 a，则宽为________.

(2) 把体积为 200 cm^3 的水倒入底面积为 33 cm^2 的圆柱形容器中，则水面高度为____ cm；把体积为 V 的水倒入底面积为 S 的圆柱形容器中，则水面高度为__________.

同 $5 \div 3$ 可以写成 $\frac{5}{3}$ 一样，式子 $A \div B$ 可以写成 $\frac{A}{B}$.

上面问题中，填出的依次是 $\frac{10}{7}$，$\frac{S}{a}$，$\frac{200}{33}$，$\frac{V}{S}$.

思考

式子 $\frac{S}{a}$，$\frac{V}{S}$ 以及引言中的式子 $\frac{90}{30+v}$，$\frac{60}{30-v}$ 有什么共同点？它们与分数有什么相同点和不同点？

可以发现，这些式子与分数一样都是 $\frac{A}{B}$（即 $A \div B$）的形式. 分数的分子 A 与分母 B 都是整数，而这些式子中的 A 与 B 都是整式，并且 B 中都含有字母.

一般地，如果 A，B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做**分式**（fraction）. 分式 $\frac{A}{B}$ 中，A 叫做分子，B 叫做分母.

分式是不同于整式的另一类式子. 上面的$\frac{S}{a}$，$\frac{V}{S}$，$\frac{90}{30+v}$和$\frac{60}{30-v}$等都是分式. 由于字母可以表示不同的数，所以分式比分数更具有一般性. 例如，分数$\frac{2}{3}$仅表示$2\div3$的商，而分式$\frac{x}{y}$既可以表示$2\div3$，又可以表示$(-5)\div2$，$8\div(-9)$等.

思考

我们知道，要使分数有意义，分数中的分母不能为0. 要使分式有意义，分式中的分母应满足什么条件?

分式的分母表示除数，由于除数不能为0，所以分式的分母不能为0，即当$B\neq0$时，分式$\frac{A}{B}$才有意义.

例 1 下列分式中的字母满足什么条件时分式有意义?

(1) $\frac{2}{3x}$； (2) $\frac{x}{x-1}$；

(3) $\frac{1}{5-3b}$； (4) $\frac{x+y}{x-y}$.

解：(1) 要使分式$\frac{2}{3x}$有意义，则分母$3x\neq0$，即$x\neq0$；

(2) 要使分式$\frac{x}{x-1}$有意义，则分母$x-1\neq0$，即$x\neq1$；

(3) 要使分式$\frac{1}{5-3b}$有意义，则分母$5-3b\neq0$，即$b\neq\frac{5}{3}$；

(4) 要使分式$\frac{x+y}{x-y}$有意义，则分母$x-y\neq0$，即$x\neq y$.

如无特别声明，本章出现的分式都有意义.

练习

1. 列式表示下列各量：

(1) 某村有n个人，耕地 40 hm^2，则人均耕地面积为________ hm^2.

(2) $\triangle ABC$ 的面积为 S，BC 边的长为 a，则高 AD 为________.

(3) 一辆汽车 b h 行驶了 a km，则它的平均速度为________km/h；一列火车行驶 a km 比这辆汽车少用 1 h，则它的平均速度为________km/h.

2. 下列式子中，哪些是分式？哪些是整式？两类式子的区别是什么？

$$\frac{1}{x},\ \frac{x}{3},\ \frac{4}{3b^3+5},\ \frac{2a-5}{3},\ \frac{x}{x^2-y^2},\ \frac{m-n}{m+n},\ \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1},\ \frac{c}{3(a-b)}.$$

3. 下列分式中的字母满足什么条件时分式有意义？

(1) $\frac{2}{a}$；　　(2) $\frac{x+1}{x-1}$；　　(3) $\frac{2m}{3m+2}$；

(4) $\frac{1}{x-y}$；　　(5) $\frac{2a+b}{3a-b}$；　　(6) $\frac{2}{x^2-1}$.

15.1.2　分式的基本性质

由分数的基本性质可知，如果数 $c\neq0$，那么

$$\frac{2}{3}=\frac{2c}{3c},\qquad \frac{4c}{5c}=\frac{4}{5}.$$

一般地，对于任意一个分数 $\frac{a}{b}$，有

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c},\qquad \frac{a}{b}=\frac{a\div c}{b\div c}\quad(c\neq0),$$

其中 a，b，c 是数.

> 分数的基本性质：
> 一个分数的分子、分母乘（或除以）同一个不为 0 的数，分数的值不变.

思考

类比分数的基本性质，你能猜想分式有什么性质吗？

分式的基本性质：

分式的分子与分母乘（或除以）同一个不等于 0 的整式，分式的值不变.

上述性质可以用式子表示为

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C},\qquad \frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}\quad(C\neq0),$$

其中 A，B，C 是整式.

例 2　填空：

(1) $\frac{x^3}{xy}=\frac{(\quad)}{y}$，$\frac{3x^2+3xy}{6x^2}=\frac{x+y}{(\quad)}$；

(2) $\frac{1}{ab}=\frac{(\quad)}{a^2b}$， $\frac{2a-b}{a^2}=\frac{(\quad)}{a^2b}$ $(b\neq0)$.

解：(1) 因为$\frac{x^3}{xy}$的分母 xy 除以 x 才能化为 y，为保证分式的值不变，根据分式的基本性质，分子也需除以 x，即

看分母如何变化，想分子如何变化.

$$\frac{x^3}{xy}=\frac{x^3\div x}{xy\div x}=\frac{x^2}{y}.$$

同样地，因为$\frac{3x^2+3xy}{6x^2}$的分子 $3x^2+3xy$ 除以 $3x$ 才能化为$x+y$，所以分母也需除以 $3x$，即

看分子如何变化，想分母如何变化.

$$\frac{3x^2+3xy}{6x^2}=\frac{(3x^2+3xy)\div(3x)}{6x^2\div(3x)}=\frac{x+y}{2x}.$$

所以，括号中应分别填 x^2 和 $2x$.

(2) 因为$\frac{1}{ab}$的分母 ab 乘 a 才能化为 a^2b，为保证分式的值不变，根据分式的基本性质，分子也需乘 a，即

$$\frac{1}{ab}=\frac{1\cdot a}{ab\cdot a}=\frac{a}{a^2b}.$$

同样地，因为$\frac{2a-b}{a^2}$的分母 a^2 乘 b 才能化为 a^2b，所以分子也需乘 b，即

$$\frac{2a-b}{a^2}=\frac{(2a-b)\cdot b}{a^2\cdot b}=\frac{2ab-b^2}{a^2b}.$$

所以，括号中应分别填 a 和 $2ab-b^2$.

我们知道，分数的约分和通分在分数的运算中起着非常重要的作用. 类似地，分式的约分和通分在分式的运算中也有非常重要的作用. 下面讨论分式的约分和通分.

思考

联想分数的约分，由例 2 你能想出如何对分式进行约分吗？

与分数的约分类似，在例 2 (1) 中，我们利用分式的基本性质，约去$\frac{3x^2+3xy}{6x^2}$的分子和分母的公因式 $3x$，不改变分式的值，把$\frac{3x^2+3xy}{6x^2}$化为

$\frac{x+y}{2x}$. 像这样，根据分式的基本性质，把一个分式的分子与分母的公因式约去，叫做分式的**约分**（reduction of a fraction）. 经过约分后的分式$\frac{x+y}{2x}$，其分子与分母没有公因式. 像这样分子与分母没有公因式的分式，叫做**最简分式**（fraction in lowest terms）. 同样地，$\frac{x^3}{xy}$被约分成$\frac{x^2}{y}$，$\frac{x^2}{y}$也是最简分式.

分式的约分，一般要约去分子和分母所有的公因式，使所得结果成为最简分式或者整式.

例 3 约分：

(1) $\frac{-25a^2bc^3}{15ab^2c}$； (2) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$；

(3) $\frac{6x^2-12xy+6y^2}{3x-3y}$.

分析：为约分，要先找出分子和分母的公因式.

如果分子或分母是多项式，先分解因式对约分有什么作用？

解：(1) $\frac{-25a^2bc^3}{15ab^2c}=-\frac{5abc\cdot 5ac^2}{5abc\cdot 3b}=-\frac{5ac^2}{3b}$；

(2) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)^2}=\frac{x-3}{x+3}$；

(3) $\frac{6x^2-12xy+6y^2}{3x-3y}=\frac{6(x-y)^2}{3(x-y)}=2(x-y)$.

思考

联想分数的通分，由例 2 你能想出如何对分式进行通分吗？

与分数的通分类似，在例 2（2）中，我们利用分式的基本性质，将分子和分母同乘适当的整式，不改变分式的值，把$\frac{1}{ab}$和$\frac{2a-b}{a^2}$化成分母相同的分式. 像这样，根据分式的基本性质，把几个异分母的分式分别化成与原来的分式相等的同分母的分式，叫做分式的**通分**（reduction of fractions to a common denominator）.

例 4 通分：

(1) $\dfrac{3}{2a^2b}$ 与 $\dfrac{a-b}{ab^2c}$； (2) $\dfrac{2x}{x-5}$ 与 $\dfrac{3x}{x+5}$.

分析：为通分，要先确定各分式的公分母，一般取各分母的所有因式的最高次幂的积作公分母，它叫做**最简公分母**.

解：(1) 最简公分母是 $2a^2b^2c$.

$$\frac{3}{2a^2b}=\frac{3\cdot bc}{2a^2b\cdot bc}=\frac{3bc}{2a^2b^2c},$$

$$\frac{a-b}{ab^2c}=\frac{(a-b)\cdot 2a}{ab^2c\cdot 2a}=\frac{2a^2-2ab}{2a^2b^2c}.$$

$2a^2b$ 的因式有 2，a^2，b；ab^2c 的因式有 a，b^2，c. 两式中所有因式的最高次幂的积是 $2a^2b^2c$.

(2) 最简公分母是 $(x-5)(x+5)$.

$$\frac{2x}{x-5}=\frac{2x(x+5)}{(x-5)(x+5)}=\frac{2x^2+10x}{x^2-25},$$

$$\frac{3x}{x+5}=\frac{3x(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\frac{3x^2-15x}{x^2-25}.$$

思考

分数和分式在约分和通分的做法上有什么共同点？这些做法的根据是什么？

练习

1. 约分：

(1) $\dfrac{2bc}{ac}$； (2) $\dfrac{(x+y)y}{xy^2}$；

(3) $\dfrac{x^2+xy}{(x+y)^2}$； (4) $\dfrac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$.

2. 通分：

(1) $\dfrac{x}{ab}$ 与 $\dfrac{y}{bc}$； (2) $\dfrac{2c}{bd}$ 与 $\dfrac{3ac}{4b^2}$；

(3) $\dfrac{x}{a(x+2)}$ 与 $\dfrac{y}{b(x+2)}$； (4) $\dfrac{2xy}{(x+y)^2}$ 与 $\dfrac{x}{x^2-y^2}$.

习题 15.1

复习巩固

1. 填空并判断所填式子是否为分式：

(1) 一位作家先用 m 天写完了一部小说的上集，又用 n 天写完下集，这部小说（上、下集）共 120 万字，这位作家平均每天的写作量为________；

(2) 走一段长 10 km 的路，步行用 $2x$ h，骑自行车所用时间比步行所用时间的一半少 0.2 h，骑自行车的平均速度为________；

(3) 甲完成一项工作需 t h，乙完成同样工作比甲少用 1 h，乙的工作效率为________.

2. 下列各式中，哪些是整式？哪些是分式？

$\frac{1}{a}$，$x-1$，$\frac{3}{m}$，$\frac{b}{3}$，$\frac{c}{a-b}$，$\frac{a+6}{2b}$，$\frac{3}{4}(x+y)$，$\frac{x^2+2x+1}{5}$，$\frac{m+n}{m-n}$.

3. x 满足什么条件时下列分式有意义？

(1) $\frac{1}{3x}$；　(2) $\frac{1}{3-x}$；　(3) $\frac{x-5}{3x+5}$；　(4) $\frac{1}{x^2-16}$.

4. 下列各组中的两个分式是否相等？为什么？

(1) $\frac{2x}{y}$ 与 $\frac{4xy}{2y^2}$；　(2) $\frac{6ac}{9a^2b}$ 与 $\frac{2c}{3ab}$.

5. 不改变分式的值，使下列分式的分子和分母都不含“—”号：

(1) $\frac{-5y}{-x^2}$；　(2) $\frac{-a}{2b}$；　(3) $\frac{4m}{-3n}$；　(4) $-\frac{-x}{2y}$.

6. 约分：

(1) $\frac{5x}{25x^2}$；　(2) $\frac{9ab^2+6abc}{3a^2b}$；

(3) $\frac{9a^2+6ab+b^2}{3a+b}$；　(4) $\frac{x^2-36}{2x+12}$.

7. 通分：

(1) $\frac{x}{3y}$ 与 $\frac{3x}{2y^2}$；　(2) $\frac{6c}{a^2b}$ 与 $\frac{c}{3ab^2}$；

(3) $\frac{x-y}{2x+2y}$ 与 $\frac{xy}{(x+y)^2}$；　(4) $\frac{2mn}{4m^2-9}$ 与 $\frac{2m-3}{2m+3}$.

综合运用

8. x 满足什么条件时下列分式有意义？

(1) $\frac{1}{x(x-1)}$；　(2) $\frac{x+5}{x^2+1}$.

9. 小李要打一份12 000字的文件，第一天她打字 2 h，打字速度为 w 字/min，第二天她打字速度比第一天快了 10 字/min，两天打完全部文件，第二天她打字用了多长时间？

10. 某村种植了 m hm^2 玉米，总产量为 n kg；水稻的种植面积比玉米的种植面积多 p hm^2，水稻的总产量比玉米总产量的 2 倍多 q kg. 写出表示玉米和水稻的单位面积产量（单位：kg/hm^2）的式子.

11. 有四块小场地：第一块是边长为 a m 的正方形，第二块是边长为 b m 的正方形，其余两块都是长为 a m、宽为 b m 的长方形. 另有一块大长方形场地，它的面积等于上面四块场地面积的和，它的长为 $2(a+b)$ m，用最简单的式子表示出大长方形的宽.

拓广探索

12. 下列各式对不对？如果不对，写出正确答案：

(1) $\dfrac{1-a}{a^2-2a+1}=\dfrac{1}{1-a}$；　　(2) $\dfrac{xy-x^2}{(x-y)^2}=\dfrac{x}{x-y}$.

13. 在什么条件下，下列分式的值为 0?

(1) $\dfrac{x-1}{x}$；　　(2) $\dfrac{5a-b}{a+b}$.

15.2 分式的运算

15.2.1 分式的乘除

问题 1　一个水平放置的长方体容器，其容积为 V，底面的长为 a，宽为 b，当容器内的水占容积的 $\frac{m}{n}$ 时，水面的高度为多少？

长方体容器的高为 $\frac{V}{ab}$，水面的高度为 $\frac{V}{ab}\cdot\frac{m}{n}$.

问题 2　大拖拉机 m 天耕地 a hm^2，小拖拉机 n 天耕地 b hm^2，大拖拉机的工作效率是小拖拉机的工作效率的多少倍？

大拖拉机的工作效率是 $\frac{a}{m}$ hm^2/天，小拖拉机的工作效率是 $\frac{b}{n}$ hm^2/天，大拖拉机的工作效率是小拖拉机工作效率的 $\frac{a}{m}\div\frac{b}{n}$ 倍.

从上面的问题可知，为讨论数量关系有时需要进行分式的乘除运算.

分式与分数具有类似的形式，我们可以类比分数的运算法则认识分式的运算法则.

思考

你还记得分数的乘除法法则吗？类比分数的乘除法法则，你能说出分式的乘除法法则吗？

类似于分数，分式有：

乘法法则：**分式乘分式，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母.**

除法法则：**分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘.**

上述法则可以用式子表示为

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},$$
$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

例 1 计算：

(1) $\frac{4x}{3y}\cdot\frac{y}{2x^3}$；(2) $\frac{ab^3}{2c^2}\div\frac{-5a^2b^2}{4cd}$.

解：(1) $\frac{4x}{3y}\cdot\frac{y}{2x^3}=\frac{4xy}{6x^3y}=\frac{2}{3x^2}$；

(2) $\frac{ab^3}{2c^2}\div\frac{-5a^2b^2}{4cd}=\frac{ab^3}{2c^2}\cdot\frac{4cd}{-5a^2b^2}=-\frac{4ab^3cd}{10a^2b^2c^2}$

$=-\frac{2bd}{5ac}$.

运算结果应化为最简分式.

例 2 计算：

(1) $\frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1}\cdot\frac{a-1}{a^2-4}$；(2) $\frac{1}{49-m^2}\div\frac{1}{m^2-7m}$.

解：(1) $\frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1}\cdot\frac{a-1}{a^2-4}$

$=\frac{(a-2)^2}{(a-1)^2}\cdot\frac{a-1}{(a-2)(a+2)}$

$=\frac{(a-2)^2(a-1)}{(a-1)^2(a-2)(a+2)}$

$=\frac{a-2}{(a-1)(a+2)}$；

分子、分母是多项式时，通常先分解因式，再约分.

(2) $\frac{1}{49-m^2}\div\frac{1}{m^2-7m}$

$=-\frac{1}{m^2-49}\cdot(m^2-7m)=-\frac{m(m-7)}{(m+7)(m-7)}$

$=-\frac{m}{m+7}$.

例 3 如图15.2-1，“丰收 1 号”小麦的试验田是边长为a m（$a>1$）的正方形去掉一个边长为 1 m 的正方形蓄水池后余下的部分，“丰收 2 号”小麦的试验田是边长为$(a-1)$ m 的正方形，两块试验田的小麦都收获了 500 kg.

（1）哪种小麦的单位面积产量高？

（2）高的单位面积产量是低的单位面积产量的多少倍？

图 15.2-1

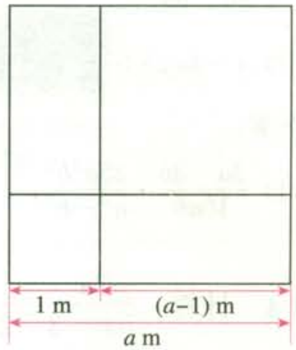


图 15.2-2

解：（1）“丰收 1 号”小麦的试验田面积是(a^2-1) m^2，单位面积产量是$\dfrac{500}{a^2-1}$ kg/m^2；“丰收 2 号”小麦的试验田面积是$(a-1)^2$ m^2，单位面积产量是$\dfrac{500}{(a-1)^2}$ kg/m^2.

$\because$ $a>1$，

$\therefore$ $(a-1)^2>0$，$a^2-1>0$.

由图 15.2-2 可得 $(a-1)^2<a^2-1$.

$\therefore$ $\dfrac{500}{a^2-1}<\dfrac{500}{(a-1)^2}$.

所以，“丰收 2 号”小麦的单位面积产量高.

> 因为 $a>1$，所以 $(a-1)^2-(a^2-1)=(a^2-2a+1)-(a^2-1)=-2(a-1)<0$，即$(a-1)^2<a^2-1$.

（2）
$$\frac{500}{(a-1)^2}\div\frac{500}{a^2-1}=\frac{500}{(a-1)^2}\cdot\frac{a^2-1}{500}$$
$$=\frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2}=\frac{a+1}{a-1}.$$

所以，“丰收 2 号”小麦的单位面积产量是“丰收 1 号”小麦的单位面积产量的$\dfrac{a+1}{a-1}$倍.

练习

1. 写出第 15.2.1 节中问题 1 和问题 2 的计算结果.

2. 计算：

(1) $\dfrac{3a}{4b}\cdot\dfrac{16b}{9a^2}$；　(2) $\dfrac{12xy}{5a}\div 8x^2y$；

(3) $(-3xy)\div\dfrac{2y^2}{3x}$；　(4) $\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{y-x}{x+y}$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{3a-3b}{10ab}\cdot\dfrac{25a^2b^3}{a^2-b^2}$；　(2) $\dfrac{4y^2-x^2}{x^2+2xy+y^2}\div\dfrac{x-2y}{2x^2+2xy}$.

例 4　计算 $\dfrac{2x}{5x-3}\div\dfrac{3}{25x^2-9}\cdot\dfrac{x}{5x+3}$.

解：

$$\begin{aligned}&\frac{2x}{5x-3}\div\frac{3}{25x^2-9}\cdot\frac{x}{5x+3}\\=&\frac{2x}{5x-3}\cdot\frac{25x^2-9}{3}\cdot\frac{x}{5x+3}\\=&\frac{2x^2}{3}.\end{aligned}$$

乘除混合运算可以统一为乘法运算.

思考

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=?$　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^3=?$　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{10}=?$

根据乘方的意义和分式的乘法法则，可得：

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\cdot a}{b\cdot b}=\dfrac{a^2}{b^2}$；

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^3=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}=$ ______；

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{10}=$ ____________________.

一般地，当 n 是正整数时，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{个}}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n\text{个}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n\text{个}}}=\frac{a^n}{b^n}，即$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

这就是说，分式乘方要把分子、分母分别乘方.

例 5 计算：

(1) $\left(\frac{-2a^2b}{3c}\right)^2$；　　　(2) $\left(\frac{a^2b}{-cd^3}\right)^3\div\frac{2a}{d^3}\cdot\left(\frac{c}{2a}\right)^2$.

解：(1) $\left(\frac{-2a^2b}{3c}\right)^2=\frac{(-2a^2b)^2}{(3c)^2}=\frac{4a^4b^2}{9c^2}$；

(2)
$$\begin{aligned}&\left(\frac{a^2b}{-cd^3}\right)^3\div\frac{2a}{d^3}\cdot\left(\frac{c}{2a}\right)^2\\=&\frac{a^6b^3}{-c^3d^9}\div\frac{2a}{d^3}\cdot\frac{c^2}{4a^2}\\=&\frac{a^6b^3}{-c^3d^9}\cdot\frac{d^3}{2a}\cdot\frac{c^2}{4a^2}\\=&-\frac{a^3b^3}{8cd^6}.\end{aligned}$$

> 式与数有相同的混合运算顺序：先乘方，再乘除.

练习

1. 计算：

(1) $\frac{2m^2n}{3pq^2}\cdot\frac{5p^2q}{4mn^2}\div\frac{5mnp}{3q}$；　　　(2) $\frac{16-a^2}{a^2+8a+16}\div\frac{a-4}{2a+8}\cdot\frac{a-2}{a+2}$.

2. 计算：

(1) $\left(\frac{-2x^4y^2}{3z}\right)^3$；　　　(2) $\left(\frac{2ab^3}{-c^2d}\right)^2\div\frac{6a^4}{b^3}\cdot\left(\frac{-3c}{b^2}\right)^3$.

15.2.2 分式的加减

问题 3 甲工程队完成一项工程需 n 天，乙工程队要比甲队多用 3 天才能完成这项工程，两队共同工作一天完成这项工程的几分之几？

甲工程队一天完成这项工程的$\frac{1}{n}$，乙工程队一天完成这项工程的$\frac{1}{n+3}$，两队共同工作一天完成这项工程的$\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+3}\right)$.

问题 4 2009 年、2010 年、2011 年某地的森林面积（单位：km^2）分别是 S_1，S_2，S_3，2011 年与 2010 年相比，森林面积增长率提高了多少？

2011 年的森林面积增长率是$\frac{S_3-S_2}{S_2}$，2010 年的森林面积增长率是

$\frac{S_2-S_1}{S_1}$，2011 年与 2010 年相比，森林面积增长率提高了$\frac{S_3-S_2}{S_2}-\frac{S_2-S_1}{S_1}$.

从上面的问题可知，为讨论数量关系，有时需要进行分式的加减运算.

思考

分式的加减法与分数的加减法类似，它们的实质相同. 观察下列分数加减运算的式子：$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，　$\frac{1}{5}-\frac{2}{5}=-\frac{1}{5}$，　$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$，$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$. 你能将它们推广，得出分式的加减法法则吗？

类似分数的加减法，分式的加减法法则是：

同分母分式相加减，分母不变，把分子相加减；

异分母分式相加减，先通分，变为同分母的分式，再加减.

上述法则可用式子表示为

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c},\\&\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}.\end{aligned}}$$

例 6　计算：

(1) $\frac{5x+3y}{x^2-y^2}-\frac{2x}{x^2-y^2}$；　　(2) $\frac{1}{2p+3q}+\frac{1}{2p-3q}$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&\frac{5x+3y}{x^2-y^2}-\frac{2x}{x^2-y^2}\\=&\frac{5x+3y-2x}{x^2-y^2}=\frac{3x+3y}{x^2-y^2}=\frac{3}{x-y};\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2p+3q}+\frac{1}{2p-3q}\\=&\frac{2p-3q}{(2p+3q)(2p-3q)}+\frac{2p+3q}{(2p+3q)(2p-3q)}\\=&\frac{2p-3q+2p+3q}{(2p+3q)(2p-3q)}=\frac{4p}{4p^2-9q^2}.\end{aligned}$$

结果也可以写成$\frac{4p}{(2p+3q)(2p-3q)}$.

练习

1. 计算：

(1) $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{1}{x}$；　　(2) $\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{2a}{b+1}-\dfrac{3a}{b+1}$.

2. 计算：

(1) $\dfrac{1}{2c^2d}+\dfrac{1}{3cd^2}$；　　(2) $\dfrac{3}{2m-n}-\dfrac{2m-n}{(2m-n)^2}$；

(3) $\dfrac{a}{a^2-b^2}-\dfrac{1}{a+b}$；　　(4) $\dfrac{a^2}{a-1}-a-1$.

例 7 计算 $\left(\dfrac{2a}{b}\right)^2\cdot\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{a}{b}\div\dfrac{b}{4}$.

解：

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2a}{b}\right)^2\cdot\frac{1}{a-b}-\frac{a}{b}\div\frac{b}{4}\\=&\frac{4a^2}{b^2}\cdot\frac{1}{a-b}-\frac{a}{b}\cdot\frac{4}{b}\\=&\frac{4a^2}{b^2(a-b)}-\frac{4a}{b^2}=\frac{4a^2}{b^2(a-b)}-\frac{4a(a-b)}{b^2(a-b)}\\=&\frac{4a^2-4a^2+4ab}{b^2(a-b)}=\frac{4ab}{b^2(a-b)}\\=&\frac{4a}{ab-b^2}.\end{aligned}$$

式与数有相同的混合运算顺序：先乘方，再乘除，然后加减.

例 8 计算：

(1) $\left(m+2+\dfrac{5}{2-m}\right)\cdot\dfrac{2m-4}{3-m}$；　　(2) $\left(\dfrac{x+2}{x^2-2x}-\dfrac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\dfrac{x-4}{x}$.

解：(1)

$$\begin{aligned}&\left(m+2+\frac{5}{2-m}\right)\cdot\frac{2m-4}{3-m}\\=&\frac{(m+2)(2-m)+5}{2-m}\cdot\frac{2m-4}{3-m}\\=&\frac{9-m^2}{2-m}\cdot\frac{2(m-2)}{3-m}\\=&\frac{(3-m)(3+m)}{2-m}\cdot\frac{-2(2-m)}{3-m}\\=&-2(m+3)；\end{aligned}$$

(2) $\left(\dfrac{x+2}{x^2-2x}-\dfrac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\dfrac{x-4}{x}$

$=\left[\dfrac{x+2}{x(x-2)}-\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\right]\cdot\dfrac{x}{x-4}$

$=\dfrac{(x+2)(x-2)-(x-1)x}{x(x-2)^2}\cdot\dfrac{x}{x-4}$

$=\dfrac{x^2-4-x^2+x}{(x-2)^2(x-4)}$

$=\dfrac{1}{(x-2)^2}.$

练习

1. 写出第 15.2.2 节中问题 3 和问题 4 的计算结果.
2. 计算:

(1) $\left(\dfrac{x}{2y}\right)^2\cdot\dfrac{y}{2x}-\dfrac{x}{y^2}\div\dfrac{2y^2}{x}$;　　(2) $\dfrac{x+1}{x}\cdot\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^2-\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$.

15.2.3 整数指数幂

我们知道，当 n 是正整数时，

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个}.$$

正整数指数幂有以下运算性质:

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ (m，n 是正整数);

(2) $(a^m)^n=a^{mn}$ (m，n 是正整数);

(3) $(ab)^n=a^nb^n$ (n 是正整数);

(4) $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ($a\neq0$，m，n 是正整数，$m>n$);

(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$ (n 是正整数).

其中，第 (5) 个性质就是分式的乘方法则.

此外，我们还学习过 0 指数幂，即当 $a\neq0$ 时，$a^0=1$.

思考

a^m 中指数 m 可以是负整数吗? 如果可以，那么负整数指数幂 a^m 表示什么?

由分式的约分可知，当 $a\neq 0$ 时，

$$a^3\div a^5=\frac{a^3}{a^5}=\frac{a^3}{a^3\cdot a^2}=\frac{1}{a^2}. \quad ①$$

另一方面，如果把正整数指数幂的运算性质（4）$a^m\div a^n=a^{m-n}$（$a\neq 0$，m，n 是正整数，$m>n$）中的条件 $m>n$ 去掉，即假设这个性质对于像 $a^3\div a^5$ 的情形也能使用，则有

$$a^3\div a^5=a^{3-5}=a^{-2}. \quad ②$$

学习了分式后，对指数的认识会有新发展. 即将讨论的 a^{-n}（n 是正整数）就属于分式.

由①②两式，我们想到如果规定 $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$（$a\neq 0$），就能使 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ 这条性质也适用于像 $a^3\div a^5$ 这样的情形. 为使上述运算性质适用范围更广，同时也可以更简便地表示分式，数学中规定：

一般地，当 n 是正整数时，

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq 0).$$

这就是说，a^{-n}（$a\neq 0$）是 a^n 的倒数.

引入负整数指数幂后，指数的取值范围就推广到全体整数.

你现在能说出当 m 分别是正整数、0、负整数时，a^m 各表示什么意思吗？

思考

引入负整数指数和 0 指数后，$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（m，n 是正整数）这条性质能否推广到 m，n 是任意整数的情形？

我们从特殊情形入手进行研究. 例如，

$a^3\cdot a^{-5}=\frac{a^3}{a^5}=\frac{1}{a^2}=a^{-2}=a^{3+(-5)}$，即

$$a^3\cdot a^{-5}=a^{3+(-5)};$$

$a^{-3}\cdot a^{-5}=\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{a^5}=\frac{1}{a^8}=a^{-8}=a^{(-3)+(-5)}$，即

$$a^{-3}\cdot a^{-5}=a^{(-3)+(-5)};$$

$a^0\cdot a^{-5}=1\cdot\frac{1}{a^5}=\frac{1}{a^5}=a^{-5}=a^{0+(-5)}$，即

$$a^0\cdot a^{-5}=a^{0+(-5)}.$$

可以换其他整数指数再验证这个规律.

归纳

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$这条性质对于m，n是任意整数的情形仍然适用.

探究

类似地，你可以用负整数指数幂或0指数幂对于其他正整数指数幂的运算性质进行试验，看看这些性质在整数指数幂范围内是否还适用.

事实上，随着指数的取值范围由正整数推广到全体整数，前面提到的运算性质也推广到整数指数幂.

例9 计算：

(1) $a^{-2} \div a^5$； (2) $\left(\dfrac{b^3}{a^2}\right)^{-2}$；

(3) $(a^{-1}b^2)^3$； (4) $a^{-2}b^2 \cdot (a^2b^{-2})^{-3}$.

解： (1) $a^{-2} \div a^5 = a^{-2-5} = a^{-7} = \dfrac{1}{a^7}$；

(2) $\left(\dfrac{b^3}{a^2}\right)^{-2} = \dfrac{b^{-6}}{a^{-4}} = a^4b^{-6} = \dfrac{a^4}{b^6}$；

(3) $(a^{-1}b^2)^3 = a^{-3}b^6 = \dfrac{b^6}{a^3}$；

(4) $a^{-2}b^2 \cdot (a^2b^{-2})^{-3} = a^{-2}b^2 \cdot a^{-6}b^6 = a^{-8}b^8 = \dfrac{b^8}{a^8}$.

根据整数指数幂的运算性质，当m，n为整数时，$a^m \div a^n = a^{m-n}$，$a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$，因此$a^m \div a^n = a^m \cdot a^{-n}$，即同底数幂的除法$a^m \div a^n$可以转化为同底数幂的乘法$a^m \cdot a^{-n}$. 特别地，$\dfrac{a}{b} = a \div b = a \cdot b^{-1}$，所以$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n$，即商的乘方$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$可以转化为积的乘方$(a \cdot b^{-1})^n$. 这样，整数指数幂的运算性质可以归结为：

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m，n是整数）；

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$（m，n是整数）；

(3) $(ab)^n = a^nb^n$（m，n是整数）.

练习

1. 填空：

(1) $3^0=$________，$3^{-2}=$________；

(2) $(-3)^0=$________，$(-3)^{-2}=$________；

(3) $b^0=$________，$b^{-2}=$________ $(b\neq 0)$.

2. 计算：

(1) $x^2y^{-3}(x^{-1}y)^3$；　　(2) $(2ab^2c^{-3})^{-2}\div(a^{-2}b)^3$.

我们已经知道，一些较大的数适合用科学记数法表示. 例如，光速约为 3×10^8 m/s，太阳半径约为 6.96×10^5 km，2010 年世界人口数约为 6.9×10^9 等.

有了负整数指数幂后，小于 1 的正数也可以用科学记数法表示. 例如，$0.000\,01=10^{-5}$，$0.000\,025\,7=2.57\times10^{-5}$，$0.000\,000\,025\,7=2.57\times10^{-8}$ 等，即小于 1 的正数可以用科学记数法表示为 $a\times10^{-n}$ 的形式，其中 $1\leqslant a<10$，n 是正整数. 这种形式更便于比较数的大小，例如 2.57×10^{-5} 显然大于 2.57×10^{-8}，前者是后者的 10^3 倍.

思考

对于一个小于 1 的正小数，如果小数点后至第一个非 0 数字前有 8 个 0，用科学记数法表示这个数时，10 的指数是多少？如果有 m 个 0 呢？

例 10　纳米（nm）是非常小的长度单位，1 nm $=10^{-9}$ m. 把 1 nm^3 的物体放到乒乓球上，就如同把乒乓球放到地球上. 1 mm^3 的空间可以放多少个 1 nm^3 的物体（物体之间的间隙忽略不计）?

> 纳米技术是一种高新技术，它可以在微观世界里直接探索 0.1～500 nm 范围内物质的特性，从而创造新材料. 这项技术有重要应用.

解： 1 mm $=10^{-3}$ m，1 nm $=10^{-9}$ m.

$$(10^{-3})^3\div(10^{-9})^3=10^{-9}\div10^{-27}=10^{-9-(-27)}=10^{18}.$$

1 mm^3 的空间可以放 10^{18} 个 1 nm^3 的物体.

10^{18} 是一个非常大的数，它是 1 亿（即 10^8）的 100 亿（即 10^{10}）倍.

练习

1. 用科学记数法表示下列数：

0.000 000 001，　0.001 2，　0.000 000 345，　0.000 000 010 8.

2. 计算：

(1) $(2\times10^{-6})\times(3.2\times10^{3})$；　　(2) $(2\times10^{-6})^{2}\div(10^{-4})^{3}$.

习题 15.2

复习巩固

1. 计算：

(1) $\dfrac{6ab}{5c^2}\cdot\dfrac{10c}{3b}$；　　(2) $\dfrac{-7x}{3yz}\cdot\left(-\dfrac{9y^2}{x^2}\right)$；

(3) $\dfrac{2m}{5n}\div\dfrac{4m^2}{10n^3}$；　　(4) $\dfrac{x}{5y}\div\left(-\dfrac{4x^2}{5y^2}\right)$.

2. 计算：

(1) $\dfrac{4a+4b}{5ab}\cdot\dfrac{15a^2b}{a^2-b^2}$；　　(2) $\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+4x+4}\cdot\dfrac{x+2}{3x^2+6xy}$；

(3) $\dfrac{x^2+1}{x-6}\cdot\dfrac{x^2-36}{x^3+x}$；　　(4) $\dfrac{y^2-x^2}{5x^2-4xy}\div\dfrac{x+y}{5x-4y}$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{4a^2b}{3cd^2}\cdot\dfrac{5c^2d}{4ab^2}\div\dfrac{2abc}{3d}$；　　(2) $\dfrac{81-a^2}{a^2+6a+9}\div\dfrac{a-9}{2a+6}\cdot\dfrac{a+3}{a+9}$；

(3) $\left(\dfrac{-3x^3y}{3z^2}\right)^2$；　　(4) $\left(\dfrac{-a}{b}\right)^2\div\left(\dfrac{2a^2}{5b}\right)^2\cdot\dfrac{a}{5b}$.

4. 计算：

(1) $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{1}{a+1}$；　　(2) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{3x}{x+1}$；

(3) $\dfrac{a}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{(a+1)^2}$；　　(4) $\dfrac{3}{(x-1)^2}-\dfrac{3x}{(x-1)^2}$.

5. 计算：

(1) $\dfrac{2a}{5a^2b}+\dfrac{3b}{10ab^2}$；　　(2) $\dfrac{2m}{5n^2p}-\dfrac{3n}{4mp^2}$；

(3) $\dfrac{3y}{2x+2y}+\dfrac{2xy}{x^2+xy}$；　　(4) $\dfrac{2x}{x^2-64y^2}-\dfrac{1}{x-8y}$.

6. 计算：

(1) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2\div\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)$；　　(2) $\left(\dfrac{3x^2}{4y}\right)^2\cdot\dfrac{2y}{3x}+\dfrac{x^2}{2y^2}\div\dfrac{2y^2}{x}$；

(3) $\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{2y}{x+y}\right)\cdot\dfrac{xy}{x+2y}\div\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$；

(4) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2\cdot\dfrac{2a-2b}{3a+3b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\div\dfrac{a}{b}$.

7. 计算：

(1) $3a^{-2}b \cdot 2ab^{-2}$；　　(2) $4xy^2z \div (-2x^{-2}yz^{-1})$；

(3) $(-3ab^{-1})^3$；　　(4) $(2m^2n^{-2})^2 \cdot 3m^{-3}n^3$.

8. 用科学记数法表示下列数：

0.000 01，　0.000 02，　0.000 000 567，　0.000 000 301.

9. 计算：

(1) $(2\times10^{-3})\times(5\times10^{-3})$；　　(2) $(3\times10^{-5})^2\div(3\times10^{-1})^2$.

综合运用

10. 一艘船顺流航行 n km 用了 m h，如果逆流航速是顺流航速的 $\frac{p}{q}$，那么这艘船逆流航行 t h 走了多少路程？

11. 在一块 a hm^2 的稻田上插秧，如果 10 个人插秧，要用 m 天完成；如果一台插秧机工作，要比 10 个人插秧提前 3 天完成. 一台插秧机的工作效率是一个人工作效率的多少倍？

12. 绿化队原来用漫灌方式浇绿地，a 天用水 m t，现在改用喷灌方式，可使这些水多用 3 天，现在比原来每天节约用水多少吨？

13. 两地相距 n km，提速前火车从一地到另一地要用 t h，提速后行车时间减少了 0.5 h，提速后火车的速度比原来速度快了多少？

14. 一块麦田有 m hm^2，甲收割完这块麦田需 n h，乙比甲少用 0.5 h 就能收割完这块麦田，两人一起收割完这块麦田需要多少小时？

拓广探索

15. 计算下列两式，探索其中的共同规律：

(1) $\frac{p}{mn}+\frac{m}{np}+\frac{n}{pm}$；　　(2) $\frac{c-a}{(a-b)(b-c)}+\frac{a-b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b-c}{(c-a)(a-b)}$.

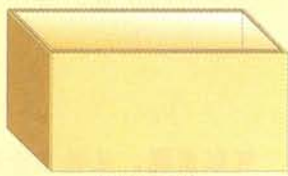
16. 一个无盖长方体盒子的容积是 V.

(1) 如果盒子底面是边长为 a 的正方形，这个盒子的表面积是多少？

(2) 如果盒子底面是长为 b、宽为 c 的长方形，这个盒子的表面积是多少？

(3) 上面两种情况下，如果盒子的底面面积相等，那么两种盒子的表面积相差多少？

(不计制造材料的厚度.)



(第 16 题)

阅读与思考

容器中的水能倒完吗

请看下面的问题：

一个容器装有1 L水，按照如下要求把水倒出：第1次倒出$\frac{1}{2}$ L水，第2次倒出的水量是$\frac{1}{2}$ L的$\frac{1}{3}$，第3次倒出的水量是$\frac{1}{3}$ L的$\frac{1}{4}$，第4次倒出的水量是$\frac{1}{4}$ L的$\frac{1}{5}$……第n次倒出的水量是$\frac{1}{n}$ L的$\frac{1}{n+1}$……按照这种倒水的方法，这1 L水经多少次可以倒完？

你可能会想到通过实验探寻问题的答案，但是实验中要精确地测量倒出的水量，当倒出的水量很小时测量的难度非常大．我们不考虑实际操作因素，将上面的问题抽象成数学模型加以解决．

容易列出倒n次水倒出的总水量为

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}. \qquad ①$$

根据分式的减法法则，

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

反过来，有

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}. \qquad ②$$

利用②可以把①改写为

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right). \qquad ③$$

合并③中的相反数，得$1-\frac{1}{n+1}$，即倒n次水倒出的总水量为

$$1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\ (\mathrm{L}).$$

可以发现，从数学上看，随着倒水次数n的不断增加，倒出的总水量$\frac{n}{n+1}$也不断增加．然而，不论倒水次数n有多大，倒出的总水量$\frac{n}{n+1}$总小于1．因此，按这种方法，容器中的1 L水是倒不完的．

15.3 分式方程

现在回到本章引言中的问题.

为解决引言中提出的问题，我们得到了方程

$$\frac{90}{30+v}=\frac{60}{30-v}. \qquad ①$$

方程①的分母中含未知数 v，像这样分母中含未知数的方程叫做**分式方程**(fractional equation). 我们以前学习的方程都是整式方程，它们的未知数不在分母中.

思考

如何解分式方程①?

我们已经熟悉一元一次方程等整式方程的解法，但是分式方程的分母中含未知数，因此解分式方程是一个新的问题. 能否将分式方程化为整式方程呢? 我们自然会想到通过“去分母”实现这种转变.

分式方程①中各分母的最简公分母是 $(30+v)(30-v)$. 把方程①的两边乘最简公分母可化为整式方程，解这个整式方程可得方程①的解.

解：方程①两边乘$(30+v)(30-v)$，得

$$90(30-v)=60(30+v).$$

解得

$$v=6.$$

将方程①化成整式方程的关键步骤是什么?

检验：将 $v=6$ 代入①中，左边$=\frac{5}{2}=$右边，因此$v=6$是分式方程①的解.

由上可知，江水的流速为 6 km/h.

归纳

解分式方程①的基本思路是将分式方程化为整式方程，具体做法是“去分母”，即方程两边乘最简公分母. 这也是解分式方程的一般方法.

练习

解下列方程:

(1) $\frac{5}{x}=\frac{7}{x-2}$;　　　　(2) $\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x-1}$.

下面我们再讨论一个分式方程

$$\frac{1}{x-5}=\frac{10}{x^2-25}. \qquad ②$$

为去分母，在方程两边乘最简公分母$(x-5)(x+5)$，得整式方程

$$x+5=10.$$

解得

$$x=5.$$

$x=5$ 是原分式方程的解吗？

将 $x=5$ 代入原分式方程检验，发现这时分母$x-5$和 x^2-25 的值都为 0，相应的分式无意义. 因此，$x=5$ 虽是整式方程 $x+5=10$ 的解，但不是原分式方程$\frac{1}{x-5}=\frac{10}{x^2-25}$的解. 实际上，这个分式方程无解.

思考

上面两个分式方程中，为什么$\frac{90}{30+v}=\frac{60}{30-v}$　①去分母后所得整式方程的解就是①的解，而$\frac{1}{x-5}=\frac{10}{x^2-25}$　②去分母后所得整式方程的解却不是②的解呢？

解分式方程去分母时，方程两边要乘同一个含未知数的式子（最简公分母）. 方程①两边乘$(30+v)(30-v)$，得到整式方程，它的解$v=6$. 当 $v=6$ 时，$(30+v)(30-v)\neq0$，这就是说，去分母时，①两边乘了同一个不为 0 的式子，因此所得整式方程的解与①的解相同.

方程②两边乘$(x-5)(x+5)$，得到整式方程，它的解 $x=5$. 当 $x=5$ 时，$(x-5)(x+5)=0$，这就是说，去分母时，②两边乘了同一个等于 0 的式子，这时所得整式方程的解使②出现分母为 0 的现象，因此这样的解不是②的解.

一般地，解分式方程时，去分母后所得整式方程的解有可能使原方程中分母为 0，因此应做如下检验：

将整式方程的解代入最简公分母，如果最简公分母的值不为 0，则整式方程的解是原分式方程的解；否则，这个解不是原分式方程的解.

例 1 解方程 $\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{3}{x}$.

解： 方程两边乘 $x(x-3)$，得

$$2x=3x-9.$$

解得

$$x=9.$$

检验：当 $x=9$ 时，$x(x-3)\neq 0$.

所以，原分式方程的解为 $x=9$.

例 2 解方程 $\dfrac{x}{x-1}-1=\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$.

解： 方程两边乘 $(x-1)(x+2)$，得

$$x(x+2)-(x-1)(x+2)=3.$$

解得

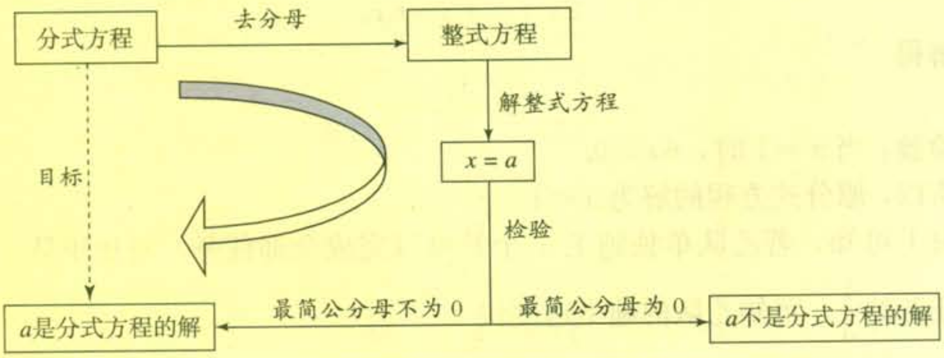
$$x=1.$$

检验：当 $x=1$ 时，$(x-1)(x+2)=0$，因此 $x=1$ 不是原分式方程的解.

所以，原分式方程无解.

归纳

解分式方程的一般步骤如下：



练习

解下列方程：

(1) $\frac{1}{2x}=\frac{2}{x+3}$；　　(2) $\frac{x}{x+1}=\frac{2x}{3x+3}+1$；

(3) $\frac{2}{x-1}=\frac{4}{x^2-1}$；　　(4) $\frac{5}{x^2+x}-\frac{1}{x^2-x}=0$.

解决实际问题中，有时需要列、解分式方程.

例 3　两个工程队共同参与一项筑路工程，甲队单独施工 1 个月完成总工程的$\frac{1}{3}$，这时增加了乙队，两队又共同工作了半个月，总工程全部完成. 哪个队的施工速度快？

分析： 甲队 1 个月完成总工程的$\frac{1}{3}$，设乙队单独施工 1 个月能完成总工程的$\frac{1}{x}$，那么甲队半个月完成总工程的__________，乙队半个月完成总工程的__________，两队半个月完成总工程的__________.

问题中的哪个等量关系可以用来列方程？

在用式子表示上述的量之后，再考虑如何列出方程.

解： 设乙队单独施工 1 个月能完成总工程的$\frac{1}{x}$. 记总工程量为 1，根据工程的实际进度，得

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2x}=1.$$

方程两边乘 $6x$，得

$$2x+x+3=6x.$$

解得

$$x=1.$$

检验：当 $x=1$ 时，$6x\neq0$.

所以，原分式方程的解为 $x=1$.

由上可知，若乙队单独施工 1 个月可以完成全部任务，对比甲队 1 个月完成任务的$\frac{1}{3}$，可知乙队的施工速度快.

例 4 某次列车平均提速 v km/h. 用相同的时间，列车提速前行驶 s km，提速后比提速前多行驶 50 km，提速前列车的平均速度为多少？

分析： 这里的字母 v，s 表示已知数据，设提速前列车的平均速度为 x km/h，那么提速前列车行驶 s km所用时间为________ h，提速后列车的平均速度为________ km/h，提速后列车运行 $(s+50)$km所用时间为________ h.

根据行驶时间的等量关系可以列出方程.

表达问题时，用字母不仅可以表示未知数（量），也可以表示已知数（量）.

解： 设提速前这次列车的平均速度为 x km/h，则提速前它行驶 s km 所用时间为 $\frac{s}{x}$ h；提速后列车的平均速度为 $(x+v)$ km/h，提速后它行驶 $(s+50)$ km所用时间为 $\frac{s+50}{x+v}$ h.

根据行驶时间的等量关系，得

$$\frac{s}{x}=\frac{s+50}{x+v}. \quad ①$$

方程两边乘 $x(x+v)$，得

$$s(x+v)=x(s+50).$$

解得

$$x=\frac{sv}{50}.$$

检验：由 v，s 都是正数，得 $x=\frac{sv}{50}$ 时 $x(x+v)\neq 0$.

所以，原分式方程的解为 $x=\frac{sv}{50}$.

答： 提速前列车的平均速度为 $\frac{sv}{50}$ km/h.

上面例题中，出现了用一些字母表示已知数据的形式，这在分析问题寻找规律时经常出现. 方程①是以 x 为未知数的分式方程，其中 v，s 是已知数，根据它们所表示的实际意义可知，它们是正数.

练习

1. 八年级学生去距学校 10 km 的博物馆参观，一部分学生骑自行车先走，过了 20 min后，其余学生乘汽车出发，结果他们同时到达. 已知汽车的速度是骑车学生速度的 2 倍，求骑车学生的速度.

2. 甲、乙二人做某种机械零件. 已知甲每小时比乙多做 6 个，甲做 90 个所用的时间与乙做 60 个所用的时间相等. 求甲、乙每小时各做零件多少个.

习题 15.3

复习巩固

1. 解下列方程：

(1) $\frac{1}{x}=\frac{5}{x+3}$；　　(2) $\frac{x}{x-1}=\frac{3}{2x-2}-2$；

(3) $\frac{2}{2x-1}=\frac{4}{4x^2-1}$；　　(4) $\frac{3}{x^2+2x}-\frac{1}{x^2-2x}=0$；

(5) $\frac{x}{x-3}=\frac{x+1}{x-1}$；　　(6) $\frac{x-3}{x-2}+1=\frac{3}{2-x}$；

(7) $\frac{2x+1}{x^2+x}=\frac{5}{6x+6}$；　　(8) $\frac{3}{2}-\frac{1}{3x-1}=\frac{5}{6x-2}$.

综合运用

2. 解方程求 x：

(1) $\frac{1}{x-1}+a=1\ (a\neq1)$；　　(2) $\frac{m}{x}-\frac{1}{x+1}=0\ (m\neq0，且\ m\neq1)$.

3. 甲、乙两人分别从距目的地 6 km 和 10 km 的两地同时出发，甲、乙的速度比是 3∶4，结果甲比乙提前 20 min 到达目的地. 求甲、乙的速度.

4. A，B 两种机器人都被用来搬运化工原料，A 型机器人比 B 型机器人每小时多搬运 30 kg，A 型机器人搬运 900 kg 所用时间与 B 型机器人搬运 600 kg 所用时间相等，两种机器人每小时分别搬运多少化工原料？

5. 张明 3 h 清点完一批图书的一半，李强加入清点另一半图书的工作，两人合作 1.2 h 清点完另一半图书. 如果李强单独清点这批图书需要几小时？
6. 一个圆柱形容器的容积为 V m^3，开始用一根小水管向容器内注水，水面高度达到容器高度一半后，改用一根口径为小水管 2 倍的大水管注水，向容器中注满水的全过程共用时间 t min. 求两根水管各自的注水速度.（提示：要考虑大水管的进水速度是小水管进水速度的多少倍.）

拓广探索

7. 改良玉米品种后，迎春村玉米平均每公顷增加产量 a t，原来产 m t 玉米的一块土地，现在的总产量增加了 20 t. 原来和现在玉米的平均每公顷产量各是多少？
8. 两个小组同时开始攀登一座 450 m 高的山，第一组的攀登速度是第二组的 1.2 倍，他们比第二组早 15 min 到达顶峰. 两个小组的攀登速度各是多少？如果山高为 h m，第一组的攀登速度是第二组的 a 倍，并比第二组早 t min 到达顶峰，则两组的攀登速度各是多少？
9. 联系实际问题，编出关于分式方程的应用题，并求出应用题的答案.

数学活动

活动1 探究比例的性质

找一组都不为 0 的数 a，b，c，d，使得分式$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$成立（即 a，b，c，d 成比例）．由这组数值计算下面各组中的两个分式的值，看看它们之间有什么关系．

(1) $\frac{a}{c}$ 和 $\frac{b}{d}$；　(2) $\frac{b}{a}$ 和 $\frac{d}{c}$；

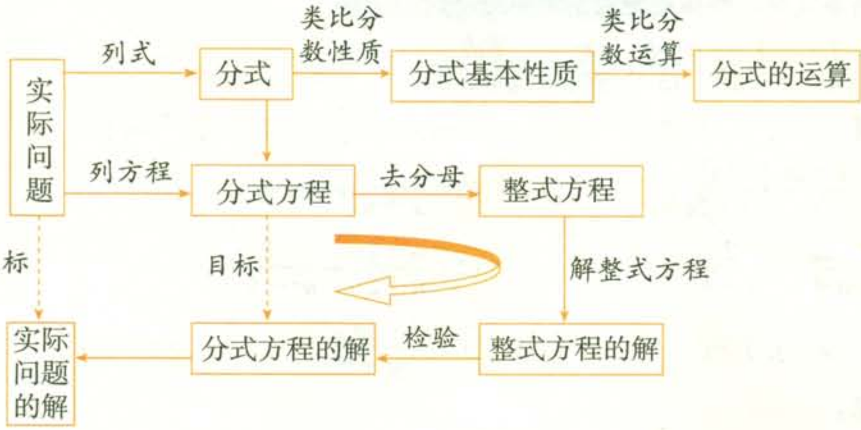
(3) $\frac{a+b}{b}$ 和 $\frac{c+d}{d}$；　(4) $\frac{a+b}{a-b}$ 和 $\frac{c+d}{c-d}$ $(a\neq b，c\neq d)$．

多找几组这样的数 a，b，c，d 试一试．

试猜想各组中的两个分式之间的关系，并证明你的猜想．

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

分式与分数具有类似的形式，也具有类似的性质和运算．本章通过与分数进行类比，得出分式的基本性质，引入分式的运算．本章还讨论了可化为一元一次方程的分式方程的解法，并应用它解决了一些实际问题．解分式方程的基本思路是：先通过去分母将分式方程化归为整式方程，求出整式方程的解，再经过检验得到分式方程的解．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1. 如何用式子形式表示分式的基本性质和运算法则？通过比较分数和分式的基本性质和运算法则，你有什么认识？类比的方法在本章的学习中起什么作用？

2. 分式怎样约分和通分？依据是什么？

3. n 是正整数时，a^{-n}（$a\neq0$）表示什么意思？整数指数幂有哪些运算性质？

4. 怎样解分式方程？解分式方程要注意什么？为什么解分式方程要检验？

5. 方程是一种刻画实际问题中数量关系的重要数学模型，你能结合利用分式方程解决实际问题的实例，谈谈你的体会吗？

复习题 15

复习巩固

1. 下列各式中，哪些是整式？哪些是分式？

$\frac{x}{3}$，$\frac{1}{n}$，$\frac{1}{a+5}$，$\frac{a+b}{15}$，$\frac{z}{x^2y}$，$\frac{2ab}{(a+b)^2}$.

2. 计算：

(1) $\frac{s-2t}{3s}\cdot\frac{6s^2}{s+2t}$；　(2) $\frac{x-y}{x+y}\div(x-y)^2$；

(3) $\frac{2a}{a+1}+\frac{2}{a+1}$；　(4) $\frac{u-2v}{u+2v}-\frac{2}{u^2-4v^2}$；

(5) $(x^{-2}y^3)^{-3}$；　(6) $\left(\frac{-3x}{y^3z}\right)^2$.

3. 计算：

(1) $\frac{2m}{3n}\cdot\left(\frac{3n}{p}\right)^2\div\frac{mn}{p^2}$；　(2) $a^2b^3\cdot(ab^2)^{-2}$；

(3) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}+\frac{x}{x-4}$；　(4) $\left(\frac{pq}{2r}\right)^3\div\frac{2p}{r^2}+\frac{1}{2q}$；

(5) $1\div\left(2x+\frac{1-x^2}{x}\right)$；　(6) $\frac{a-b}{a}\div\left(a-\frac{2ab-b^2}{a}\right)$；

(7) $1-\frac{a-b}{a+2b}\div\frac{a^2-b^2}{a^2+4ab+4b^2}$；　(8) $\left(x-y+\frac{4xy}{x-y}\right)\left(x+y-\frac{4xy}{x+y}\right)$.

4. 解下列方程：

(1) $\frac{5x+2}{x^2+x}=\frac{3}{x+1}$；　(2) $\frac{2x}{2x-5}-\frac{2}{2x+5}=1$.

综合运用

5. x 满足什么条件时下列分式有意义？

(1) $\frac{x-2}{2x+1}-\frac{1}{x-2}$；　(2) $\frac{3x}{x+2}\div\frac{x-2}{2x-3}$.

6. 填空：

(1) 当 x 为________时，分式$\frac{3x-6}{2x+1}$的值为 0；

(2) 当 $x(x\neq0)$ 为________时，分式$\frac{2x+1}{x^2}$的值为正；

(3) 当 $x(x\neq0)$ 为________时，分式$\frac{x-2}{x^2}$的值为负.

7. 什么情况下 $2(x+1)^{-1}$ 与 $3(x-2)^{-1}$ 的值相等？

8. 某工厂现在平均每天比原计划多生产 50 台机器，现在生产 600 台机器所需时间与原计划生产 450 台机器所需时间相同，现在平均每天生产多少台机器？

9. 一台收割机的工作效率相当于一个农民工作效率的 150 倍，用这台机器收割 10 hm^2 小麦比 100 个农民人工收割这些小麦要少用 1 h，这台收割机每小时收割多少公顷小麦？

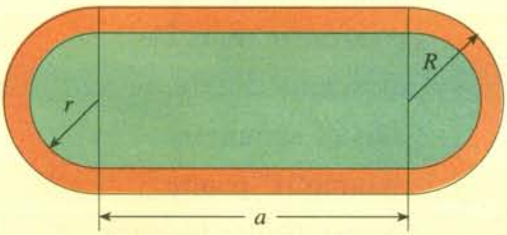
10. 一辆汽车开往距离出发地 180 km 的目的地，出发后第一小时内按原计划的速度匀速行驶，一小时后以原来速度的 1.5 倍匀速行驶，并比原计划提前 40 min 到达目的地. 求前一小时的行驶速度.

拓广探索

11. (1) 先化简，再求值：$\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}\div\dfrac{x+1}{x-1}\times\dfrac{1-x}{1+x}$，其中 $x=\dfrac{1}{2}$.

(2) 当 $x=-3.2$ 时，求 $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}\div\dfrac{x-2}{x^2+2x}+3$ 的值.

12. 如图，运动场两端的半圆形跑道外径为 R，内径为 r，中间为直跑道，整个跑道总面积为 S，试用含 S，R，r 的式子表示直跑道的长 a.



(第 12 题)

13. (1) 式子 $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}$ 的值能否为 0？为什么？

(2) 式子 $\dfrac{a-b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b-c}{(a-b)(c-a)}+\dfrac{c-a}{(a-b)(b-c)}$ 的值能否为 0？为什么？

部分中英文词汇索引

后　记

本册教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心依据教育部《义务教育数学课程标准（2011年版）》编写的，经国家基础教育课程教材专家工作委员会2013年审查通过。

本册教科书集中反映了基础教育教科书研究与实验的成果，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教研人员以及一线教师的集体智慧。我们感谢所有对教科书的编写、出版提供过帮助与支持的同仁和社会各界朋友，感谢整体设计艺术指导吕敬人等。

本册教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持。对此，我们表示衷心的感谢！但仍有部分作者未能取得联系，恳请入选作品的作者与我们联系，以便支付稿酬。

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们。让我们携起手来，共同完成义务教育教材建设工作！

联系方式
电　话：010-58758331
电子邮箱：jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
2013年5月

YIWU JIAOYU JIAOKESHU

SHUXUE

数学

八年级　上册

绿色印刷产品

ISBN 978-7-107-26163-3　定价：9.79 元

本书定价经豫发改收费[2006]632 号文批准。

全国举报电话：12358