经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学 1（必修）

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志

副 主 编　张饴慈　李延林　张思明

本册主编　严士健　李延林

编写人员　（按 姓 氏 笔 画 排 序）

任志瑜　李延林　严士健

赵　青　赵大悌　薛文叙

戴佳珉

北京师范大学出版社

·北 京·

基础教育教材网址 http://www.100875.com.cn

营销中心电话 010-58802783
服务中心电话 010-58802795
邮购科电话 010-58808083
传真 010-58802838
学科编辑电话 010-58802811 58802790
电子邮箱 shuxue3@bnupg.com
通信地址 北京师范大学出版社基础教育分社（100875）

绿色印刷 保护环境 爱护健康

亲爱的同学们：

你们手中的这本教科书采用绿色印刷标准印制，在它的封底印有“绿色印刷产品”标志．从2013年秋季学期起，北京地区出版并使用的义务教育阶段中小学教科书全部采用绿色印刷．

按照国家环境标准（HJ2503-2011）《环境标志产品技术要求 印刷 第一部分：平版印刷》，绿色印刷选用环保型纸张、油墨、胶水等原辅材料，生产过程注重节能减排，印刷产品符合人体健康要求．

让我们携起手来，支持绿色印刷，选择绿色印刷产品，共同关爱环境，一起健康成长！

北京市绿色印刷工程

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnupg.com
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：890mm×1240mm 1/16
印　　张：9.25
字　　数：230千字
版　　次：2011年5月第7版
印　　次：2019年7月第17次印刷
定　　价：7.20元
ISBN 978-7-303-07059-6

责任编辑：焦继红 兰小银 装帧设计：王 蕊
责任校对：陈 民 责任印制：孙文凯 窦春香

前　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法："授之以鱼，不如授之以渔"，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，"有问题"也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26册书组成：必修教材有5册；选修系列1有2册，选修系列2有3册，它们体现了发展的基本方向；选修系列3有6册，选修系列4有10册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为A，B两组；还有一类是复习题，分为A，B，C三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程．另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”．它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想．教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解．在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解．教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦.

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811.

目　　录

第一章　集合 ……………………………………………………………… (1)

§1　集合的含义与表示 ……………………………………………………… (3)

习题1—1 ……………………………………………………………… (6)

§2　集合的基本关系 ………………………………………………………… (7)

习题1—2 ……………………………………………………………… (9)

§3　集合的基本运算 ………………………………………………………… (11)

3.1　交集与并集 ……………………………………………………… (11)

3.2　全集与补集 ……………………………………………………… (12)

习题1—3 ……………………………………………………………… (14)

阅读材料　康托与集合论 ……………………………………………… (16)

本章小结 ……………………………………………………………………… (17)

复习题一 ……………………………………………………………………… (19)

第二章　函数 ……………………………………………………………… (21)

§1　生活中的变量关系 ……………………………………………………… (23)

习题2—1 ……………………………………………………………… (25)

§2　对函数的进一步认识 …………………………………………………… (26)

2.1　函数概念 ………………………………………………………… (26)

2.2　函数的表示法 …………………………………………………… (28)

2.3　映射 ……………………………………………………………… (32)

习题2—2 ……………………………………………………………… (34)

阅读材料　生活中的映射 ……………………………………………… (35)

§3　函数的单调性 …………………………………………………………… (36)

习题2—3 ……………………………………………………………… (39)

§4　二次函数性质的再研究 ………………………………………………… (41)

4.1　二次函数的图像 ………………………………………………… (41)

4.2　二次函数的性质 ………………………………………………… (45)

习题2—4 ……………………………………………………………… (47)

§5　简单的幂函数 …………………………………………………………… (49)

习题 2—5 …… (51)
阅读材料　函数概念的发展
——从解析式到对应关系 …… (52)
课题学习　个人所得税的计算 …… (53)
本章小结 …… (54)
复习题二 …… (56)

第三章　指数函数和对数函数 …… (59)
§1　正整数指数函数 …… (61)
习题 3—1 …… (63)
§2　指数扩充及其运算性质 …… (64)
2.1　指数概念的扩充 …… (64)
2.2　指数运算的性质 …… (66)
习题 3—2 …… (68)
§3　指数函数 …… (70)
3.1　指数函数的概念 …… (70)
3.2　指数函数 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像和性质 …… (70)
3.3　指数函数的图像和性质 …… (71)
习题 3—3 …… (76)
§4　对数 …… (78)
4.1　对数及其运算 …… (78)
4.2　换底公式 …… (83)
习题 3—4 …… (87)
§5　对数函数 …… (89)
5.1　对数函数的概念 …… (89)
5.2　对数函数 $y=\log_2 x$ 的图像和性质 …… (91)
5.3　对数函数的图像和性质 …… (93)
习题 3—5 …… (97)
§6　指数函数、幂函数、对数函数增长的比较 …… (98)
习题 3—6 …… (103)
阅读材料　历史上数学计算方面的三大发明 …… (104)
本章小结 …… (105)
复习题三 …… (108)

第四章　函数应用 …… (113)
§1　函数与方程 …… (115)

1.1　利用函数性质判定方程解的存在 ………………………………………… (115)
1.2　利用二分法求方程的近似解 ………………………………………… (117)
习题 4—1 ……………………………………………………………… (119)
§2　实际问题的函数建模 ……………………………………………… (120)
2.1　实际问题的函数刻画 ………………………………………………… (120)
2.2　用函数模型解决实际问题 …………………………………………… (123)
2.3　函数建模案例 ………………………………………………………… (125)
习题 4—2 ……………………………………………………………… (130)
阅读材料　函数与中学数学 ……………………………………………… (131)
本章小结 ……………………………………………………………………… (132)
复习题四 ……………………………………………………………………… (134)

探究活动　同种商品不同型号的价格问题 ………………………………… (135)

附录 1　部分数学专业词汇中英文对照表 ………………………………… (137)

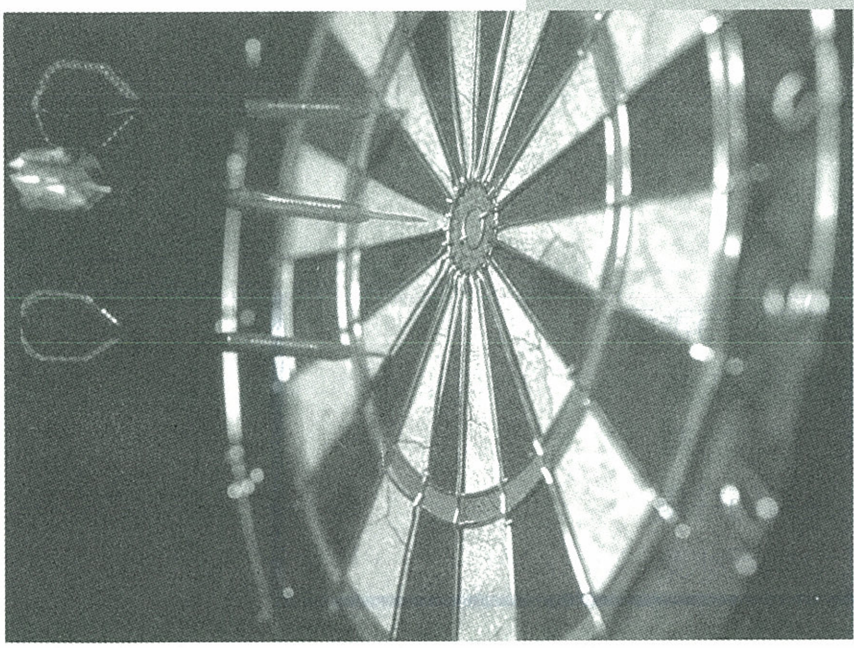
附录 2　信息检索网址导引 ……………………………………………… (139)

第一章 集 合

当你刚刚走进一个新的班集体时，坐在教室里环顾四周，有一些是你过去的同学，还有很多是陌生的面孔. 经过一段时间，你就会发现，班级里有些同学参加了校舞蹈队，有些同学参加了校乐队，有些同学参加了校篮球队……

学过这一章，你就可以用集合的语言非常清晰、方便地表述上面的事情.

集合语言是现代数学的基本语言. 使用这种语言，不仅有助于简洁、准确地表达数学内容，还可以用来刻画和解决生活中的许多问题. 学习集合，可以发展同学们用数学语言进行交流的能力.



§1 集合的含义与表示
§2 集合的基本关系
§3 集合的基本运算
3.1 交集与并集
3.2 全集与补集

§1 集合的含义与表示

中国地域辽阔，湖泊众多，统计显示，水面面积在 1 km^2 以上的天然湖有 2 800 多个；水面面积在 100 km^2 以上的天然湖有 130 多个；此外，还有大大小小的人工湖（水库）. 下面列出了水面面积在 800 km^{2}以上的天然湖中的 9 个.

湖泊名称	所在地	水面面积 /km^2	湖面海拔 /m	蓄水量 /(亿 m^3)	湖水最深 /m	湖水性质
青海湖	青海	4 340	3 195	778.0	27	咸
鄱阳湖	江西	3 583	22	150.1	29	淡
洞庭湖	湖南	2 691	33	155.4	24	淡
太湖	江苏	2 428	3	51.4	3	淡
呼伦湖	内蒙古	2 339	546	131.3	8	淡
纳木错湖	西藏	1 962	4 718	768.0	35	咸
洪泽湖	江苏	1 577	12	27.9	4	淡
南四湖	山东	1 097	33	16.1	3	淡
博斯腾湖	新疆	992	1 048	80.2	16	淡

从表中我们可以看到：

水面面积在 3 000 km^2 以上的有：青海湖、鄱阳湖；

水面面积在 2 000 至 3 000 km^2 的有：洞庭湖、太湖、呼伦湖；

水面面积在 990 至 2 000 km^2 的有：纳木错湖、洪泽湖、南四湖、博斯腾湖.

这样，我们将这些湖按面积大小分成了三类. 根据需要，还可以将这些湖按咸水湖和淡水湖分类或按其他标准进行分类.

一般地，指定的某些对象的全体称为**集合**. 集合常用大写字母 $A,B,C,D,\cdots$标记. 集合中的每个对象叫作这个集合的**元素**. 常用小写字母 $a,b,c,d,\cdots$表示集合中的元素. 例如，青海湖和鄱阳湖组成了 3 000 km^2 以上的湖的集合，可以记为 A，青海湖、鄱阳湖是它的元素；小于 10 的素数集合可以记为 B，它的元素为 2，3，5，7.

给定一个集合 A，任何一个对象 a 是不是这个集合的元素就确定了. 若 a 在集合 A 中，就说 a **属于**集合 A，记作 $a\in A$；若 a 不在集合 A 中，就说 a **不属于**集合 A，记作 $a\notin A$. 例如，在上述素数问题中，$2\in B$，$6\notin B$.

数的集合简称**数集**. 下面是一些常用的数集及其记法：

自然数组成的集合简称**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$；

正整数组成的集合简称**正整数集**，记作 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$；

整数组成的集合简称**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$；

有理数组成的集合简称**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$；

实数组成的集合简称**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

例如，$0\in\mathbf{N}$，$0.618\in\mathbf{Q}$，$\sqrt{3}\in\mathbf{R}$，$\pi\in\mathbf{R}$ 等.

集合的常用表示法有列举法和描述法.

列举法是把集合中的元素一一列举出来写在大括号内的方法. 符号表示为 $\{,\cdots,\}$，如 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

例如，在江苏省水面面积在 1 500 km^2 以上的天然湖组成的集合用列举法可以表示为

$$C=\{\text{太湖，洪泽湖}\}.$$

❶若一个集合中的元素都是在实数范围内，如 $\{x\in\mathbf{R}\mid 3<x<10\}$ 可简记为 $\{x\mid 3<x<10\}$.

有时，我们无法将集合中的元素一一列举出来. 符号表示为 $\{\mid\}$，如 $\{x\in A\mid p(x)\}$. 例如，大于 3 小于 10 的实数组成的集合，我们用 $\{x\in\mathbf{R}\mid 3<x<10\}$ 来表示❶. 像这样，用确定的条件表示某些对象属于一个集合并写在大括号内的方法叫**描述法**.

例如，不等式 $x-32>0$ 的解集用描述法可以表示为

$$A=\{x\mid x>32\};$$

方程 $x^2+2x=0$ 的解集用描述法可以表示为

$$B=\{x\mid x^2+2x=0\}.$$

又如，在平面直角坐标系中第二象限的点构成的集合，用描述法可以表示为

$$C=\{(x,y)\mid x<0,\text{且 } y>0\}.$$

函数 $y=2x$ 图像上的点 (x,y) 的集合可以表示为

$$D=\{(x,y)\mid y=2x\}.$$

列举法和描述法是集合的常用表示方法. 用什么方法表示集合，要具体问题具体分析.

在给定的集合中，元素是互异的. 也就是说，集合中的任何两个元素都不相同，因此，集合中的元素没有重复现象.

例 1 用列举法表示下列集合：

(1) 由大于 3 小于 10 的整数组成的集合；

(2) 方程 $x^2-9=0$ 的解的集合.

解 (1) 由大于 3 小于 10 的整数组成的集合用列举法可表示为

$$\{4,5,6,7,8,9\};$$

(2) 方程 $x^2-9=0$ 的解的集合用列举法可表示为

$\{-3,3\}$.

例 2 用描述法表示下列集合：

(1) 小于 10 的所有有理数组成的集合；

(2) 所有偶数组成的集合.

解 (1) 小于 10 的所有有理数组成的集合用描述法可表示为

$$\{x\in\mathbf{Q} \mid x<10\};$$

(2) 偶数是能被 2 整除的数，可以写成 $x=2n(n\in\mathbf{Z})$ 的形式，因此，偶数的集合用描述法可表示为

$$\{x \mid x=2n, n\in\mathbf{Z}\}^{❶}.$$

❶ 所有偶数组成的集合也可以表示为 $\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2}x\in\mathbf{Z}\right\}$.

一般地，我们把含有限个元素的集合叫**有限集**，如集合 $A=\{-2,3\}$；含无限个元素的集合叫**无限集**，如整数的集合 $\mathbf{Z}$.

我们再看一个例子，由于方程 $x^2+2=0$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 内无解，因此，它的实数解组成的集合 $\{x\in\mathbf{R} \mid x^2+2=0\}$ 中没有任何元素. 我们把不含有任何元素的集合叫作**空集**，记作 $\varnothing$，如集合 $\{x\in\mathbf{R} \mid x^2+2=0\}$ 就是空集.

练 习

1. 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空：

0 ___ $\mathbf{N}$； 0 ___ $\mathbf{N}_+$； -1 ___ $\mathbf{N}$； -1 ___ $\mathbf{Z}$； 1 ___ $\mathbf{Q}$；

$\frac{1}{2}$ ___ $\mathbf{Q}$； 3.14 ___ $\mathbf{Q}$； 3.14 ___ $\mathbf{Z}$； π ___ $\mathbf{Q}$； π ___ $\mathbf{Z}$；

π ___ $\mathbf{R}$； $3\sqrt{2}$ ___ $\mathbf{N}$； $3\sqrt{2}$ ___ $\mathbf{Z}$； $3\sqrt{2}$ ___ $\mathbf{Q}$； $3\sqrt{2}$ ___ $\mathbf{R}$.

2. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 小于 20 的素数组成的集合；

(2) 方程 $x^2-4=0$ 的解的集合；

(3) 由大于 3 小于 9 的实数组成的集合；

(4) 所有奇数组成的集合.

3. 下列四个集合中，空集是(　　).

A. $\{0\}$　　B. $\{x \mid x>8$，且 $x<5\}$

C. $\{x\in\mathbf{N} \mid x^2-1=0\}$　　D. $\{x \mid x>4\}$

4. 分别举出有限集、无限集、空集的例子，并与同学互相交流.

习 题 1—1

A 组

1. 选择适当的方法表示下列集合，并指出哪些是无限集，哪些是有限集，哪些是空集：

(1) 直角坐标系中纵坐标与横坐标相等的点的集合；

(2) 一年之中的四个季节组成的集合；

(3) 方程 $x^2+x+1=0$ 的实数解集；

(4) 满足不等式 $1<1+2x<19$ 的素数组成的集合.

2. 填空题

(1) 用列举法表示集合 $\{x\in\mathbf{R}\mid(x-1)^2(x+1)=0\}$ 为__________________；

(2) 用列举法表示集合 $\left\{x\in\mathbf{N}\mid\frac{6}{6-x}\in\mathbf{N}\right\}$ 为__________________；

(3) 用描述法表示集合 $\{2,4,6,8\}$ 为__________________；

(4) 用描述法表示集合 $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right\}$ 为__________________.

3. 用列举法表示下列集合：

(1) $B=\{y\in\mathbf{N}\mid y=-x^2+6,x\in\mathbf{N}\}$；

(2) $C=\{(x,y)\mid y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

4. 用描述法表示下列集合：

(1) 直角坐标平面内第四象限内的点集；

(2) 抛物线 $y=x^2-2x+2$ 上的点组成的集合.

B 组

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},a\neq0\}$ 中只有一个元素（A 也可叫作单元素集合），求 a 的值，并求出这个元素.

2. 当 a,b 满足什么条件时，集合 $A=\{x\mid ax+b=0\}$ 分别是有限集、无限集、空集？

§2　集合的基本关系

实例分析

我们考察下面三个实例：

1. 高一(1)班 50 位同学组成集合 B，其中女同学组成集合 A. 集合 A 是集合 B 的一部分，因此有：

$$若\ a\in A，则\ a\in B.$$

2. 所有的矩形都是平行四边形. 若用 M 表示矩形组成的集合，用 P 表示平行四边形组成的集合，则有：

$$若\ a\in M，则\ a\in P.$$

3. 所有的有理数都是实数. 因此有：

$$若\ a\in \mathbf{Q}，则\ a\in \mathbf{R}.$$

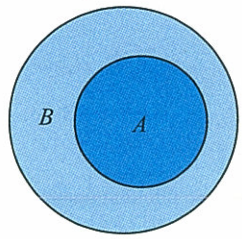


图 1-1

抽象概括

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，即若 $a\in A$，则 $a\in B$，我们就说集合 A **包含于**集合 B，或集合 B **包含**集合 A，记作

$$A\subseteq B(或\ B\supseteq A)，$$

这时我们说集合 A 是集合 B 的**子集**.

比如，上面实例 2 就是 $M\subseteq P$.

显然，**任何一个集合都是它本身的子集**，即

$$A\subseteq A.$$

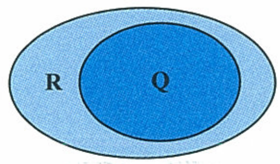


图 1-2

为了直观地表示集合间的关系，我们常用封闭曲线的内部表示集合，称为 **Venn 图**. 图 1-1 直观地表示了实例 1 中集合 A 是集合 B 的子集，图 1-2 表示实例 3 中集合 $\mathbf{Q}$ 是集合 $\mathbf{R}$ 的子集.

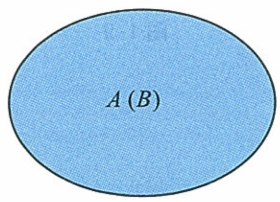


图 1-3

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 中的元素，这时，我们就说集合 A 与集合 B **相等**(如图 1-3)，记作

$$A=B.$$

例如，$A=\{x\mid(x-7)(x+5)=0\}$，$B=\{-5,7\}$，不难看出，

$$A=B.$$

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，我们就说集合 A 是集合 B 的**真子集**(如图 1-4)，记作

$$A\subsetneqq B(\text{或 } B\supsetneqq A).$$

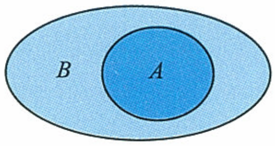


图 1-4

例如，$\{a,b\}\subsetneqq\{a,b,c\}$； $\mathbf{N}_+\subsetneqq\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

当集合 A 不包含于集合 B，或集合 B 不包含集合 A 时，记作

$$A\not\subseteq B(\text{或 } B\not\supseteq A).$$

例如，集合 $A=\{1,3,5\}$，集合 $B=\{2,4,6\}$，则

$$A\not\subseteq B \quad (\text{如图 1-5});$$

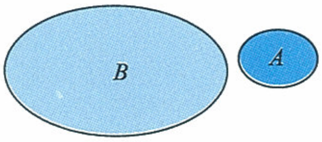


图 1-5

集合 $A=\{1,3,5\}$，集合 $B=\{5,7,9\}$，则

$$A\not\subseteq B \quad (\text{如图 1-6}).$$

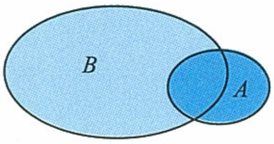


图 1-6

又如，集合 $\{x\mid x\geqslant 9\}$ 与集合 $\{x\mid x\leqslant 3\}$ 的关系，可以表示为

$$\{x\mid x\geqslant 9\}\not\subseteq\{x\mid x\leqslant 3\} \quad (\text{如图 1-7})^{❶};$$

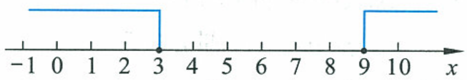


图 1-7

❶数集的表示常借助于数轴.

集合 $\{x\mid x\geqslant 9\}$ 与集合 $\{x\mid x\leqslant 12\}$ 的关系，可以表示为

$$\{x\mid x\geqslant 9\}\not\subseteq\{x\mid x\leqslant 12\} \quad (\text{如图 1-8}).$$

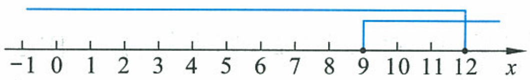


图 1-8

我们规定：**空集是任何集合的子集**. 也就是说，对于任何一个集合 A，都有

$$\varnothing\subseteq A.$$

例 1 某工厂生产的产品在质量和长度上都合格时，该产品才合格. 若用 A 表示合格产品的集合，B 表示质量合格的产品的集合，C 表示长度合格的产品的集合，则下列包含关系哪些成立？

$$A\subseteq B,\ B\subseteq A,\ A\subseteq C,\ C\subseteq A.$$

试用 Venn 图表示这三个集合的关系.

解 由题意知，$A\subseteq B$，$A\subseteq C$ 成立，Venn 图表示如图 1-9 所示.

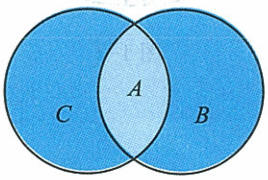


图 1-9

例 2 写出集合 $\{0,1,2\}$ 的所有子集，并指出其中哪些是它的真子集.

解 $\{0,1,2\}$ 的所有子集是：

$\varnothing$;$\{0\}$,$\{1\}$,$\{2\}$;$\{0,1\}$,$\{0,2\}$,$\{1,2\}$;$\{0,1,2\}$.

除了$\{0,1,2\}$以外,其余7个集合都是它的真子集.

练 习

1. 说说$A\subseteq B$与$A\subsetneqq B$的区别.
2. 设$A=\{$正方形$\}$,$B=\{$矩形$\}$,$C=\{$平行四边形$\}$,$D=\{$梯形$\}$,则下列包含关系中不正确的是( ).

   A. $A\subseteq B$ B. $B\subseteq C$ C. $C\subseteq D$ D. $A\subseteq C$
3. 对于集合A,B,C,如果$A\subseteq B$,$B\subseteq C$,那么A与C的包含关系是________.
4. 指出下列各组中两个集合的包含关系:

   (1) $\{$等腰三角形$\}$与$\{$等边三角形$\}$;

   (2) $\varnothing$与$\{0\}$;

   (3) $\{\sqrt{2},2\sqrt{2}\}$与$\{x\mid x^2-3\sqrt{2}x+4=0\}$;

   (4) $\{$被3整除的数$\}$与$\{$被6整除的数$\}$.
5. 写出下列集合的所有子集:

   (1) $\varnothing$; (2) $\{0\}$; (3) $\{x\mid (x+1)(x-2)(x-3)=0\}$.

习 题 1—2

A 组

1. 举例说明集合间的包含关系与相等关系,并用图形直观表示.
2. 选择题

   (1) 集合$\{y\in\mathbf{N}\mid y=-x^2+6,x\in\mathbf{N}\}$的真子集的个数是( );

   A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

   (2) 下列表示① $\{0\}=\varnothing$,② $\{2\}\subseteq\{2,4,6\}$,③ $\{2\}\in\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,④ $0\in\{0\}$中,错误的是( ).

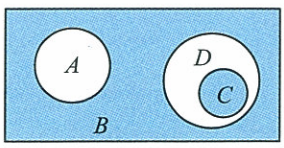
   A. ①② B. ①③ C. ②④ D. ②③
3. 用适当的符号填空(“$=$”“$\subseteq$”“$\supseteq$”)

   (1) 已知集合$M=\{1,3,5\}$,集合$P=\{5,1,3\}$,则M______P;

   (2) 设集合$A=\{x\mid (x-3)(x+2)=0\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x-3}{x+3}=0\right\}$,则$A$____$B$.
4. 图中反映的是“文学作品”“散文”“小说”“叙事散文”这四个文学概念之间的关系,请作适当的选择填入下面的空格:

   A为__________; B为__________;

   C为__________; D为__________.



(第4题)

5. 判断下列各式是否正确，并说明理由：

(1) $\sqrt{3}\subseteq\{x|x\leqslant 2\}$；　　(2) $\sqrt{3}\in\{x|x\leqslant 2\}$；

(3) $\{\sqrt{3}\}\subseteq\{x|x\leqslant 2\}$；　　(4) $\varnothing\in\{x|x\leqslant 2\}$；

(5) $\varnothing\subseteq\{x|x\leqslant 2\}$；　　(6) $\varnothing\subsetneqq\{x|x\leqslant 2\}$；

(7) $\{a,b,c,d\}\subseteq\{e,f,b,d,g\}$；　　(8) $\{a,b,c,d\}\supseteq\{e,f,b,d,g\}$.

B　组

已知集合 A,B,C，且 $A\subseteq B,A\subseteq C$，若 $B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{0,2,4,8\}$，集合 A 中最多含有几个元素？

§3 集合的基本运算

3.1 交集与并集

实例分析

对于集合 $A=\{6,8,10,12\}$，集合 $B=\{3,6,9,12\}$，容易看出，集合 $C=\{6,12\}$ 由集合 A 与 B 的所有公共元素组成(如图 1-10)；集合 $D=\{3,6,8,9,10,12\}$ 由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素组成(如图 1-11).

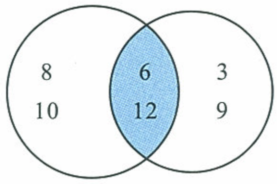


图 1-10

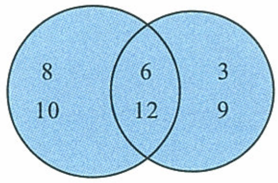


图 1-11

对于集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，集合 $B=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$，则集合 $C=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$ 由集合 A 与 B 的所有公共元素组成；集合 $D=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$ 由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素组成(如图 1-12).

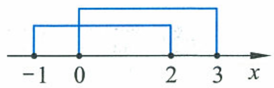


图 1-12

抽象概括

一般地，由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合，叫作 A 与 B 的**交集**(如图 1-13)，记作 $A\cap B$(读作"A 交 B")，即

$$A\cap B=\{x|x\in A,且\ x\in B\}.$$

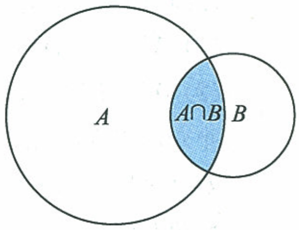


图 1-13

由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素组成的集合，叫作 A 与 B 的**并集**(如图 1-14)，记作 $A\cup B$(读作"A 并 B")，即

$$A\cup B=\{x|x\in A,或\ x\in B\}^{❶}.$$

❶求集合的交集、并集是集合的基本运算. 两个集合经过运算仍是一个集合.

根据交集定义，容易知道，对于任何集合 A，B，有

$$A\cap B=B\cap A,\ A\cap B\subseteq A,\ A\cap B\subseteq B;$$

特别地，$$A\cap A=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing.$$

根据并集定义，容易知道，对于任何集合 A，B，有

$$A\cup B=B\cup A,\ A\subseteq A\cup B,\ B\subseteq A\cup B;$$

特别地，$$A\cup A=A,\ A\cup\varnothing=A.$$

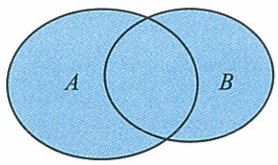


图 1-14

例 1 某学校所有男生组成集合 A，一年级的所有学生组成集合 B，一年级的所有男生组成集合 C，一年级的所有女生组成集合 D.

求 $A\cap B$，$C\cup D$.

解 $A\cap B=\{x|x$ 是该校一年级的男生$\}=C$；

$C\cup D=\{x|x$ 是该校一年级学生$\}=B$.

例 2 设 $A=\{x|x$ 是不大于 10 的正奇数$\}$，$B=\{x|x$ 是 12 的正约数$\}$. 求 $A\cap B$，$A\cup B$.

解 $A=\{x|x$ 是不大于 10 的正奇数$\}=\{1,3,5,7,9\}$，

$B=\{x|x$ 是 12 的正约数$\}=\{1,2,3,4,6,12\}$，

$A\cap B=\{1,3\}$，

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,9,12\}$.

思考交流

举例验证下列等式，并与同学讨论交流：

(1) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

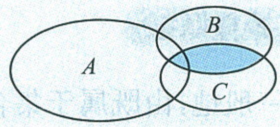
(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

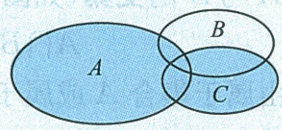
由上述结论，$(A\cap B)\cap C$ 可记作 $A\cap B\cap C$；

$(A\cup B)\cup C$ 可记作 $A\cup B\cup C$.

练 习

1. 已知 $A=\{x|x^2-16=0\}$，$B=\{x|x^3+64=0\}$. 求 $A\cap B$，$A\cup B$.
2. 已知 $A=\{6,8,9\}$，$B=\{1,3,7,8,9\}$，$C=\{2,6,8,9\}$. 求：
   (1) $A\cup B$， $A\cap C$， $B\cap C$， $A\cap B\cap C$， $A\cup B\cup C$；
   (2) $A\cap(B\cup C)$， $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
   并分别用 Venn 图表示.
3. 若 $A=\{x|-1\leqslant x<2\}$，$B=\{x|-1<x<3\}$. 求 $A\cap B$，$A\cup B$，并用数轴表示.
4. 请用集合 A,B,C 表示图中的阴影部分.





(第 4 题)

3.2 全 集 与 补 集

在研究某些集合的时候，这些集合往往是某个给定集合的子集，这个给定的集合叫作**全集**，常用符号 U 表示. 全集含有我们所要研究的这些集合的全部元素.

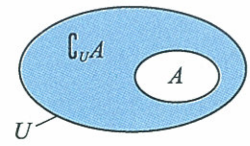


图 1-15

设 U 是全集，A 是 U 的一个子集（即 $A\subseteq U$），则由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫作 U 中子集 A 的**补集**（或**余集**）（如图 1-15），记作 $\complement_U A$，即

$$\complement_U A=\{x\mid x\in U,且\ x\notin A\}.$$

例如，设全集 U 为中学所开的课程组成的集合，$A=\{数学\}$，则其他课程组成集合 $\complement_U A$.

由补集的定义可以知道

$$A\cup(\complement_U A)=U,\quad A\cap(\complement_U A)=\varnothing.$$

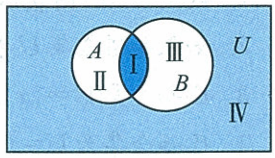


图 1-16

例 3　试用集合 A,B 的交集、并集、补集分别表示图 1-16 中Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个部分所表示的集合.

解　Ⅰ部分：$A\cap B$；

Ⅱ部分：$A\cap(\complement_U B)$；

Ⅲ部分：$B\cap(\complement_U A)$；

Ⅳ部分：$\complement_U(A\cup B)$或$(\complement_U B)\cap(\complement_U A)$.

例 4　设全集为 $\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x<5\}$，$B=\{x\mid x>3\}$. 求：

(1) $A\cap B$；　　(2) $A\cup B$；

(3) $\complement_{\mathbf{R}}A$，$\complement_{\mathbf{R}}B$；　　(4) $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$；

(5) $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)$；　　(6) $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$；

(7) $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)$.

并指出其中相等的集合.

解　(1) 在数轴上，画出集合 A 和 B（如图 1-17），

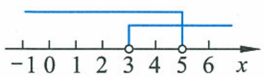


图 1-17

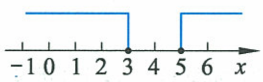


图 1-18

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{x\mid x<5\}\cap\{x\mid x>3\}\\&=\{x\mid 3<x<5\};\end{aligned}$$

(2) $A\cup B=\{x\mid x<5\}\cup\{x\mid x>3\}=\mathbf{R}$；

(3) 在数轴上，画出集合 $\complement_{\mathbf{R}}A$ 和 $\complement_{\mathbf{R}}B$（如图 1-18），

$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x\geqslant 5\}$，　$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x\leqslant 3\}$；

(4) $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid x\geqslant 5\}\cap\{x\mid x\leqslant 3\}$
$=\varnothing$；

(5) $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid x\geqslant 5\}\cup\{x\mid x\leqslant 3\}$
$=\{x\mid x\leqslant 3,或\ x\geqslant 5\}$；

(6) $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=\{x\mid x\leqslant 3,或\ x\geqslant 5\}$；

(7) $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\varnothing$.

其中相等的集合是

$$\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup(\complement_{\mathbf{R}}B);$$
$$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap(\complement_{\mathbf{R}}B).$$

练 习

1. 某校举行运动会，设集合 $U=\{x|x$ 是该校参加运动会的学生$\}$，$A=\{x|x$ 是该校参加跳远项目的学生$\}$，$B=\{x|x$ 是该校参加赛跑项目的学生$\}$，$C=\{x|x$是该校既参加赛跑又参加跳远项目的学生$\}$. 试用 Venn 图表示这些集合间的关系.
2. 如果知道全集 U 和它的子集 A，又知道$\complement_U A=\{5\}$，那么元素 5 与集合 U，A 的关系如何呢？
3. 已知全集 $U=\{x|x$ 是 12 的正约数$\}$，$A=\{x|x$ 是 4 与 6 的最大正公约数或最小公倍数$\}$. 求$\complement_U A$.
4. 已知全集为 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$\complement_U A=\{5,6\}$，则集合 $A=$________.
5. 设全集为 $\mathbf{R}$，$A=\{x|x<5\}$，$B=\{x|x\leqslant 3\}$，则$\complement_{\mathbf{R}}A$ 与$\complement_{\mathbf{R}}B$ 的关系是__________.

习 题 1—3

A 组

1. 设 $A=\{$直角三角形$\}$，$B=\{$等腰三角形$\}$，$C=\{$等边三角形$\}$，$D=\{$等腰直角三角形$\}$，则下列结论不正确的是(　　).

   A. $A\cap B=D$　　B. $A\cap D=D$　　C. $B\cap C=C$　　D. $A\cup B=D$

2. 填空题

   (1) 若 A，B 不是空集，用适当的符号($\subseteq$，$\supseteq$)填空：

   $A\cap B$ ________ A，$A\cap B$ ________ B，$A\cup B$ ________ A，$A\cup B$ ________ B，
   $A\cap B$ ________ $A\cup B$；

   (2) 设 $A=\{x|x$ 是锐角三角形$\}$，$B=\{x|x$ 是钝角三角形$\}$，则$A\cap B=$__________；

   (3) 设 $A=\{x|x$ 是平行四边形$\}$，$B=\{x|x$ 是菱形$\}$，则 $A\cup B=$______；

   (4) 设$A=\{(x,y)|2x-y=1\}$，$B=\{(x,y)|5x+y=6\}$，
   $C=\{(x,y)|2x=y+1\}$，$D=\{(x,y)|2x-y=8\}$，
   则 $A\cap B=$______________，$B\cap C=$______________，$A\cap D=$______________；

   (5) 设 $A=\{x|-5<x<2\}$，$B=\{x|-2<x<5\}$，则 $A\cup B=$________；

   (6) 在直角坐标平面内，x 轴上点的集合用描述法可表示为________；
   在直角坐标平面内，不在第一、三象限的点的集合用描述法可表示为__________.

3. (1)已知 $A=\{x|x^2-4=0\}$，$B=\{x|x-1>0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$；
   (2)已知 $A=\{x|3x-2>0\}$，$B=\{x|x-3\leqslant 0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

4. 已知$A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{a,b,e,f,g\}$，$C=\{b,g,h\}$. 求：

(1) $A\cap B$；　(2) $A\cup B\cup C$；　(3) $(A\cap B)\cup C$；

(4) $A\cup(B\cap C)$；　(5) $(A\cup B)\cap C$；　(6) $A\cap(B\cup C)$.

5. 已知$U=\{x\mid x$是三角形$\}$，$A=\{x\mid x$是锐角三角形$\}$，$B=\{x\mid x$是等腰三角形$\}$. 求$\complement_U A$，$\complement_U B$.

6. 设$U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x<-4$，或$x>1\}$，$B=\{x\mid -2<x<3\}$. 求$\complement_U(A\cap B)$和$\complement_U(A\cup B)$.

7. 本节例4中，得出了等式：

$$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)；$$

$$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B).$$

这个等式是偶然成立，还是有普遍意义(即可看成是一个公式)？试着用 Venn 图分析说明.

B　组

1. 已知集合M满足：$M\cap\{2,6\}=\{2\}$，$M\cap\{8,4\}=\{4\}$，$M\cap\{10,12\}=\{10\}$，$M\subseteq\{2,4,6,8,10,12\}$. 求集合$M$.

2. 某学校先后举办了多个学科的实践活动. 高一(1)班有50名同学，其中30名同学参加了数学活动，26名同学参加了物理活动，15名同学同时参加了数学、物理两个学科的活动，这个班有多少同学既没有参加数学活动，也没有参加物理活动？

阅读材料

康托与集合论

翻开高中数学课本，首先映入眼帘的数学概念是集合. 研究集合的数学理论在现代数学中称为集合论. 它不仅是数学的一个基本分支，在数学中占据着一个极其独特的地位，而且其基本概念已渗透到数学的所有领域. 如果把现代数学比作一座无比辉煌的大厦，那么可以说集合论正是构成这座大厦的基石. 其创始人康托也以其集合论的成就被誉为对 20 世纪数学发展影响最深的学者之一.

康托(Cantor，G. F. P.，1845—1918)，德国数学家.

康托生于俄罗斯圣彼得堡，自幼对数学有浓厚兴趣. 1867 年，22 岁的康托获博士学位，以后一直在哈雷大学任教，从事数学教学与研究.

人们把康托最早提出集合论思想的那一天 1873 年 12 月 7 日定为集合论诞生日. 他把集合理解为：把若干确定的有区别的(不论是具体的或抽象的)事物合并起来，看作一个整体. 其中各事物称为该集合的元素. 不到 30 岁的康托向神秘的“无穷”宣战，他靠着智慧和汗水，成功地证明了一条直线上的点能够和一个平面上的点一一对应，也能和空间中的点一一对应. 这样看起来，1 cm 长的线段内的点与太平洋面上的点，以及整个地球内部的点都“一样多”.

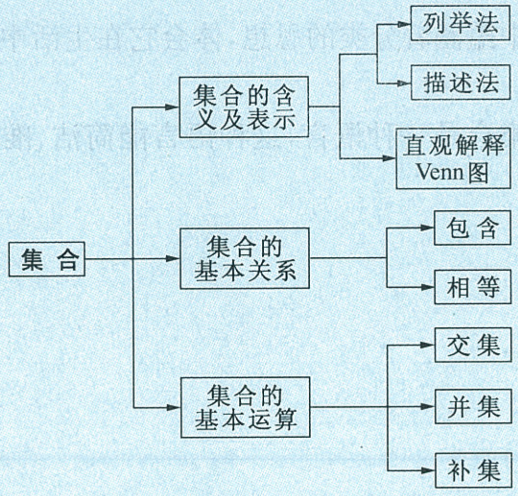
事实证明，康托的集合论不仅为数学分析奠定了最终基础，而且对整个现代数学结构产生了重大而深远的影响.

◆ 本章小结

一、内容提要

本章的主要内容是集合的含义及表示、集合的基本关系以及集合的基本运算.

本章的结构图如下：



二、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求

(1) 了解集合的含义，体会元素与集合的“属于”关系，掌握常用数集的记法.

(2) 能用集合的列举法或描述法描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用.

(3) 理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集.

(4) 了解全集和空集的含义.

(5) 理解两个集合的交集与并集的含义，会求两个简单集合的交集、并集.

(6) 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集.

(7) 能使用 Venn 图直观解释集合的关系及运算.

2. 需要注意的问题

(1) 要正确理解集合、空集、子集、全集、补集、交集、并集的概念及性质.

(2) 注意概念间的区别和联系. 如对“属于”与“包含”的理解:“属于”是指元素与集合间的关系;“包含”是指集合与集合间的关系.“属于”是集合最基本的关系,其他关系都是由它定义出来的.

(3) 集合的表示方法各有特点,应结合具体问题适当选用.

(4) 利用数形结合的思想,将集合用 Venn 图表示出来,帮助理解或解决问题,在求数集的交集、并集、补集时,还可以借助于数轴.

(5) 集合中蕴涵着分类的思想,体会它在生活中和数学中的广泛的应用.

(6) 理解集合是一种语言,这种语言能简洁、准确地表达数学的一些内容.

复习题一

A　组

1. 选择题

(1) 下列集合中，不是方程$(x+1)(x-2)(x-3)=0$的解集的集合是(　　)；

A. $\{-1,2,3\}$　　B. $\{3,-1,2\}$

C. $\{x|(x+1)(x-2)(x-3)=0\}$　　D. $\{(-1,2,3)\}$

(2) 下列结论中，表述不正确的是(　　)；

A. $\complement_U U=\varnothing$　　B. $\complement_U\varnothing=U$

C. $\complement_U(\complement_U A)=A$　　D. $\complement_A A=\{0\}$

(3) 已知集合$M=\{x\in\mathbf{N}|x=8-m,m\in\mathbf{N}\}$，则集合$M$中的元素的个数为(　　)；

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

(4) 集合$\{x\in\mathbf{N}|-4<x-1<4$，且$x\neq1\}$的真子集的个数是(　　)；

A. 32　　B. 31　　C. 16　　D. 15

(5) 已知全集$U=\{x\in\mathbf{N}_+|-2<x<9\}$，$M=\{3,4,5\}$，$P=\{1,3,6\}$，那么$\{2,7,8\}$是(　　).

A. $M\cup P$　　B. $M\cap P$

C. $(\complement_U M)\cup(\complement_U P)$　　D. $(\complement_U M)\cap(\complement_U P)$

2. 填空题

(1) “被 9 除余 2 的整数”组成的集合可表示为__________；

(2) 已知全集为$\mathbf{R}$，不等式组$\begin{cases}x\geqslant1,\\0\leqslant x<3\end{cases}$的解集为$A$，则$\complement_{\mathbf{R}}A=$__________；

(3) 已知集合$U=\mathbf{R}$，$M=\{x|x\geqslant1\}$，$N=\{x|x<-1\}$，则$\complement_U(M\cap N)=$__________；

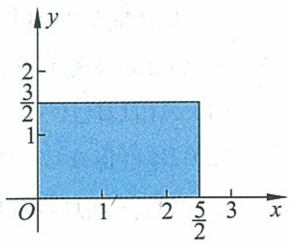
(4) 满足$\{x,y\}\cup B=\{x,y,z\}$的集合B的个数是__________；

(5) 设全集为$\mathbf{R}$，$A=\{x|x<0$或$x\geqslant5\}$，$B=\{x|x\geqslant2\pi\}$，则$\complement_{\mathbf{R}}A$与$\complement_{\mathbf{R}}B$的关系是__________.

3. 已知集合A表示$y=\dfrac{1}{x}$的定义域x的取值范围，B表示$y=\sqrt{x-3}$的定义域x的取值范围．求$A\cap B$，$A\cup B$.

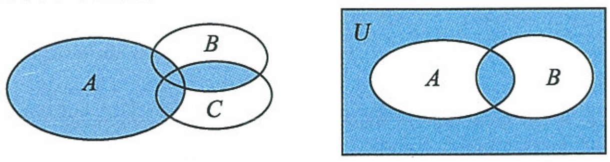
4. 设全集$U=\{x\in\mathbf{N}_+|x\leqslant8\}$，若$A\cap(\complement_U B)=\{2,8\}$，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，求集合$A$.

5. 指出点$(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$(\sqrt{3},\sqrt{3})$是否属于图中阴影部分的点(含边界上的点)组成的集合.



(第 5 题)

6. 指出 Venn 图中阴影部分表示的集合.



(第 6 题)

7. 用 Venn 图表示下列集合：

(1) $A\cup(B\cap C)$；　　(2) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

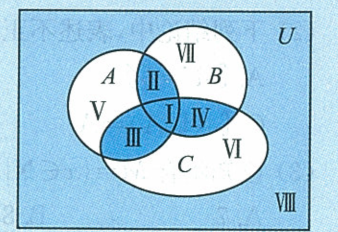
B 组

1. 已知集合 $A\subseteq\{1,2,3,4\}$，且 A 中至多有一个奇数，试问这样的集合 A 有多少个？写出这些集合.
2. 已知集合 $A=\{1,3,-a^2\}$，$B=\{1,a+2\}$，是否存在实数 a，使得 $B\subseteq A$？若实数 a 存在，求集合 A 和 B；若实数 a 不存在，请说明理由.
3. 设 $A=\{x\mid-4<x<2\}$，$B=\{x\mid-m-1<x<m-1,m>0\}$. 求分别满足下列条件的 m 的取值集合：

(1) $A\subseteq B$；　　(2) $A\cap B\neq\varnothing$.

4. 已知 $A=\{x\mid(x-1)(x+2)(x-3)=0\}$，$B=\{x\mid-1<2x+1\leqslant 3\}$，$C=\{x\mid 3x-1\geqslant 2\}$. 求 $(A\cup B)\cap C$.
5. 如图，请用集合 U,A,B,C 分别表示下列部分所表示的集合：

Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ.



（第 5 题）

6. 某年级先后举办了数学、历史、音乐的讲座，其中有 75 人听了数学讲座，68 人听了历史讲座，61 人听了音乐讲座，17 人同时听了数学、历史讲座，12 人同时听了数学、音乐讲座，9 人同时听了历史、音乐讲座，还有 6 人听了全部讲座. 求听讲座的人数.

C 组

1. 选择题

(1) 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\left\{x\,\middle|\,-4<x<\dfrac{1}{2}\right\}$，$B=\{x\mid x\leqslant-4\}$，$C=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}$，则集合 $C=$(　　)；

A. $A\cap B$　　B. $A\cup B$

C. $\complement_U(A\cap B)$　　D. $\complement_U(A\cup B)$

(2) 对于全集 U 的子集 M,N，若 M 是 N 的真子集，则下列集合中必为空集的是(　　).

A. $(\complement_U M)\cap N$　　B. $M\cap(\complement_U N)$

C. $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$　　D. $M\cap N$

2. 用 Venn 图表示下列集合：

(1) $A\cap(B\cup C)$，　$A\cap B\cup C$；

(2) $B\cap(\complement_U A)$，　$A\cap(\complement_U B)$；

(3) $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，　$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

第二章　函　数

现实世界充满变化. 函数是描述变化规律的重要数学模型，也是数学的基本概念. 函数思想是研究问题的重要思想，用函数的思想研究问题，是一种重要观念.

本章在复习初中函数知识的基础上，用集合、对应的观点研究函数，加深对函数概念的理解；通过具体的实例，讨论一般函数的性质，初步体会函数思想的作用，为高中后续课程的学习打下基础. 函数的概念及思想方法将贯穿高中数学课程的始终，渗透到数学的各个领域.

§1 生活中的变量关系
§2 对函数的进一步认识
2.1 函数概念
2.2 函数的表示法
2.3 映射
§3 函数的单调性
§4 二次函数性质的再研究
4.1 二次函数的图像
4.2 二次函数的性质
§5 简单的幂函数
课题学习 个人所得税的计算

§1 生活中的变量关系

世界是变化的. 变量及变量之间的依赖关系在生活中随处可见. 我们在初中学习过的函数就描述了因变量随自变量而变化的依赖关系.

问题提出

在高速公路的情境下，你能发现哪些函数关系？

实例分析

我国的道路交通网，近十几年的发展非常迅速.

1. 我国自 1988 年开始建设高速公路，全国高速公路通车总里程，于 1998 年底，位居世界第八；1999 年底，位居世界第四；2000 年底，位居世界第三；2001 年底，超过了加拿大，跃居世界第二位(如表 2-1).

表 2-1 1988～2001 年全国高速公路总里程 单位：km

年份	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
总里程	147	271	522	574	652	1 145	1 603
年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
总里程	2 141	3 422	4 771	8 733	11 605	16 314	19 453

根据表内数据作图(如图 2-1)[1].

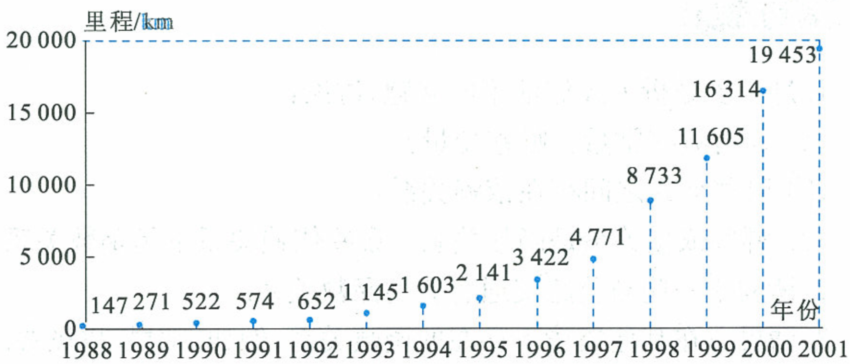


图 2-1

[1] 实际问题中，作图时常不标坐标轴的箭头. 今后遇到实际问题，我们也不标坐标轴箭头.

高速公路里程数随年份的变化而变化. 所以,高速公路里程数可以看成因变量,年份看成自变量,从而高速公路里程数是年份的函数.

2. 一辆汽车在高速公路上行驶的过程中,每个时刻都有唯一的行驶路程与它对应. 行驶路程(因变量)随时间(自变量)的变化而变化,行驶路程是时间的函数. 同样,汽车的速度、耗油量也是时间的函数.

3. 图 2-2 是某高速公路加油站的图片,加油站常用圆柱体储油罐储存汽油. 储油罐的长度 d、截面半径 r 是常量;油面高度 h、油面宽度 w、储油量 v 是变量.

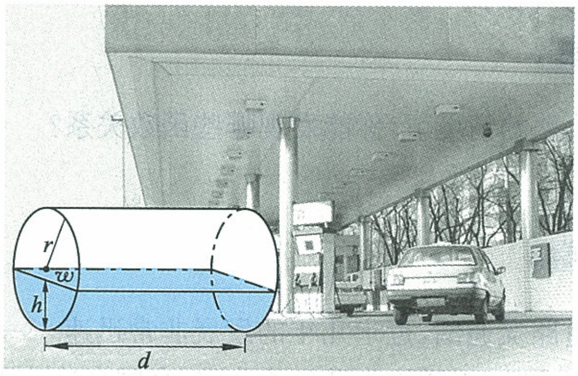


图 2-2

储油量 v 与油面高度 h 存在着依赖关系,储油量 v 与油面宽度 w 也存在着依赖关系.

并非有依赖关系的两个变量都有函数关系. 只有满足对于其中一个变量的每一个值,另一个变量都有唯一确定的值与之对应时,才称它们之间有函数关系. 对于油面高度 h 的每一个取值,都有唯一的储油量 v 与之对应,所以,储油量 v 是油面高度 h 的函数. 而对于油面宽度 w 的一个值可以有两种油面高度和它对应,于是可以有两种储油量 v 和它对应,所以,储油量 v 不是油面宽度 w 的函数.

思考交流

1. 进一步分析上述储油罐的问题,讨论:

(1) 还有哪些常量? 哪些变量?

(2) 哪些变量之间存在依赖关系?

(3) 哪些依赖关系是函数关系? 哪些依赖关系不是函数关系?

2. 请列举一些与公路交通有关的函数关系.

3. 请思考在其他情境下存在的函数关系,例如,邮局、机场等.

练 习

1. 某电器商店以2 000元一台的价格进了一批电视机，然后以2 100元一台的价格售出，随着售出台数的变化，商店获得的收入是怎样变化的？其收入和售出的台数间存在函数关系吗？
2. 坐电梯时，电梯距地面的高度与时间之间存在怎样的依赖关系？
3. 在一定量的水中加入蔗糖，在未达到饱和之前糖水的质量浓度与所加蔗糖的质量之间存在怎样的依赖关系？如果是函数关系，指出自变量和因变量.

习 题 2—1

A 组

1. 下列过程中，变量之间是否存在依赖关系，其中哪些是函数关系：
   (1) 地球绕太阳公转的过程中，二者的距离与时间的关系；
   (2) 在空中作斜抛运动的铅球，铅球距地面的高度与时间的关系；
   (3) 某水文观测点记录的水位与时间的关系；
   (4) 某十字路口，通过汽车的数量与时间的关系.
2. 在物理、化学等学科中找出有函数关系的变量的例子，并指出其中的自变量和因变量.

B 组

1. 请你找出至少5个生活中存在的函数关系的实例，并与同伴交流.
2. 请你找出一个生活实例，说明两个变量之间存在依赖关系，但不是函数关系.

§2 对函数的进一步认识

2.1 函数概念

分析理解

初中我们已经学过函数的概念：在变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果给定一个 x 值，相应地就确定了一个 y 值，那么我们称 y 是 x 的函数，其中 x 是自变量，y 是因变量.

几百年来，随着数学的发展，对函数概念的理解不断深入，对函数概念的描述越来越清晰.

从集合的观点出发，还可以给出以下的函数定义：

给定两个非空数集 A 和 B，如果按照某个对应关系 f，对于集合 A 中任何一个数 x，在集合 B 中都存在唯一确定的数 $f(x)$ 与之对应，那么就把对应关系 f 叫作定义在集合 A 上的**函数**，记作 $f: A\to B$，或 $y=f(x)$，$x\in A$. 此时，x 叫作**自变量**，集合 A 叫作函数的**定义域**，集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫作函数的**值域**. 习惯上我们称 y 是 x 的函数.

有时给出的函数没有明确说明定义域，这时，它的定义域就是自变量的允许取值范围，比如 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域就是 $\{x\mid x\neq 0\}$. 如果函数涉及实际问题，它的定义域还必须使实际问题有意义.

当 $x=a$ 时，我们用 $f(a)$ 表示函数 $y=f(x)$ 的函数值. 例如，设函数 $f(x)=3x^2+2x-1$，那么，$f(5)=3\times 5^2+2\times 5-1=84$. 84 是函数 $f(x)$ 当 $x=5$ 时的函数值.

例如，在初中物理中，我们曾经学习过下面几个函数：

1. 热力学温度与摄氏温度保持这样的关系：$T=t+273$ ℃，其中，t 是摄氏温度，$t\geqslant -273$ ℃，T 是热力学温度. T 是 t 的函数，它的定义域是

$$\{t\mid t\geqslant -273\}.$$

2. 表 2-2 记录了几个不同气压下水的沸点.

表 2-2

气压/(10^5 Pa)	0.5	1.0	2.0	5.0	10
沸点/(℃)	81	100	121	152	179

这张表给出了沸点与气压之间的函数关系，定义域是

$$\{0.5,\ 1.0,\ 2.0,\ 5.0,10\}.$$

3. 图 2-3 是匀速直线运动路程 s 随时间 t 变化的函数关系图，它的定义域是

$$\{t\mid t\geqslant 0\},$$

值域是

$$\{s\mid s\geqslant 0\}.$$

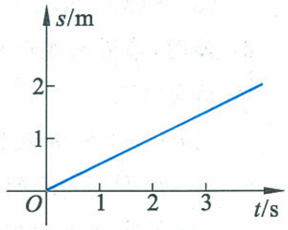


图 2-3

研究函数常常用到**区间**的概念.

设 a,b 是两个实数，而且 $a<b$，我们作出规定(如表 2-3)：

表 2-3

定义	名称	符号	几何表示
$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	
$\{x\mid a<x<b\}$	开区间	$(a,\ b)$	
$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	左闭右开区间	$[a,\ b)$	
$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	左开右闭区间	$(a,\ b]$	

这里实数 a,b 都叫作相应区间的**端点**.

实数集 **R** 也可用区间表示为$(-\infty,+\infty)$，“∞”读作“无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”. 我们还可以把满足 $x\geqslant a,x>a,x\leqslant b,x<b$ 的实数 x 的集合分别表示为$[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$.

例 1　某山海拔 7 500 m，海平面温度为 25 ℃，气温是海拔高度的函数，而且高度每升高 100 m，气温下降 0.6 ℃. 请你用解析表达式表示出气温 T 随海拔高度 x 变化的函数关系，并指出函数的定义域和值域.

解　函数解析式为

$$T(x)=25-\frac{0.6x}{100}=25-\frac{3}{500}x.$$

函数的定义域为$[0,7\ 500]$，值域为$[-20,25]$.

思考交流

举出几个有关函数的例子，并用定义加以描述，指出函数的定义域和值域.

练 习

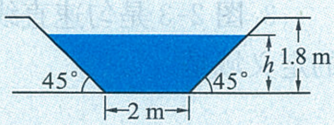
1. 求下列函数的值：

(1) $f(x)=5x-3$，求 $f(4)$；

(2) $g(t)=4t^3+2t-7$，求 $g(2)$；

(3) $F(u)=u$，$M(u)=6u^2+u-3$，求 $F(3)+M(2)$.

2. 如图，某灌溉渠的横断面是等腰梯形，底宽 2 m，渠深 1.8 m，边坡的倾角是 45°.



(第 2 题)

(1) 试用解析表达式将横断面中水面积 A(单位：m^2) 表示成水深 h(单位：m) 的函数；

(2) 确定函数的定义域和值域；

(3) 画出函数的图像.

2.2 函数的表示法

在研究函数的过程中，采用不同的方法表示函数，可以从不同的角度帮助我们理解函数的性质，是研究函数的重要手段.

初中我们学习过，函数的表示方法通常有三种，它们是**列表法**、**图像法**和**解析法**.

1. 列表法

在实际问题中常常使用表格，有些表格描述了两个变量间的函数关系. 比如，某天一昼夜温度变化情况如表 2-4.

表 2-4

时刻	0:00	4:00	8:00	12:00	16:00	20:00	24:00
温度/(℃)	−2	−5	4	9	8.5	3.5	−1

像这样，用表格的形式表示两个变量之间函数关系的方法，称为列表法.

列表法不必通过计算就能知道两个变量之间的对应关系，比较直观. 但是，它只能表示有限个元素间的函数关系.

2. 图像法

人的心脏跳动强度是时间的函数. 医学上常用的心电图，就是利用仪器记录心脏跳动的强度(函数值)随时间变化的曲线图(如图 2-4).

像这样，用图像把两个变量间的函数关系表示出来的方法，称为图像法.

图像法可以直观地表示函数的局部变化规律，进而可以预测它

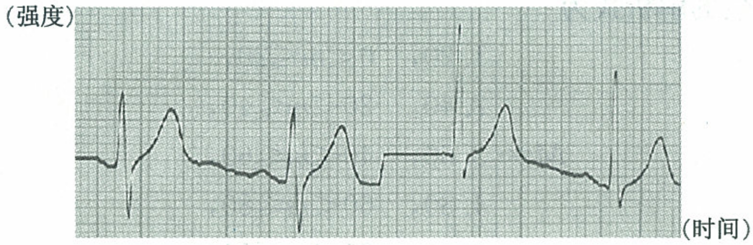


图 2-4

的整体趋势，比如心电图.

3. 解析法

一个函数的对应关系可以用自变量的解析表达式(简称解析式)表示出来，这种方法称为解析法.

例如，设正方形的边长为 x，面积为 y，则 y 是 x 的函数，用解析法表示为

$$y=x^2,\quad x\in(0,+\infty).$$

解析法表示的函数关系能较便利地通过计算等手段研究函数性质. 但是，一些实际问题很难找到它的解析式.

例 2 请画出函数 $y=|x|$ 的图像.

解 由绝对值的定义，得

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

它的图像为第一和第二象限的角平分线，如图 2-5.

信息技术建议

我们可以利用信息技术简捷地作出函数的图像，具体的操作参见本节的“信息技术应用”栏目.

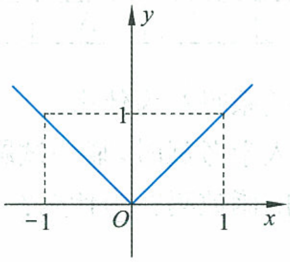


图 2-5

例 3 国内跨省市之间邮寄信函，每封信函的质量和对应的邮资如表 2-5.

表 2-5

信函质量(m)/g	$0<m\leqslant 20$	$20<m\leqslant 40$	$40<m\leqslant 60$	$60<m\leqslant 80$	$80<m\leqslant 100$
邮资(M)/元	1.20	2.40	3.60	4.80	6.00

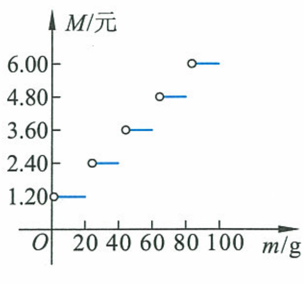


图 2-6

画出图像，并写出函数的解析式.

解 邮资是信函质量的函数，函数图像如图 2-6.

函数的解析式为

$$M=\begin{cases}1.20, & 0<m\leqslant 20,\\ 2.40, & 20<m\leqslant 40,\\ 3.60, & 40<m\leqslant 60,\\ 4.80, & 60<m\leqslant 80,\\ 6.00, & 80<m\leqslant 100.\end{cases}$$

像这样的函数称为**分段函数**.

例 4 某质点在 30 s 内运动速度 v 是时间 t 的函数，它的图像如图 2-7. 用解析法表示出这个函数，并求出 9 s 时质点的速度.

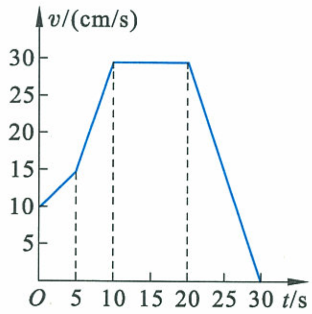


图 2-7

解 速度是时间的函数，解析式为

$$v(t)=\begin{cases}10+t, & t\in[0,5),\\ 3t, & t\in[5,10),\\ 30, & t\in[10,20),\\ -3t+90, & t\in[20,30].\end{cases}$$

由上式可得，$t=9$ s 时，质点的速度

$$v(9)=3\times 9=27(\text{cm/s}).$$

思考交流

1. 表 2-6 列出的是一份数学测试选择题的答案.

表 2-6

题号	13	14	15	16
正确答案	C	A	D	D

这个表格表示的是函数关系吗？为什么？

2. 图 2-8 是某地区入学考试时，某一试题的得分分数分布图，这个图是使用图像法表示的函数吗？为什么？

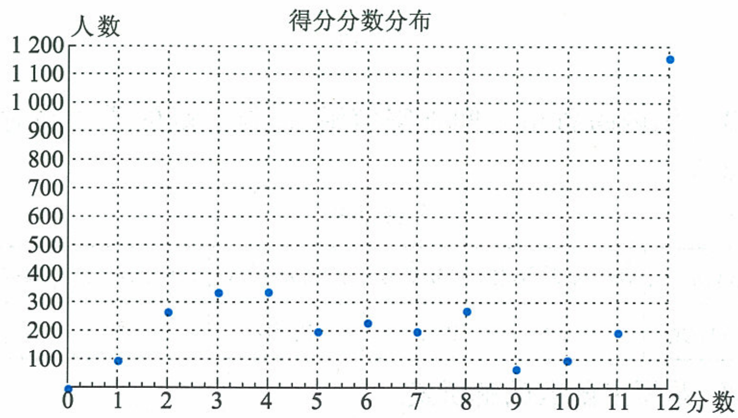


图 2-8

在实际问题中，要有针对性地选择适当的函数表示方法，有时需要多种方法综合运用；有时也需要把函数的某种表示方法转化为另一种表示方法.

信息技术应用

利用图形计算器作函数图像

在研究函数的过程中，信息技术起着重要的作用. 它有助于我们对函数图像和性质的理解，利用数学软件或者图形计算器可以帮助我们方便地作出函数图像. 你不妨试试.

以例 2 和例 3 为例，打开图形计算器，把函数解析式输入到计算器中，即可作出函数图像（如图 2-9）. 我们还可以利用图形计算器提供的其他功能进一步研究函数的性质.

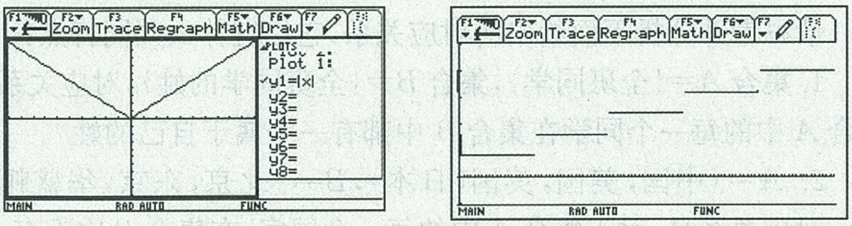


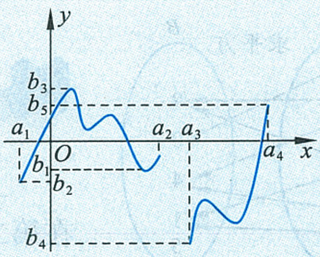
图 2-9

练　习

1. 写出下列函数的定义域、值域：

(1) $f(x)=3x+5$；

(2) $f(x)$的图像如图；

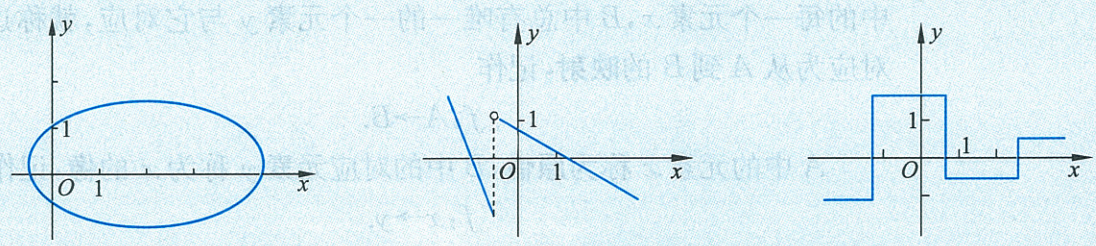


（第 1(2)题）

(3)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	8	27	64	125	216	343	512

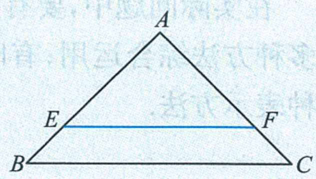
2. 下面图形是函数图像吗？



（第 2 题）

3. 收集一些用列表法表示的函数.

4. 如图，$\triangle ABC$ 是一个等腰直角三角形，$AB=AC=1$，$EF /\!/ BC$. 当 E 从 A 移向 B 时，写出线段 EF 的长度 l 与它到点 A 的距离 h 之间的函数关系式，并作出函数图像.



(第 4 题)

2.3 映 射

问题提出

日常生活中存在着丰富的对应关系.

请思考并分析下面给出的对应关系，它们有什么共同特点？

1. 集合 A＝{全班同学}，集合 B＝{全班同学的姓}，对应关系是：集合 A 中的每一个同学在集合 B 中都有一个属于自己的姓.

2. A＝{中国，美国，英国，日本}，B＝{北京，东京，华盛顿，伦敦}，对应关系是：对于集合 A 中的每一个国家，在集合 B 中都有一个首都与它对应(如图 2-10).

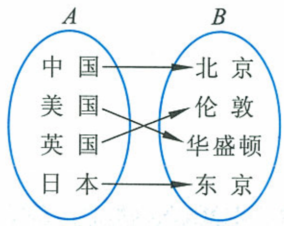


图 2-10

3. 设集合 $A=\{0,-3,2,3,-1,-2,1\}$，集合 $B=\{9,0,4,1,5\}$，对应关系是：集合 A 中的每一个数，在集合 B 中都有其对应的平方数(如图 2-11).

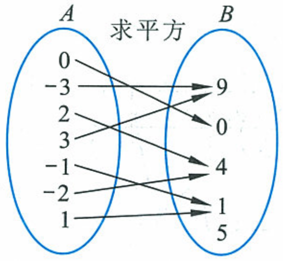


图 2-11

抽象概括

上述三个问题中，共同特点是：(1)第一个集合中的每一个元素在第二个集合中都有对应元素；(2)对于第一个集合中的每一个元素在第二个集合中的对应元素是唯一的.

像这样，两个非空集合 A 与 B 间存在着对应关系 f，而且对于 A 中的每一个元素 x，B 中总有唯一的一个元素 y 与它对应，就称这种对应为从 A 到 B 的**映射**，记作

$$f:A\to B.$$

A 中的元素 x 称为**原像**，B 中的对应元素 y 称为 x 的**像**，记作

$$f:x\to y.$$

思考交流

1. 函数与映射有什么区别和联系？
2. 请举出几个映射的例子.

在实际中，我们经常使用一种特殊的映射，通常叫作一一映射，如图 2-12 所示. 它满足：

1. A 中每一个元素在 B 中都有唯一的像与之对应；
2. A 中的不同元素的像也不同；
3. B 中的每一个元素都有原像.

有时，我们把集合 A，B 之间的一一映射也叫作一一对应.

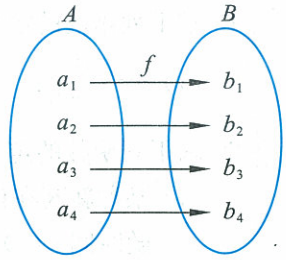


图 2-12

函数是一种特殊的映射，是从非空数集到非空数集的映射. 函数概念可以叙述为：设 A，B 是两个非空数集，f 是 A 到 B 的一个映射，那么映射 $f:A\to B$ 就叫作 A 到 B 的函数.

在函数中，原像的集合称为定义域，像的集合称为值域.

在研究实际问题的过程中，人们通常通过编号等方式（如风、海浪、地震等的级别）把一般映射数字化，使之成为函数. 因为一旦表示为函数，那么有关函数的性质以及函数值的运算就都可以使用了.

练 习

1. 下面的对应哪些是从 A 到 B 的映射，哪些不是？为什么？

(1) $A=\{0,1,2,\cdots\}$，$B=\{0,1,2\}$，对应关系 $f:A$ 中的元素对应它除以 3 的余数；

(2) $A=\{$平面上的点$\}$，$B=\{(x, y) \mid x, y\in \mathbf{R}\}$，对应关系 $f:A$ 中的元素对应它在平面上的坐标；

(3) $A=\{$高一年级同学$\}$，$B=\{0,1\}$，对应关系 $f:A$ 中的元素对应他今天的出勤情况，如果出勤记作 1，否则记作 0；

(4) $A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}$，对应关系 $f:y=\dfrac{1}{x}$，$x\in A$，$y\in B$.

2. 把下列两个集合间的对应关系用映射符号（如，$f:A\to B$）表示. 其中，哪些是一一映射？哪些是函数？

(1) $A=\{$你们班的同学$\}$，$B=\{$体重$\}$，f：每个同学对应自己的体重；

(2) $M=\{1,2,3,4\}$，$N=\{2,4,6,8\}$，$f:n=2m$，$n\in N$，$m\in M$；

(3) $X=\mathbf{R}$，$Y=\{$非负实数$\}$，$f:y=x^4$，$x\in X$，$y\in Y$.

习 题 2—2

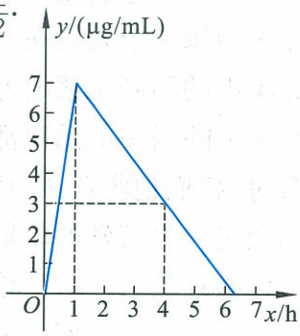
A 组

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{5}{x-3}$；　　(2) $y=\sqrt{x-2}$；　　(3) $y=\dfrac{1}{1-\sqrt{x-2}}$.

2. 求下列函数的定义域、值域：

(1) 某种新药在试验药效时得到每毫升血液中含药量y(μg/mL)随时间x(h)变化的图像如图所示. 从中发现，如果成人按规定剂量服用，服药后 1 h 血液中的含药量最高，达到7 μg/mL；接着逐步衰减，4 h血液中的含药量为3 μg/mL；



(第 2(1)题)

(2) 某个居民 7～9 月份使用煤气情况如下表：

月　份	7	8	9
煤气使用量/m³	4	25	35

3. 对于下列集合 A 和 B，是否能建立从集合 A 到集合 B 的映射？如果能，如何建立？

(1) 我国内地长途电话自动网的城市组成集合 A，长途电话区号组成集合 B；

(2) 三角形周长组成集合 A，所有的三角形组成集合 B.

B 组

1. 设函数 $f(x)=\sqrt[3]{3x-2}$，$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$，求函数 $f(x)\cdot g(x)$的定义域.

2. 某市出租车的计价标准是：4 km 以内 10 元(含 4 km)，超出 4 km 且不超过18 km的部分 1.2 元/km；超出 18 km 的部分 1.8 元/km.

(1) 如果不计等待时间的费用，建立车费与行车里程的函数解析式；

(2) 如果某人乘车行驶了 20 km，他要付多少车费？

阅读材料

生活中的映射

映射是一个非常广泛的概念，在我们的日常生活中随处可见．下面我们介绍一些映射的例子，希望你能从中得到启迪．

当你拿到一本书时，你就会发现在书的封底有如图 2-13 形式的条形码．每本书与条形码之间是一个映射．

ISBN 978-345678901-9

9 783456 789019

图 2-13

长途电话区号在通讯中起着非常重要的作用，这实际上是由地区到这些区号之间的映射．比如，北京的国内长途区号是 010，中国的国际长途区号是 0086．另外，在电讯部门注册的电话号码与单位（或个人）之间也是一个映射．

每个学校都给在校的学生编了一个学号．这是从在校的所有学生到学号集合的一个一一映射．这种一一映射使学籍管理有条不紊．

班上的每个同学都有一个身高，这就可以看作是从该班学生到实数集的一个映射；每个四边形都有面积，这就可以看作是从集合{四边形}到实数集的一个映射．其实，在日常生活中所见到的，如物体的质量、长度、面积、体积等，都可以用映射的观点来看，但这样的映射不一定是一一映射．

目前，随着高科技的发展，生物鉴定技术有了长足的进步．比如，每个人与自己的 DNA 检测结果，每个人与自己的血型，每个人与自己的指纹（如图 2-14）之间的对应都是映射，但不一定是一一映射．一一映射在生活中有很大的用途，比如在刑事侦破方面，公安部门为了找到犯罪分子，就希望对罪犯特征的刻画是一一映射．同一种血型的人会很多，但是既是同一种血型又具有相同的指纹与手纹的人“几乎”是唯一的，这样就等于找到了从特征刻画到人之间的一个一一映射．

图 2-14

平面上点到其坐标的对应关系是一种映射，可以看作是从平面上的点集到二元实数集$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$的一个映射．

§3 函数的单调性

实例分析

在研究函数的过程中，我们最关心的是：当自变量变化时，函数值随着自变量的变化会如何变化.

一次函数 $y=x+1$，在其定义域内，函数值随着自变量的增大而增大. 从图像（图 2-15(1)）上看，从左到右是上升的.

二次函数 $y=x^2$，在区间 $(-\infty,0)$ 内，函数值随着自变量的增大而减小，从图像（图 2-15(2)）上看，在 y 轴左侧，从左到右是下降的；在区间 $(0,+\infty)$ 内，函数值随自变量的增大而增大，从图像（图 2-15(2)）上看，在 y 轴右侧，从左到右是上升的.

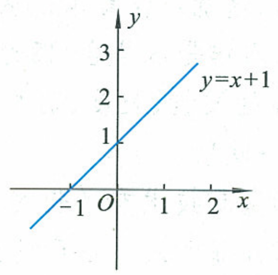


图 2-15(1)

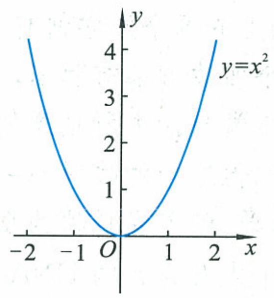


图 2-15(2)

思考交流

对于图 2-16 给出的函数，你能说出它的函数值 y 随自变量 x 值的变化情况吗？

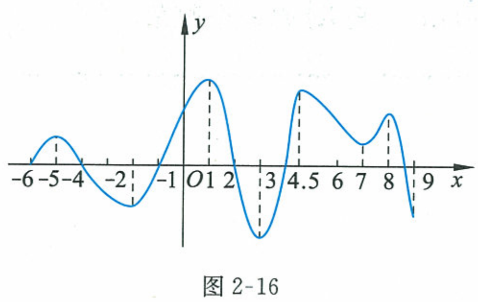


图 2-16

怎样用数学语言表达函数值的增减变化呢？

在函数 $y=f(x)$ 的定义域内的一个区间 A 上，如果对于任意两数 $x_1,x_2\in A$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么，就称函数 $y=f(x)$ 在区间 A 上是**增加**的，有时也称函数 $y=f(x)$ 在区间 A 上是**递增**的. 如图 2-16 中，函数在 $[-6,-5]$，$[-2,1]$，$[3,4.5]$，$[7,8]$ 上是增加的.

类似地，在函数 $y=f(x)$ 的定义域内的一个区间 A 上，如果对于任意两数 $x_1,x_2\in A$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么，就称函数 $y=f(x)$ 在区间 A 上是**减少**的，有时也称函数 $y=f(x)$ 在区间 A 上是**递减**的. 如图 2-16 中，函数在 $[-5,-2]$，$[1,3]$，$[4.5,7]$，$[8,9]$ 上是减少的.

如果 $y=f(x)$ 在区间 A 上是增加的或是减少的，那么称 A 为**单调区间**. 在单调区间上，如果函数是增加的，那么它的图像是上升的；如果函数是减少的，那么它的图像是下降的.

一般地，对于函数 $y=f(x)$ 的定义域内的一个子集 A，如果对于任意两数 $x_1,x_2\in A$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，就称函数 $y=f(x)$ 在数集 A 上是增加的.

类似地，在函数 $y=f(x)$ 的定义域内的一个子集 A 上，如果对于任意两数 $x_1,x_2\in A$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，就称函数 $y=f(x)$ 在数集 A 上是减少的.

如果函数 $y=f(x)$ 在定义域的某个子集上是增加的或是减少的，那么就称函数 $y=f(x)$ 在这个子集上具有**单调性**.

如果函数 $y=f(x)$ 在整个定义域内是增加的或是减少的，我们分别称这个函数为**增函数**或**减函数**，统称为**单调函数**.

例 1　说出函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的单调区间，并指明在该区间上的单调性.

解　$(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 都是函数的单调区间，在这两个区间上函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是减少的.

例 2　画出函数 $f(x)=3x+2$ 的图像，判断它的单调性，并加以证明.

解　作出 $f(x)=3x+2$ 的图像（如图 2-17）. 由图看出，函数 $f(x)$ 的图像在 $\mathbf{R}$ 上是上升的，函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

下面进行证明：

任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则

$$x_1-x_2<0.$$

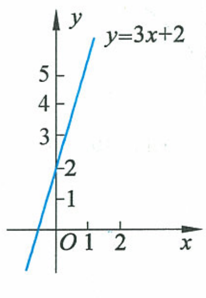


图 2-17

所以 $f(x_1)-f(x_2)=(3x_1+2)-(3x_2+2)$

$=3(x_1-x_2)<0$,

即 $f(x_1)<f(x_2)$.

由单调函数的定义可知,函数 $f(x)=3x+2$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

我们观察图 2-16,可以看出对于定义域中的任意 x,都有 $f(x)\leqslant f(1)$,我们就说 $f(1)$是这个函数的最大值. 一般地,对于函数 $y=f(x)$,其定义域为 D,如果存在 $x_0\in D$, $f(x_0)=M$,使得对于任意的 $x\in D$,都有 $f(x)\leqslant M$,那么,我们称 M 是函数 $y=f(x)$的最大值,即当 $x=x_0$ 时,$f(x_0)$是函数 $y=f(x)$的最大值,记作 $y_{\max}=f(x_0)$.

思　考

你能仿照函数最大值的定义,给出函数 $y=f(x)$ 的最小值的定义吗?

例 3 如图 2-18,某地要修一个圆形的喷水池,水流在各个方向上以相同的抛物线路径落下,以水池的中央为坐标原点,水平方向为 x 轴、竖直方向为 y 轴建立平面直角坐标系,那么水流喷出的高度 h(单位:m)与水平距离 x(单位:m)之间的函数关系式为

$$h=-x^2+2x+\frac{5}{4}, x\in\left[0,\frac{5}{2}\right].$$

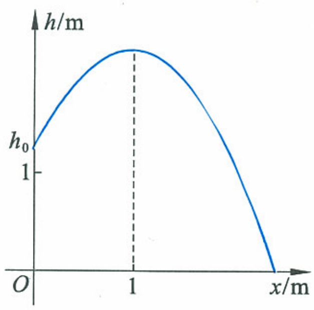


图 2-18

求水流喷出的高度 h 的最大值是多少?

解 由函数 $h=-x^2+2x+\frac{5}{4}$, $x\in\left[0,\frac{5}{2}\right]$的图像可知,显然,函数图像的顶点就是水流喷出的最高点.

此时函数取得最大值.

对于函数 $h=-x^2+2x+\frac{5}{4}$, $x\in\left[0,\frac{5}{2}\right]$,

当 $x=1$ 时,函数有最大值 $h_{\max}=-1^2+2\times1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$(m).

于是水流喷出的最高高度是$\frac{9}{4}$ m.

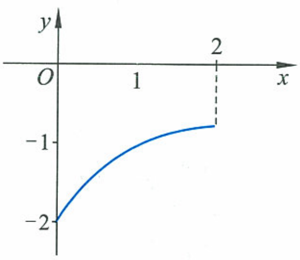


图 2-19

例 4 已知函数 $f(x)=-\frac{2}{x+1}$, $x\in[0,2]$,求函数的最大值和最小值.

分析 由函数 $f(x)=-\frac{2}{x+1}$, $x\in[0,2]$的图像(图 2-19)可知,函数 $f(x)$在区间$[0,2]$上递增. 所以,函数 $f(x)$在区间$[0,2]$的两个端点上分别取得最小值和最大值.

解 设 x_1, x_2 是区间$[0,2]$上的任意两个实数,且 $x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=-\frac{2}{x_1+1}-\left(-\frac{2}{x_2+1}\right)$$

$$=-\frac{2(x_2+1-x_1-1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=-\frac{2(x_2-x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)}.$$

由 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 2$，得 $x_2-x_1>0$，$(x_1+1)(x_2+1)>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

故 $f(x)$ 是区间$[0,2]$上是增加的.

因此，函数 $f(x)=-\dfrac{2}{x+1}$在区间$[0,2]$的左端点取得最小值，右端点取得最大值，即

最小值是 $f(0)=-2$，最大值是 $f(2)=-\dfrac{2}{3}$.

练 习

1. 试举出几个有关函数单调性的实际例子.
2. 判断下列函数在给定集合或区间上的单调性：

(1) $y=-5x$，$x\in[2,7]$；

(2) $f(x)=3x^2-6x+1$，$x\in(3,4)$；

(3)

t	1	2	3	4	5	6	7	8
T	-3	-6	-9	-12	-15	-18	-21	-24

$t\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

3. 求下列函数的最大值和最小值.

(1) $f(x)=-3x+2$，$x\in[-1,3]$；

(2) $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$，$x\in[-1,2]$.

习 题 2—3

A 组

1. 初中学过的正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数，在其定义域内函数何时增加，何时减少？
2. 讨论下列函数在给定集合或区间上的单调性：

(1)

x	0	1	2	3	4
y	0	4	8	12	16

$x\in\{0,1,2,3,4\}$；

(2) $y=\dfrac{2}{x}$，$x\in\mathbf{N}_+$；

(3) $y=2x-3$，$x\in(-\infty,0]$；

(4) $y=-4x^2+2x-5$，$x\in[0,+\infty)$.

3. 如果下列函数在给定集合或区间上是减少的，那么式中的字母 k 属于什么区间？

(1) $y=kx$，$x\in\mathbf{R}$； (2) $y=\dfrac{k}{x}$，$x\in(-\infty,0)$；

(3) $y=-kx+2$，$x\in\mathbf{R}$； (4) $y=kx^2-\dfrac{2}{3}x+1$，$x\in[0,+\infty)$.

4. 作函数 $f(x)=-3x+4$ 的图像，并证明它是 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

5. 证明：函数 $y=2x^4$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增加的.

B 组

1. 下面是四种容器的侧面图，分别向这四种容器中以相同的速度注水.

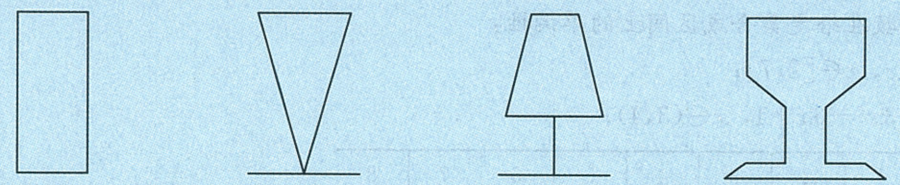
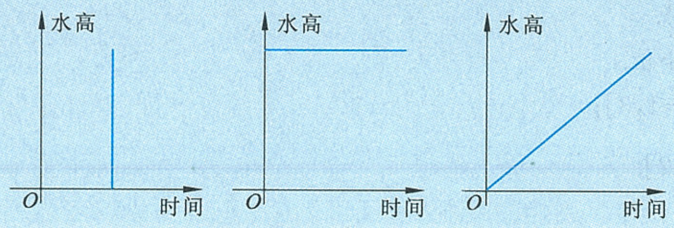


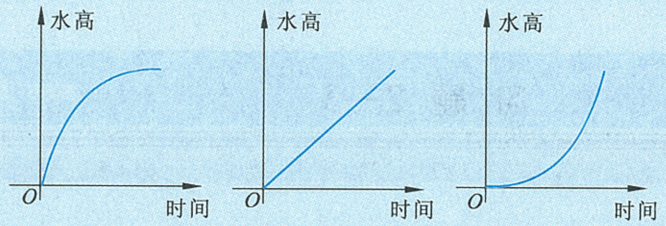
图 1 图 2 图 3 图 4

下面的图像中哪个图像可以大致刻画容器中水的高度与时间的函数关系：

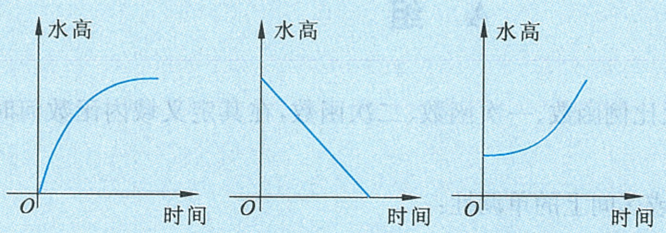
对于图 1



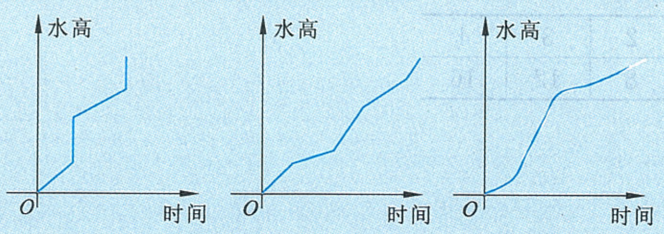
对于图 2



对于图 3



对于图 4



2. 已知函数 $y=8x^2+ax+5$ 在 $[1,+\infty)$ 上是递增的，那么 a 的取值范围是________.

§4 二次函数性质的再研究

在初中，我们已经学过了二次函数，知道其图像为抛物线，并了解其图像的开口方向、对称轴、顶点等特征.

下面我们进一步研究一般的二次函数

$$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0).$$

4.1 二次函数的图像

问题提出

(1) $y=x^2$ 和 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的图像之间有什么关系？

(2) $y=ax^2$ 和 $y=a(x+h)^2+k(a\neq 0)$ 的图像之间有什么关系？

(3) $y=ax^2$ 和 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像之间有什么关系？

信息技术建议

可以利用信息技术研究二次函数图像的性质，具体操作见本节的“信息技术应用”栏目.

1. 我们先画出 $y=x^2$ 的图像，并在此基础上画出 $y=2x^2$ 的图像.

$y=x^2$ 的图像如图 2-20.

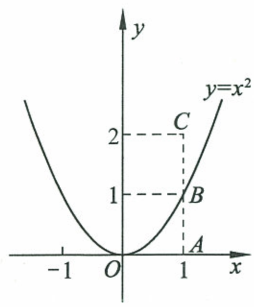


图 2-20

我们再在此基础上画 $y=2x^2$ 的图像.

先列表(如表 2-7)：

表 2-7

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
x^2	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$2x^2$	…	18	8	2	0	2	8	18	…

从表中不难看出，要得到 $2x^2$ 的值，只要把相应的 x^2 的值扩大为原来的 2 倍就可以了.

这种情况表现在图像上，如图2-20，就是把 AB 伸长为原来的 2 倍，即 AC 的长度，得到当 $x=1$ 时 $y=2x^2$ 对应的值. 同理，其余 x 值对应的 x^2 的值，都扩大为原来的 2 倍，就可以得到 $y=2x^2$ 的图像了(如图 2-21).

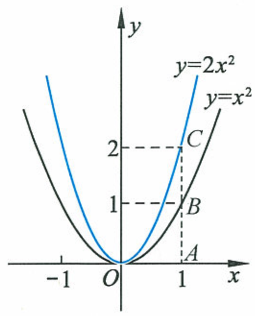


图 2-21

动手实践

请用类似的方法，画出 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的图像.

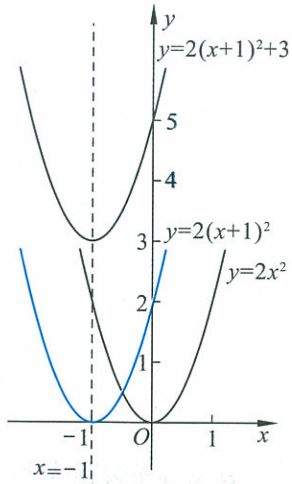


图 2-22

抽象概括

二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$的图像可由 $y=x^2$ 的图像各点的纵坐标变为原来的 a 倍得到.

从图中还可以看出，a 决定了图像的开口方向和在同一直角坐标系中的开口大小.

2. 我们一起回顾 $y=2x^2$ 与 $y=2(x+1)^2+3$ 图像的关系.

在初中我们已经知道，只要把 $y=2x^2$ 的图像向左平移 1 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，就可以得到 $y=2(x+1)^2+3$ 的图像. 它们形状相同，位置不同(如图 2-22).

动手实践

(1) 由 $y=-3x^2$ 的图像，画出 $y=-3(x-1)^2+1$ 的图像.

(2) 想象一下并回答：由 $y=-3x^2$ 的图像，如何得到 $y=-3(x+2)^2-1$ 的图像？

(3) 想象一下并回答：把 $y=3x^2$ 的图像，向右平移 2 个单位长度，再向上平移 5 个单位长度，能得到哪个函数的图像？

抽象概括

一般地，二次函数 $y=a(x+h)^2+k(a\neq0)$，a 决定了二次函数图像的开口大小及方向；h 决定了二次函数图像的左右平移，而且“h 正左移，h 负右移”；k 决定了二次函数图像的上下平移，而且“k 正上移，k 负下移”.

3. 我们再一起回顾一下 $y=2x^2$ 与 $y=2x^2+4x-1$ 图像的关系.

我们在初中时就知道，为研究 $y=2x^2+4x-1$ 的图像，应该通过配方把它化成我们已经掌握的 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式，即

$$y=2x^2+4x-1$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(x^2+2x)-1 \\
&= 2(x^2+2x+1-1)-1 \\
&= 2[(x+1)^2-1]-1 \\
&= 2(x+1)^2-3.
\end{aligned}
$$

至此，我们就知道，把 $y=2x^2$ 的图像左移 1 个单位长度，再下移 3 个单位长度，就可得到 $y=2x^2+4x-1$ 的图像(如图 2-23).

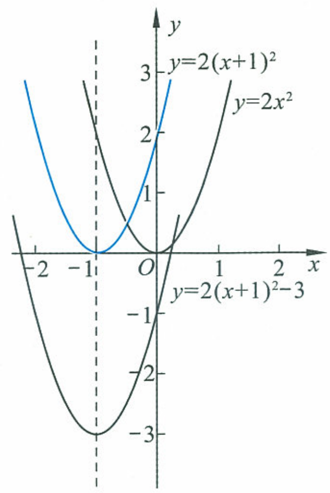


图 2-23

抽象概括

一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，通过配方可以得到它的恒等形式 $y=a(x+h)^2+k$，从而知道，由 $y=ax^2$ 的图像如何平移就得到它($y=ax^2+bx+c(a\neq0)$)的图像.

上面，我们经历了 $y=x^2$ 到 $y=ax^2$，$y=ax^2$ 到 $y=a(x+h)^2+k$，$y=ax^2$ 到 $y=ax^2+bx+c$(其中，a 均不为 0)的图像变化过程. 通过这个过程，我们就能体会到研究一般函数图像的拓展过程.

思考交流

1. 二次函数 $y=a(x+h)^2+k(a\neq0)$ 中，h，k 对函数图像有何影响？

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 中，确定函数图像开口大小及方向的参数是什么？确定函数图像位置的参数是什么？

3. 写出一个开口向下，顶点为$(-3,1)$的二次函数的解析式，并画出其图像.

例 1　二次函数 $f(x)$与 $g(x)$的图像开口大小相同，开口方向也相同，已知函数 $g(x)$的解析式和 $f(x)$图像的顶点，写出函数 $f(x)$的解析式：

(1) 函数 $g(x)=x^2$，$f(x)$图像的顶点是$(4, -7)$；

(2) 函数 $g(x)=-2(x+1)^2$，$f(x)$图像的顶点是$(-3, 2)$.

解　如果二次函数的图像与 $y=ax^2$ 的图像开口大小相同，开口方向也相同，顶点坐标是$(-h, k)$，则其解析式为

$$y=a(x+h)^2+k.$$

(1) 因为 $f(x)$与 $g(x)=x^2$ 的图像开口大小相同，开口方向也相同，$f(x)$图像的顶点是$(4, -7)$，所以

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-4)^2-7 \\ &= x^2-8x+9; \end{aligned}$$

(2) 因为 $f(x)$ 与 $g(x)=-2(x+1)^2$ 的图像开口大小相同，开口方向也相同，$g(x)=-2(x+1)^2$ 又与 $y=-2x^2$ 的图像开口大小相同，开口方向也相同，所以 $f(x)$ 与 $y=-2x^2$ 的图像开口大小也相同，开口方向也相同.

又因为 $f(x)$ 图像的顶点是 $(-3, 2)$，所以

$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x+3)^2+2 \\ &= -2x^2-12x-16. \end{aligned}$$

信息技术应用

利用信息技术研究二次函数图像的性质

几何画板是一款优秀的数学软件，利用它可以方便地作出函数的图像，我们可以从它的网站 http://www.keypress.com/sketchpad 下载试用版.

下面利用几何画板来研究二次函数的图像和性质.

1. 利用几何画板来制作函数 $y=ax^2 (a\neq0)$ 的图像，研究函数 $y=x^2$ 和 $y=ax^2$ 图像之间的关系. 操作步骤如下：

打开几何画板，利用作好的滑块工具作出参数 a，作出函数 $y=ax^2$ 的图像(如图 2-24).

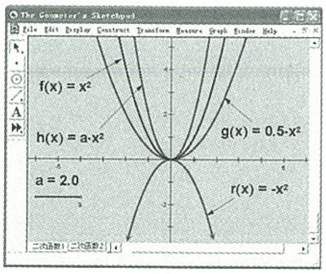


图 2-24

拖动滑块工具改变参数 a 的值，可以发现：当 $a>0$ 时，a 的值越大，函数 $y=ax^2$ 的图像开口越小，a 的值越小，函数 $y=ax^2$ 的图像开口越大；当 $a<0$ 时，a 的值越小，函数 $y=ax^2$ 的图像开口越小，a 的值越大，函数 $y=ax^2$ 图像开口越大.

2. 利用几何画板作函数 $y=a(x+h)^2+k (a\neq0)$ 的图像，研究函数 $y=ax^2$ 和 $y=a(x+h)^2+k$ 图像之间的关系. 操作步骤如下：

仿照上面的方法，利用滑块工具分别作出参数 a, h, k，作出函数 $y=a(x+h)^2+k$ 的图像(如图 2-25).

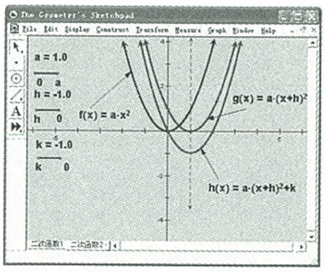


图 2-25

拖动滑块工具改变 h, k 的值，可以发现：

(1) 改变 h 的值时，相当于把函数 $y=ax^2$ 的图像向左 $(h>0)$ 或向右 $(h<0)$ 移动 $|h|$ 个单位长度；

(2) 改变 k 的值时，相当于把函数 $y=ax^2$ 的图像向上 $(k>0)$ 或向下 $(k<0)$ 移动 $|k|$ 个单位长度.

3. 请同学们利用几何画板研究函数 $y=ax^2+bx+c (a\neq0)$ 的图像和性质.

练 习

1. $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ 和 $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ 的图像都是开口向上的抛物线，在同一直角坐标系中，哪个开口大些？
2. 在同一直角坐标系中，函数 $f(x)=(x+8)^2$ 的图像与 $g(x)=x^2$ 的图像相比，发生了什么变化？
3. 指出下列各组中两个函数各自图像的顶点坐标，并说明它们图像的共同点及区别：

(1) $f(x)=-5x^2$ 和 $g(x)=2x^2$； (2) $f(x)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$ 和 $g(x)=3x^2$.

4.2 二次函数的性质

分析理解

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的性质，主要包括图像的开口方向、顶点坐标、对称轴、单调区间、最大值和最小值.

对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

当 $a>0$ 时，它的图像开口向上，顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$；$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 上是减少的，在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上是增加的；当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数取得最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

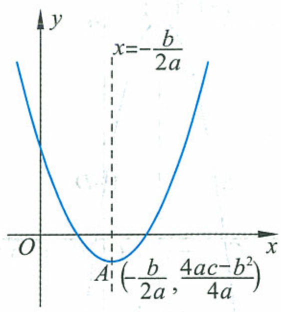


图 2-26

当 $a<0$ 时，它的图像开口向下，顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$；$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 上是增加的，在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上是减少的；当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数取得最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

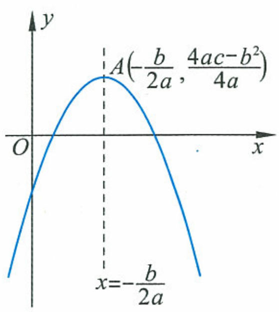


图 2-27

上述性质可以分别通过图 2-26 和图 2-27 直观地表示出来，也能够进行证明. 下面，就其中 $a>0$ 时函数的单调性进行证明.

证明 设 $a>0$，任取 x_1,x_2，且 $x_1<x_2\leqslant-\frac{b}{2a}$，则

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=(ax_2^2+bx_2+c)-(ax_1^2+bx_1+c)\\&=a(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)\\&=[a(x_2+x_1)+b](x_2-x_1).\end{aligned}$$

因为 $x_1<-\frac{b}{2a},x_2\leqslant-\frac{b}{2a}$， 所以 $x_1+x_2<-\frac{b}{a}$，

即 $$a(x_1+x_2)<-b,$$
也就是 $$a(x_1+x_2)+b<0.$$

又 $x_2-x_1>0$，所以
$$f(x_2)-f(x_1)<0,$$
即 $$f(x_2)<f(x_1).$$

由函数单调性的定义，$f(x)$在$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$上是减少的.

同理可证，$f(x)$在$\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$上是增加的.

显然，将 $f(x)=ax^2+bx+c$ 配方成 $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$之后，我们就可以通过 a，$-\dfrac{b}{2a}$和$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$直接得到函数的主要性质，并且可以依此画出函数图像.

例 2 将函数 $y=-3x^2-6x+1$ 配方，确定其对称轴，顶点坐标，求出它的单调区间及最大值或最小值，并画出它的图像.

解 $y=-3x^2-6x+1=-3(x+1)^2+4.$

由于 x^2 的系数是负数，所以函数图像开口向下；

顶点坐标为$(-1,4)$；

对称轴为直线 $x+1=0$(或 $x=-1$)；

函数在区间$(-\infty,-1]$上是增加的，在区间$[-1,+\infty)$上是减少的；

函数有最大值，没有最小值，函数的最大值是 4.

采用描点画图，选顶点 $A(-1,4)$，与 x 轴的交点 $B\left(\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3},0\right)$和$C\left(-\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3},0\right)$，与 y 轴的交点 $D(0,1)$，再任取点 $E(-2,1)$，过这 5 个点画出图像，如图 2-28.

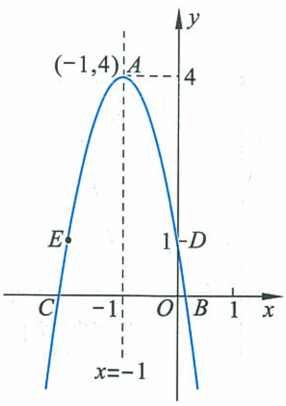


图 2-28

从这个例题中可以看出，根据配方后得到的性质画函数图像，可以直接选出关键点，减少了选点的盲目性，使画图的操作更简便，使图像更精确.

例 3 绿缘商店每月按出厂价每瓶 3 元购进一种饮料. 根据以前的统计数据，若零售价定为每瓶 4 元，每月可销售 400 瓶；若每瓶售价每降低 0.05 元，则可多销售 40 瓶. 在每月的进货量当月销售完的前提下，请你给该商店设计一个方案：销售价应定为多少元和从工厂购进多少瓶时，才可获得最大的利润？

解 设销售价为 x 元/瓶$(x>3)$，则根据题意(销售量等于进货

量)，正好当月销售完的进货量为

$$\frac{4-x}{0.05}\times 40+400$$

即　　$400(9-2x)$瓶.

此时所得的利润为

$$f(x)=400(9-2x)(x-3)=400(-2x^2+15x-27)\text{(元)}.$$

根据函数性质，当 $x=\frac{15}{4}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 450.

这时进货量为

$$400(9-2x)=400\left(9-2\times\frac{15}{4}\right)=600\text{(瓶)}.$$

故销售价为 $\frac{15}{4}$ 元、购进 600 瓶时可获得最大利润为 450 元.

练　习

1. 将下列函数配方：
   (1) $f(x)=x^2-2x+3$；　　(2) $f(x)=3x^2+6x-1$；
   (3) $f(x)=-2x^2+3x-2$.
2. 从 1990 年到 1997 年，某地区每人每年吃的蔬菜平均量 c(kg) 可以用函数 $c(t)=2.7t+165$ 表示，在此期间，人口函数可以用 $p(t)=2.6t+248$ 表示，其中 t 代表年数. 那么，该地区每年消耗的蔬菜总量就是上述两个式子的乘积，即 $v(t)=7.02t^2+1\,098.6t+40\,920$. 试求 1995 年该地消耗的蔬菜总量.
3. 指出下列函数图像的开口方向、顶点坐标和对称轴，以及函数的单调性：
   (1) $y=2x^2+1$；　　(2) $y=2(x+1)^2$；
   (3) $y=6x^2-5x-2$；　　(4) $y=-(x+1)(x-2)$.
4. 汽车使用单位容积燃料行驶的千米数是行车速度的函数. 由实验可知这个函数是 $f(x)=-0.01x^2+1.2x-5.8$. 求 $f(50)$，并说明它的意义；当速度为多少时，汽车最省油？

习 题 2—4

A　组

1. 把下列二次函数配方：
   (1) $f(x)=3+5x-2x^2$；　　(2) $f(x)=\frac{3}{4}x^2-2x$.
2. 把函数 $y=3x^2$ 的图像经过怎样的移动才能得到下列函数的图像？
   (1) $f(x)=3(x+5)^2-2$；　　(2) $f(x)=-3x^2+2x-1$.

3. 将二次函数 $y=-2x^2$ 的图像平行移动，顶点移到下列各点. 写出对应的二次函数的解析式，并画出它的图像：

(1) $(4,0)$；　　(2) $(0,-2)$；

(3) $(-3,2)$；　　(4) $(3,-1)$.

4. 确定下列二次函数图像的开口方向、对称轴、顶点和单调性，并指出在同一个直角坐标系中哪个函数的图像开口较小：

(1) $y=x^2-3x$；　　(2) $y=-2x^2+x+3$.

5. 对于下列函数，试求它们在指定区间上的最大值或最小值，并指出这时的 x 值：

(1) $y=(x-1)^2$，$x\in(-1,5)$；　　(2) $y=-2x^2-x+1$，$x\in[-3,1]$.

6. 求二次函数 $y=-2x^2+6x$ 在下列定义域上的值域：

(1) 定义域为 $\{x\in\mathbf{Z}\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$；　　(2) 定义域为 $[-2,1]$.

7. 将长 40 cm 的铁丝截成两段，每段折成一个正方形. 要使这两个正方形面积的和最小，应该怎样截这段铁丝？

8. 用 4 m 长的合金条做一个"日"字形的窗户. 当窗户的长和宽各为多少时，透过的光线最多？

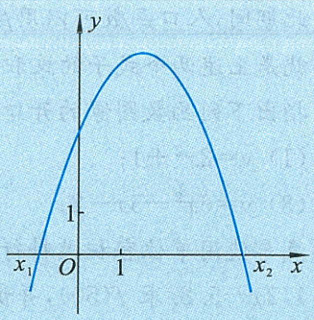
9. 二次函数的图像满足下列条件，求它的解析式：

(1) 顶点为 $(2,-1)$，过点 $(3,1)$；

(2) 过点 $(0,1)$，$(1,1)$ 和 $(4,-9)$.

B　组

1. 如图是二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像，它与 x 轴交于点 $(x_1,0)$ 和 $(x_2,0)$. 试确定 a,b,c 以及 x_1x_2，x_1+x_2 的符号.



（第 1 题）

2. 二次函数的图像与 x 轴只有一个交点，对称轴为 $x=3$，与 y 轴交于点 $(0,3)$. 求它的解析式.

3. 二次函数 $y=ax^2+ax+2(a>0)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $f(a)$. 写出函数 $f(a)$ 的解析式，判断 $f(a)$ 在 $[1,5]$ 上的单调性，并画出函数 $f(a)$ 的图像.

4. A，B 两只船分别从同在东西方向上相距 145 km 的甲、乙两地开出，A 从甲地自东向西行驶，B 从乙地自北向南行驶；A 的速度是 40 km/h，B 的速度是 16 km/h. 经过多少时间 A，B 间的距离最短？

5. 当 a,b,c 具有什么关系时，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的函数值恒大于零？恒小于零？

*6. 将一物体以初速度 20 m/s 和水平线 x 轴成 45°角斜抛而出. 如果空气阻力略去不计，重力加速度 g 取 10 m/s²，试求：(1) 轨道的形状；(2) 最大高度；(3) 飞行距离.（学过斜抛运动的学生做）

说明：本教材中带"＊"的题为选做.

§5　简单的幂函数

我们已经熟悉，$y=x$ 是正比例函数，$y=\frac{1}{x}$（$y=x^{-1}$）是反比例函数，$y=x^2$ 是二次函数. 从形式上看，它们只是指数不同. 如果一个函数，底数是自变量 x，指数是常量 α，即

$$y=x^{\alpha},$$

这样的函数称为**幂函数**. 如 $y=x$，$y=x^{-1}$，$y=x^2$，$y=x^5$，$y=x^{-4}$ 等都是幂函数.

在中学阶段我们只关注 $\alpha=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 这几种情形.

例 1　画出函数 $f(x)=x^3$ 的图像，讨论其单调性.

解　先列出 x，y 的对应值表（如表 2-8），再用描点法画出图像（如图 2-29）.

表 2-8

x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	…
y	…	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8	…

从图像上看出，$y=x^3$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

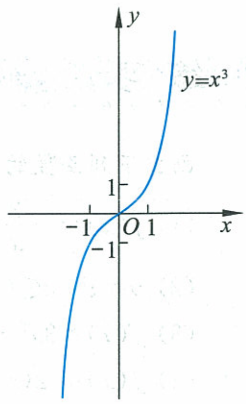


图 2-29

可以看出，$f(x)=x^3$ 的图像关于原点对称. 并且对任意的 x，$f(-x)=(-x)^3=-x^3$，即 $f(-x)=-f(x)$.

一般地，图像关于原点对称的函数叫作**奇函数**. 在奇函数 $f(x)$ 中，$f(x)$ 和 $f(-x)$ 的绝对值相等，符号相反，即

$$f(-x)=-f(x);$$

反之，满足 $f(-x)=-f(x)$ 的函数 $y=f(x)$ 一定是奇函数.

我们还知道，$y=x^2$ 的图像关于 y 轴对称，像这样的函数叫作**偶函数**. 在偶函数 $f(x)$ 中，$f(x)$ 和 $f(-x)$ 的值相等，即

$$f(-x)=f(x);$$

反之，满足 $f(-x)=f(x)$ 的函数 $y=f(x)$ 一定是偶函数.

当函数 $f(x)$ 是奇函数或偶函数时，称函数具有**奇偶性**.

例 2 判断 $f(x)=-2x^5$ 和 $g(x)=x^4+2$ 的奇偶性.

解 因为在 **R** 上 $f(x)=-2x^5$，$f(-x)=-2(-x)^5=2x^5$，所以

$$f(-x)=-f(x),$$

于是 $f(x)$ 是奇函数.

而 $g(x)=x^4+2$，$g(-x)=(-x)^4+2=x^4+2$，所以

$$g(-x)=g(x).$$

于是 $g(x)$ 是偶函数.

动手实践

在图 2-30 中，只画出了函数图像的一半，请你在图上画出它们的另一半，并说出画法的依据.

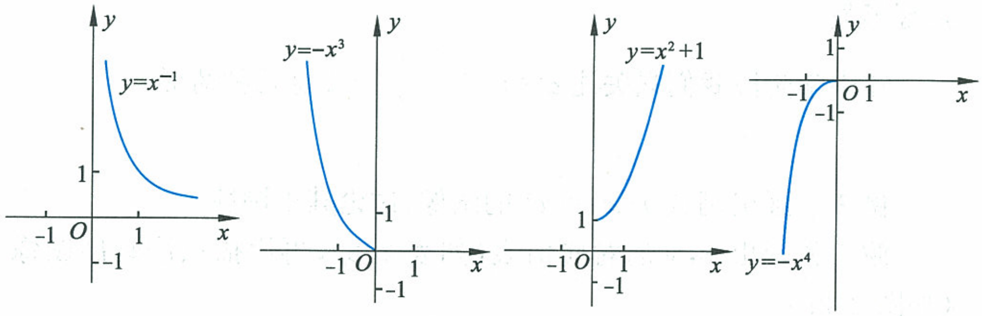


图 2-30

在研究函数时，如果知道其图像具有关于 y 轴或原点对称的特点，那么我们可以先研究它的一半，再利用对称性了解另一半，从而减少了工作量.

练 习

画出下列函数的图像，判断奇偶性：

(1) $f(x)=-\dfrac{3}{x}$；

(2) $y=x^2$，$x\in(-3,3]$；

(3) $f(x)=3x^2-3$；

(4) $f(x)=2(x+1)^2+1$.

习题 2—5

A 组

1. 判断下列函数的单调性，加以证明，并画出图像：

(1) $f(x)=2x+1$；

(2) $f(x)=-\dfrac{2}{x}$，$x\in(-\infty,0)$；

(3) $f(x)=6x+x^2$，$x\in[-3,+\infty)$.

2. 证明：函数 $f(x)=x^2+1$ 是偶函数，且在$[0,+\infty)$上是增加的.

3. 已知下列二次函数，确定图像的开口方向、对称轴、顶点、最大值或最小值、奇偶性、单调区间，指出函数增加或减少的区间，并画出它们的图像：

(1) $y=x^2-3$；　　(2) $y=-x^2+4x-2$；

(3) $y=5x^2+2$；　　(4) $y=-2x^2-6x$.

4. 讨论 a，b 的取值对一次函数 $y=ax+b$ 单调性和奇偶性的影响，并画出草图.

B 组

1. 作出下列函数的图像，并指出它们的单调区间，比较它们的图像与函数 $y=|x|$ 图像的关系：

(1) $y=|2x-3|$；　　(2) $y=2|x|-1$.

2. 讨论 a，b，c 的取值对二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 单调性和奇偶性的影响.

阅读材料

函数概念的发展

——从解析式到对应关系

函数概念早在 18 世纪初就被提出，但是在很长一段时间内，由于人们接触到的函数都是以解析式的形式出现，以至于人们认为函数一定能用解析式表示，甚至认为函数就是解析式. 欧拉(Euler, L. 1707—1783)就曾定义函数为"包括变量和一些常数的任何表达式".

在函数概念的发展过程中，德国数学家狄利克雷(Dirichlet, P. G. L. 1805—1859)功不可没. 19 世纪，狄利克雷定义了一个"奇怪的函数"

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

这个函数后来被称为 Dirichlet 函数. 很明显，它既不能用列表法，也不能用图像法，又不能用解析法表示，但是它完全满足函数的思想.

Dirichlet 函数以及与之相关的变形函数，促使数学家们重新思考函数的本质和概念表达，在函数理论建立和应用中发挥了重要的作用. 通过这些特殊的函数，人们渐渐地形成了目前这种以对应关系为核心的函数观，在此基础上发展出函数的多种表示方法，如：列表法、图像法等.

实际上，在日常生活和实际工作中，存在着许多不能用解析式表示的函数，比如：股票的价格(y)是关于时间(x)的函数. 但这并不妨碍我们把它作为一个函数来理解并用 $y=f(x)$ 来表示这种关系.

资料来源：Dieter Rüthing. 函数概念的一些定义——从 Joh. Bernoulli 到 N. Bourbaki. 数学译林，1986，5(3)

课题学习

个人所得税的计算

《中华人民共和国个人所得税法》第 14 条中有个人所得税税率表，见表 2-9.

表 2-9　个人所得税税率表——(工资、薪金所得适用)

级别	全月应纳税所得额	税率/%
1	不超过 1 500 元的部分	3
2	超过 1 500 至 4 500 元的部分	10
3	超过 4 500 至 9 000 元的部分	20
4	超过 9 000 至 35 000 元的部分	25
5	超过 35 000 至 55 000 元的部分	30
6	超过 55 000 至 80 000 元的部分	35
7	超过 80 000 元的部分	45

上表中“全月应纳税所得额”是指从纳税者的月工资、薪金收入中减除 3 500 元后的余额. 请参照上面的信息，解决以下问题：

1. 请写出个人全月应纳所得税额 y(元)关于收入额 x(元)的函数表达式；

2. 画出这个函数的图像；

3. 如果一个公司的职员某月工资、薪金的收入为6 000 元，他应缴纳个人所得税为多少？

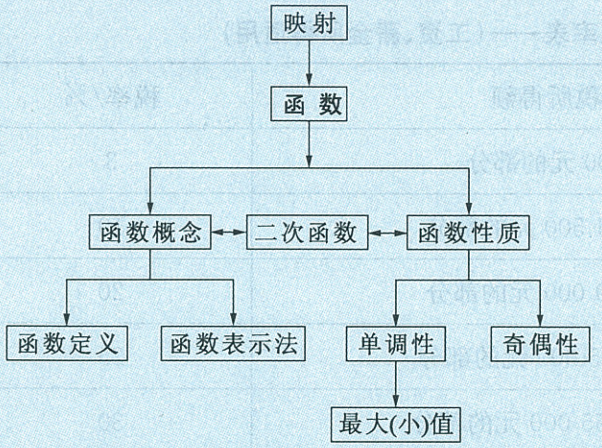
4. 如果一个公司的职员某月缴纳的个人所得税是 370 元，问他该月的工资、薪金的收入是多少？

*5. 如果把个人全月所得税额作为自变量，该月的工资、薪金的收入可以作为它的函数吗？如果认为可以，请写出函数解析式，并画出这个函数的图像，如果认为不可以，请说明理由；

*6. 请为自动完成下面的计算任务编一个计算机程序：当输入数据是某人某月工资、薪金的收入额时，计算机输出交纳个人所得税金额；当输入数据是某人某月交纳的个人所得税金额时，计算机输出当事人该月工资、薪金的收入额.(建议：可以在学完算法知识后，解决这个问题)

◆ 本章小结

一、内容提要



二、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求

(1) 能用集合语言刻画函数；

(2) 会求简单函数的定义域和值域；

(3) 能根据具体的情境，用图像法、列表法、解析法表示函数；

(4) 了解简单的分段函数，并能简单应用；

(5) 了解映射的概念；

(6) 理解函数的单调性、最大(小)值的概念，掌握判断和证明一些简单函数单调性的方法；

(7) 会对二次函数配方，并讨论其图像的开口方向、大小，顶点，对称轴等性质；

(8) 了解幂函数的概念；

(9) 了解函数的奇偶性的含义；

(10) 能用函数解决简单的实际问题.

2. 需要注意的问题

(1) 注重感受、建立函数思想，准确地把握函数的概念，把函数当作最重要的基础内容之一来学习，并在后续的学习中不断回顾和加深理解它的意义和作用.

(2) 注意函数与映射的联系和差异.映射的原像集合与像集合可以是数集,也可以是其他集合;函数中,这两个集合必须是数集.映射是函数的推广,它扩展了函数的作用;函数是特殊的映射.

(3) 在研究函数性质中,函数单调性具有突出的地位和作用,它反映函数值的变化趋势;有些函数是增函数或减函数,而更多的函数是在某个数集上增加的或减少的.

(4) 在学习中,通过二次函数体会图像的形状、位置的拓展和化归的过程,以及研究函数的一般方法.

复习题二

A 组

1. 在下列对应中，哪些是映射，哪些映射是函数，哪些不是？为什么？

   (1) 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,5,7,9\}$，对应关系是 $f(x)=2x+1$，$x\in A$；

   (2) 设 $A=\{1,4,9\}$，$B=\{-1,1,-2,2,-3,3\}$，对应关系是“A 中的元素开平方”；

   (3) 设 $A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}$，对应关系是 $f(x)=x^3$，$x\in A$；

   (4) 设 $A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}$，对应关系是 $f(x)=2x^2+1$，$x\in A$.

2. 设 $A=\{a, b, c\}$，$B=\{0, 1\}$，请写出两个从 A 到 B 的映射.

3. 求函数的定义域：

   (1) $y=3x^2+6x-1$； (2) $y=\sqrt{2x+1}$；

   (3) $y=\dfrac{1}{|x+2|-1}$.

4. 某运输公司运输货物的价格规定是：如果运输里程不超过100 km，运费是0.5元/km；如果超过100 km，超过 100 km 的部分按 0.4 元/km收费. 请写出运费与运输里程数之间的函数关系式.

5. 对于二次函数 $y=-4x^2+8x-3$，

   (1) 指出图像的开口方向、对称轴方程、顶点坐标；

   (2) 画出它的图像，说明其图像由 $y=-4x^2$ 的图像经过怎样平移得来；

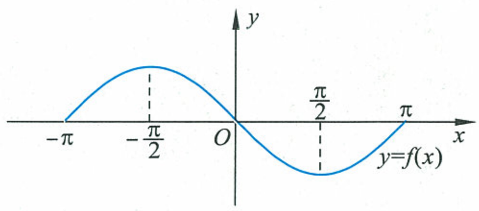
   (3) 求函数的最大值或最小值；

   (4) 分析函数的单调性.

6. 举出几个用分段函数表示的实际例子，并说明每个函数的定义域和值域.

7. 为了加快教育现代化的进程，某学校准备购买 40 台电脑. 在购买前进行了市场调查，调查显示：在相同品牌、质量与售后服务的条件下，甲、乙两公司的报价都是每台 6 000 元. 甲公司的优惠条件是购买 10 台以上时，从第 11 台开始可按报价的七折计算；乙公司的优惠条件是均按八五折计算. 学校选择哪家公司合算？请说明理由. 能用图像给出解释吗？

8. 如图，根据函数 $f(x)$ 的图像（包括端点），分别指出函数的单调区间，以及在每一个单调区间上是增加的，还是减少的.



（第 8 题）

9. 已知

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3, & -3\leqslant x<0, \\ -3x+3, & 0\leqslant x<1, \\ -x^2+6x-5, & 1\leqslant x\leqslant 6. \end{cases}$$

   (1) 画出函数的图像；

   (2) 求函数的单调区间；

   (3) 求函数的最大值和最小值.

10. 判断并证明下列函数的奇偶性：

(1) $y=\frac{1}{x^3}$；　　　　　　　　　　(2) $f(x)=2x^2-5$.

11. 某同学为了援助失学儿童，每月将自己的零用钱以相等的数额存入储蓄盒内，准备凑够 200 元时一并寄出. 储蓄盒里原有 60 元，两个月后盒内有 90 元.

(1) 写出盒内的钱数(元)与存钱月份数的函数解析式，并画出图像；

(2) 几个月后这位同学可以第一次汇款？

12. 试根据下面的“某水库存水量与水深的对照表”，分析水库的存水量随水深变化的趋势，并用图表示出来.

水深/m	0	5	10	15	20	25	30	35
存水量/m^3	0	200 000	400 000	900 000	1 600 000	2 750 000	4 375 000	6 500 000

B　组

1. 填空题

(1) 一个函数的图像过点 $(1,2)$，且在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增加的，则这个函数的解析式可以为______________；

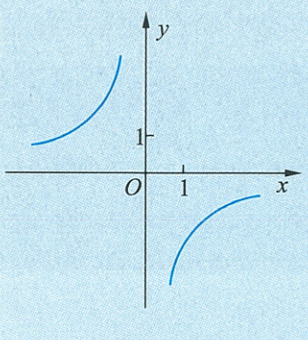
(2) 二次函数的图像过点 $(1,2)$，且在 $[-1,+\infty)$ 上是增加的，则这个函数的解析式可以为______________.

2. 已知 $m<-2$，点 $(m-1,y_1)$，(m,y_2)，$(m+1,y_3)$ 都在二次函数 $y=x^2-2x$ 的图像上，则(　　).

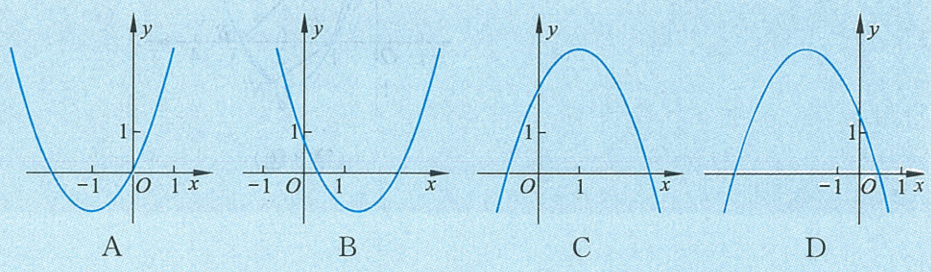
A. $y_1<y_2<y_3$　　　　　　　　B. $y_3<y_2<y_1$

C. $y_1<y_3<y_2$　　　　　　　　D. $y_2<y_1<y_3$

3. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像如图所示，则二次函数 $y=2kx^2-4x+k^2$ 的图像大致为(　　).



(第 3 题)



(第 3 题)

4. 证明：在区间 $[2,5]$ 上，函数 $f(x)=-2x^2+3x-1$ 是减少的.

5. 设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，求证：

(1) $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$ $(x\neq\pm1)$；

(2) $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ $(x\neq-1, x\neq0)$.

6. 某地煤气公司规定，居民每个月使用的煤气费由基本月租费、保险费和超额费组成. 每个月的保险费为 3 元，当每个月使用的煤气量不超过 a m³ 时，只缴纳基本月租费 c 元；如果超过这个使用量，超出的部分按 b 元/m³ 计费.

(1) 请写出每个月的煤气费 y(元)关于该月使用的煤气量x(m³)的函数解析式；

(2) 如果某个居民 7～9 月份使用煤气与收费情况如下表，请求出 a,b,c，并画出函数图像.

月　份	煤气使用量/m³	煤气费/元
7	4	4
8	25	14
9	35	19

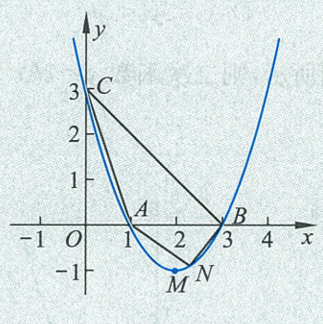
其中，仅 7 月份煤气使用量未超过 a m³.

C　组

1. 二次函数 $y=kx^2-4x-8$ 在区间$[5,20]$上是减少的，求实数 k 的取值范围.
2. 求二次函数 $f(x)=x^2-2(2a-1)x+5a^2-4a+2$ 在$[0,1]$上的最小值$g(a)$的解析式.
3. 已知二次函数图像如图所示.

(1) 求其解析式及顶点 M 的坐标；

(2) 点 N 在抛物线弧$\overset{\frown}{AMB}$上运动(不与 A,B 重合)，求四边形$ANBC$的面积 S 与 N 的横坐标之间的函数关系 f，并确定其定义域.



(第 3 题)

第三章 指数函数和对数函数

联合国人口基金组织宣布，1987 年世界第 50 亿个婴儿诞生. 12 年后，1999 年 10 月 12 日世界第 60 亿个婴儿诞生. 据人口专家预测，到 2050 年世界人口总数将达到 89 亿. 如何描述人口变化规律，估计若干年后的人口总数，需要用到指数函数或对数函数的知识.

指数函数与对数函数是两个重要的函数模型，它们是基本的初等函数. 本章我们将学习指数与对数、指数函数与对数函数，探索并了解这一对函数的图像和性质，了解它们之间互为反函数的关系，感受这些特殊的函数在刻画现实问题中的作用.

§1 正整数指数函数
§2 指数扩充及其运算性质
2.1 指数概念的扩充
2.2 指数运算的性质
§3 指数函数
3.1 指数函数的概念
3.2 指数函数$y=2^x$和$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的图像和性质
3.3 指数函数的图像和性质
§4 对数
4.1 对数及其运算
4.2 换底公式
§5 对数函数
5.1 对数函数的概念
5.2 对数函数$y=\log_2 x$的图像和性质
5.3 对数函数的图像和性质
§6 指数函数、幂函数、对数函数增长的比较

§1　正整数指数函数

实例分析

问题 1　某种细胞分裂时，由 1 个分裂成 2 个，2 个分裂成 4 个……一直分裂下去(如图 3-1)．

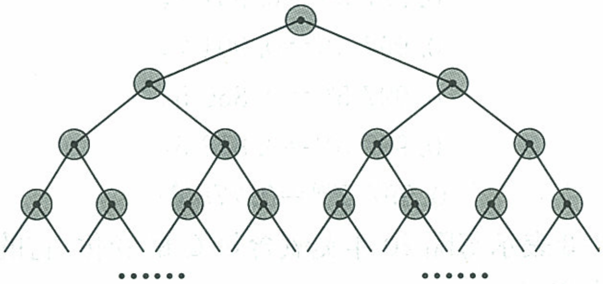


图 3-1

(1) 用列表表示 1 个细胞分裂次数分别为 1，2，3，4，5，6，7，8 时，得到的细胞个数；

(2) 用图像表示 1 个细胞分裂的次数 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 与得到的细胞个数 y 之间的关系；

(3) 写出得到的细胞个数 y 与分裂次数 n 之间的关系式，试用科学计算器计算细胞分裂 15 次、20 次后得到的细胞个数．

解　(1) 利用正整数指数幂的运算法则，可以算出 1 个细胞分裂 1，2，3，4，5，6，7，8 次后，得到的细胞个数(如表 3-1)．

表 3-1

分裂次数(n)	1	2	3	4	5	6	7	8
细胞个数(y)	2	4	8	16	32	64	128	256

(2) 1 个细胞分裂的次数 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 与得到的细胞个数 y 之间的关系可以用图像表示，它的图像由一些孤立的点组成．(如图 3-2)

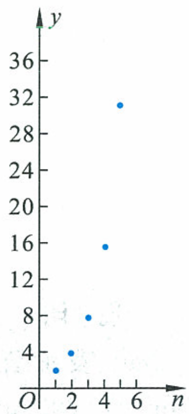


图 3-2

(3) 细胞个数 y 与分裂次数 n 之间的关系式为

$$y=2^n,\quad n\in\mathbf{N}_+.$$

用科学计算器算得

$$2^{15}=32\ 768,$$

$$2^{20}=1\ 048\ 576.$$

细胞分裂 15 次、20 次后得到的细胞个数分别是 32 768 个和

1 048 576个.

问题 2 电冰箱使用的氟化物的释放会破坏大气层中的臭氧层. 臭氧含量 Q 近似满足关系式 $Q=Q_0\cdot 0.997\ 5^t$，其中 Q_0 是臭氧的初始量，t 是时间(年). 这里设 $Q_0=1$.

(1) 计算经过 20，40，60，80，100 年后，臭氧含量 Q；

(2) 用图像表示每隔 20 年臭氧含量 Q 的变化；

(3) 试分析随着时间的增加，臭氧含量 Q 是增加还是减少.

解 (1) 使用科学计算器可算得，经过 20，40，60，80，100 年后，臭氧含量 Q 分别是：

$$0.997\ 5^{20}=0.951\ 2,$$
$$0.997\ 5^{40}=0.904\ 7,$$
$$0.997\ 5^{60}=0.860\ 5,$$
$$0.997\ 5^{80}=0.818\ 5,$$
$$0.997\ 5^{100}=0.778\ 6;$$

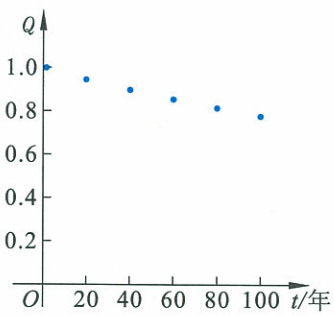


图 3-3

(2) 图 3-3 表示每隔 20 年臭氧含量 Q 的变化，它的图像也是由一些孤立的点组成；

(3) 通过计算和看图可以知道，随着时间的增加，臭氧的含量在逐渐减少.

分析理解

问题 1 研究了随分裂次数增加细胞个数增加的趋势，可以知道，细胞个数 y 与分裂次数 n 之间存在着函数关系

$$y=2^n,\quad n\in \mathbf{N}_+;$$

问题 2 研究了随年份增加臭氧含量减少的趋势，同样可知，臭氧含量 Q 与时间 t 之间存在着函数关系

$$Q=0.997\ 5^t,\quad t\in \mathbf{N}_+.$$

一般地，函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1,x\in \mathbf{N}_+)$ 叫作**正整数指数函数**，其中 x 是自变量，定义域是正整数集 $\mathbf{N}_+$.

在研究增长问题、复利问题、质量浓度问题中常见这类函数.

说 明

hm^2 表示公顷，$1\ \mathrm{hm}^2=10\ 000\ \mathrm{m}^2$.

例 某地现有森林面积为 $1\ 000\ \mathrm{hm}^2$，每年增长 5%，经过 $x(x\in \mathbf{N}_+)$ 年，森林面积为 $y\ \mathrm{hm}^2$. 写出 x,y 间的函数关系式，并求出经过 5 年，森林的面积.

解 y 与 x 之间的函数关系式为

$$y=1\,000(1+5\%)^x \quad (x\in \mathbf{N}_+)$$ [1]，

经过 5 年，森林的面积为

$$1\,000(1+5\%)^5=1\,276.28(\text{hm}^2).$$

[1] 在实际问题中，经常会遇到类似的指数增长模型．

我们把形如 $y=ka^x$ ($k\in \mathbf{R}$，$a>0$，且 $a\neq 1$) 的函数称为指数型函数．

练习

1. 画出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ($x\in \mathbf{N}_+$) 的图像，并说明函数的单调性．
2. 一种产品的年产量原来是 10 000 件，今后计划使年产量每年比上一年增加 $p\%$．写出年产量随经过年数变化的函数关系式．

习题 3—1

1. 一种产品的成本原来是 a 元，今后计划使成本每年比上一年降低 $p\%$．写出成本随经过年数变化的函数关系式．
2. 某种细菌在培养过程中，每 20 min 分裂一次，每次 1 个细菌分裂为 2 个，经过 x h，这种细菌由 1 个繁殖成 y 个．写出 x，y 间的函数关系式，并计算经过 3 h，这个细菌繁殖成的个数．
3. 画出函数 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ ($x\in \mathbf{N}_+$) 的图像，并说明函数的单调性．
4. 请你到报纸、杂志中或上网搜集有关正整数指数函数的实例，并和同学交流．

§2 指数扩充及其运算性质

2.1 指数概念的扩充

初中时，我们学习了整数指数幂：

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个}\quad(n\in\mathbf{N}_+),$$

$$a^0=1\ (a\neq 0),$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad(a\neq 0,n\in\mathbf{N}_+).$$

问题提出

实际问题中，指数不一定都是整数. 例如，臭氧含量 Q 与时间 t 存在指数关系，如果我们只讨论了指数是正整数的情况，那么当时间 t 是半年，或 15 年零 3 个月时，即指数是分数时情况又怎样呢？

分析理解

给定正实数 a，对于任意给定的整数 m,n(m,n 互素)，存在唯一的正实数 b，使得 $b^n=a^m$，我们把 b 叫作 a 的$\frac{m}{n}$次幂，记作

$$b=a^{\frac{m}{n}}.$$

它就是**分数指数幂**.

例如，$b^3=5^2$，则 $b=5^{\frac{2}{3}}$；$x^5=25^{-4}$，则 $x=25^{-\frac{4}{5}}$等.

例 1 把下列各式中的 $b(b>0)$写成分数指数幂的形式：

(1) $b^5=32$； (2) $b^4=3^5$； (3) $b^{-5n}=\pi^{3m}$ $(m,n\in\mathbf{N}_+)$.

解 (1) $b=32^{\frac{1}{5}}$；

(2) $b=3^{\frac{5}{4}}$；

(3) $b=\pi^{-\frac{3m}{5n}}$ $(m,n\in\mathbf{N}_+)$.

例 2 计算：

(1) $27^{\frac{1}{3}}$；　　　　(2) $4^{\frac{3}{2}}$.

解　(1) 因为 $3^3=27$，所以 $27^{\frac{1}{3}}=3$；

(2) 因为 $8^2=4^3$，所以 $4^{\frac{3}{2}}=8$.

有时我们把正分数指数幂写成**根式**形式，即

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\quad(a>0).$$

例如，$8^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，　$27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=9$.

正数的负分数指数幂的意义与负整数指数幂的意义相仿：

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\ (a>0,m,n\in\mathbf{N}_+,且\ n>1).$$

0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义.

指数已经扩充为可以是任意的整数和分数了，也就是可以是任意有理数了，那么，指数还可扩充为任意的无理数吗？

阅读理解

我们以 $10^{\sqrt{2}}$ 为例来认识无理数指数幂.

无理数 $\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 210\cdots$

可以知道

$$1.4<1.41<1.414<1.414\ 2<\cdots<\sqrt{\mathbf{2}}<$$
$$\cdots<1.414\ 3<1.415<1.42<1.5,$$

我们把不等式中 $\sqrt{2}$ 左边的数称为 $\sqrt{2}$ 的不足近似值，把其右边的数称为过剩近似值. 我们发现这样做下去，越来越逼近 $\sqrt{2}$ 的精确值.

同时，借助于科学计算器，可以得到表 3-2.

表 3-2

α	10^α	10^α	α
1.4	25.118 864 31…	31.622 776 60…	1.5
1.41	25.703 957 82…	26.302 679 91…	1.42
1.414	25.941 793 62…	26.001 595 63…	1.415
1.414 2	25.953 743 00…	25.959 719 76…	1.414 3
1.414 21	25.954 340 62…	25.954 938 25…	1.414 22
…	…	…	…

把用 10 做底数，$\sqrt{2}$ 的不足近似值做指数的各个幂，排成由小到大的一列数

$$10^{1.4},\ 10^{1.41},\ 10^{1.414},\ 10^{1.414\ 2},\ 10^{1.414\ 21},\cdots$$

同样，把用 10 做底数，$\sqrt{2}$ 的过剩近似值做指数的各个幂，排成由大到

小的一列数

$$10^{1.5},10^{1.42},10^{1.415},10^{1.4143},10^{1.41422},\cdots$$

不难看出$\sqrt{2}$的不足近似值和过剩近似值相同的位数越多，即$\sqrt{2}$的近似值精确度越高，以其不足近似值和过剩近似值为指数的幂 10^{α} 会越来越趋近于同一个数，我们把这个数记为 $10^{\sqrt{2}}$. 即

$$10^{1.4}<10^{1.41}<10^{1.414}<10^{1.4142}<\cdots<\mathbf{10^{\sqrt{2}}}<$$
$$\cdots<10^{1.4143}<10^{1.415}<10^{1.42}<10^{1.5}.$$

也就是说 $10^{\sqrt{2}}$ 是一个实数，$10^{\sqrt{2}}=25.954\,553\,519\,5\cdots$

我们也可以用类似的方法，了解$\left(\frac{1}{10}\right)^{\sqrt{2}}$的意义，它是实数.

类似地，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$，$3^{\pi}$ 等都是实数.

自然地，对于任意的实数 α，有

$$1^{\alpha}=1 \text{ 和 } a^{-\alpha}=\frac{1}{a^{\alpha}}(a>0).$$

例如，$1^{-\sqrt{2}}=1$；$10^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{10^{\sqrt{2}}}$；$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}}=2^{\sqrt{2}}$.

这样，我们就把指数扩大为全体实数了.

值得注意的是，指数幂 a^{α} 中，a 一定大于 0，a^{α} 也大于 0.

练 习

1. 口算：

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$；　(2) $\left(\frac{3}{5}\right)^{0}$；　(3) $121^{\frac{1}{2}}$；　(4) $100^{-\frac{3}{2}}$；

(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$；　(6) $\left(\frac{64}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$；　(7) $0.01^{-0.5}$；　(8) $0.125^{\frac{1}{3}}$.

2. 把下列各式中的 $b(b>0)$ 写成负分数指数幂的形式：

(1) $b^{-5}=32$；　(2) $b^{-4}=3^{5}$；　(3) $b^{-2n}=\pi^{3m}$　$(m,n\in\mathbf{N}_{+})$.

3. 计算：

(1) $8^{-\frac{1}{3}}$；　(2) $27^{-\frac{2}{3}}$.

2.2 指数运算的性质

初中，我们已经知道正整数指数幂的运算性质：

(1) $a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$；

(2) $(a^m)^n=a^{mn}$；

(3) $(ab)^n=a^nb^n$；

(4) 当 $a\neq0$ 时，有 $\frac{a^m}{a^n}=\begin{cases}a^{m-n}, & 当\ m>n\ 时,\\ 1, & 当\ m=n\ 时,\\ a^{-(n-m)}, & 当\ m<n\ 时;\end{cases}$

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}(b\neq0)$.

其中，$m,n\in\mathbf{N}_+$.

实际上，当 $a>0,b>0$ 时，对任意实数 m,n 都满足上述性质．我们可以把上述五条归纳为三条：

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；

(2) $(a^m)^n=a^{mn}$；

(3) $(ab)^n=a^nb^n$.

例 3　在实数范围中，对比 $(ab)^n=a^nb^n$ 和 $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$（其中 $a>0$，$b>0$），说明后者可以归入前者.

解　$\left(\frac{a}{b}\right)^n=(ab^{-1})^n=a^nb^{-n}=\frac{a^n}{b^n}$，因此，性质 $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ 可以归入性质 $(ab)^n=a^nb^n$.

例 4　化简（式中字母均为正实数）：

(1) $3x^{\sqrt{2}}(2x^{-\sqrt{2}}yz)$；　　　(2) $(x^{\frac{1}{\alpha}}y)^\alpha(4y^{-\alpha})$.

解　(1) $3x^{\sqrt{2}}(2x^{-\sqrt{2}}yz)=(3\times2)x^{\sqrt{2}-\sqrt{2}}yz=6yz$；

(2) $(x^{\frac{1}{\alpha}}y)^\alpha(4y^{-\alpha})=4x^{\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha}\cdot y^\alpha\cdot y^{-\alpha}=4xy^{\alpha-\alpha}=4x$.

例 5　已知 $10^\alpha=3,10^\beta=4$. 求 $10^{\alpha+\beta},10^{\alpha-\beta},10^{-2\alpha},10^{\frac{\beta}{5}}$.

解　$10^{\alpha+\beta}=10^\alpha\times10^\beta=3\times4=12$；

$10^{\alpha-\beta}=\frac{10^\alpha}{10^\beta}=\frac{3}{4}$；　　$10^{-2\alpha}=(10^\alpha)^{-2}=3^{-2}=\frac{1}{9}$；

$10^{\frac{\beta}{5}}=(10^\beta)^{\frac{1}{5}}=4^{\frac{1}{5}}$.

练 习

1. 化简：

(1) $3^{\sqrt{2}}\times 4^{\sqrt{2}}$；　　(2) $2x^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(-3x^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}y^{\sqrt{3}})$.

2. 已知 $10^{\alpha}=2, 10^{\beta}=3$，把下面的数写成底数是 10 的幂的形式：

(例如 $6=2\times 3=10^{\alpha}\times 10^{\beta}=10^{\alpha+\beta}$)

(1) $\frac{2}{3}$；　(2) 8；　(3) 24；　(4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. 在实数范围中，对比性质(4)，当 $a\neq 0$ 时，有 $\frac{a^m}{a^n}=\begin{cases} a^{m-n}, & 当\ m>n\ 时, \\ 1, & 当\ m=n\ 时, \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & 当\ m<n\ 时 \end{cases}$ 和性质(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，说明性质(4)可以归入性质(1).

习 题 3—2

A 组

1. 化简(式中字母均为正数)：

(1) $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{7}{12}}$；　(2) $(x^{\sqrt{3}}y^{-\frac{\sqrt{3}}{4}})^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$；

(3) $4x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-3x^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}y^2)$；　(4) $\left(\frac{16s^2t^{-6}}{25r^4}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

2. 用科学计算器求值(结果保留 4 个有效数字)：

(1) $5^{\frac{1}{3}}$；　(2) $321^{\frac{2}{3}}$；　(3) $78^{-\frac{1}{2}}$；　(4) $65^{\frac{4}{5}}$；　(5) $8.5^{-\frac{1}{3}}$.

3. 计算(式中各字母均为正数)：

(1) $x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}}x^{\frac{7}{12}}$；　(2) $\left(\frac{1}{2}a^{-\frac{5}{2}}b^{-2}\right)\left(-\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}b^2\right)$；

(3) $\frac{-15a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{3}{4}}}{25a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{4}}}$；　(4) $(-3x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}})(4x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}})(-2x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}})$；

(5) $\left(\frac{8s^6t^{-3}}{125r^9}\right)^{-\frac{2}{3}}$；　(6) $3x^{-\frac{1}{3}}\left(2x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)$；

(7) $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2$；　(8) $(3x^{\frac{1}{4}}+2y^{-\frac{1}{2}})(3x^{\frac{1}{4}}-2y^{-\frac{1}{2}})$.

4. 计算：

(1) $\left[125^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$；　(2) $\left[\frac{1}{4}(0.027^{\frac{2}{3}}+50\times 0.0016^{\frac{3}{4}})\right]^{-\frac{1}{2}}$.

5. 已知 $10^{\alpha}=2, 10^{\beta}=3$，把下面的数写成底数是 10 的幂的形式：

(1) $\frac{9}{4}$；　(2) 12；　(3) 72；　(4) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

6. 用科学计算器求值(结果保留 4 个有效数字)：

(1) $10^{2.36}$；　(2) $2.87^{3.2}$；　(3) $0.35^{-2.18}$；　(4) $e^{-0.25}$.

7. 某型号汽车在行驶 x km 以后蓄电池的存电比例可用下式表示：

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.000\,15x}.$$

求该型号汽车行驶 10 000 km 和 20 000 km 时的存电比例.

8. 某农科小组培育一种水稻新品种，第 1 代 1 粒种子得到 120 粒种子，如果以后各代每粒种子都可以得到 120 粒新种子，写出第 n 代得到的种子粒数与 n 的函数关系式，并求第 5 代得到新品种的种子数.

B　组

1. 用分数指数幂表示下列各式(式中字母均为正数)：

(1) $\sqrt{a^6b^5}$；　(2) $\sqrt[3]{m^2}$；　(3) $\sqrt{(m-n)^3}$　$(m>n)$；

(4) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}$；　(5) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$.

2. 计算(式中各字母均为正数)：

(1) $\dfrac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}}{a-1}$；　(2) $\dfrac{b^2-2+b^{-2}}{b^2-b^{-2}}$.

3. 证明整数指数幂的运算性质(1)：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

4. 已知 $x+x^{-1}=3(x>0)$，求下列各式的值：

(1) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$；　(2) $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$；

(3) $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$；　(4) $x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$.

5. 联合国将每年的 7 月 11 日定为“世界人口日”. 1992 年的“世界人口日”全球人口数达到 54.8 亿；1999 年的“世界人口日”全球人口数达到 60 亿. 若按这些年的平均年增长率增长，到 2007 年的“世界人口日”全球人口数是多少亿？

§3 指数函数

3.1 指数函数的概念

前面，我们经历了指数概念扩充的过程，下面进一步研究指数函数.

函数 $y=a^x$ 叫作**指数函数**，在这个函数中，自变量 x 出现在指数的位置上，底数 a 是一个大于 0 且不等于 1 的常量，函数的定义域是实数集 **R**. 很容易看到，对任意一个 x 值有唯一的 y 值与之对应.

3.2 指数函数 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像和性质

问题提出

怎样研究指数函数 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像和性质?

先列出 x,y 的对应值表(表 3-3)，再用描点法画出图像(如图3-4).

表 3-3

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

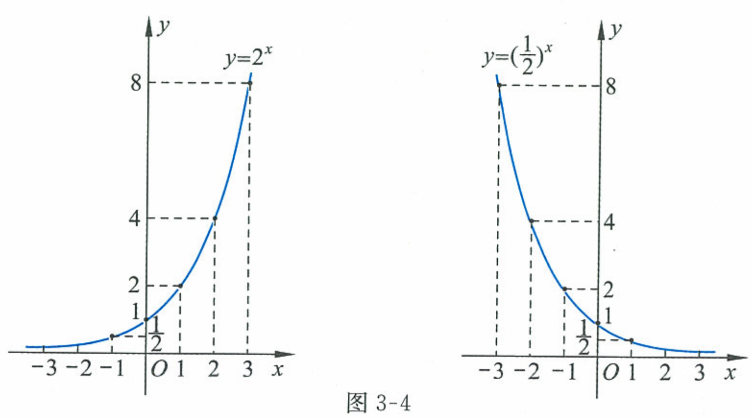


图 3-4

两个函数图像的相同点：都位于 x 轴的上方，都过点(0,1).

两个函数图像的不同点：函数 $y=2^x$ 的图像是上升的；函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像是下降的.

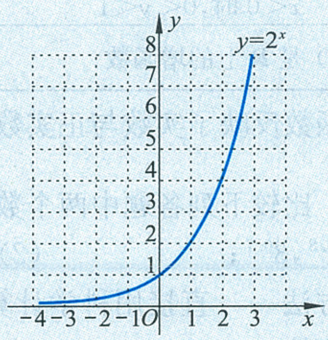
可以得到两个函数的性质：定义域都是实数集 $\mathbf{R}$，函数值都大于 0；$2^0=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$；函数 $y=2^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

正整数指数函数 $y=2^x(x\in\mathbf{N}_+)$ 与指数函数 $y=2^x(x\in\mathbf{R})$ 都是增函数，但它们的图像不同.

练　习

1. 下图是指数函数 $y=2^x$ 的图像，试由 x 的下列各值，确定函数 y 的值(精确到0.1)：

$-4,\quad -2,\quad -\frac{1}{2},\quad 0,\quad \frac{1}{4},\quad \frac{3}{2},\quad 3.$



(第 1 题)

2. 利用上题的图像，找出适合于方程 $2^x=5$ 的近似解(精确到0.1).

3.3　指数函数的图像和性质

动手实践

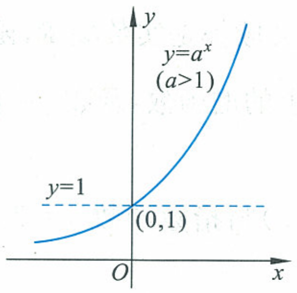
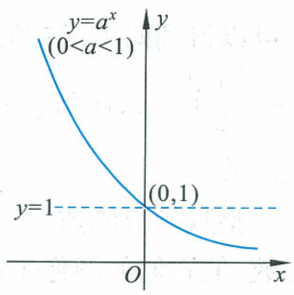
画出并观察、分析几个底数不同的指数函数的图像，归纳出一般的指数函数的图像和性质.

抽象概括

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1,x\in\mathbf{R})$，在 $a>1$ 及 $0<a<1$ 这两种

情况下的图像和性质总结如表 3-4.

表 3-4

	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	(1) 定义域:**R**	
	(2) 值域:$(0,+\infty)$	
	(3) 过点$(0,1)$,即 $x=0$ 时,$y=1$	
	(4) 当 $x>0$ 时,$y>1$; $x<0$ 时,$0<y<1$	(4) 当 $x>0$ 时,$0<y<1$; $x<0$ 时,$y>1$
	(5) 是 **R** 上的增函数	(5) 是 **R** 上的减函数

指数函数反映了实数与正实数之间的一种一一对应关系.

例 1 比较下列各题中两个数的大小:

(1) $3^{0.8}$,$3^{0.7}$; (2) $0.75^{-0.1}$,$0.75^{0.1}$.

解 方法一 直接用科学计算器计算各数的值,再对两个数值进行大小比较.

(1) 因为 $3^{0.8}\approx2.408\ 225$, $3^{0.7}\approx2.157\ 669$,所以

$$3^{0.8}>3^{0.7};$$

(2) 因为 $0.75^{-0.1}\approx1.029\ 186$, $0.75^{0.1}\approx0.971\ 642$,所以

$$0.75^{0.1}<0.75^{-0.1}.$$

方法二 利用指数函数的性质对两个数值进行大小比较.

(1) 因为 $y=3^x$ 是 **R** 上的增函数,$0.7<0.8$,所以

$$3^{0.7}<3^{0.8};$$

(2) 因为 $y=0.75^x$ 是 **R** 上的减函数,$0.1>-0.1$,所以

$$0.75^{0.1}<0.75^{-0.1}.$$

例 2 (1) 求使不等式 $4^x>32$ 成立的 x 的集合;

(2) 已知 $a^{\frac{4}{5}}>a^{\sqrt{2}}$,求数 a 的取值范围.

解 (1) $4^x>32$,即 $2^{2x}>2^5$.

因为 $y=2^x$ 是 **R** 上的增函数,所以 $2x>5$,即

$$x>\frac{5}{2}.$$

满足 $4^x>32$ 的 x 的集合是 $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$；

(2) 由于 $\frac{4}{5}<\sqrt{2}$，则 $y=a^x$ 是减函数，所以

$$0<a<1.$$

例 3　在同一坐标系中画出指数函数 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像，说出其自变量、函数值及其图像间的关系.

解　在同一坐标系中指数函数 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像如图 3-5 所示.

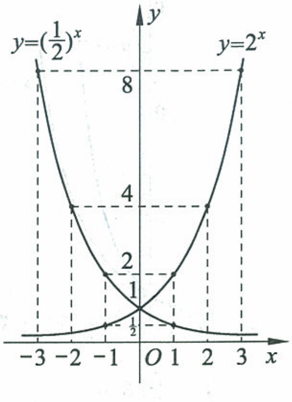


图 3-5

可以看出，当函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$（即函数 $y=2^{-x}$）的自变量的取值互为相反数时，其函数值是相等的，因而两个函数的图像关于 y 轴对称.

抽象概括

一般地，当函数 $y=a^x(a>0,a\neq1,x\in\mathbf{R})$ 与函数 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$（即函数 $y=a^{-x}$）的自变量的取值互为相反数时，其函数值是相等的，这两个函数的图像是关于 y 轴对称的.

练 习 1

1. 利用指数函数性质，比较下列各题中两个数的大小，并用科学计算器计算进行验证：

(1) $2.4^{0.6}$，$2.4^{0.2}$；　　(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}$，$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}$；

(3) 0.9^5，0.9^4；　　(4) $4^{0.5}$，$4^{0.8}$.

2. 在同一个直角坐标系中，画出下列函数的图像：

(1) $y=3^x$；　　(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

问题提出

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 中，底数 a 对函数图像有什么影响？

我们先由具体实例，分别讨论 $a>1$ 和 $0<a<1$ 的情况.

动手实践

实践一 在同一直角坐标系中画出函数 $y=2^x$ 与 $y=3^x$ 的图像，比较两个函数增长的快慢.

列表(如表 3-5)、描点画出 $y=2^x$ 和 $y=3^x$ 的图像(如图3-6).

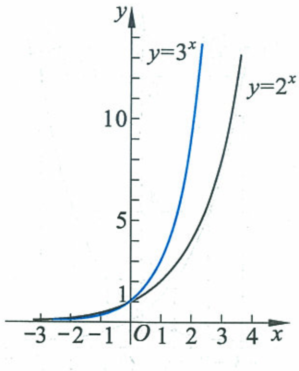


图 3-6

表 3-5

x	…	-2	-1	0	1	2	3	…	10	…
$y=2^x$	…	0.25	0.5	1	2	4	8	…	1 024	…
$y=3^x$	…	0.11	0.33	1	3	9	27	…	59 049	…

从表或图像可以看出：

(1) 当 $x<0$ 时，总有 $2^x>3^x$；

(2) 当 $x>0$ 时，总有 $2^x<3^x$；

(3) 当 x 从 0 增加到 10，函数 $y=2^x$ 的函数值从 1 增加到1 024，函数 $y=3^x$ 的函数值从 1 增加到 59 049. 这说明，当 $x>0$ 时，函数 $y=3^x$的函数值比函数 $y=2^x$ 的函数值增长得快.

一般地，$a>b>1$ 时，

(1) 当 $x<0$ 时，总有 $a^x<b^x<1$；

(2) 当 $x=0$ 时，总有 $a^x=b^x=1$；

(3) 当 $x>0$ 时，总有 $a^x>b^x>1$；

(4) 指数函数的底数越大，当 $x>0$ 时，其函数值增长得就越快.

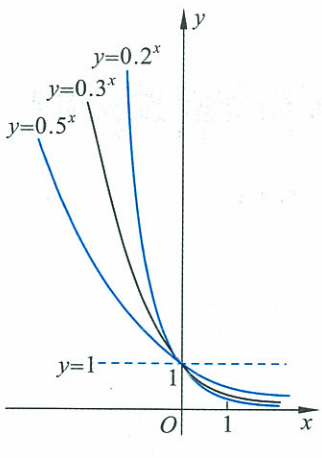


图 3-7

实践二 分别画出底数为 0.2，0.3，0.5 的指数函数图像，想象底数为 2，3，5 时指数函数的图像，研究指数函数 $y=a^x(0<a<1)$中，a 对函数图像变化的影响.

作图(如图 3-7).

观察图 3-6 和图 3-7，你能总结出图像随着 a 变化的规律吗？当自变量取同一数值时，比较对应函数值的大小，你能发现规律吗？

> **信息技术建议**
>
> 可以利用信息技术研究参数 a 的取值对指数函数 $y=a^x$ 图像的影响，具体操作见本节的“信息技术应用”栏目.

例 4 比较下列各题中两个数的大小：

(1) $1.8^{0.6}$，$0.8^{1.6}$；　　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$，$2^{-\frac{3}{5}}$.

解 方法一 直接用科学计算器计算各数的值，再对两个数值进行大小比较.

(1) 因为 $1.8^{0.6}\approx1.422\ 864$，$0.8^{1.6}\approx0.699\ 752$，所以

$$1.8^{0.6}>0.8^{1.6}；$$

(2) 因为$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}\approx 2.080\ 084$，$2^{-\frac{3}{5}}\approx 0.659\ 754$，所以

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}>2^{-\frac{3}{5}}.$$

方法二　利用指数函数的性质对两个数值进行大小比较.

(1) 由指数函数的性质知 $1.8^{0.6}>1.8^{0}=1$，而 $0.8^{1.6}<0.8^{0}=1$，所以

$$1.8^{0.6}>0.8^{1.6};$$

(2) 由指数函数的性质知$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}>1$，$0<2^{-\frac{3}{5}}<1$，所以

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}>2^{-\frac{3}{5}}.$$

例 5　已知 $-1<x<0$，比较 3^{-x}，0.5^{-x} 的大小，并说明理由.

解　因为　$-1<x<0$，　所以　$0<-x<1$.

而　$3>1$，　因此有　$3^{-x}>1$.

又　$0<0.5<1$，　因而有　$0<0.5^{-x}<1$.

故　$$3^{-x}>0.5^{-x}.$$

信息技术应用

研究参数 a 的取值对指数函数 $y=a^x$ 的图像的影响

利用几何画板可以作出指数函数 $y=a^x$ 的图像. 步骤如下：

打开几何画板，利用作好的滑块工具作出参数 a，作出函数 $y=a^x$ 的图像.（如图 3-8）

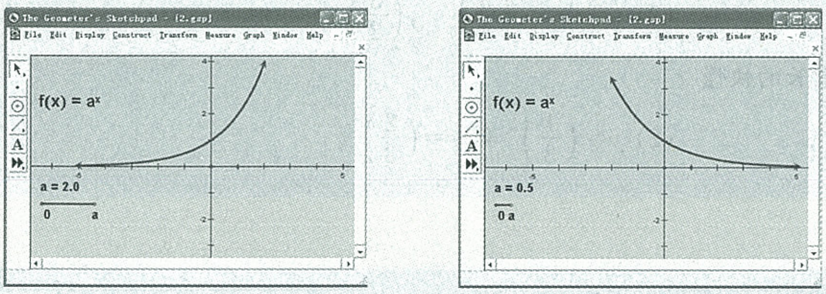


图 3-8

拖动滑块改变参数 a 的值，可以发现：

(1) 当底数 $a>1$ 时，指数函数是 **R** 上的增函数，当 x 逐渐增大时，函数值增大得越来越快；

(2) 当底数 $0<a<1$ 时，指数函数是 **R** 上的减函数，当 x 逐渐减小时，函数值增大得越来越快.

你还能发现其他的规律吗？

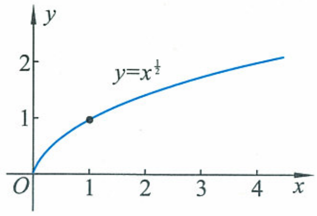


图 3-9

我们已经把整数指数幂扩充到有理数指数幂，又扩充到实数指数幂，第二章学习过的幂函数 $y=x^{\alpha}$ 中的指数 α 也可以扩充到实数.

对于幂函数 $y=x^{\alpha}$，我们已讨论过 $\alpha=1,2,3,-1$ 时的情形，下面讨论有理数指数幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的性质.

列出 x，y 的对应值（如表 3-6）；用描点的方法，画出函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图像（如图 3-9）.

表 3-6

x	0	0.5	1	2	3	4	…
$y=x^{\frac{1}{2}}$	0	0.71	1	1.41	1.73	2	…

它的性质：

(1) 函数定义在区间 $[0,+\infty)$ 上，值域是 $[0,+\infty)$；

(2) 图像过点 $(0,0)$，$(1,1)$；

(3) 函数是增函数.

思考交流

结合 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 及第二章有关幂函数的学习，谈谈你对学过的幂函数图像与性质的认识.

练 习 2

1. 比较下列各组数的大小：

(1) $2^{\frac{3}{2}},5^{\frac{3}{2}},\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$；　　(2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}},\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{3}},\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

2. 比较下列各题中两个函数增长的快慢：

(1) $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$ 和 $y=\left(\frac{5}{4}\right)^{x}$；　　(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 和 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$.

习 题 3—3

A 组

1. 按复利计算利息的一种储蓄，设本金为 a 元，每期利率为 r，本利和为 y，存期为 x，写出本利和 y 随存期 x 变化的函数式. 如果存入本金1 000元，每期利率 2.25%，计算 5 期后的本利和是多少？（不计利息税）

2. 求下列函数的定义域、值域：

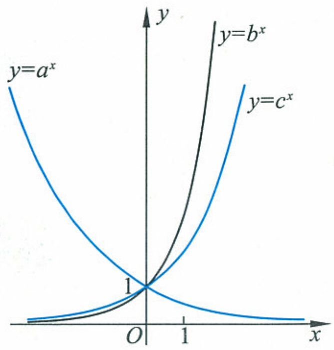
(1) $y=2^{3-x}$；　(2) $y=5^{6x+1}$；　(3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$；

(4) $y=0.7^{\frac{1}{x}}$；　(5) $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$；　(6) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4x}}$.

3. 如图是 3 个指数函数 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$ 的图像.

(1) 试比较 a,b,c 的大小；

(2) 指数函数的底数越大，它的图像与 $x=1$ 的交点是越靠上还是越靠下？



(第 3 题)

4. 比较下列各题中两个数的大小：

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.1}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{0.1}$；　(2) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$，$\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$；

(3) $5^{3.1}$，$3^{3.1}$；　(4) $0.3^{-\frac{1}{5}}$，$0.3^{-\frac{1}{3}}$.

5. 已知下列不等式成立，比较 m,n 的大小：

(1) $2^m<2^n$；　(2) $0.2^m>0.2^n$；　(3) $a^m>a^n(a>1)$；　(4) $a^m>a^n(0<a<1)$.

6. 已知下列不等式成立，求 a 的取值范围$(a>0,a\neq1)$：

(1) $a^3<a^2$；　(2) $a^m>a^n(m>n)$；　(3) $a^{0.8}<a^{0.5}$.

7. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图像，讨论它们之间的联系：

$y=0.2^x$；　$y=0.5^x$；　$y=1.5^x$；　$y=4^x$.

B　组

1. 已知 $x>y>1$，$1>a>0$，判断下面结论的正误：

(1) $x^{-a}<y^{-a}$；　(2) $a^{-x}<a^{-y}$；

(3) $x^a<y^a$；　(4) $a^{\frac{1}{x}}<a^{\frac{1}{y}}$.

2. 已知 $0<x<y<1$，比较 x^x，x^y，y^x 的大小.

3. 设 $y_1=a^{3x+1}$，$y_2=a^{-2x}$，其中 $a>0$，$a\neq1$. 当 x 为何值时有：

(1) $y_1=y_2$；　(2) $y_1>y_2$.

4. 设 $f(x)=3^x$，求证：

(1) $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$；　(2) $f(x)\div f(y)=f(x-y)$.

5. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图像，讨论它们之间的联系：

(1) $y=3^x$，　$y=3^{x+3}$，　$y=3^{x-1}$；　(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$.

6. 求下列函数中自变量 x 的取值范围：

(1) $y=2^{\sqrt{x}}$；　(2) $y=3^{\sqrt{-x}}$；

(3) $y=\sqrt{3^x-9}$；　(4) $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$.

§4 对 数

4.1 对数及其运算

一、对数

问题提出

2000 年我国国民经济生产总值为 a 亿元，如果按平均每年增长 8.2 %估算，那么经过多少年国民经济生产总值是 2000 年的 2 倍.

假设经过 x 年，国民经济生产总值是 2000 年的 2 倍，依题意，有

$$a(1+8.2\%)^x=2a,$$

即

$$1.082^x=2.$$

指数 x 取何值时满足这个等式呢?

我们经常遇到这类已知底数和幂的值，求指数的问题. 这就是本节要学习的对数问题.

一般地，如果 $a(a>0,a\neq1)$ 的 b 次幂等于 N，即 $a^b=N$，那么数 b 叫作以 a 为底 N 的**对数**，记作

$$\log_a N=b.$$

其中 a 叫作对数的**底数**，N 叫作**真数**. $\log_a N$ 读作以 a 为底 N 的对数.

因为对任何实数 $a(a>0,a\neq1)$，指数函数 $y=a^x$，$x\in\mathbf{R}$ 的值域是 $(0,+\infty)$，所以对任何正实数 N，$\log_a N$ 是存在的，并且由于指数函数是单调函数，所以 $\log_a N$ 是唯一的.

若设 $1.082^x=2$，则以 1.082 为底 2 的对数是 x，记作

$$\log_{1.082}2=x.$$

例如，因为 $4^3=64$，所以以 4 为底 64 的对数是 3，记作

$$\log_4 64=3.$$

因为 $8^{\frac{2}{3}}=4$，所以以 8 为底 4 的对数是 $\frac{2}{3}$，记作

$$\log_8 4=\frac{2}{3}.$$

因为 $10^{-2}=0.01$，所以以 10 为底 0.01 的对数是 -2，记作

$$\log_{10}0.01=-2.$$

思考交流

1. 式子 $a^b=N$ 和 $\log_a N=b(a>0,a\neq1,N>0)$ 有什么关系?
2. 对数 $\log_a 1,\log_a a$ $(a>0,a\neq1)$ 有什么特点?
3. $a^{\log_a N}=N$,为什么?
4. 零与负数有没有对数?

通常将以 10 为底的对数叫作**常用对数**,N 的常用对数 $\log_{10}N$ 简记作 $\lg N$. 例如,$\log_{10}5$ 简记作 $\lg 5$,$\log_{10}8.5$ 简记作 $\lg 8.5$.

e 是一个重要的常数,是无理数,它的近似值为 2.718 28. 科学技术中常以 e 作为对数的底数,以 e 为底的对数称为**自然对数**. N 的自然对数 $\log_e N$ 简记作 $\ln N$. 例如,$\log_e 5$ 简记作 $\ln 5$,$\log_e 8.5$ 简记作 $\ln 8.5$.

例 1 将下列指数式写成对数式:

(1) $5^4=625$; (2) $3^{-3}=\dfrac{1}{27}$;

(3) $8^{\frac{4}{3}}=16$; (4) $5^a=15$.

解 (1) $\log_5 625=4$; (2) $\log_3\dfrac{1}{27}=-3$;

(3) $\log_8 16=\dfrac{4}{3}$; (4) $\log_5 15=a$.

例 2 将下列对数式写成指数式:

(1) $\log_{\frac{1}{2}}16=-4$; (2) $\log_3 243=5$;

(3) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{27}=3$; (4) $\lg 0.1=-1$.

解 (1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}=16$; (2) $3^5=243$;

(3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$; (4) $10^{-1}=0.1$.

例 3 求下列各式的值:

(1) $\log_5 25$; (2) $\log_{\frac{1}{2}}32$; (3) $3^{\log_3 10}$;

(4) $\ln 1$; (5) $\log_{2.5}2.5$.

解 (1) 因为 $5^2=25$,所以 $\log_5 25=2$;

(2) 因为 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}=32$, 所以 $\log_{\frac{1}{2}}32=-5$;

(3) $3^{\log_3 10}=10$; (4) $\ln 1=0$; (5) $\log_{2.5}2.5=1$.

练习 1

1. 将下列指数式写成对数式：

(1) $3^6=729$；　(2) $2^{10}=1\ 024$；

(3) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{9}{4}$；　(4) $64^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$.

2. 将下列对数式写成指数式：

(1) $\log_2 512=9$；　(2) $\log_{25}125=\frac{3}{2}$；

(3) $\lg 0.000\ 1=-4$；　(4) $\log_{\frac{1}{3}}4.2=m$.

3. 求下列对数的值：

(1) $\lg 1\ 000$；　(2) $\log_9\frac{1}{81}$；　(3) $\log_5(25\times5^3)$；　(4) $\log_{0.4}1$；

(5) $\log_{2.5}6.25$；　(6) $\log_7 343$；　(7) $\lg 0.01$；　(8) $\log_{17}17$.

二、对数的运算性质

动手实践

1. 填出表 3-7 中各组数的值，并从数据中分析等量关系，猜想对数的运算性质.

表 3-7

	第一组			第二组			第三组	
式	$\log_2 8$	$\log_2 32$	$\log_2(8\times32)$	$\lg 1\ 000$	$\lg 100\ 000$	$\lg\frac{10^3}{10^5}$	$\log_3 3^5$	$5\log_3 3$
值								
猜想性质								

2. 利用科学计算器，完成表 3-8(精确到 0.000 001)，并从数据中分析等量关系，猜想对数的运算性质.

表 3-8

M	50	3.141 596	2 008
N	20	2.718 281	1 949
$\lg(MN)$			
$\lg M+\lg N$			
$\lg M\cdot\lg N$			
$\lg\dfrac{M}{N}$			
$\lg M-\lg N$			
$\dfrac{\lg M}{\lg N}$			

抽象概括

对数的运算性质：

> 如果 $a>0, a\neq1, M>0, N>0$，则
> (1) $\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$；
> (2) $\log_aM^n=n\log_aM(n\in\mathbf{R})$；
> (3) $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$.

对数的运算性质都可以由指数幂的运算性质推出. 下面根据指数幂的运算性质来证明对数的运算性质(1).

证明　设 $\log_aM=p, \log_aN=q$，则由对数定义，得

$$a^p=M,\quad a^q=N.$$

因为 $MN=a^pa^q=a^{p+q}$，所以

$$p+q=\log_a(MN),$$

即

$$\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN.$$

请你仿照性质(1)的证明，证明性质(2)和性质(3).

例 4　计算：

(1) $\log_3(9^2\times3^5)$；　　(2) $\lg 100^{\frac{1}{5}}$.

解　(1) $\log_3(9^2\times3^5)=\log_3 9^2+\log_3 3^5$

$$=\log_3 3^4+5\log_3 3$$

$$=4+5=9;$$

(2) $\lg 100^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\lg 10^2=\frac{1}{5}\times 2=\frac{2}{5}$.

例 5 用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示下列各式：

(1) $\log_a(x^2yz)$；　(2) $\log_a\frac{x^2}{yz}$；　(3) $\log_a\frac{\sqrt{x}}{y^2z}$.

解 (1) $\log_a(x^2yz)=\log_a x^2+\log_a y+\log_a z$

$$=2\log_a x+\log_a y+\log_a z;$$

(2) $\log_a\frac{x^2}{yz}=\log_a x^2-\log_a(yz)$

$$=2\log_a x-(\log_a y+\log_a z)$$
$$=2\log_a x-\log_a y-\log_a z;$$

(3) $\log_a\frac{\sqrt{x}}{y^2z}=\log_a\sqrt{x}-\log_a(y^2z)$

$$=\frac{1}{2}\log_a x-2\log_a y-\log_a z.$$

例 6 科学家以里氏震级来度量地震的强度. 若设 I 为地震时所散发出来的相对能量程度，则里氏震级 r 可定义为 $r=0.6\lg I$，试比较6.9级和 7.8 级地震的相对能量程度.

解 设 6.9 级和 7.8 级地震的相对能量程度分别为 I_1 和 I_2，由题意得

$$\begin{cases}6.9=0.6\lg I_1,\\7.8=0.6\lg I_2.\end{cases}$$

因此 $$0.6(\lg I_2-\lg I_1)=0.9,$$

即 $$\lg\frac{I_2}{I_1}=1.5,$$

所以 $$\frac{I_2}{I_1}=10^{1.5}\approx 32.$$

因此，7.8 级地震的相对能量程度约为 6.9 级地震的相对能量程度的 32 倍.

思考交流

1. 判断下列各式是否成立，如果不成立，举一个反例.

(1) $\lg(MN)=\lg M\cdot\lg N$；

(2) $\lg\frac{M}{N}=\frac{\lg M}{\lg N}$；

(3) $\lg(M+N)=\lg M\cdot\lg N$；

(4) $\lg M-\lg N=\dfrac{\lg M}{\lg N}$.

2. 对数的运算性质有什么特点？

练习 2

1. 求下列等式中的 x 的值：

(1) $\log_x 81=2$；　(2) $\lg 0.001=x$；　(3) $10^{x+\lg 2}=2\,000$.

2. 求下列各式的值：

(1) $\ln e^{-2}$；　(2) $\log_6\sqrt{216}$；

(3) $\log_3 36-\log_3 4$；　(4) $\log_7 8+\log_7\dfrac{1}{8}$；

(5) $\lg 5+\lg 20$；　(6) $\log_{0.5}1-\log_{0.5}4$.

3. 用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式：

(1) $\lg(x^2yz^3)$；　(2) $\lg(xy^{-\frac{1}{3}}z^{\frac{3}{2}})$；　(3) $\lg\dfrac{x^2}{y^3\sqrt{z}}$.

4.2 换底公式

问题提出

如何使用科学计算器计算 $\log_2 15$？

分析理解

我们知道科学计算器通常只能对常用对数或自然对数进行计算.要计算 $\log_2 15$，必须将它换成常用对数或自然对数，怎么办？

设 $\log_2 15=x$，写成指数式，得

$$2^x=15. \qquad ①$$

对①式两边取常用对数，得

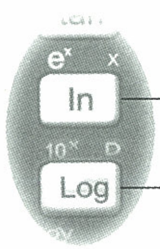
$$x\lg 2=\lg 15,$$

所以

$$x=\frac{\lg 15}{\lg 2}.$$

这样我们可以用科学计算器中"log"键算出

$$\log_2 15=\frac{\lg 15}{\lg 2}\approx 3.906\,890\,6.$$



如果对①式两边取自然对数，得

$$x=\frac{\ln 15}{\ln 2}.$$

我们用科学计算器中“ln”键算出

$$\log_2 15=\frac{\ln 15}{\ln 2}\approx 3.906\ 890\ 6.$$

可以看出，在计算中必须把对数的底进行变换.

对数换底公式为

$$\boxed{\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}\quad (a,b>0,a,b\neq 1,N>0).}$$

证明 设 $x=\log_b N$，根据对数定义，有

$$N=b^x.$$

根据相等的两个正数的同底对数相等，两边取以 a 为底的对数，得

$$\log_a N=\log_a b^x,$$

而 $\log_a b^x=x\log_a b$，所以

$$\log_a N=x\log_a b.$$

由于 $b\neq 1$，则 $\log_a b\neq 0$，解出 x，得

$$x=\frac{\log_a N}{\log_a b},$$

因为 $x=\log_b N$，所以

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}\text{❶}.$$

❶对数换底公式的证明方法很多，请你用其他方法证明，并总结证明的基本思路.

很容易由换底公式得到

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}.$$

例 7 计算：

(1) $\log_9 27$； (2) $\log_8 9\cdot\log_{27}32$.

解 (1) $\log_9 27=\frac{\log_3 27}{\log_3 9}=\frac{3}{2}$；

(2) $\log_8 9\cdot\log_{27}32=\frac{\lg 9}{\lg 8}\cdot\frac{\lg 32}{\lg 27}=\frac{2\lg 3}{3\lg 2}\cdot\frac{5\lg 2}{3\lg 3}=\frac{10}{9}$.

例 8 用科学计算器计算下列对数(精确到 0.001)：

$\log_2 48$； $\log_3 10$； $\log_8 \pi$； $\log_5 50$； $\log_{1.082} 2$.

解 $\log_2 48\approx 5.585$；

$\log_3 10 \approx 2.096$；

$\log_8 \pi \approx 0.550$；

$\log_5 50 \approx 2.431$；

$\log_{1.082} 2 \approx 8.795$.

例 9　一种放射性物质不断变化为其他物质，每经过一年剩留的质量约是原来的 84%，估计约经过多少年，该物质的剩留量是原来的一半(结果保留 1 个有效数字).

解　设最初的质量是 1，经过 x 年，剩留量是 y. 则

经过 1 年，剩留量是 $y=0.84$；

经过 2 年，剩留量是 $y=0.84^2$；

……

经过 x 年，剩留量是 $y=0.84^x$.

方法一　根据函数关系式列表 3-9.

表 3-9

x	0	1	2	3	4	5	…
$y=0.84^x$	1	0.84	0.71	0.59	0.50	0.42	…

观察表中数据，$y \approx 0.5$ 时对应有 $x=4$，

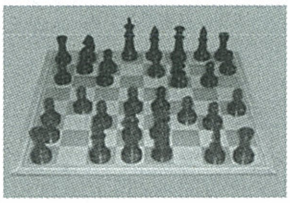
即约经过 4 年，该物质的剩留量是原来的一半.

方法二　依题意得 $0.84^x=0.5$，用科学计算器计算得

$$x=\log_{0.84} 0.5=\frac{\ln 0.5}{\ln 0.84} \approx 3.98,$$

即约经过 4 年，该物质的剩留量是原来的一半.

小资料



很多关于大数的故事里(例如“棋盘上的学问”，“64 片金片在三根金针上移动的寓言”)都涉及 2^{64} 这个数.

(1) 你能用 64 个 2 相乘算出它的大小吗?

(2) 你会用计算器得出结果吗?

(3) 如果恰好你手头没有计算器，又需要你马上近似地估计出它的大小，你有办法吗?

如果你愿意不厌其烦地计算，可以得出

$$2^{64}=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616.$$

使用科学计算器，可以近似算出

$$2^{64}\approx 1.844\ 674\ 407\times 10^{19}.$$

如果把 2^{64} 换成以 10 为底的幂，则便于估计它的大小，怎么转换呢？

根据指数函数的性质，我们知道，对于数 2 一定存在唯一的常数 α，使得 $2=10^{\alpha}$（如图 3-10）. 由对数概念，能够推出

$$\alpha=\lg 2.$$

因而 $2^{64}=10^{64\alpha}=10^{64\lg 2}=10^{19.266}$.

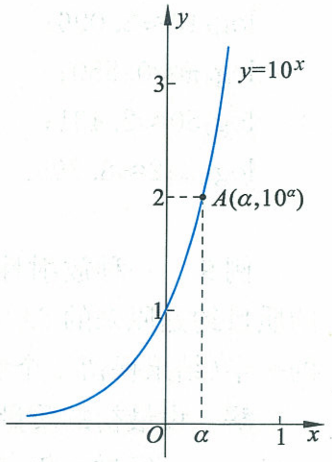


图 3-10

这里我们进行了指数换底，可以说，2^{64} 是 10^{19} 和 10^{20} 之间的数. 2^{64} 颗麦粒大概是全世界 2 000 年内生产的全部小麦；2^{64} 秒大概是5 800亿年，而太阳系的生命大约是 30 亿年.

一般地，根据指数函数的性质可以知道，对于任意的正数 a 和 b，总能把 a 的指数幂化为 b 的指数幂.

因为一定存在唯一的常数 α，使得 $a=b^{\alpha}$. 所以根据实数指数幂的运算性质，得

$$a^{n}=(b^{\alpha})^{n}=b^{n\alpha}.$$

这就是指数换底公式，其中 $\alpha=\log_b a$.

例如，可以用这个公式把以 3 为底的幂转换为以 10 或以 e 为底的幂

$$3^{5}=10^{5\lg 3},\ 3^{5}=\mathrm{e}^{5\ln 3}.$$

问题与思考

你能证明指数换底公式吗？

你能比较 2^{100} 与 3^{65} 的大小吗？

练 习

1. 利用科学计算器计算：

(1) $\log_2 10$；　(2) $\log_2 100$；　(3) $\log_2 50$；

(4) $\log_3 20$；　(5) $\log_3 1\ 000$；　(6) $\log_5 0.99$.

2. 计算：

(1) $\log_9 8\cdot\log_{32}27$；

(2) $\log_2\frac{1}{125}\cdot\log_3\frac{1}{32}\cdot\log_5\frac{1}{3}$.

3. 利用换底公式证明：

(1) $\log_{a^m}b=\frac{1}{m\log_b a}$；　(2) $\log_{a^m}b^m=\log_a b$.

4. 常用对数 $\lg N$ 和自然对数 $\ln N$ 之间可以互相转换，即存在实数 A,B 使得

$$\lg N=A\cdot\ln N,\ \ln N=B\cdot\lg N.$$

你能推导出 A,B 的值吗？

习 题 3—4

A 组

1. 将下列对数式写成指数式：

(1) $\log_3 27=3$；　(2) $\log_{25} 5=\frac{1}{2}$；

(3) $\lg 0.01=-2$；　(4) $\log_{25} 625=2$.

2. 将下列指数式写成对数式：

(1) $2^3=8$；　(2) $2^{-2}=\frac{1}{4}$；

(3) $9^{-2}=\frac{1}{81}$；　(4) $10^2=100$.

3. 求下列对数的值：

(1) $\log_5 25$；　(2) $\log_3 \frac{1}{81}$；

(3) $\log_{\frac{1}{16}} 2$；　(4) $\log_3(27\times 9^2)$；

(5) $\log_7 \sqrt[3]{49}$；　(6) $\log_2(32\times 4^2)$；

(7) $\log_2(\log_9 3)$；　(8) $2^{\log_2 3}$；

(9) $9^{\log_3 2}$.

4. 求下列各式中 x 的值：

(1) $\log_5 x=0$；　(2) $\log_2 \frac{1}{x}=-4$；

(3) $\lg 100\ 000=x$；　(4) $\log_4 \frac{1}{4}=x$.

5. 用 $\lg x, \lg y, \lg z, \lg(x+y), \lg(x-y)$ 表示下列各式(其中 $x>y>0, z>0$)：

(1) $\lg(xyz)$；　(2) $\lg(xy^{-2}z^{-1})$；

(3) $\lg(x^2y^2z^{-3})$；　(4) $\lg \frac{\sqrt{x}}{y^3 z}$；

(5) $\lg \frac{xy}{(x^2-y^2)}$；　(6) $\lg\left(\frac{x+y}{x-y}\cdot y\right)$；

(7) $\lg\left[\frac{y}{x(x-y)}\right]^3$.

6. 求下列各式的值：

(1) $\ln e-\ln e^2$；　(2) $\lg 0.001+3\lg 10$；

(3) $\log_3 9+\log_3 \frac{1}{9}$；　(4) $\lg 8+\lg 125$；

(5) $2\log_5 25+3\log_2 64$；　(6) $2\log_3 6-\log_3 4$；

(7) $\log_2(\log_2 16)$；　(8) $\frac{\log_8 27}{\log_4 9}$.

7. 已知 $\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$，求下列各对数的值：

(1) $\lg 12$；　　(2) $\lg 32$；

(3) $\lg \dfrac{3}{2}$；　　(4) $\lg \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

8. 已知 x 的对数，求 x：

(1) $\lg x=\lg a+\lg b$；　　(2) $\lg x=\lg m-\lg n$；

(3) $\lg x=2\lg a-3\lg b$；　　(4) $\log_a x=\dfrac{1}{2}\log_a m+2\log_a n$；

(5) $\log_a x=\dfrac{2}{3}\log_a m-2\log_a n$.

B　组

1. 求证($a>0, a\neq 1$)：

(1) $\log_a(n^2+n+1)+\log_a(n-1)=\log_a(n^3-1)\quad(n>1)$；

(2) $\log_a(b^s+b^{-s}+2)+\log_a(b^s+b^{-s}-2)=2\log_a(b^s-b^{-s})\ (b>1, s>0)$.

2. 求下列各式中的 x：

(1) $\lg(10x)+1=3\lg x$；　　(2) $3\ln x-3=\ln 2x$；

(3) $\lg \dfrac{x}{10}=-2-2\lg x$；　　(4) $\log_{\sqrt{x}}(2x)=\dfrac{1}{2}$.

3. 计算：

(1) $2^{3+\log_2 5}$；　　(2) $\lg 5\cdot\lg 20+(\lg 2)^2$.

4. 利用换底公式求值或证明：

(1) 求值：$\log_2 25\cdot\log_3 4\cdot\log_5 9$；

(2) 求值：$(\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)$；

(3) 证明：$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$. ($a>0, b>0, c>0, a\neq 1, b\neq 1, c\neq 1$)

§5　对数函数

5.1　对数函数的概念

问题提出

在§1 正整数指数函数中，我们讨论了细胞分裂的问题，得到细胞分裂的个数 y 和分裂次数 x 的函数关系，这个函数可以用正整数指数函数 $y=2^x$ 表示. 在§3 指数函数中，我们又把它推广到实数指数函数. 现在我们研究相反的问题，要求一个这样的细胞经过多少次分裂，大约可以得到 1 万个细胞，或 10 万个细胞，这样就可以得到分裂次数 x 和细胞个数 y 之间的函数关系，这个函数写成对数的形式就是

$$x=\log_2 y.$$

那么，对于一般的指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 中的两个变量，能不能把 y 当作自变量，使得 x 是 y 的函数?

分析理解

我们知道，指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$，对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值和它对应；并且当 $x_1\neq x_2$ 时，$y_1\neq y_2$（如图 3-11）. 就是说，指数函数反映了数集 $\mathbf{R}$ 与数集 $\{y|y>0\}$ 之间的一一对应的关系. 可见，对于任意的 $y\in(0,+\infty)$，在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一的数 x 满足 $y=a^x$. 如果把 y 当作自变量，那么 x 就是 y 的函数. 由§4 可以知道，这个函数就是

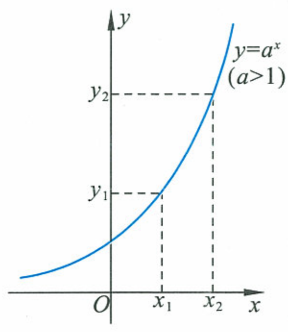


图 3-11

$$x=\log_a y\quad(a>0,a\neq1).$$

函数 $x=\log_a y$ 叫作对数函数，这里 $a>0,a\neq1$，自变量 $y>0$.

习惯上，自变量用 x 表示，所以这个函数就写成

$$y=\log_a x\quad(a>0,a\neq1).$$

我们把函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 叫作**对数函数**，其中 x 是自变量，函数的定义域是 $(0,+\infty)$. a 叫作对数函数的**底数**.

特别地，我们称以 10 为底的对数函数 $y=\lg x$ 为**常用对数函数**；

称以无理数 e 为底的对数函数 $y=\ln x$ 为**自然对数函数**.

例 1 计算:

(1) 计算对数函数 $y=\log_2 x$ 对应于 x 取 1,2,4 时的函数值;

(2) 计算常用对数函数 $y=\lg x$ 对应于 x 取 1, 10, 100, 0.1 时的函数值.

解 (1) 当 $x=1$ 时,$y=\log_2 x=\log_2 1=0$,

当 $x=2$ 时,$y=\log_2 x=\log_2 2=1$,

当 $x=4$ 时,$y=\log_2 x=\log_2 4=2$;

(2) 当 $x=1$ 时,$y=\lg x=\lg 1=0$,

当 $x=10$ 时,$y=\lg x=\lg 10=1$,

当 $x=100$ 时,$y=\lg x=\lg 100=2$,

当 $x=0.1$ 时,$y=\lg x=\lg 0.1=-1$.

分析理解

指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x\,(a>0,a\neq1)$有什么关系?

指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $x=\log_a y$ 刻画的是同一对变量 x,y 之间的关系,所不同的是:在指数函数 $y=a^x$ 中,x 是自变量,y 是 x 的函数,其定义域是 $\mathbf{R}$,值域是$(0,+\infty)$;在对数函数 $x=\log_a y$ 中,y 是自变量,x 是 y 的函数,其定义域是$(0,+\infty)$,值域是 $\mathbf{R}$. 像这样的两个函数叫作互为**反函数**,就是说,对数函数 $x=\log_a y$ 是指数函数 $y=a^x$的反函数,指数函数$y=a^x$也是对数函数 $x=\log_a y$ 的反函数.

通常情况下,x 表示自变量,y 表示函数,所以对数函数应该表示为 $y=\log_a x\,(a>0,a\neq1)$,指数函数表示为 $y=a^x\,(a>0,a\neq1)$. 因此,指数函数$y=a^x\,(a>0,a\neq1)$是对数函数 $y=\log_a x\,(a>0,a\neq1)$的反函数;同时,对数函数 $y=\log_a x\,(a>0,a\neq1)$也是指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$的反函数.

例 2 写出下列对数函数的反函数:

(1) $y=\lg x$;　　　　(2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$.

解 (1) 对数函数 $y=\lg x$,它的底数是 10,它的反函数是指数函数

$$y=10^x;$$

(2) 对数函数 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$,它的底数是$\frac{1}{3}$,它的反函数是指数函数

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

例 3　写出下列指数函数的反函数：

(1) $y=5^x$；　　　　(2) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

解　(1) 指数函数 $y=5^x$，它的底数是 5，它的反函数是对数函数

$$y=\log_5 x;$$

(2) 指数函数 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$，它的底数是 $\frac{2}{3}$，它的反函数是对数函数

$$y=\log_{\frac{2}{3}} x.$$

练 习

1. 计算：

   (1) 计算对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 对应于 x 取 0.25，0.5，1，2，4，8 时的函数值；

   (2) 计算常用对数函数 $y=\lg x$ 对应于 x 取 0.1，0.000 1，1，100 时的函数值.

2. 说出下列各组函数之间的关系：

   (1) $y=10^x$ 和 $y=\lg x$；　　(2) $y=2^x$ 和 $y=\log_2 x$；

   (3) $y=e^x$ 和 $y=\ln x$.

3. 写出下列对数函数的反函数：

   (1) $y=\log_{2.5} x$；　　(2) $y=\log_{\pi} x$；　　(3) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$.

4. 写出下列指数函数的反函数：

   (1) $y=4^x$；　　(2) $y=1.4^x$；　　(3) $y=\left(\frac{\pi}{2}\right)^x$.

5.2　对数函数 $y=\log_2 x$ 的图像和性质

下面研究对数函数 $y=\log_2 x$ 的图像和性质.

可以用两种不同方法画出函数 $y=\log_2 x$ 的图像.

方法一　描点法.

先列出 x，y 的对应值表(见表 3-10).

表 3-10

x	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y=\log_2 x$	…	-2	-1	0	1	2	3	…

再用描点法画出图像(如图 3-12).

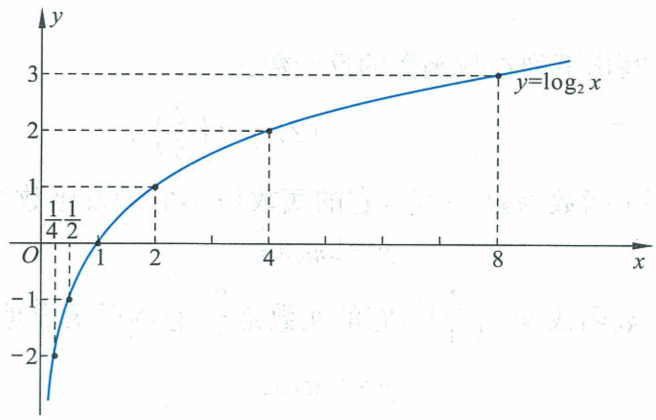


图 3-12

方法二　画出函数 $x=\log_2 y$ 的图像，再变换为 $y=\log_2 x$ 的图像.

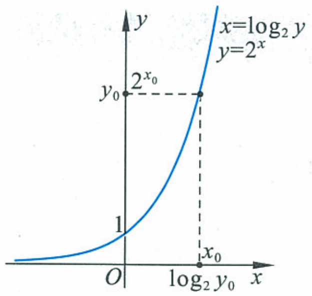


图 3-13

由于指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $x=\log_a y$ 所表示的 x 和 y 这两个变量间的关系是一样的，因而函数 $x=\log_2 y$ 和 $y=2^x$ 的图像是一样的(如图 3-13).

通常，用 x 表示自变量，把 x 轴、y 轴的字母表示互换，就得到 $y=\log_2 x$的图像(如图 3-14).

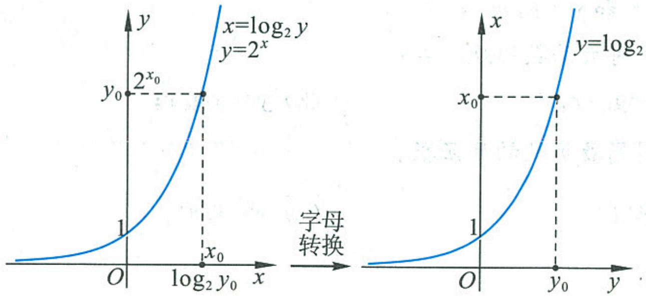


图 3-14

习惯上，x 轴在水平位置，y 轴在竖直位置，把图翻转，使 x 轴在水平位置，得到通常的 $y=\log_2 x$ 的图像(如图 3-15).

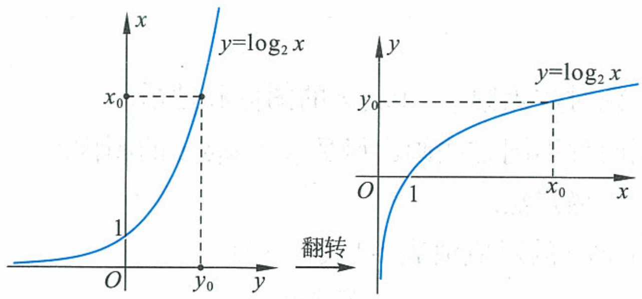
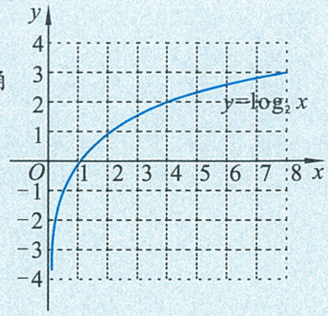


图 3-15

观察对数函数 $y=\log_2 x$ 的图像，过点(1，0)，即 $x=1$ 时，$y=0$；函数图像都在 y 轴右边，表示了零和负数没有对数；当 $x>1$ 时，$y=\log_2 x$ 的图像位于x 轴上方，即 $x>1$ 时，$y>0$，当 $0<x<1$ 时，$y=$

$\log_2 x$ 的图像位于 x 轴下方，即 $0<x<1$ 时，$y<0$；函数 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

练　习



（第 2 题）

1. 画出对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像并说出它的性质.
2. 右图是函数 $y=\log_2 x$ 的图像，试由 x 的下列各值，确定函数 y 的值（精确到 0.1）：

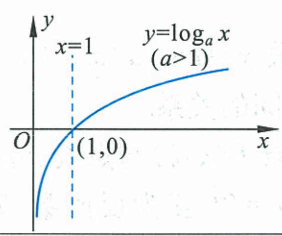
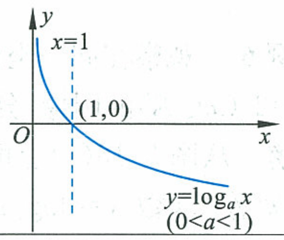
   $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，1，$\frac{3}{2}$，2，4，5，6，7，8.
3. 利用上题的图像，找出适合于方程 $\log_2 x=\frac{5}{2}$ 的近似解（精确到0.1）.
4. 请画出几个底数不同的对数函数的图像，分析这些函数的性质.

5.3　对数函数的图像和性质

抽象概括

对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$，在其底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 这两种情况下的图像和性质可以总结如表 3-11.

表 3-11

	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	（1）定义域：$(0,+\infty)$	
	（2）值域：**R**	
	（3）过点(1,0)，即 $x=1$ 时，$y=0$	
	（4）当 $x>1$ 时，$y>0$， $0<x<1$ 时，$y<0$	（4）当 $x>1$ 时，$y<0$， $0<x<1$ 时，$y>0$
	（5）是 $(0,+\infty)$ 上的增函数	（5）是 $(0,+\infty)$ 上的减函数

例 4　求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_a x^2$；　　　(2) $y=\log_a(4-x)$.

解　(1) 因为 $x^2>0$，即 $x\neq 0$，所以函数 $y=\log_a x^2$ 的定义域为

$$\{x|x\neq 0\};$$

(2) 因为 $4-x>0$，即 $x<4$，所以函数 $y=\log_a(4-x)$ 的定义域为

$$\{x|x<4\}.$$

例 5　比较下列各题中两个数的大小：

(1) $\log_2 5.3$，$\log_2 4.7$；　　　(2) $\log_{0.2}7$，$\log_{0.2}9$；

(3) $\log_3\pi$，$\log_\pi 3$；　　　(4) $\log_a 3.1$，$\log_a 5.2\ (a>0, a\neq 1)$.

解　(1)因为 $2>1$，函数 $y=\log_2 x$ 是增函数，$5.3>4.7$，所以

$$\log_2 5.3>\log_2 4.7;$$

(2) 因为 $0<0.2<1$，函数 $y=\log_{0.2}x$ 是减函数，$7<9$，所以

$$\log_{0.2}7>\log_{0.2}9;$$

(3) 因为函数 $y=\log_3 x$ 是增函数，$\pi>3$，所以

$$\log_3\pi>\log_3 3=1,$$

同理 $1=\log_\pi\pi>\log_\pi 3$，所以

$$\log_3\pi>\log_\pi 3;$$

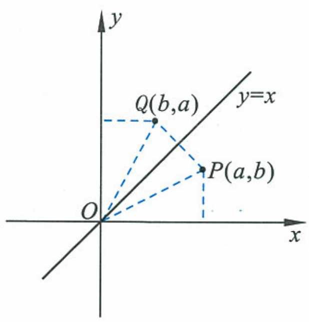
(4) 对数函数的单调性取决于其底数是大于 1 还是小于 1. 而已知条件中并未明确指出底数 a 与 1 哪个大，因此需要对底数进行讨论.

当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，此时

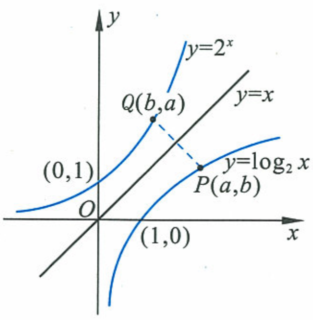
$$\log_a 3.1<\log_a 5.2;$$

当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，此时

$$\log_a 3.1>\log_a 5.2.$$



(1)



(2)

图 3-16

例 6　观察在同一坐标系内函数 $y=\log_2 x\ (x\in(0,+\infty))$ 与函数 $y=2^x\ (x\in\mathbf{R})$ 的图像，分析它们之间的关系.

解　从图 3-16(1)上可以看出，点 $P(a,b)$ 与点 $Q(b,a)$ 关于直线 $y=x$ 对称. 函数 $y=\log_2 x$ 与函数 $y=2^x$ 互为反函数，对应于函数 $y=\log_2 x$ 图像上的任意一点 $P(a,b)$，P 点关于直线 $y=x$ 的对称点 $Q(b,a)$ 总在函数 $y=2^x$ 图像上，所以，函数 $y=\log_2 x$ 的图像与函数 $y=2^x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称(如图 3-16(2)).

思考交流

1. 根据表 3-12 中的数据(精确到 0.01)，画出函数 $y=\log_2 x$，

$y=\log_3 x$ 和 $y=\log_5 x$ 的图像. 并观察图像，说明三个函数图像的相同与不同之处.

表 3-12

x	…	0.5	1	1.5	2	3	4	…	1 000	…
$y=\log_2 x$	…	−1	0	0.58	1	1.58	2	…	9.97	…
$y=\log_3 x$	…	−0.63	0	0.37	0.63	1	1.26	…	6.29	…
$y=\log_5 x$	…	−0.43	0	0.25	0.43	0.68	0.86	…	4.29	…

2. 对数函数 $y=\log_a x$，当底数 $a>1$ 时，a 的变化对函数图像有何影响？

3. 仿照前面的方法，请你猜想，对数函数 $y=\log_a x$ 当 $0<a<1$ 时，a 的变化对函数图像有何影响？

信息技术建议

可以利用信息技术研究参数 a 的取值对对数函数 $y=\log_a x$ 图像的影响，具体操作见本节的“信息技术应用”栏目.

例 7　人们早就发现了放射性物质的衰减现象. 在考古工作中，常用 ^{14}C 的含量来确定有机物的年代. 已知放射性物质的衰减服从指数规律：

$$C(t)=C_0 e^{-rt},$$

其中 t 表示衰减的时间，C_0 表示放射性物质的原始质量，$C(t)$ 表示经衰减了 t 年后剩余的质量.

为计算衰减的年代，通常给出该物质质量衰减一半的时间，称其为该物质的半衰期，^{14}C 的半衰期大约是 5 730 年，由此可确定系数 r. 人们又知道，放射性物质的衰减速度是与其质量成正比的.

1950 年在巴比伦发现一根刻有 Hammurbi 王朝字样的木炭，当时测定，其 ^{14}C 分子的衰减速度为 4.09 个/(g · min)，而新砍伐烧成的木炭中 ^{14}C 的衰减速度为 6.68 个/(g · min). 请估算出 Hammurbi 王朝所在年代.

解　因为 ^{14}C 的半衰期大约是 5 730 年. 所以建立方程

$$\frac{1}{2}=e^{-5\,730r}.$$

解得 $r=0.000\,121$，由此可知 ^{14}C 的衰减规律服从指数型函数

$$C(t)=C_0 e^{-0.000\,121t}.$$

设发现 Hammurbi 王朝木炭时（公元 1950 年），该木炭已衰减了 t_0 年. 因为放射性物质的衰减速度是与其质量成正比的，所以

$$\frac{C(t_0)}{C_0}=\frac{4.09}{6.68}.$$

于是
$$e^{-0.000\,121t_0}=\frac{4.09}{6.68}.$$

两边取自然对数，得 $-0.000\,121t_0=\ln 4.09-\ln 6.68$，

解得
$$t_0\approx 4\,054\ (\text{年}).$$

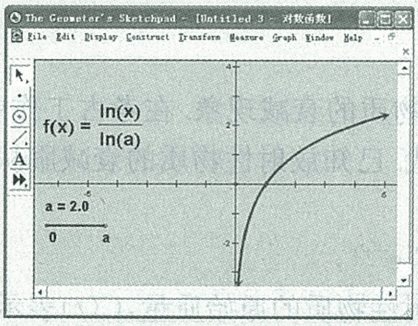
即 Hammurbi 王朝大约存在于公元前 2100 年.

信息技术应用

研究参数 a 的取值对对数函数 $y=\log_a x$ 图像的影响

利用几何画板可以简捷作出对数函数 $y=\log_a x$ 的图像，其一般步骤如下：

打开几何画板，利用作好的滑块工具作出参数 a，作出函数 $y=\log_a x$ 的图像(如图 3-17).



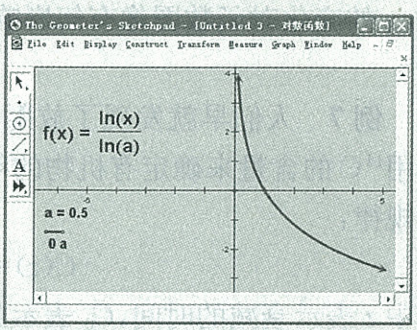


图 3-17

拖动滑块工具改变参数 a 的值，可以发现：

(1) 当底数 $a>1$ 时，对数函数是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，当 $x>1$ 时，底数 a 的值越小，其函数值增长得越快；

(2) 当底数 $0<a<1$ 时，对数函数是 $(0,+\infty)$ 上的减函数，当 $0<x<1$ 时，底数 a 的值越大，其函数值减小得越快.

你还能发现其他的规律吗？

练 习

1. 画出函数 $y=\log_3 x$ 及 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图像，并且说明这两个函数的相同性质和不同性质.
2. 求下列函数的定义域：

   (1) $y=\log_5(1-x)$；　(2) $y=\log_3 \dfrac{1}{2x-1}$；　(3) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$.
3. 比较下列各题中两个数的大小：

   (1) $\lg 6, \lg 8$；　(2) $\log_{0.3}5, \log_{0.3}7$；

   (3) $\log_a 2.5, \log_a 3.8$　$(a>0, a\neq 1)$.

习 题 3—5

A 组

1. 写出下列对数函数的反函数(用 x 表示自变量,用 y 表示函数):

(1) $y=\log_3 x$;　(2) $y=\log_{0.7} x$;　(3) $y=\log_{\frac{1}{5}} x$.

2. 计算:

(1) 对数函数 $y=\log_3 x$ 对应于 x 取 1,3,9 时的函数值;

(2) 常用对数函数 $y=\lg x$ 对应于 x 取 0.01,0.001,1 000时的函数值.

3. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\log_2(3-x)$;　(2) $y=\log_3 \dfrac{3}{3x+4}$.

4. 比较下列各题中两个数的大小:

(1) $\ln 6,\ln 8$;

(2) $\log_{0.3}1.6,\log_{0.3}1.5$;

(3) $\log_{1.2}6,\log_{1.2}8$;

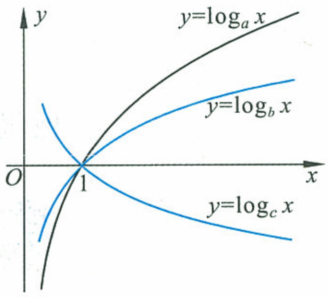
(4) $\log_a m,\log_a n$ $(a>0,a\neq 1,m>n>0)$.

5. 已知下列不等式,比较正数 m,n 的大小:

(1) $\ln m<\ln n$;　(2) $\log_{0.3}m>\log_{0.3}n$;

(3) $\log_a m>\log_a n$ $(a>0,a\neq 1)$.

6. 如图是 3 个对数函数 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ $(a,b,c>0$,且 a,b,c 均不为 1)的图像,试比较 a,b,c 的大小.



(第 6 题)

B 组

1. 判定下列各式哪些一定成立,哪些不一定成立,x,y 为非零实数,其中 $a>0,a\neq 1$,并说明理由:

(1) $\log_a x^2=2\log_a x$;　(2) $\log_a x^2=2\log_a|x|$;

(3) $\log_a|x\cdot y|=\log_a|x|\cdot\log_a|y|$;　(4) $\log_a x^3>\log_a x^2$.

2. 已知放射性物质镭经过 100 年剩留原来的 95.76%,求经过 50 年、500 年、10 000 年后镭的剩留量.

3. 如果 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$,求证:$f(a)+f(b)=f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

*4. 利用换底公式证明:$\log_{a^n}b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$(其中 $a>0,b>0,a\neq 1,n\neq 0$).

§6 指数函数、幂函数、对数函数增长的比较

问题提出

我们已经知道：

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 是增函数，并且当 a 越大时，其函数值的增长就越快.

当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 是增函数，并且当 a 越小时，其函数值的增长就越快.

当 $x>0$，$n>1$ 时，幂函数 $y=x^n$ 显然也是增函数，并且当 $x>1$ 时，n 越大其函数值的增长就越快.

那么，对于这三种增加的函数，它们的函数值的增长快慢有何差别呢？

我们通过对三个具体函数 $y=2^x$，$y=x^{100}(x>0)$，$y=\log_2 x$ 的函数值（取近似值）的比较，来体会它们增长的快慢.

动手实践

1. 完成表 3-13（借助科学计算器或设计程序通过计算机完成）.

表 3-13

自变量 x	函数值		
	$y=2^x$	$y=x^{100}(x>0)$	$y=\log_2 x$
…	…	…	…
1	2	1	0
1.007 004 4	2.009 733 8	2.009 725 8	0.010 070 0
10	1 024	10^{100}	
100	1.27×10^{30}	10^{200}	
300	2.04×10^{90}	5.15×10^{247}	
500	3.27×10^{150}	7.89×10^{269}	
700	5.26×10^{210}	3.23×10^{284}	

续表

自变量 x	函数值		
	$y=2^x$	$y=x^{100}(x>0)$	$y=\log_2 x$
900	8.45×10^{270}	2.66×10^{295}	
996	6.70×10^{299}	6.70×10^{299}	9.96
1 000	1.07×10^{301}	10^{300}	
1 100	1.36×10^{331}	1.38×10^{304}	
1 200	1.72×10^{361}	8.28×10^{307}	
…	…	…	…

2. 利用表 3-13 中的数据完成表 3-14.

表 3-14

x 的变化区间	函数值的变化量		
	$y=2^x$	$y=x^{100}(x>0)$	$y=\log_2 x$
(1,10)			
(10,100)			
(100,300)			
(300,500)			
(500,700)			
(700,900)			
(900,1 000)			
(1 000,1 100)			
(1 100,1 200)			

3. 谈谈你对这三个函数的函数值增长快慢的体会.

由于指数函数值增长非常快,人们常称这种现象为“指数爆炸”.

小资料

表 3-13 中已计算的函数值是通过科学计算器计算出来的(同学们也可以通过设计程序利用计算机完成). 有的科学计算器(如计算位数较少的科学计算器)无法直接计算很大的数,这时,需要我们设计一些计算方法,能利用这些科学计算器进行近似计算. 比如表格中的数据 3.27×10^{150} 是函数 $y=2^x$ 当 $x=500$ 时的近似函数值,一般的科学计算器无法直接计算,于是,我们采取了下面的步骤进行计算:

第一步，利用科学计算器算出

$$2^{10}=1\,024=1.024\times10^{3};$$

第二步，再计算 2^{100}. 因为

$$2^{100}=(2^{10})^{10}=(1.024\times10^{3})^{10}=1.024^{10}\times10^{30},$$

所以，我们只需要用科学计算器算出

$$1.024^{10}\approx1.267\,7,$$

则

$$2^{100}\approx1.267\,7\times10^{30};$$

第三步，再计算 2^{500}. 因为

$$(2^{100})^{5}\approx(1.267\,7\times10^{30})^{5},$$

我们只需要用科学计算器算出

$$1.267\,7^{5}\approx3.274\,0,$$

从而算出

$$2^{500}\approx3.27\times10^{150}.$$

在设计计算方法时，要考虑到科学计算器能计算的位数. 如果函数值非常大，我们常常用科学记数法表示，并且根据需要保留一定数目的有效数字.

思考交流

在计算函数 $y=2^{x}$ 值的过程中，当 x 很大时，如何才能使计算步骤最少？

信息技术应用

指数函数、幂函数、对数函数增长的比较

问题的提出：

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^{x}$ 为增函数；

当 $n>0$，$x>0$ 时，幂函数 $y=x^{n}$ 为增函数；

当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 为增函数；

试比较这三种函数值增长的快慢.

下面以三个具体函数：$y=2^{x}$，$y=x^{100}$，$y=\log_2 x\,(x>0)$ 作比较，来体会它们的增长快慢.

方案一 通过实验方式，完成下列问题.

实验 1 比较函数 $y_1=2^{x}$，$y_2=x^{2}$，$y_3=\log_2 x$（只考虑 $x>0$ 的情况）.

方法 1：利用计算工具完成表 3-15.

表 3-15

x	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$y_1=2^x$	2	4	8	16	32	64	128	256	…
$y_2=x^2$	1	4	9	16	25	36	49	64	…
$y_3=\log_2 x$	0	1	1.584 9	2	2.321 9	2.584 9	2.807 3	3	…

由表中数据你能得到什么结论？

方法 2：利用数学软件或图形计算器作出上述函数图像（如图 3-18）.

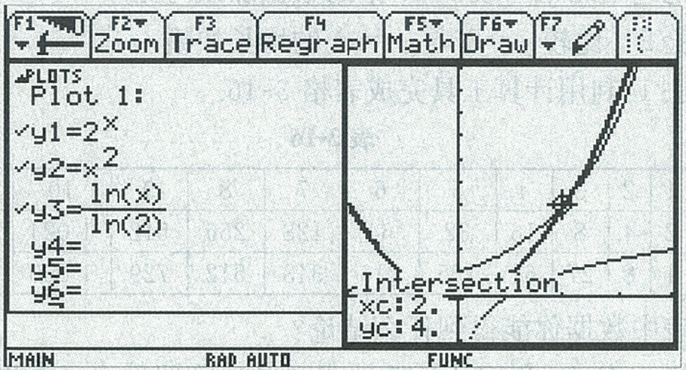


图 3-18

（指数函数图像用细线条作出，幂函数图像用较粗线条作出，对数函数图像用虚线条作出.）

从图像中可以看到：对数增长显然最慢，而幂增长和指数增长的快慢则交替出现，第一个交点为(2,4)，从屏幕右上部分来看，是幂函数增长更快（如图 3-18），那么，当 $x>2$ 时，一定有幂函数 $y_2=x^2$ 增长快于指数函数 $y_1=2^x$ 吗？

改变窗口的大小，可以发现：幂函数 $y_2=x^2$ 与指数函数 $y_1=2^x$ 有第二个交点(4,16)（如图 3-19）.

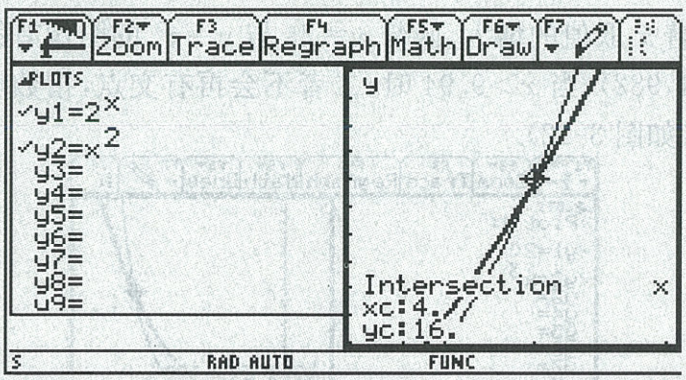


图 3-19

那么，二者还会有别的交点吗？

继续调整窗口，可以发现：当 $x>4$ 时，二者不会再有交点（如图 3-20），即当 $x>4$ 时，指数函数 $y_1=2^x$ 的增长快于幂函数 $y_2=x^2$.

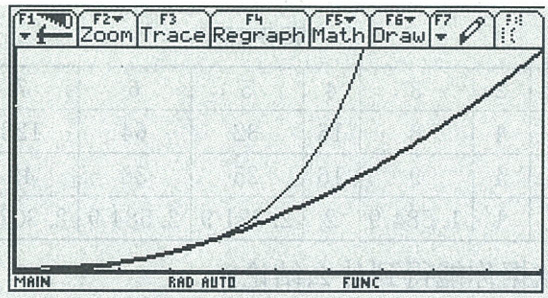


图 3-20

试把这个结果与表 3-15 中的数据加以对比.

实验 2　比较 $y=2^x$ 与 $y=x^3$ 的增长快慢.

方法 1:利用计算工具完成表格 3-16.

表 3-16

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$y=2^x$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	…
$y=x^3$	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1 000	1 331	…

由表中数据你能得到什么结论?

方法 2:仿上,利用数学软件或图形计算器作出函数图像(如图 3-21).可以发现,函数 $y=2^x$ 与 $y=x^3$ 的图像第一个交点为(1.37,2.59).

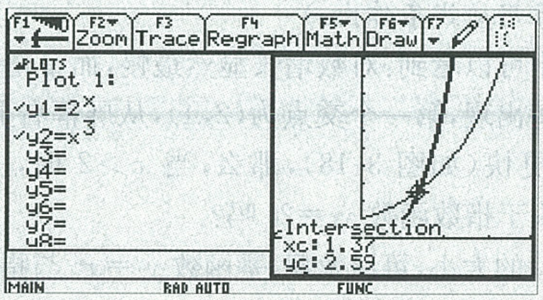


图 3-21

随着 x 取值的增大,函数 $y=2^x$ 与 $y=x^3$ 的图像有第二个交点(9.94,982),当 $x>9.94$ 时,二者不会再有交点,指数增长快于幂增长(如图 3-22).

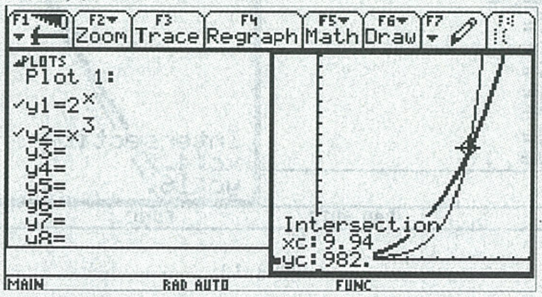


图 3-22

试把这个结果与表 3-16 中的数据加以对比.

由前面两个实验你能得到什么样的结论?

实验 3　比较 $y=2^x$ 与 $y=x^{100}$ 的增长快慢.

仿照前面的实验步骤可以发现当 $x>1\,000$ 时，指数函数 $y=2^x$ 比幂函数 $y=x^{100}$ 增长得更快(如图 3-23).

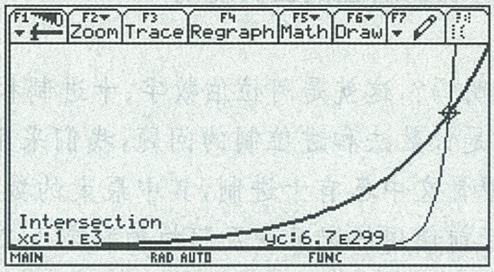


图 3-23

方案二　采用降次的方法

分别对函数 $y=2^x$，$y=x^{100}$ $(x>0)$ 两式的右边取以 2 为底的对数，得到新的函数 $y=x$ 和 $y=100\log_2 x$，只需比较 $y=x$，$y=100\log_2 x$ 的增长情况. 利用图形计算器作出函数 $y=x$ 和 $y=100\log_2 x$ 的图像，可以发现：当 $x>1\,000$ 时，指数函数 $y=2^x$ 比幂函数 $y=x^{100}$ 增长得更快(如图 3-24).

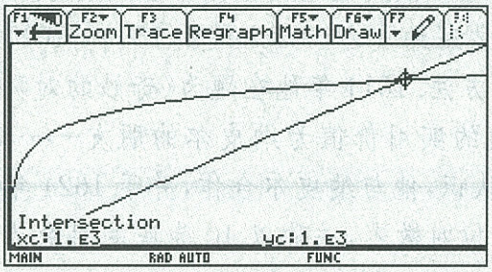


图 3-24

练　习

1. 收集有关“指数爆炸”这种说法的实际问题，谈谈你对它的认识.
2. 收集有关直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型的实际问题，谈谈这三种函数类型增长的含义.

习　题　3—6

1. 估计一粒米的质量，再通过科学计算器计算 2^{64} 粒米的质量，比较其与地球质量的大小(已知地球的质量约是 5.976×10^{24} kg).
2. 试比较函数 $y=x^{200}$，$y=e^x$，$y=\lg x$ 的增长情况.

阅读材料

历史上数学计算方面的三大发明

你知道数学计算方面的三大发明吗？这就是阿拉伯数字、十进制和对数.

研究自然数遇到的第一个问题是计数法和进位制的问题，我们采用的十进制是中国人的一大发明.在商代中期的甲骨文中已有十进制，其中最大的数为3万，印度最早到6世纪末才有十进制.但是目前使用的记数法及阿拉伯数字1,2,3,4,5,6,7,8,9,0是印度人最早开始使用，后来传到阿拉伯，由阿拉伯人传到欧洲，并被欧洲人接受.

十进制位值计数法的诞生是自然数发展史上的一次飞跃，同一个数字由于它所在的位置不同而有不同的值.无穷多个自然数可以用有限个符号来驾驭，所有的自然数都可以方便清楚地表示出来.

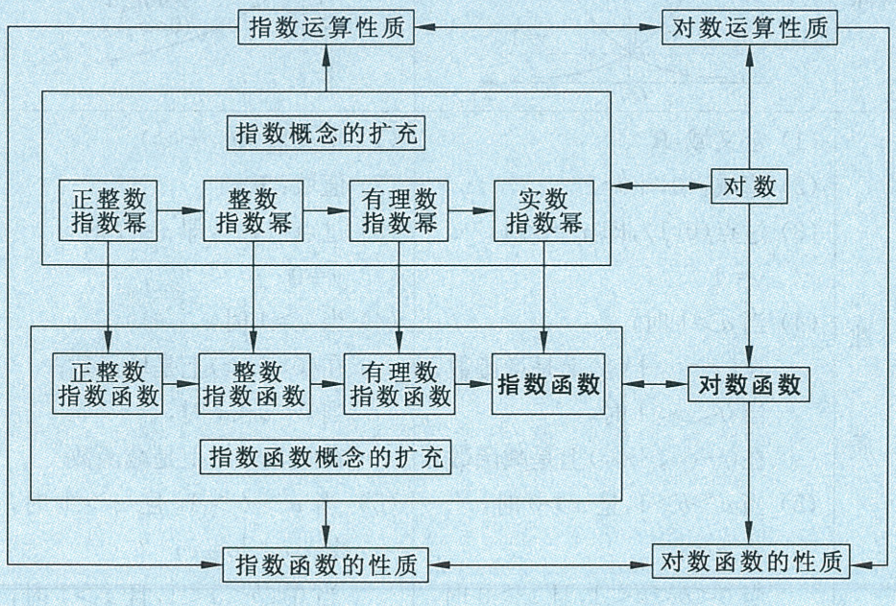
16世纪前半叶，由于实际的需要，对计算技术的改进提出了前所未有的要求.这一时期计算技术最大的改进是对数的发明和应用，它的产生主要是由于天文和航海计算的迫切需要.为了简化天文、航海方面所遇到的繁杂数值计算，自然希望将乘除法归结为简单的加减法.苏格兰数学家纳皮尔(Napier,J. 1550—1617)在球面天文学的三角学研究中首先发明了对数方法.1614年他在题为《奇妙的对数定理说明书》的书中，阐述了他的对数方法.对数的实用价值为纳皮尔的朋友——英国数学家布里格斯(Birggs,H. 1561—1630)所认识，他与纳皮尔合作，并于1624年出版了《对数算术》一书，公布了以10为底的14位对数表，并称以10为底的对数为常用对数.常用对数曾经在简化计算上为人们做过重大的贡献，而自然对数以及以e为底的指数函数成了研究科学、了解自然的必不可少的工具.恩格斯曾把对数的发明与解析几何的创始、微积分学的建立并称为17世纪数学的三大成就.法国著名的数学家、天文学家拉普拉斯(Laplace,P. S. 1749—1827)曾说：“对数的发明以其节省劳力而延长了天文学家的寿命.”

一直到18世纪，瑞士数学家欧拉(Euler,L. 1707—1783)才发现指数与对数的联系，他指出“对数源出于指数”，这个见解很快被人们接受.

◆ 本章小结

一、内容提要

1. 本章的结构图如下：



结构图揭示了：

(1) 正整数指数幂扩充到实数指数幂的过程；

(2) 正整数指数函数扩充到指数函数的过程；

(3) 由指数定义到对数定义的过程；

(4) 由指数运算性质得到对数运算性质的过程；

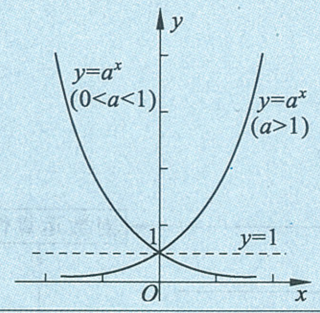
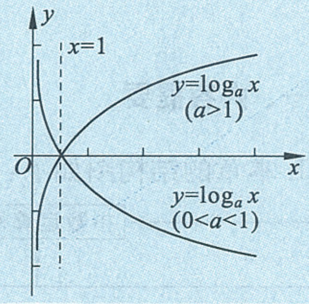
(5) 由指数函数的概念、图像与性质得到对数函数的概念、图像与性质的过程；

(6) 指数、对数、指数函数、对数函数等知识之间的纵横联系.

2. 指数运算性质和对数运算性质对比

指数运算性质	对数运算性质
(1) $a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$	(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$
(2) $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$	(2) $\log_a M^n=n\cdot\log_a M(n\in\mathbf{R})$
(3) $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$	(3) $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
$(a>0,b>0,\alpha,\beta\in\mathbf{R})$	$(a>0,a\neq1,M>0,N>0)$

3. 指数函数和对数函数图像与性质对比

	指 数 函 数	对 数 函 数
	$y=a^x(a>0,a\neq1)$	$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$
图像		
性质	(1) 定义域：**R** (2) 值域：$(0,+\infty)$ (3) 过点$(0,1)$，即$x=0$时，$y=1$ (4) 当$a>1$时，在$(-\infty,+\infty)$上是增函数；当$0<a<1$时，在$(-\infty,+\infty)$上是减函数 (5) 当$a>b>1$，且$x>0$时，$a^x>b^x$；当$0<b<a<1$，且$x>0$时，$a^x>b^x$	(1) 定义域：$(0,+\infty)$ (2) 值域：**R** (3) 过点$(1,0)$，即$x=1$时，$y=0$ (4) 当$a>1$时，在$(0,+\infty)$上是增函数；当$0<a<1$时，在$(0,+\infty)$上是减函数 (5) 当$a>b>1$，且$x>1$时，$\log_a x<\log_b x$；当$0<b<a<1$，且$x>1$时，$\log_a x<\log_b x$

4. 指数函数、幂函数、对数函数增长的对比

若$a>1,n>0$，那么当x足够大时，一定有$a^x>x^n>\log_a x$. 通过实例，可以体会这些函数增长的含义.

二、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求

(1) 理解有理数指数幂的概念，了解实数指数幂的意义，掌握幂的运算性质；

(2) 掌握指数函数的概念、图像和性质；

(3) 理解对数的概念，掌握对数的运算性质，了解对数换底公式；

(4) 掌握对数函数的概念、图像和性质；

(5) 了解反函数的概念；

(6) 了解指数增长、幂增长、对数增长的意义；

(7) 能够运用函数的概念、函数的性质、指数函数和对数函数的性质解决某些简单的实际问题.

2. 需要注意的问题

(1) 学习概念时，要注意概念间的细微差别. 例如，当指数由正整数扩充到实数时，对指数幂 a^n 中底数 a 的取值范围有不同要求；在对数式中，底数 $a>0$，且 $a\neq1$，真数 $N>0$；在讨论指数函数和对数函数的图像和性质时，对底数分为 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情况讨论.

(2) 学习本章，要注意经历前面提出的过程，体验数学概念扩充的意义.

(3) 在比较与鉴别中学习. 注意进行指数与对数运算性质的对比；指数函数与对数函数性质的对比；函数增长快慢的对比.

(4) 指数函数和对数函数是通过对一些典型函数的分析，逐步总结概念和性质.

(5) 注意数形结合. 本章的内容中图像占有相当大的比重，函数图像对于研究函数的性质起到很重要的作用. 通过观察函数图像的变化趋势，可以总结出函数的性质. 所以在本章学习中要特别注意利用函数图像，注意学会绘制某些简单函数图像的技能，记住某些常见的函数图像的草图，养成利用函数图像来说明函数的性质和分析问题的习惯.

复习题三

A 组

1. 把下列指数式化为对数式($a>0,a\neq1$):

(1) $a^0=1$; (2) $a^1=a$; (3) $a^2=N(N>0)$; (4) $a^{\frac{1}{3}}=m(m>0)$.

2. 把下列对数式化为指数式($a>0,a\neq1$):

(1) $\log_a 1=0$; (2) $\log_a a=1$;

(3) $\log_a 2=N$; (4) $\log_a m^{\frac{1}{3}}=n$.

3. 计算:

(1) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-(-9.6)^0-\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+0.1^{-2}$;

(2) $\dfrac{\log_m(2a)-\log_m(2b)}{\log_m a-\log_m b}$ $(a,b>0,a\neq b)$;

(3) $(e^{\ln 3}+e^{\frac{1}{2}\ln 4})(e^{\ln 3}-e^{\frac{1}{2}\ln 4})$;

(4) $\dfrac{\log_{27}16}{\log_3 8}$.

4. 判断下列各式是否恒等:

(1) $(\log_a x)^2$ 和 $2\log_a x$; (2) $\log_a(x+y)$和 $\log_a x+\log_a y$;

(3) $\dfrac{\log_a x}{\log_a y}$和 $\log_a\dfrac{x}{y}$; (4) $\dfrac{\log_a x}{n}$和 $\log_a\sqrt[n]{x}$.

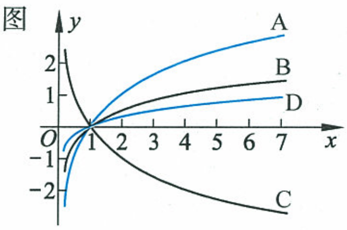
5. 如图,A,B,C,D 是 $y=\lg x$,$y=\log_4 x$,$y=\log_2 x$,$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 四个函数的图像,则

(1) 函数 $y=\lg x$ 的图像是________;

(2) 函数 $y=\log_4 x$ 的图像是________;

(3) 函数 $y=\log_2 x$ 的图像是________;

(4) 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像是________.



(第 5 题)

6. 已知 $10^\alpha=2^{-\frac{1}{2}}$,$10^\beta=32^{\frac{1}{3}}$,求 $10^{2\alpha-\frac{3}{4}\beta}$的值.

7. 已知下列不等式,比较 m,n 的大小:

(1) $9^m<9^n$; (2) $0.1^m>0.1^n$; (3) $a^m<a^n(a>0,a\neq1)$.

8. 求下列函数的定义域:

(1) $y=3^{\frac{1}{2x+1}}$; (2) $y=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^x}$;

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^x-2}}$ $(a>0,a\neq1)$; (4) $y=\log_2\dfrac{1}{3x-2}$;

(5) $y=\sqrt{2\log_2 x-5}$; (6) $y=\log_2\dfrac{1}{1-3^x}$.

9. 比较下列各题中两个数的大小:

(1) $\log_6 0.8,\log_6 9.1$；　　(2) $\log_{0.1}7,\log_{0.1}9$；

(3) $\log_{0.1}5,\log_{2.3}5$；　　(4) $\log_a 4,\log_a 6(a>0,a\neq 1)$.

10. 已知 x 的对数，求 x（其中 m,n,a,b,c 均大于 0，$a\neq 1$）：

(1) $\lg x=3\lg n+\lg m$；　　(2) $\log_a x=\log_a b^2-3\log_a c$.

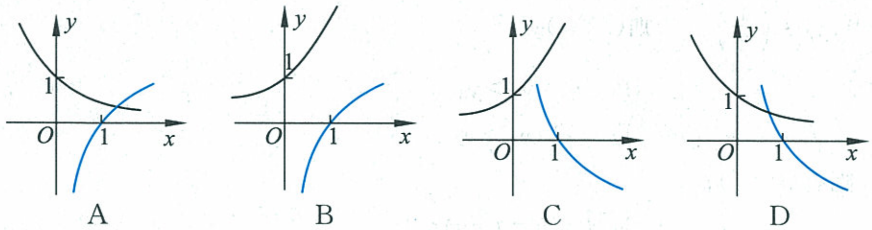
11. 选择题

(1) 若 $0<a<1,b<-1$，则函数 $f(x)=a^x+b$ 的图像不经过(　　)；

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

(2) 当 $a>1$ 时，在同一坐标系中，函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图像是(　　).



（第 11(2)题）

12. 解方程：

(1) $\dfrac{1+3^{-x}}{1+3^x}=3$；　　(2) $\log_4(3x-1)=\log_4(x-1)+\log_4(3+x)$.

13. 在不考虑空气阻力的条件下，火箭的最大速度 v(km/s)和燃料的质量M(kg)、火箭(除燃料外)的质量 m(kg)的函数关系是 $v=2\,000\ln\left(1+\dfrac{M}{m}\right)$. 当燃料质量是火箭质量的多少倍时，火箭的最大速度可达到 12 km/s?

14. 物体放在冷空气中冷却，如果物体的初始温度是 T_1(℃)，空气温度是T_0(℃)，那么，经过 t 分后物体的温度 T(℃)满足函数关系式：

$$T=T_0+(T_1-T_0)\cdot e^{-kt}.$$

现有一杯 95 ℃的热茶，把其放置在 15 ℃的房间中，如果 2 分后，茶温降到 80 ℃，求式中的 k. 然后计算开始冷却后，多长时间茶水温度是 65 ℃，40 ℃，32 ℃（结果保留 2 个有效数字）？茶水会不会冷却到 12 ℃？

B 组

1. 选择题

(1) 设集合 $S=\{y\mid y=3^x, x\in\mathbf{R}\}$，$T=\{y\mid y=x^2-1, x\in\mathbf{R}\}$，则 $S\cap T$ 是（　　）；

A. S　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. 有限集

(2) 设集合 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>1\}$，$B=\{x\mid \log_2 x>0\}$，则 $A\cap B$ 等于（　　）；

A. $\{x\mid x>1\}$　　B. $\{x\mid x>0\}$

C. $\{x\mid x<-1\}$　　D. $\{x\mid x<-1$ 或 $x>1\}$

(3) 设 $y_1=4^{0.9}$，$y_2=8^{0.48}$，$y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}$，则（　　）；

A. $y_3>y_1>y_2$　　B. $y_2>y_1>y_3$

C. $y_1>y_2>y_3$　　D. $y_1>y_3>y_2$

(4) 设 $0<x<y<a<1$，则有（　　）；

A. $\log_a(xy)<0$　　B. $0<\log_a(xy)<1$

C. $1<\log_a(xy)<2$　　D. $\log_a(xy)>2$

(5) 设 $\log_a 2<\log_b 2<0$，则（　　）.

A. $0<a<b<1$　　B. $0<b<a<1$

C. $a>b>1$　　D. $b>a>1$

2. 设 $y_1=a^{2x-3}$，$y_2=a^{1-3x}$，其中 $a>0$，$a\neq 1$，确定 x 为何值时，有

(1) $y_1=y_2$；　　(2) $y_1>y_2$.

3. (1) 若定义在区间 $(-1,0)$ 的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x)>0$，求 a 的取值范围；

(2) 解方程 $\log_3(1-2\cdot 3^x)=2x+1$；

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\in(-\infty,1],\\ \log_{81}x, & x\in(1,+\infty).\end{cases}$

求满足 $f(x)=\frac{1}{4}$ 的 x 值.

4. 已知函数 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，证明：$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

5. 我国辽东半岛普兰店附近的泥炭层中，发掘出的古莲子，至今大部分还能发芽开花，这些古莲子是多少年以前的遗物呢？要测定古物的年代，可用放射性 $^{14}\mathrm{C}$. 动植物死亡后，停止了新陈代谢，$^{14}\mathrm{C}$ 不再产生，且原有的 $^{14}\mathrm{C}$ 会自动衰减，经过 5 730 年（叫作 $^{14}\mathrm{C}$ 的半衰期）它的剩余量只有原始量的一半. 经过科学测定知道，若 $^{14}\mathrm{C}$ 的原始含量为 a，则经过 t 年后的剩余量 a_1 与 a 之间满足 $a_1=a\cdot e^{-kt}$. 现测得出土的古莲子中 $^{14}\mathrm{C}$ 的剩留量占原始量的 87.9%，试推算古莲子的生活年代.

C　组

1. 已知函数 $f(x)=\log_a(a^x-1)$ $(a>0, a\neq 1)$，

 (1) 求函数 $f(x)$的定义域；

 (2) 讨论函数 $f(x)$的单调性.

2. 避雷针的发明人，著名科学家富兰克林(1706—1790)去世后，留下的财产并不可观，大致只有 1 000 英镑. 但令人惊奇的是，他竟然留下了一份分配几百万英镑财产的遗嘱！这份遗嘱是这样写的：

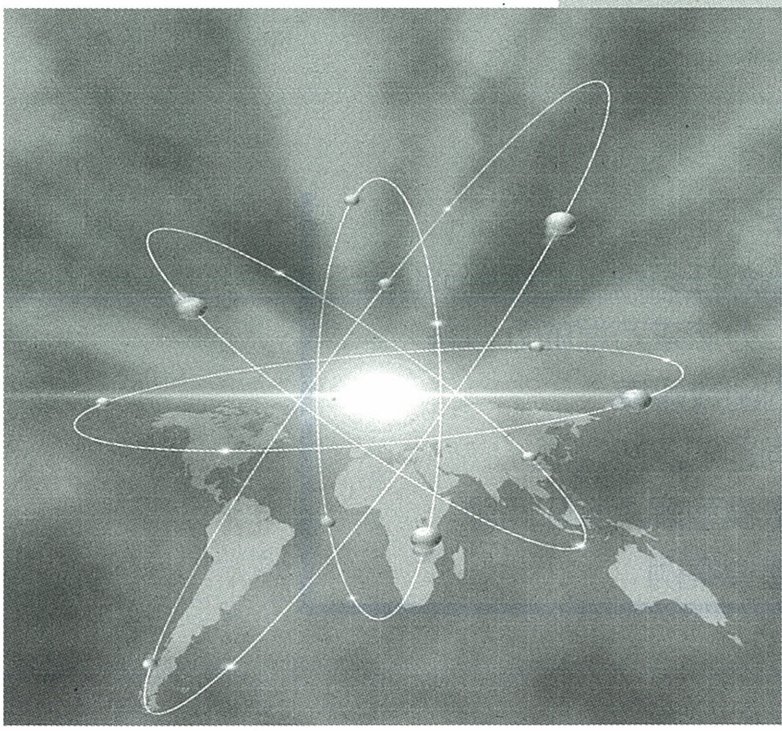
 "……1 000 英镑赠给波士顿的居民，如果他们接受了这1 000 英镑，那么这笔钱应托付给一些挑选出来的公民，他们得把这钱按每年 5%的利率借给一些年轻的手工业者去生息，这笔钱过了 100 年增加到 131 000 英镑. 我希望那时候用 100 000 英镑来建立一所公共建筑物，剩下的 31 000 英镑拿去继续生息 100 年. 在第二个 100 年末了，这笔款增加到 4 061 000 英镑，其中1 061 000英镑还是由波士顿的居民来支配，而其余的3 000 000英镑让马萨诸塞州的公众来管理. 过此之后，我可不敢多作主张了."

 你认为富兰克林的设想有道理吗？为什么？

第四章 函数应用

函数是应用广泛的数学模型. 它非常有用，主要表现在两个方面：一方面，在数学中，函数是基本的研究对象，与其他研究对象有着密切联系，例如函数与方程；另一方面，在日常生活中，函数可有效地描述、刻画、反映客观规律，一旦将客观的现象用函数表示出来，就可以对现象给予分析和解释，明确现象的规律和特征. 例如，医学上的两项重大技术突破——CT 扫描和核磁共振，其原理主要就是数学中的 Radon 变换.

本章的学习将促进我们对函数的全面理解，加强应用数学的意识.



数学在人们社会生活中的作用发生了革命性的变化.

——姜伯驹

§1 函数与方程
1.1 利用函数性质判定方程解的存在
1.2 利用二分法求方程的近似解
§2 实际问题的函数建模
2.1 实际问题的函数刻画
2.2 用函数模型解决实际问题
2.3 函数建模案例

§1 函数与方程

方程和函数是中学代数的重要内容.

我们已经学过一元一次方程、二元一次方程组、一元二次方程，并掌握了一些方程的求解公式. 实际上，绝大部分方程没有求解公式. 那么，这些方程怎么解？这一节，我们就讨论如何利用方程与函数的关系求方程的实数解.

1.1 利用函数性质判定方程解的存在

实例分析

例 1 判断方程 $x^2-x-6=0$ 解的存在.

解 考察函数 $f(x)=x^2-x-6$，其图像为抛物线(如图 4-1).

容易看出，$f(0)=-6<0$，$f(4)=6>0$，$f(-4)=14>0$.

由于函数 $f(x)$ 的图像是连续曲线，因此，点 $B(0,\ -6)$ 与点 $C(4,\ 6)$ 之间的那部分曲线必然穿过 x 轴，即在区间 $(0,\ 4)$ 内至少有一点 x_1，使 $f(x_1)=0$；同样，在区间 $(-4,\ 0)$ 内也至少有一点 x_2，使 $f(x_2)=0$. 而方程 $x^2-x-6=0$ 至多有两个解，所以在 $(-4,0)$ 和 $(0,4)$ 内，方程 $x^2-x-6=0$ 各有一解.

我们可以用学过的解方程的方法来验证这个结论.

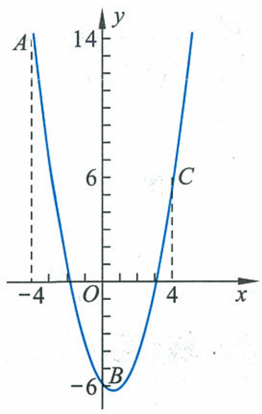


图 4-1

抽象概括

我们把函数 $y=f(x)$ 的图像与横轴的交点的横坐标称为这个函数的**零点**.

$f(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=0$ 的解. 这样就为我们提供了一个通过函数性质确定方程解的途径. 函数的零点个数就决定了相应方程实数解的个数.

若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上的图像是连续曲线，并且在区间端点的函数值符号相反，即 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在区间 $(a,\ b)$ 内，函数 $y=f(x)$ 至少有一个零点，即相应的方程 $f(x)=0$ 在区间 $(a,\ b)$ 内

至少有一个实数解.

我们所研究的大部分函数,其图像都是连续的曲线.

例 2 已知函数 $f(x)=3^x-x^2$. 问:方程 $f(x)=0$ 在区间 $[-1, 0]$ 内有没有实数解? 为什么?

解 因为 $f(-1)=3^{-1}-(-1)^2=-\dfrac{2}{3}<0$,

$$f(0)=3^0-0^2=1>0,$$

函数 $f(x)=3^x-x^2$ 的图像是连续曲线,所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 0]$ 内有零点,即 $f(x)=0$ 在区间 $[-1, 0]$ 内有实数解.

例 3 判定方程 $(x-2)(x-5)=1$ 有两个相异的实数解,且一个大于 5,一个小于 2.

解 考虑函数 $f(x)=(x-2)(x-5)-1$,有

$$f(5)=(5-2)(5-5)-1=-1,$$
$$f(2)=(2-2)(2-5)-1=-1.$$

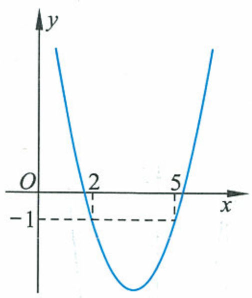


图 4-2

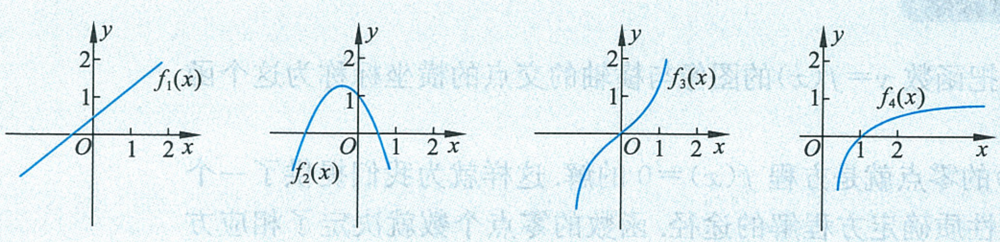
又因为 $f(x)$ 的图像是开口向上的抛物线(如图 4-2),所以在 $(-\infty, 2)$ 内存在一点 a, $f(a)>0$,在 $(5, +\infty)$ 内存在一点 b, $f(b)>0$. 所以抛物线与横轴在 $(5, b)$ 内有一个交点,在 $(a, 2)$ 内也有一个交点.

所以方程 $(x-2)(x-5)=1$ 有两个相异的实数解,且一个大于 5,一个小于 2.

这里说"若 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在区间 (a, b) 内,方程 $f(x)=0$ 至少有一个实数解",指出了方程 $f(x)=0$ 实数解的存在,并不能判断具体有多少个实数解.

练 习

1. 观察下面的四个函数图像,指出在区间 $(-\infty, 0)$ 内,方程 $f_i(x)=0(i=1,2,3,4)$ 哪个有解? 说明理由.



(第 1 题)

2. 判定方程 $4x^3+x-15=0$ 在 $[1, 2]$ 内实数解的存在性,并说明理由.
3. 指出下列方程存在实数解,并给出一个实数解的存在区间:
   (1) $x-\dfrac{1}{x}=0$; (2) $\lg x+x=0$.

1.2　利用二分法求方程的近似解

分析理解

在图 4-3 中，函数 $f(x)$ 的图像与直角坐标系中的 x 轴有交点，我们知道，这个交点的横坐标就是方程 $f(x)=0$ 的解. 下面我们讨论解的求法.

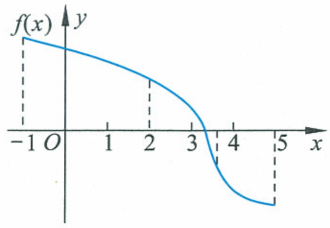


图 4-3

假设在区间 $[-1, 5]$ 上，$f(x)$ 的图像是一条连续的曲线，且 $f(-1)\cdot f(5)<0$，我们依照如下的方法，可以求方程 $f(x)=0$ 的一个解.

取 $[-1, 5]$ 的中点 2. 因为 $f(5)<0$，$f(2)>0$，即

$$f(2)\cdot f(5)<0,$$

所以在区间 $[2, 5]$ 内有方程的解.

于是再取 $[2, 5]$ 的中点 3.5……这样继续下去，如果取到某个区间的中点 x_0，恰使 $f(x_0)=0$，则 x_0 就是所求的一个解；如果区间中点的函数值总不等于零，那么，不断地重复上述操作，就得到一系列闭区间，方程的一个解在这些区间中，区间长度越来越小，端点逐步逼近方程的解，可以得到一个近似解.

像这样每次取区间的中点，将区间一分为二，再经比较，按需要留下其中一个小区间的方法称为**二分法**.

前面已经说过，绝大部分方程没有求解公式. 其实，在许多实际应用中，也不需要求出精确的解，只要满足一定的精度就可以了. 设 $\hat{x}$ 是方程 $f(x)=0$ 的一个解，给定正数 ε，若 x_0 满足 $|x_0-\hat{x}|<\varepsilon$，就称 x_0 是满足精度 ε 的近似解.

为了得到满足精度 ε 的近似解，只需找到方程的一个有解区间 $[a, b]$，使得区间长度 $b-a\leqslant\varepsilon$，那么区间 (a, b) 内任意一个数都是满足精度 ε 的近似解.

> **有解区间**
> 若区间 $[a, b]$ 内有方程 $f(x)=0$ 的解，则称区间 $[a, b]$ 为方程的有解区间.

事实上，任意选取两数 $x_1, x_2\in(a,b)$，都有 $|x_1-x_2|<\varepsilon$. 由于 $\hat{x}\in(a,b)$，所以任意选取 $x'\in(a,b)$ 都有 $|x'-\hat{x}|<\varepsilon$. 下面来考虑，按照给定的精度，用二分法求方程的近似解.

例 4　求方程 $2x^3+3x-3=0$ 的一个实数解，精度为 0.01.

解　考察函数 $f(x)=2x^3+3x-3$，从一个两端函数值反号的区间开始，应用二分法逐步缩小方程实数解所在区间.

经试算，$f(0)=-3<0$，$f(1)=2>0$，所以方程 $2x^3+3x-3=0$

在[0，1]内有解.

如此下去，得到方程 $2x^3+3x-3=0$ 有解区间的表 4-1.

至此，我们得到，区间[0.734 375，0.742 187 5]的区间长度为 0.007 812 5，它小于 0.01，因此，我们可以选取这一区间内的任意一个数作为方程 $2x^3+3x-3=0$ 的近似解. 例如，我们选取 0.74 作为方程 $2x^3+3x-3=0$ 的一个近似解.

表 4-1

次　数	左 端 点	左端点函数值	右 端 点	右端点函数值	区间长度
第 1 次	0	−3	1	2	1
第 2 次	0.5	−1.25	1	2	0.5
第 3 次	0.5	−1.25	0.75	0.093 75	0.25
第 4 次	0.625	−0.636 718 75	0.75	0.093 75	0.125
第 5 次	0.687 5	−0.287 597 656	0.75	0.093 75	0.062 5
第 6 次	0.718 75	−0.101 135 254	0.75	0.093 75	0.031 25
第 7 次	0.734 375	−0.004 768 372	0.75	0.093 75	0.015 625
第 8 次	0.734 375	−0.004 768 372	0.742 187 5	0.044 219 017	0.007 812 5

抽象概括

二分法求方程实数解的思想是非常简明的，但是为了提高解的精度，用二分法求方程实数解的过程又是比较长的，有些计算不用工具甚至无法实施，这就需要借助于科学计算器等.

利用二分法求方程实数解的过程可以用图 4-4 表示出来.

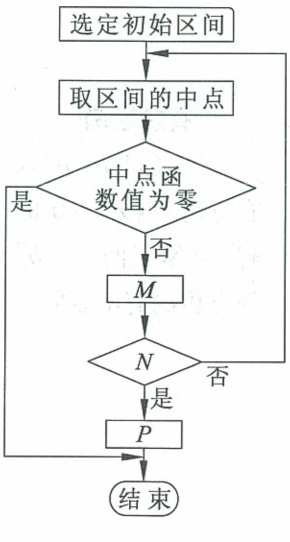


图 4-4

在这里：

“初始区间”是一个两端函数值反号的区间；

“M”的含义是：取新区间，一个端点是原区间的中点，另一端是原区间两端点中的一个，新区间两端点的函数值反号；

“N”的含义是：方程解满足要求的精度；

“P”的含义是：选取区间内的任意一个数作为方程的近似解.

在二分法求方程解的步骤中，初始区间的选定，往往需要通过分析函数的性质和试验估计. 初始区间可以选得不同，不影响最终计算结果.

二分法的基本思想也将在以后的学习中不断帮助我们解决大量的方程求解问题. 这种方法仅仅是求近似解的一种方法，随着进一步的学习，我们还可以学到其他求法.

练 习

用二分法求方程 $0.9^x-\frac{2}{21}x=0$ 的实数解，精度为 0.1.

习 题 4—1

A 组

1. 判定下列方程在指定区间内是否存在实数解，并说明理由.

   (1) $x^3+x=0$ 在 $(-\infty, 0)$ 内；

   (2) $|x|-2=0$ 在 $[-1, 1]$ 内.

2. 判定下列方程存在几个实数解，并分别给出每个实数解的存在区间：

   (1) $x^2+x-1=0$；　　(2) $|\lg x|-\sqrt{2}=0$.

3. 已知函数 $f(x)=x^5+x-3$ 在区间 $[1, 2]$ 内有零点，求出方程 $x^5+x-3=0$ 在区间 $[1, 2]$ 内的一个实数解，精度为 0.1.

4. 判定方程 $\frac{1}{x}+1=0$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 内是否存在实数解，并说明理由.

B 组

1. 判定下列方程在 $(0,10)$ 内是否存在实数解，并说明理由：

   (1) $\frac{1}{2}x+\ln x=0$；　　(2) $x^2-\lg x=0$.

2. 根据图像是连续曲线的性质以及函数增长快慢的差异，判断 $2^x=x^3$ 至少有两个实数解. 用二分法求方程 $2^x=x^3$ 的一个实数解的近似值（精度为0.01）.

§2 实际问题的函数建模

2.1 实际问题的函数刻画

在现实世界里，事物之间存在着广泛的联系，许多联系可以用函数刻画. 用函数的观点看实际问题，是学习函数的重要内容.

问题 1 当人的生活环境温度改变时，人体代谢率也有相应的变化，表 4-2 给出了实验的一组数据，这组数据能说明什么？

表 4-2

环境温度/(℃)	4	10	20	30	38
代谢率/[4 185J/(h·m^2)]	60	44	40	40.5	54

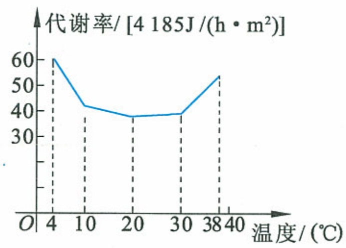


图 4-5

解 在这个实际问题中出现了两个变量：一个是环境温度；另一个是人体的代谢率. 不难看出，对于每一个环境温度都有唯一的人体代谢率与之对应，这就决定了一个函数关系. 实验数据已经给出了几个特殊环境温度时的人体代谢率，为了使函数关系更直观，我们将表中的每一对实验值在直角坐标系中表示出来. 在医学研究中，为了方便，常用折线把它们连接起来(如图 4-5).

根据图像，可以看出下列性质：

(1) 代谢率曲线在小于 20 ℃的范围内是下降的，在大于30 ℃的范围内是上升的；

(2) 环境温度在 20～30 ℃时，代谢率较低，并且较稳定，即温度变化时，代谢率变化不大；

(3) 环境温度太低或太高时，它对代谢率有较大影响.

所以，临床上做“基础代谢率”测定时，室温要保持在 20～30 ℃之间，这样可以使环境温度的影响最小.

在这个问题中，通过对实验数据的分析，可以确定由{4,10,20,30,38}到{60,44,40,40.5,54}的一个函数，通过描点，并且用折线将它们连接起来，使人们得到了一个新的函数，定义域扩大到了区间[4,38]. 对于实际的环境温度与人体代谢率的关系来说，这是一个近似的函数关系，它的函数图像，可以帮助我们更好地把握环境温度与人体代谢率的关系.

问题 2　某厂生产一种畅销的新型工艺品，为此更新专用设备和制作模具花去了 200 000 元，生产每件工艺品的直接成本为 300 元，每件工艺品的售价为 500 元，产量 x 对总成本 C、单位成本 P、销售收入 R 以及利润 L 之间存在什么样的函数关系？表示了什么实际含义？

解　总成本 C 与产量 x 的关系

$$C=200\ 000+300x;$$

单位成本 P 与产量 x 的关系

$$P=\frac{200\ 000}{x}+300;$$

销售收入 R 与产量 x 的关系

$$R=500x;$$

利润 L 与产量 x 的关系

$$L=R-C=200x-200\ 000.$$

以上各式建立的是函数关系.

(1) 从利润关系式可见，希望有较大利润应增加产量. 若 $x<1\ 000$，则要亏损；若 $x=1\ 000$，则利润为零；若 $x>1\ 000$，则可盈利. 这也可从图 4-6 看出，R 和 C 的图像是两条直线，在它们的交点处利润为零.

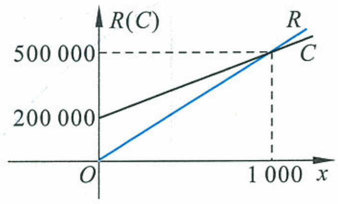


图 4-6

(2) 从单位成本与产量的关系 $P=\frac{200\ 000}{x}+300$ 可见，为了降低成本，应增加产量，以形成规模效益.

问题 3　如图 4-7，在一条弯曲的河道上，设置了 6 个水文监测站. 现在需要在河边建一个情报中心，从各监测站沿河边分别向情报中心铺设专用通信电缆，怎样刻画专用通信电缆的总长度？

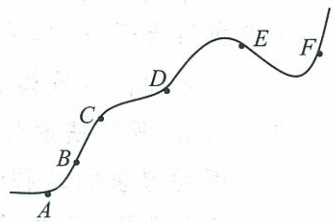


图 4-7

解　情报中心在河边的位置一旦确定，每一个水文监测站到情报中心的通信电缆长度（曲线段长度）就唯一确定了，因此，表示情报中心位置的数值与专用通信电缆的总长度就构成一个函数关系.

现在将弯曲的河道“拉直”，使刻画曲线段长度的问题变成了刻画直线段长度的问题. 将“变直了”的河道当作一个数轴，不妨设 A 为原点，$AB=b$，$AC=c$，$AD=d$，$AE=e$，$AF=f$. 于是，水文监测站 A，B，C，D，E 和 F 的坐标就可以用 $0,b,c,d,e,f$ 表示出来. 表示情报中心位置的数值可以看作一个变量，用 x 表示，这样，对于给定的 x 的值，就能计算出情报中心到每一个水文监测站的长度，从而可以得出所需电缆的总长度

$$f(x)=|x|+|x-b|+|x-c|+|x-d|+|x-e|+|x-f|.$$

小资料

在经济生活中，生产与消费是一对矛盾. 市场如果不受外界干预，当商品的价格上升时，消费者对这种商品的需求量会受到抑制，从而对这种商品的购买量就下降，消费者需求量与商品价格构成函数关系. 若以横轴 Q 表示商品的需求量，纵轴 P 表示商品的价格，可用图 4-8 中的曲线 D 表示这种关系（在经济学的研究中，通常是建立以价格 P 为纵坐标的直角坐标系）. 相反，商品的价格越高，生产者的生产积极性越高，从而对这种商品的供给量就上升. 可以用图 4-9 中的曲线 S 表示这种关系，这里的横轴 Q 表示商品的供给量，商品的供给量与商品的价格也构成函数关系. 价格下降对需求和供给的影响正好相反.

如果把两条曲线放到一个坐标系中，如图 4-10，以横轴 Q 表示商品的供给量和商品的需求量，纵轴 P 表示商品的价格，一升一降的两条曲线交于一点，把它记作 E，这个交点刻画的是市场供需均衡点.

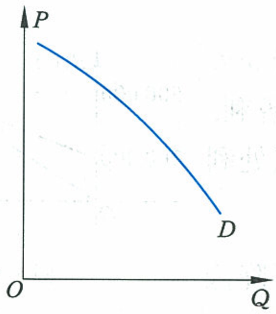


图 4-8

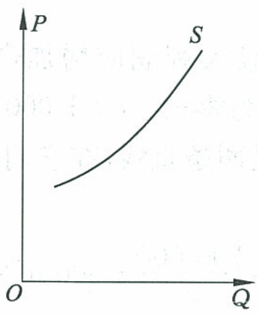


图 4-9

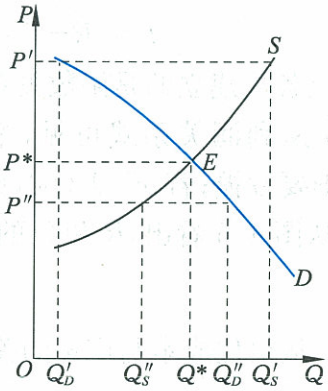


图 4-10

设 E 点的横坐标是 Q^*，纵坐标是 P^*，那么 P^* 叫作均衡价格. “均衡”意义如下：

如果商品的价格 $P'>P^*$，需求量将由 Q^* 减小到 Q'_D，而供给量将由 Q^* 增大到 Q'_S，这就会造成供大于求，其过剩量为 $Q'_S-Q'_D$. 由于供大于求，市场压力将迫使商品的价格下降.

如果商品的价格 $P''<P^*$，供给量将由 Q^* 减小到 Q''_S，而需求量将由 Q^* 增大到 Q''_D，造成供不应求，其短缺量为 $Q''_D-Q''_S$. 由于供不应求，市场的自然调节就会使商品的价格上升.

市场力量的这种作用结果，就使商品的市场价格趋于 P^*.

两条曲线、三幅图，以数学的特有方式，从函数角度简单又清晰地刻画了市场经济的供求关系.

练习

1. 商店的一种商品每个进价 80 元，零售价 100 元. 为了促进销售，开展购一件商品赠送一个小礼品的活动，在一定的范围内，礼品价格每增加 1 元，销售量增加 10%. 求利润与礼品价格 n 之间的函数关系.
2. 在测量某物理量的过程中，因仪器和观察的误差，使得 n 次测量分别得到 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，共 n 个数据，我们规定所测量物理量的“最佳近似值”a 是这样一个量：与其他近似值比较，a 与各数据差的平方和最小. 依此规定，请用 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 表示出 a.

2.2　用函数模型解决实际问题

函数模型是应用最广泛的数学模型之一. 许多实际问题一旦认定是函数关系，就可以通过研究函数的性质把握问题，使问题得到解决.

例 1　某公司一年需要一种计算机元件 8 000 个，每天需同样多的元件用于组装整机. 该元件每年分 n 次进货，每次购买元件的数量均为 x，购一次货需手续费 500 元. 已购进而未使用的元件要付库存费，可以认为平均库存量为 $\frac{1}{2}x$ 件，每个元件的库存费是一年 2 元. 请核算一下，每年进货几次花费最小?

解　无论分几次进货，公司进货的总数是 8 000 个元件，元件费用是固定不变的，影响总费用变化的量只是库存费和购货手续费，若想减少库存费，就要增加进货次数，而进货次数的增加又使手续费的总量增加了，这就需要将二者对总费用的影响用数学关系表示清楚，进而求最小的花费.

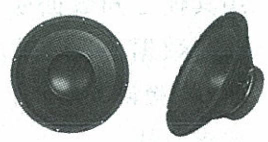
设购进 8 000 个元件的总费用为 F，一年总库存费为 E，手续费为 H，其他费用为 C(C 为常数)，则

$$E=2\times\frac{1}{2}x,\ H=500\times\frac{8\,000}{x},\ x=\frac{8\,000}{n},(n\geqslant1,n\in\mathbf{Z})$$

所以

$$\begin{aligned}F&=E+H+C\\&=2\times\frac{1}{2}x+500\times\frac{8\,000}{x}+C\\&=\frac{8\,000}{n}+500n+C\\&=500\left(\frac{16}{n}+n\right)+C\\&=500\left(\frac{4}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)^2+4\,000+C\\&\geqslant4\,000+C,\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{4}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$，即 $n=4$ 时，总费用最少，故以每年进货 4 次为宜.



例 2　电声器材厂在生产扬声器的过程中，有一道重要的工序：使用 AB 胶黏合扬声器中的磁钢与夹板. 长期以来，由于对 AB 胶的

用量没有一个确定的标准，经常出现用胶过多，胶水外溢；或用胶过少，产生脱胶，影响了产品质量. 经过实验，已有一些恰当用胶量的具体数据(见表 4-3).

表 4-3

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
磁钢面积/cm²	11.0	19.4	26.2	46.6	56.6	67.2	125.2	189.0	247.1	443.4
用胶量 /g	0.164	0.396	0.404	0.664	0.812	0.972	1.688	2.86	4.076	7.332

现在需要提出一个既科学又简便的方法来确定磁钢面积与用胶量的关系.

解 我们取磁钢面积 x 为横坐标、用胶量 y 为纵坐标，建立直角坐标系. 根据上表数据在直角坐标系中描点，得出图 4-11.

信息技术建议

可以利用信息技术直接拟合出函数图像并求出函数解析式，具体操作见本节的“信息技术应用”栏目.

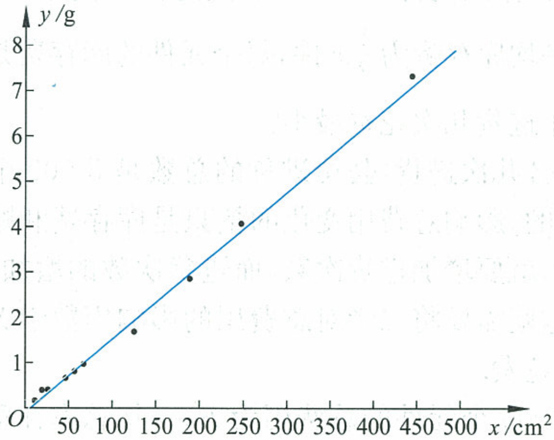


图 4-11

从图中我们清楚地看到这些点基本上分布在一条直线附近. 画出这条直线，使图上的点比较均匀地分布在直线两侧. 用函数 $y=ax+b$ 表示用胶量与磁钢面积的关系.

取点(56.6, 0.812), (189.0, 2.86), 将它们的坐标代入 $y=ax+b$, 得方程组

$$\begin{cases}0.812=56.6a+b,\\ 2.86=189.0a+b.\end{cases}$$

解得 $a=0.015\,47,\ b=-0.063\,50.$

这条直线是

$$y=0.015\,47x-0.063\,50^{❶}.$$

❶如果取另外两点代入 $y=ax+b$，会得到不同的直线，哪条直线更恰当？在实际问题中还要提出误差要求，用其他已知数据或新测数据与直线比较，检验误差，符合要求即可.

通过一些数据寻求事物规律，往往是通过绘出这些数据在直角坐标系中的点，观察这些点的整体特征，看它们接近我们熟悉的哪一种函数图像，选定函数形式后，将一些数据代入这个函数的一般表达式，求出具体的函数表达式，再做必要的检验，基本符合实际，就可以

确定这个函数基本反映了事物规律.这种方法称为数据拟合.在自然科学和社会科学中,很多规律、定律都是先通过实验,得到数据,再通过数据拟合得到的.

练 习

某商店进了一批服装,每件进价为60元.每件售价为90元时,每天售出30件.在一定的范围内这批服装的售价每降低1元,每天就多售出1件.请写出利润(元)与售价(元)之间的函数关系式,当售价是多少元时,每天的利润最大?

2.3　函数建模案例

问题提出

现在许多家庭都以燃气作为烧水做饭的燃料,节约用气是非常现实的问题.怎样烧开水最省燃气?

省燃气的含义就是烧开一壶水的燃气用量少.一般来说,烧水时是通过燃气灶上的旋钮控制燃气流量的,流量随着旋钮位置的变化而变化.由此可见,燃气用量与旋钮的位置是函数关系.于是,问题就是:旋钮在什么位置时烧开一壶水的燃气用量最少?

分析理解

设想,当旋钮转角非常小时,燃气流量也非常小,甚至点火后的热量不足以将一壶水烧开,如果一直烧下去,燃气用量将无止境;随着旋钮转角增大,即燃气流量渐渐增大,烧水用气量则会有所减小.但是,旋钮转角很大时,燃气不一定充分燃烧,过分的热量不能充分作用于水壶,会产生浪费,烧一壶开水的燃气用量又会比较大.旋钮在什么角度用气量最小呢?我们不可能测出所有旋钮转角对应的燃气用量值,于是,试图经过实验测出几组数据,然后用这些数据拟合函数,得到所求.

一、建立数学模型解决问题的方案

1. 给定燃气灶和一只水壶. 因为燃气灶关闭时，燃气旋钮的位置为竖直方向，我们把这个位置定为 0°；燃气开到最大时，旋钮转了 90°. 选择燃气灶旋钮的五个位置（当然多选一些更好）18°，36°，54°，72°，90°，见图 4-12.

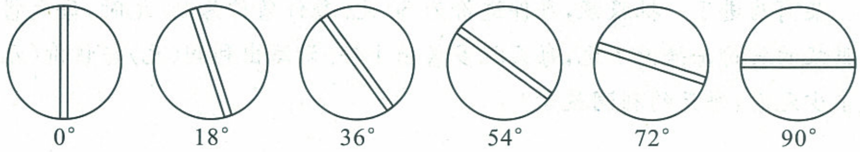


图 4-12

2. 在选好的五个位置上，分别记录烧开一壶水所需的时间和所用的燃气量.

3. 利用数据拟合函数，建立旋钮位置与烧开一壶水燃气用量的函数解析式.

4. 利用函数解析式求最小用气量.

5. 对结果的合理性作出检验分析.

二、实验

为了减少实验误差，要保证每次烧水时水壶的起始温度是一样的. 所以，在做实验之前，先用这只水壶烧开一壶水，然后把水倒掉，随即开始做实验，记录相关数据，得到表 4-4.

表 4-4　燃气旋钮在不同位置时烧开一壶水所需燃气量

项　目 / 位　置	燃气表开始时读数/m^3	燃气表水开时读数/m^3	所用燃气量/m^3
18°	9.080	9.210	0.130
36°	8.958	9.080	0.122
54°	8.819	8.958	0.139
72°	8.670	8.819	0.149
90°	8.498	8.670	0.172

用表内数据，在直角坐标系上标出旋钮位置与烧开一壶水燃气用量的点（如图 4-13）.

三、拟合函数

从图 4-13 可以看出，5 个点显示出随着旋钮的角度逐渐增大，燃气用量有一个从大到小又从小到大的过程. 在我们学习过的函数图像中，二次函数的图像与之最接近，可以用二次函数近似地表示这种变化.

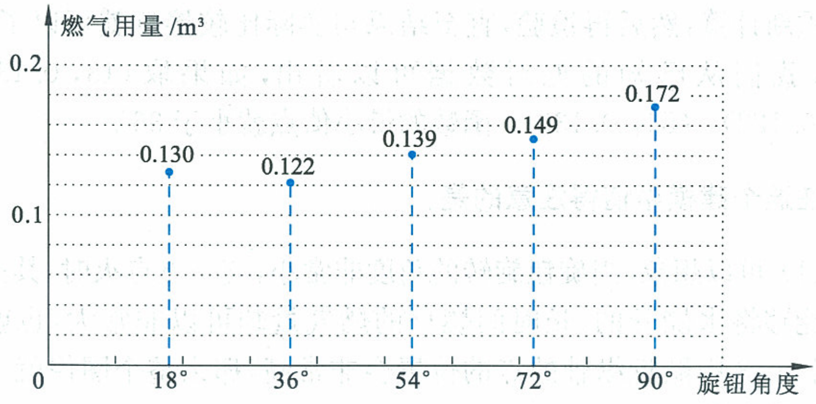


图 4-13

设函数式为 $y=ax^2+bx+c$，取三对数据即可求出表达式的系数，不妨取(18，0.130)，(36，0.122)，(90，0.172)，得方程组

$$\begin{cases}18^2a+18b+c=0.130,\\36^2a+36b+c=0.122,\\90^2a+90b+c=0.172.\end{cases}$$

解得　$a=1.9033\times10^{-5}$，$b=-1.4722\times10^{-3}$，$c=1.5033\times10^{-1}$.

则函数式为

$$y=1.9033\times10^{-5}x^2-1.4722\times10^{-3}x+1.5033\times10^{-1}.$$

四、求最小用气量

求燃气用量最少时的旋钮位置，实际上是求函数

$$y=1.9033\times10^{-5}x^2-1.4722\times10^{-3}x+1.5033\times10^{-1}$$

的最小值点 x_0.

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1.4722\times10^{-3}}{2\times1.9033\times10^{-5}}\approx39(°).$$

即燃气用量最少时的旋钮位置是旋转 39°的位置. 这时的用气量大约是

$$\begin{aligned}y_0&=\frac{4ac-b^2}{4a}\\&=\frac{4\times1.9033\times10^{-5}\times1.5033\times10^{-1}-(1.4722\times10^{-3})^2}{4\times1.9033\times10^{-5}}\\&\approx0.1218(\mathrm{m}^3).\end{aligned}$$

五、检验分析

取旋转 39°的旋钮位置，烧一壶开水，所得实际用气量是不是0.121 8 m³？

如果基本吻合，就可以依此作结论了.

如果相差大，特别是这个用量大于 0.122(实验数据中的最小值)，最小值点就肯定不是 39°，说明三对数据取得不好，可以换另外

的点重新计算，然后再检验，直至结果与实际比较接近就可以了. 实际上，我们从已知的五对数据可以看出，如果取(18，0.130)，(36，0.122)，(54，0.139)，函数的最小值点就小于 36°.

在这个建模中值得注意的是：

(1) 可以想象，当旋钮旋转的角度非常小，有一点点火时，其火力是不能够将水烧开的，长时间燃火的燃气量却可以非常大，也就是说，图 4-13 中贴近纵轴的点的位置会非常高，那么整个图像就不是二次函数图像了.

实际上，我们在前面说“用二次函数图像近似地表示这种变化”是有局限性的，尽管是“近似地表示”，也只能说在 18°～90°这个局部比较适用，而燃气最少用量恰在这个局部取得，于是选用二次函数模型是可行的.

(2) 在做实验时，每次烧水前的水壶温度真的完全一样吗？读数真的准确吗？我们在建立函数模型之前，主观上作了这样的假设：实验是足够准确的，所得的实验数据是精确的.

另外，尽管假设每次实验是准确的，但是实验都受客观环境的影响，不能保证环境是稳定的. 仅根据一组实验数据就建立数学模型可能与实际有较大误差，可以重复做几次实验，取几次实验数据的平均值，误差就减小了.

抽象概括

用数学思想、方法、知识解决实际问题的过程叫作数学建模. 通过上例，可以用图 4-14 表示数学建模的过程.

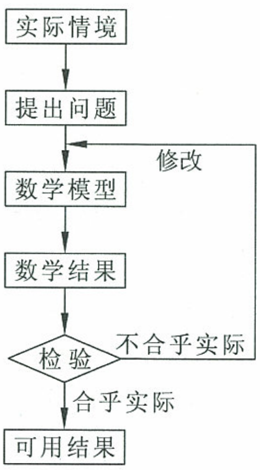


图 4-14

信息技术应用

收集数据，建立函数模型

我们生活中的变化现象，大部分是难以根据已知理论直接建立数学模型的，但如果能够收集变化过程中的相关数据，就可以借助于信息技术建立起大致反映变化规律的函数模型.

下面介绍如何利用数学软件或者图形计算器建立函数模型.

例如，在实验室做了恒温下气体体积与压强关系的实验，通过改变压强后测量气体体积，得到以下数据(如表 4-5)，请建立两者的函数关系，并预测压强为 45 Pa 时的气体体积.

表 4-5

压强/Pa	20	30	40	50	60	70	80
体积/m^3	83	55	42	33	28	24	21

利用图形计算器建立函数模型的基本步骤：

(1) 在图形计算器中输入数据，作出散点图(如图 4-15).

(2) 观察散点图的分布情况，根据图像选择一个能够大致反映其变化规律的函数模型，计算器便可以立即求出函数表达式，并画出这个函数的图像. 如图 4-16、图 4-17 是利用函数 $y=ax^b$ 拟合的结果，图 4-18、图 4-19 是利用二次函数拟合的结果.

(3) 根据实际情况，进一步观察、分析函数拟合的情况.

(4) 找出符合要求的函数模型，利用此数学模型，进行预测(如图 4-20).

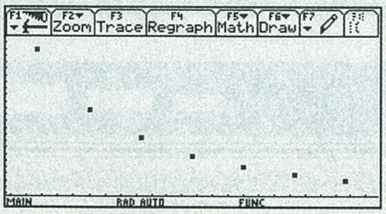


图 4-15

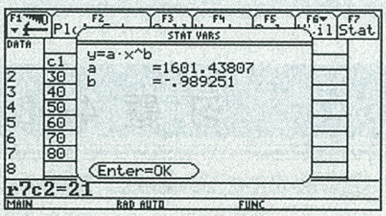


图 4-16

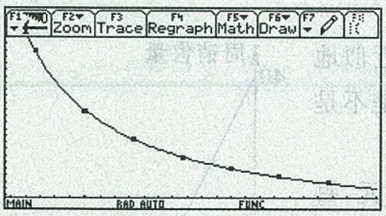


图 4-17

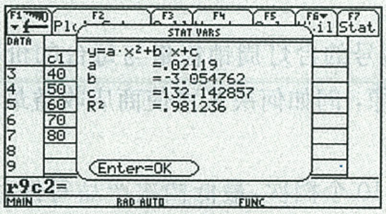


图 4-18

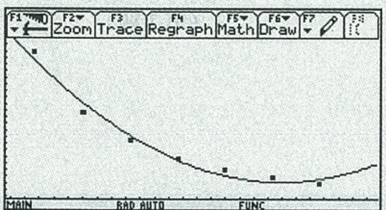


图 4-19

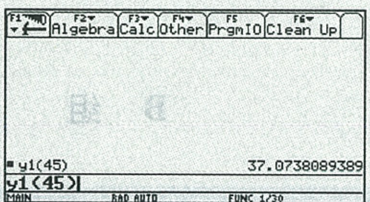


图 4-20

利用信息技术建立函数模型的过程简单、方便，形象直观，体现信息技术的优势，是传统手段难以达到的. 所以利用信息技术结合我们学过的函数模型，就可以探索生活中一些复杂现象的变化规律.

请同学们思考对于函数 $y=ax^b$ 和二次函数，哪个函数模型更符合实际呢？还有其他更好的函数模型吗？谈谈你的看法.

练 习

下面是燃气灶旋钮在不同位置时烧开一壶水所需的时间及燃气用量表.

项目 位置	开始时刻	水开时刻	燃气表开始时读数/m^3	燃气表水开时读数/m^3
18°	6:06	6:25	9.080	9.210
36°	5:49	6:05	8.958	9.080
54°	5:35	5:49	8.819	8.958
72°	5:22	5:34	8.670	8.819
90°	5:09	5:19	8.498	8.670

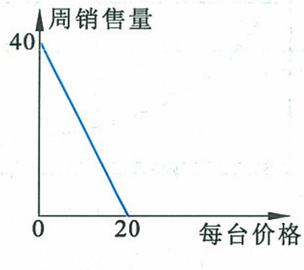
(1) 分析旋钮在不同位置时烧水用时间的规律，确定最省时的旋钮位置.

(2) 用燃气烧水，能否做到最省时又最省气？

习 题 4—2

A 组

1. 一灯具商店发现，某种型号的台灯周销售量与每台的价格间近似地构成如图所示的关系图像，问如何决策可使商店收益最大？是不是商品价格越高收益越大？

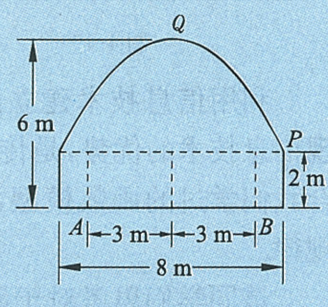


(第1题)

2. 一类产品按质量共分为 10 个档次，最低档次产品每件利润 8 元，每提高一个档次每件利润增加 2 元，一天的工时可以生产最低档次产品 60 件，提高一个档次将减少 3 件，求生产何种档次的产品获利最大？

B 组

1. 如图，一隧道内设双行线公路，其截面由一长方形和一抛物线构成. 为保证安全，要求行驶车辆顶部(设为平顶)与隧道顶部(抛物线)在竖直方向上的高度之差至少为 0.5 m. 若行车道总宽度 AB 为 6 m，请计算通过隧道的车辆的限制高度(精度为 0.1 m).



(第1题)

2. 某工厂接到一任务，需要加工 6 000 个 P 型零件和 2 000 个 Q 型零件. 这个厂有 214 名工人，他们每一个人用以加工 5 个 P 型零件的时间可以加工 3 个 Q 型零件，将这些工人分成两组同时工作，每组加工一种型号的零件. 为了在最短的时间内完成这批任务，应怎样分组？

阅读材料

函数与中学数学

20世纪以前的中学代数的主要内容是“数、式、方程”，其中方程占据着中心位置，例如，一元一次方程，一元二次方程，二元一次方程组等. 20世纪初，在英国数学家贝利(Perry, J. 1850—1920)和德国数学家克莱因(Klein, C. F. 1849—1925)等人的大力倡导和推动下，函数进入了中学数学，这不仅是中学数学教育改革的一件大事，也是整个数学教育改革的一个里程碑.

中学阶段应该学习什么样的数学内容呢？他们主张应该用新的内容取代传统内容，其中克莱因的思想和主张具有划时代的意义. 作为哥根廷大学首席教授的他，提出了以函数概念和思想统一数学教育的内容，他认为：“函数概念，应该成为数学教育的灵魂. 以函数概念为中心，将全部数学教材集中在它的周围，进行充分的综合.”他主张用近代数学的新观点改革传统的中学数学教学内容，例如，用几何变换(变换是一种特殊的映射)的观点改革传统的几何内容. 他的这些数学教育思想在数学教育历史上占有重要的地位. 后来在1908年的第四届数学家大会上克莱因当选为第一届国际数学教育委员会主席.

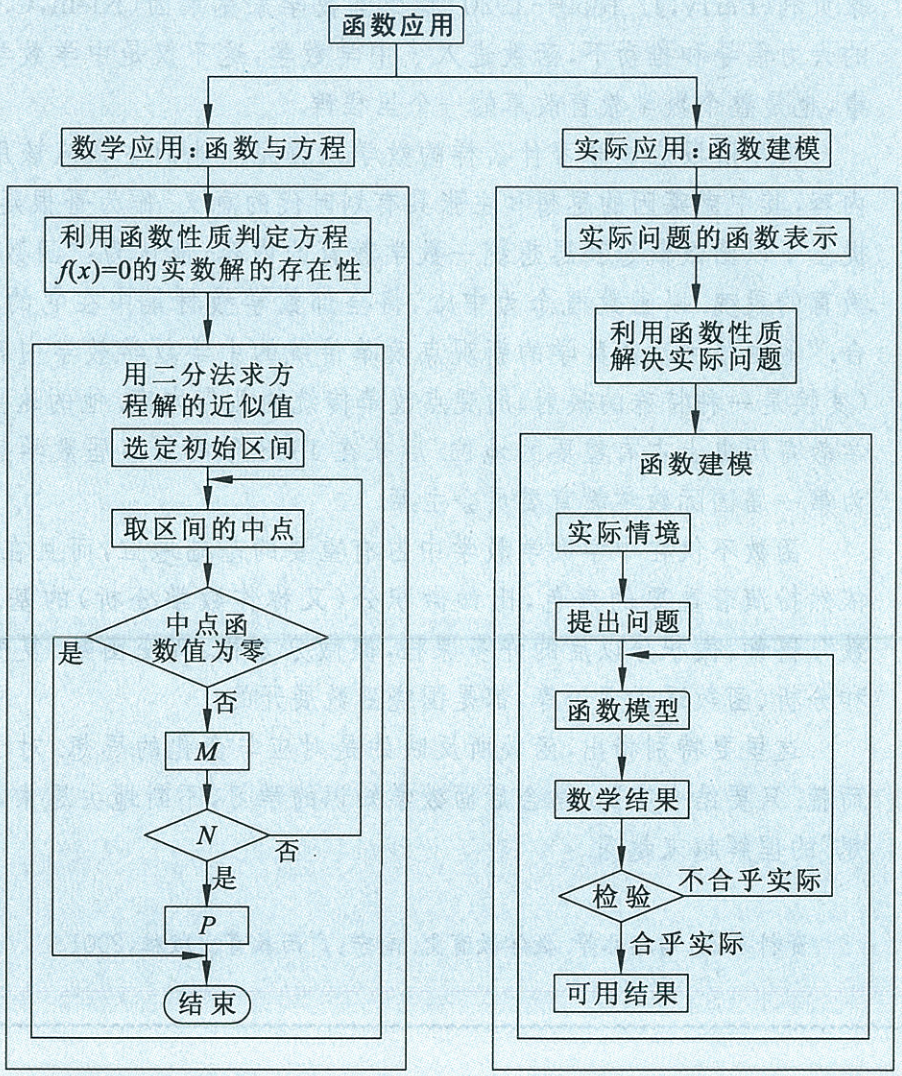
函数不仅在中学数学教学中占有重要的基础地位，而且在今后的数学学习中，依然扮演着重要的角色，比如微积分(又称作数学分析)的基本研究对象就是“函数”. 再如，微积分以后的许多课程，像微分方程、实变函数、复变函数、泛函分析、调和分析、函数逼近理论等，都是围绕函数展开的.

这里要特别指出，函数所反映的是对应与变化的思想. 对于它的理解不能一蹴而就. 只要结合实际，结合后面数学知识的学习，不断地去思索，我们就会对“函数思想”的理解越来越深.

资料来源：马忠林等. 数学教育史. 南宁：广西教育出版社，2001

◆ 本章小结

一、内容提要



二、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求

（1）了解函数与方程之间的内在联系；

（2）理解运用二分法求方程近似解的方法；

（3）体验函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型；初步运用函数思想理解和处理现实生活和社会中的简单问题；

(4) 了解数学建模的基本步骤，体会数学建模的基本思想.

2. 需要注意的问题

(1) 函数与方程有着紧密的联系. 有了函数的观点，对方程的认识会更加深刻，通过这样的学习，有助于体会数学知识之间的内在联系和相互作用.

(2) 用二分法选定初始区间时，往往通过分析函数图像的变化趋势，并通过试验确定端点；二分法只是求方程近似解的一种方法，内分点是区间长的二分之一，类似的方法还可以把内分点取在区间长的 0.618 处，即0.618 法 .

(3) 读题是解决实际问题的重要环节. 一般的实际问题的叙述都比较长，需要逐字逐句地把问题看懂，这是建立数学模型的前提.

(4) 用数学解决实际问题的体验，提示我们在学数学时要注意问题背景，更深刻地理解数学的价值.

复习题四

A 组

1. 通过比较函数的增长速度，判断 $\log_3 x = x - 5$ 存在两个实数解.
2. 判断方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $[1, 1.5]$ 内有无实数解；如果有，求出一个近似解(精度为0.1).

B 组

1. 证明方程 $x^4 - 4x - 2 = 0$ 在区间 $[-1, 2]$ 内至少有两个实数解.
2. 为了估计山上积雪融化后对下游灌溉的影响，积累了连续 10 年的观测值如下：

年序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
最大积雪深度(x)/m	5.1	3.5	7.1	6.2	8.8	7.8	4.5	5.6	8.0	6.4
灌溉面积(y)/hm^2	1 906.7	1 286.7	2 700.0	2 373.3	3 260.0	3 000.0	1 946.7	2 273.3	3 113.3	2 493.3

试估计一年最大积雪深度 4 m 时，下游可能灌溉面积是多少？

C 组

1. 渔场中鱼群的最大养殖量为 m，为了保证鱼群的生长空间，实际养殖量 x 小于 m，以便留出适当的空闲量. 已知鱼群的年增长量 y 和实际养殖量与空闲率(空闲率是空闲量与最大养殖量的比值)的乘积成正比，比例系数为 $k(k>0)$.
   (1) 写出 y 关于 x 的函数关系式，并指出该函数的定义域；
   (2) 求鱼群年增长量的最大值；
   (3) 当鱼群年增长量达到最大值时，求 k 的取值范围.
2. 一家化工厂从今年一月起，若不改善生产环境，按现状生产，每月收入为 70 万元，同时将受到环保部门的处罚，第一个月罚 3 万元，以后逐月递增 2 万元. 如果从今年一月起投资 500 万元增加回收净化设备(改造设备时间不计)，一方面可以改善环境，另一方面也可以大大降低原料成本. 据测算投产后的前 5 个月中的累计净收入是生产时间 n(以月为单位)的二次函数，生产前 1,2,3 个月的累计收入分别可达 101 万元、204 万元和 309 万元，以后稳定在第 5 个月的水平. 同时该厂不但不受处罚，而且还将得到环保部门一次性 100 万元的奖励. 问经过多少个月，投资开始见效？即投资改造后的纯收入多于不改造时的纯收入.

探究活动

同种商品不同型号的价格问题

说明

探究活动仅供选择、参考.

一、问题情境和探究任务

问题情境 在商场中，我们能看到这样的情形：同种商品会有大小不同的型号，价格各不相同，比如某品牌牙膏有：40 g，120 g，165 g等几种包装，价格分别为：3.70 元、9.30 元、12.60 元.

任务 1 调查同种商品不同型号的价格，并研究该商品价格关于型号的函数关系；

任务 2 检验你建立的商品价格模型，并尝试对结果进行解释；

任务 3 对你的结论进行实用价值分析，如对消费者购买商品有无参考价值，此规律对其他商品价格是否适用等.

二、实施建议

1. 可以组成学习探究小组，集体讨论，互相启发，形成可行的探究方案，独立调查、分析、研究，完成每个人的“成果报告”.

2. 对完成任务 1 的建议.

对影响商品销售价格的因素进行分析，选择主要因素，忽略次要的因素；研究主要因素与价格的关系，从而得到一般的价格规律.

3. 对完成任务 2 的建议.

可以选择一种建立函数关系式时未被使用的型号价格，将利用模型推算出的价格与该型号商品的实际售价进行比较，考虑模型是否能进一步改进，如何改进.

4. 对完成任务 3 的建议.

在调查商品价格时，可以向售货员调查不同型号商品的销售情况，与自己的分析结论进行比较，考虑是否需要进一步的研究. 考虑你得到的结论的适用条件，可举例说明.

5. “成果报告”的书写建议.

成果报告可以下表形式呈现.

表 “同种商品不同型号的价格问题”探究学习成果报告表

年级________班____ 完成时间________

<table>
<tr><td colspan="2">1. 课题组成员、分工、贡献</td></tr>
<tr><td>成员姓名</td><td>分工与主要工作或贡献</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">2. 探究的过程和结果</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. 参考文献</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. 成果的自我评价(请说明方法或原理的合理性、特色或创新点、不足之处等)</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. 拓展(选做):在解决问题的过程中发现和提出的新问题,可以延伸或拓展的内容;得到的新结果或猜想等</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. 体会:描述在工作中的感受</td></tr>
</table>

6. 成果交流.

建议以小组为单位,选出代表,在班级中报告研究成果,交流研究体会.

7. 评价建议.

采用自评、互评、教师评价相结合的形式,善于发现别人工作中的特色,以下几个方面可着重考虑:

(1) 调查、求解过程和结果是否合理、清楚、简捷;

(2) 独到的思考和发现;

(3) 恰当的使用工具;

(4) 合理、简捷的算法;

(5) 提出有价值的求解设计和有见地的新问题;

(6) 发挥组员的特长,体现合作学习的效果.

附录 1

部分数学专业词汇中英文对照表

中文	英文
集合	set
元素	element
属于	belong to
数集	number set
有理数	rational number
无理数	irrational number
实数	real number
包含	contain
子集	subset
相等	equality
全集	universal set
交集	intersection set
空集	empty set
并集	union set
补集	complementary set
Venn 图	Venn diagram
变量	variable
对应	correspondence
函数	function
映射	mapping
初等函数	elementary function
运算	operation
定义域	domain
值域	range
函数的图像	graph of function
分段函数	piecewise function
二次函数	quadratic function
图形计算器	graphic calculator
科学计算器	scientific calculator
数学软件	mathematics software
反函数	inverse function
单调性	monotonicity

上升函数	increasing function
下降函数	decreasing function
单调函数	monotone function
最大值	greatest value
最小值	least value
偶函数	even function
奇函数	odd function
幂	power
幂函数	power function
指数	exponent
对数	logarithm
指数函数	exponential function
对数函数	logarithmic function
自然对数	natural logarithm
常用对数	common logarithm
数学模型	mathematical model
近似解	approximate solution
方程	equation
图像	graph
零点	zero point
数学文化	mathematics culture

附录 2

信息检索网址导引

基础教育教材网

http://www.100875.com.cn/

简介：基础教育教材网是由北京师范大学出版社创建的一个综合性网站，内容主要涉及新课程标准改革研究、课题研究、教学研究、评价研究和教学资源等几个方面．网站在提供教学实例、教学课件的同时，也给教师和学生提供了交流互动的宽松平台．

后　记

本套教材是按照国家教育部于 2003 年 4 月颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的. 我们在编写过程中强调了数学课程的基础性和整体性，突出了数学的思想性和应用性，尊重学生的认知特点，创造多层次的学习活动，为不同的学生提供不同的发展平台，注意发挥数学的人文教育价值，好学好用.

教材的建设是长期、艰苦的任务，每一位教师在教学实践中要自主地开发资源，创造性地使用教材. 我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作，对教材的逐步完善提供有力的支持，促进基础教育课程改革的深入发展.

本套教材的编委会组成如下(按姓氏笔画排序)：

王希平、王尚志、王建波、任志瑜、刘美仑、吕世虎、吕建生、李亚玲、李延林、汪香志、严士健、张丹、张饴慈、张思明、姚芳、赵大悌、徐勇、戴佳珉.

参加本册教材编写的还有(按姓氏笔画排序)：

王尚志、李大永、张饴慈、胡琴竹、徐德前.

由于时间仓促，教材中的错误在所难免，恳请广大使用者批评指正.

北京师范大学出版社