经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学 5（必修）

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志

副 主 编　张饴慈　李延林　张思明

本册主编　王尚志　戴佳珉

编写人员（按 姓 氏 笔 画 排 序）

王尚志　李军洪　张思明

洪建明　康　宇　戴佳珉

北京師範大學出版社

·北 京·

前　　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法：“授之以鱼，不如授之以渔”，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高“自学能力”最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由 26 册书组成：必修教材有 5 册；选修系列 1 有 2 册，选修系列 2 有 3 册，它们体现了发展的基本方向；选修系列 3 有 6 册，选修系列 4 有 10 册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为 A，B 两组；还有一类是复习题，分为 A，B，C 三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程. 另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解. 教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦.

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811，58802790.

目　　录

第一章 数 列

这是科学史上的一个真实故事！

下面一列数

$$3,6,12,24,48,96,192,\cdots$$

同学们可能并不在意，但普鲁士天文学家提丢斯（Titius，1729—1796）却把它和下面的表格联系起来，推导出从太阳到行星距离的经验定律，并探明了一些新的行星（或小行星）！

他发现：

1. 每个数字恰好是前一个数字的 2 倍；

2. 如果把 0 加在这一列数字的最前面，我们再做一个简单的运算：每个数加上 4，然后再除以 10，就得出另一列数字

$$0.4,0.7,1.0,1.6,2.8,5.2,10.0,19.6,\cdots$$

这可不是一列简单的数字：第一个数字表示了太阳到其最近的行星——水星的近似距离；第二个数字表示太阳到金星的近似距离……依此类推，他得到了一张出色的表：

距离 行星 类别	水星	金星	地球	火星	?	木星	土星	?	?
实际距离	0.39	0.72	1.0	1.52	?	5.2	9.5	?	?
计算距离	0.4	0.7	1.0	1.6	2.8	5.2	10.0	19.6	…

注：表中数据的单位为天文单位，1 个天文单位等于太阳到地球的距离，约为149 597 870 km.

表中留下了一些空格. 1781 年发现的天王星(19.2)，差不多恰好处在定律所预言的轨道(19.6)上. 于是，天文学家们开始在距离太阳约为 2.8 个天文单位的区域寻找一个尚未被发现的行星. 1801 年意大利天文学家比亚兹果然在这个距离发现了谷神星，它与太阳的近似距离为 2.7 个天文单位.

小小一列数字真不简单.

本章主要学习有关数列的基本知识，建立等差数列和等比数列两种模型，探索它们的基本数量关系，感受它们的应用. 相信你会有更大的收获！

§1　数　列

1.1　数列的概念

实例分析

我们来看下面的例子：

(1) 一个工厂把所生产的钢管堆成图 1-1 的形状.

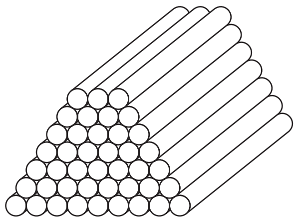


图　1-1

从最上面的一排起，各排钢管的数量依次是

3，4，5，6，7，8，9.　①

(2)GDP(Gross Domestic Product)为国内生产总值. 分析各年GDP 数据，找出增长规律，是国家制定国民经济发展计划的重要依据. 根据中华人民共和国 2002 年国民经济和社会发展统计公报(如图 1-2)，我国(1998～2002 年)这五年 GDP 值(亿元)依次排列如下：

78 345，82 067，89 442，95 933，102 398.　②

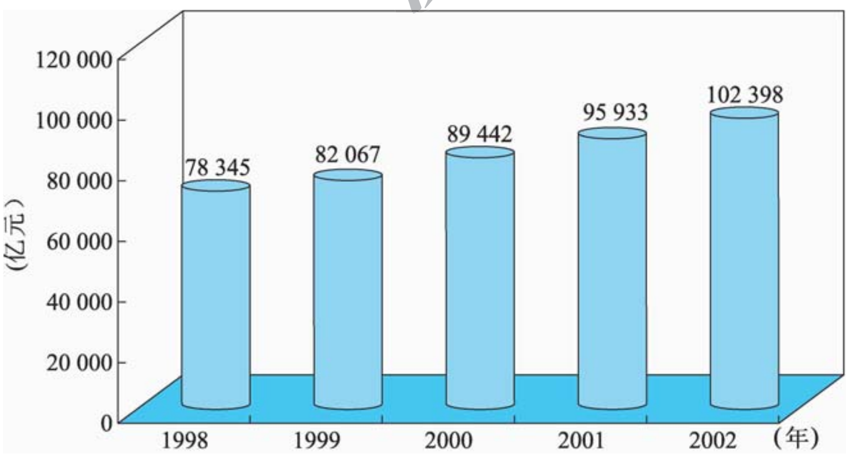


图　1-2

(3)“人口问题”是我国最大的社会问题之一，对人口数量的估计和发展趋势的预测是我们制定一系列相关政策的基础. 新中国成立后，我国已进行了五次全国人口普查，历次全国人口普查公报数据资料见表 1-1，五次普查人口数量(百万)依次排列为

601.93，723.07，1 031.88，1 160.02，1 295.33.　③

表 1-1

年　份	1953	1964	1982	1990	2000
人口数/百万	601.93	723.07	1 031.88	1 160.02	1 295.33

(4)如图 1-3 所示，正弦函数 $y=\sin x$ 的图像在 y 轴左侧所有最低点从右向左，它们的横坐标依次排成一列数

$$-\frac{\pi}{2},-\frac{5\pi}{2},-\frac{9\pi}{2},-\frac{13\pi}{2},\cdots \quad ④$$

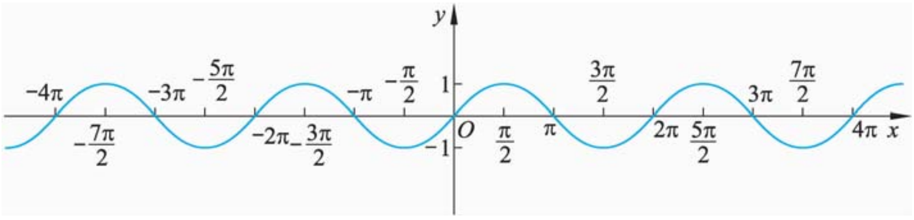


图　1-3

(5)正奇数 1，3，5，7，…的倒数排成一列数

$$1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\cdots \quad ⑤$$

(6)某人 2006 年 1～12 月工资，按月顺序排列为

$$2\ 100,2\ 100,2\ 100,\cdots,2\ 100. \quad ⑥$$

一般地，按一定次序排列的一列数叫作**数列**，数列中的每一个数叫作这个数列的**项**. 数列一般形式可以写成

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$$

简记为数列$\{a_n\}$，其中数列的第 1 项 a_1，也称**首项**；a_n 是数列的第 n 项，也叫数列的**通项**.

如数列⑤中，首项 $a_1=1$；第 10 项 $a_{10}=\frac{1}{19}$；第 n 项(通项)$a_n=\frac{1}{2n-1}$.

像数列①，②，③，⑥这样的项数有限的数列，称为**有穷数列**；像数列④，⑤这样的项数无限的数列，称为**无穷数列**.

上面的数列⑤中，每一项的序号 n 与这一项 a_n 有下面的对应关系：

$$\begin{array}{cccccccc}
\text{序号} & 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots, & n, & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\text{项} & 1, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{7}, & \cdots, & \frac{1}{2n-1}, & \cdots
\end{array}$$

可以看出，这个数列的每一项的序号 n 与这一项 a_n 的对应关系可用如下公式表示：

$$a_n=\frac{1}{2n-1}.$$

这样，只要依次用序号 1，2，3，…代替公式中的 n，就可以求出该数列相应的项.

抽象概括

实际上,对任意数列$\{a_n\}$,其每一项的序号与该项都有对应关系,见表 1-2.

表 1-2

序号	1	2	3	4	…	n	…
项	a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_n	…

因此数列也可以看作定义域为正整数集 $\mathbf{N}_+$(或它的有限子集)的函数,当自变量从小到大依次取值时,该函数对应的一列函数值就是这个数列.

如果数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系可以用一个式子表示成 $a_n=f(n)$,那么这个式子就叫作这个数列的**通项公式**,数列的通项公式就是相应函数的解析式.

> **注　意**
> 不是所有数列都能写出通项公式.

例如,数列①的一个通项公式是

$$a_n=n+2,n\in\{1,2,3,\cdots,7\};$$

数列④的一个通项公式是

$$a_n=-\frac{(4n-3)\pi}{2}\quad(n\in\mathbf{N}_+).$$

例 1　根据下面的通项公式,分别写出数列的前 5 项.

(1)$a_n=\dfrac{n}{n+2}$;　　　　(2)$a_n=(-1)^n\cos\dfrac{n\pi}{4}$.

解　(1)在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$,得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{7};$$

(2)在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$,得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 2　写出下面数列的一个通项公式.

(1) 3,5,7,9,…　　　　(2)1,2,4,8,…

(3)9,99,999,9 999,…

解　(1)观察知,这个数列的前 4 项都是序号的 2 倍加 1,所以它的一个通项公式为

$$a_n=2n+1;$$

(2)这个数列的前 4 项可以写成 $2^0,2^1,2^2,2^3$,所以它的一个通项公式为

$$a_n=2^{n-1};$$

(3)这个数列的前 4 项可以写成 10－1，100－1，1 000－1，10 000－1，所以它的一个通项公式为

$$a_n=10^n-1.$$

练 习

1. (口答)已知数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项.

   (1)$a_n=2n-1$；　　　　(2)$a_n=\dfrac{3+(-1)^n}{n}$.

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=25-2n$，在下列各数中，(　　)不是$\{a_n\}$的项.

   A. 1　　B. －1　　C. 2　　D. 3

3. 数列$\{a_n\}$的前 4 项依次是 20，11，2，－7，$\{a_n\}$的一个通项公式是(　　).

   A. $a_n=9n+11$　　　　B. $a_n=-9n+29$

   C. $a_n=15.5+(-1)^{n+1}4.5$　　　　D. $a_n=9n-16$

4. 写出下面数列的一个通项公式.

   (1)2，4，6，8，…　　　　(2)10，20，30，40，…

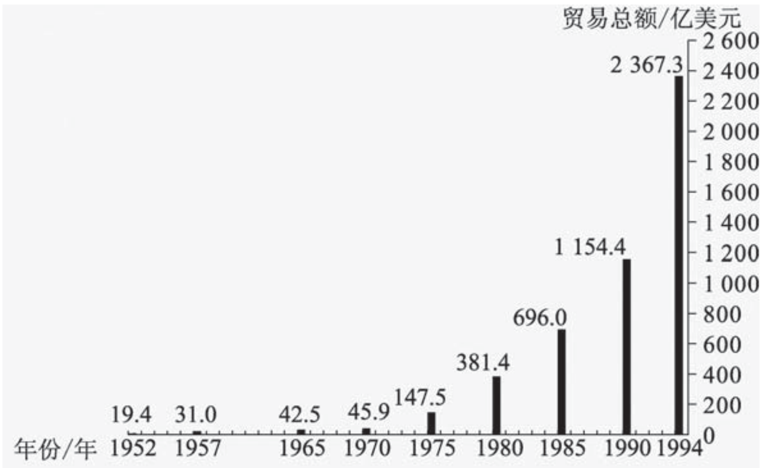
1.2 数列的函数特性

实例分析

新中国成立后，我国 1952～1994 年间部分年份进出口贸易总额(亿美元)数据排成一数列：

19.4，31.0，42.5，45.9，147.5，381.4，696.0，1 154.4，2 367.3.

此数列也可以用图直观表示(如图 1-4).



中国进出口贸易总额的变化

图 1-4

由图 1-4 可以看出我国 1952～1994 年部分年份，各时期进出口贸易总额的增长变化情况.

我们可以把一个数列用图像来表示：

图 1-5 是数列①：3，4，5，6，7，8，9 的图像；

图 1-6 是数列⑤：1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{7}$，…的图像；

图 1-7 是数列⑥：2 100，2 100，…，2 100 的图像.

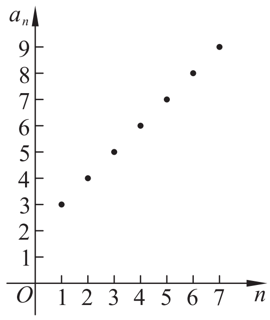


图　1-5

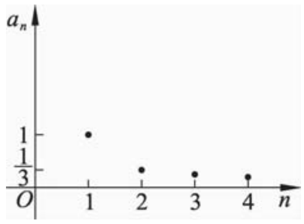


图　1-6

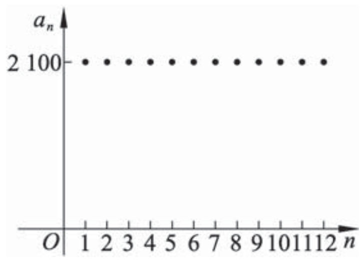


图　1-7

从图中可以看出，数列①的函数图像上升，称这样的数列为递增数列；数列⑤的函数图像下降，称这样的数列为递减数列；数列⑥称为常数列.

抽象概括

一般地，一个数列$\{a_n\}$，如果从第 2 项起，每一项都大于它前面的一项，即 $a_{n+1}>a_n$，那么这个数列叫作**递增数列**.

如果从第 2 项起，每一项都小于它前面的一项，即 $a_{n+1}<a_n$，那么这个数列叫作**递减数列**.

如果数列$\{a_n\}$的各项都相等，那么这个数列叫作**常数列**.

例 3　判断下列无穷数列的增减性.

(1)2，1，0，−1，…，3−n，…　　(2)$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$\frac{n}{n+1}$，…

解　(1)设 $a_n=3-n$，那么

$$a_{n+1}=3-(n+1)=2-n,$$

$$a_{n+1}-a_n=(2-n)-(3-n)=-1,$$

所以 $a_{n+1}<a_n$，因此数列$\{a_n\}$是递减数列.

(2)设 $b_n=\frac{n}{n+1}$，那么

$$b_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)+1}=\frac{n+1}{n+2},$$

$$b_{n+1}-b_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0,$$

所以 $b_{n+1}>b_n$，因此这个数列是递增数列.

例 4　作出数列$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，…，$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，…的图像，并分析数列的增减性.

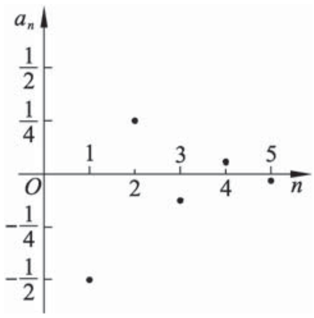


图　1-8

解　图 1-8 是这个数列的图像，数列各项的值负正相间，表示数列的各点相对于横轴上下摆动，它既不是递增的，也不是递减的.

例 5 一辆邮车每天从 A 地往 B 地运送邮件，沿途(包括 A，B)共有 8 站，从 A 地出发时，装上发往后面 7 站的邮件各一个，到达后面各站后卸下前面各站发往该站的一个邮件，同时装上该站发往下面各站的邮件各一个. 试写出邮车在各站装卸完毕后剩余邮件个数所成的数列，画出该数列的图像，并判断该数列的增减性.

解 将 A，B 之间所有站按序 1，2，3，4，5，6，7，8 编号，通过计算，上面各站剩余邮件数依次排成数列：

$$7,12,15,16,15,12,7,0.$$

填写表 1-3.

表 1-3

站号	1	2	3	4	5	6	7	8
剩余邮件数	7	12	15	16	15	12	7	0

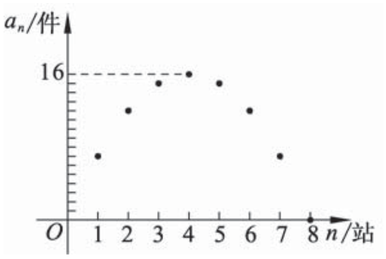


图 1-9

该数列的图像如图 1-9 所示.

它在{1，2，3，4}上是递增的，在{4，5，6，7，8}上是递减的.

练 习

1. 在 1984 年到 2004 年的 6 届夏季奥运会上，我国获得的金牌数依次排成数列：15，5，16，16，28，32. 试画出该数列的图像.
2. 已知下列数列$\{a_n\}$的通项 a_n，画出数列的图像，并判断数列的增减性.

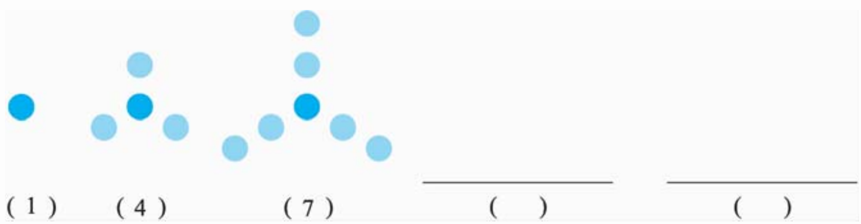
(1)$a_n=-n+1$； (2)$a_n=2^{n-1}$.

习 题 1—1

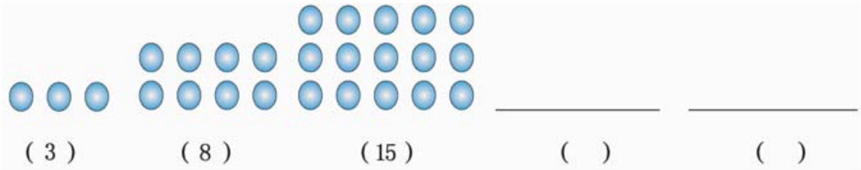
A 组

1. 根据下面的图形及相应的点数，在横线上面及括号中分别填上适当的图形和数，写出点数的通项公式.

(1)



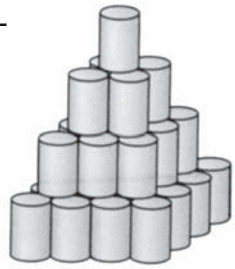
(2)



2. 根据数列的通项公式填表.

n	1	2	…	10	…		…	n
a_n			…		…	420	…	$n(n+1)$

3. 在商店里，如图分层堆砌易拉罐，最顶层放 1 个，第二层放 4 个，第三层放 9 个．如此下去，第六层放几个？



(第 3 题)

4. 求下列数列的一个通项公式.

(1)3，8，13，18，…

(2)5，50，500，5 000，…

5. 数列$\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=n^2-3n-28$，画出该数列的图像. 根据图像，判断从第几项起，这个数列是递增的.

6. 已知 $a_n=2n^2-15n+3$，画出数列的图像，求数列$\{a_n\}$的最小项.

B　组

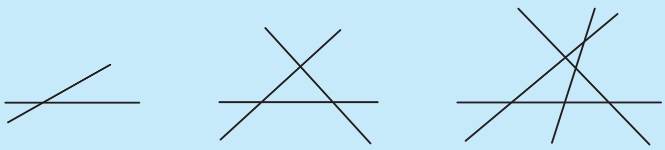
1. 求下列数列的一个通项公式.

(1)$-1,2,-3,4,\cdots$

(2)$\frac{1}{2},-\frac{4}{5},\frac{9}{10},-\frac{16}{17},\cdots$

2. 观察下列各图，并阅读图形下面的文字. 像这样，10 条直线相交，交点的个数最多是(　　).

A. 40 个　　B. 45 个　　C. 50 个　　D. 55 个



2条直线相交 最多有1个交点　　3条直线相交 最多有3个交点　　4条直线相交 最多有6个交点

(第 2 题)

§2 等差数列

2.1 等差数列

问题提出

考察下列三个数列的共同特征.

(1)一个剧场设置了 20 排座位，这个剧场从第 1 排起各排的座位数组成数列：

$$38,40,42,44,46,\cdots \qquad ①$$

这个剧场座位安排有何规律？

(2)全国统一鞋号中，成年女鞋的各种尺码(表示以 cm 为单位的鞋底的长度)由大至小可排列为

$$25,24\frac{1}{2},24,23\frac{1}{2},23,22\frac{1}{2},22,21\frac{1}{2},21, \qquad ②$$

这种尺码的排列有何规律？

(3)蓝白两种颜色的正六边形地面砖，按图 1-10 的规律拼成若干个图案，前 3 个图案中白色地面砖的块数依次为多少？

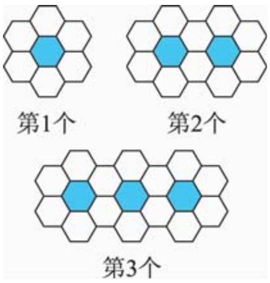


图 1-10

研究这些数列的特征及变化规律，可以发现：

对于(1)中数列①，从第 2 项起，每一项与前一项的差都是 2；

对于(2)中数列②，从第 2 项起，每一项与前一项的差都是$-\frac{1}{2}$；

对于(3)，前 3 个图案中白色地面砖的块数依次为

$$6,10,14. \qquad ③$$

对于数列③，从第 2 项起，每一项与前一项的差都是 4.

抽象概括

这三个数列具有共同的特性：从第 2 项起，每一项与前一项的差是同一个常数. 我们称这样的数列为**等差数列**，称这个常数为等差数列的**公差**，通常用字母 d 表示.

问题与思考

(1)当公差 $d=0$ 时，$\{a_n\}$ 是什么数列？

(2)将有穷等差数列 $\{a_n\}$ 的所有项倒序排列，所成数列仍是等差数列吗？如果是，公差是什么？如果不是，请说明理由.

由此定义可知，对等差数列$\{a_n\}$，有

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=d.$$

因此，数列①的公差 $d=2$；数列②的公差 $d=-\frac{1}{2}$；数列③的公差 $d=4$.

例 1 判断下面数列是否为等差数列.

(1)$a_n=2n-1$； (2)$a_n=(-1)^n$.

解 (1)由通项知，该数列为

$$1,3,5,7,\cdots$$

由 $a_n=2n-1, n\in\mathbf{N}_+$，知 $a_{n+1}=2(n+1)-1$，于是

$$a_{n+1}-a_n=[2(n+1)-1]-(2n-1)=2.$$

由 n 的任意性知，这个数列是等差数列.

(2)由通项 $a_n=(-1)^n$，可知该数列为

$$-1,1,-1,1,\cdots$$

$$a_2-a_1=1-(-1)=2,$$

$$a_3-a_2=-1-1=-2.$$

由于 $a_2-a_1\neq a_3-a_2$，所以这个数列不是等差数列.

例 2 已知等差数列$\{a_n\}$，$a_1=1, d=\sqrt{2}$，求通项 a_n.

解 根据等差数列的定义，我们知道，这个数列开头几项应该是：

$$a_1=1,$$

$$a_2=a_1+\sqrt{2}=1+\sqrt{2},$$

$$a_3=a_2+\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}=1+2\sqrt{2},$$

$$a_4=a_3+\sqrt{2}=(1+2\sqrt{2})+\sqrt{2}=1+3\sqrt{2},$$

$$\cdots$$

因此，我们就可以归纳出一个规律：第 n 项等于第 1 项加上公差的$(n-1)$倍$(n\geqslant 2)$，即

$$a_n=1+(n-1)\sqrt{2}.$$

当 $n=1$ 时，有 $a_1=1=1+(1-1)\sqrt{2}$. 所以，这个公式对 $n=1$ 也成立.

因此，它就是所求的通项公式.

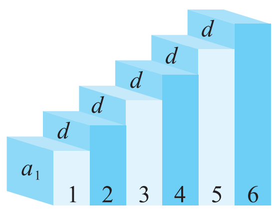


图 1-11

如果等差数列$\{a_n\}$的首项是 a_1，公差是 d(参见图 1-11)，那么根据等差数列的定义得到

$$a_1=a_1,$$
$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$\cdots$$

由此得到 $$a_n=a_1+(n-1)d.$$

当 $n=1$ 时，$a_1=a_1+(1-1)d$. 所以，这个公式对于 $n=1$ 时也成立.

这就是说：

若首项是 a_1，公差是 d，则这个等差数列的通项公式是

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

例 3 (1)求等差数列 9，5，1，…的第 10 项；

(2)已知等差数列$\{a_n\}$，$a_n=4n-3$，求首项 a_1 和公差 d.

解 (1)由 $a_1=9$，$d=5-9=-4$，得

$$a_n=9+(n-1)(-4)=13-4n.$$

当 $n=10$ 时， $a_{10}=13-4\times10=-27.$

(2)由 $a_n=4n-3$ 知，

$$a_1=4\times1-3=1,$$

且 $$d=a_2-a_1=(4\times2-3)-1=4.$$

所以等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$，公差 $d=4$.

例 4 已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=-20$，$a_{20}=-35$. 试求出数列的通项公式.

解 设$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=a_1+(n-1)d\quad(n\in\mathbf{N}_+)$，

由 $$a_5=a_1+4d=-20,$$
$$a_{20}=a_1+19d=-35,$$

可得一个以 a_1 和 d 为未知数的二元一次方程组，解这个方程组得

$$a_1=-16,\quad d=-1.$$

故数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=-16+(n-1)(-1)=-15-n.$$

问题与思考

若数列通项 $a_n=pn+q$（p，q 为常数），问$\{a_n\}$是否一定是等差数列？如果是，其首项和公差是什么？

练 习 1

1. 全国统一鞋号中，成年男鞋共有 14 种尺码，其中最小的尺码是 $23\frac{1}{2}$ cm，相邻的两个尺码都相差 $\frac{1}{2}$ cm. 把全部尺码从小到大列出.
2. 求下列等差数列的第 n 项.
   (1) 2，5，8，…
   (2) 13，9，5，…
   (3) 1，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$，…
3. 回答本小节开头提出的问题：
   在(1)中，最后一排有多少个座位？
   在(3)中，第 4 个图案中有白色地面砖多少块？第 n 个图案中有白色地面砖多少块？

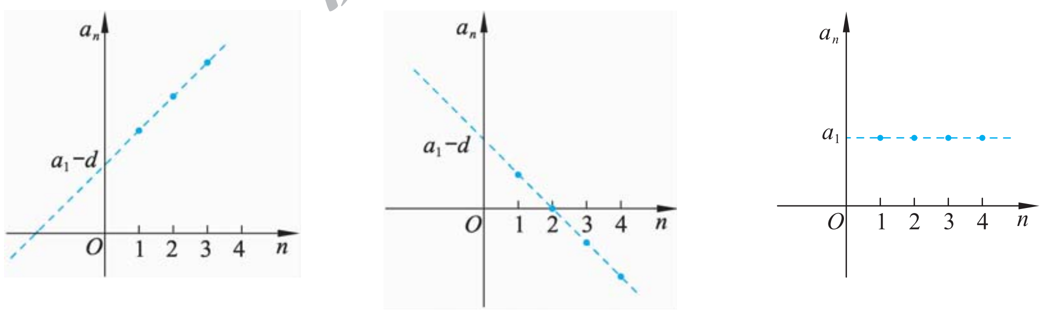
下面我们从函数角度研究等差数列 $\{a_n\}$.

由 $a_n=f(n)=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$，可知其图像是直线 $y=dx+(a_1-d)$ 上的一些等间隔的点，这些点的横坐标是正整数，其中公差 d 是该直线的斜率，即自变量每增加 1，函数值增加 d.

当 $d>0$ 时，$\{a_n\}$ 为递增数列(图 1-12(1))；

当 $d<0$ 时，$\{a_n\}$ 为递减数列(图 1-12(2))；

当 $d=0$ 时，$\{a_n\}$ 为常数列（图 1-12(3)).



(1)　(2)　(3)

图 1-12

例 5　已知(1，1)，(3，5)是等差数列 $\{a_n\}$ 图像上的两点.

(1) 求这个数列的通项公式；

(2) 画出这个数列的图像；

(3) 判断这个数列的单调性.

解　(1) 由于(1，1)，(3，5)是等差数列 $\{a_n\}$ 图像上的两点，所以

$$a_1=1，a_3=5.$$

由
$$a_3=a_1+2d=1+2d=5，$$

解得
$$d=2，$$

问题与思考

已知一个等差数列的任意两项，这个数列的通项公式是否可以确定？请从几何意义上给出解释.

于是 $$a_n=2n-1.$$

(2) 图像是直线 $y=2x-1$ 上一些等间隔的点，如图 1-13 所示.

(3) 因为一次函数 $y=2x-1$ 是增函数，所以数列$\{a_n\}$是递增数列.

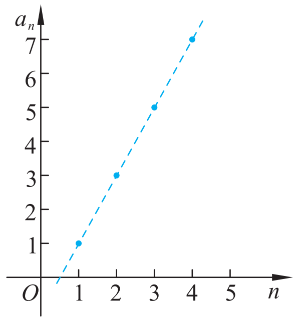


图 1-13

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A，使 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫作 a 与 b 的**等差中项**.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么 $A-a=b-A$，所以

$$A=\frac{a+b}{2}.$$

容易看出，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项(有穷等差数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等差中项.

例 6 一个木制梯形架的上、下两底边分别为 33 cm，75 cm，把梯形的两腰各 6 等分，用平行木条连接各对应分点，构成梯形架的各级. 试计算梯形架中间各级的宽度.

解 记梯形架自上而下各级宽度所构成的数列为 $\{a_n\}$，则由梯形中位线的性质，易知每相邻三项均成等差数列，从而$\{a_n\}$成等差数列. 依题意有

$$a_1=33\text{ cm},\quad a_7=75\text{ cm}.$$

现要求 a_2，a_3，…，a_6，即中间 5 层的宽度.

$$d=\frac{a_7-a_1}{7-1}=\frac{75-33}{6}=7(\text{cm}).$$

$a_2=33+7=40(\text{cm})$，$a_3=40+7=47(\text{cm})$，

$a_4=47+7=54(\text{cm})$，$a_5=54+7=61(\text{cm})$，$a_6=61+7=68(\text{cm})$.

答 梯形架中间各级的宽度自上而下依次是 40 cm，47 cm，54 cm，61 cm，68 cm.

练 习 2

1. (口答)求下列各题中两个数的等差中项.

   (1)100 与 180；　　(2)-2 与 6.

2. 已知等差数列的通项公式为 $a_n=-2n+7$.

   (1)求首项和公差；

   (2)画出这个数列的图像；

   (3)判断这个数列的单调性.

3. 已知$\triangle ABC$ 的三内角的度数成等差数列，求其中间一项的度数.

4. 在通常情况下，从海平面到 10 km 高空，海拔每增加 1 km，气温就下降一固定数值. 如果海拔 1 km 高空的气温是 8.5 ℃，海拔 5 km 高空的气温是-17.5 ℃，那么海拔 2 km，4 km 和 8 km 高空的气温各是多少？

2.2　等差数列的前 n 项和

问题提出

如图 1-14 所示，有 200 根相同的圆木料，要把它们堆放成正三角形垛，并使剩余的圆木料尽可能的少，那么将剩余多少根圆木料？

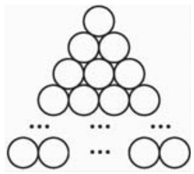


图　1-14

根据题意，各层圆木料数比上一层多一根，故其构成等差数列：

$$1,2,3,\cdots$$

设共摆放了 n 层，能构成正三角形垛的圆木料数为 S_n，则

$$S_n=1+2+3+\cdots+n,$$

这是一个等差数列的求和问题．如何计算该等差数列的和呢？

对于这个问题，高斯在 10 岁时就巧妙地求出了 $n=100$ 时的结果．

高斯的算法是：

$$\begin{aligned}S_{100}&=1\ \ +2\ \ +3\ \ +4\ \ +\cdots+98+99+100\\&=100+99+98+97+\cdots+3\ \ +2\ \ +1,\end{aligned}$$

这两个等式上、下对应项的和均为 101，所以

$$2S_{100}=101+101+101+\cdots+101+101+101.$$

因为有 100 个 101，所以

$$2S_{100}=101\times100=10\ 100,$$

即

$$S_{100}=\frac{10\ 100}{2}=5\ 050.$$

你能从这个问题的解决过程中悟出求一般等差数列前 n 项和的方法吗？

高斯（Gauss，1777—1855），德国数学家，近代数学奠基者之一．与阿基米德、牛顿并列为历史上最伟大的数学家，有“数学王子”之称．

抽象概括

设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d],\qquad ①$$

再把项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d],\qquad ②$$

把①，②等号两边分别相加，得

$$\begin{aligned}2S_n&=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n个}\\&=n(a_1+a_n).\end{aligned}$$

说　明

这种思想方法，用图形来说明就更清楚．在图 1-14 上拼一个倒过来的图形（示意图见图 1-15），就成为各行有相同个数的平行四边形，计算这个平行四边形的个数就很容易了．

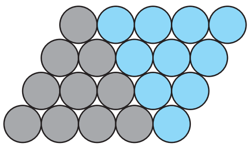


图 1-15

于是，首项为 a_1，末项为 a_n，项数为 n 的等差数列的前 n 项和

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.} \qquad ③$$

这个公式表明：等差数列前 n 项的和等于首末两项的和与项数乘积的一半，参见示意图 1-16.

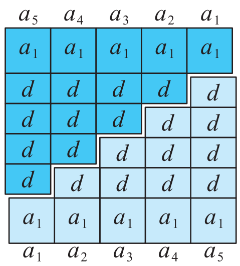


图 1-16

将 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入③式，得

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.} \qquad ④$$

特别地，当 $a_1=1, d=1$ 时，n 个连续正整数的和

$$S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

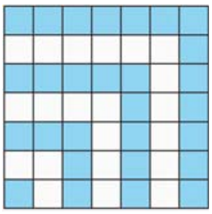


图 1-17

对于本节开头的问题，即转化为求满足 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}\leqslant 200$ 的最大自然数 n. 易知当 $n=19$ 时，$S_n=190$；$n=20$ 时，$S_n=210$. 所以 n 的最大值为 19. 此时，将堆垛 19 层，剩余 10 根圆木料．

例 7　求前 n 个正奇数的和.

解　由等差数列前 n 项和公式，得

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2.$$

你能看出图 1-17 与本题的关系吗?

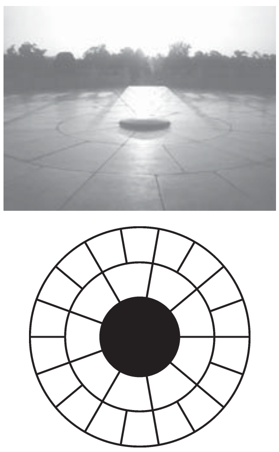


图 1-18

例 8　在我国古代，9 是数字之极，代表尊贵之意，所以中国古代皇家建筑中包含许多与 9 相关的设计. 例如，北京天坛圆丘的地面由扇环形的石板铺成(如图 1-18)，最高一层的中心是一块天心石，围绕它的第一圈有 9 块石板，从第二圈开始，每一圈比前一圈多 9 块，共有 9 圈. 请问：

(1)第 9 圈共有多少块石板?

(2)前 9 圈一共有多少块石板?

解　(1)设从第 1 圈到第 9 圈石板数所成数列为$\{a_n\}$，由题意可知$\{a_n\}$是等差数列，其中 $a_1=9$，$d=9$，$n=9$.

由等差数列的通项公式，得第 9 圈有石板

$$a_9=a_1+(9-1)d=9+(9-1)\times 9=81(\text{块}).$$

(2)由等差数列前 n 项和公式，得前 9 圈一共有石板

$$S_9=9a_1+\frac{9(9-1)}{2}d=9\times 9+\frac{9\times 8}{2}\times 9=405(\text{块}).$$

答　第 9 圈有 81 块石板，前 9 圈一共有 405 块石板.

练 习 1

1. 在 2.1 节问题(1)中，求剧场共有多少个座位.
2. 求前 n 个正偶数的和.
3. 在等差数列$\{a_n\}$中，

   (1)已知 $S_8=48$，$S_{12}=168$，求 a_1 和 d；

   (2)已知 $a_6=10$，$S_5=5$，求 a_8 和 S_8；

   (3)已知 $a_3+a_{15}=40$，求 S_{17}.

例 9　在数列$\{a_n\}$中，$a_n=2n+3$，求这个数列自第 100 项到第 200 项之和 S 的值.

解　由于 $a_{n+1}-a_n=[2(n+1)+3]-(2n+3)=2$. 所以，数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，此数列自第 100 项到第 200 项仍是等差数列. 共有 101 项，所求和为

$$\begin{aligned}S&=\frac{a_{100}+a_{200}}{2}\times 101\\&=\frac{2\times 100+3+(2\times 200+3)}{2}\times 101\\&=30\ 603.\end{aligned}$$

例 10　在新城大道一侧 A 处，运来 20 棵新树苗. 一名工人从 A 处起沿大道一侧路边每隔 10 m 栽一棵树苗，这名工人每次只能运一棵. 要栽完这 20 棵树苗，并返回 A 处，植树工人共走了多少路程?

解　植树工人每种一棵树并返回 A 处所要走的路程(单位:m)组成了一个数列

$$0,20,40,60,\cdots,380,$$

这是首项为 0，公差为 20，项数为 20 的等差数列，其和

$$S=\frac{20\times(20-1)}{2}\times 20=3\ 800(\text{m}).$$

答 植树工人共走了 3 800 m 的路程.

例 11 九江抗洪指挥部接到预报，24 h 后有一洪峰到达. 为确保安全，指挥部决定在洪峰来临前筑一道堤坝作为第二道防线. 经计算，需调用 20 台同型号翻斗车，平均每辆工作 24 h 后方可筑成第二道防线. 但目前只有一辆车投入施工，其余的需从昌九高速公路沿线抽调，每隔 20 min 能有一辆车到达，指挥部最多可调集 25 辆车，那么在 24 h 内能否构筑成第二道防线？

解 从第一辆车投入工作算起，各车工作时间（单位：h）依次设为

$$a_1, a_2, \cdots, a_{25},$$

这是一个等差数列，$a_1=24$，公差 $d=-\frac{1}{3}$.

25 辆车可以完成的工作量为

$$a_1+a_2+\cdots+a_{25}=25\times24+\frac{25\times24}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=500.$$

需要完成的工作量为 $24\times20=480$.

因此，在 24 h 内能构筑成第二道防线.

练 习 2

1. 已知数列 $\{2n-11\}$，那么 S_n 的最小值是（　）.
   A. S_1　　B. S_5　　C. S_6　　D. S_{11}
2. 一凸 n 边形，各内角的度数成等差数列，公差是 $10°$，最小内角 $100°$，则边数 $n=$______.
3. 某车间全年共生产 2 250 个零件，又已知 1 月份生产了 105 个零件，每月生产零件的个数按等差数列递增. 平均每月比前一个月多生产多少个零件？12 月份生产多少个零件？

习 题 1—2

A　组

1. $\{a_n\}$为等差数列，填表：

题 次	a_1	d	n	a_n
(1)	8	-3	20	
(2)	2		9	18
(3)		$\frac{3}{4}$	30	$15\frac{3}{4}$
(4)	3	2		21

思考填表的过程，你能得出什么结论？

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的前三项为 $a-1$，$a+1$，$2a+3$，则此数列的通项为(　　).

A. $2n-5$　　B. $2n+1$　　C. $2n-3$　　D. $2n-1$

3. 已知数列 $1,\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},3,\sqrt{11},\cdots,\sqrt{2n-1},\cdots$，则$\sqrt{21}$是这个数列的(　　).

A. 第 10 项　　B. 第 11 项　　C. 第 12 项　　D. 第 21 项

4. 设数列$\{a_n\}$是单调递增的等差数列，前三项的和为 12，前三项的积为 48，则它的首项是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

5. 设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等差数列，它们相应项的和 a_n+b_n是否仍是等差数列？若 $a_1=25$，$b_1=75$，$a_2+b_2=100$，则由 a_n+b_n 所组成的数列的第 37 项为(　　).

A. 1　　B. 0　　C. 100　　D. 3 700

6. 夏季高山上气温从山脚起每升高 100 m 降低 0.7 ℃，已知山顶的气温是 14.1 ℃，山脚的气温是 26 ℃. 那么，此山相对于山脚的高度是(　　).

A. 1 500 m　　B. 1 600 m　　C. 1 700 m　　D. 1 800 m

7. (1)求等差数列 8，5，2，…的第 20 项；

(2)-401 是不是等差数列-5，-9，-13，…的项？如果是，是第几项？

8. 某城市环境噪声平均值(dB)见下表：

年份	1999	2000	2001	2002
噪声/dB	57.8	57.2	56.6	56.0

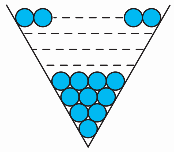
如果噪声平均值依此规律逐年减少，那么从 2002 年起，经过多少年，噪声平均值将小于 42 dB？

9. 安装在一根公共轴上的 5 个皮带轮的直径成等差数列，其中最大和最小的皮带轮的直径分别是 216 mm 与 120 mm. 求中间三个皮带轮的直径.

10. 在下表的等差数列$\{a_n\}$中，根据已知的三个数，求未知的两个数.

题次	a_1	d	n	a_n	S_n	题次	a_1	d	n	a_n	S_n
(1)	5.2	0.4	43			(5)	0.2			5.2	137.7
(2)	$-37\frac{1}{2}$	4		$46\frac{1}{2}$		(6)		2	15	-10	
(3)	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$			$-158\frac{2}{3}$	(7)		3	31		0
(4)	5		26	105		(8)		2.5		27	157.5

11. 在 10 与 100 之间插入 50 个数，使之成等差数列．求插入的数之和.
12. 如图，一个堆放铅笔的 V 形架的最下面一层放一支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放一支，最上面一层放 120 支. 这个 V 形架上共放着多少支铅笔?



(第 12 题)

13. 一个物体第 1 s 降落 4.90 m，以后每秒比前一秒多降落9.80 m.
    (1)如果它从山顶下落，经过 5 s 到达地面，那么这山的高度是多少米?
    (2)如果它从 1 960 m 的高空落到地面，要经过多长时间?
14. 甲、乙两物体分别从相距 70 m 的两处相向运动，甲第 1 分走 2 m，以后每分比前一分多走 1 m，乙每分走 5 m. 问：甲、乙开始运动后多长时间相遇?
15. 你能通过画图来表示数列 1，8，16，24，32，40 的和吗（参考本节例 7）？

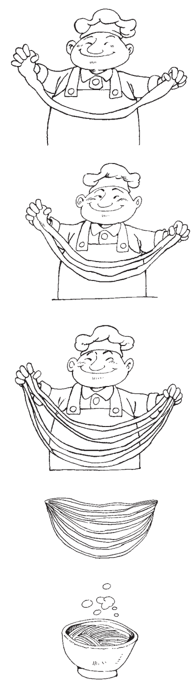
B 组

1. 有一个阶梯教室，共有座位 25 排，第一排离教室地面高度为17 cm，前 16 排前后两排高度差 8 cm，从 17 排起，前后两排高度差是 10 cm(含 16，17 排之间高度差). 求最后一排离教室地面的高度.
2. 将等差数列 3，8，13，18，…按顺序抄在练习本上，已知每行抄 13 个数，每页抄 21 行. 求数 33 333所在的页和行.
3. 在编号为 1～9 的九个盒子中，共放有 351 粒米，已知每个盒子都比前一号盒子多放同样粒数的米.
   (1)如果 1 号盒子内放了 11 粒米，那么后面的盒子比它前一号的盒子多放几粒米?
   (2)如果 3 号盒子内放了 23 粒米，那么后面的盒子比它前一号的盒子多放几粒米?
4. 已知$\{a_n\}$是等差数列，其中 $a_1=31$，公差 $d=-8$.
   (1)求数列$\{a_n\}$的通项公式，并作出它的图像；
   (2)数列$\{a_n\}$从哪一项开始小于 0?
   (3)求数列$\{a_n\}$前 n 项和的最大值，并求出对应 n 的值.
5. 数列$\{a_n\}$前 n 项和 $S_n=n^2+1$.
   (1)试写出数列的前 5 项；
   (2)数列$\{a_n\}$是等差数列吗?
   (3)你能写出数列$\{a_n\}$的通项公式吗?

§3　等比数列

3.1　等比数列

问题提出



下面问题中的数列有什么共同特征？

(1)你吃过拉面吗？拉面馆的师傅将一根很粗的面条，拉抻、捏合、再拉抻、再捏合，如此反复几次，就拉成了许多根细面条.

这样捏合 8 次后可拉出多少根细面条？

第 1 次是 1 根，后面每次捏合都将 1 根变为 2 根，故有

第 2 次捏合成 $2\times1=2$ 根；

第 3 次捏合成 $2\times2=2^2$ 根；

……

第 8 次捏合成 $2\times2^6=2^7=128$ 根.

前 8 次捏合成的面条根数构成一个数列

$$1,2,4,8,16,32,64,128. \qquad ①$$

对于数列①，从第 2 项起，每一项与前一项的比都是 2.

(2)星火化工厂今年产值为 a 万元，计划在以后 5 年中每年比上年产值增长 10%，试列出从今年起 6 年的产值(单位：万元).

第 1 年产值：a；

第 2 年产值：$a+a\times10\%=a(1+10\%)$；

第 3 年产值：$a(1+10\%)+a(1+10\%)\times10\%=a(1+10\%)^2$；

……

第 6 年产值：$a(1+10\%)^4+a(1+10\%)^4\times10\%=a(1+10\%)^5$.

故这 6 年的产值构成一个数列

$$a,a(1+10\%),a(1+10\%)^2,a(1+10\%)^3,a(1+10\%)^4,a(1+10\%)^5. \qquad ②$$

对于数列②，从第 2 项起，每一项与前一项的比都是 $1+10\%$.

可以看出数列①，②有如下的共同特征：从第 2 项起，每一项与前一项的比都是与项数 n 无关的常数.

问题与思考

一位拉面高手能用一块面连续拉出 10 多万根面条，你知道他需要捏合、拉抻多少次吗？

抽象概括

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列叫作**等比数列**，这个常数叫作等比数列的**公比**，公比通常用字母 q 表示（$q\neq 0$）.

数列①，②都是等比数列，它们的公比分别是 2，1+10%.

> **问题与思考**
>
> 在等比数列中，公比 q 为什么不为 0？能否有某一项为 0？

例 1 以下数列中，哪些是等比数列？

(1)$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16}$；

(2)$1,1,1,\cdots,1$；

(3)$1,2,4,8,12,16,20$；

(4)$a,a^2,a^3,\cdots,a^n$.

解 (1)是等比数列，公比 $q=-\frac{1}{2}$；

(2)是公比为 1 的等比数列；

(3)因为 $\frac{8}{4}\neq\frac{12}{8}$，所以该数列不是等比数列；

(4)当 $a\neq 0$ 时，这个数列是公比为 a 的等比数列；当 $a=0$ 时，它不是等比数列.

已经知道了一个数列是等比数列，并且知道它的第一项 a_1 和公比 q，怎样写出它的通项公式？

设这个等比数列是

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$$

由等比数列的定义可以知道：

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q.$$

从而，

$$a_2=a_1q,$$
$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2,$$
$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3,$$
$$\cdots$$

由此可归纳出

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

在这个公式里，如果令 $n=1$，那么

$$a_1=a_1q^{1-1}=a_1q^0=a_1.$$

由此可知，a_1 也可以用这个公式来表示，所以这个公式就是所要求的通项公式，这就是说：

首项是 a_1，公比是 q 的等比数列的通项公式是

$$\boxed{a_n=a_1q^{n-1}\quad(a_1\neq0,\ q\neq0).}$$

容易知道，本节开始给出的数列①②的通项公式依次是

$$a_n=2^{n-1}(参看图 1\text{-}19)；$$
$$a_n=a(1+10\%)^{n-1}.$$

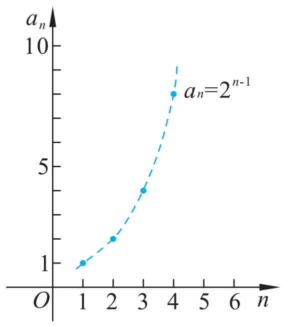


图　1-19

例 2　一个等比数列的首项是 2，第 2 项与第 3 项的和是 12. 求它的第 8 项的值.

解　设等比数列的首项为 a_1，公比为 q，则由已知，得

$$\begin{cases}a_1=2, & ①\\ a_1q+a_1q^2=12, & ②\end{cases}$$

将①式代入②式，得　$q^2+q-6=0.$

解得　$q=-3$ 或 $q=2$.

当 $q=-3$ 时，　$a_8=a_1q^7=2\times(-3)^7=-4\ 374$，

当 $q=2$ 时，　$a_8=2q^7=2\times2^7=2^8=256.$

故数列的第 8 项是 $-4\ 374$ 或 256.

练　习　1

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，填写下表.

题　次	a_1	q	n	a_n
(1)	3	-2	5	
(2)		$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{16}$
(3)	$\frac{1}{2}$		4	$\frac{1}{16}$
(4)	3		5	48
(5)	3	2		24

思考交流

根据指数函数的单调性，分析等比数列 $a_n=a_1q^{n-1}(q>0)$ 的单调性，填写表 1-4.

表 1-4

a_1	$a_1>0$			$a_1<0$		
q 的范围	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\{a_n\}$的单调性						

例 3 在各项为负数的数列$\{a_n\}$中，已知 $2a_n=3a_{n+1}$，且 $a_2\cdot a_5=\dfrac{8}{27}$.

(1)求证：$\{a_n\}$是等比数列，并求出通项；

(2)试问 $-\dfrac{16}{81}$是这个等比数列中的项吗？如果是，指明是第几项；如果不是，请说明理由.

解 (1)因为 $2a_n=3a_{n+1}$，且 $a_n\neq 0$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2}{3}$，

故数列$\{a_n\}$是公比 $q=\dfrac{2}{3}$的等比数列.

又 $a_2\cdot a_5=\dfrac{8}{27}$， 则 $a_1q\cdot a_1q^4=\dfrac{8}{27}$，

即
$$a_1^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

由于数列各项均为负数，则 $a_1=-\dfrac{3}{2}$，

所以
$$a_n=-\frac{3}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

(2)设 $a_n=-\dfrac{16}{81}$，由等比数列的通项公式得
$$-\frac{16}{81}=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2},$$
即
$$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

根据指数函数的性质，有
$$4=n-2，即\ n=6.$$

因此，$-\dfrac{16}{81}$是这个等比数列的第 6 项.

例 4 据报载，中美洲地区毁林严重．据统计，在 20 世纪 80 年代末，每时平均毁林约 48 hm^2，森林面积每年以 3.6%～3.9%的速度减少，迄今被毁面积已达 1.3×10^7 hm^2，目前还剩1.9×10^7 hm^2. 请你回答以下几个问题：

(1)如果以每时平均毁林约 48 hm^2 计算，剩下的森林经过多少年将被毁尽？

说 明

hm^2 表示公顷，$1\ hm^2=10\ 000\ m^2$.

(2)根据(1)计算出的年数 n，如果以每年 3.6%～3.9%的速度减少，计算 n 年后的毁林情况；

(3)若按 3.6%的速度减少，估算经过 150 年后、经过 200 年后、经过 250 年后及经过 300 年后森林面积的情况，经过多少年森林将被毁尽？

解　(1)如果每时平均毁林约 48 hm^2，则每年平均毁林

$$48\times24\times365=420\ 480(hm^2),$$

列出比式 $\dfrac{1.9\times10^7}{420\ 480}\approx45.2$，故剩下的森林大约经过 45 年将被毁尽.

(2)若以 3.6%速度减少，用计算器计算 45 年后还剩的森林面积为

$$1.9\times10^7\times(1-0.036)^{45}\approx3.65\times10^6(hm^2);$$

若以 3.9%速度减少，45 年后还剩的森林面积为

$$1.9\times10^7\times(1-0.039)^{45}\approx3.17\times10^6(hm^2).$$

(3)经过 150 年后，还剩约 7.77×10^4 hm^2；经过 200 年后，约剩 1.24×10^4 hm^2；经过 250 年后，约剩 1 986 hm^2；经过 300 年后，约剩 317 hm^2；经过 512 年后，约剩 0.134 hm^2，森林几乎毁尽.

与等差中项类似，如果在 a 与 b 中插入一个数 G，使得 a,G,b 成等比数列，那么根据等比数列的定义，$\dfrac{G}{a}=\dfrac{b}{G}$，$G^2=ab$，$G=\pm\sqrt{ab}$. 我们称 G 为 a,b 的**等比中项**.

问题与思考

若 $G^2=ab$，则 a,G,b 是否必成等比数列？

容易知道，在等比数列中，首末两项除外，每一项都是它前后两项的等比中项.

练　习 2

1. 已知数列 $a,a(1-a),a(1-a)^2,\cdots$是等比数列，则实数 a 的取值范围是(　　).

   A. $a\neq1$　　　　B. $a\neq0$ 或 $a\neq1$

   C. $a\neq0$　　　　D. $a\neq0$ 且 $a\neq1$

2. 将公比为 q 的等比数列 $a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$依次取相邻两项的乘积组成新的数列 $a_1a_2,a_2a_3,a_3a_4,\cdots$. 此数列是(　　).

   A. 公比为 q 的等比数列　　　　B. 公比为 q^2 的等比数列

   C. 公比为 q^3 的等比数列　　　　D. 不一定是等比数列

3. 求下列各组数的等比中项.

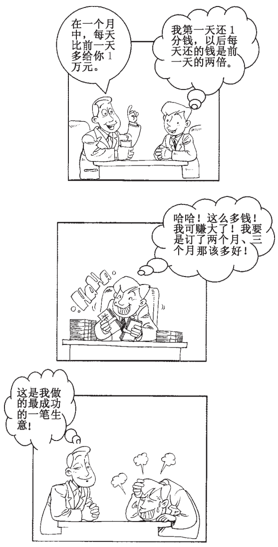
   (1)-45 和 -80；

   (2)$7+3\sqrt{5}$和 $7-3\sqrt{5}$；

   (3)$(a+b)^2$ 和$(a-b)^2$.

3.2 等比数列的前 n 项和

问题提出



一天，小林和小明做“贷款”游戏，他们签订了一份合同. 从签订合同之日起，在整整一个月（30 天）中，小明第一天贷给小林 1 万元，第二天贷给小林 2 万元……以后每天比前一天多贷给小林 1 万元. 而小林按这样的方式还贷：小林第一天只需还 1 分钱，第二天还 2 分钱，第三天还 4 分钱……以后每天还的钱数是前一天的两倍.

合同开始生效了，第一天小林支出 1 分钱，收入 1 万元；第二天，他支出 2 分钱，收入 2 万元；第三天，他支出 4 分钱，收入 3 万元……到了第 10 天，他共得到 55 万元，付出的总数只有 10 元 2 角 3 分. 到了第 20 天，小林共得 210 万元，而小明才得到 1 048 575 分，共 1 万元多一点. 小林想：要是合同订两个月、三个月该多好！

果真是这样吗？

下面我们来计算一下双方得到的钱数.

设 30 天后，小林得到的钱数为 T_{30}（万元），小明得到的钱数为 S_{30}（分），则根据合同

$$T_{30}=1+2+3+\cdots+30=\frac{(1+30)\times 30}{2}=465\text{(万元)},$$

$$S_{30}=1+2+2^2+\cdots+2^{29}. \qquad ①$$

如何计算 S_{30} 呢？

思路一

$$\begin{aligned}S_{30}&=1+2+2^2+\cdots+2^{29}\\&=1+2(1+2+2^2+\cdots+2^{28})\\&=1+2(S_{30}-2^{29}),\end{aligned}$$

$$S_{30}-2S_{30}=1-2^{30},$$

$$S_{30}=2^{30}-1.$$

思路二　观察①，得

$$S_{30}=1+2+2^2+\cdots+2^{29}, \qquad ②$$

$$2S_{30}=2+2^2+\cdots+2^{29}+2^{30}. \qquad ③$$

③－②，得　$S_{30}=2^{30}-1$.

而 $S_{30}=2^{30}-1$ 可不是一个小数目！利用计算器计算，得到：

$$S_{30}=1\ 073\ 741\ 823\text{(分)}=1\ 073.741\ 823\text{(万元)}.$$

小林听到这个结果，肯定会吓出一身冷汗！

抽象概括

我们将上述方法推广到一般等比数列求和.

设 $$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1},\qquad ①$$

①的两边同乘 q,得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n.\qquad ②$$

①的两边分别减去②的两边,得

$$S_n-qS_n=a_1(1-q^n),$$

即 $$S_n(1-q)=a_1(1-q^n).$$

由此得到 $q\neq1$ 时,等比数列前 n 项和公式

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

因为 $$a_1q^n=(a_1q^{n-1})q=a_nq,$$

所以上面的公式还可以写成

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}.$$

很明显,当 $q=1$ 时,从①式可得 $S_n=na_1$.

从而,等比数列前 n 项和公式为

$$\boxed{S_n=\begin{cases}na_1, & (q=1)\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}. & (q\neq1)\end{cases}}$$

例 5　(1)已知等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$q=3$.求 S_3;

(2)求等比数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$的前 10 项的和.

解　(1) $$S_3=\frac{2\times(1-3^3)}{1-3}=26;$$

(2)因为公比 $q=\frac{1}{2}$,

$$S_{10}=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1\ 023}{512}.$$

> **问题与思考**
>
> 等比数列前 n 项和的有关公式中共涉及哪几个基本量?这几个量有什么实际意义?这几个基本量中知道其中几个可以求出另外几个?

例 6　五洲电扇厂去年实现利税 300 万元,计划在以后 5 年中每年比上年利税增长 10%.问从今年起第 5 年的利税是多少?这 5 年的总利税是多少(结果精确到万元)?

解　每年的利税组成一个首项 $a_1=300$，公比 $q=1+10\%$ 的等比数列. 从今年起，第 5 年的利税为

$$a_6=a_1q^5=300\times(1+10\%)^5=300\times1.1^5\approx483(万元)；$$

这 5 年的总利税为

$$S=\frac{a_2(q^5-1)}{q-1}=300\times1.1\times\frac{1.1^5-1}{1.1-1}\approx2\ 015(万元).$$

练　习　1

1. 求下列等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和.

　(1) $a_1=1, q=3, n=10$；　　(2) $a_1=\frac{1}{2}, q=-\frac{1}{3}, n=6$；

　(3) $a_1=\frac{1}{3}, q=\frac{1}{3}, a_n=\frac{1}{6\ 561}$；　　(4) $a_1=6, q=2, a_n=192$.

2. 某超市去年的销售额为 a 万元，计划在今后 10 年内每年比上一年增加 10%. 从今年起 10 年内这家超市的总销售额为(　　)万元.

　A. 1.1^9a　　B. 1.1^5a

　C. $10\times(1.1^{10}-1)a$　　D. $11\times(1.1^{10}-1)a$

例 7　一个热气球在第一分上升了 25 m 的高度，在以后的每一分里，它上升的高度都是它在前一分上升高度的 80%. 这个热气球上升的高度能超过 125 m 吗？

解　用 a_n 表示热气球在第 n 分上升的高度，由题意，得

$$a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n,$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=25$，公比 $q=\frac{4}{5}$ 的等比数列.

热气球在 n 分时间里上升的总高度

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$=\frac{25\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{4}{5}}=125\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]<125.$$

答　这个热气球上升的高度不可能超过 125 m.

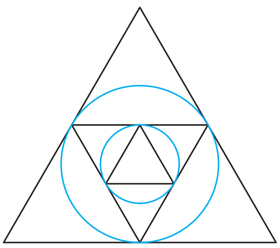


图　1-20

例 8　如图 1-20 所示，作边长为 a 的正三角形的内切圆，在这个圆内作内接正三角形，然后，再作新三角形的内切圆. 如此下去，求前 n 个内切圆的面积和.

解　设第 n 个正三角形的内切圆的半径为 a_n.

因为从第 2 个正三角形开始，每一个正三角形的边长是前一个正三角形边长的$\frac{1}{2}$，每一个正三角形内切圆的半径也是前一个正三角形内切圆半径的$\frac{1}{2}$，故

$$a_1=\frac{1}{2}a\tan 30^\circ=\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}a,$$

$$a_2=\frac{1}{2}a_1,$$

$$\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}.$$

数列$\{a_n\}$是首项为$\frac{\sqrt{3}}{6}a$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

所以 $$a_n=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}a.$$

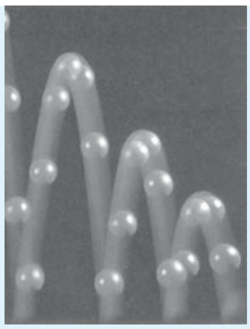
设前 n 个内切圆的面积和为 S_n，则

$$\begin{aligned}S_n&=\pi(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\\&=\pi a_1^2\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2\right]\\&=\pi a_1^2\left[1+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]\\&=\frac{4}{3}\times\frac{a^2}{12}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\pi\\&=\frac{a^2}{9}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\pi.\end{aligned}$$

答 前 n 个内切圆的面积和是$\frac{a^2}{9}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\pi$.

练 习 2

1. 求等比数列 1，2，4，…从第 5 项到第 10 项的和.
2. 一个球从 a m 高处自由落下，每次着地后，又跳回到原高度的$\frac{2}{3}$. 那么当它第 5 次着地时，共经过了多少米?



习 题 1—3

A 组

1. 等比数列 $x, 2x+2, 3x+3, \cdots$ 的第四项为（　　）.

A. $-\dfrac{27}{2}$　　B. $\dfrac{27}{2}$　　C. -27　　D. 27

2. 计算机的价格不断降低，若每年计算机的价格降低 $\dfrac{1}{3}$，现在价格为8 100元的计算机 3 年后的价格可降低为（　　）.

A. 300 元　　B. 900 元　　C. 2 400 元　　D. 3 600 元

3. 一个各项均正的等比数列，其每一项都等于它后面的相邻两项之和，则公比 $q=$（　　）.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

4. 等比数列 $\{a_n\}$ 中，首项为 a_1，公比为 q，则下列条件中，使 $\{a_n\}$ 一定为递减数列的条件是（　　）.

A. $|q|<1$　　B. $a_1>0$，$q<1$

C. $a_1>0$，$0<q<1$ 或 $a_1<0$，$q>1$　　D. $q>1$

5. 单摆一次摆动摆过的弧长为 36 cm，在连续的每次摆动中，每次摆动的弧长是前一次的 90%. 请写出它每次摆动弧长的表达式，并写出第六次摆动的弧长(结果精确到 1 cm).

6. 培育水稻新品种，如果第一代得到 20 粒种子，并且从第一代起，以后各代的每一粒种子都可以得到下一代的 20 粒种子，那么到第五代大约可以得到这个新品种的种子多少粒?

7. 某工厂 1996 年产值为 200 万元，计划从 1997 年开始，每年的产值比上年增长 20%. 问从哪年开始，该厂的年产值可超过 1 200 万元?

8. 在下表各题里，$\{a_n\}$ 是等比数列，由已知的三个数，求另外两个未知数.

题次	a_1	q	n	a_n	S_n	题次	a_1	q	n	a_n	S_n
(1)	3	2	6			(5)	1			4	7
(2)	8	$\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{1}{8}$		(6)		$\dfrac{1}{2}$	5	$\dfrac{1}{8}$	
(3)	5	2			35	(7)		$\dfrac{2}{3}$	4		65
(4)	2		4	54		(8)		2		96	189

9. 如果某人在听到喜讯后的 1 h 内将这一喜讯传给 2 个人，这 2 个人又以同样的速度各传给未听到喜讯的另 2 个人……如果每人只传 2 人，这样继续下去，要把喜讯传遍一个有 2 047 人(包括第一个人)的小镇，所需时间为（　　）.

A. 8 h　　B. 9 h　　C. 10 h　　D. 11 h

10. 某制糖厂第 1 年制糖 5 万 t，如果平均每年的产量比上一年增加 10%，那么从第 1 年起，约几年内可使总产量达到 30 万 t(结果精确到 1 年)?

B　组

1. 被称为"世界屋脊"的喜马拉雅山的主峰——珠穆朗玛峰，海拔 8 844 m，是世界第一高峰. 但一张报纸却不服气，它说："别看我薄，只有 0.01 cm 厚，但把我连续对折 30 次后，我的厚度就会远远超过珠穆朗玛峰的高度."你认为这张报纸是不是在吹牛？你不妨算算看.

2. 碘—131 是一种放射性物质，在医疗诊断中常会用到它，下表是 20 g 碘—131 在 4 天内每天衰减的实验数据：

时间/天	0	1	2	3	4
剩余/g	20.0	18.34	16.82	15.42	14.14

问 7 天后还能不能保证有 10 g 该物质用于治疗，说明你的理由.

3. 一个等比数列前 n 项的和为 48，前 $2n$ 项的和为 60，则前 $3n$ 项的和为(　　).

A. 83　　B. 108　　C. 75　　D. 63

4. 设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列，公比 $q=2$，且 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{30}=2^{30}$. 那么 $a_3\cdot a_6\cdot\cdots\cdot a_{30}$ 等于(　　).

A. 2^{10}　　B. 2^{15}　　C. 2^{20}　　D. 2^{16}

§4 数列在日常经济生活中的应用

等差数列、等比数列是日常经济生活中的重要数学模型．例如存款、贷款、购物(房、车)分期付款、保险、资产折旧等问题都与其相关.

以银行存款为例，它是老百姓日常生活中最基本的经济活动. 银行存款计息方式有两种：单利和复利，它们分别以等差数列和等比数列为数学模型. 下面分别举例说明.

说　明

单利　单利的计算是仅在原有本金上计算利息，对本金所产生的利息不再计算利息. 其公式为

利息＝本金×利率×存期

以符号 P 代表本金，n 代表存期，r 代表利率，S 代表本金与利息和(以下简称**本利和**)，则有

$$S=P(1+nr).$$

复利　把上期末的本利和作为下一期的本金，在计算时每一期本金的数额是不同的. 复利的计算公式是

$$S=P(1+r)^n.$$

例 1　**零存整取模型**　银行有一种叫作零存整取的储蓄业务，即每月定时存入一笔相同数目的现金，这是零存；到约定日期，可以取出全部本利和，这是整取. 规定每次存入的钱不计复利(暂不考虑利息税).

(1)若每月存入金额为 x 元，月利率 r 保持不变，存期为 n 个月，试推导出到期整取时本利和的公式；

(2)若每月初存入 500 元，月利率为 0.3%，到第 36 个月末整取时的本利和是多少？

(3)若每月初存入一定金额，月利率是 0.3%，希望到第 12 个月末整取时取得本利和 2 000 元．那么每月初应存入的金额是多少？

解　(1)根据题意，第 1 个月存入的 x 元，到期利息为 $x\cdot r\cdot n$；第 2 个月存入的 x 元，到期利息为 $x\cdot r\cdot(n-1)$元……第 n 个月存入的 x 元，到期利息为 xr 元. 不难看出，这是一个等差数列求和的问题.

各月利息之和为

$$xr(1+2+\cdots+n)=\frac{n(n+1)r}{2}x(\text{元}),$$

而本金为 nx 元，这样就得到本利和公式

$$y=nx+\frac{n(n+1)r}{2}x(\text{元}),$$

即
$$y=x\left[n+\frac{n(n+1)r}{2}\right](\text{元})\quad(n\in\mathbf{N}_+);\qquad ①$$

(2)每月存入 500 元，月利率为 0.3%，根据①式，本利和

$$y=500\times\left(36+\frac{36\times37}{2}\times0.3\%\right)=18\ 999(\text{元});$$

(3)依题意，在①式中，$y=2\ 000$，$r=0.3\%$，$n=12$.

$$x=\frac{y}{n+\frac{n(n+1)}{2}r}=\frac{2\ 000}{12+6\times13\times0.3\%}\approx163.48(\text{元}),$$

答　每月应存入 163.48 元.

例 2　定期自动转存模型 银行有另一种储蓄业务为定期存款自动转存．例如，储户某日存入一笔 1 年期定期存款，1 年后，如果储户不取出本利和．则银行自动办理转存业务，第 2 年的本金就是第 1 年的本利和. 按照定期存款自动转存的储蓄业务（暂不考虑利息税），我们来讨论以下问题：

(1)如果储户存入定期为 1 年的 P 元存款，定期年利率为 r，连存 n 年后，再取出本利和. 试求出储户 n 年后所得本利和的公式；

(2)如果存入 1 万元定期存款，存期 1 年，年利率为 2.79%，那么 5 年后共得本利和多少万元（精确到 0.001）？

解　(1)记 n 年后得到的本利和为 a_n，根据题意，

第 1 年存入的本金 P 元，1 年后到期利息为 $P\cdot r$，1 年后本利和为

$$a_1=P+P\cdot r=P(1+r)(\text{元});$$

2 年后到期利息为 $P(1+r)r$ 元，2 年后本利和为

$$a_2=P(1+r)+P(1+r)r=P(1+r)^2(\text{元});$$

……

各年的本利和是一个以 $a_1=P(1+r)$ 为首项，公比 $q=1+r$ 的等比数列 $\{a_n\}$，故 n 年后到期的本利和

$$a_n=a_1q^{n-1}=P(1+r)(1+r)^{n-1}=P(1+r)^n(\text{元})(\text{复利公式}).$$

(2)根据上式，5 年后本利和为

$$a_5=1\times(1+0.027\ 9)^5\approx1.148(\text{万元}).$$

答　5 年后得本利和约为 1.148 万元.

思考交流

银行整存整取定期储蓄年利率如表 1-5 所示.

表 1-5 （2007 年 3 月 18 日）

存 期	1 年	2 年	3 年	5 年
年利率/%	2.79	3.33	3.96	4.41

信息技术建议

尝试设计“寻找最好存款方式”的算法程序，并上机实现.

某公司欲将 10 万元存入银行 5 年，可按以下方案办理(不考虑利息税)：

(1)直接存入 5 年定期；

(2)先存 2 年定期，取出本利和后再存 3 年定期.

问题 1 计算出不同存法到期后的本利和，哪种存款方式更合算?

问题 2 你能设计出更好的存款方案吗?

练 习 1

1. 小蕾 2003 年 1 月 31 日存入银行若干万元，年利率为 1.98%，到 2004 年 1 月 31 日取款时，银行按国家规定扣除了利息税(税率为 20%——利息税占利息的百分数)138.64 元，则小蕾存入银行的本金介于(　　)元之间.

   A．1 万～2 万　B. 2 万～3 万　C. 3 万～4 万　D. 4 万～5 万

2. 小峰 2000 年元旦在银行存款 1 万元，年利率为1.98%，办理一年定期储蓄，以后按约定自动转存. 请计算小峰到 2008 年元旦得到的本利和．

例 3　分期付款模型 小华准备购买一台售价为 5 000 元的电脑，采用分期付款方式，并在一年内将款全部付清. 商场提出的付款方式为:购买后 2 个月第 1 次付款，再过 2 个月第 2 次付款……购买后 12 个月第 6 次付款，每次付款金额相同，约定月利率为 0.8%，每月利息按复利计算. 求小华每期付的金额是多少?

解 假定小华每期还款 x 元，第 k 个月末还款后的本利欠款数为 A_k 元，则

$A_2=5\ 000\times(1+0.008)^2-x$；

$A_4=A_2(1+0.008)^2-x$

$\quad=5\ 000\times(1+0.008)^4-1.008^2x-x$；

$A_6=A_4(1+0.008)^2-x$

$\quad=5\ 000\times(1+0.008)^6-1.008^4x-1.008^2x-x$；

…

$$A_{12}=5\ 000\times1.008^{12}-(1.008^{10}+1.008^{8}+1.008^{6}+1.008^{4}+1.008^{2}+1)x;$$

由题意年底还清，所以 $A_{12}=0$.

解得

$$x=\frac{5\ 000\times1.008^{12}}{1+1.008^{2}+1.008^{4}+1.008^{6}+1.008^{8}+1.008^{10}}\approx880.8(\text{元}).$$

答　小华每期付款的金额为 880.8 元.

思考交流

商场出售电脑，提出了如表 1-6 所示的 3 种付款方式，以供顾客选择. 请分别算出各种付款方式每次应付款金额，并填在表中. 选择一种你喜欢的付款方式，与同学交流，并说明选择的理由.

表 1-6

方案类别	分几次付清	付款方法	每期所付款额
1	3 次	购买后 4 个月第 1 次付款， 再过 4 个月第 2 次付款， 再过 4 个月第 3 次付款.	
2	6 次	购买后 2 个月第 1 次付款， 再过 2 个月第 2 次付款…… 购买后 12 个月第 6 次付款.	
3	12 次	购买后 1 个月第 1 次付款， 过 1 个月第 2 次付款…… 购买后 12 个月第 12 次付款.	

注：1. 每种方案中每次所付款额相同；
　　2. 规定月利率为 0.8%，每月利息按复利计算.

练　习 2

小杨 2007 年向银行贷款 20 万元用于购房，小杨住房贷款的年利率为 7.11%，并按复利计息. 若双方协议自 2008 年元月起生效，每年底还银行相同金额的贷款，到 2017 年年底全部还清(即用 10 年时间等额还款). 则小杨每年底还银行贷款的金额是多少元(结果精确到 1 元)?

习 题 1—4

1. 一架摄像机售价为 1 万元. 若采取分期付款，则需在 1 年内将款全部还清，商家提供下表所示的几种付款方案：

方案	付款次数	付 款 方 法
1	6 次	购买后 2 个月第 1 次付款，再过 2 个月第 2 次付款……购买后 12 个月第 6 次付款.
2	12 次	购买后 1 个月第 1 次付款，过 1 个月第 2 次付款……购买后 12 个月第 12 次付款.
3	3 次	购买后 4 个月第 1 次付款，再过 4 个月第 2 次付款，再过 4 个月第 3 次付款.

注：1. 每种方案中每次所付款额相同；

2. 规定月利率为 0.8%，每月利息按复利计算.

按各种方案付款每次需付款额分别是多少？

2. 小王想用分期付款的方式购买一套价值 18 万元的商品房. 首付 8 万元，贷款期限为 20 年，银行住房贷款年利率为7.1%，按复利计息. 如果小王按年还款，每年还款的数额相同，那么每年需要还款多少元？小王为购买此房共要付房款多少元？

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 数列的概念和简单的表示法

通过日常生活中的实例，了解数列的概念和几种简单的表示方法(列表、图像、通项公式)，了解数列是一种特殊函数.

2. 等差数列、等比数列

(1)通过实例，理解等差数列、等比数列的概念.

(2)探索并掌握等差数列、等比数列的通项公式及其前 n 项和的公式.

(3)能在具体的问题情境中，发现数列的等差或等比关系，并能用有关知识解决相应的问题.

(4)体会等差数列及等比数列与一次函数、指数函数的关系.

二、复习建议

1. 阅读课本、整理笔记、复习例题，总结出本章的基本知识和基本方法.

2. 归纳总结、对比记忆、做出本章小结，使本章知识系统化、条理化.

3. 请制作本章知识框图.

4. 本章复习时可思考以下问题：

(1)数列的基本概念有哪些?

(2)怎样理解等差数列和等比数列的概念? 它们作为两个最基本的数列模型，有哪些应用?

(3)等差数列和等比数列的性质、计算公式是什么?

(4)本章有哪些地方体现了函数思想? 等差、等比数列与一次函数和指数函数的关系是什么?

(5)学习本章后有哪些不解的问题?

(6)你能否归纳出几个最主要的问题?

5. 请同学互相交流学习本章的体会.

复 习 题 一

A 组

1. 数列$\{a_n\}$中，

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2n-1} & (n\text{ 为奇数}),\\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} & (n\text{ 为偶数}).\end{cases}$$

试写出这个数列的前 5 项.

2. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant 2)$，且 $a_1=1$，则这个数列的第 10 项为(　　).

A. 18　　B. 19　　C. 20　　D. 21

3. 等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_2+a_5=4$，$a_n=33$，则 n 为(　　).

A. 48　　B. 49　　C. 50　　D. 51

4. 等差数列$\{a_n\}$中，已知公差 $d=\dfrac{1}{2}$，且 $a_1+a_3+\cdots+a_{99}=60$，则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}$等于(　　).

A. 170　　B. 150　　C. 145　　D. 120

5. 在 a 和 b 两数之间插入 n 个数，使它们与 a，b 组成等差数列，则该数列的公差为(　　).

A. $\dfrac{b-a}{n}$　　B. $\dfrac{b-a}{n+1}$　　C. $\dfrac{a-b}{n+1}$　　D. $\dfrac{b-a}{n+2}$

6. (1)若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等差数列，公差分别为 d_1，d_2，则数列$\{a_{2n}\}$，$\{a_n+2b_n\}$是不是等差数列？如果是，公差是多少？

(2)若数列$\{a_n\}$是等差数列，$m+n=p+q$，$m,n,p,q\in\mathbf{N}_+$，试分析 a_m+a_n 与 a_p+a_q 的关系.

7. 观察下面的数阵，容易看出，第 n 行最右边的数是 n^2，那么第 20 行最左边的数是几？第 20 行所有数的和是多少？

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & 3 & 4 & & & \\
 & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & \\
 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \\
17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}$$

8. 小明玩投放石子游戏，从 A 出发走 1 m 放 1 枚石子，第二次走 4 m 又放了 3 枚石子，第三次走 7 m 再放 5 枚石子，再走 10 m 放 7 枚石子……照此规律最后走到 B 处放下 35 枚石子. 从 A 到 B 的路程有多远？

9. 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_n=2\times 3^{n-1}$，则由此数列的偶数项所组成的新数列的前 n 项和为(　　).

A. 3^n-1　　B. $3(3^n-1)$　　C. $\dfrac{1}{4}(9^n-1)$　　D. $\dfrac{3}{4}(9^n-1)$

10. 一张报纸，其厚度为 a，面积为 b，现将此报纸对折(即沿对边中点的连线折叠)7 次. 这时报纸的厚度和面积分别为(　　).

A. $8a$，$\frac{1}{8}b$　　B. $64a$，$\frac{1}{64}b$　　C. $128a$，$\frac{1}{128}b$　　D. $256a$，$\frac{1}{256}b$

11. 生物学指出：生态系统中，在输入一个营养级的能量中，大约10%的能量能够流到下一个营养级. 在$H_1 \to H_2 \to H_3$这个生物链中，若能使H_3获得10 kJ的能量，则需H_1提供的能量为(　　).

A. 10^5 kJ　　B. 10^4 kJ　　C. 10^3 kJ　　D. 10^2 kJ

12. 1999年11月1日起，全国储蓄存款开始征收利息税，利息税的税率是20%，即储蓄利息的20%由各银行储蓄点代扣代收. 某人在1999年11月存入人民币1万元，存期一年，年利率为2.25%，到期时可得税后本利和共计(　　)元.

A. 10 225　　B. 10 180　　C. 11 800　　D. 12 250

13. 某国有企业随着体制改革和技术创新，给国家创造的利税逐年增加．下面是近四年的利税值(万元)：

1 000，1 100，1 210，1 331.

如果按照这个规律发展下去，下一年应给国家创造多少利税？

14. (1)求数列$1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{4}$，$3\frac{1}{8}$，…前n项之和；

(2)求数列5，55，555，…前n项之和.

15. 某城市的绿化建设有如下统计数据：

年　份	1999	2000	2001	2002
绿化覆盖率/%	17.0	17.8	18.6	19.4

如果以后的几年继续依此速度发展绿化，那么到哪一年该城市的绿化覆盖率可超过23.4%？

16. (1)若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等比数列，则数列$\{a_{2n}\}$，$\{a_n \cdot b_n\}$是等比数列吗？

(2)已知$\{a_n\}$是等比数列，且$m+n=p+q$，试比较$a_m \cdot a_n$与$a_p \cdot a_q$的关系.

B　组

1. 设$\{a_n\}$是递增等差数列，前三项的和为12，前三项的积为48，则数列$\{a_n\}$的首项是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 6

2. 一个蜂巢里有1只蜜蜂，第一天，它飞出去带回了5个伙伴；第二天，6只蜜蜂飞出去各自带5个伙伴……如果这个过程继续下去，那么第6天所有的蜜蜂归巢后，蜂巢中共有蜜蜂(　　)只.

A. $\frac{6(6^6-1)}{6-1}$　　B. 6^6　　C. 6^3　　D. 6^2

3. $\{a_n\}$为等差数列，S_n为前n项和，$S_5<S_6$，$S_6=S_7$，$S_7>S_8$，则下列说法错误的是(　　).

A. $d<0$　　B. $a_7=0$

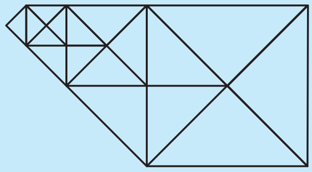
C. $S_9>S_5$　　D. S_6和S_7均为S_n的最大值

4. 计算机是将信息转换成二进制数进行处理的，二进制即“逢二进一”. 如$(1101)_2$表示二进制的数，将它转换成十进制的形式是$1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=13$，那么将二进制数$\underbrace{11\cdots1}_{16位}$转换成十进制数的形式是(　　).

A. $2^{17}-2$　　B. $2^{16}-1$　　C. $2^{16}-2$　　D. $2^{15}-1$

5. 假设老鼠每月生子一次，每次生 12 只，均雌雄各半，小鼠下月又生小鼠. 现在有雌雄两只老鼠，在 1 月生小鼠 12 只，2 月亲代和子代每对又生 12 只，此后每月，子又生孙，孙又生子……那么到 12 月份，你能算出总共有多少只老鼠吗？

6. 如图，有边长为 1 的正方形，取其对角线的一半，构成新的正方形，再取新正方形对角线的一半，构成正方形……如此形成一个边长不断缩小的正方形系列.



（第 6 题）

(1)求这一系列正方形的面积所构成的数列，并证明它是一个等比数列；

(2)从原始的正方形开始，到第 9 次构成新正方形时，共有 10 个正方形，求这 10 个正方形面积的和；

(3)如果把这一过程无限制地延续下去，你能否预言一下，全部正方形面积相加“最终”会达到多少？

7. 摄影胶片绕在盘上，空盘时盘心直径 80 mm，满盘时直径为160 mm，已知胶片厚度是 0.1 mm. 则满盘时，一盘胶片长约为多少？（以胶片外侧为半径计算）

C 组

1. 在一次人才招聘会上，甲、乙两家公司开出的工资标准分别是：

甲公司：第一年月工资 1 500 元，以后每年月工资比上一年月工资增加 230 元；

乙公司：第一年月工资 2 000 元，以后每年月工资在上一年月工资基础上递增 5%.

设某人年初想从甲、乙两公司中选择一家公司去工作.

(1)若此人分别在甲公司或乙公司连续工作 n 年，则他在两公司第 n 年的月工资分别为多少？

(2)若此人在一家公司连续工作 10 年，则从哪家公司得到的报酬较多？

2. 假设某市 2004 年新建住房 400 万 m^2，其中有 250 万 m^2 是中低价房. 预计在今后的若干年内，该市每年新建住房面积平均比上一年增长 8%. 另外，每年新建住房中，中低价房的面积均比上年增加 50 万 m^2. 请问：

(1)该市历年所建中低价房的累计面积(以 2004 年为累计的第一年)到哪一年底将首次不少于 4 750 万 m^2？

(2)到 2009 年底，当年建造的中低价房的面积约占该年新建住房面积的百分之几？

课题学习

教育储蓄

一、课题背景

“教育储蓄”，是一种零存整取的定期储蓄存款方式，是国家为了鼓励城乡居民以储蓄存款方式，为子女接受非义务教育积蓄资金，从而促进教育事业发展而开办的. 目前越来越多的家长意识到，为了孩子将来能接受良好的高等教育，为子女办理教育储蓄是一种较为理想的投资. 为了解决“教育储蓄”的一系列计算问题，加深对它的认识，请收集“教育储蓄”的有关资料，例如可以通过以下途径：网上主题词搜索、各大银行直接咨询. 重点确认以下信息：教育储蓄的适用对象，储蓄类型，最低起存金额、每户存款本金的最高限额，支取方式，银行现行的各类、各档存款利率，零存整取、整存整取的本息计算方法. 请根据得到的信息，解决以下问题：

1. 依教育储蓄的方式，每月存 50 元，连续存 3 年，到期（3 年）时一次可支取本利共多少元？

2. 依教育储蓄的方式，每月存 a 元，连续存 6 年，到期（6 年）时一次可支取本利共多少元？

3. 依教育储蓄的方式，每月存 50 元，连续存 3 年，到期（3 年）时一次可支取本利比同档次的“零存整取”多收益多少元？

4. 如果想在 3 年后一次支取教育储蓄本利合计 1 万元，每月应存入多少元？

5. 如果想在 3 年后一次支取教育储蓄本利合计 a 元，每月应存入多少元？

6. 依教育储蓄的方式，原打算每月存 100 元，连续存 6 年，可是到 4 年时，学生需要提前支取全部本利，一次可支取本利共多少元？

7. 依教育储蓄的方式，每月存 150 元，连续存 6 年，到期一次可支取本利共多少元？

*8. 比较教育储蓄与其他储蓄方式，如以每月可存 100 元，6 年后使用为例，探讨以现行的利率标准，其他储蓄方式可能的最大收益，将得到的结果与教育储蓄比较.

*9. 自己设计其他计算题（如自己设立指标，计算并比较 3 年期和 6 年期教育储蓄的相对收益的大小；两项专项储蓄方案等；设计一

说　明

有 * 标记的问题仅供学生选做.

个回报率更高的投资方案等).

*10. 将解决过程中出现的数学模型(如单利增长模型或复利增长模型)进一步抽象出来,思考这些模型是否有其他应用.

二、实施建议

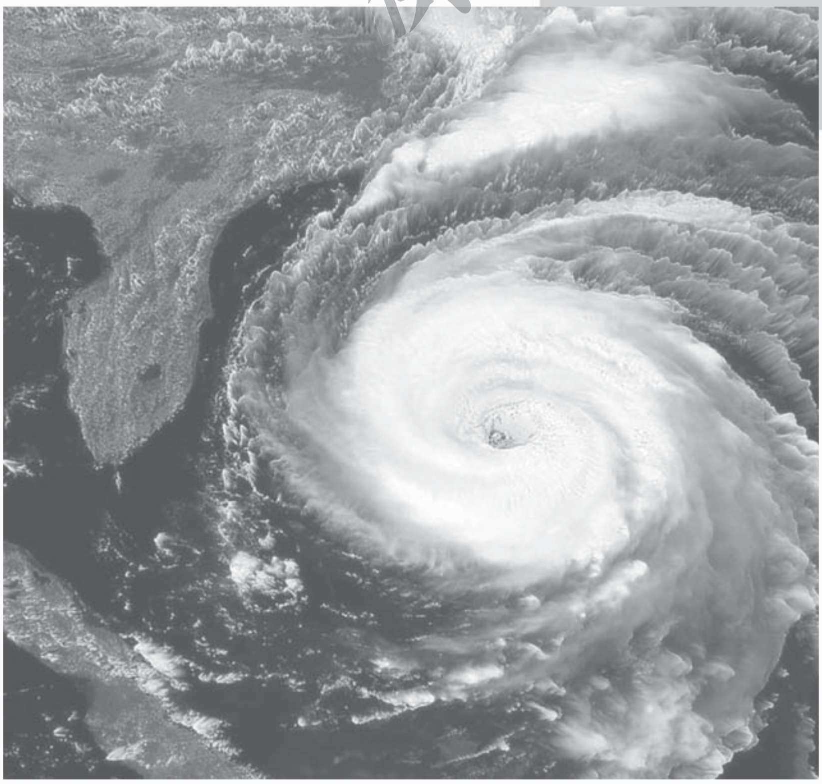
1. 可以组成课题学习小组,集体讨论,互相启发,分工合作,根据问题确定调查提纲或待查信息,利用课余时间上网或到银行进行相应的调查.

2. 注意合理使用计算机或计算器等数学工具.

第二章 解三角形

台风中心位于某沿海城市正东方向 300 km 处，正以 40 km/h的速度向西北方向移动，距离台风中心 250 km 范围内将会受其影响．如果台风风速不变，那么该市从何时起要遭受台风影响？这种影响持续多长时间？解决此类问题的有力工具之一便是解三角形的有关知识．

我们在初中曾经学习过直角三角形的边角关系．在这一章里，我们将运用三角函数及向量等知识研究任意三角形边、角之间的关系，推导出正弦定理和余弦定理，并运用它们解决一些与测量和几何计算有关的实际问题．



§1　正弦定理与余弦定理

1.1　正 弦 定 理

问题提出

三角形的边与角之间有什么数量关系呢？

我们分别用 a,b,c 表示△ABC 的边 BC,CA,AB，用 A,B,C 表示∠BAC，∠CBA，∠ACB（如图 2-1）.

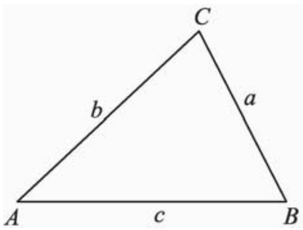


图　2-1

我们先从特殊的三角形开始研究.

若△ABC 是直角三角形，且 $C=90°$，如图 2-2 所示，则由

$$\sin A=\frac{a}{c},\sin B=\frac{b}{c},$$

可知
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=c.$$

因为
$$C=90°,\sin C=1,$$

所以
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

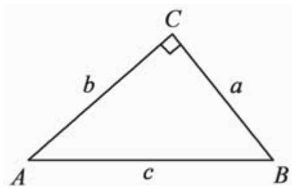


图　2-2

这个优美的关系式对等边三角形无疑也成立，对其他的三角形是否成立呢？

分析理解

如图 2-3 所示，以 A 为原点，以射线 AB 的方向为 x 轴正方向建立直角坐标系，C 点在 y 轴上的射影为 C'.

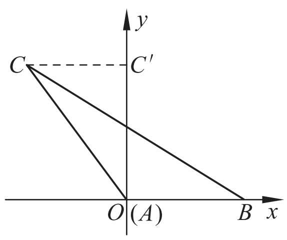


图　2-3

因为向量$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BC}$在 y 轴上的射影均为$|\overrightarrow{OC'}|$，即

$$|\overrightarrow{OC'}|=|\overrightarrow{AC}|\cos(A-90°)=b\sin A,$$

$$|\overrightarrow{OC'}|=|\overrightarrow{BC}|\sin B=a\sin B,$$

所以
$$a\sin B=b\sin A,$$

即
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

同理，
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

问题与思考

你能用其他方法证明这一关系式吗？

所以 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

若 A 为锐角或直角，也可以得到同样的结论 .

这样，我们得到下面的定理.

正弦定理 在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.}$$

我们运用由特殊到一般的方法发现了正弦定理，这种思想方法经常用于发现数学规律.

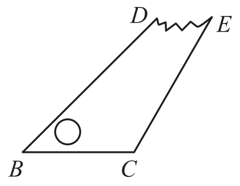


图 2-4

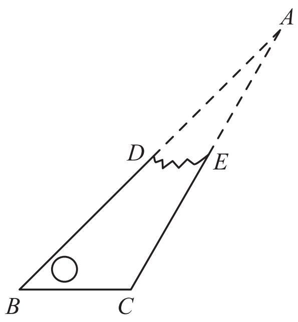


图 2-5

信息技术建议

解三角形的实际问题中，数字计算往往较繁，这时可借助计算器或其他的计算工具.

例如，在例 2 中，已知 $\sin C\approx 0.848\ 5$，求 C 时，即可利用计算器. 过程如下：设定 DEG 模式，输入 0.848 5，依次按 $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{=}$ 键，即得到 58.05.

例 1 某地出土一块类似三角形刀状的古代玉佩(如图 2-4)，其一角已破损. 现测得如下数据：$BC=2.57$ cm，$CE=3.57$ cm，$BD=4.38$ cm，$B=45°$，$C=120°$. 为了复原，请计算原玉佩两边的长(结果精确到0.01 cm).

分析 如图 2-5 所示，将 BD，CE 分别延长相交于一点 A. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 BC 的长及角 B 与 C，可以通过正弦定理求 AB，AC 的长.

解 将 BD，CE 分别延长相交于一点 A. 在 $\triangle ABC$ 中，

$$BC=2.57\text{ cm},\ B=45°,\ C=120°,$$

$$A=180°-(B+C)=180°-(45°+120°)=15°.$$

因为 $$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B},$$

所以 $$AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{2.57\sin 45°}{\sin 15°}.$$

利用计算器算得

$$AC\approx 7.02(\text{cm}).$$

同理，$$AB\approx 8.60(\text{cm}).$$

答 原玉佩两边的长分别约为 7.02 cm，8.60 cm.

下面我们来解决章头提到的问题.

例 2 台风中心位于某市正东方向 300 km 处，正以 40 km/h 的速度向西北方向移动，距离台风中心 250 km 范围内将会受其影响. 如果台风风速不变，那么该市从何时起要遭受台风影响？这种影响持续多长时间(结果精确到 0.1 h)？

分析　如图 2-6 所示，台风沿着 BD 运动时，由于 $|AB|=300$ km$>$250 km，所以开始台风影响不了城市 A，由点 A 到台风移动路径 BD 最小距离 $|AE|=|AB|\cdot\sin 45^\circ=300\times\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 150\times 1.41=211.5$ (km)$<$250 km. 所以台风在运动过程中肯定要影响城市 A.

这就要在 BD 上求影响 A 的始点 C_1 和终点 C_2，然后根据台风的速度计算台风从 C_1 到 C_2 持续的时间.

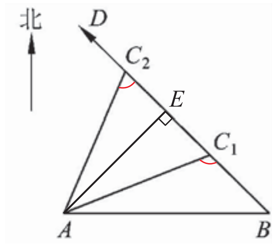


图　2-6

解　设台风中心从点 B 向西北方向沿射线 BD 移动，该市位于点 B 正西方向 300 km 处的点 A.

假设经过 t h，台风中心到达点 C，则在 $\triangle ABC$ 中，$AB=300$ km，$AC=250$ km，$BC=40t$ km，$B=45^\circ$，由正弦定理

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A},$$

知
$$\sin C=\frac{AB\sin B}{AC}=\frac{300\sin 45^\circ}{250}=\frac{3}{5}\sqrt{2}\approx 0.8485.$$

利用计算器算得角 C 有两个解

$$C_1\approx 121.95^\circ,\quad C_2\approx 58.05^\circ.$$

当 $C_1\approx 121.95^\circ$ 时，

$$\begin{aligned}A&=180^\circ-(B+C_1)\\&\approx 180^\circ-(45^\circ+121.95^\circ)\\&=13.05^\circ,\end{aligned}$$

所以
$$BC_1=\frac{AC_1\sin A}{\sin B}=\frac{250\sin 13.05^\circ}{\sin 45^\circ}\approx 79.83\ (\text{km}),$$

$$t_1=\frac{BC_1}{40}=\frac{79.83}{40}\approx 2.0\ (\text{h}).$$

同理，当 $C_2\approx 58.05^\circ$ 时，$BC_2\approx 344.4$ km，$t_2\approx 8.6$ h.

$$t_2-t_1\approx 8.6-2.0=6.6\ (\text{h}).$$

答　约 2 h 后将要遭受台风影响，持续约 6.6 h.

问题与思考

你还能用其他的方法解决这个问题吗?

练　习　1

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=0.15$，$C=103.4^\circ$，$B=75.85^\circ$. 求 c 的长.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，$c=4$，$a=2$，$C=45^\circ$，则 $\sin A=$__________.

正弦定理是揭示三角形边、角之间数量关系的重要公式，我们来讨论与其有关的几个问题.

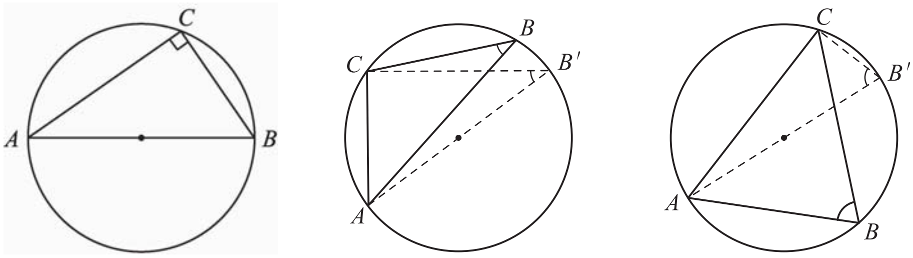
问题 1　由例 2 我们发现，已知两边和其中一边的对角，解三角形时会出现两解的情况. 还会出现其他情况吗? 你能从代数或几何角度给出解释吗?

建　议

有兴趣的同学对这些问题作完整讨论，并将结果以学习报告的形式呈现出来.

问题 2 如图 2-7(1)所示，在 Rt△ABC 中，斜边 AB 是△ABC 外接圆的直径(设 Rt△ABC 外接圆的半径为 R)，因此

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$



(1) (2) (3)

图 2-7

这个结论对于任意三角形(图 2-7(2)，图 2-7(3))是否成立?

问题 3 在 Rt△ABC 中，$C=90°$，则△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab$. 对于任意△ABC，已知 a，b 及 C，则△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$. 你能证明这一结论吗?

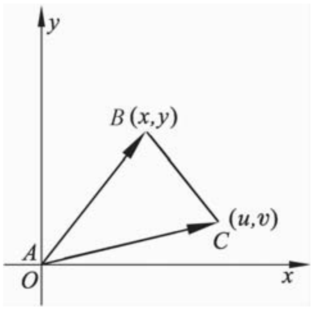


图 2-8

例 3 如图 2-8，在△ABC 中，$\overrightarrow{AB}=(x,y)$，$\overrightarrow{AC}=(u,v)$. 求证：△$ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|xv-yu|$.

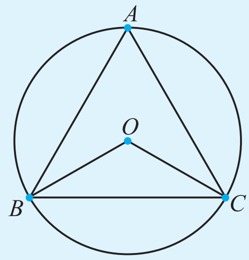
证明
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin A\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2\sin^2 A}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2(1-\cos^2 A)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-(|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|)^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}.\end{aligned}$$

因为 $\overrightarrow{AB}=(x,y)$，$\overrightarrow{AC}=(u,v)$，

所以
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)-(xu+yv)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(xv-yu)^2}\\&=\frac{1}{2}|xv-yu|.\end{aligned}$$

练 习 2

1. 在$\triangle ABC$中，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$A=\frac{\pi}{4}$，则$B=$________.
2. 在$\triangle ABC$中，分别根据下列条件解三角形，其中有两解的是(　　).
   A. $a=7$，$b=14$，$A=30°$　　B. $a=30$，$b=25$，$A=150°$
   C. $a=72$，$b=50$，$A=135°$　　D. $a=30$，$b=40$，$A=26°$
3. 如图，$\triangle ABC$是半径为R的$\odot O$的内接正三角形. 求$\triangle ABC$的边长和$\triangle OBC$的外接圆半径.
4. $\triangle ABC$的三个顶点是$A(-5,0)$，$B(3,-3)$，$C(0,2)$. 求$\triangle ABC$的面积.



(第 3 题)

1.2　余 弦 定 理

问题提出

在三角形中，已知两角及一边，或已知两边和其中一边的对角，可以利用正弦定理求其他的边和角. 那么，已知两边及其夹角，怎么求出此角的对边呢？已知三条边，又怎么求出它的三个角呢？

分析理解

我们利用向量来研究.

如图 2-9 所示，根据向量的数量积，可以得到

$$\begin{aligned}a^2&=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2\\&=\overrightarrow{AC}^2-2|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos A+\overrightarrow{AB}^2\\&=b^2-2bc\cos A+c^2,\end{aligned}$$

即
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

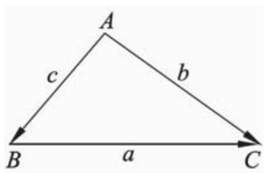


图　2-9

同理可证

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

由此得到下面定理.

余弦定理　三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍，即

问题与思考

余弦定理能解决上面提出的第二个问题吗？

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

例 4 如图 2-10 所示，有两条直线 AB 和 CD 相交成 $80°$ 角，交点是 O. 甲、乙两人同时从点 O 分别沿 OA，OC 方向出发，速度分别是 4 km/h，4.5 km/h. 3 时后两人相距多远(结果精确到 0.1 km)？

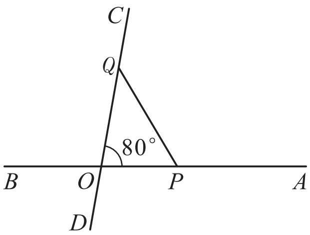


图 2-10

分析 经过 3 时，甲到达点 P，$OP=4\times3=12$(km)，乙到达点 Q，$OQ=4.5\times3=13.5$(km). 问题转化为在 $\triangle OPQ$ 中，已知 $OP=12$ km，$OQ=13.5$ km，$\angle POQ=80°$，求 PQ 的长.

解 经过 3 时后，甲到达点 P，$OP=4\times3=12$(km)，乙到达点 Q，$OQ=4.5\times3=13.5$(km). 依余弦定理，知

$$\begin{aligned}PQ&=\sqrt{OP^2+OQ^2-2OP\cdot OQ\cos\angle POQ}\\&=\sqrt{12^2+13.5^2-2\times12\times13.5\cos80°}\\&\approx16.4(\text{km}).\end{aligned}$$

答 3 时后两人相距约 16.4 km.

例 5 图 2-11 是公元前约 400 年古希腊数学家泰特托斯用来构造无理数 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，…的图形. 试计算图中线段 BD 的长度及 $\angle DAB$ 的大小(长度精确到 0.1，角度精确到 $1°$).

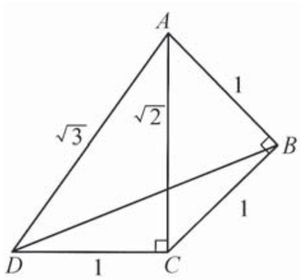


图 2-11

解 在 $\triangle BCD$ 中，$BC=1$，$CD=1$，$\angle BCD=135°$.

因为 $$\begin{aligned}BD^2&=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD\\&=1^2+1^2-2\times1\times1\cos135°\\&=2+\sqrt{2},\end{aligned}$$

所以 $$BD\approx1.8.$$

在 $\triangle ABD$ 中，$AB=1$，$BD=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$AD=\sqrt{3}$.

因为 $$\begin{aligned}\cos\angle DAB&=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}\\&=\frac{1^2+(\sqrt{3})^2-(2+\sqrt{2})}{2\times1\times\sqrt{3}}\\&\approx0.1691,\end{aligned}$$

所以 $$\angle DAB\approx80°.$$

思考交流

你还能用其他方法求线段 BD 的长度及 $\angle DAB$ 的大小吗？

用余弦定理重新解答例 2，由此你有什么想法？

小资料

海伦公式与秦九韶三斜求积公式

寻求三角形面积的计算方法在历史上曾经是一个数学热点问题，中外古代许多数学家都为此付出过艰辛的努力．

古希腊几何学家海伦(Heron，公元 62 年左右)在他的著作《度量论》一书中提出并证明了三角形的面积公式：

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 S 表示三角形的面积，a,b,c 表示三角形的三边长，p 表示三角形的半周长，即 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$．海伦公式简单、轮换对称，让人看一眼便铭记在心，并激发人们探索的欲望．

我国南宋数学家秦九韶也独立地发现了类似的求三角形面积的公式：

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$

思考：秦九韶求积公式与余弦定理有什么关系？

秦九韶（1202—1261），字道古，是我国古代最有成就的数学家之一，著有《数学九章》．

秦九韶是他那个民族，他那个时代，并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一．

——美国科学史家
萨顿

练　习

1. 在$\triangle ABC$中，已知 $b=1,c=2,A=60^\circ$，则 $a=$__________.
2. $\triangle ABC$ 的三边之比为 $3:5:7$．求这个三角形的最大角．
3. 在$\triangle ABC$中，已知 $b=2.730$，$c=4.297$，$A=58^\circ30'$．解这个三角形(边长精确到 0.001，角度精确到 $1'$)．

习 题 2—1

A 组

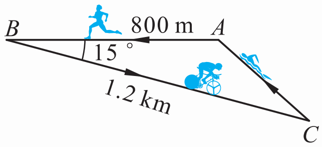
1. 在$\triangle ABC$中，若$a=18$，$b=24$，$A=44°$，则此三角形解的情况为(　　).

   A. 无解　　B. 两解　　C. 一解　　D. 解的个数不能确定

2. 在$\triangle ABC$中，若$(a+b+c)(c+b-a)=3bc$，则$A=$(　　).

   A. $150°$　　B. $120°$　　C. $60°$　　D. $30°$

3. 某体育学校决定修建一条三角形多功能比赛通道(如图)，AB段是跑道，BC段是自行车道，CA段是游泳道. 试根据图中数据，计算游泳道的长度(精确到 1 m).



(第 3 题)

4. 平行四边形两对角线的长分别为a和b，两对角线的一个交角为θ，$0°<\theta<90°$. 求该平行四边形的面积.

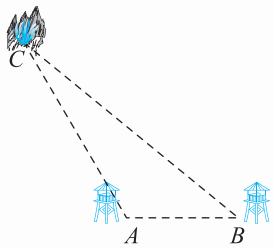
5. 在$\triangle ABC$中，若$c^2=a^2+b^2$，则$\triangle ABC$是直角三角形且$C=90°$. 试问：

   (1)a，b，c满足什么关系时，$\triangle ABC$是锐角三角形或钝角三角形?

   (2)已知锐角三角形的边长分别为 1，2，a. 求实数a的取值范围.

6. $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$是作用于同一质点的两个力，$|\boldsymbol{F}_1|=86$ N，$|\boldsymbol{F}_2|=83$ N，且$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$的夹角为$77°12'$. 求合力$\boldsymbol{F}$的大小及合力与较大力所成的角θ(力的大小精确到 1 N，角度精确到$1°$).

7. 如图，某林场为了及时发现火情，在林场中设立了两个观测点A和B. 某日两个观测点的林场人员分别观测到C处有险情. 在A处观测到火情发生在北偏西$40°$方向，而在B处观测到火情发生在北偏西$60°$方向，已知B在A的正东方向10 km处. 那么火场C与两观测点A，B的距离分别是多少(精确到 0.1 km)?



(第 7 题)

B 组

1. 下面是一道选择题的两种解法，两种解法看似都对，可结果并不一致，问题出在哪里? 在$\triangle ABC$中，$a=x$，$b=2$，$B=45°$，若$\triangle ABC$有两解，则x的取值范围是(　　).

   A. $(2,+\infty)$　B. $(0,2)$　C. $(2,2\sqrt{2})$　D. $(\sqrt{2},2)$

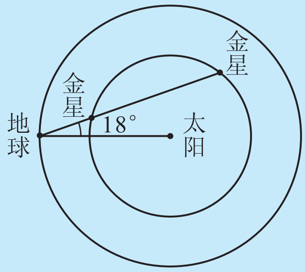
   解法 1　$\triangle ABC$有两解，$a\sin B<b<a$，$x\sin 45°<2<x$，

   即$2<x<2\sqrt{2}$，故选 C.

   解法 2　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，$\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{x\sin 45°}{2}=\dfrac{\sqrt{2}x}{4}$.

   $\triangle ABC$有两解，$b\sin A<a<b$，$2\times\dfrac{\sqrt{2}x}{4}<x<2$，即$0<x<2$，故选 B.

2. 地球与金星的公转轨道分别是直径为 2.98×10^{8} km 和 2.14×10^{8} km的近似圆，圆心为太阳. 某时刻，地球和金星的连线与地球和太阳的连线成 18°的角（如图）. 求此时地球与金星之间的距离（地球、金星、太阳均视为点，结果保留 3 个有效数字）.



（第 2 题）

3. 运用函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\pi)$的图像及正弦定理，说明平面几何中的定理“在三角形中，较大的边所对的角也较大，较小的边所对的角也较小”的正确性.

§2　三角形中的几何计算

正弦定理、余弦定理是两个重要的定理，在解决与三角形有关的几何计算问题中有着广泛的应用. 下面举例说明.

例 1　如图 2-12 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB=5$，$AC=9$，$\angle BCA=30°$，$\angle ADB=45°$. 求 BD 的长.

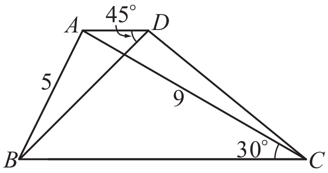


图　2-12

解　在$\triangle ABC$ 中，$AB=5$，$AC=9$，$\angle BCA=30°$. 由正弦定理，得

$$\frac{AB}{\sin\angle BCA}=\frac{AC}{\sin\angle ABC},$$

$$\sin\angle ABC=\frac{AC\sin\angle BCA}{AB}=\frac{9\sin 30°}{5}=\frac{9}{10}.$$

因为 $AD \parallel BC$，所以$\angle BAD=180°-\angle ABC$，于是

$$\sin\angle BAD=\sin\angle ABC=\frac{9}{10}.$$

同理，在$\triangle ABD$ 中，$AB=5$，$\sin\angle BAD=\frac{9}{10}$，$\angle ADB=45°$，解得

$$BD=\frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

答　BD 的长为$\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

例 2　一次机器人足球比赛中，甲队 1 号机器人由点 A 开始作匀速直线运动，到达点 B 时，发现足球在点 D 处正以 2 倍于自己的速度向点 A 作匀速直线滚动. 如图 2-13 所示，已知 $AB=4\sqrt{2}$ dm，$AD=17$ dm，$\angle BAC=45°$. 若忽略机器人原地旋转所需的时间，则该机器人最快可在何处截住足球?

说　明

dm 表示分米.

分析　机器人最快截住足球的地方正是机器人与足球同时到达的地方，设为 C 点. 利用速度建立 AC 与 BC 之间的关系，再利用余弦定理便可建立方程解决问题.

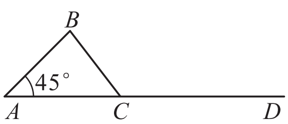


图　2-13

解　设该机器人最快可在点 C 处截住足球，点 C 在线段 AD 上. 设 $BC=x$ dm，由题意，$CD=2x$ dm.

$$AC=AD-CD=(17-2x)(\text{dm}).$$

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A,$$

即　$x^2=(4\sqrt{2})^2+(17-2x)^2-2\times4\sqrt{2}\times(17-2x)\cos 45°$.

解得　$$x_1=5\text{ dm},\quad x_2=\frac{37}{3}\text{ dm}.$$

所以　$AC=17-2x=7$ dm,或 $AC=-\frac{23}{3}$ dm(不合题意,舍去).

答　该机器人最快可在线段 AD 上离点 A 7 dm 的点 C 处截住足球.

思　考

例 2 中最后 AC 为什么会出现负值?你能解释原因吗?

例 3　如图 2-14 所示,已知⊙O 的半径是 1,点 C 在直径 AB 的延长线上,$BC=1$,点 P 是⊙O 上半圆上的一个动点,以 PC 为边作等边三角形 PCD,且点 D 与圆心分别在 PC 的两侧.

(1) 若$\angle POB=\theta$,试将四边形 $OPDC$ 的面积 y 表示成 θ 的函数;

(2) 求四边形 $OPDC$ 面积的最大值.

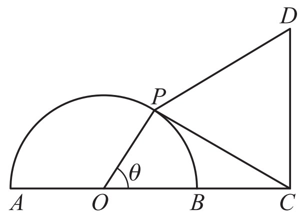


图　2-14

分析　四边形 $OPDC$ 可以分成△OPC 与△PCD. $S_{\triangle OPC}$ 可用 $\frac{1}{2}OP\cdot OC\sin\theta$ 表示;而求△PCD 的面积关键在于求出边长 PC,在△OPC 中利用余弦定理即可求出;至于面积最值的获得,则可通过三角函数知识解决.

解　(1)在△OPC 中,由余弦定理,得

$$\begin{aligned}PC^2&=OP^2+OC^2-2OP\cdot OC\cos\theta\\&=5-4\cos\theta,\quad(0<\theta<\pi)\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}y&=S_{\triangle OPC}+S_{\triangle PCD}\\&=\frac{1}{2}\times1\times2\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\theta)\\&=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5\sqrt{3}}{4}.\quad(0<\theta<\pi)\end{aligned}$$

(2)当 $\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,即 $\theta=\frac{5\pi}{6}$时,$y_{max}=2+\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

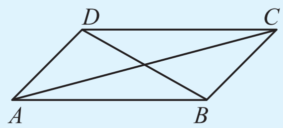
答　四边形 $OPDC$ 面积的最大值为 $2+\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

说　明

y_{max} 表示 y 取得的最大值. 其中下标 max 是英文单词 maximum 的缩写.

练　习

如图,在▱$ABCD$ 中,$\angle DAB=45°$. 求证:$AC^2\cdot BD^2=AB^4+AD^4$.



习 题 2—2

A 组

1. 在$\triangle ABC$中，$A=60^\circ$，$b=1$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，则$\dfrac{a}{\sin A}$的值为（　　）.

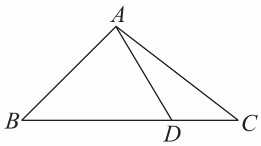
A. $\dfrac{8\sqrt{3}}{81}$　　B. $\dfrac{26\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$　　D. $2\sqrt{7}$

2. $\triangle ABC$中，$B=60^\circ$，$C=45^\circ$，$BC=8$，D是边BC上的一点，且$\overrightarrow{BD}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\overrightarrow{BC}$，则$AD$的长为（　　）.

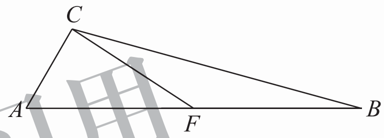
A. $4(\sqrt{3}-1)$　　B. $4(\sqrt{3}+1)$　　C. $4(3-\sqrt{3})$　　D. $4(3+\sqrt{3})$

3. 在$\triangle ABC$中，已知$B=45^\circ$，D是BC边上的一点，$AD=5$，$AC=7$，$DC=3$. 求AB的长.

4. 在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$A=60^\circ$，F为AB的中点，且$CF^2=AC\cdot BC$. 求AC的长.



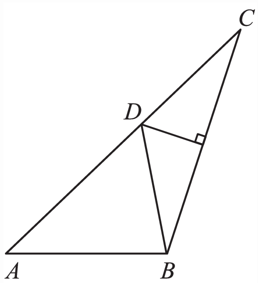
（第 3 题）



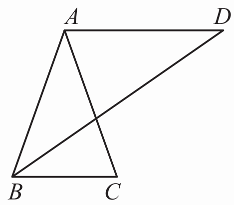
（第 4 题）

5. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$AC=4$，线段CB的垂直平分线交线段AC于点D，$DA-DB=1$. 求BC的长及$\cos\angle ACB$的值.

6. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=3$，$BC=2$，B的平分线交过点A且与BC平行的线于D. 求$\triangle ABD$的面积.



（第 5 题）

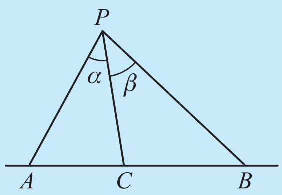


（第 6 题）

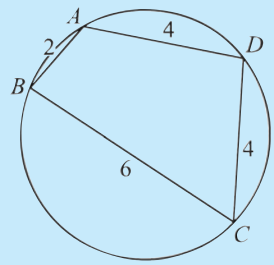
B　组

1. 如图，一条直线上有三点 A，B，C，点 C 在点 A 与点 B 之间，点 P 是此直线外一点. 设$\angle APC=\alpha$，$\angle BPC=\beta$.

   求证：$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\dfrac{\sin\alpha}{PB}+\dfrac{\sin\beta}{PA}$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB=2$，$BC=6$，$CD=DA=4$. 求四边形 $ABCD$ 的面积.
3. 在$\triangle ABC$ 中，三边长为连续的正整数，且最大角是最小角的 2 倍. 求此三角形的三边长.

§3 解三角形的实际应用举例

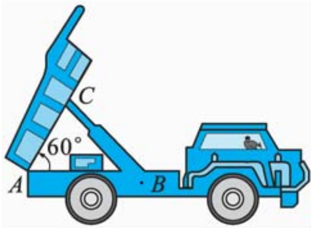


图 2-15

在解决一些与三角形有关的实际问题时，正弦定理、余弦定理有着重要的作用. 下面举例说明.

例 1 自动卸货汽车采用液压机构. 设计时需要计算油泵顶杠 BC 的长度，如图 2-15 所示. 已知车厢的最大仰角为 60°(指车厢 AC 与水平线夹角)，油泵顶点 B 与车厢支点 A 之间的距离为1.95 m，AB 与水平线之间的夹角为 $6°20'$，AC 长为 1.40 m. 计算 BC 的长度(结果精确到 0.01 m).

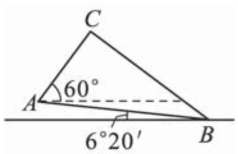


图 2-16

分析 这个问题就是在$\triangle ABC$(如图 2-16)中，已知 $AB=1.95$ m，$AC=1.40$ m，$\angle BAC=60°+6°20'=66°20'$，求 BC 的长.

解 由余弦定理，得

$$\begin{aligned}BC^2&=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A\\&=1.95^2+1.40^2-2\times1.95\times1.40\cos 66°20'\\&\approx 3.571,\end{aligned}$$

所以 $$BC\approx 1.89(\text{m}).$$

答 顶杆 BC 约长 1.89 m.

说明

利用正弦定理、余弦定理可以解决不能到达的实际测量问题.

例 2 如图 2-17 所示，两点 C，D 与烟囱底部在同一水平直线上，在点 C_1，D_1，利用高为 1.5 m 的测角仪器，测得烟囱的仰角分别是 $\alpha=45°$和 $\beta=60°$，C，D 间的距离是 12 m. 计算烟囱的高 AB(结果精确到 0.01 m).

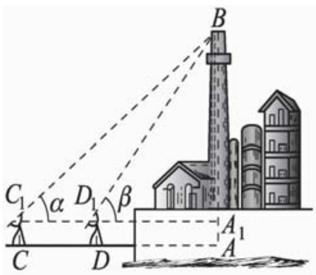


图 2-17

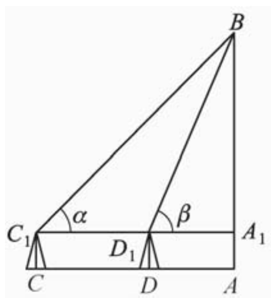


图 2-18

分析 如图 2-18 所示，因为 $AB=AA_1+A_1B$，又已知 $AA_1=1.5$ m，所以只要求出 A_1B 即可.

解 在$\triangle BC_1D_1$ 中，$\angle BD_1C_1=180°-60°=120°$，$\angle C_1BD_1=$

$60°-45°=15°$，由正弦定理，得

$$\frac{C_1D_1}{\sin\angle C_1BD_1}=\frac{BC_1}{\sin\angle BD_1C_1},$$

$$BC_1=\frac{C_1D_1\sin\angle BD_1C_1}{\sin\angle C_1BD_1}=\frac{12\sin 120°}{\sin 15°}=(18\sqrt{2}+6\sqrt{6})(\text{m}),$$

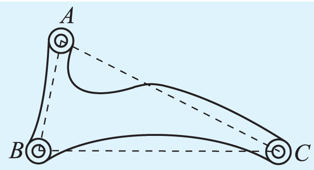
从而　　$A_1B=\frac{\sqrt{2}}{2}BC_1=18+6\sqrt{3}\approx 28.392(\text{m})$，

因此　$AB=A_1B+AA_1\approx 28.392+1.5=29.892\approx 29.89(\text{m})$.

答　烟囱的高约为 29.89 m.

练　习 1

1. 从地平面 A,B,C 三点测得某山顶的仰角均为 15°，设$\angle BAC=30°$，而 $BC=200$ m. 求山高（结果精确到 0.1 m）.
2. 如图所示，在加工缝纫机挑线杆时，需要计算 A,C 两孔中心的距离，已知 $BC=60.5$ mm，$AB=15.8$ mm，$\angle ABC=80°$，则 $AC=$____mm（结果精确到 0.01 mm）.



（第 2 题）

例 3　图 2-19 是曲柄连杆机构的示意图. 当曲柄 CB 绕点 C 旋转时，通过连杆 AB 的传递，活塞作直线往复运动. 当曲柄在 CB_0 位置时，曲柄和连杆成一条直线，连杆的端点 A 在 A_0 处. 设连杆 AB 长为 l mm，曲柄 CB 长为 r mm，$l>r$.

（1）当曲柄自 CB_0 按顺时针方向旋转角为 θ 时，其中 $0°\leqslant\theta<360°$，求活塞移动的距离（即连杆的端点 A 移动的距离 A_0A）；

（2）当 $l=340$ mm，$r=85$ mm，$\theta=80°$时，求 A_0A 的长（结果精确到 1 mm）.

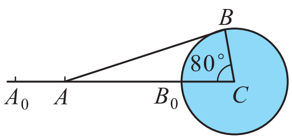


图　2-20

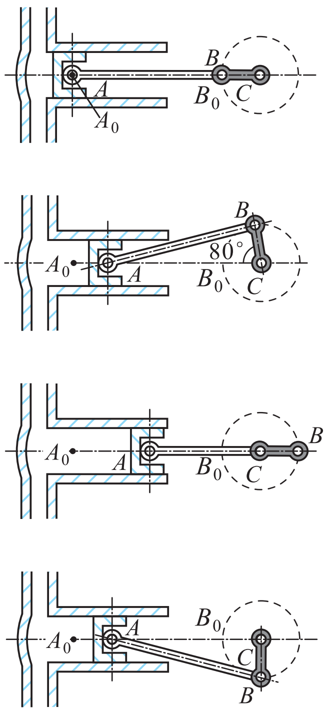


图　2-19

分析　如图 2-20 所示，不难得到，活塞移动的距离为：$A_0A=A_0C-AC$，易知 $A_0C=AB+BC=l+r$，所以，只要求出 AC 的长即可. 在△ABC 中，已知两边和其中一边的对角，可以通过正弦定理或余弦定理求出 AC 的长.

解　（1）设 $AC=x$，若 $\theta=0°$，则 $A_0A=0$；若 $\theta=180°$，则 $A_0A=2r$ mm；若 $0°<\theta<180°$，在△ABC 中，由余弦定理，得

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos C,$$

即　　$$x^2-2(r\cos\theta)x-(l^2-r^2)=0.$$

解得 $x_1=r\cos\theta+\sqrt{(r\cos\theta)^2+l^2-r^2}=(r\cos\theta+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta})(\mathrm{mm})$,

$x_2=r\cos\theta-\sqrt{(r\cos\theta)^2+l^2-r^2}<0$(不合题意,舍去).

$$\begin{aligned}A_0A&=A_0C-AC\\&=AB+BC-AC\\&=(l+r-r\cos\theta-\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta})(\mathrm{mm}).\end{aligned}$$

问题与思考

请同学们运用正弦定理求 A_0A 的长,并比较两种方法的特点.

若 $180°<\theta<360°$,则根据对称性,将上式中的 θ 改成 $360°-\theta$ 即可,有

$$A_0A=(l+r-r\cos\theta-\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta})\mathrm{mm}.$$

总之,当 $0°\leqslant\theta<360°$时,

$$A_0A=(l+r-r\cos\theta-\sqrt{l^2-r^2\sin^2\theta})\mathrm{mm}.$$

(2) 当 $l=340$ mm,$r=85$ mm,$\theta=80°$时,利用计算器算得

$$\begin{aligned}A_0A&=340+85-85\cos 80°-\sqrt{340^2-85^2\sin^2 80°}\\&\approx 81(\mathrm{mm}).\end{aligned}$$

答 此时活塞移动的距离约为 81 mm.

例 4 如图 2-21 所示,a 是海面上一条南北方向的海防警戒线,在 a 上点 A 处有一个水声监测点,另两个监测点 B,C 分别在 A 的正东方 20 km 处和 54 km 处. 某时刻,监测点 B 收到发自静止目标 P 的一个声波,8 s 后监测点 A,20 s 后监测点 C 相继收到这一信号. 在当时气象条件下,声波在水中的传播速度是 1.5 km/s.

(1)设 A 到 P 的距离为 x km,用 x 表示 B,C 到 P 的距离,并求 x 的值;

(2)求静止目标 P 到海防警戒线 a 的距离(结果精确到 0.01 km).

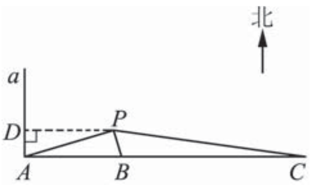


图 2-21

分析 (1)PA,PB,PC 长度之间的关系可以通过收到信号的先后时间建立起来;

(2)作 $PD\perp a$,垂足为 D,要求 PD 的长,只需要求出 PA 的长和 $\cos\angle APD$,即 $\cos\angle PAB$ 的值. 由题意,$PA-PB$,$PC-PB$ 都是定值,因此,只需要分别在$\triangle PAB$ 和$\triangle PAC$ 中,求出 $\cos\angle PAB$,$\cos\angle PAC$的表达式,建立方程即可.

解 (1)依题意,$PA-PB=1.5\times 8=12(\mathrm{km})$,$PC-PB=1.5\times 20=30(\mathrm{km})$. 因此

$$PB=(x-12)\mathrm{km},\quad PC=(18+x)\mathrm{km}.$$

在$\triangle PAB$ 中,$AB=20$ km,

$$\cos\angle PAB=\frac{PA^2+AB^2-PB^2}{2PA\cdot AB}$$

$$=\frac{x^2+20^2-(x-12)^2}{2x\cdot 20}$$

$$=\frac{3x+32}{5x}.$$

同理，　　$\cos\angle PAC=\dfrac{72-x}{3x}.$

由于　　$\cos\angle PAB=\cos\angle PAC,$

即　　$\dfrac{3x+32}{5x}=\dfrac{72-x}{3x},$

解得　　$x=\dfrac{132}{7}(\text{km}).$

(2)作 $PD\perp a$，垂足为 D. 在 Rt$\triangle PDA$ 中，

$$PD=PA\cos\angle APD=PA\cos\angle PAB$$

$$=x\cdot\frac{3x+32}{5x}=\frac{3\times\frac{132}{7}+32}{5}\approx 17.71(\text{km}).$$

答　静止目标 P 到海防警戒线 a 的距离约为 17.71 km.

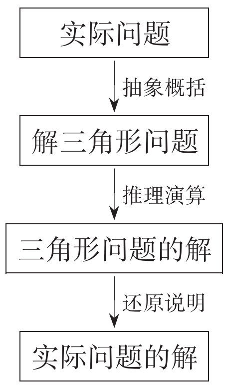
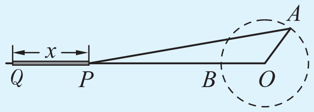


图　2-22

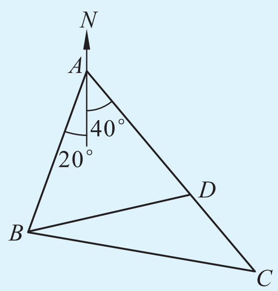
在解决实际问题中，如果涉及三角形问题，我们可以把它抽象为解三角形问题，进行解答，之后再还原成实际问题. 这个过程我们可以用框图 2-22 表示.

练　习 2

1. 下图为曲柄连杆机构示意图，当曲柄 OA 在水平位置 OB 时，连杆端点 P 在 Q 的位置. 当 OA 自 OB 按顺时针方向旋转角度 α 时，P 和 Q 之间的距离是 x，已知 $OA=25$ cm，$AP=125$ cm. 在下列条件下求 P 和 Q 之间的距离(结果精确到 0.1 cm).
   (1)$\alpha=50°$；　(2)$\alpha=90°$；　(3)$\alpha=135°$；　(4)$OA\perp AP$.



(第 1 题)



(第 2 题)

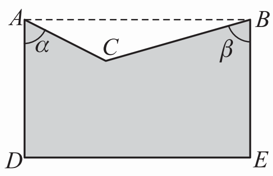
2. 某观察站 B 在城 A 的南偏西 20°的方向，由 A 出发的一条公路走向是南偏东 40°，在 B 处测得公路上距 B 31 km 的 C 处有一人正沿公路向 A 城走去，走了 20 km 之后到达 D 处，此时 B，D 间的距离为 21 km. 这个人还要走多少路才能到达 A 城?

习 题 2—3

A 组

1. 从甲处望乙处的仰角为 α，从乙处望甲处的俯角为 β，则 α 与 β 的关系为（　　）.

   A. $\alpha>\beta$　　B. $\alpha=\beta$　　C. $\alpha+\beta=90°$　　D. $\alpha+\beta=180°$



（第 3 题）

2. 海面上有 A，B，C 三个灯塔，$AB=10$ n mile，从 A 望 C 和 B 成 60°视角，从 B 望 C 和 A 成 75°视角，则 $|BC|=$（　　）n mile.（n mile 表示海里，1 n mile=1 852 m.）

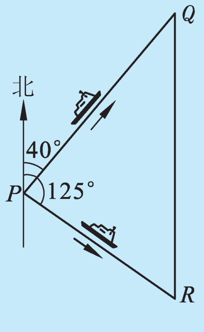
   A. $10\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$　　C. $5\sqrt{2}$　　D. $5\sqrt{6}$

3. 如图为一角槽示意图，已知 $AB\perp AD$，$AB\perp BE$，并量得 $AB=85$ mm，$BC=78$ mm，$AC=32$ mm，则 $\alpha=$________，$\beta=$________（精确到 0.1°）.

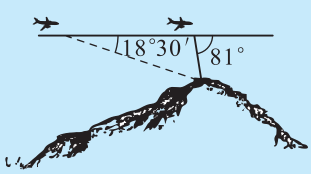
4. 为了测量上海东方明珠塔的高度，某人站在 A 处测得塔尖的仰角为 75.5°，前进 38.5 m 后，到达 B 处测得塔尖的仰角为 80.0°. 试计算东方明珠塔的高度（精确到 1 m）.

B 组

1. 如图，某日中午 12:00 甲船以 24 km/h 的速度沿北偏东 40°的方向驶离码头 P，下午 3:00 到达 Q 地. 下午 1:00 乙船沿北偏东 125°的方向匀速驶离码头 P，下午 3:00 到达 R 地. 若 R 在 Q 的正南方向，则乙船的航行速度是多少（精确到 1 km/h）？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，飞机的航线和山顶在同一个铅直平面内，已知飞机的高度为海拔 20 250 m，速度为 189 km/h，飞行员先看到山顶的俯角为18°30′，经过 960 s 后，又看到山顶的俯角为 81°. 求山顶的海拔高度（结果精确到 1 m）.

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 通过对任意三角形边长和角度关系的探索，掌握正弦定理、余弦定理，并能解一些简单的三角形.

2. 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些简单的几何计算问题及相关的实际问题.

二、复习建议

1. 通过对课本、笔记及作业的复习，归纳出本章的基本知识和基本方法.

2. 整理反思后作出本章小结，加深对本章知识的理解，提出需要注意的问题.

3. 为本章的知识小结画一个框图.

4. 本章可供思考的问题：

(1)正弦定理、余弦定理的内容是什么？可应用于什么三角形？

(2)利用正弦定理可以解哪些三角形问题？需要注意什么？

(3)利用余弦定理可以解哪些三角形问题？

(4)正弦定理、余弦定理可以解决哪些三角形中的几何计算问题？

(5)正弦定理和余弦定理可以解决哪些实际应用问题？

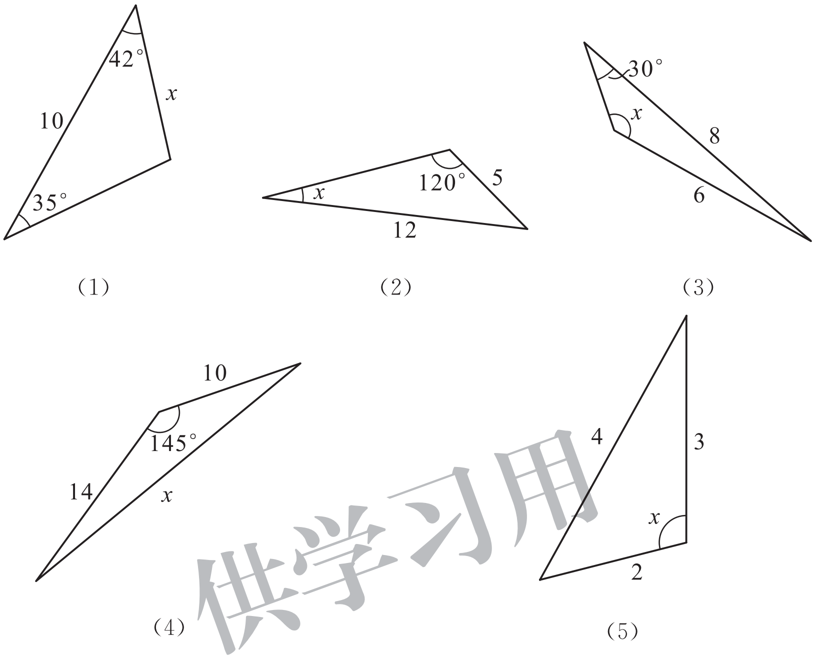
(6)你能否总结出几个本章最典型、最重要的问题？

5. 请就自己的体会与提出的问题，与同学进行交流.

复 习 题 二

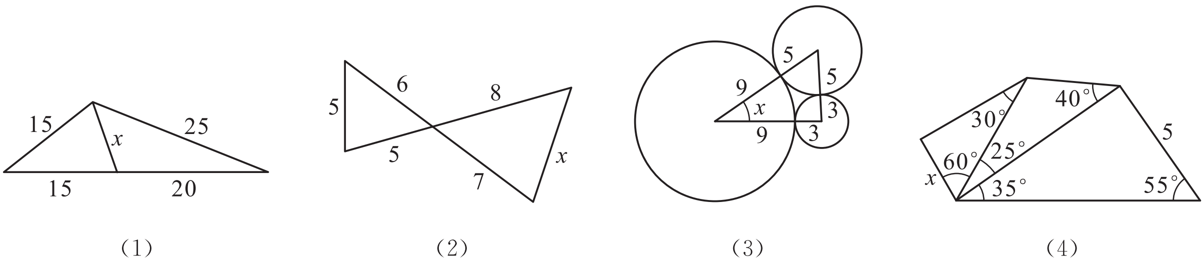
A 组

1. 选择最佳方法求下列图形中的 x（角度精确到 1°，边长精确到0.1）.



（第 1 题）

2. 求下列图形中的 x（角度精确到 1°，边长精确到 0.1）.



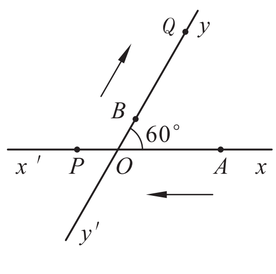
（第 2 题）

3. 如图，有两条相交成 60° 角的直路 xx'，yy'，交点是 O，甲、乙分别在 Ox，Oy 上，起初甲在离 O 点 3 km 的 A 点，乙在离 O 点 1 km 的 B 点，后来甲、乙两人同时以 4 km/h 的速度，分别沿 xx' 的方向和 $y'y$ 的方向步行.

   (1)起初两人的距离是多少？

   (2)用含 t 的式子表示 t h 后两人的距离.

   (3)什么时间两人的距离最短？

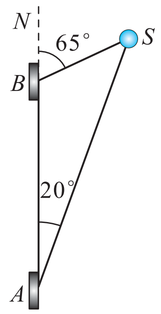


（第 3 题）

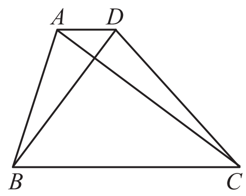
4. 在航海中，习惯于用 n mile 表示距离，用 kn 表示航海速度，1 kn=1 n mile/h，1 n mile=1 852 m. 如图，一艘船以 32.2 kn 的速度向正北航行，在 A 处看灯塔 S 在船的北偏东 20° 方

向，30 min 后航行到 B 处，在 B 处看灯塔 S 在船的北偏东 65° 方向上．求灯塔 S 和 B 处的距离（结果精确到0.1 n mile）．

5．如图，已知梯形 $ABCD$ 的上底 AD 长 1 cm，下底 BC 长 4 cm，对角线 AC 长4 cm，BD 长 3 cm．求梯形 $ABCD$ 的两腰 AB，CD 的长及面积．

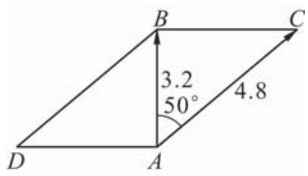


（第 4 题）

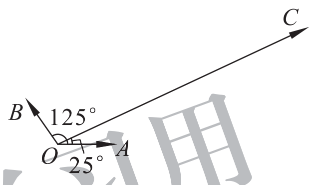


（第 5 题）

6．如图，$|\overrightarrow{AB}|=3.2$，$|\overrightarrow{AC}|=4.8$，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为 50°．求 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$ 及 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角（长度精确到 0.1，角度精确到 $1'$）．



（第 6 题）

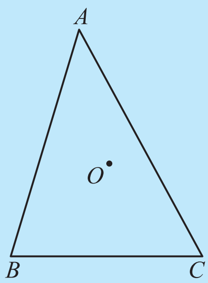


（第 7 题）

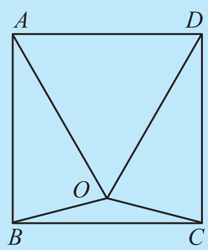
7．如图，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 125°，$\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的夹角为 25°，$|\overrightarrow{OC}|=5$．用 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$（结果精确到 0.001）．

B 组

1．如图，某市三个新兴工业小区 A，B，C 决定平均投资共同建一个中心医院 O，使得医院到三个小区的距离相等，已知这三个小区之间的距离分别为 $AB=4.3$ km，$BC=3.7$ km，$CA=4.7$ km．该医院应建在何处（精确到 0.1 km 或 1°）？



（第 1 题）



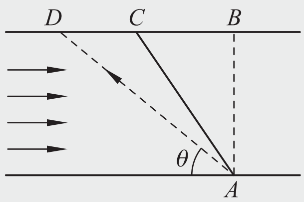
（第 2 题）

2．如图，O 是正方形 $ABCD$ 内的一点，且$\angle OBC=\angle OCB=15^\circ$．求证：$\triangle OAD$ 是等边三角形．

3. 在△ABC中，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，当$(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}):(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}):(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=1:2:3$时. 求△$ABC$的三个内角(结果精确到 1°).

C 组

1. 如图，设一条河宽 800 m，河水流速为 4 km/h，A，B 两镇隔河相望，C 镇位于 B 镇上游 600 m 处. 某人乘小艇想从 A 镇去 C 镇，若小艇的最快航速为 10 km/h，则他要在最短时间到达 C 镇，应按什么路线航行？并求出最短时间(精确到 1°或 1 min).



(第 1 题)

2. 在一块直径为 30 cm 的圆形铁板上，截去直径分别为 20 cm，10 cm的圆形铁板各一块，现要求在所剩余的铁板中再截出同样大小的圆形铁板两块. 求这两块圆形铁板的最大半径.

第三章 不 等 式

一般的人，下半身长 x 与全身长 y 的比值 $\frac{x}{y}$ 在 0.57～0.6 之间，而芭蕾舞演员在表演时，脚尖立起给人以美的享受．原来，脚尖立起调整了身段的比例．如果设人的脚尖立起提高了 m，则下半身与全身的长度比由 $\frac{x}{y}$ 变成了 $\frac{x+m}{y+m}$，这个比值非常接近黄金分割值(golden section)0.618．女士们追求美而穿高跟鞋，其目的之一就是在追求这个比值．用来解释这种现象的数学关系是

$$0.58\approx\frac{x}{y}<\frac{x+m}{y+m}\approx0.618.$$

怎样判定“$<$”的关系成立？m 又是怎样的数？

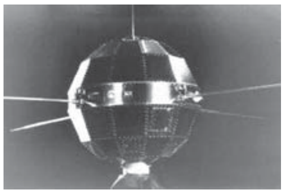
本章，我们将学习不等关系的一些基本规律和一些相关的数学模型，例如，基本不等式、线性规划等，并利用它们解决一些简单的实际问题．

§1 不等关系

1.1 不等关系

在我们周围存在着形形色色的不等关系，请看以下例子.

例 1 2003 年 10 月 15 日 9 时，我国“神舟”五号载人飞船在酒泉卫星发射中心发射成功，实现了中华民族千年的飞天梦想．这是自 1970 年 4 月 24 日成功发射“东方红一号”人造卫星以来，我国航天史上又一座新的里程碑，我国已成为继俄、美之后，世界上第三个掌握载人航天技术、成功发射载人飞船的国家.


“东方红一号”卫星


“神舟”五号飞船

“东方红一号”与“神舟”五号部分参数的对比见表 3-1.

表 3-1 “东方红一号”与“神舟”五号部分参数对比表

	近地点 s/km	远地点 s'/km	绕地球一周 t/min	飞船质量 m/kg
“东方红一号”(a)	439	2 384	114	173
“神舟”五号 (b)	200	350	90	7 790
a 与 b 进行比较	$s_a > s_b$			

我们不难发现，“神舟”五号飞船比“东方红一号”卫星在很多方面都有了较大的发展.

例 2 《铁路旅行常识》规定：

“一、随同成人旅行身高 1.2～1.5 米的儿童，享受半价客票(以下称儿童票)，超过 1.5 米时应买全价票. 每一成人旅客可免费带一名身高不足 1.2 米的儿童，超过一名时，超过的人数应买儿童票.

……

十、旅客每人免费携带品的体积和质量是每件物品的外部尺寸长、宽、高之和不超过 160 厘米，杆状物品不超过 200 厘米，质量不超过 20 千克……”

设儿童身高为 h(单位：m)，物品外部尺寸长、宽、高之和为 p(单位：cm)，请在表 3-2 空格内填上对应的数学符号($<$，$\leqslant$，$>$，$\geqslant$)，并与同学交流.

表 3-2

文字表述	1.2～1.5 m	超过 1.5 m	不足 1.2 m	不超过 160 cm
符号表示				

说　明

据《国家水环境质量标准》，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ类水均为适用于集中式生活饮用水源，Ⅳ，Ⅴ类水分别为工业、农业用水，从水质讲，Ⅰ类水最优，Ⅴ类水最劣.

例 3　图 3-1 给出的是 2001 年我国长江流域部分省、自治区、直辖市水质状况直方图.

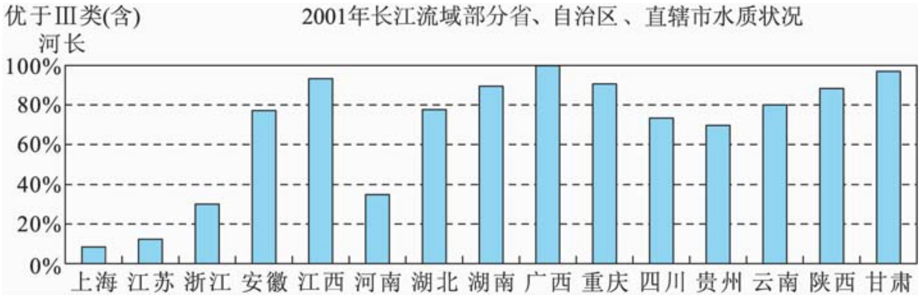


图　3-1

请根据图中提供的信息，依河流水质的状况，将各省、自治区、直辖市污染程度按从小到大的顺序（$<$，$\leqslant$）进行排列.

____.

例 4　如图 3-2，$y=f(x)$ 反映了某公司产品的销售收入 y 万元与销售量 x t 的函数关系，$y=g(x)$ 反映了该公司产品的销售成本与销售量的函数关系. 试问：

(1) 当销售量为多少时，该公司赢利（收入大于成本）；

(2) 当销售量为多少时，该公司亏损（收入小于成本）？

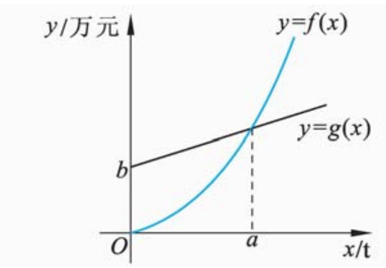


图　3-2

解　(1) 当销售量大于 a t 时，即 $x>a$ 时，公司赢利，即

$$f(x)>g(x);$$

(2) 当销售量小于 a t 时，即 $0\leqslant x<a$ 时，公司亏损，即

$$f(x)<g(x).$$

例 5　某用户计划购买单价分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘，使用资金不超过 500 元. 根据需要，软件至少买 3 片，磁盘至少买 2 盒，问：软件数与磁盘数应满足什么条件？

解　设软件数为 x，磁盘数为 y，据题意可得

$$\begin{cases}60x+70y\leqslant 500,\\ x\geqslant 3 \text{ 且 } x\in \mathbf{N}_+,\\ y\geqslant 2 \text{ 且 } y\in \mathbf{N}_+.\end{cases}$$

这是一个不等式组的问题.

抽象概括

从上面的一些例子，我们可以感受到，不等关系反映在日常生活的方方面面. 在数学意义上，不等关系可以体现：

常量与常量之间的不等关系. 例如，“神舟”五号的质量大于“东方红一号”的质量.

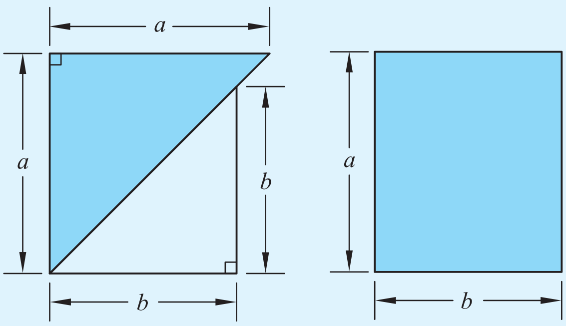
变量与常量之间的不等关系. 例如，儿童身高 h m 小于或等于 1.5 m.

函数与函数之间的不等关系. 例如，当 $x>a$ 时，销售收入 $f(x)$ 大于销售成本 $g(x)$.

一组变量之间的不等关系. 例如，购置软件的费用 $60x$ 与购置磁盘的费用 $70y$ 之和不超过 500 元.

练　习

1. 航天育种是航天技术发展的产物，航天育种的蔬菜个头更大，单产量更高. 如太空黄瓜平均长 40 cm，重 1 000 g. 太空茄子果实周长 62 cm，重2 200 g. 请同学们自己测量普通蔬菜的有关数据，并与太空蔬菜进行比较.
2. 有如图所示的两种广告牌，其中图(1)是由两个等腰直角三角形构成的，图(2)是一个矩形. 从图形上确定这两个广告牌面积的大小关系，并将这种大小关系用含字母 a，b 的不等式表示出来.



(1)　　　　(2)

（第 2 题）

1.2　不等关系与不等式

任意两个实数 a,b 都能比较大小：

如果 $a-b>0$，那么 $a>b$；

如果 $a-b<0$，那么 $a<b$；

如果 $a-b=0$，那么 $a=b$.

由此可知，要确定任意两个实数 a,b 的大小关系，只需确定它们的差 $a-b$ 与 0 的大小关系即可.

例 6　试比较 $(x+1)(x+5)$ 与 $(x+3)^2$ 的大小.

解　由于
$$\begin{aligned}&(x+1)(x+5)-(x+3)^2\\=&(x^2+6x+5)-(x^2+6x+9)\\=&-4<0,\end{aligned}$$
所以
$$(x+1)(x+5)<(x+3)^2.$$

在初中我们学习了不等式的一些重要性质，例如若 $a>b,b>c$，则 $a>c$；若 $a>b$，则 $a+c>b+c$；若 $a>b,c>0$，则 $ac>bc$；若 $a>b,c<0$，则 $ac<bc$，等等.

下面我们看看不等式还有哪些性质.

思考交流

1. 用“$<$”或“$>$”填空：

(1)如果 $a>b,c>d$，则 $a+c$ ________ $b+d$；

(2)如果 $a>b>0,c>d>0$，则 ac ________ bd；

(3)如果 $a>b>0$，则 a^2 ________ b^2；

(4)如果 $a>b>0$，则 $\sqrt{a}$ ________ $\sqrt{b}$.

2. 如果 $a>b>0,c>d$，此时 $ab>cd$ 一定成立吗？

现在，我们把不等式的主要性质总结如下：

1. 如果 $a>b,c>d$，则 $a+c>b+d$；
2. 如果 $a>b>0,c>d>0$，则 $ac>bd$；
3. 如果 $a>b>0$，则 $a^n>b^n(n\in\mathbf{N}_+)$；
4. 如果 $a>b>0$，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}_+)$.

例 7　利用不等式的主要性质证明下列问题.

(1)当 $x>0$ 时，函数 $y=x^2$ 是增加的；

(2)若 $a_1>0,0<q<1$，则等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列.

证明　(1)对于任意的 $x_2>x_1>0$,由不等式的主要性质 3,有 $x_2^2>x_1^2$,根据函数单调性的概念,$y=x^2$ 在$(0,+\infty)$内是增加的.

(2)对于任意的 $i>j>0$,$a_j=a_1q^{j-1}$,

$a_i=a_1q^{i-1}=a_1q^{(j-1)+(i-j)}=a_1q^{(j-1)}q^{(i-j)}=a_jq^{(i-j)}$,

因为 $0<q<1$,由不等式的主要性质 3,有 $q^2<1^2=1$,

再由不等式的主要性质 2,有 $q^3=(q^2)q<1^2=1,\cdots,q^{(i-j)}<1$,

所以 $a_j\cdot q^{(i-j)}<a_j\cdot 1=a_j$,即 $a_i<a_j$,所以$\{a_n\}$是递减数列.

例 8　建筑设计规定,民用住宅的窗户面积必须小于地板面积.但按采光标准,窗户面积与地板面积的比值应不小于 10%,且这个比值越大,住宅的采光条件越好. 试问:同时增加相等的窗户面积和地板面积,住宅的采光条件是变好了,还是变坏了? 请说明理由.

解　设住宅窗户面积和地板面积分别为 a,b,同时增加的面积为 m,根据问题的要求 $a<b$,且$\dfrac{a}{b}\geqslant 10\%$.

由于
$$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{m(b-a)}{b(b+m)}>0,$$

于是
$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b},\ 又\frac{a}{b}\geqslant 10\%,$$

因此
$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}\geqslant 10\%.$$

所以,同时增加相等的窗户面积和地板面积后,住宅的采光条件变好了!

一般地,设 a,b 为正实数,且 $a<b,m>0$,则
$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}.$$

思考交流

1. 结合章头语的内容,请与同学合作填写表 3-3.

表 3-3

同　学	x	y	m	$\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{x+m}{y+m}$
甲					
乙					
丙					
丁					

你悟出了什么道理吗?

日常生活中,还有哪些实例满足例 8 中的不等式?

2. 甲、乙两人同时从 A 地出发沿同一路线走到 B 地，所用时间分别为 t_1，t_2，甲有一半时间以速度 m 行走，另一半时间以速度 n 行走；乙有一半路程以速度 m 行走，另一半路程以速度 n 行走，且 $m \neq n$.

（1）请你与同学各自算出 t_1 与 t_2（用 m，n 表示）；

（2）与同学一起比较 t_1 与 t_2 的大小，并判断甲、乙谁先到达 B 地.

练　习

1. 设 $a=x^2-x$，$b=x-2$，则 a 与 b 的大小关系为（　　）.

   A. $a>b$　　B. $a=b$　　C. $a<b$　　D. 与 x 有关

2. 甲、乙两位采购员同去一家粮食销售公司买了两次粮食，两次粮食的价格不同，两位采购员的购粮方式也不同. 其中，甲每次购买1 000 kg，乙每次购粮用去 1 000 元钱，谁的购粮方式更合算？

习题 3—1

A　组

1. 设 $m=x^2+y^2-2x+2y$，$n=-5$，则 m，n 的大小关系是（　　）.

   A. $m>n$　　B. $m<n$　　C. $m=n$　　D. 与 x，y 取值有关

2. 若 $a>b$，$c>d$，则下列不等关系中不一定成立的是（　　）.

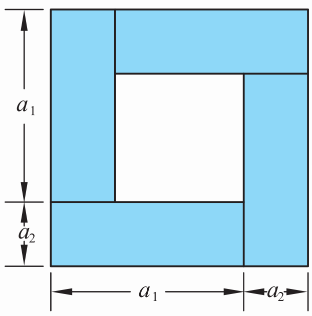
   A. $a-b>d-c$　　B. $a+d>b+c$　　C. $a-c>b-c$　　D. $a-c<a-d$

3. 如果一辆汽车每天行驶的路程比原来多 19 km，那么在 8 天内它的行程就超过 2 200 km；如果它每天行驶的路程比原来少 12 km，那么它行同样的路程就得花 9 天多的时间. 这辆汽车原来每天行驶的路程(km)范围是（　　）.

   A. (259，260)　　B. (258，260)

   C. (257，260)　　D. (256，260)

4. 如图，试用直观的方法比较以 a_1+a_2 为边长的正方形的面积与四个阴影部分的面积的大小，并把这种大小关系用不等式表示出来.



（第 4 题）

5. 某粮食收购站分两个等级收购小麦. 一级小麦 a 元/kg，二级小麦 b 元/kg$(b<a)$. 现有一级小麦 m kg，二级小麦 n kg，若以两种价格的平均数收购，是否合理？为什么？

B　组

1. 一家庭若干人去某地旅游，甲旅行社规定户主买全票一张，其余人享受半价优惠；乙旅行社规定家庭旅游算集体票，按原价的 $\frac{2}{3}$ 优惠. 这两家旅行社原价是一样的，试就家庭里的人数，分别写出两家旅行社的收费表达式，并讨论哪家旅行社更优惠，请画出函数示意图.

2. 试比较 $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$ 与 $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ 的大小.

§2　一元二次不等式

问题提出

汽车在行驶过程中，由于惯性的作用，刹车后还要继续向前滑行一段距离才能停住，一般称这段距离为“刹车距”．刹车距 s (m)与车速 x (km/h)之间具有确定的函数关系，不同车型的刹车距函数不同．它是分析交通事故的一个重要数据．

甲、乙两辆汽车相向而行，在一个弯道上相遇，弯道限制车速在 40 km/h 以内，由于突发情况，两车相撞了．交警在现场测得甲车的刹车距离接近但未超过 12 m，乙车的刹车距离刚刚超过了 10 m，又知这两辆汽车的刹车距 s(m)与车速 x(km/h)之间分别有以下函数关系：

$$s_{甲}=0.01x^2+0.1x,$$
$$s_{乙}=0.005x^2+0.05x,$$

谁的车速超过了 40 km/h，谁就违章了．

试问：哪一辆车违章行驶？

由题意，只需分别解出不等式 $0.01x^2+0.1x\leqslant 12$ 和 $0.005x^2+0.05x>10$，确认甲、乙两车的行驶速度，就可以判断哪一辆车违章超速行驶．

像上面的形如 $ax^2+bx+c>0(\geqslant 0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(\leqslant 0)$ 的不等式(其中 $a\neq 0$)，叫作**一元二次不等式**．

2.1　一元二次不等式的解法

实例分析

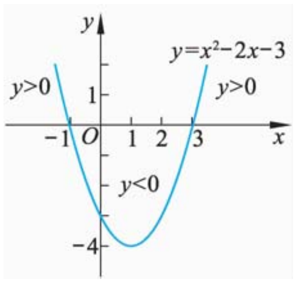


图　3-3

如何解一元二次不等式 $x^2-2x-3<0$？

当 x 变化时，不等式的左边可以看作是 x 的函数．确定满足不等式 $x^2-2x-3<0$ 的 x，实际上就是确定 x 的范围．也就是确定函数 $y=x^2-2x-3$的图像在 x 轴下方时，其 x 的取值范围．

观察二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图像(如图 3-3)，并回答以下

问题：

（1）x 的取值范围是什么时，$y=0$？

（2）x 的取值范围是什么时，$y<0$？

经过观察与比较，我们可以发现：

对于(1)，就是求一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 的解，它们是 $x_1=-1$，$x_2=3$，即当 $x_1=-1$ 或 $x_2=3$ 时，$y=0$.

二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图像与 x 轴的交点坐标是 $(-1,0)$ 与 $(3,0)$.

对于(2)，不难看出，当 $-1<x<3$ 时，二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图像在 x 轴的下方满足 $y<0$，也就是说，满足一元二次不等式 $x^2-2x-3<0$ 的 x 的取值范围是 $-1<x<3$.

一般地，使某个一元二次不等式成立的 x 的值叫这个**一元二次不等式的解**. 一元二次不等式的所有解组成的集合，叫作这个**一元二次不等式的解集**.

上面的例子说明，二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图像的形状及其与 x 轴的交点坐标，可以确定对应的一元二次不等式 $x^2-2x-3<0$ 或 $x^2-2x-3>0$ 的解集.

例 1　解不等式：$3x^2+5x-2>0$.

解　方程 $3x^2+5x-2=0$ 的两解是 $x_1=-2$，$x_2=\frac{1}{3}$.

函数 $y=3x^2+5x-2$ 的图像是开口向上的抛物线，与 x 轴有两个交点 $(-2,0)$ 和 $\left(\frac{1}{3},0\right)$（如图 3-4）.

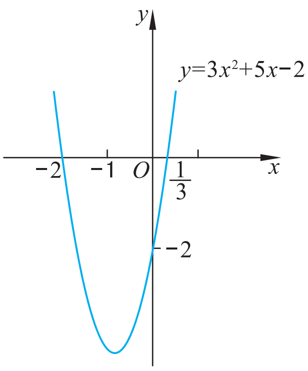


图　3-4

观察图像可得，不等式的解集为

$$\left\{x \mid x<-2, \text{或 } x>\frac{1}{3}\right\}.$$

根据不等式 $3x^2+5x-2>0$ 的解集，你能得出不等式 $3x^2+5x-2\geqslant 0$ 的解集吗？与同学交流各自的结论.

例 2　解不等式：$9x^2-6x+1>0$.

解　方程 $9x^2-6x+1=0$ 有两个相同实数解：

$$x_1=x_2=\frac{1}{3}.$$

函数 $y=9x^2-6x+1$ 的图像是开口向上的抛物线，与 x 轴仅有一个交点 $\left(\frac{1}{3},0\right)$（如图 3-5）.

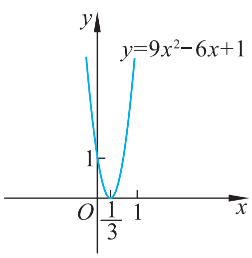


图　3-5

观察图像可得，不等式的解集是 $\left\{x \,\middle|\, x\neq\frac{1}{3}\right\}$.

例 3　解不等式：$x^2-4x+5>0$.

解　方程 $x^2-4x+5=0$ 无实数解，函数 $y=x^2-4x+5$ 的图像是开口向上的抛物线，与 x 轴无交点（如图 3-6）.

观察图像可得，不等式的解集为 **R**.

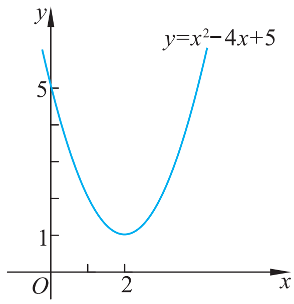


图　3-6

抽象概括

通过上面例子可知，当 $a>0$ 时，解形如 $ax^2+bx+c>0(\geqslant 0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(\leqslant 0)$ 的一元二次不等式，一般可分为三步：

(1)确定对应方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解；

(2)画出对应函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像简图；

(3)由图像得出不等式的解集.

思考交流

1. 完成表 3-4.

表 3-4

设 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，判别式 $\Delta=b^2-4ac$				
判别式		$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
方程 $f(x)=0$ 的解				
函数 $y=f(x)$ 的示意图				
不等式的解集	$f(x)>0$			
	$f(x)<0$			

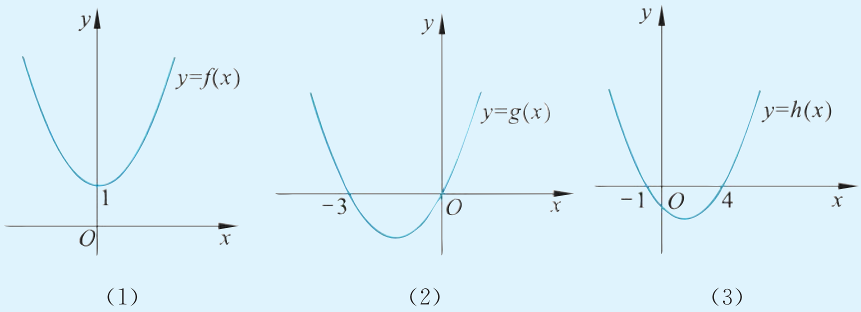
2. 请你根据上表解出本节开头的两个不等式：

$$0.01x^2+0.1x-12\leqslant 0 \text{ 与 } 0.005x^2+0.05x-10>0,$$

并指出哪一辆车违章.

练 习 1

1. 如图,请根据下列二次函数 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$的图像,分别写出不等式 $f(x)>0$,$g(x)<0$ 和 $h(x)\geqslant 0$ 的解集.



(第 1 题)

2. 画出下列函数的图像,并分别确定使函数值大于零的 x 的取值范围.
   (1) $y=x^2+3x-3$;　　(2) $y=4x^2+12x-9$;
   (3) $y=6x^2-5x-6$.
3. 解下列不等式.
   (1) $2x^2-13x+20>0$;　　(2) $7x^2+5x+1<0$;
   (3) $4x^2-4x+1\leqslant 0$.

下面我们研究,当 $a<0$ 时,不等式 $ax^2+bx+c>0$(或<0)的解法.

例 4　解不等式:$-2x^2+x+1<0$.

解法 1　方程$-2x^2+x+1=0$ 的解为

$$x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=1.$$

函数 $y=-2x^2+x+1$ 的图像是开口向下的抛物线,与 x 轴的交点为$\left(-\frac{1}{2},0\right)$和$(1,0)$(如图 3-7).

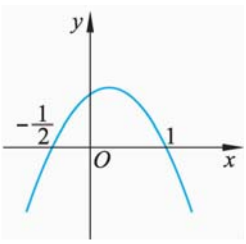


图　3-7

观察图像可得,不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,x<-\frac{1}{2},或\ x>1\right\}$.

解法 2　在不等式两边同乘-1,可得 $2x^2-x-1>0$.

方程 $2x^2-x-1=0$ 的解为 $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=1$.

画出函数 $y=2x^2-x-1$ 的图像简图(如图 3-8).

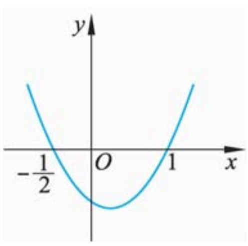


图　3-8

观察图像,可得原不等式的解集为

$$\left\{x\,\middle|\,x<-\frac{1}{2},或\ x>1\right\}.$$

一般地，对于 $a<0$ 的一元二次不等式，可以直接采取类似 $a>0$ 时的解题步骤求解；也可以先把它化成二次项系数为正的一元二次不等式，再求解.

用算法的思想，对任意一个一元二次不等式，可按图 3-9 所示的框图求解.

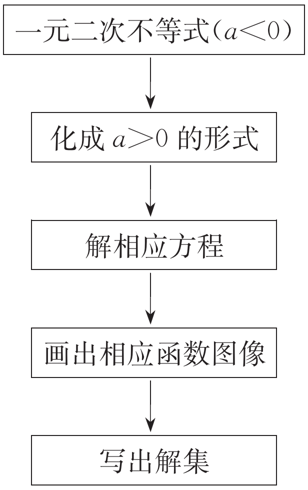


图　3-9

例 5　解不等式：$-x^2+4x-4>0$.

解　仿照例 4 解法 2，可把不等式化成

$$x^2-4x+4<0.$$

方程 $x^2-4x+4=0$ 的解为 $x_1=x_2=2$.

画出函数 $y=x^2-4x+4$ 的图像简图(如图 3-10).

观察图像，得出原不等式的解集为$\varnothing$.

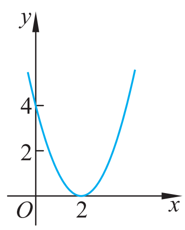


图　3-10

小资料1

观察不等式$(x+3)(x-2)>0$，可以看出这是一个一元二次不等式，即 $x^2+x-6>0$，按上述求解程序可得到这个不等式的解集为$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$.

另一方面，如果我们根据积的符号法则看不等式$(x+3)\cdot(x-2)>0$，那么就可以把它化成两个一元一次不等式组，即

$$(1)\begin{cases}x+3<0,\\x-2<0\end{cases}\quad \text{或} \quad (2)\begin{cases}x+3>0,\\x-2>0.\end{cases}$$

所以，不等式$(x+3)(x-2)>0$ 的解集就是上面不等式组(1)与(2)的解集的并集.

不等式组(1)的解集为$(-\infty,-3)$，不等式组(2)的解集为$(2,+\infty)$.

故不等式$(x+3)(x-2)>0$ 的解集为

$$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty).$$

一般地，$a\neq0$ 时，对形如 $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ 或 $a(x-x_1)(x-x_2)<0$ 的一元二次不

等式，可依据积的符号法则，把一元二次不等式化成一元一次不等式组来解.

小资料2

$ax^2+bx+c>0\quad(a>0)$时的求解框图，见图 3-11.

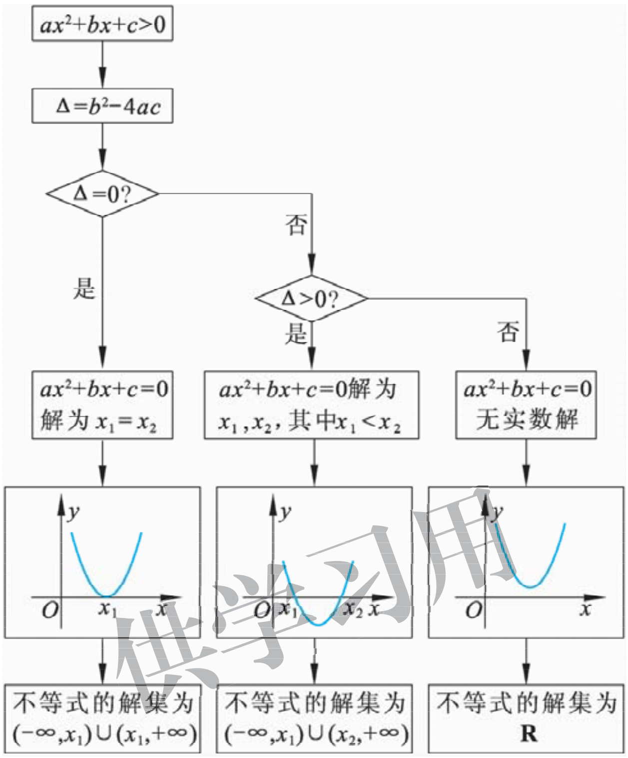


图 3-11

练 习 2

1. 若 $9-x^2\leqslant0$，则(　　).

   A. $0\leqslant x\leqslant3$　　B. $-3\leqslant x\leqslant0$

   C. $-3\leqslant x\leqslant3$　　D. $x\leqslant-3$ 或 $x\geqslant3$

2. 不等式$(x+1)(2-x)\leqslant0$ 的解集为(　　).

   A. $[-2,1]$　　B. $[-1,2]$

   C. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2]\cup[-1,+\infty)$

3. 解下列不等式.

   (1)$-x^2+8x-2<0$；　　(2)$12x-4x^2-9<0$；

   (3)$(5-x)(x+4)\geqslant18$；　　(4)$(3-x)(x+5)>0$.

例 6　设 A,B 分别是不等式 $3x^2+6\leqslant19x$ 与不等式 $-2x^2+3x+5>0$ 的解集,试求 $A\cap B,A\cup B$.

解　由 $3x^2+6\leqslant19x$,得　$3x^2-19x+6\leqslant0$.

方程 $3x^2-19x+6=0$ 的解为 $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_2=6$.

函数 $y=3x^2-19x+6$ 的图像开口向上且与 x 轴有两个交点 $\left(\dfrac{1}{3},0\right)$和$(6,0)$.

所以,原不等式的解集为 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant6\right\}$.

同理可得,不等式 $-2x^2+3x+5>0$ 的解集为

$$B=\left\{x\,\middle|\,-1<x<\frac{5}{2}\right\}.$$

所以　$A\cap B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{3}\leqslant x<\dfrac{5}{2}\right\}$, $A\cup B=\{x\mid-1<x\leqslant6\}$.

例 7　解关于 x 的不等式:$x^2-(2m+1)x+m^2+m<0$.

解　方程 $x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$ 的解为 $x_1=m,x_2=m+1$,且知 $m<m+1$.

二次函数 $y=x^2-(2m+1)x+m^2+m$ 的图像开口向上,且与 x 轴有两个交点.

所以,不等式 $x^2-(2m+1)x+m^2+m<0$ 的解集为

$$\{x\mid m<x<m+1\}.$$

例 8　解关于 x 的不等式:$x^2+(1-a)x-a<0$.

解　方程 $x^2+(1-a)x-a=0$ 的解为 $x_1=-1$, $x_2=a$.

函数 $y=x^2+(1-a)x-a$ 的图像开口向上,所以

(1)当 $a<-1$ 时,原不等式的解集为$(a,-1)$;

(2)当 $a=-1$ 时,原不等式的解集为$\varnothing$;

(3)当 $a>-1$ 时,原不等式的解集为$(-1,a)$.

练　习　3

1. 已知不等式 $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$的解集是$\varnothing$,则(　　).

   A. $a<0$, $\Delta>0$　　B. $a<0$, $\Delta\leqslant0$　　C. $a>0$, $\Delta\leqslant0$　　D. $a>0$, $\Delta>0$

2. 设 $M=\{x\mid x^2+2x-15<0\}$,$N=\{x\mid(1+x)(6-x)<-8\}$,求$M\cup N$, $M\cap N$.
3. 当 $a<0$ 时,请仿照小资料 2 给出的程序框图,画出求解 $ax^2+bx+c>0$ 的框图.
4. 解关于 x 的不等式:$x^2-(m+m^2)x+m^3<0$.

2.2 一元二次不等式的应用

上一小节中,我们讨论了一元二次不等式的解法,本小节我们将一起研究一元二次不等式的应用.

例 9 m 为何值时,方程 $x^2+(m-3)x+m=0$ 有实数解?

解 方程 $x^2+(m-3)x+m=0$ 有实数解,等价于

$$\Delta=(m-3)^2-4m\geqslant 0,$$

即

$$m^2-10m+9\geqslant 0.$$

这是关于 m 的一元二次不等式,按求解程序,可得这个不等式的解集为$\{m\mid m\leqslant 1,或\ m\geqslant 9\}$.

所以,当 $m\leqslant 1$ 或 $m\geqslant 9$ 时,原方程有实数解.

说 明

对这种分子分母含 x 的因式的不等式,先把不等式的右边化为 0,再通过符号法则,把它转化成整式不等式来解,从而使问题化繁为简.

例 10 解下列不等式.

(1) $\dfrac{x+1}{x-3}\geqslant 0$;　　(2) $\dfrac{5x+1}{x+1}<3$.

解 (1)按商的符号法则,不等式$\dfrac{x+1}{x-3}\geqslant 0$ 可转化成不等式 $(x+1)(x-3)\geqslant 0$,但 $x\neq 3$.

解这个不等式,可得 $x\leqslant -1$ 或 $x>3$. 即原不等式的解集为

$$\{x\mid x\leqslant -1,或\ x>3\}.$$

(2) 不等式 $\dfrac{5x+1}{x+1}<3$ 可改写为

$$\frac{5x+1}{x+1}-3<0(不等式的右边为\ 0),$$

即

$$\frac{2(x-1)}{x+1}<0.$$

仿(1),可将这个不等式转化成 $2(x-1)(x+1)<0$,

解得 $$-1<x<1.$$

所以,原不等式的解集为$\{x\mid -1<x<1\}$.

在前面,我们借助一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像,研究了一元二次不等式的解法. 下面,我们再探求一些简单的高次不等式的解法.

例 11 解不等式:$(x-1)(x-2)(x-3)>0$.

解 这是一个一元三次不等式,我们还是利用对函数图像的分

析来解决这个问题. 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$.

(1) 显然，$y=f(x)$ 的图像与 x 轴的交点有三个，它们的坐标依次是 $(1,0)$，$(2,0)$，$(3,0)$；

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图像把 x 轴分成了四个不相交的区间，它们依次为

$$(-\infty,1),\ (1,2),\ (2,3),\ (3,+\infty);$$

(3) 当 $x>3$ 时，$f(x)>0$. 又函数 $y=f(x)$ 的图像是一条不间断的曲线，并且 $f(x)$ 的符号每顺次经过 x 轴的一个交点就会发生一次变化，其规律很明显，从右到左在每个区间 $f(x)$ 符号正负相间（图 3-12）.

信息技术建议

用数学软件或图形计算器作出函数 $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ 的图像，并追踪图像上的点的坐标，可以近似直观看出不等式的解集.

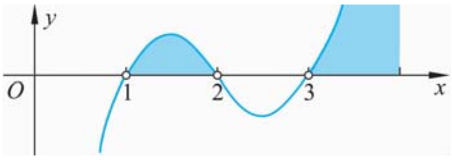
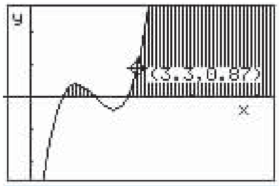


图　3-12



通过分析，知道不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)>0$ 的解集为 $(1,2)\cup(3,+\infty)$.

如果把函数 $f(x)$ 图像与 x 轴的交点 $(1,0)$，$(2,0)$，$(3,0)$ 形象地看成"针眼"，函数 $f(x)$ 的图像看成"线"，那么上述这种求解不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)>0$ 的方法，我们形象地把它称为**穿针引线法**.

练　习　1

1. m 为何值时，方程 $mx^2-(2m+1)x+m=0$ 有两个不相等的实数解？
2. 已知函数 $y=(a-2)x^2+2(a-4)x-4$ 的图像都在 x 轴上方，求实数 a 的取值的集合.
3. 解下列不等式.

   (1) $\dfrac{x+2}{3x+4}<0$；　　　　(2) $\dfrac{2x+3}{x-1}\geqslant 1$.
4. 解下列不等式.

   (1) $(x+1)(x-3)(x-5)\geqslant 0$；

   (2) $(3x-1)(x+3)(x+1)<0$；

   (3) $(3x+5)(x-1)(x-2)<0$.

一元二次不等式在生产生活中有较广泛的应用. 我们将通过对下面实例的分析，体会一元二次不等式的实际应用.

例 12 国家原计划以 2 400 元/t 的价格收购某种农产品 m t. 按规定，农户向国家纳税为：每收入 100 元纳税 8 元(称作税率为 8 个百分点，即 8%). 为了减轻农民负担，制定积极的收购政策. 根据市场规律，税率降低 x 个百分点，收购量能增加 $2x$ 个百分点. 试确定 x 的范围，使税率调低后，国家此项税收总收入不低于原计划的 78%.

分析 解决这类实际问题，关键是把文字语言转换成数学语言：

(1)“税率降低 x 个百分点”，即调节后税率为 $(8-x)\%$；

(2)“收购量能增加 $2x$ 个百分点”，这时

总收购量为：$m(1+2x\%)$ t，

总收购价为：$2\,400m(1+2x\%)$元；

(3)“总收入不低于原计划的 78%”，即税率调低后，

“税收总收入”$\geqslant 2\,400m\times 8\%\times 78\%$元.

解 设税率调低后的“税收总收入”为 y 元.

$$y=2\,400m(1+2x\%)(8-x)\%$$

$$=-\frac{12}{25}m(x^2+42x-400)\ (0<x\leqslant 8).$$

依题意，得 $y\geqslant 2\,400m\times 8\%\times 78\%$，

即 $-\frac{12}{25}m(x^2+42x-400)\geqslant 2\,400m\times 8\%\times 78\%$，

整理，得 $x^2+42x-88\leqslant 0$，

解得 $-44\leqslant x\leqslant 2$.

根据 x 的实际意义，知 $0<x\leqslant 8$，所以 $0<x\leqslant 2$ 为所求.

答 x 的取值范围是 $0<x\leqslant 2$.

信息技术应用

不等式、方程与函数

在解二次不等式一节里，我们已经知道，借助二次函数及其图像，可以把二次方程与二次不等式联系到一起，得到二次不等式的解. 把这种关系推广就可以得到：对于函数 $y=f(x)$，函数图像在 x 轴上方(即 $f(x)$ 函数值大于 0)时，自变量的取值的集合是不等式 $f(x)>0$ 的解集；函数图像在 x 轴下方(即 $f(x)$ 函数值小于 0)时，自变量的取值的集合是不等式 $f(x)<0$ 的解集；函数图像与 x 轴相交(即 $f(x)$ 函数值等于 0)时，自变量的取值的集合是方程 $f(x)=0$ 的解集. 以这个结论为基础我们运用图形计算器解决更有意义的问题.

1. 解形如 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)的不等式．

利用图形计算器可以画出函数 $y=f(x)$ 的图像，然后求出函数与 x 轴交点的横坐标，再借助函数图像写出不等式的解．

例 13　解不等式　$x^3-6x^2+11x-6>0$.

解　利用图形计算器画出函数 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 的图像如图 3-13.

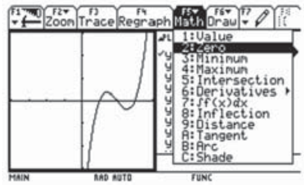


图　3-13

求出函数 $y=f(x)$ 与 x 轴交点的横坐标 1,2,3，由图像可得不等式 $x^3-6x^2+11x-6>0$ 的解集为 $(1,2)\cup(3,+\infty)$.

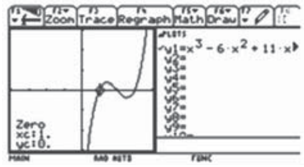


图　3-14

2. 解形如 $f(x)>g(x)$ 的不等式．

利用图形计算器可以画出函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像，函数 $y=f(x)$ 的图像在 $y=g(x)$ 图像的上方部分的横坐标即为不等式的解.

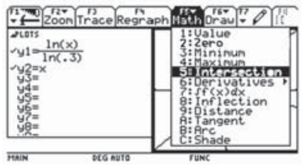


图　3-15

例 14　解不等式 $\log_{0.3}x>x$.

解　设函数 $f(x)=\log_{0.3}x$，$g(x)=x$，画出这两个函数的图像.

求出这两个函数交点的横坐标 $x\approx0.53$，如图 3-16，由图像可得不等式 $\log_{0.3}x>x$ 的解集是 $f(x)$ 的图像在 $g(x)$ 图像上方时 x 的集合，因此不等式的近似解集为 $(0,0.53)$.

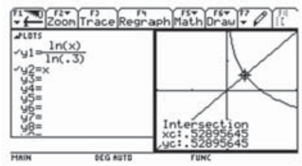


图　3-16

思考　能利用例 13 的方法解这个不等式吗?

你能用上面的方法解下列不等式吗?

(1) $2\sin x>0$;　　　　(2) $\log_{0.3}x>0.3^x$.

3. 借助图形计算器根据函数的图像解不等式很便捷，但这种方法解不等式有时是有局限的．例如：解不等式 $2^x-x^3>0$ 时，画出图像如图 3-17.

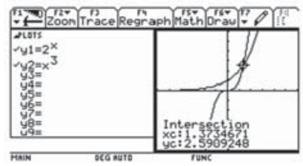


图　3-17

根据图像会得出这个不等式的近似解集为 $(-\infty,1.4)$，但这个结果是错误的. 比如当 $x=10$ 时，这个不等式也成立，事实上，在 $x>1$时，这两个函数还存在交点．这种情况的出现是由于图形计算器只能显示函数的局部图像，无法显示出无穷远处的情况．

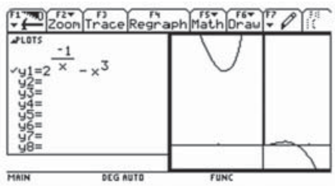


图　3-18

怎么解决这个问题呢?

用下面的方法可使 $x>1.4$ 时两函数的关系出现在图形计算器上.

设 $x=\dfrac{1}{t}$，不等式可以转化为 $2^{\frac{1}{t}}>\left(\dfrac{1}{t}\right)^3$，再转化为 $2^{-\frac{1}{t}}-t^3<0$，

这样我们可以得到不等式在 $0<t<\frac{1}{1.4}$ 范围内的解，再转化为 x 的取值范围，得到原不等式的解．

首先画出函数 $f(t)=2^{-\frac{1}{t}}-t^3$ 的图像如图 3-18.

图像似乎显示不等式在原点附近无解，但是把函数图像在原点附近放大后就会观察到图 3-19，图 3-20 所示的情形：

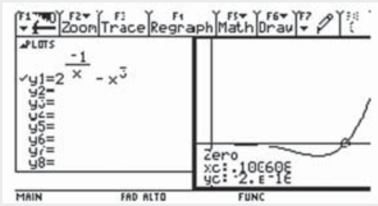


图　3-19

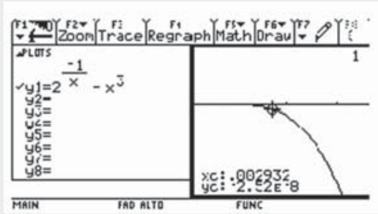


图　3-20

继续利用图形计算器的 Trace 功能和 Zero 功能可以写出不等式的近似解区间为 $t\in(0.002\ 932,\ 0.100\ 608)$，转化为 x 的区间是 $(-\infty,1.373\ 46)\cup(9.939\ 54,+\infty)$，如果我们继续放大就可以得到更精确的解．

请尝试用上面方法解不等式 $\log_{1.001}x>x^3$.

练 习 2

已知汽车从踩刹车到停车所滑行的距离(m)与速度(km/h)的平方及汽车总质量成正比，设某辆卡车不装货物以 59 km/h 的速度行驶时，从刹车到停车走了 20 m. 如果这辆卡车装着等于车重的货物行驶时，发现前面 20 m 处有障碍物，这时为了能在离障碍物5 m以外处停车，最大限制时速应是多少(结果保留整数，设卡车司机发现障碍物到踩刹车需经过 1 s)?

习 题 3—2

A 组

1. 下面四个不等式中解集为 **R** 的是(　　).

A. $-x^2+x+1\geqslant0$　　B. $x^2-2\sqrt{5}x+\sqrt{5}>0$

C. $x^2+6x+10>0$　　D. $2x^2-3x+4<0$

2. 若 $x\in\mathbf{R}$,则下列结论正确的是(　　).

A. $x^2\geqslant4$ 的解集是$\{x|x>\pm2\}$

B. $x^2-16<0$ 的解集是$\{x|x<4\}$

C. $(x-1)^2<2$ 的解集是$\{x|1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}\}$

D. 设 x_1,x_2 为 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根,且 $x_1<x_2$,则 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $\{x|x_1<x<x_2\}$

3. 已知两个圆的半径分别为 2 和 3,圆心距 d 满足 $d^2-6d+5<0$,则这两个圆的位置关系是__________.

4. 不等式 $2\leqslant x^2-2x<8$ 的整数解集是__________.

5. 若对任意实数 x,不等式 $x^2+2(1+k)x+3+k>0$ 恒成立,则 k 的取值范围是__________.

6. 通过函数图像比较下列式子在取不同的 x 值时的大小关系.

(1)$2x^2-x+5$ 与 6;　　(2) x^2+3 与 $3x$;　　(3)x^2-1 与$\frac{1}{2}x^2$.

7. 解下列不等式.

(1) $2x^2-x-1>0$;　　(2) $3x^2+x-6\leqslant0$;

(3) $5x-20\leqslant x^2$;　　(4) $-2x^2+3x+7>0$;

(5) $-3x^2+x-6\leqslant0$;　　(6) $x-20<x^2$.

8. 解下列不等式.

(1) $\frac{x-1}{x-2}>\frac{1}{2}$;　　(2) $(2x-5)(x-3)(x-4)\geqslant0$.

B　组

1. 解关于 x 的不等式.

(1) $x(x+a-1)\geqslant a$;

(2) $x^2-ax-2a^2>0$ $(a>0)$;

(3) $a^2x+b^2(1-x)\geqslant[ax+b(1-x)]^2(a\neq b)$.

2. 已知不等式$(m^2+4m-5)x^2-4(m-1)x+3>0$ 对一切实数 x 恒成立,求实数 m 的范围.

3. 某地要建一个水库,设计时,水库最大蓄水量为 128 000 m^3,在洪水暴发时,预测注入水库的水量 S_n(m^3)与天数$n(n\in\mathbf{N},n\leqslant10)$的关系是 $S_n=5\ 000\sqrt{n(n+24)}$,此水库原有水量为 80 000 m^3,泄水闸每天泄水量为 4 000 m^3,若山洪暴发的第一天就打开泄水闸,试问这 10 天中堤坝会发生危险吗?若会,计算第几天发生危险;若不会,说明理由(水库蓄水量超过最大蓄水量时,堤坝会发生危险).

4. 去年,某地区用电量为 a kW·h,电价为 0.8 元/(kW·h),今年计划将电价降到 0.55～0.75 元/(kW·h)之间.用户心理承受价位是 0.40 元/(kW·h).下调电价后,实际电价和用户心理价位仍存在差值,假设新增的用电量与这个差值成反比(比例系数为$0.2a$),地区的电力成本价为 0.3 元/(kW·h),电价定为多少时仍可保证电力部门的收益增长率不低于 20%?

§3 基本不等式

3.1 基本不等式

对于任意实数 $x,y,(x-y)^2\geqslant 0$ 总是成立的，即

$$x^2-2xy+y^2\geqslant 0,$$

所以 $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geqslant xy$，当且仅当 $x=y$ 时，等号成立.

设 $x=\sqrt{a},y=\sqrt{b}$，则由这个不等式可得出以下结论：

如果 a,b 都是非负数，那么 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

我们称上述不等式为**基本不等式**，其中 $\dfrac{a+b}{2}$ 称为 a,b 的**算术平均数**，$\sqrt{ab}$ 称为 a,b 的**几何平均数**. 因此，基本不等式又被称为均值不等式.

下面，我们给出基本不等式的一种几何解释.

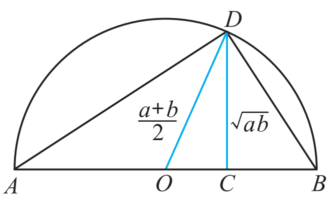


图 3-21

如图 3-21 所示，AB 是 $\odot O$ 的直径，$AC=a$，$CB=b$，过点 C 作 $CD\perp AB$ 交 $\odot O$ 上半圆于 D，连接 AD，BD，由射影定理可知

$$CD=\sqrt{ab}，而\ OD=\frac{a+b}{2}.$$

因为 $$OD\geqslant CD,$$

所以 $$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

当且仅当 C 与 O 重合，即 $a=b$ 时，等号成立.

利用基本不等式或类似的几何图形，还可以推出与基本不等式有关的简单不等式.

例 1 设 a,b 均为正数，证明不等式：$\sqrt{ab}\geqslant\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

证明 因 a,b 均为正数，由基本不等式，可知 $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{2}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$，

也即 $\sqrt{ab}\geqslant\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

下面给出这个不等式的一种几何解释.

如图 3-22,设 $AC=a$, $CB=b$, $CD\perp AB$ 交⊙O 上半圆于 D,过 C 作 $CE\perp OD$ 交 OD 于 E,

在 Rt△OCD 中,由射影定理可知

$$DC^2=DE\cdot OD,$$

即

$$DE=\frac{DC^2}{OD}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

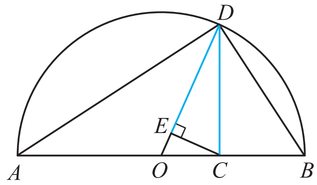


图　3-22

由 $DC\geqslant DE$,得

$$\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$,当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

思考交流

如图 3-23,在⊙O 上半圆中,设 $AC=a$,$CB=b$,$OF\perp AB$ 交上半圆于 F,请你利用 $FC\geqslant OF$ 得出一个关于 a,b 的不等式,将这个不等式与基本不等式和例 1 中的不等式进行比较.

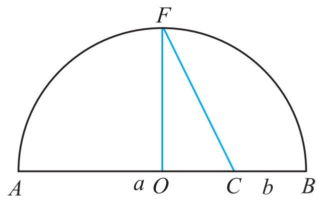


图　3-23

对于基本不等式,用文字语言可叙述为:两个非负数的算术平均数不小于它们的几何平均数. 但从数列角度看,可把 $\frac{a+b}{2}$ 看作是正数 a,b 的等差中项,$\sqrt{ab}$ 看作是正数 a,b 的正的等比中项,基本不等式又可以叙述为:两个正数的等差中项不小于它们正的等比中项.

阅读材料

对于正数 a,b 的几何平均数,我们可以有以下两种解释:

某工厂第一年的产值为 1 000 万元,第二年的产值为第一年产值的 2 倍,第三年的产值为第二年产值的 3 倍. 设工厂从第一年到第三年,每年产值平均增长 x 倍,那么 x 满足:$1\,000\times2\times3=1\,000x^2$,即

$$x=\sqrt{6}.$$

一般地,设某工厂第一年的产值为 m,第二年的产值为第一年的 a 倍(即 ma);第三年产值为第二年的 b 倍(即 mab).

如果该工厂从第一年到第三年,每年产值平均增长 x 倍, 那么 x 满足:$mab=mx^2$,即

$$x=\sqrt{ab}.$$

另外，我们可以把两个正数 a,b 看成是两条线段的长度，并以它们为边作一长方形，如图 3-24(1)；如果我们想作一正方形，使它的面积等于这个长方形的面积，那么它的边长 $\sqrt{ab}$ 就是 a 和 b 的几何平均数，如图 3-24(2).

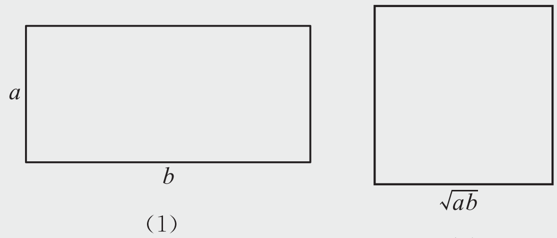
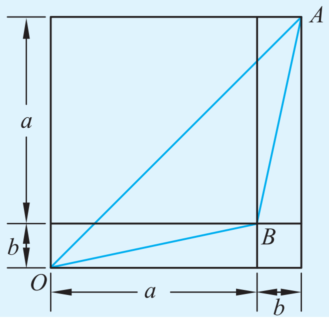


图 3-24

练 习

如图，正方形的边长为 $a+b(a>0,b>0)$，请你利用 $OA\leqslant OB+BA$ 写出一个含有 a,b 的不等式来，并与前面的不等式比较，与同学交流体会.



3.2 基本不等式与最大(小)值

你可以把一段 16 cm 长的细铁丝弯成形状不同的矩形，如边长为 4 cm 的正方形；长 5 cm 宽 3 cm 的矩形；长 6 cm 宽 2 cm 的矩形……你会发现边长为 4 cm 的那个正方形的面积最大．这是因为：设矩形的长为 x cm，宽为 y cm，则 $x+y=8$. 这时，由基本不等式得：$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$，即 $xy\leqslant 16$，当且仅当 $x=y=4$ 时，等号成立. 由此可知，边长为 4 cm 的那个正方形的面积最大.

思考交流

用类似上面的方法证明：在面积为 16 cm^2 的所有不同形状的矩形中，边长为 4 cm 的那个正方形的周长最小.

这表明，x,y 都为正数时，下面的命题成立：

(1) 若 $x+y=s$（和为定值），则当 $x=y$ 时，积 xy 取得最大值$\frac{s^2}{4}$；

(2) 若 $xy=p$(积为定值)，则当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 取得最小值$2\sqrt{p}$.

例 2　设 x,y 为正实数，且 $2x+5y=20$，求 $u=\lg x+\lg y$ 的最大值.

分析　因为 $u=\lg(xy)$，所以问题成为：已知 $x,y>0$，$2x+5y=20$，求 xy 的最大值.

解　因为 $x>0,y>0$，所以由基本不等式，得

$$\frac{2x+5y}{2}\geqslant\sqrt{2x\cdot 5y}=\sqrt{10xy}.$$

由于 $2x+5y=20$，所以 $\sqrt{10xy}\leqslant 10$，即 $xy\leqslant 10$. 当且仅当 $2x=5y$ 时，等号成立，因此有

$$\begin{cases}2x+5y=20,\\2x=5y.\end{cases}$$

解得 $x=5,y=2$.

当 $x=5,y=2$ 时，xy 有最大值 10.

这样 $u=\lg x+\lg y=\lg(xy)\leqslant\lg 10=1.$

所以，当 $x=5,y=2$ 时，$u=\lg x+\lg y$ 有最大值 1.

说　明

利用本小节命题求最大值或最小值时，应注意：

1. x,y 一定要是正数；

2. 求积 xy 最大值时，应看和 $x+y$ 是否为定值；求和 $x+y$ 最小值时，看积 xy 是否为定值；

3. 等号是否能够成立.

例 3　已知 $y=x+\frac{1}{x}(x\neq 0)$，证明：$|y|\geqslant 2$.

证明　(1)当 $x>0$ 时，由基本不等式，得 $y=x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，等号成立. 函数草图见图 3-25.

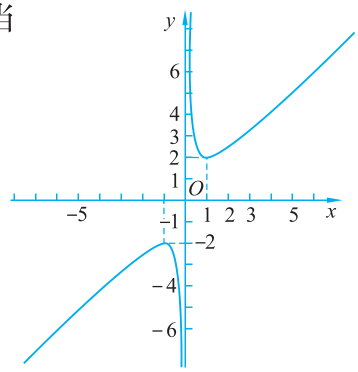


图　3-25

(2)当 $x<0$ 时，$-x>0$，$y=x+\frac{1}{x}=-\left[(-x)+\frac{1}{(-x)}\right].$

由(1)可知$(-x)+\frac{1}{(-x)}\geqslant 2$，当且仅当 $x=-1$ 时等号成立.

所以 $$-\left[(-x)+\frac{1}{(-x)}\right]\leqslant -2,$$

即 $$y=x+\frac{1}{x}\leqslant -2.$$

综上可知，$|y|\geqslant 2$.

练 习 1

1. 设 $x, y\in\mathbf{R}$，且 $x+y=5$，则 3^x+3^y 的最小值是（　　）.

   A. 0　　B. $6\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{6}$　　D. $18\sqrt{3}$

2. 在下列函数中，最小值是 2 的为（　　）.

   A. $y=x+\dfrac{1}{x}$

   B. $y=3^x+3^{-x}$

   C. $y=\lg x+\dfrac{1}{\lg x}(1<x<10)$

   D. $y=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

3. 已知 $0<x<\dfrac{3}{2}$，试用不同方法求函数 $y=2x(3-2x)$ 和 $y=x(3-2x)$ 的最大值.

基本不等式在解决实际问题中有广泛的应用. 通过对以下几个实例的讨论，我们将体会基本不等式的应用.

例 4　如图 3-26，动物园要围成相同面积的长方形虎笼四间. 一面可利用原有的墙，其他各面用钢筋网围成.

(1)现有可围 36 m 长网的材料，每间虎笼的长、宽各设计为多少时，可使每间虎笼面积最大?

(2)若使每间虎笼面积为 24 m^2，则每间虎笼的长、宽各设计为多少时，可使围成四间虎笼的钢筋网总长最小?

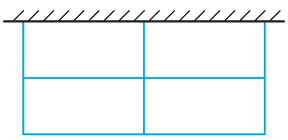


图　3-26

解　(1)设每间虎笼长为 x m，宽为 y m，则由“有可围网长 36 m 的材料”，得

$$4x+6y=36,$$

即

$$2x+3y=18.$$

设面积 $S=xy$.

由于

$$2x+3y\geqslant 2\sqrt{2x\cdot 3y}=2\sqrt{6xy},$$

所以

$$2\sqrt{6xy}\leqslant 18,\ 得\ xy\leqslant\frac{27}{2},$$

即 $S\leqslant\dfrac{27}{2}$，当且仅当 $2x=3y$ 时，等号成立.

解方程组

$$\begin{cases}2x=3y,\\2x+3y=18,\end{cases}\quad 得\begin{cases}x=4.5,\\y=3.\end{cases}$$

答　每间虎笼设计长、宽分别为 4.5 m 和 3 m 时，可使面积最大.

请你与同学合作，解决问题(2).

例 5　某种汽车，购车费用是 10 万元，每年使用的保险费、养路费、汽油费约为 0.9 万元，年维修费第一年是 0.2 万元，以后逐年递增 0.2 万元. 问这种汽车使用多少年时，它的年平均费用最少？

解　设使用 x 年平均费用最少.

由于“年维修费第一年是 0.2 万元，以后逐年递增 0.2 万元”，可知汽车每年维修费构成以 0.2 万元为首项，0.2 万元为公差的等差数列.

因此，汽车使用 x 年总的维修费用为 $\dfrac{0.2+0.2x}{2}x$ 万元.

设汽车的年平均费用为 y 万元，则有

$$\begin{aligned}y&=\frac{10+0.9x+\dfrac{0.2+0.2x}{2}x}{x}\\&=\frac{10+x+0.1x^2}{x}\\&=1+\frac{10}{x}+\frac{x}{10}\\&\geqslant 1+2\sqrt{\frac{10}{x}\cdot\frac{x}{10}}\\&=3.\end{aligned}$$

当且仅当 $\dfrac{10}{x}=\dfrac{x}{10}$，即 $x=10$ 时，y 取最小值.

答　汽车使用 10 年平均费用最少.

小资料

如图是 2002 年 8 月中国成功主办的国际数学家大会(ICM 2002)的会标. 这个标志的设计基础是 1 700 多年前，中国古代数学家赵爽勾股圆方图中著名的弦图，是为了勾股定理而绘制的. 经过设计变化成为含义丰富的 2002 年国际数学家大会的会标.

利用这个图，我们可以给基本不等式一个非常形象的几何解释. 如图 3-27，由正方形 $ABCD$ 的面积 $\geqslant 4$ 个阴影三角形面积之和，得

$$a+b\geqslant 4\times\frac{1}{2}\sqrt{ab},$$

即 $$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

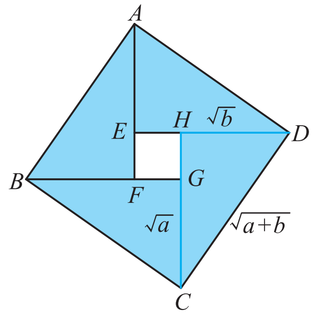


图 3-27

赵爽（约公元 220 年），又名婴，字君卿，东汉末至三国时代的吴国人，他是我国历史上著名的数学家与天文学家.

赵爽倾其一生心血注释了《周髀》（为算经十书之一，约成书于公元前 2 世纪，是我国最古老的天文学著作，唐初改名为《周髀算经》），他取得的突出成就之一是以超人的智慧，仅用勾股圆方图和 500 字的评注，就简明扼要地总结出中国古代勾股算术的深奥原理.

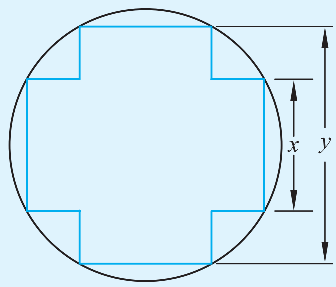
练 习 2

1. 制作一个面积为 1 m^2，形状为直角三角形的铁支架框，有下列四种长度的铁管供选择，较经济（够用，又耗材最少）的是（　　）.

   A. 4.6 m　　B. 4.8 m　　C. 5 m　　D. 5.2 m

2. 要挖一个面积为 432 m^2 的矩形鱼池，周围长、宽分别为 3 m 和4 m的堤堰，要想占地总面积最小，鱼池的长和宽应为多少？

3. 某种变压器的截面是正十字形（如图所示），为了保证有一定的磁通量，需要确定截面积，如果十字形芯片的截面积为 $4\sqrt{5}$ cm^2，应如何设计十字形的长 y 及宽 x，才能使正十字形外接圆的周长最短（从而使绕在铁芯上的铜丝最短）？



（第 3 题）

习 题 3—3

A 组

1. 已知 $0<x<1$，则 $x(3-3x)$ 取最大值时 x 的值为（　　）.

   A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{2}{3}$

2. 设 x，y 是满足 $2x+y=20$ 的正数，则 $\lg x+\lg y$ 的最大值是（　　）.

   A. 50　　B. 20　　C. $1+\lg 5$　　D. 1

3. 若 $a>b>1$，$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，$R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$，则下列不等式成立的是（　　）.

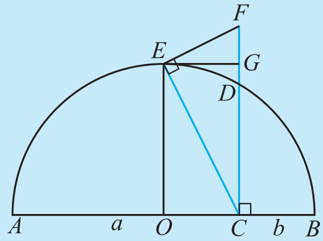
   A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$　　C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

4. 在直径为 d 的圆内接矩形中，最大的面积是多少？这样的矩形长宽之比是多少？

B　组

1. 如图所示，在⊙O 上半圆中，$AC=a$，$CB=b$，$CD\perp AB$，$EO\perp AB$，$FE\perp CE$，请你利用 $CF\geqslant CE$，写出一个含有 a，b 的不等式．

2. 设计一幅宣传画，要求画面面积 4 840 cm^2，画面的宽与高的比为 $\lambda(\lambda<1)$，画面的上、下各留 8 cm 空白，左、右各留5 cm空白，怎样确定画面的高与宽的尺寸，才能使宣传画所用纸张面积最小？



（第 1 题）

§4 简单线性规划

4.1 二元一次不等式(组)与平面区域

问题提出

一名刚参加工作的大学生为自己制定的每月用餐费的最低标准是 240 元，又知其他费用最少需支出 180 元，而每月可用来支配的资金为 500 元，这名新员工可以如何使用这些钱？

设用餐费为 x 元，其他费用为 y 元，由题意 x 不小于 240，y 不小于 180，x 与 y 之和不超过 500，用不等式组可表示为：

$$\begin{cases} x+y\leqslant 500, \\ x\geqslant 240, \\ y\geqslant 180. \end{cases}$$

如果将上述不等式组的一个解 (x,y) 视作平面直角坐标系上的一个点，那么使问题转化为：确定平面直角坐标系中不等式组的解集区域.

分析理解

我们先讨论，平面直角坐标系中的哪些点满足不等式 $x>y$.

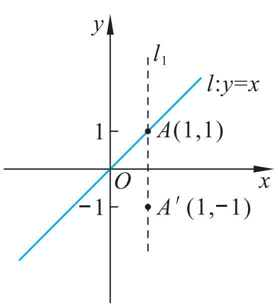


图 3-28

如图 3-28，在平面直角坐标系中，$y=x$ 表示一条直线 l，它将直角坐标平面分成三部分，即自身和它的两侧. 在直线 l 上任意一点的坐标 (x,y) 都满足 $y=x$，那么直线 l 下方的任意一点的坐标 (x,y) 有什么特点呢？

在直线 l 上任取一点，例如，取点 $A(1,1)$，过这点作与 y 轴平行的直线 l_1.

l_1 上所有点的横坐标都是 1，在 l_1 上，取 A 的下侧一点 $A'(1,-1)$，显然它的横坐标大于纵坐标，满足不等式 $x>y$.

不难看出，在 l_1 上，点 A 下侧的任意一点的坐标 (x,y) 都满足不等式 $x>y$.

由于 A 可在直线 l 上任取，所以在直线 l 下方的任意一点的坐标 (x,y) 都满足不等式 $x>y$.

同样地，在直线 l 上方的任意一点的坐标 (x,y) 都满足不等式 $x<y$.

综上可知，集合 $\{(x,y)\,|\,x>y\}$ 所表示的图形是直线 l 下方的平面区域（图 3-29(1)阴影部分），而集合 $\{(x,y)\,|\,x<y\}$ 所表示的图形是直线 l 上方的平面区域（图 3-29(2)阴影部分）.

这样，直线 l 把直角坐标平面分成了三个部分：

(1) 直线 l 上的点 (x,y) 满足 $x-y=0$；

(2) 直线 l 下方的平面区域内的点 (x,y) 满足 $x-y>0$；

(3) 直线 l 上方的平面区域内的点 (x,y) 满足 $x-y<0$.

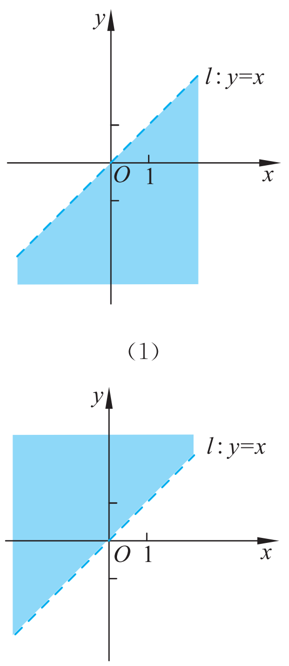


图　3-29

集合 $\{(x,\ y)\,|\,x=3\}$，$\{(x,\ y)\,|\,y=-1\}$ 分别把直角坐标平面分成了哪三个部分？请你画出图形，再刻画三个部分点的特征.

例 1　试确定集合 $\{(x,y)\,|\,x+2y-3>0\}$ 表示的平面区域.

分析　作直线 l：$x+2y-3=0$，l 把直角坐标平面分成三部分. 在 l 上取一点 $M\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$，过这点作一条与 y 轴平行的直线 l_1：$x=\frac{1}{2}$，在 l_1 上点 M 的上侧取任意一点 $\left(\frac{1}{2},y_1\right)$，它的纵坐标 $y_1>\frac{5}{4}$，于是 $\frac{1}{2}+2y_1-3>\frac{1}{2}+2\times\frac{5}{4}-3=0$，即点 $\left(\frac{1}{2},y_1\right)$ 的坐标满足不等式 $x+2y-3>0$；在 l_1 上点 M 的下侧取任意一点 $\left(\frac{1}{2},y_2\right)$，它的纵坐标满足 $y_2<\frac{5}{4}$，于是 $\frac{1}{2}+2y_2-3<\frac{1}{2}+2\times\frac{5}{4}-3=0$，即点 $\left(\frac{1}{2},y_2\right)$ 的坐标满足不等式 $x+2y-3<0$.

同理，在 l 上任取一点 P，过 P 作 y 轴的平行线 l_2，可以说明：在 l_2 上，点 P 上侧任意一点的坐标 (x,y) 满足不等式 $x+2y-3>0$；点 P 下侧任意一点的坐标 (x,y) 满足不等式 $x+2y-3<0$.

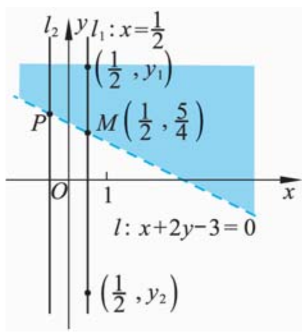


图　3-30

解　直线 l 将直角坐标平面分成三部分（l 及其两侧）. 在 l 上方的平面区域内的任一点的坐标 (x,y) 满足不等式 $x+2y-3>0$，而另外两部分的点均不满足不等式 $x+2y-3>0$. 不等式 $x+2y-3>0$ 表示的是直线 l 上方的平面区域（图 3-30 中的阴影部分）.

一般地，直线 l：$ax+by+c=0$ 把直角坐标平面分成了三个部分：

(1) 直线 l 上的点 (x,y) 的坐标满足 $ax+by+c=0$；

(2) 直线 l 一侧的平面区域内的点 (x,y) 的坐标满足 $ax+by+c>0$；

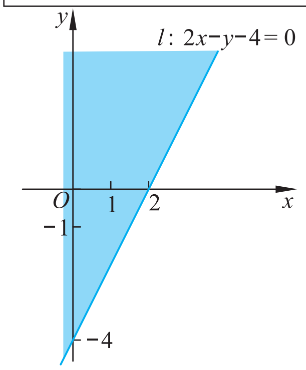


图 3-31

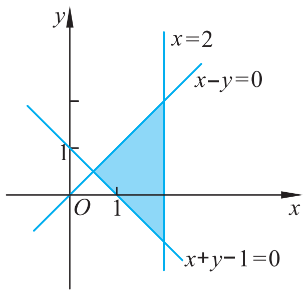


图 3-32

(3)直线 l 另一侧的平面区域内的点(x,y)的坐标满足 $ax+by+c<0$.

所以,只需在直线 l 的某一侧的平面区域内,任取一特殊点(x_0,y_0),从 ax_0+by_0+c 值的正负,即可判断不等式表示的平面区域.

例 2 画出不等式 $2x-y-4\leqslant 0$ 表示的平面区域.

解 先画出直线 l:$2x-y-4=0$,取原点 $O(0,0)$,把点 O 的坐标代入 $2x-y-4$,得

$$2\times 0-0-4<0.$$

所以,原点在 $2x-y-4<0$ 表示的平面区域内,不等式 $2x-y-4\leqslant 0$ 表示的平面区域是 $2x-y-4<0$ 表示的平面区域加上直线 l:$2x-y-4=0$(图 3-31 中阴影部分).

例 3 画出以下不等式组表示的平面区域.

$$\begin{cases} x+y-1\geqslant 0, & ① \\ x-y\geqslant 0, & ② \\ x\leqslant 2. & ③ \end{cases}$$

分析 不等式组表示的平面区域是不等式①,②,③所表示的平面区域的公共部分.

解 如图 3-32 所示.

不等式①表示直线 $x+y-1=0$ 的上方(包括直线)的平面区域;

不等式②表示直线 $x-y=0$ 下方(包括直线)的平面区域;

不等式③表示直线 $x=2$ 左方(包括直线)的平面区域.

所以,原不等式组表示上述平面区域的公共部分(阴影部分).

说 明

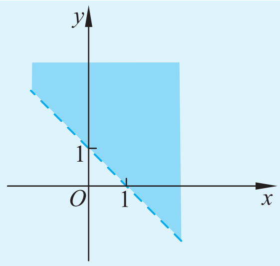
一般地,把直线 l:$ax+by+c=0$ 画成实线,表示平面区域包括这一边界直线;若把直线画成虚线,则表示平面区域不包括这一边界直线.

练 习 1

1. 图中表示的平面区域满足不等式(　　).

   A. $x+y-1<0$　B. $x+y-1>0$　C. $x-y-1<0$　D. $x-y-1>0$

2. 画出不等式 $7x+2y-14<0$ 表示的平面区域.
3. 画出本节开头的不等式组所表示的平面区域.
4. 画出不等式组 $\begin{cases} 3x+4y\leqslant 9, \\ 5x+2y\leqslant 8, \\ x\geqslant 0, y\geqslant 0 \end{cases}$ 表示的平面区域.



(第 1 题)

二元一次不等式(组)所表示的平面区域，在实际问题中有广泛的应用，请看以下例子.

实例分析

例 4　一工厂生产甲、乙两种产品，生产每吨产品的资源需求如表 3-5.

表 3-5

品种	电力/kW・h	煤/t	工人/人
甲	2	3	5
乙	8	5	2

该厂有工人 200 人，每天只能保证 160 kW・h 的用电额度，每天用煤不得超过 150 t，请在直角坐标系中画出每天甲、乙两种产品允许的产量范围.

解　设每天分别生产甲、乙两种产品 x t 和 y t，

生产 x t 的甲产品和 y t 乙产品的用电量是 $(2x+8y)$(kW・h)，根据条件，有 $2x+8y\leqslant 160$；

用煤量为 $(3x+5y)$(t)，根据条件，有 $3x+5y\leqslant 150$；

用工人数为 $(5x+2y)$(人)，根据条件，有 $5x+2y\leqslant 200$；

另外，还有 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$.

综上所述，x，y 应满足以下不等式组

$$\begin{cases}2x+8y\leqslant 160,\\3x+5y\leqslant 150,\\5x+2y\leqslant 200,\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

甲、乙两种产品的产量范围是这组不等式表示的平面区域，即如图 3-33 所示的阴影部分(含边界).

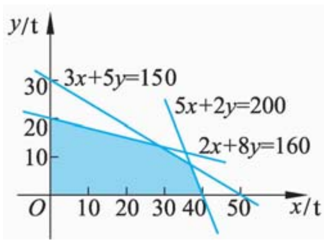


图　3-33

例 5　某市政府准备投资 1 200 万元兴办一所中学. 经调查，班级数量以 20 至 30 个班为宜，每个初、高中班硬件配置分别为 28 万元和 58 万元. 将办学规模(初、高中班的班级数量)在直角坐标系中表示出来.

解　设初中 x 个班，高中 y 个班，此时办学所需资金为 $(28x+58y)$ 万元，市政府准备投资 1 200 万元，则 $28x+58y\leqslant 1\,200$，班级数量是非负整数，且要满足 $20\leqslant x+y\leqslant 30$，即满足

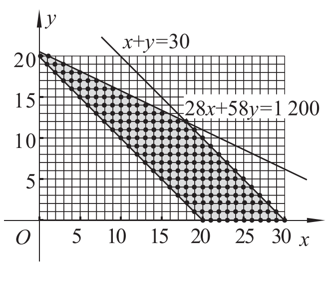


图　3-34

$$\begin{cases}28x+58y\leqslant 1\ 200,\\ x+y\geqslant 20,\\ x+y\leqslant 30,\\ x,\ y\in \mathbf{N}.\end{cases}$$

所以，办学规模应是图 3-34 阴影部分的整数点所表示的规模.

动手实践

请你利用平面区域给出本章第一节例 5 的解.

练 习 2

1. 某工厂制造 A 型电子装置 45 台，B 型电子装置 55 台，需用薄钢板为每台装置配一个外壳．已知薄钢板的面积有两种规格：甲种每张面积为 2 m^2，可做 A，B 两型电子装置外壳 3 个或 5 个；乙种每张面积 3 m^2，可做 A，B 两型电子装置外壳各 6 个. 请用平面区域表示甲、乙两种薄钢板张数的取值范围.
2. 某人 7:00 乘摩托艇以匀速 v kn($4\leqslant v\leqslant 20$)从 A 港出发，到相距 50 n mile 的 B 港，然后乘汽车以 w km/h($30\leqslant w\leqslant 100$)的速度从 B 港出发，驶向相距 300 km 的 C 市，期望于当日 16:00～21:00 到达 C 市. 请用图表示汽车、摩托艇的行驶时间的取值范围.

4.2 简 单 线 性 规 划

实例分析

首先，让我们讨论以下问题：

设 x，y 满足以下条件

$$\begin{cases}5x+6y\leqslant 30, & ①\\ y\leqslant 3x, & ②\\ y\geqslant 1. & ③\end{cases}$$

求 $z=2x+y$ 的最小值和最大值.

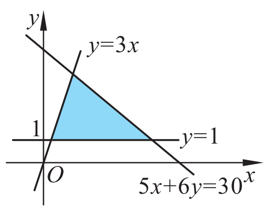


图 3-35

由前面知道，满足每个不等式的解集都可以表示一个平面区域，满足不等式组的解集则表示这些平面区域的公共区域(如图 3-35).

这时，问题转化为：当点(x，y)在公共的平面区域中时，求 $z=2x+y$的最小值和最大值.

为此，我们先来讨论当点(x，y)在整个坐标平面上变化时，$z=2x+y$值的变化规律.

当 $z=-3,-1,0,2,4$ 时，可得到直线：

$$l_2':2x+y=-3;$$
$$l_1':2x+y=-1;$$
$$l_0:2x+y=0;$$
$$l_1:2x+y=2;$$
$$l_2:2x+y=4.$$

显然，这是一组平行线.

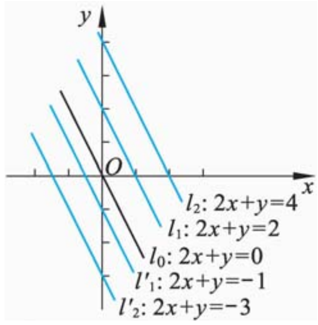


图　3-36

由图 3-36 可看出，当直线 l_0 向上平移时，所对应的 z 随之增大；当直线 l_0 向下平移时，所对应的 z 随之减小.

如图 3-37，在把 l_0 向上平移过程中，直线与平面区域首先相交的顶点 $A\left(\frac{1}{3},1\right)$所对应的 z 最小；最后相交的顶点 $B\left(\frac{24}{5},1\right)$所对应的 z 最大.

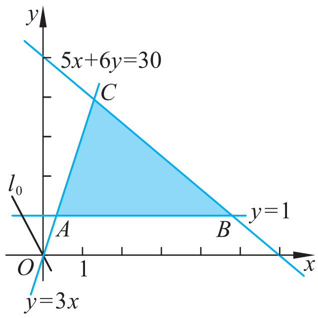


图　3-37

从而得到

$$z_{\min}=2\times\frac{1}{3}+1=\frac{5}{3};$$
$$z_{\max}=2\times\frac{24}{5}+1=\frac{53}{5}.$$

抽象概括

类似于这个实例，如果两个变量 x,y 满足一组一次不等式，例如①②③，求这两个变量的一个线性函数（例如 $z=2x+y$）的最大值或最小值，那么我们就称这个线性函数为**目标函数**，称一次不等式组为**约束条件**，像这样的问题叫作**二元线性规划问题**.

在线性规划问题中，满足约束条件的解 (x,y) 称为**可行解**，由所有可行解组成的集合称为**可行域**. 在上述问题中，可行域是阴影部分表示的三角形区域，区域中任意的 (x,y) 都是这个问题的可行解，其中可行解 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 与 $\left(\frac{24}{5},1\right)$ 分别使目标函数取得最小值和最大值，我们把它们称为这个问题的**最优解**.

从这个问题的求解过程可以看出，最优解一般在可行域的边界上，而且通常在可行域的顶点处取得.

例 6　设 x,y 满足约束条件

$$\begin{cases} x\geqslant -3, \\ y\geqslant -4, \\ -4x+3y\leqslant 12, \\ 4x+3y\leqslant 36. \end{cases}$$

(1)求目标函数 $z=2x+3y$ 的最小值与最大值；

(2)求目标函数 $z=-4x+3y-24$ 的最小值与最大值.

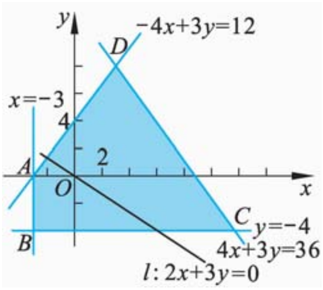


图　3-38

解　(1)作出可行域(如图 3-38 阴影部分).

令 $z=0$,作直线 l:$2x+3y=0$.

仿前,当把直线 l 向下平移时,所对应的 $z=2x+3y$ 的函数值随之减小,所以,直线经过可行域的顶点 B 时,$z=2x+3y$ 取得最小值.

从图中可以看出,顶点 B 是直线 $x=-3$ 与直线 $y=-4$ 的交点,其坐标为 $(-3,-4)$;

当把 l 向上平移时,所对应的 $z=2x+3y$ 的函数值随之增大,所以直线经过可行域的顶点 D 时,$z=2x+3y$ 取得最大值.

信息技术建议

用数学软件作出可行域,并动态显示目标函数的变化情况,进而直观地判断最优解.

顶点 D 是直线 $-4x+3y=12$ 与直线 $4x+3y=36$ 的交点,解方程组

$$\begin{cases}-4x+3y=12,\\4x+3y=36,\end{cases}$$

可以求得顶点 D 的坐标为 $(3,8)$.

此时,顶点 $B(-3,-4)$ 与顶点 $D(3,8)$ 为最优解.

所以
$$\begin{aligned}z_{\min}&=2\times(-3)+3\times(-4)\\&=-18,\\z_{\max}&=2\times3+3\times8=30.\end{aligned}$$

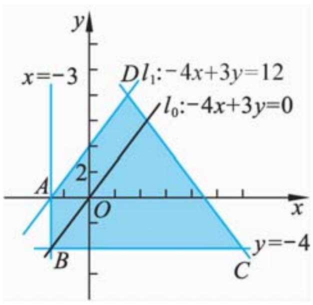


图　3-39

(2)可行域同(1)(如图 3-39 阴影部分).

作直线 l_0:$-4x+3y=0$,仿前,把直线 l_0 向下平移时,所对应的 $z'=-4x+3y$ 的函数值随之减小,即 $z=-4x+3y-24$ 的函数值随之减小,从图 3-39 可以看出,直线经过可行域顶点 C 时,$z'=-4x+3y$ 取得最小值,即 $z=-4x+3y-24$ 取得最小值.

顶点 C 是直线 $4x+3y=36$ 与直线 $y=-4$ 的交点,解方程组

$$\begin{cases}y=-4,\\4x+3y=36,\end{cases}$$

得到顶点 C 的坐标 $(12,-4)$,代入目标函数 $z=-4x+3y-24$,得

$$\begin{aligned}z_{\min}&=-4\times12+3\times(-4)-24\\&=-84.\end{aligned}$$

说　明

二元线性规划问题中,最优解可能有无数多个.

由于直线 l_0 平行于直线 $-4x+3y=12$,因此当把直线 l_0 向上平移到 l_1 时,l_1 与可行域的交点不止一个,而是线段 AD 上的所有点.此时,

$$z_{\max}=12-24=-12.$$

练 习 1

1. 求 $z=2x+y$ 的最大值，式子中的 x,y 满足

$$\begin{cases} y\leqslant x, \\ x+y\leqslant 1, \\ y\geqslant -1. \end{cases}$$

在以上问题中，不等式组叫作变量 x,y 的 ________，$z=2x+y$ 叫作________.

2. 已知 x,y 满足约束条件

$$\begin{cases} x+y+5\geqslant 0, \\ x-y\leqslant 0, \\ y\leqslant 0, \end{cases}$$

则 $z=2x+4y$ 的最小值是____________________.

3. 在约束条件

$$\begin{cases} 2x+y\geqslant 1, \\ 6x+8y\geqslant 3, \\ x\geqslant 0, y\leqslant 0 \end{cases}$$

下，求目标函数 $z=6x+4y$ 的最小值，并判断有无最大值.

4. 在约束条件

$$\begin{cases} -x+2y\leqslant 0, \\ x+2y\leqslant 12, \\ 2x+y\leqslant 16, \\ x\geqslant 0, y\geqslant 0 \end{cases}$$

下，求目标函数 $z=3x+4y$ 的最小值与最大值.

前面我们讨论了目标函数中 y 的系数大于 0 的情况，现在我们讨论 y 的系数小于 0 的情况.

例 7　在约束条件

$$\begin{cases} x+2y\leqslant 4, \\ x-y\leqslant 1, \\ x+2\geqslant 0 \end{cases}$$

下，求目标函数 $z=3x-y$ 的最小值和最大值.

解　当 $z=-4,-2,0,1,3$ 时，可得到一组平行线

$$l_2: 3x-y=-4;$$
$$l_1: 3x-y=-2;$$
$$l_0: 3x-y=0;$$
$$l_1': 3x-y=1;$$
$$l_2': 3x-y=3.$$

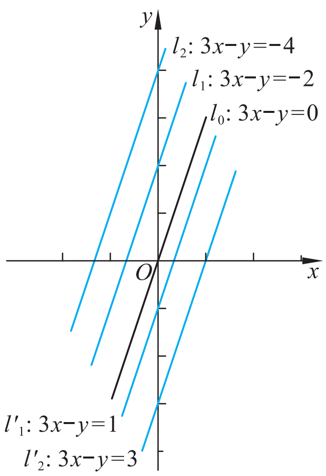


图 3-40

由图 3-40 可知，当直线 l_0 向上平移时，所对应的 z 随之减小；当直线 l_0 向下平移时，所对应的 z 随之增大.

作出可行域(如图 3-41).

可知，$z=3x-y$ 随直线 l_0：$3x-y=0$ 向上平移而减小，随 l_0 向下平移而增大，所以，在顶点 B 取得最小值，在点 A 取得最大值.

顶点 B 是直线 $x+2y=4$ 与直线 $x+2=0$ 的交点，解方程组

$$\begin{cases} x+2y=4, \\ x+2=0, \end{cases}$$

可求出顶点 B 的坐标$(-2,3)$，代入目标函数，即可得最小值

$$z_{\min}=3\times(-2)-3=-9.$$

顶点 A 是直线 $x+2y=4$ 与直线 $x-y=1$ 的交点，解方程组

$$\begin{cases} x+2y=4, \\ x-y=1, \end{cases}$$

得到顶点 A 的坐标为$(2,1)$，代入目标函数，即可得最大值

$$z_{\max}=3\times2-1=5.$$

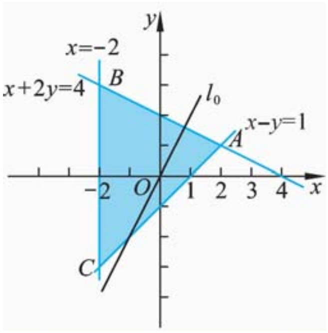


图 3-41

抽象概括

综上例题可以看出：目标函数的最大值与最小值总是在区域边界交点(顶点)处取得. 所以，求解实际应用问题时，只需求出区域边界的交点，再比较目标函数在交点处的函数值大小，根据问题需求选择所需结论.

例 8 求 $z=4a-2b$ 在约束条件

$$\begin{cases} -1\leqslant a-b\leqslant 2, \\ 2\leqslant a+b\leqslant 4 \end{cases}$$

下的最小值与最大值.

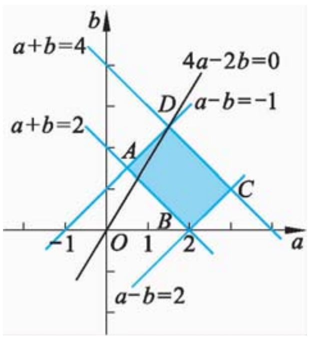


图 3-42

解 作出可行域(如图 3-42).

可知 z 的最大值、最小值是在顶点 A,B,C,D 处取得.

由 $\begin{cases} a-b=-1, \\ a+b=2, \end{cases}$ 得 $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$；

由 $\begin{cases} a+b=2, \\ a-b=2, \end{cases}$ 得 $B(2,0)$；

由 $\begin{cases} a-b=2, \\ a+b=4, \end{cases}$ 得 $C(3,1)$；

由 $\begin{cases} a+b=4, \\ a-b=-1, \end{cases}$ 得 $D\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$；

计算这些顶点的目标函数值：

$$z_A=4\times\frac{1}{2}-2\times\frac{3}{2}=-1;$$

$$z_B=4\times2-2\times0=8;$$

$$z_C=4\times3-2\times1=10;$$

$$z_D=4\times\frac{3}{2}-2\times\frac{5}{2}=1.$$

比较得到，$z_{\max}=z_C=10$，$z_{\min}=z_A=-1$.

练 习 2

1. 已知 x,y 满足 $\begin{cases}2\leqslant x+y\leqslant 4,\\ -4\leqslant x-y\leqslant -2,\end{cases}$ 则 $2x-y$ 的取值范围是(　　).

   A. $[-6,0]$　　B. $[-5,-1]$　　C. $[-6,-1]$　　D. $[-5,0]$

2. 在$\triangle ABC$中，三个顶点的坐标分别为 $A(2,4)$，$B(-1,2)$，$C(1,0)$，如果点(x,y)在$\triangle ABC$内部和边界上运动，那么 $x-y$ 的最大值是__________.

3. 4 枝玫瑰花与 5 枝茶花的价格之和不小于 22 元，而 6 枝玫瑰花与 3 枝茶花的价格之和不大于 24 元，试求 2 枝玫瑰花和 3 枝茶花的价格之差的最大值.

4.3　简单线性规划的应用

线性规划在实际中有广泛应用. 下面我们通过对两个实例的分析，体会利用线性规划的方法解决问题的过程.

例 9　医院用甲、乙两种原料为手术后的病人配营养餐，甲种原料每 10 g 含 5 单位蛋白质和 10 单位铁质，售价 3 元；乙种原料每 10 g含 7 单位蛋白质和 4 单位铁质，售价 2 元. 若病人每餐至少需要 35 单位蛋白质和 40 单位铁质，试问：应如何使用甲、乙原料，才能既满足营养，又使费用最省？

解　设甲、乙两种原料分别用 $10x$ g 和 $10y$ g.

需要的费用为　$z=3x+2y$；

病人每餐至少需要 35 单位蛋白质，可表示为　$5x+7y\geqslant 35$；

同理，对铁质的要求可以表示为　$10x+4y\geqslant 40$.

这样，问题成为：在约束条件

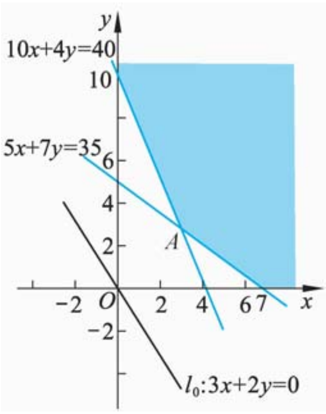


图 3-43

$$\begin{cases}5x+7y\geqslant 35,\\10x+4y\geqslant 40,\\x\geqslant 0,y\geqslant 0\end{cases}$$

下，求目标函数 $z=3x+2y$ 的最小值.

作出可行域，如图 3-43.

令 $z=0$，作直线 l_0：$3x+2y=0$.

由图形可知，把直线 l_0 平移至顶点 A 时，z 取得最小值.

由 $\begin{cases}5x+7y=35,\\10x+4y=40,\end{cases}$ 得 $A\left(\dfrac{14}{5},3\right)$.

所以用甲种原料 $\dfrac{14}{5}\times 10=28$(g)，乙种原料 $3\times 10=30$(g)，费用最省.

例 10 某厂生产一种产品，其成本为 27 元/kg，售价为 50 元/kg. 生产中，每千克产品产生 0.3 m^3 的污水，污水有两种排放方式：

方式一：直接排入河流.

方式二：经厂内污水处理站处理后排入河流，但受污水处理站技术水平的限制，污水处理率只有 85%. 污水处理站最大处理能力是 0.9 m^3/h，处理污水的成本是 5 元/m^3.

另外，环保部门对排入河流的污水收费标准是 17.6 元/m^3，且允许该厂排入河流中污水的最大量是 0.225 m^3/h. 那么，该厂应选择怎样的生产与排污方案，可使其每时净收益最大？

分析 为了解决问题，首先，要搞清楚是什么因素决定净收益.

净收益＝售出产品的收入－生产费用，

其中生产费用包括生产成本、污水处理费、排污费等.

设该厂生产的产量为 x kg/h，直接排入河流的污水为 y m^3/h，每小时净收益为 z 元，则

(1)售出产品的收入为 $50x$ 元/h；

(2)产品成本为 $27x$ 元/h；

(3)污水产生量为 $0.3x$ m^3/h，污水处理量为 $(0.3x-y)$ m^3/h，污水处理费为 $5(0.3x-y)$ 元/h；

(4)污水未处理率为 $1-85\%=0.15$，所以污水处理厂处理后的污水排放量为 $0.15(0.3x-y)$ m^3/h，环保部门要征收的排污费为 $17.6[0.15(0.3x-y)+y]$ 元/h；

(5) $z=50x-27x-5(0.3x-y)-17.6[0.15(0.3x-y)+y]$
$\quad=20.708x-9.96y$.

需要考虑的约束条件是：

(1)污水处理能力是有限的,即 $0 \leqslant 0.3x-y \leqslant 0.9$;

(2)允许排入河流的污水量也是有限的,即

$$y+(1-0.85)(0.3x-y) \leqslant 0.225.$$

解　根据题意,本问题可归纳为:在约束条件

$$\begin{cases} 0.3x-y \leqslant 0.9, \\ 9x+170y \leqslant 45, \\ 0.3x-y \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{cases}$$

下,求目标函数 $z=20.708x-9.96y$ 的最大值.

作出可行域,如图 3-44,令 $z=0$ 作直线 l_0: $20.708x-9.96y=0$,由图形可以看出,平移直线 l_0,在可行域中的顶点 A 处,z 取得最大值.

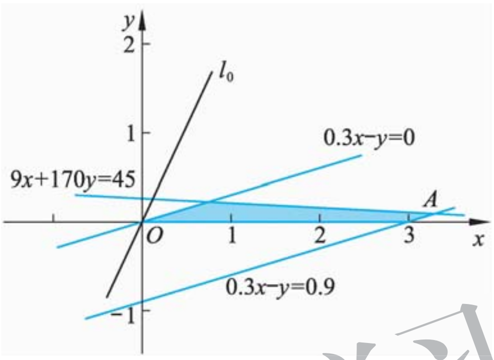


图　3-44

解方程组 $\begin{cases} 0.3x-y=0.9, \\ 9x+170y=45, \end{cases}$ 得 $A(3.3, 0.09)$.

故该厂生产该产品 3.3 kg/h,直接排入河流的污水为 0.09 m^3/h 时,可使每小时净收益最大,最大值为 $20.708\times3.3-9.96\times0.9=67.44$ (元).

答　该厂应安排生产该产品 3.3 kg/h,直接排入河流的污水为 0.09 m^3/h 时,其每小时净收益最大.

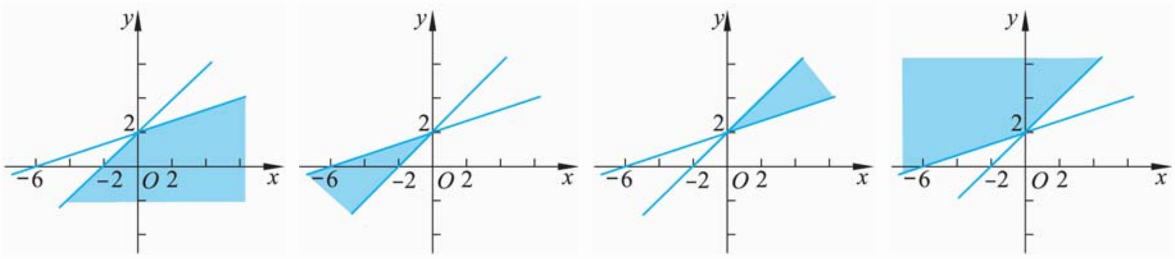
练　习

A,B 两个产地生产同一规格的产品,产量分别是 1.2 万 t,0.8万 t,而 D,E,F 三地分别需要该产品 0.8 万 t,0.6 万 t,0.6 万 t,从产地 A 运往 D,E,F 三地每万吨的运价分别为 40 万元,50 万元,60 万元;从产地 B 运往 D,E,F 三地每万吨的运价分别为 50 万元,20 万元,40 万元,怎样确定调运方案可使总的运费最少?

习 题 3—4

A 组

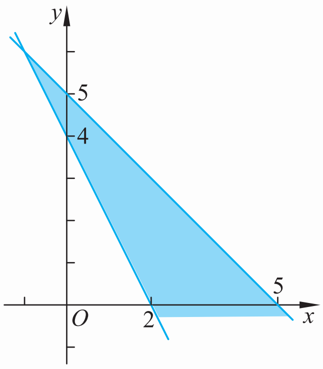
1. 不等式组$\begin{cases}x-3y+6\geqslant0,\\x-y+2\leqslant0\end{cases}$表示的平面区域是(　　).



A　　　　B　　　　C　　　　D

(第 1 题)

2. 图中阴影部分区域所表示的不等式组是(　　).



(第 2 题)

A. $\begin{cases}x+y\leqslant5,\\2x+y\geqslant4\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x+y\leqslant5,\\2x+y\leqslant4\end{cases}$

C. $\begin{cases}x+y\geqslant5,\\2x+y\leqslant4\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x+y\geqslant5,\\2x+y\geqslant4\end{cases}$

3. 在直角坐标系中标出$\{(x,y)\mid y\leqslant3,2x-y-3\leqslant0,x,y\in\mathbf{N}_+\}$对应的点.

4. 画出下列不等式组表示的平面区域.

(1)$\begin{cases}x+4y\leqslant3,\\y\leqslant2x,\\y\geqslant\dfrac{1}{3}x;\end{cases}$

(2)$\begin{cases}x-4y+3\geqslant0,\\3x+5y-25\leqslant0,\\x\leqslant8,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0.\end{cases}$

5. 三角形三边所在的直线分别是 $x-y+5=0$,$x+y=0$,$x-3=0$,求表示三角形内部区域的不等式组.

6. 在约束条件$\begin{cases}x+2y\leqslant10,\\2x+y\geqslant6,\\y\geqslant0\end{cases}$下,求 $z=x+6y+7$ 的最大值.

B　组

1. 在约束条件

$$\begin{cases} x+y\leqslant 8, \\ x+y\geqslant 2, \\ y\leqslant \dfrac{1}{2}x+5, \\ x\geqslant 0, y\geqslant 0 \end{cases}$$

下，求 $z=2x-y$ 的最小值与最大值.

2. 某宾馆准备建造一幢住宿楼，它设有单人房与双人房若干间，按要求，必须符合下列条件：该住宿楼最少能容纳 50 人住宿；单人房间每间面积 10 m^2，双人房间每间面积15 m^2，且全部房间所占面积不超过 480 m^2；双人房的数目不得超过单人房数目. 已知住宿楼建成开业后，每间单人房与每间双人房每月获益分别为 250 元与 300 元，试问：如何安排单人间与双人间的数目，才能使每月总的获益最大？

阅读材料

人的潜能

——Dantzig 的故事

1947 年，33 岁的美国数学家 G. B. Dantzig 提出了解决一种最优化问题的单纯形法，该方法奠定了线性规划的基础，使得经济学、环境科学、统计学应用等学科获得了迅速发展，Dantzig也因而被誉为“线性规划之父”.

Dantzig 的父亲是大学数学教授，但是他直到上初中时，对数学仍不感兴趣，甚至在初中三年级时，代数成绩还不及格. 对于这样的结果，Dantzig 非常内疚，他感到愧对自己的数学家父亲，于是发奋努力，很快就发现其实数学并不难，逐渐地建立了自信. 上高中时 Dantzig 对父亲的数学题库非常着迷，他解决了所有的题目，并认为这是父亲送给他的最珍贵的礼物.

在伯克利大学攻读统计学博士学位期间，“二战”爆发了，Dantzig 作为文职人员参加了空军. 1946 年，Dantzig 返回伯克利并取得博士学位.

Dantzig 师从著名的统计学家 Neyman 教授. 在他们之间，发生过一个非常具有传奇色彩的故事. 一天，Dantzig 因故迟到了，看到黑板上写着两道题目，以为是老师

留的课外作业，就抄了下来. 在做的过程中，Dantzig 感到有点困难，最后用了好几天时间才完成，为此他还特意向 Neyman 教授道歉. 几周后的一个周末清晨，Dantzig 被一阵急促的敲门声吵醒. Neyman 教授一进门就激动地说："我刚为你的论文写好一篇序言，你看一下，我要立即寄出去发表." Dantzig 过了好一阵才明白 Neyman 教授的意思：原来那是两道统计学中著名的未解决问题，他竟然当成课外作业解决了！

后来谈到这件事时，Dantzig 感慨道：如果自己预先知道这是两道著名的未解决的问题，根本就不会有信心和勇气去思考，也不可能解决它们.

Dantzig 的故事告诉我们：一个人的潜能是难以预料的，成功的障碍往往来自于心理上的畏难情绪；一定要相信自己，保持积极的态度.

资料来源：数学译林，1990，9(2)：139

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 不等关系

通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，了解不等式(组)的实际背景.

2. 一元二次不等式

(1)经历从实际情境中抽象出一元二次不等式模型的过程.

(2)通过函数图像了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

(3)会解一元二次不等式，对给定的一元二次不等式，尝试设计求解的程序框图.

3. 基本不等式：$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a,b\geqslant 0)$

(1)探索并了解基本不等式的证明过程.

(2)会用基本不等式解决简单的最大(小)值问题.

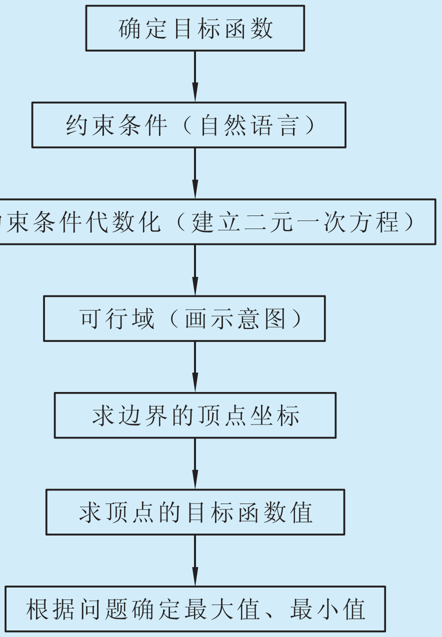
4. 二元一次不等式组与简单线性规划问题

(1)从实际情境中抽象出二元一次不等式组.

(2)了解二元一次不等式的几何意义，能用平面区域表示二元一次不等式组.

(3)从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题，并能加以解决.

(4)掌握解决简单线性规划问题的算法框图.



二、复习建议

1. 依据课本、笔记及作业总结本章的基本知识，掌握本章的基本方法. 使知识有层次，有条理地呈现.

2. 按学习要求中的四个部分，作出本章小结.

3. 经过小结，作出本章知识框图.

4. 本章复习时可供思考的问题：

(1)不等关系大量存在，你能再举些实际例子吗？

(2)什么是一元二次不等式？怎么解一元二次不等式？

(3)什么是基本不等式？你还能给出其他的几何解释吗？

(4)如何用基本不等式解决一些最大(小)值问题？

(5)二元一次不等式组的几何意义是什么？

(6)怎样把二元一次不等式组表示成平面区域？

(7)解决线性规划问题的基本步骤是什么？

(8)如何从实际问题中体会线性规划的方法的应用？

(9)本章的重点问题，你能总结出几个？

5. 请同学互相交流学习本章的感受与思考.

复 习 题 三

A　组

1. 已知集合 $M=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，$N=\{x\mid x^2-2x-1<0\}$，则集合 $M\cap N=$(　　).

   A. $\{x\mid 0\leqslant x<1\}$　　B. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$

   C. $\{x\mid 0\leqslant x<2\}$　　D. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$

2. 已知 $a>b>0$，则下列不等式成立的是(　　).

   A. $a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$　　B. $a>b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

   C. $a>\frac{a+b}{2}>b>\sqrt{ab}$　　D. $a>\sqrt{ab}>\frac{a+b}{2}>b$

3. 不等式 $x-2y-1>0$ 表示的平面区域在直线 $x-2y-1=0$ (　　).

   A. 左上方　　B. 左下方

   C. 右上方　　D. 右下方

4. 解不等式.

   (1) $2x^2-7x-15<0$；　　(2) $x^2-4x+3\geqslant 0$；

   (3) $(3x-1)^2-4\leqslant 0$；　　(4) $(2x-3)(x+2)>4$.

5. m 为何值时，$y=-x^2+(2m+6)x-m-3$ 在实数集上恒正或恒负？

6. 求表示直线 $x+2y-1=0$ 右上方区域的不等式.

7. 画出不等式组 $\begin{cases} y\leqslant x, \\ x+2y\leqslant 4, \\ y\geqslant -2 \end{cases}$ 表示的平面区域.

8. 已知 x,y 满足条件

$$\begin{cases} y\geqslant x, \\ x+7y-11\leqslant 0, \\ 4x+y+10\geqslant 0, \end{cases}$$

   求 $z=4x-3y$ 的最大值和最小值.

9. 点 $P(a,3)$ 到直线 $4x-3y+1=0$ 的距离等于 4，且在 $2x+y-3<0$ 表示的平面区域内，求点 P 的坐标.

B　组

1. 解不等式 $(x-1)(x-2)<(x+3)(x-4)-20$.

2. 解关于 x 的不等式：$(a-x)(x^2-x-2)>0$，其中常数 a 是实数.

3. 用不等式组表示以 $(3,-2)$，$(-3,0)$，$(1,5)$ 为顶点的三角形区域.

4. 咖啡馆配置两种饮料，甲种饮料每杯含奶粉 9 g，咖啡 4 g，糖3 g；乙种饮料每杯含奶粉 4 g，咖啡 5 g，糖 10 g. 每天原料的使用限额为奶粉 3 600 g，咖啡 2 000 g，糖 3 000 g. 若甲种饮料每杯获利 0.7 元，乙种饮料每杯获利1.2元，则应配置两种饮料各多少杯时才能使获利最大？

C　组

1. 设 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$. 求 $f(-2)$的取值范围.
2. 某工厂拟造一座平面为长方形，且面积为 200 m² 的三级污水处理池. 由于地形限制，长、宽都不能超过 16 m，处理池的高度一定. 如果四周围池壁造价为 400 元/m，中间两道隔墙造价为248 元/m，池底造价为 80 元/m²，那么如何设计污水池的长和宽，才能使总造价最低?

探究活动

三 角 测 量

一、问题背景和探究任务

雅鲁藏布大峡谷是世界第一大峡谷，对人类来说，她一直是个谜. 为了揭开大峡谷神秘的面纱，1998 年 10 月，中国科学探险协会组织“98 中国天年雅鲁藏布大峡谷科学探险考察队”，进行了人类首次徒步穿越并考察雅鲁藏布大峡谷. 这次野外徒步考察历时 36 天，其间地质工作者对河流宽度、峡谷跨度、山体高度等开展了大量测量工作，为保护和开发峡谷积累了第一手资料.

雅鲁藏布大峡谷地区片段

对于建筑物、山峰等的高度，两建筑物、山峰间的距离，往往无法直接测量，这就需要精心设计测量方案，合理使用现有工具获得相关数据，再使用这些相关数据经过计算，完成任务.

任务 1 一座古塔矗立在河岸边，我们利用皮尺及测角仪怎样测量古塔的高度?

任务 2 在某湖泊中有两个标志物，请你设计一个测量方案，使得在湖的岸边通过测得的数据可以计算出两个标志物之间的距离.

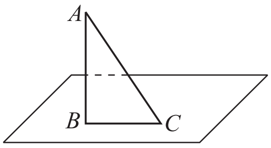
任务 3 在你生活的地区，自己选定一个测量物，设计测量方案，完成测量，并写出测量报告.

二、实施建议

1. 可以组成学习探究小组，集体讨论、分析，研究其中的数学问题，形成可行的探究方法，独立思考、计算，完成每个人的“成果报告”.

2. 对完成任务 1 的建议：

(1)如果在观测点 C 能够测量离古塔底部 B 的距离 BC，还需测量哪些数据，就能计算出古塔的高度 AB(如图所示)？



(2)如果我们在河的另一岸，只选择一个观测点 C，能否通过测出的数据计算出古塔的高度？若不能，还需增加几个观测点，才能通过测量的数据计算出古塔的高度？请写出测量方案.

(3)你还有其他的测高方案吗？评价这些测高方案，你认为哪些较好？你评价的标准是什么？

3. 对完成任务 2 的建议：

分析过程中用数据支持自己的观点，这样既可以使道理显得通俗易懂，又利于揭示问题的本质.

4. “成果报告”的书写建议：

成果报告可以下表形式呈现.

“三角测量”探究学习课题组成果报告表

____年级____班　姓名________　完成时间__________

课题组成员	分　　工	主　要　贡　献
探究过程		
主要结论		
有何发现和猜想		
探究体会		
建　　议		

成果交流：探究小组推选一名代表，向全班报告研究成果，交流探究体会.

5.评价建议：

在评价中，采用自评、互评、教师评价相结合的形式，善于发现每个成员工作中的特色，主要考虑以下几个方面：

(1) 探究过程和结论，是否有序、清楚、简捷、正确；

(2) 是否有独到的思考和发现；

(3) 算法是否合理，信息技术应用是否适当；

(4) 探究体会是否深刻，是否对大家很有启发；

(5) 探究小组是否有效地合作，集体力量是否发挥良好.

6.有心得的同学还可以撰写一篇小论文.

附录 1

部分数学专业词汇中英文对照表

中文	英文
边长	length of edge
角度	degree
数列	sequence
等差数列	arithmetic progression
公差	common difference
不等式	inequality
等比数列	geometric progression
公比	common ratio
基本不等式	fundamental inequality
线性规划	linear programming
二元线性规划	binary linear programming

附录 2

信息检索网址导引

基础教育教材网

http://www.100875.com.cn/

简介:基础教育教材网是由北京师范大学出版社创建的一个综合性网站,内容主要涉及新课程标准改革研究、课题研究、教学研究、评价研究和教学资源等几个方面.网站在提供教学实例、教学课件的同时,也给教师和学生提供了交流互动的宽松平台.

后　　记

本套教材是按照国家教育部于2003年4月颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.我们在编写过程中强调了数学课程的基础性和整体性,突出了数学的思想性和应用性,尊重学生的认知特点,创造多层次的学习活动,为不同的学生提供不同的发展平台,注意发挥数学的人文教育价值.好学好用.

教材的建设是长期、艰苦的任务,每一位教师在教学实践中要自主地开发资源,创造性地使用教材.我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作,对教材的逐步完善提供有力的支持,促进基础教育课程改革的深入发展.

本套教材的编委会组成如下(按姓氏笔画排序):

王希平、王尚志、王建波、任志瑜、刘美仑、吕世虎、吕建生、李亚玲、李延林、汪香志、严士健、张丹、张饴慈、张思明、姚芳、赵大悌、徐勇、戴佳珉.

参加本册教材编写的还有(按姓氏笔画排序):

仇金家、许书华、李延林、赵霞、顿继安、徐德前、黄龙如、焦继红.

由于时间仓促,教材中的错误在所难免,恳请广大使用者批评指正.

北京师范大学出版社