经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修2-1）

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志

副 主 编　张饴慈　李延林　张思明

本册主编　李延林　王建明

编写人员　（按 姓 氏 笔 画 排 序）

董　昕　李方烈　李延林

汪香志　王建明　薛文叙

北京师范大学出版社

·北 京·

前　　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法：“授之以鱼，不如授之以渔”，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高“自学能力”最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）? 20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由 26 册书组成：必修教材有 5 册；选修系列 1 有 2 册，选修系列 2 有 3 册，它们体现了发展的基本方向；选修系列 3 有 6 册，选修系列 4 有 10 册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为 A，B 两组；还有一类是复习题，分为 A，B，C 三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程．另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”．它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想．教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解．在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解．教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦.

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811，58802790.

目　录

第一章 常用逻辑用语

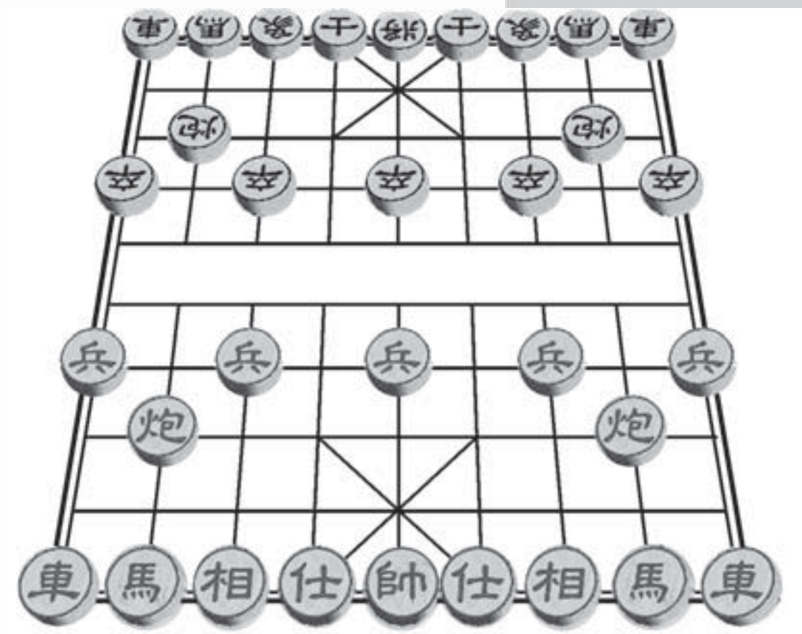
在初中的数学学习中，我们常常要思考下面的问题：

如何判断一个四边形是不是平行四边形？

我们知道，“若一个四边形两组对边分别平行，则这个四边形是平行四边形”. 在这里，“两组对边分别平行”是判定“四边形是平行四边形”的条件. 通常，称这类命题为判定定理. 在数学中，寻求一个“数学对象”成立的条件是一件非常基本的工作.

如何用简洁的语言清晰地表达这些思想呢？

在本章，我们将学习常用逻辑用语. 正确地使用逻辑用语，不仅能反映数学内容的逻辑关系，而且能准确地帮助我们理解和表达数学内容. 在学习常用逻辑用语的过程中，我们应当不断体会逻辑用语在表述和论证中的作用，提高表达自己思想的能力，更好地进行交流.



§1　命　　题

我们在初中已经学习过命题.可以判断真假、用文字或符号表述的语句叫作命题.看下面的语句：

在欧氏几何中，三角形三个内角的和等于 $180°$.　①

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$.　②

$\sqrt{2}\in\mathbf{N}$.　③

这些语句都可以判断真假，它们都是命题.其中①②是正确的，是真的，叫作真命题，③是错误的，是假的，叫作假命题.

有些语句不是命题，例如下面的语句：

π 是无理数吗？（未涉及真假）

$x>1$.（不能判断真假）

一般地，一个命题由条件和结论两部分组成，例如命题①的条件是“三个角是一个三角形的内角”，结论是“它们的和等于 $180°$”.

数学中，通常把命题表示为“若 p，则 q”的形式，其中 p 是条件，q 是结论.

问题提出

在初中，我们还学习过命题与逆命题的知识，下面给出两个命题，请分别写出它们的逆命题，并仔细分析条件与结论，讨论它们之间有什么联系.

若 $\angle A=\angle B$，则 $\sin A=\sin B$.　④

若 $\angle A\neq\angle B$，则 $\sin A\neq\sin B$.　⑤

分析理解

命题④的逆命题是

$$若\ \sin A=\sin B，则\ \angle A=\angle B.\qquad ⑥$$

命题⑤的逆命题是

$$若\ \sin A\neq\sin B，则\ \angle A\neq\angle B.\qquad ⑦$$

分析这四个命题的条件与结论，容易发现，在命题④与命题⑤中，命题⑤的条件是命题④的条件的否定，命题⑤的结论是命题④的结论的否定，我们把这样的两个命题叫作**互为否命题**，若把命题④叫作原命题，则命题⑤就叫作原命题的否命题.

在命题④与命题⑦中，命题⑦的条件是命题④的结论的否定，命题⑦的结论是命题④的条件的否定，我们把这样的两个命题叫作**互为逆否命题**. 若把命题④叫作原命题，则命题⑦叫作原命题的逆否命题.

概括地说，设命题④为原命题，那么

命题⑥为其逆命题，

命题⑤为其否命题，

命题⑦为其逆否命题.

这个例子中，原命题与逆否命题都是真命题，而逆命题与否命题都是假命题.

例 1 写出命题“对顶角相等”的逆命题、否命题和逆否命题，并判断这四个命题的真假.

分析 关键是找出原命题的条件和结论.

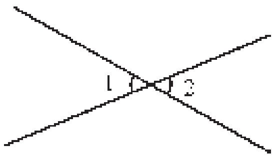


图 1-1

解 原命题可以写成“若两个角是对顶角，则这两个角相等”. 如图 1-1 所示，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是对顶角.

逆命题：若两个角相等，则这两个角是对顶角；

否命题：若两个角不是对顶角，则这两个角不相等；

逆否命题：若两个角不相等，则这两个角不是对顶角.

原命题和逆否命题都是真命题，逆命题和否命题都是假命题.

例 2 设原命题是“若 $a=0$，则 $ab=0$”.

(1)写出它的逆命题、否命题及逆否命题；

(2)判断这四个命题是真命题还是假命题.

解 (1)逆命题：若 $ab=0$，则 $a=0$；

否命题：若 $a\neq 0$，则 $ab\neq 0$；

逆否命题：若 $ab\neq 0$，则 $a\neq 0$.

(2)原命题和逆否命题都是真命题，逆命题和否命题都是假命题.

四种命题之间的关系如图 1-2 所示.

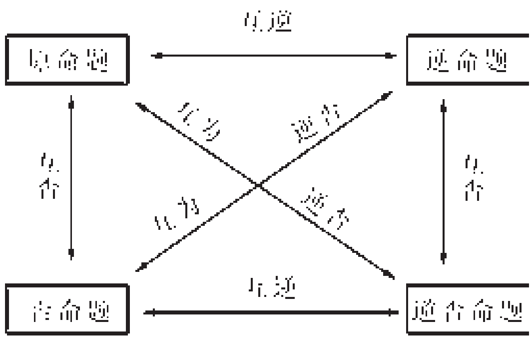


图 1-2

练　习

1. 分别写出下列命题的逆命题、否命题与逆否命题，并判断它们的真假：
   (1) 若 $xy=0$，则 $x=0(x, y\in\mathbf{R})$；
   (2) 若 $a=b$，则 $a^2=ab$；
   (3) 若 $q\geqslant-\frac{1}{4}$，则方程 $x^2+x-q=0$ 有实数解；
   (4) 负数的平方是正数；
   (5) 正方形的四条边相等.
2. 设原命题是"若 $a<b$，则 $a+c<b+c$"，写出它的逆命题、否命题及逆否命题，并判断这四个命题的真假.

习　题　1—1

1. 分别写出下列命题的逆命题、否命题与逆否命题，并判断它们的真假：
   (1) 若 $a-2$ 是无理数，则 a 是无理数；
   (2) 矩形的两条对角线相等.
2. 判断下列命题的真假：
   (1) 命题"若 $x^2+y^2=0$，则 x, y 全为 0"的逆命题；
   (2) 命题"全等三角形是相似三角形"的否命题.
3. 写出命题"若 $a>b$，则 $a\neq b$"的逆命题，并判断其真假.
4. 写出命题"正方形是平行四边形"的否命题和逆否命题，并判断它们的真假.

§2 充分条件与必要条件

2.1 充分条件与必要条件

先看学过的几个定理：

定理 1 如果闭区间$[a,b]$上函数 $f(x)$的图像是连续曲线，且满足 $f(a)f(b)<0$，那么 $f(x)$在开区间(a,b)内至少存在一个零点.

定理 2 如果一条直线垂直于一个平面内两条相交直线，那么这条直线垂直于这个平面.

定理 3 如果两个平面平行，那么一个平面内的任何一条直线平行于另一个平面.

定理 4 若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

以上定理都具有共同的形式：若“p”成立，则“q”一定成立. 记作“$p\Rightarrow q$”，称 p 是 q 的**充分条件**，q 是 p 的**必要条件**. 换个角度考虑，$p\Rightarrow q$，就是说，为了使 q 成立，具备条件 p 就足够了. 反过来说，一旦 q 不成立，p 一定也不成立，q 成立对于 p 成立是必要的.

例如，在定理 1 中，p：闭区间$[a,b]$上函数 $f(x)$的图像是连续曲线，且满足 $f(a)f(b)<0$，q：函数 $f(x)$在开区间(a,b)内至少存在一个零点. 可以写成 $p\Rightarrow q$，这时，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

在定理 2 中，p：一条直线垂直于一个平面内两条相交直线，q：这条直线垂直于这个平面. 可以写成 $p\Rightarrow q$，这时，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

思考交流

对定理 3 和定理 4 进行分析理解.

2.2 充分条件与判定定理

我们已经学过很多判定定理. 例如：定理 1 是零点存在的判定定理，其作用是给出零点存在的充分条件. 定理 2 是直线与平面垂直的判定定理，其作用是给出直线与平面垂直的充分条件.

判定定理是数学中一类重要的定理，阐述了结论成立的依据，也就是说判定定理给出了结论成立的充分条件．定理 1 可以理解为："函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内至少存在一个零点"的充分条件是"函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的图像是连续曲线，且满足 $f(a)f(b)<0$"；定理 2 可以理解为："一条直线垂直于一个平面"的充分条件是"这条直线垂直于这个平面内的两条相交直线"．

思考交流

请用充分条件的语言表述下面的判定定理．

指数函数 $y=a^x(a>1)$ 是 **R** 上的增函数．

等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1>0$ 且公比 $q>1$ 成立，那么这个数列 $\{a_n\}$ 是递增数列．

若 a,b 是非负实数，则 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$．

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$，那么方程 $ax^2+bx+c=0$ 在实数范围内有解．

2.3　必要条件与性质定理

前面列举的定理 3："如果两个平面平行，那么一个平面内的任何一条直线平行于另一个平面"，这个定理是两个平面平行的性质定理．在数学中，还有很多性质定理，例如：

定理 5　菱形的对角线互相垂直．

定理 6　函数 $f(x)=\sin x$ 是 **R** 上的奇函数．

性质定理同样是数学中一类重要的定理，阐述了一个数学研究对象所具有的重要性质，其作用是揭示这个研究对象的某个特征．上面的三个定理分别描述了两个平行平面、菱形、正弦函数的性质．例如，对角线互相垂直是菱形的一个重要特征．事实上，性质定理给出了结论成立的必要条件．

这样，定理 3 可以理解为："一个平面内的直线平行于另一个平面"是"这两个平面平行 "的必要条件．

思考交流

请用必要条件的语言表述下面的性质定理．

菱形的对角线互相垂直.

函数 $f(x)=\sin x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

两条平行直线，如果斜率存在，那么它们的斜率相等.

若两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直.

练 习

1. 试判断下列条件中，p 是 q 的什么条件？
   (1) p：函数 $f(x)=\log_a x\ (0<a<1)$，q：函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数；
   (2) p：函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，q：函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数；
   (3) p：数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=dn+b$（d，b 为常数），q：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；
   (4) 给定直线 l 及平面 α，β，p：$l\perp\alpha$，$l\perp\beta$，q：$\alpha /\!/ \beta$；
   (5) p：$b^2=ac$，q：a，b，c 成等比数列.
2. 用充分条件或必要条件的语言表述下列定理或结论.
   (1) 垂直于同一个平面的两条直线平行；
   (2) 一个平面过另一个平面的垂线，则两个平面垂直；
   (3) 如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量 $\boldsymbol{a}$，存在唯一一对实数 λ_1，λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

2.4 充 要 条 件

对于 p 和 q，如果有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，那么，记作 $p\Leftrightarrow q$. 这时，p 既是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件；同时，q 既是 p 的充分条件，也是 p 的必要条件. 我们称 p 是 q 的充分必要条件，简称**充要条件**. 也称 p 与 q 是等价的.

我们学习过一些重要的定理，条件与结论是等价的，例如：

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，“$C=\dfrac{\pi}{2}$”是“$a^2+b^2=c^2$”的充要条件.

(2) 给定向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$”是“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”的充要条件.

(3) 给定一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，“判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$”是“方程有两个不相等的实数解”的充要条件.

(4) “二元一次方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 有唯一一组解”是“直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 有唯一交点”的充要条件.

> 我们常用“当且仅当”来表达充要条件，p 是 q 的充要条件也可以说成：p 成立当且仅当 q 成立.

在数学中，充要条件是十分重要的概念，它的作用在于从不同角度来刻画同一事物. 例如，在(3)中，一元二次方程有两个不同的实数

解可以用判别式大于 0 来等价表示；在(4)中，可以从解析几何的角度阐述二元一次方程组唯一解的问题.

思考交流1

请用充要条件的语言表述下面的定理或结论.

(1) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴无交点，则 $b^2-4ac<0$；

(2) 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；

(3) 两条直线的斜率之积等于 -1，那么这两条直线垂直；

(4) $a+c=2b$，则 a,b,c 成等差数列.

给定 p,q，有时 p 是 q 的充分条件，但不是 q 的必要条件. 例如，“一个数的末位数字为 0”是“这个数能被 5 整除”的充分条件但不是必要条件.

有时 p 是 q 的必要条件，但不是 q 的充分条件. 例如，在直角坐标系中，“两条直线平行”是“这两条直线斜率相等”的必要条件，但不是充分条件，因为有的直线斜率不存在.

有时，p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件. 例如，“$a>b$”既不是“$a^2>b^2$”的充分条件，也不是“$a^2>b^2$”的必要条件.

思考交流2

在 2.1，2.2 和 2.3 列举的定理的条件和结论中，哪些是充要条件？哪些是充分不必要条件？哪些是必要不充分条件？

练　习

在下列各题中，试判断 p 是 q 的什么条件.

(1) $p:\frac{1}{x}<1$，$q:x>1$；

(2) $p:b=0$，q：函数 $y=ax^2+bx+c$ 是偶函数；

(3) $p:k>0$，q：函数 $y=\frac{k}{x}$ 是减函数；

(4) p：平行四边形的对角线相等，q：这个平行四边形是矩形；

(5) $p:\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$q:ad=bc$.

习 题 1—2

1. 请在"充分不必要""必要不充分""充要""既不充分也不必要"中选择一个使命题正确的填写在各题横线上.

(1) 若 $A\subseteq B$,则"$x\in A$"是"$x\in B$"的________条件;

(2) "$x=\frac{\pi}{6}$"是"$\sin x=\frac{1}{2}$"的________条件;

(3) "$\alpha>\beta$"是"$\sin\alpha>\sin\beta$"的________条件;

(4) 在$\triangle ABC$中,"$A>B$"是"$\sin A>\sin B$"的________条件;

(5) 已知直线 $l_1: y=k_1x+b_1$, $l_2: y=k_2x+b_2$,则"$k_1=k_2$"是"$l_1/\!/l_2$"的________条件;

(6) "α是第二象限角"是"$\sin\alpha\cdot\tan\alpha<0$"的________条件;

(7) "$|a|=|b|$"是"$a=b$"的________条件;

(8) "实数$\lambda=0$"是"向量$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$"的________条件;

(9)"四边形的两条对角线相等"是"四边形是等腰梯形"的________条件.

2. 判断下列说法是否正确:

(1) "$a\in\mathbf{N}$"是"$a\in\mathbf{Z}$"的充分条件;

(2) "两个三角形全等"是"两个三角形相似"的充分条件;

(3) "直线$a\perp$平面α,直线$b\perp$平面α"是"直线a,b平行"的充分条件.

3. 填空题.

(1)"一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ 有一个正根和一个负根"的一个充分不必要条件是________;

(2)"两个平面α和β,$\alpha/\!/\beta$"的一个必要不充分条件是________;

(3)"函数 $y=x^2+bx+c$ ($x\in[0,+\infty)$)是单调函数"的充要条件是________.

4. 选择某一章的内容,用充分条件、必要条件或充要条件的用语梳理其中的重要结论,并交流讨论.

§3　全称量词与存在量词

3.1　全称量词与全称命题

分析理解

在数学中，常常见到下列形式的命题：

(1) 所有正方形都是矩形；

(2) 每一个有理数都能写成分数的形式；

(3) 任何实数乘 0 都等于 0；

(4) 如果直线 l 垂直于平面 α 内的任意一条直线，那么直线 l 垂直于平面 α；

(5) 一切三角形的内角和都等于 $180°$.

在以上命题的条件中，“所有”“每一个”“任何”“任意一条”“一切”都是在指定范围内，表示整体或全部的含义，这样的词叫作**全称量词**. 像这样含有全称量词的命题，叫作**全称命题**.

在某些全称命题中，有时全称量词可以省略. 例如：

末位数字是偶数的整数能被 2 整除；

正方形是矩形；

球面是曲面.

> 全称量词，可用符号“$\forall$”表示. 全称命题“对实数中任意一个 x，有 $x^2+1\geqslant 1$ 成立”可用符号简记为
> $\forall x\in\mathbf{R}, x^2+1\geqslant 1$，
> 读作“对任意 x 属于 $\mathbf{R}$，有 $x^2+1\geqslant 1$ 成立”.

3.2　存在量词与特称命题

还有一些数学命题，反映对个体或整体的一部分的判断. 例如：

有些三角形是直角三角形；

如果两个数的和为正数，那么这两个数中至少有一个是正数；

在素数中，有一个是偶数；

存在实数 x，使得 $x^2+x-1=0$.

在以上命题中，“有些”“至少有一个”“有一个”“存在”都有表示个别或一部分的含义，这样的词叫作**存在量词**. 像这样含有存在量词的命题，叫作**特称命题**.

> 存在量词，可用符号“$\exists$”表示. 特称命题“存在 M 中的一个 x，使 $p(x)$ 成立”可用符号简记为
> $\exists x\in M, p(x)$，
> 读作“存在一个 x 属于 M，使 $p(x)$ 成立”.

思考交流

请举出一些全称命题和特称命题，并与同学交流.

例 1 判断下列命题哪些是全称命题，哪些是特称命题：

(1) 奇数是整数；

(2) 偶数能被 2 整除；

(3) 至少有一个素数不是奇数.

解 (1)“奇数是整数”是指“所有的奇数都是整数”，所以它是全称命题；

(2)“偶数能被 2 整除”是指“每一个偶数都能被 2 整除”，所以它是全称命题；

(3)“至少有一个素数不是奇数”是特称命题.

练 习

判断下列命题是全称命题还是特称命题：

(1) 方程 $x^2+x-1=0$ 的两个解都是实数解；

(2) 每一个关于 x 的一元一次方程 $ax+b=0$ 都有解；

(3) 有一个实数，不能作除数；

(4) 末位数字是 0 或 5 的整数，能被 5 整除；

(5) 棱柱是多面体；

(6) 对于所有的自然数 n，代数式 n^2-2n+2 的值都是正数.

3.3 全称命题与特称命题的否定

我们来看这样的一个命题：“所有的奇数都是素数.”

显然，这个命题是错误的. 我们只需要指出“有一个奇数不是素数”就可以说明“所有的奇数都是素数”这个全称命题是错误的.

又如，要把命题“数列 1，2，3，4，5，…的每一项都是偶数”加以否定，只需说明“数列 1，2，3，4，5，…中有一项不是偶数”就可以了.

要把命题“集合{−2，−1，0，1，2}中的数都大于 0”加以否定，只需说明“集合{−2，−1，0，1，2}中有一个数不大于 0”就可以了.

要把命题“一元二次不等式都有实数解”加以否定，只需说明“有一个一元二次不等式没有实数解”就可以了.

抽象概括

在上述例子中，要说明一个全称命题是错误的，只需找出一个反例就可以了. 实际上是要说明这个全称命题的否定是正确的.

不难发现，全称命题的否定是特称命题.

我们来看命题："$10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ 中有一个数能被 3 整除."

显然，这个命题是错误的.

我们只需要指出 10，10^2，10^3，10^4，10^5 中的每一个数都不能被 3 整除，就可以说明"10，10^2，10^3，10^4，10^5 中有一个数能被 3 整除"这个特称命题是错误的.

要把命题"方程 $x^2-5x+6=0$ 至少有一个负实根"加以否定，只需说明，"方程 $x^2-5x+6=0$ 的每一个实根都不是负的".

抽象概括

在上述例子中，要说明一个特称命题"存在一些对象满足某一性质"是错误的，就要说明所有的对象都不满足这一性质. 实际上是要说明这个特称命题的否定是正确的.

不难发现，特称命题的否定是全称命题.

例 2　写出下列全称命题和特称命题的否定：

(1) 三个给定产品都是次品；

(2) 方程 $x^2-8x+15=0$ 有一个根是偶数.

分析　(1)"三个给定产品都是次品"是一个全称命题，要否定它，只需说明"在这三个给定产品中，有一个产品不是次品"即可；

(2)"方程 $x^2-8x+15=0$ 有一个根是偶数"是一个特称命题，要否定它，只需说明"方程 $x^2-8x+15=0$ 的每一个根都不是偶数"即可.

解　(1) 命题"三个给定产品都是次品"的否定是：三个给定产品中至少有一个是正品；

(2) 命题"方程 $x^2-8x+15=0$ 有一个根是偶数"的否定是：方程 $x^2-8x+15=0$ 的每一个根都不是偶数.

练 习

写出下列命题的否定：

(1) 三个数-3，2.5，$\sqrt{2}$中，至少有一个数不是自然数；

(2) 对任意一个实数x，都有$2x+4\geqslant 0$.

习 题 1—3

1. 判断下列命题是全称命题还是特称命题：

    (1) 一切分数都是有理数；

    (2) 有些三角形是锐角三角形；

    (3) 菱形都是正方形；

    (4) 对任何实数x，都有$x^2-2x+1\geqslant 0$；

    (5) 至少有一个实数x，使$x^2-2=0$；

    (6) 存在实数x，使$x^2+2x+2\leqslant 0$.

2. 找出第1题中的假命题，并进行否定.

3. 设原命题为“二次方程都有实数解”：

    (1) 写出它的逆命题、否命题和逆否命题；

    (2) 判断这四个命题的真假；

    (3) 写出上述假命题的否定.

4. 指出下列命题是全称命题还是特称命题，并对这些命题进行否定：

    (1) 我们班每个同学的身高都超过1.85 m；

    (2) 我们组没有女生；

    (3) 学生会中至少有1名高二年级的学生.

5. 请你举出几个生活中的全称命题或特称命题，并对这些命题进行否定.

§4　逻辑联结词“且”“或”“非”

本节，我们将学习使用逻辑联结词“且”“或”“非”，并用它们构造新的命题.

4.1　逻辑联结词“且”

实例分析

我们看下面的例子：

p：菱形对角线互相垂直，q：菱形对角线互相平分.

我们可以用“且”联结这两个命题，得出新命题：

“菱形对角线互相垂直且菱形对角线互相平分”，即“菱形对角线互相垂直且平分”.

这个新命题与原来两个命题的关系是：

当两个命题 p 和 q 都是真命题时，这个新命题就是真命题；

在两个命题 p 和 q 之中，只要有一个是假命题时，这个新命题就是假命题.

由于“菱形对角线互相垂直”和“菱形对角线互相平分”都是真命题，所以，“菱形对角线互相垂直且平分”是真命题.

抽象概括

从上述例子可以看出，用“且”联结两个命题 p 和 q，构成一个新命题“p 且 q”. 当两个命题 p 和 q 都是真命题时，新命题“p 且 q”是真命题；在两个命题 p 和 q 之中，只要有一个命题是假命题，新命题“p 且 q”就是假命题.

> “p 且 q”记作“$p \wedge q$”，读作“p 且 q”.

例 1　对下列各组命题，利用逻辑联结词“且”构造新命题，并判断新命题的真假：

（1）p：12 是 3 的倍数，q：12 是 4 的倍数；

（2）p：$\pi>3$，q：$\pi<2$.

解　（1）新命题：“12 是 3 的倍数且 12 是 4 的倍数”，是真命题；

(2) 新命题:“π 大于 3 且小于 2”,是假命题.

4.2 逻辑联结词“或”

实例分析

我们看下面的例子,有两个命题:

p:一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个不同的实根,q:一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个相同的实根.

我们可以用“或”联结这两个命题,得出新命题:

“一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个不同的实根或两个相同的实根”,即“一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个实根”.

这个新命题与原来两个命题的关系是:

在 p 和 q 之中,只要有一个是真命题,这个新命题就是真命题;

当 p 和 q 都是假命题时,这个新命题就是假命题.

由于“一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个不同的实根”是假命题,“一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个相同的实根”是真命题,所以,“一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个实根”是真命题.

抽象概括

从上述例子可以看出,用“或”联结两个命题 p 和 q,构成一个新命题“p 或 q”. 在两个命题 p 和 q 之中,只要有一个命题是真命题,新命题“p 或 q”就是真命题;当两个命题 p 和 q 都是假命题时,新命题“p 或 q”是假命题.

“p 或 q”记作“$p \vee q$”,读作“p 或 q”.

例 2 对下列各组命题,利用逻辑联结词“或”构造新命题,并判断新命题的真假:

(1) p:正数的平方大于 0,q:负数的平方大于 0;

(2) p:$3>4$,q:$3<4$;

(3) p:π 是整数,q:π 是分数.

解 (1) 新命题:“正数或负数的平方大于 0”,即“非零实数的平方大于 0”,是真命题;

(2) 新命题:“$3>4$ 或 $3<4$”,即“$3\neq4$”,是真命题;

(3) 新命题:“π 是整数或分数”,即“π 是有理数”,是假命题.

4.3　逻辑联结词“非”

实例分析

我们看下面的例子：

(1) p：平面内垂直于同一直线的两条直线平行，q：平面内垂直于同一直线的两条直线不平行；

(2) p：$y=\sin x(x\in \mathbf{R})$是周期函数，$q$：$y=\sin x(x\in \mathbf{R})$不是周期函数.

上面两组命题中，命题 q 是对命题 p 的否定，我们称命题 q 是命题 p 的**非命题**. 在命题和它的非命题中，有一个且只有一个是真命题. 在(1)中，p 是真命题，q 是假命题；在(2)中，p 是真命题，q 是假命题.

抽象概括

一般地，对命题 p 加以否定，就得到一个新命题，记作 $\neg p$，读作“非 p”.

一个命题 p 与这个命题的否定 $\neg p$，必然一个是真命题，一个是假命题. 一个命题的否定的否定仍是原命题.

在数学中，逻辑联结词“且”“或”“非”不一定联结命题，有时我们也可以用它们联结一些“条件”，形成一些新的条件. 例如：

(1) “$x>3$”且“$x<5$”，它表示的是：“$3<x<5$”；

(2) “$x<0$”或“$x>5$”，它表示的是：“$x<0$ 或 $x>5$”；

(3) “$x<0$”的否定，它表示的是：“$x\geqslant 0$”.

练　习

试举出日常生活中与“或”“且”有关的命题.

习题 1—4

1. 用适当的逻辑联结词填空：

(1) 若 $a^2+b^2=0$，则 $a=0$ ________ $b=0$；

(2) 若 $ab=0$，则 $a=0$ ________ $b=0$；

(3) 平行四边形的一组对边平行________相等.

2. 写出下列命题的“p 或 q”“p 且 q”“非 p”形式的命题，并判断其真假：

(1) p：24 是 8 的倍数，q：24 是 6 的倍数；

(2) p：矩形的对角线相等，q：矩形的对角线互相平分；

(3) p：正方形的四条边相等，q：正方形的四个角相等；

(4) p：π 是无理数，q：π 是有理数.

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 了解命题的逆命题、否命题与逆否命题，会分析四种命题的相互关系.

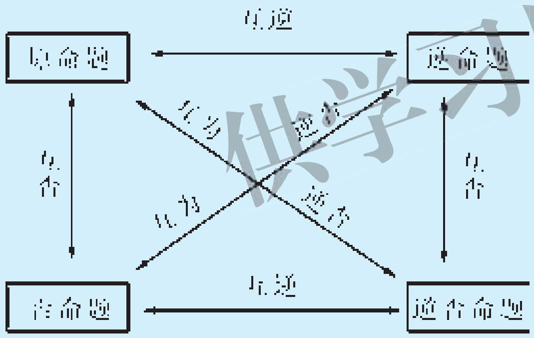
2. 理解充分条件、必要条件与充要条件的意义.

3. 理解全称量词与存在量词的意义，能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

4. 通过数学实例，了解逻辑联结词“且”“或”“非”的含义.

二、复习建议

1. 四种命题之间的关系：



一个命题的真假与其他三个命题的真假有如下三个关系：

(1) 原命题为真，它的逆命题不一定为真；

(2) 原命题为真，它的否命题不一定为真；

(3) 原命题为真，它的逆否命题一定为真.

由此可知，互为逆否的两个命题一定同为真或同为假.

2. 举出一些学习过的判定定理、性质定理、反映“充要条件”的定理，体会充分条件、必要条件、充要条件的意义.

注

在数学中，常有一些含有变量 x 的语句，如 $x+2=0$. 像这样含有变量的语句，可用 $p(x)$，$q(x)$…表示.

3. 同一个全称命题或特称命题，由于自然语言的不同，可以有不同的表述方法，在应用中可以灵活选择.

命题	全称命题	特称命题
表述方法	(1) 所有的 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (2) 对一切 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (3) 对每一个 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (4) 任意一个 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (5) 若 $x\in A$，则 $p(x)$ 成立.	(1) 存在 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (2) 至少有一个 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (3) 对有些 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (4) 对某个 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (5) 有一个 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立.

4. 否定命题时，要注意特殊的词，如“全”“都”等. 常见关键词及其否定形式如下表.

关键词	否定词	关键词	否定词
等于	不等于	大于	不大于
能	不能	小于	不小于
至少有一个	一个都没有	至多有一个	至少有两个
都是	不都是	是	不是
没有	至少有一个	属于	不属于

复习题一

A 组

1. 从“充分不必要条件”“必要不充分条件”或“充要条件”中选择一项填在下列括号内：
   (1) “a 是有理数”是“a 是实数”的(　　　　　)；
   (2) “$x^2-4=0$”是“$x=-2$”的(　　　　　)；
   (3) “$x^2-4=0$”是“$|x|=2$”的(　　　　　)；
   (4) “$A\cup B=B$”是“$A=\varnothing$”的(　　　　　).
2. “$a=1$”是“函数 $y=\cos^2 ax-\sin^2 ax$ 的最小正周期为 π”的(　　).
   A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
   C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件
3. “$a+b>2c$”的一个充分条件是(　　).
   A. $a>c$ 或 $b>c$　　B. $a>c$ 且 $b<c$
   C. $a>c$ 且 $b>c$　　D. $a>c$ 或 $b<c$
4. “$\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\alpha=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$”的(　　).
   A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
   C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件
5. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，试从下列各条件中，选出“a,b 都不等于 0”的必要条件，以及“a,b 都等于 0”的充要条件：
   (1) $a+b=0$；　(2) $a^2+b^2>0$；　(3) $ab=0$；
   (4) $ab\neq 0$；　(5) $\sqrt{a^2+b^2}=0$；　(6) $a^2+b^2=0$.
6. 写出下列各命题的否定：
   (1) 1 994 与 2 000 都是 5 的倍数；
   (2) 任何一个整数，都是奇数；
   (3) 存在一个实数 a，能使 $a^2+1=0$ 成立；
   (4) 每一个数列都是等差数列；
   (5) 每个数列都有一项为“1”；
   (6) 任何有理数都是实数.
7. 请用逻辑联结词“且”“或”“非”构造 3 个命题，并说出它们的真假.

B 组

1. 求证：“关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一解为 1”的充要条件是“$a+b+c=0$”.
2. 写出命题“若 a,b 都是偶数，则 $a+b$ 是偶数”的逆命题、否命题及逆否命题，并判断它们的真假.

第二章 空间向量与立体几何

在数学4(必修)中,我们学习了平面向量,认识到向量在数学和物理中的广泛应用;认识到向量运算与数量运算既有区别,又有联系.

空间中也有很多既有大小又有方向的量,如风速、力、磁场以及空间点的位移等,我们把它们叫作空间向量.

本章将在平面向量的基础上,通过类比的方法,学习空间向量的概念、性质和空间向量的运算,并以向量为工具讨论立体几何中的一些问题.

§1　从平面向量到空间向量

我们在数学 4(必修)中学习过平面向量,并用它研究平面上的位移和力等问题,实际上,在空间中也有许多类似的问题,需要用向量来描述和研究.

问题提出

李明从学校大门口出发,向北行走 100 m,再向东行走 200 m,最后乘电梯上行 15 m 到达住处.

在这个例子中,李明从学校大门口回到住处所发生的总位移是三个位移的合成(图 2-1),它们是不在同一个平面内的位移. 如何刻画这样的位移?

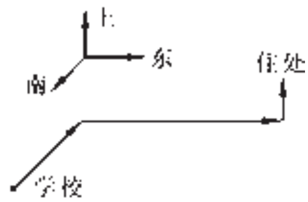


图 2-1

一、向量概念

向量是既有大小又有方向的量. 如果我们把问题的研究范围限定在同一个平面上,称之为平面向量;如果问题的研究范围扩大到空间中,称之为**空间向量**.

与平面向量一样,空间向量也有两种表示法. 一种用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示,A 叫作向量的**起点**,B 叫作向量的**终点**;一种用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 表示,也可用$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$表示.

数学中所讨论的向量与向量的起点无关,我们称之为**自由向量**.

与平面向量一样,空间向量的大小也叫作向量的**长度**或**模**,用$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$表示.

如图 2-2,过空间任意一点 O 作向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的相等向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$,则$\angle AOB$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**,记作$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$,规定 $0\leqslant\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$.

当$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$时,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

当$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=0$ 或 π 时,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

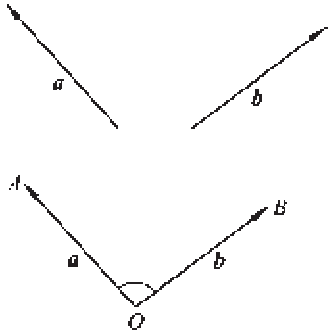


图 2-2

思考交流

仿照平面向量的有关概念，请分别给出下列定义：单位向量，零向量，相等向量，相反向量，平行向量.

例 如图 2-3，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中：

(1) 向量 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{D'C'}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 相等吗？

(2) 向量 $\overrightarrow{C'D'}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 是相反向量吗？

(3) E 和 F 分别是 AB 和 BB' 的中点，在正方体中能找到 3 个与 $\overrightarrow{EF}$ 平行的向量吗？

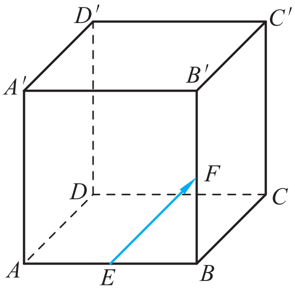


图 2-3

解 (1) 相等：$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{AB}$；

(2)是相反向量：$\overrightarrow{C'D'}=-\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{A'B'}$；

(3) 在三角形 ABB' 中，因为 E 和 F 分别是 AB 和 BB' 的中点，所以 $EF /\!/ AB'$，从而 $\overrightarrow{EF} /\!/ \overrightarrow{AB'}$，$\overrightarrow{EF} /\!/ \overrightarrow{B'A}$，$\overrightarrow{EF} /\!/ \overrightarrow{DC'}$.

二、向量、直线、平面

向量与直线

与平面向量一样，我们也可以用空间向量描述空间直线的方向.

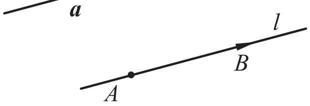


图 2-4

如图 2-4，l 是空间一直线，A，B 是直线 l 上任意两点，则称 $\overrightarrow{AB}$ 为直线 l 的**方向向量**. 显然，与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的任意非零向量 $\boldsymbol{a}$ 也是直线 l 的方向向量.

直线的方向向量平行于该直线.

根据立体几何知识，我们知道，给定空间中任意一点 A 和非零向量 $\boldsymbol{a}$，就可以确定唯一一条过点 A 且平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的直线.

向量与平面

如图 2-5，如果直线 l 垂直于平面 α，那么把直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{a}$ 叫作平面 α 的**法向量**. 所有与直线 l 平行的非零向量都是平面 α 的法向量，因此，平面的法向量不唯一，但它们都是平行的. 平面的法向量垂直于该平面.

给定空间中任意一点 A 和非零向量 $\boldsymbol{a}$，可以确定唯一一个过点 A 且垂直于向量 $\boldsymbol{a}$ 的平面.

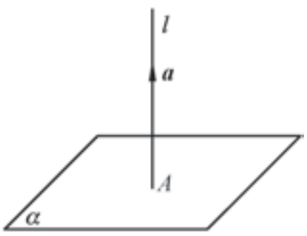


图 2-5

练　习

1. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中：

　(1) 举出与向量$\overrightarrow{AA'}$相等的向量；

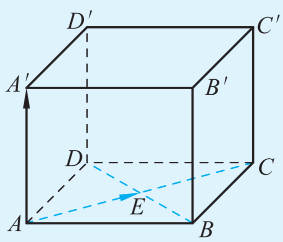
　(2) 举出向量$\overrightarrow{AA'}$的相反向量；

　(3) 举出与向量$\overrightarrow{AE}$平行的向量.

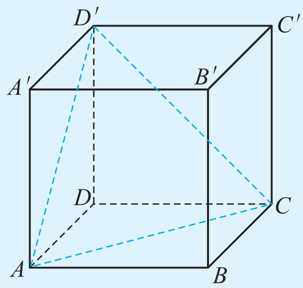
2. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中：

　(1)找出以向量$\overrightarrow{AA'}$为法向量的一个平面；

　(2)找出平面 ACD' 的一个法向量.



（第 1 题）



（第 2 题）

习　题 2—1

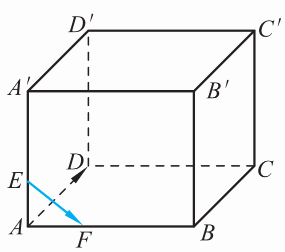
A　组

1. 平面的法向量与平面中任意一个向量的夹角是多少？
2. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中：

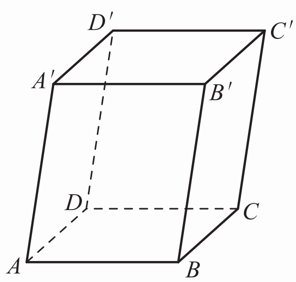
　(1) 举出与向量$\overrightarrow{AD}$相等的向量；

　(2) 举出向量$\overrightarrow{AD}$的相反向量；

　(3) $AE=\frac{1}{3}AA'$，$AF=\frac{1}{3}AB$，举出与向量$\overrightarrow{EF}$平行的向量.



（第 2 题）



（第 3 题）

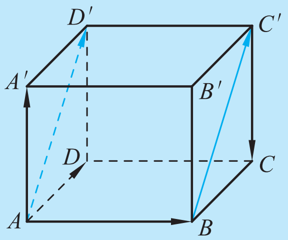
3. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，分别给出直线 AD，直线 BC，直线 $B'C'$ 的一个方向向量.
4. 在第 2 题的长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，分别给出平面 $ABCD$，平面 $A'B'C'D'$，平面 $A'B'BA$，平面 $C'D'DC$ 的一个法向量.

B 组

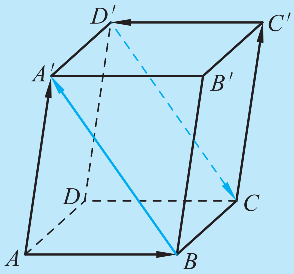
1. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，求：

(1) $\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AB}\rangle$，$\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\rangle$，$\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\rangle$；

(2) $\langle\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{BC'}\rangle$，$\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\rangle$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，求 $\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{CC'}\rangle$，$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{C'D'}\rangle$，$\langle\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{D'C}\rangle$.

§2　空间向量的运算

由于空间中两个向量经过平移后都可以在同一平面内，所以平面向量的加法、减法、数乘及其数量积运算等都可以推广到空间.

一、空间向量的加、减法

如图 2-6，设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是空间两个向量，过一点 O 作 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的相等向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，根据平面向量加法的**平行四边形法则**. 平行四边形的对角线 OC 对应的向量$\overrightarrow{OC}$就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

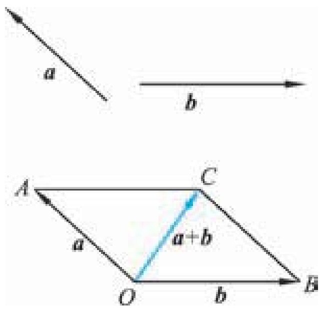


图 2-6

与平面向量类似，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差定义为 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，其中 $-\boldsymbol{b}$是 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量.

空间向量加法和减法的运算律与平面向量的运算律相同. 表示如下：

(1) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(2) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

二、空间向量的数乘

空间向量 $\boldsymbol{a}$ 与一个实数 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 满足：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

空间向量的数乘运算律与平面向量的数乘运算律相同. 表示如下：

(1) $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\lambda\ (\lambda\in\mathbf{R})$；

(2) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}\ (\lambda\in\mathbf{R},\mu\in\mathbf{R})$；

(3) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})\ (\lambda\in\mathbf{R},\mu\in\mathbf{R})$.

在平面中，我们讨论过两个向量共线的问题，在空间也有相应的结论.

定理　空间两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 共线的充要条件是存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

例 1 如图 2-7，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，$M$ 是 $A'C'$ 的中点，N 是 AB 的中点. 用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示：

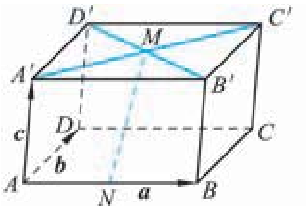


图 2-7

(1) $\overrightarrow{A'M}$；　(2) $\overrightarrow{AN}$；　(3) $\overrightarrow{MN}$.

解 (1) 因为 M 是 $A'C'$ 的中点，所以根据定理有

$$\overrightarrow{A'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}).$$

因为 $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，

所以 $\overrightarrow{A'M}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

(2) 因为 N 是 AB 的中点，所以根据定理有

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a};$$

(3) 因为 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AN}$，

而 $\overrightarrow{MA'}=-\overrightarrow{A'M}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

$\overrightarrow{A'A}=-\overrightarrow{AA'}=-\boldsymbol{c}$，

所以
$$\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$$
$$=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.$$

三、空间向量的数量积

由于空间任意两个向量经平移后都可以在同一个平面内，因此，空间两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积和平面中的情形完全一样，即**空间两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积是一个数，等于 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.**

空间向量的数量积与平面向量的数量积具有同样的运算律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；
(2) 分配律　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；
(3) $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$.

和平面向量一样，利用空间向量的数量积，可以得到以下结论：

(1) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$；
(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；
(3) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ $(\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0})$.

对于任意一个非零向量 $\boldsymbol{a}$，我们把 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 的**单位向量**，记作 $\boldsymbol{a}_0$． $\boldsymbol{a}_0$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向．

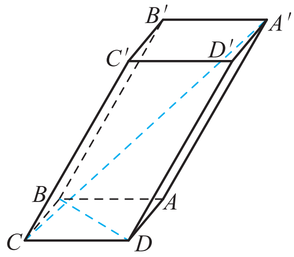


图 2-8

例 2　如图 2-8，已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，且 $\angle C'CB=\angle C'CD=\angle BCD=60°$，$DD'=2$．求：

(1) $\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{DA}$；　　(2) $\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{BD}$．

解　(1) 因为 $\angle D'DA=\angle C'CB=60°$，

所以 $$\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{DD'}||\overrightarrow{DA}|\cos 60°=1;$$

(2) 因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$，

所以 $$\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{AD}.$$

而 $$\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{CC'}||\overrightarrow{CD}|\cos 60°=1,$$

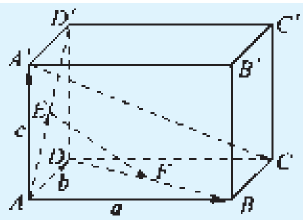
$$\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{DA}=-1,$$

所以 $$\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{BD}=0.$$

练　习

1. 总结向量加法、数乘和数量积的运算律．
2. 证明：如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，那么 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线．
3. 如图，长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，E 和 F 分别是 AD' 和 BD 的中点，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$．用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示：

   (1) $\overrightarrow{A'C}$；　　(2) $\overrightarrow{AE}$；　　(3) $\overrightarrow{EF}$．



（第 3 题）

4. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一个数还是一个向量？$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$ 是一个数还是一个向量？

习 题 2—2

A　组

1. 如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是非零不共线向量，那么：

   (1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线吗？$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线吗？

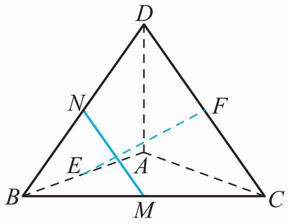
   (2) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线吗？$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线吗？$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线吗？

   (3) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 成立吗？

2. 已知单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两垂直，化简 $(2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c})\cdot(-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})$．

3. 已知$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{\pi}{2}$，$\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle=\frac{\pi}{4}$. 化简$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})\cdot(-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

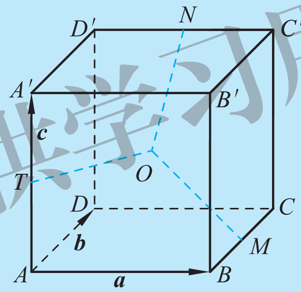
4. 如图，$AD\perp AB$，$AD\perp AC$，$AB\perp AC$，$AB=AC=AD=1$，E，F 分别是 AB，CD 的中点，M，N 分别为 BC，BD 的中点. 证明：$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{MN}$.



（第 4 题）

B 组

如图，在正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，$O$ 是正方体的中心，M，N，T 分别是 BC，$C'D'$，AA'的中点. 用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$和 $\overrightarrow{OT}$.



§3　向量的坐标表示和空间向量基本定理

问题提出

我们学习过平面向量的标准正交分解和坐标表示.在空间中,如何确定向量的坐标呢?

3.1　空间向量的标准正交分解与坐标表示

分析理解

如图 2-9,在给定空间直角坐标系中,令 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为空间直角坐标系中x 轴,y 轴,z 轴正方向上的单位向量,设 $\boldsymbol{a}$ 是空间任意向量,作$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$.

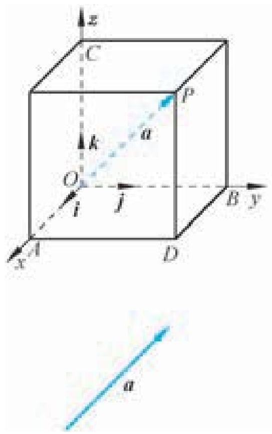


图 2-9

过点 P 作坐标平面 yOz,xOz,xOy 的平行平面,分别交 x 轴,y 轴,z 轴于 A,B,C 三点.

根据向量加法运算,有

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

因为$\overrightarrow{OA}$与 $\boldsymbol{i}$ 共线,根据向量共线的性质,存在唯一实数 x,使得$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$.同理,存在唯一实数 y 和 z,使得$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$.所以

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

抽象概括

在给定的空间直角坐标系中,$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 分别为 x 轴,y 轴,z 轴正方向上的单位向量,对于空间任意向量 $\boldsymbol{a}$,存在唯一一组三元有序实数(x,y,z),使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.我们把 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 的标准正交分解,把 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 叫作标准正交基.

(x,y,z) 叫作**空间向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**,记作$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$. $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 叫作**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示**.

在空间直角坐标系中,点 P 的坐标为(x,y,z),向量$\overrightarrow{OP}$的坐标也是(x,y,z).

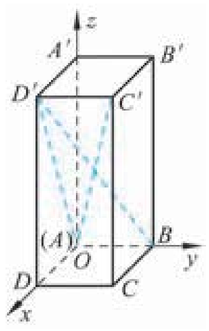


图 2-10

例 1　如图 2-10，在直角坐标系中有长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，且 $AB=2$，$BC=3$，$AA'=5$.

（1）写出点 C' 的坐标，给出 $\overrightarrow{AC'}$ 关于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的分解式；

（2）求 $\overrightarrow{AD'}$ 的坐标.

解　（1）因为 $AB=2$，$BC=3$，$AA'=5$，所以点 C' 的坐标为 $(3,2,5)$，从而

$$\overrightarrow{AC'}=(3,2,5)=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k};$$

（2）因为点 D' 的坐标为 $(3,0,5)$，所以

$$\overrightarrow{AD'}=(3,0,5).$$

设　$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}&=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{i}\\&=x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{k}$，所以 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$.

又 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}|^2=1$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=x$.

同理　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}=y$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=z$.

所以　$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$.

我们把 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=x$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}=y$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=z$ 分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴，y 轴，z 轴正方向上的投影. **向量的坐标等于它在坐标轴正方向上的投影.**

一般地，若 $\boldsymbol{b}_0$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的单位向量，称 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_0=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影.**

例 2　如图 2-11，已知单位正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$. 求：

（1）向量 $\overrightarrow{CA'}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 上的投影；

（2）向量 $\overrightarrow{CA'}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影.

解　（1）$\overrightarrow{CA'}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 上的投影为

$$|\overrightarrow{CA'}|\cos\angle A'CB=|\overrightarrow{CB}|=1;$$

（2）$\overrightarrow{CA'}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影为

$$|\overrightarrow{CA'}|\cos(\pi-\angle A'CB)=-|\overrightarrow{CB}|=-1.$$

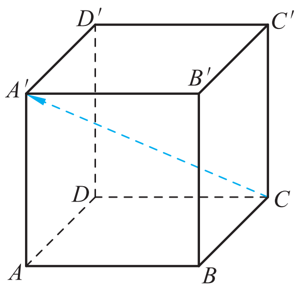
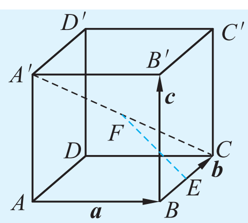


图 2-11

练　习

1. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，E 是棱 BC 的中点，F 是对角线 $A'C$ 的中点. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BB'}=\boldsymbol{c}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{EF}$.
2. 设单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 两两垂直，$\boldsymbol{a}$ 沿 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 方向的正交分解为 $2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3$. 求证：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_3=-4$.



（第 1 题）

3.2　空间向量基本定理

空间向量基本定理：如果向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 是空间三个不共面的向量，$\boldsymbol{a}$ 是空间任一向量，那么存在唯一一组实数 λ_1，λ_2，λ_3，使得

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\lambda_3\boldsymbol{e}_3. \quad ①$$

空间中不共面的三个向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 叫作这个空间的一个**基底**. ①式表示向量 $\boldsymbol{a}$ 关于基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的分解.

特别地，当向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 两两垂直时，就得到这个向量的一个正交分解. 当 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i},\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j},\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k}$ 时，就是前面学过的标准正交分解.

分析　把向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点移到同一点 O，记 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$.

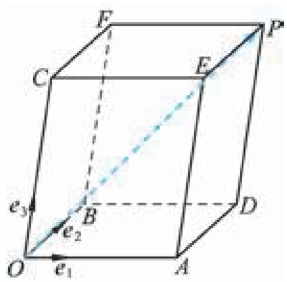


图 2-12

如图 2-12，过点 P 作三个平面，分别平行于 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 所在的平面，得到一平行六面体 $OADB$-$CEPF$，$\overrightarrow{OP}$是该六面体的一条对角线，棱 OA,OB,OC 分别与向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 共线，不难看出

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

由 $\overrightarrow{OA}/\!/\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OB}/\!/\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OC}/\!/\boldsymbol{e}_3$，根据向量共线的性质，存在一组实数 λ_1，λ_2，λ_3，使得 $\overrightarrow{OA}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=\lambda_3\boldsymbol{e}_3$，即

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\lambda_3\boldsymbol{e}_3.$$

实际上，我们可以证明满足上式的 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是唯一的，有兴趣的同学可以尝试证明.

例 3　如图 2-13，在平行六面体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，M 是平行四边形 $A'B'C'D'$ 的对角线的交点，N 是棱 BC 的中点. 如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{MN}$.

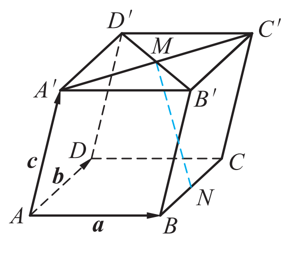


图 2-13

解　因为 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{CN}$，

而　$\overrightarrow{MC'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

$\overrightarrow{C'C}=-\boldsymbol{c}$，

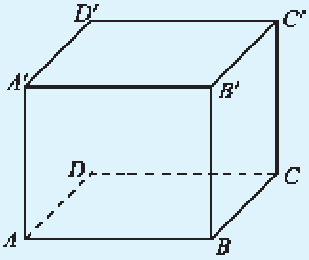
$\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

所以

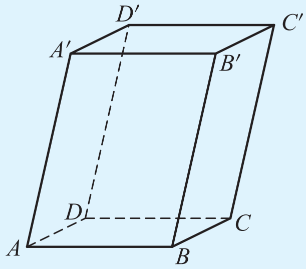
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

练 习

1. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DD'}$，$\overrightarrow{B'C'}$ 为基底表示 $\overrightarrow{A'C}$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，以 $\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{CC'}$，$\overrightarrow{AD}$ 为基底表示 $\overrightarrow{BD'}$.

3.3 空间向量运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，即

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}.$$

一、向量加减法和数乘的坐标表示

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即

$$\boxed{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2).}$$

同理

$$\boxed{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2).}$$

空间两个向量和（差）的坐标等于它们对应坐标的和（差）.

$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}$，

即

$$\boxed{\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)(\lambda\in\mathbf{R}).}$$

实数与空间向量数乘的坐标等于实数与向量对应坐标的乘积.

实数与空间向量的数乘可以表示空间向量间的平行关系. 即，若 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

$$\Leftrightarrow x_1=\lambda x_2,y_1=\lambda y_2,z_1=\lambda z_2(\lambda\in\mathbf{R}).$$

例 4 设 O 是空间直角坐标系的原点，$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$. 求 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标表示.

解　根据向量的坐标表示，$\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,z_2)$。

因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，所以

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).}$$

空间向量的坐标等于终点与起点对应坐标的差.

二、数量积的坐标表示

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1x_2)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+(x_1y_2)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+(x_1z_2)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad(y_1x_2)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+(y_1y_2)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+(y_1z_2)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad(z_1x_2)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+(z_1y_2)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+(z_1z_2)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$，所以

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.}$$

空间两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积之和.

例 5　已知 $\boldsymbol{a}=(-1,-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,0)$．求：

(1) $2\boldsymbol{a}$，$-5\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；

(2) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

解　(1) $2\boldsymbol{a}=2(-1,-3,2)=(-2,-6,4)$，

$-5\boldsymbol{a}=-5(-1,-3,2)=(5,15,-10)$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}&=(-1,-3,2)+(2,4,0)\\&=(-1+2,-3+4,2+0)\\&=(1,1,2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(-2,-6,4)-(1,2,0)\\&=(-2-1,-6-2,4-0)\\&=(-3,-8,4);\end{aligned}$$

(2) 因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,1,2)$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-3,-8,4)$，所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=-(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=-[1\times(-3)+1\times(-8)+2\times4]\\&=3.\end{aligned}$$

三、空间向量长度与夹角的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，根据空间向量运算的坐标表示，我们可以得到以下结论：

(1) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$；

(2) $\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ $(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$；

(3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

练 习

1. 求单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的坐标.
2. 设 O 是空间直角坐标系的原点，画出 $\overrightarrow{OP}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 的终点 P 的位置示意图.
3. 判断下列向量是否平行或垂直：

   (1) $\boldsymbol{a}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,1)$；

   (2) $\boldsymbol{a}=(-3,2,4)$，$\boldsymbol{b}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$；

   (3) $\boldsymbol{a}=(0,-3,3)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,-1)$；

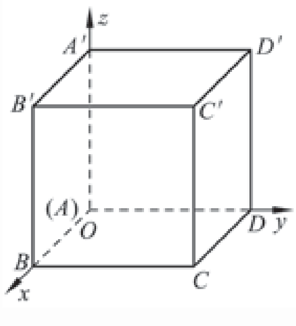
   (4) $\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{3}{2},-3,2\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(0,1,-\dfrac{3}{2}\right)$.
4. 已知 $x:y:z=5:(-2):4$，设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，求 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}_0$.
5. 验证：$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$.

习题 2—3

A 组

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,0,1)$，求：

   (1) $2\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　　(2) $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.
2. 求与 $\boldsymbol{a}=(-1,2,3)$ 平行的单位向量.
3. 如图，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，求向量 $\overrightarrow{AC'}$，$\overrightarrow{BD'}$，$\overrightarrow{AD'}$ 的坐标.



（第 3 题）

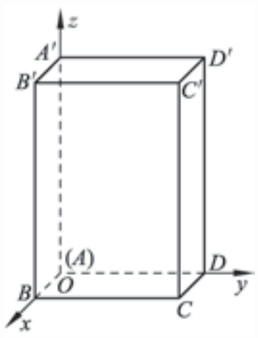
4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,4,5)$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 沿 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的正交分解：

   $\boldsymbol{e}_1=(2,-1,1)$，$\boldsymbol{e}_2=(1,1,-1)$，$\boldsymbol{e}_3=(0,3,3)$.
5. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,-1)$，计算：

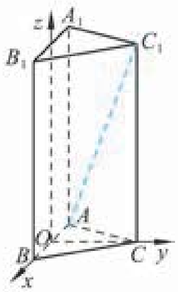
   (1) $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|-3\boldsymbol{a}|$，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　(2) $\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.
6. 如图，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，$AB=1$，$BC=2$，$AA'=3$. 求：

   (1) $\overrightarrow{AC'}$，$\overrightarrow{BD'}$，$\overrightarrow{AD'}$ 的坐标；

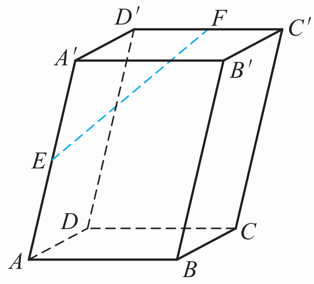
   (2) $\overrightarrow{AC'}+2\overrightarrow{BD'}$，$\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BD'}-2\overrightarrow{AD'}$ 的坐标.



（第 6 题）



（第 7 题）



（第 8 题）

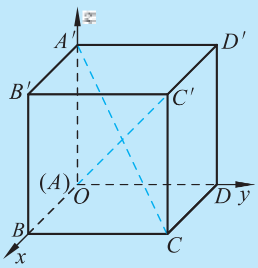
7. 如图，在空间直角坐标系中有正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$，O 是 AB 的中点，$AA_1=2$，$AB=1$. 求 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BC}$.

8. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，E，F 分别是棱 AA' 和 $C'D'$ 的中点，以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA'}$ 为基底表示 $\overrightarrow{EF}$.

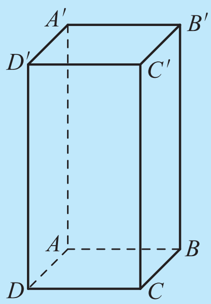
B　组

1. 如图，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$. 求 $\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{AC'}$.
2. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB=2$，$BC=2$，$AA'=4$. 建立适当的空间直角坐标系，求：

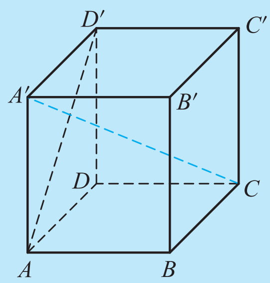
   (1) $\cos\langle\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{A'D'}\rangle$；　　(2) $|\overrightarrow{AC'}|$.
3. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，以 $\overrightarrow{AD'}$，$\overrightarrow{DD'}$，$\overrightarrow{D'C'}$ 为基底表示 $\overrightarrow{A'C}$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

§4 用向量讨论垂直与平行

向量是研究立体几何的基本工具，从本节开始，我们将用向量研究立体几何中的一些问题.

我们已经学习了垂直与平行的四个判定定理和四个性质定理. 下面我们用向量为工具证明其中的一些定理，其余的请同学们给出证明.

例 1 （线面垂直判定定理）若一条直线垂直于一个平面内的两条相交直线，则该直线与此平面垂直.

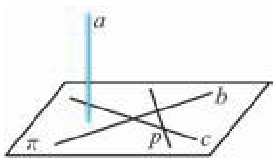


图 2-14

证明 如图 2-14，b，c 是平面 π 内的两条相交直线，直线 a 满足 $a\perp b$，$a\perp c$，设 p 是平面 π 内任意一条直线，则只需证 $a\perp p$.

设直线 a，b，c，p 的方向向量分别是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{p}$，只需证 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{p}$.

因为直线 b，c 相交，所以 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不共线.

由于直线 b，c，p 在同一平面 π 内，根据平面向量基本定理，存在实数 λ，μ，使得

$$\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}.$$

则
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}).$$

因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，从而

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}=0,$$

即
$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{p}.$$

所以直线 a 垂直于平面 π.

例 2 （面面平行判定定理）若一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，则这两个平面平行.

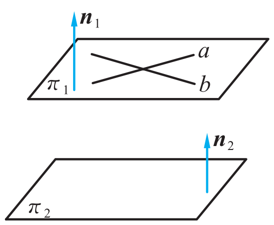


图 2-15

证明 如图 2-15，已知 a 与 b 是平面 π_1 内两条相交的直线，且 $a/\!/\pi_2$，$b/\!/\pi_2$. 平面 π_1，π_2 的法向量分别是 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$，要证 $\pi_1/\!/\pi_2$，只需证 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$.

又由于 $a/\!/\pi_2$，$b/\!/\pi_2$，故向量 $\boldsymbol{a}/\!/\pi_2$，$\boldsymbol{b}/\!/\pi_2$，所以 $\boldsymbol{n}_2\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{n}_2\perp\boldsymbol{b}$.

由于 a 与 b 相交，故向量 $\boldsymbol{n}_2$ 也是 π_1 的法向量，从而有 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$.

在几何研究中，我们经常要分析两条直线是否垂直. 当这两条直线在同一个平面内时，可以用平面几何的知识分析它们是否垂直. 当这两条直线不在同一个平面内时，有什么办法判断它们是否垂直呢?

如图 2-16，已知直线 a 在平面 π 内，直线 b 在平面 π 外，直线 c 是 b 在平面 π 上的投影，如果直线 a 垂直于直线 c，那么直线 a 与 b 是否垂直呢?

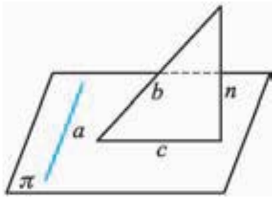


图 2-16

对这个问题的回答是肯定的，这就是三垂线定理.

例 3　（**三垂线定理**）若平面内的一条直线垂直于平面外的一条直线在该平面上的投影，则这两条直线垂直.

已知：如图 2-16，b 是平面 π 外的一条直线，直线 c 是 b 在平面 π 上的投影，直线 c 与平面内一直线 a 垂直.

求证：$a\perp b$.

证明　过直线 b 上任一点作平面 π 的垂线 n.

设直线 a,b,c,n 的方向向量分别是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}$，只需证 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

由于 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}$ 共面，根据平面向量基本定理，存在实数 λ,μ 使得

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{n}.$$

则 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}).$$

又由于 $a\perp c$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$;

因为直线 a 在平面 π 内，$\boldsymbol{n}\perp\pi$，故 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

思考交流

求证：（**面面垂直判定定理**）若一个平面经过另一个平面的一条垂线，则这两个平面垂直.

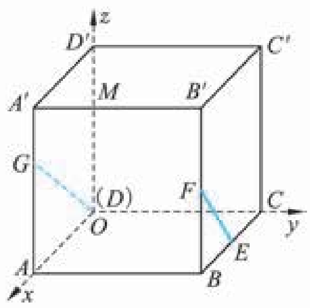
练　习

1. 已知两条不同直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$，判断两直线是平行还是垂直：
   (1) $\boldsymbol{s}_1=(1,-1,1)$, $\boldsymbol{s}_2=(-1,2,3)$;
   (2) $\boldsymbol{s}_1=(1,-2,0)$, $\boldsymbol{s}_2=(-1,2,0)$.
2. 已知两个不同平面 π_1,π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$，判断两平面是平行还是垂直：
   (1) $\boldsymbol{n}_1=(1,2,3)$，$\boldsymbol{n}_2=(-1,-2,-3)$;
   (2) $\boldsymbol{n}_1=(2,2,-3)$，$\boldsymbol{n}_2=(-1,-2,-2)$.
3. 已知直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，且 $l\not\subset\pi$，判断直线与平面是平行还是垂直：
   (1) $\boldsymbol{s}=(-1,1,1)$，$\boldsymbol{n}=(1,4,-3)$;
   (2) $\boldsymbol{s}=(-1,3,2)$，$\boldsymbol{n}=(2,-6,-4)$.

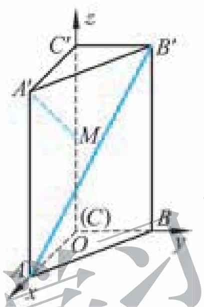
习 题 2—4

A 组

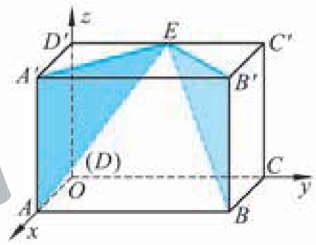
1. 证明：如果平面内的一条直线 a 垂直于平面外的一条直线 b，那么 a 垂直于直线 b 在平面上的投影 c.（三垂线定理的逆定理）
2. 如图，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，E，F 分别是棱 BC，BB'的中点，试在直线 AA'上找一点 G，使得 $EF /\!/ DG$.
3. 如图，在空间直角坐标系中有直三棱柱 ABC-$A'B'C'$，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$BC=1$，$AA'=\sqrt{6}$，M 是棱 CC'的中点. 证明：$AB' \perp A'M$.



（第 2 题）



（第 3 题）

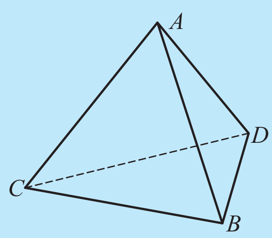


（第 4 题）

4. 如图，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，$AB=\sqrt{2}$，$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AA'=1$，E 是$C'D'$的中点. 求证：平面 $AA'E \perp$ 平面 $BB'E$.
5. 在立体几何中，我们学习过垂直与平行的四个判定定理和四个性质定理. 本节只证明了其中的两个定理. 请尝试证明一些其余的判定定理和性质定理.

B 组

证明：在四面体 A-BCD 中，如果两组对棱 $AB \perp CD$，$DB \perp AC$，那么第三组对棱 $DA \perp BC$.



§5　夹角的计算

5.1　直线间的夹角

当两条直线 l_1 与 l_2 共面时，我们把两条直线交角中，范围在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内的角叫作**两直线的夹角**.（图 2-17）

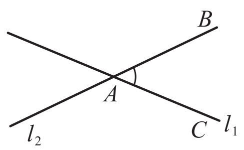


图 2-17

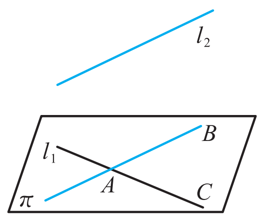


图 2-18

当直线 l_1 与 l_2 是异面直线时，在直线 l_1 上任取一点 A 作 $AB /\!/ l_2$，我们把直线 l_1 和直线 AB 的夹角叫作**异面直线 l_1 与 l_2 的夹角**.（图 2-18）

空间直线由一点和一个方向确定，所以空间两条直线的夹角由它们的方向向量的夹角确定.（图 2-19）

图 2-19

已知直线 l_1 与 l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$.

当 $0 \leqslant \langle \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \rangle \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，直线 l_1 与 l_2 的夹角等于 $\langle \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \rangle$；

当 $\frac{\pi}{2} < \langle \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \rangle \leqslant \pi$ 时，直线 l_1 与 l_2 的夹角等于 $\pi - \langle \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \rangle$.

例 1　如图 2-20，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD-A'B'C'D'$，$AB=2$，$BC=1$，$AA'=3$. 求对角线 AC' 和侧面对角线 $A'D$ 的夹角 θ 的余弦值.

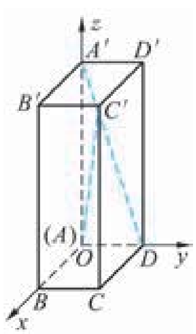


图 2-20

解　设对角线 AC' 和侧面对角线 $A'D$ 的方向向量分别是 $\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$，取 $\boldsymbol{s}_1 = \overrightarrow{AC'}$，$\boldsymbol{s}_2 = \overrightarrow{A'D}$.

因为 $A(0,0,0)$，$C'(2,1,3)$，$A'(0,0,3)$，$D(0,1,0)$，所以

$$\boldsymbol{s}_1=\overrightarrow{AC'}=(2,1,3),\ \boldsymbol{s}_2=\overrightarrow{A'D}=(0,1,-3).$$

因此 $\cos\langle \boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{s}_1\cdot \boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=-\dfrac{8}{\sqrt{140}}<0$，

故 $\langle \boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\rangle>90°$，

所以 AC' 和 $A'D$ 的夹角 $\theta=\pi-\langle \boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\rangle$，故 $\cos\theta=\dfrac{4\sqrt{35}}{35}$.

5.2 平面间的夹角

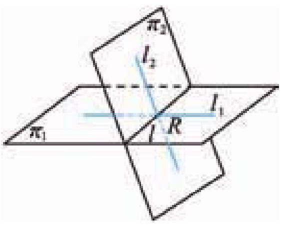


图 2-21

思 考

若在直线 l 上选取不同于点 R 的点 P，过点 P 在平面 π_1 上作直线 $a\perp l$，在平面 π_2 上作直线 $b\perp l$，那么直线 a 和 b 的夹角与直线 l_1 和 l_2 的夹角是否相等？

如图 2-21，平面 π_1 与 π_2 相交于直线 l，点 R 为直线 l 上任意一点，过点 R，在平面 π_1 上作直线 $l_1\perp l$，在平面 π_2 上作直线 $l_2\perp l$，则 $l_1\cap l_2=R$. 我们把直线 l_1 和 l_2 的夹角叫作平面 π_1 与 π_2 的夹角.

已知平面 π_1 和 π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$.

当 $0\leqslant\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，平面 π_1 与 π_2 的夹角等于 $\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$；

当 $\dfrac{\pi}{2}<\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle\leqslant\pi$ 时，平面 π_1 与 π_2 的夹角等于 $\pi-\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$.

例 2 如图 2-22，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$. 求平面 $BCD'A'$ 与平面 $ABCD$ 的夹角 θ.

解 设平面 $BCD'A'$ 与平面 $ABCD$ 的法向量分别是 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$，取

$$\boldsymbol{n}_2=(0,0,1).$$

因为 $A'(0,0,1)$，$B(0,1,0)$，$C(1,1,0)$，所以

$$\overrightarrow{A'B}=(0,1,-1),\ \overrightarrow{BC}=(1,0,0).$$

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A'B}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-z=0,\\ x=0.\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,1)$，得

$$\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

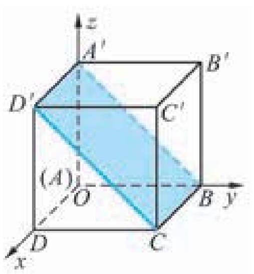


图 2-22

此时 $\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\pi}{4}$，因此，平面 $BCD'A'$ 与平面 $ABCD$ 的夹角

$$\theta=\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\pi}{4}.$$

若取平面 $BCD'A'$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(0,-1,-1)$，则

$$\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

此时 $\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{3\pi}{4}$，因此，平面 $BCD'A'$ 与平面 $ABCD$ 的夹角

$$\theta=\pi-\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\pi}{4}.$$

练　习

1. 已知直线 l_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,-1,1)$，直线 l_2 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(-1,2,0)$. 求两条直线夹角的余弦值.
2. 已知平面 π_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,2,3)$，平面 π_2 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(-1,0,2)$. 求两个平面夹角的余弦值.

5.3　直线与平面的夹角

平面外一条直线与它在该平面内的投影的夹角叫作**该直线与此平面的夹角**.（图 2-23）

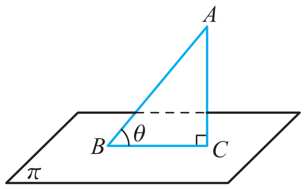


图 2-23

如果一条直线与一个平面平行或在平面内，我们规定这条直线与平面的夹角为 0.

如果一条直线与一个平面垂直，我们规定这条直线与平面的夹角是 $\frac{\pi}{2}$.

思考交流

1. 直线与平面的夹角 θ 和该直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 与该平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 $\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{n}\rangle$ 是什么关系？
2. 如何用向量计算直线与平面的夹角？

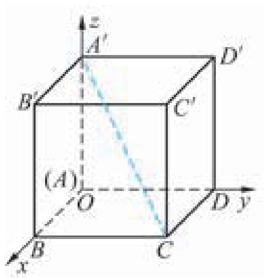


图 2-24

例 3　如图 2-24，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$. 求对角线 $A'C$ 与平面 $ABCD$ 的夹角 θ 的正弦值.

解　设对角线 $A'C$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，平面 $ABCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，取 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{A'C}$，$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$.

因为　$A'(0,0,1)$，$C(1,1,0)$，所以　$\overrightarrow{A'C}=(1,1,-1)$.

从而　$\cos\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{n}\rangle>\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $A'C$ 与平面 $ABCD$ 的夹角 $\theta=\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{n}\rangle-\dfrac{\pi}{2}$.

故 $\sin\theta=\sin\left(\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{n}\rangle-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

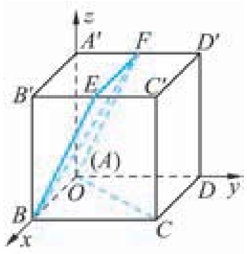


图 2-25

例 4　如图 2-25，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，E，F 分别是 $B'C'$，$A'D'$ 的中点. 求直线 AC 与平面 $ABEF$ 的夹角 θ 的正弦值.

解　因为 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，所以 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$.

设平面 $ABEF$ 的法向量是 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，　$\overrightarrow{AF}=\left(0,\dfrac{1}{2},1\right)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$　得　$\begin{cases}x=0,\\ \dfrac{1}{2}y+z=0.\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}=\left(0,1,-\dfrac{1}{2}\right)$，得

$$\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}>0,$$

故 $\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}\rangle<\dfrac{\pi}{2}$，

所以直线 AC 与平面 $ABEF$ 的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}\rangle$.

所以 $\sin\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}\rangle\right)=\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

说　明

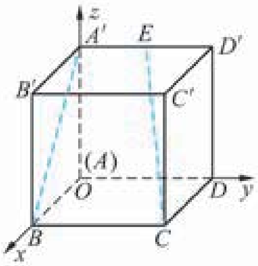
用向量作为工具研究空间的夹角问题时，重要的是明确直线的方向向量、平面的法向量，以及它们之间的关系.

练　习

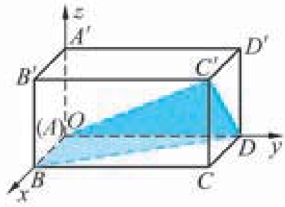
已知直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(-1,1,1)$，平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,-3)$. 求直线与平面夹角的余弦值.

习 题 2—5

1. 如图，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，E 是$A'D'$的中点. 求直线 $A'B$ 与直线 CE 夹角的余弦值.
2. 如图，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，且 $AB=2$，$AD=4$，$AA'=2$. 求平面 $AC'D$与平面 ABD 夹角的余弦值.

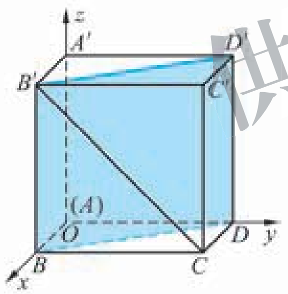


（第 1 题）

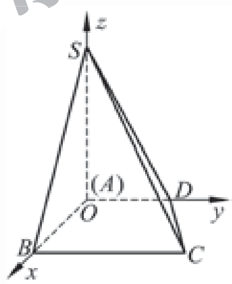


（第 2 题）

3. 如图，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，且 $AB=1$，$BC=2$，$AA'=2$. 求直线 $B'C$ 与平面 $B'BDD'$夹角的正弦值.
4. 如图，在空间直角坐标系中，四棱锥 S-$ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle ABC=90°$，$SA=AB=BC=1$，$AD=\frac{1}{2}$. 求平面 SAB 与平面 SCD 夹角的余弦值.

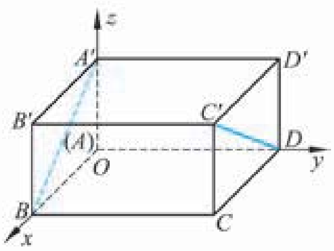


（第 3 题）



（第 4 题）

5. 如图，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，且 $AB=2$，$AD=2$，$AA'=1$. 求异面直线 $A'B$ 与 $C'D$ 夹角的余弦值.



（第 5 题）

§6 距离的计算

一、点到直线的距离

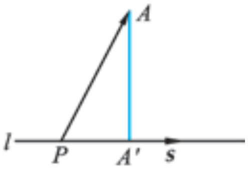


图 2-26

因为直线和直线外一点确定一个平面，所以空间点到直线的距离问题就是空间中某一个平面内点到直线的距离问题.

如图 2-26，设 l 是过点 P 平行于向量 $\boldsymbol{s}$ 的直线，A 是直线 l 外一定点.

作 $AA'\perp l$，垂足为 A'，则点 A 到直线 l 的距离 d 等于线段 AA' 的长度，而向量 $\overrightarrow{PA}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 上的投影的大小 $|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{s}_0|$ 等于线段 PA' 的长度，所以根据勾股定理有点 A 到直线 l 的距离

$$d=\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{s}_0|^2}.$$

说　明

求平行直线间的距离通常转化为求点到直线的距离.

空间一点 A 到直线 l 的距离的算法框图如图 2-27.

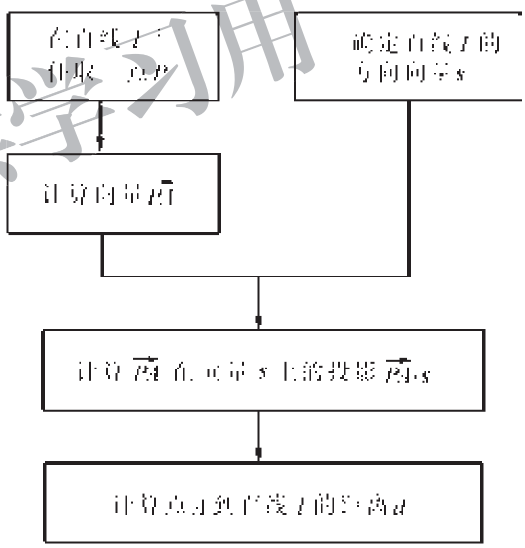


图 2-27

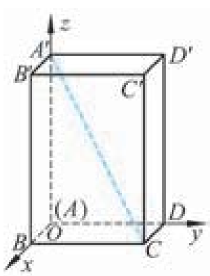


图 2-28

例 1　如图 2-28，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD-A'B'C'D'$，$AB=1$，$BC=2$，$AA'=3$. 求点 B 到直线 $A'C$ 的距离.

解　因为 $AB=1$，$BC=2$，$AA'=3$，所以

$A'(0,0,3)$，$C(1,2,0)$，$B(1,0,0)$.

(1) 计算直线 $A'C$ 的方向向量 $\overrightarrow{A'C}=(1,2,-3)$；

(2) 找到直线 $A'C$ 上一点 $C(1,2,0)$；

(3) 求点 $B(1,0,0)$ 到直线 $A'C$ 上一点 $C(1,2,0)$ 的向量

$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$；

（4）求$\overrightarrow{BC}$在$\overrightarrow{A'C}$上的投影

$$\overrightarrow{BC}\cdot\frac{\overrightarrow{A'C}}{|\overrightarrow{A'C}|}=\frac{4}{\sqrt{14}};$$

（5）求点 B 到直线 $A'C$ 的距离

$$d=\sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2-\left|\overrightarrow{BC}\cdot\frac{\overrightarrow{A'C}}{|\overrightarrow{A'C}|}\right|^2}=\sqrt{4-\frac{16}{14}}=\frac{2\sqrt{35}}{7}.$$

二、点到平面的距离

如图 2-29，设 π 是过点 P 垂直于向量 $\boldsymbol{n}$ 的平面，A 是平面 π 外一定点.

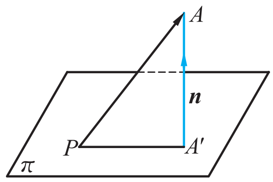


图 2-29

作 $AA'\perp\pi$，垂足为 A'，则点 A 到平面 π 的距离 d 等于线段 AA' 的长度. 而向量$\overrightarrow{PA}$在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影的大小$|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}_0|$等于线段 AA'的长度，所以点 A 到平面 π 的距离

$$\boxed{d=|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}_0|.}$$

空间一点 A 到平面 π 的距离的算法框图如图 2-30.

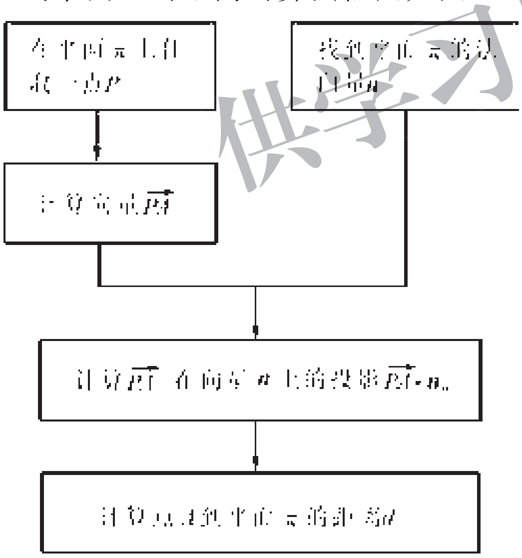


图 2-30

例 2　如图 2-31，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$.

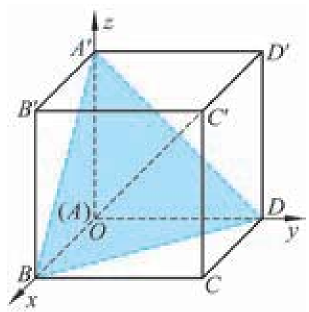


图 2-31

（1）证明：$\overrightarrow{AC'}$是平面 $A'BD$ 的法向量；

（2）求点 C'到平面 $A'BD$ 的距离.

解　据题意有 $A'(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$C'(1,1,1)$.

（1）因为$\overrightarrow{AC'}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{A'B}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{A'D}=(0,1,-1)$，

所以　$\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{A'B}=(1,1,1)\cdot(1,0,-1)=0$，

$$\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{A'D}=(1,1,1)\cdot(0,1,-1)=0,$$

从而 $\overrightarrow{AC'}\perp\overrightarrow{A'B}$，$\overrightarrow{AC'}\perp\overrightarrow{A'D}$，

所以 $\overrightarrow{AC'}\perp$平面 $A'BD$，

即$\overrightarrow{AC'}$是平面 $A'BD$ 的法向量；

(2) 因为$\overrightarrow{BC'}=(0,1,1)$，所以点 C'到平面 $A'BD$ 的距离为

$$\left|\overrightarrow{BC'}\cdot\frac{\overrightarrow{AC'}}{|\overrightarrow{AC'}|}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

思考交流

1. 如何求与平面平行的直线到该平面的距离？
2. 如何求平行平面间的距离？

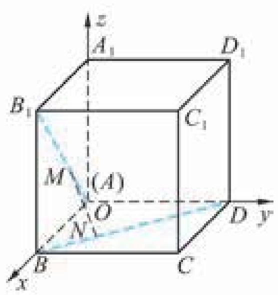
练 习

1. 已知点 $A(1,-1,2)$，直线 l 过原点 O，且平行于向量$(0,2,1)$。求点 A 到直线 l 的距离 d。
2. 已知点 $M(-1,1,-2)$，平面 π 过原点 O，且垂直于向量 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$。求点 M 到平面 π 的距离。

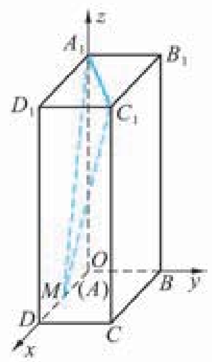
习 题 2—6

A 组

1. 如图，在单位正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 AB_1 上的点，且$AM=\frac{1}{3}AB_1$，N 是 BD 上的点，且 $BN=\frac{1}{3}BD$。求 MN 的长。



（第 1 题）



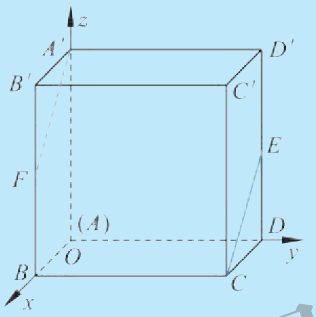
（第 2 题）

2. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$BC=2$，$AA_1=3$，M 是 AD 的中点. 求点 M 到直线 A_1C_1 的距离.

3. 已知点 $M(-1,2,3)$，平面 π 经过点 $A(1,2,0)$，$B(-2,0,1)$，$C(0,2,2)$. 求点 M 到平面 π 的距离.

B　组

如图，空间直角坐标系中有长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，$AB=1$，$BC=2$，$AA'=2$，E 和 F 分别是棱 DD' 和 BB' 的中点. 证明：$CE /\!/ A'F$，并求它们之间的距离.



课题学习

空间向量在力学中的应用

一、问题情境和任务

生活中我们经常见到一个物体同时受到多个力的作用，且这些力不在同一个平面内，对这些力的分析，可以从物理学的角度，也可以从数学向量的角度，通过这种问题的解决不仅可以体会到学科之间的联系，而且能增强对向量有关知识的理解和运用. 下面研究几个问题：

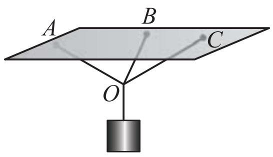


图 2-32

1. 如图 2-32，一个质量为 9 kg 的物体，用三根绳子悬挂起来，若三根绳子两两所成角都为 60°，且与竖直方向成相等角，试求每根绳子所承受的拉力.

2. 如图 2-32，若在 O，B，C 三点固定不变，且保证绳子 OA 与绳子 OB，OC 成相等角的情况下，改变绳子 OA 与平面 OBC 之间的角度 β，问绳子 OA 承受的拉力随着角度 β 的改变有何变化. 在何位置时，绳子 OA 承受的拉力最小？

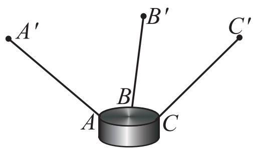


图 2-33

3. 以前，人们在建筑中为夯实地面，用一种由三人使用的石制工具(图 2-33)，石墩上有三个石耳，用三根粗绳子拴着，三个人站在三个方位上，同时发力拉绳子使石墩离开地面，然后石墩自由落下，以夯实地面.

(1) 若三个人所站方位使得三根绳子两两成相等角，且与水平地面成角为 45°，为了使石墩竖直离开地面，每人最少需用多大的力？(设石墩质量为 25 kg)

(2) 若三个人中有一人体力较弱，相当于另外两人各自体力的 $\dfrac{2}{3}$，为了使这三人能有较长时间的合作，三人的站位应如何调整？(一般情况下，由于绳子与地面成角由身高决定，所以不妨假设绳子与地面成角不变)

4. 以上问题中力的个数是否可以推广，如问题 3(1)中是否可以推广为：“若四个人(或五个人……)所站方位使得四根绳子(或五根绳子……)每相邻两根成角均相等，且与水平地面成角为 α(如 $\alpha=30°,45°,\cdots$)，那么为了使石墩竖直离开地面，每人最少需用多大的

力？（设石墩质量为 25 kg）”

5. 自己设计一些相关的其他问题，并讨论求解方案.

二、实施建议

1. 利用自己所学知识多角度分析解决问题，并注重各种方法之间的异同点，比较它们的优缺点.

2. 注意各个问题之间的联系，由易到难，由特殊到一般地从中归纳方法、总结规律.

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 经历向量及其运算由平面向空间推广的过程.

2. 了解空间向量的概念，了解空间向量的基本定理及其意义，掌握空间向量的标准正交分解及其坐标表示.

3. 掌握空间向量的加法和数乘运算及其坐标表示.

4. 掌握空间向量的数量积及其坐标表示，能运用向量的数量积判断向量的垂直.

5. 理解直线的方向向量与平面的法向量.

6. 能用向量语言表述线线、线面、面面的垂直与平行关系.

7. 能用向量方法证明有关线、面位置关系的一些定理（包括三垂线定理）.

8. 能用向量方法解决线线、线面、面面夹角的计算问题，体会向量方法在研究几何问题中的作用.

二、复习建议

复习本章知识，思考以下问题，对本章内容进行归纳总结，并写出复习总结报告.

1. 空间向量概念与平面向量概念有什么不同？有什么相同？

2. 学习了哪些空间向量的运算？空间向量的运算与平面向量的运算有什么关系？空间向量的运算律与平面向量的运算律有什么关系？

3. 空间向量的坐标表示与平面向量的坐标表示有什么不同？空间向量的运算的坐标表示是什么？向量的坐标与向量的投影有什么关系？

4. 空间向量基本定理是什么？空间向量基本定理与平面向量基本定理有什么不同？空间向量的标准正交分解是什么？空间向量的标准正交分解与平面向量的标准正交分解有什么不同？

5. 什么是直线的方向向量？什么是平面的法向量？如何计算平面的法向量？如何用向量刻画直线？如何用向量刻画平面？

6. 如何用向量刻画空间直线与直线的夹角？如何用向量刻画空间直线与平面的夹角？如何用向量刻画空间平面与平面的夹角？

7. 如何用向量刻画空间直线与直线的垂直与平行关系？如何用向量刻画空间直线与平面的垂直与平行关系？如何用向量刻画空间平面与平面的垂直与平行关系？

8. 如何用向量计算空间点到直线的距离？如何用向量计算空间点到平面的距离？

9. 学习空间向量的过程中，你认为哪些问题值得注意和思考？

10. 请画出本章的知识结构框图.

复 习 题 二

A 组

1. 某潜艇为躲避反潜飞机的侦察，紧急下潜 50 m 后，又以 15 km/h 的速度，沿北偏东 45°前行 5 min，又以 10 km/h 的速度，沿北偏东 60°前行8 min，最后摆脱了反潜飞机的侦察. 试画出潜艇整个过程的位移示意图.
2. 某飞机通过雷达发现在其下方 500 m 空域，北偏东 60°方位，距离 3 000 m 处有另一架飞机正在飞行. 试用向量画出两架飞机的相对位置.
3. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是两两垂直的单位向量，求：

   (1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

   (3) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 上的投影；　　(4) $\cos\langle(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\rangle$.
4. 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$，证明：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\sqrt{2}\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\sqrt{2}\boldsymbol{c}$.
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,2,1)$，计算：

   (1) $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|-3\boldsymbol{a}|$，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　　(2) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$；

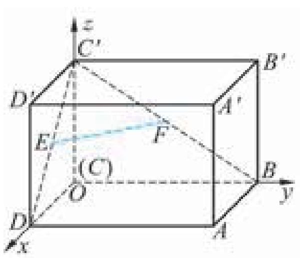
   (3) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 在 $-3\boldsymbol{a}$ 上的投影.
6. 已知点 $A(1,1,-1)$，$B(1,0,1)$，$C(0,1,2)$，$D(-1,2,1)$，求：

   (1) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$；　　(2) $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$；

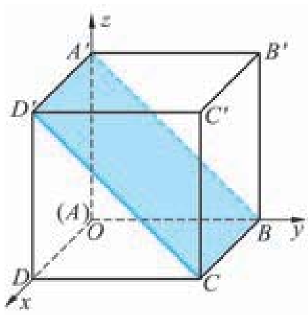
   (3) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|$.
7. 已知直线 l 过点 $A(1,2,3)$，且平行于 x 轴，求直线 l 上满足$|\overrightarrow{AP}|=1$ 的点 P 的坐标.
8. 已知直线 l 过两点 $A(-2,1,1)$，$B(1,0,-3)$，求直线 l 上一点 P，使得$\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}$.
9. 判断下列点是否在直线上：

   (1) 点 $P(1,2,3)$，直线过点 $A(-1,1,1)$和 $B(1,-1,1)$；

   (2) 点 $P(1,-2,-1)$，直线过点 $A(-1,-4,1)$和 $B(2,1,2)$.
10. 如图，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，$AB=2$，$BC=3$，$AA'=2$，E 和 F 分别是 $C'D$ 和 $C'B$ 的中点. 求线段 EF 的中点坐标.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 如图，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，求对角面$BCD'A'$所在平面的法向量.

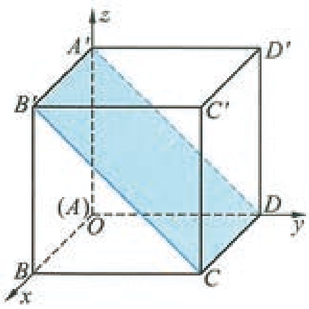
12. 已知直线 l_1 过点 $P_1(-1,2,3)$，平行于向量 $\boldsymbol{s}_1=(1,-1,2)$，$l_2$ 过点 $P_2(1,-2,0)$，平行于向量 $\boldsymbol{s}_2=(0,1,1)$. 求与直线 l_1，l_2 都平行的平面 π 的法向量.

13. 已知直线 l 过点 $P_0(1,0,-1)$，平行于向量 $\boldsymbol{s}=(2,1,1)$. 求过直线 l 和点 $A(1,2,3)$ 的平面的法向量.

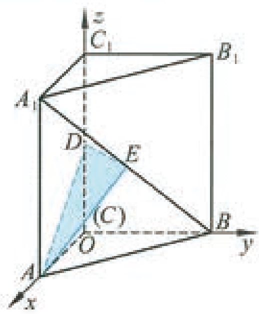
14. 如图，在单位正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，证明直线 AB∥平面 $A'B'CD$，并求它们之间的距离.

15. 如图，在空间直角坐标系中有直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$，底面是等腰直角三角形，$AB=2$，$\angle ACB=90°$，侧棱 $AA_1=2$，D，E 分别是 CC_1，A_1B 的中点. 求 A_1 到平面 AED 的距离.

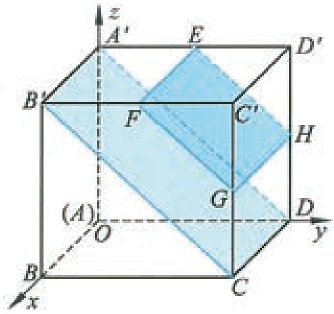
16. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，E，F，G，H 分别是棱 $A'D'$，$B'C'$，CC'，DD' 的中点. 证明平面 $EFGH$∥平面 $A'B'CD$，并求它们之间的距离.



（第 14 题）

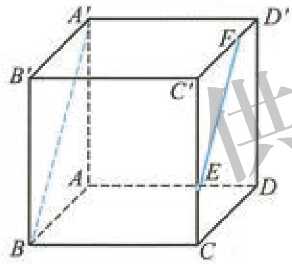


（第 15 题）

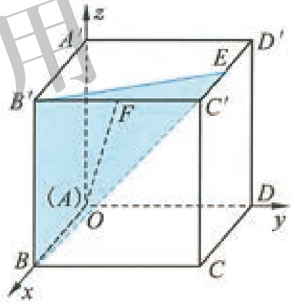


（第 16 题）

17. 如图，在单位正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，已知 E 为 CC' 上一点，且 $2CE=EC'$，在面 $CDD'C'$ 内作 EF∥$A'B$ 交 $C'D'$ 于点 F. 求直线 EF 与 $A'B$ 的距离.



（第 17 题）



（第 18 题）

18. 如图，在空间直角坐标系中有单位正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，E，F 分别是棱 $C'D'$ 和 $B'C'$ 的中点. 试求：

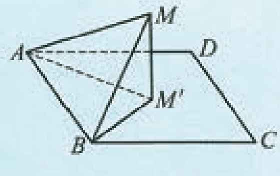
(1) AF 与平面 BEB' 所成角的余弦值；

(2) 点 A 到面 BEB' 的距离.

B　组

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,0,1)$，$\boldsymbol{c}=(2,-1,2)$，判断它们是否平行于同一个平面.

2. 如图，$\triangle ABM$ 在另一个平面 $ABCD$ 上的投影为 ABM'，θ 为平面 ABM 与平面 $ABCD$ 的夹角. 证明：$S_{\triangle ABM}\cdot\cos\theta=S_{\triangle ABM'}$.



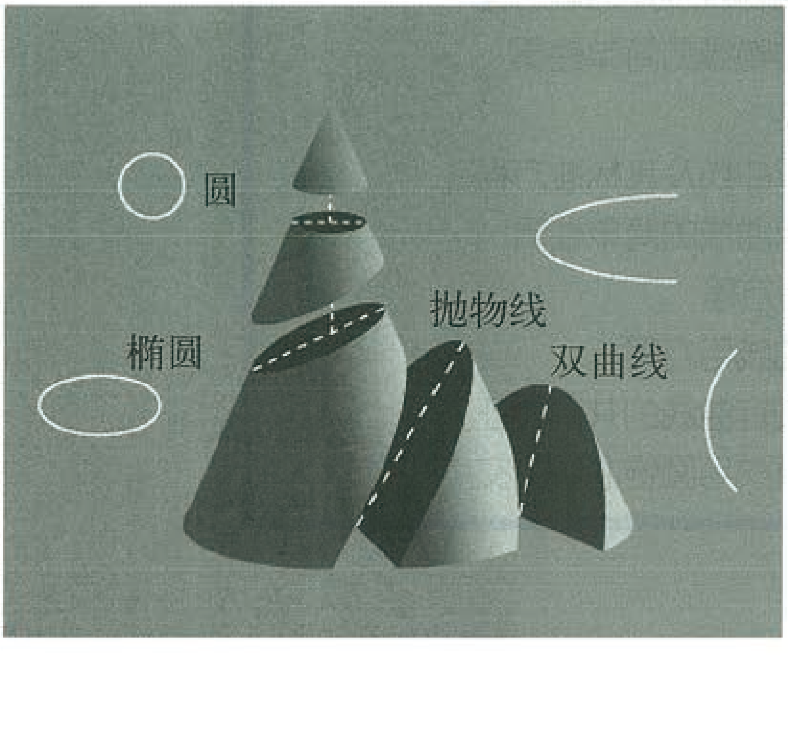
（第 2 题）

第三章 圆锥曲线与方程

1609 年，德国天文学家开普勒发现许多天体的运行轨道是椭圆；在这一时期，意大利物理学家伽利略发现抛掷物体的轨迹是抛物线；法国科学家买多尔日发现了圆锥曲线在光学中的应用. 随着人们对圆锥曲线的进一步认识，圆锥曲线的应用越来越广泛. 例如，油罐汽车装油罐的截面周界是椭圆；人造喷泉喷出的水形成抛物线；发电站的冷却塔的轴截面两侧边沿是双曲线等.

我们用平面去截圆锥，根据截面与圆锥轴的夹角不同，所得截面的周界分别是圆、椭圆、抛物线、双曲线，所以，人们通常把圆、椭圆、抛物线、双曲线统称为**圆锥曲线**.

本章我们将对圆锥曲线及其性质作一些研究，并运用这些性质解决一些实际问题.



§1　椭　　圆

1.1　椭圆及其标准方程

我们对“椭圆形状”并不陌生，某些汽车徽标、盘子、镜子(图 3-1)等，以及月亮围着地球绕行的轨道、篮球在阳光下的投影(图 3-2)等.

图 3-1

图 3-2

如何确切地描述椭圆呢？通过用平面斜截圆柱所得的截面是定义椭圆的一种方式.

一、椭圆的定义

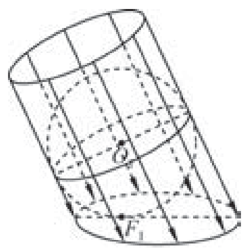


图 3-3

对于篮球在阳光下的投影，我们可以把太阳光看成一束平行光，如图 3-3 所示，照射在篮球上的平行光线可以抽象为一个斜放的圆柱，篮球面抽象为一个球面，球心记作 O_1. 篮球面与地面的接触点抽象为球与平面的切点 F_1，影子就恰是圆柱面被平面斜截的截面，截面的边界线称为椭圆.

对于图 3-3 所示的几何模型，把圆柱面延伸，在截面下面也放一个与圆柱面和截面都相切，且同样大的球，球心记作 O_2，该球与截面的切点记为 F_2，如图 3-4 所示.

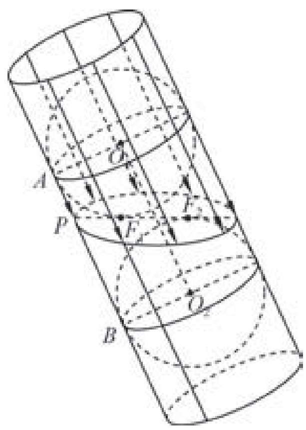


图 3-4

两个球与圆柱面的切点分别构成了两个圆，圆心分别是球心 O_1，O_2，若 P 为椭圆上一点，过点 P 作圆柱的母线，分别交$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 于 A，B 两点，则 PA，PF_1 是球 O_1 的切线段，所以 $PA=PF_1$. 同理 PB，PF_2是球 O_2的切线段，有 $PB=PF_2$，因此，$PF_1+PF_2=AB$，又 $AB=O_1O_2$，由此可以发现椭圆上的点到两切点 F_1，F_2 的距离之和是定值 O_1O_2.

动手实践

我们已经知道用一根细绳和一支笔就可以画出圆，那么仍然使用这些简单工具你能画出椭圆吗？

将一条绳子的两端固定在同一个定点上，用笔尖勾起绳子的中点使绳子绷直，围绕定点旋转，笔尖形成的轨迹是一个圆（图 3-5）. 如果我们将绳子的两端分别固定在两个定点上，用笔尖勾直绳子，使笔尖移动，得到的轨迹就是一个椭圆（图 3-6）.

通常我们将合乎某条件的点的集合也叫作合乎某条件的点的轨迹.

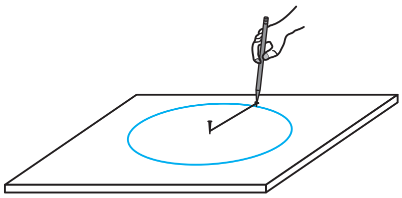


图 3-5

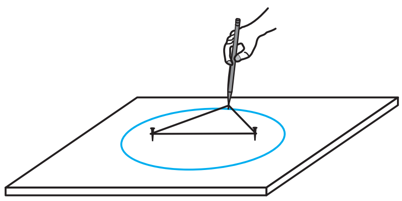


图 3-6

定义　我们把平面内到两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的集合叫作椭圆.

这两个定点 F_1，F_2 叫作**椭圆的焦点**，两个焦点间的距离叫作椭圆的焦距.

思考交流

定义中的常数为什么要大于焦距 $|F_1F_2|$？

二、椭圆的标准方程

下面，我们根据椭圆的定义来求它的方程.

设椭圆的焦距 $|F_1F_2|=2c(c>0)$，椭圆上任意一点到两个焦点 F_1，F_2 的距离之和为常数 $2a(a>c)$.

分析理解

首先，建立平面直角坐标系.

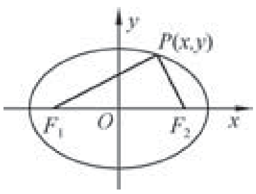


图 3-7

如图 3-7，作直线 F_1F_2 和线段 F_1F_2 的垂直平分线，设 P 为椭圆上一点，根据椭圆的定义，P 关于这两条直线的对称点也都在椭圆上，即这两条直线是椭圆的对称轴. 因此，以直线 F_1F_2 为 x 轴，线段 F_1F_2 的中垂线为 y 轴，建立平面直角坐标系，则焦点 F_1，F_2 的坐标分别为 $(-c,0)$，$(c,0)$.

椭圆和 x 轴、y 轴分别有两个交点 A_1，A_2 和 B_1，B_2（图 3-8）.

根据椭圆的定义和椭圆的对称性，$|A_2F_1|+|A_2F_2|=2a$，且 $|A_1F_1|=|A_2F_2|$，所以 $|A_1A_2|=|A_1F_1|+|A_2F_1|=2a$，即 $|A_2O|=|OA_1|=a$.

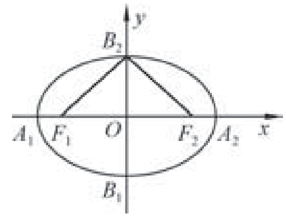


图 3-8

因为 $|B_2F_1|+|B_2F_2|=2a$，且 $|B_2F_1|=|B_2F_2|$，所以 $|B_2F_2|=|B_2F_1|=a$，

于是有　$|B_2O|=\sqrt{|B_2F_2|^2-|OF_2|^2}=\sqrt{a^2-c^2}$.

为方便起见，记 $|B_2O|=b$，则 $b=\sqrt{a^2-c^2}$，从而 $b^2=a^2-c^2$.

说　明

记 $b=\sqrt{a^2-c^2}$ 可以使方程变得简单整齐.

这样，可以得到 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$.

设 $P(x,y)$ 是椭圆上任意一点，由椭圆的定义可知点 P 满足

$$|PF_1|+|PF_2|=2a.$$

因为 $|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|PF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

所以
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

两边平方、整理，得

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

上式两边再平方得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)a^2,$$

即
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

两边同除以 a^2b^2 可得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0).\qquad ①$$

这说明椭圆上点的坐标满足这个方程. 我们还可以证明，以这个方程的每一组解为坐标的点都在椭圆上.

以下证明供学习时参考.

设满足方程的一组解 (x_0,y_0) 对应的点为 P_0，则 P_0 的坐标 (x_0,y_0) 满足方程①，即

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\quad(a>b>0),\qquad ②$$

其中 $b^2=a^2-c^2$.

点 P_0 到 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)$ 的距离之和为

$$|P_0F_1|+|P_0F_2|=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}+\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}.\qquad ③$$

由方程②，得

$$y_0^2=b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}.$$

将上式代入③式后有

$$|P_0F_1|+|P_0F_2|=\sqrt{(x_0+c)^2+b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}}+\sqrt{(x_0-c)^2+b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x_0+a\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{c}{a}x_0-a\right)^2}$$

$$=\left|\frac{c}{a}x_0+a\right|+\left|\frac{c}{a}x_0-a\right|.$$

因为 $-a\leqslant x_0\leqslant a$，所以 $-c\leqslant\frac{c}{a}x_0\leqslant c$.

又 $a>c$，所以 $-a<\frac{c}{a}x_0<a$.

从而
$$\begin{aligned}|P_0F_1|+|P_0F_2|&=\left|\frac{c}{a}x_0+a\right|+\left|\frac{c}{a}x_0-a\right|\\&=\left(a+\frac{c}{a}x_0\right)+\left(a-\frac{c}{a}x_0\right)\\&=2a.\end{aligned}$$

这说明，以方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的解为坐标的点 $P_0(x_0,y_0)$ 都在椭圆上，所以方程所对应的曲线是椭圆.

抽象概括

椭圆上任意一点的坐标都是方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的解；以方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的解为坐标的点都在椭圆上. 我们将方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)}$$

叫作**椭圆的标准方程**，焦点坐标是 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中 $c^2=a^2-b^2$.

如果椭圆的焦点在 y 轴上，如图 3-9，其焦点坐标为 $F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$，用同样的方法也可以推出它的标准方程为

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\quad(a>b>0),}$$

其中 $b^2=a^2-c^2$.

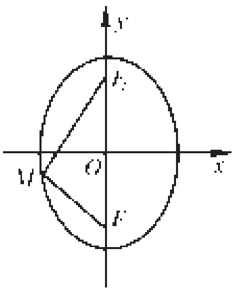


图 3-9

思考交流

1. 当椭圆定义中的常数 $2a$ 为定值时，焦距 $2c$ 的变化与椭圆形状的变化有何关系？

2. 回顾椭圆方程的推导过程，有哪些主要步骤？

练 习 1

1. 利用定义画一个椭圆，使其焦距等于 2 cm，椭圆上的点到两焦点的距离之和等于 4 cm.
2. 已知两定点之间的距离为 5 cm，动点到两定点距离之和为 5 cm，那么动点的轨迹是椭圆吗？

3. 平面内两定点的距离为 6，一动点 M 到两定点的距离之和等于 10. 建立适当的直角坐标系，写出动点 M 满足的轨迹方程，并画出草图.
4. 一束光线垂直于一个墙面，将一块圆形纸板置于光源与墙面之间，墙面上会出现纸板的影子，转动纸板，变化纸板与光线之间的角度，影子的形状也会发生变化. 观察这些影子会出现哪些不同的形状.

例 1　已知 B，C 是两个定点，$|BC|=10$，且$\triangle ABC$ 的周长等于 22. 求顶点 A 满足的一个轨迹方程.

解　由已知　$|AB|+|AC|+|BC|=22$，$|BC|=10$，得

$$|AB|+|AC|=12.$$

由定义可知点 A 的轨迹是一个椭圆，且

$$2c=10,\quad 2a=12,$$

即

$$c=5,\quad a=6.$$

所以

$$b^2=a^2-c^2=11.$$

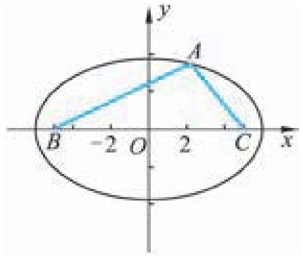


图 3-10

如图 3-10，建立平面直角坐标系，使 x 轴经过 B，C 两点，原点 O 为 BC 的中点.

当点 A 在直线 BC 上，即 $y=0$ 时，A，B，C 三点不能构成三角形. 因此，点 A 满足的一个轨迹方程是

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1\ (y\neq 0).$$

例 2　已知椭圆两焦点坐标分别是$(0,-2)$，$(0,2)$，并且经过点$\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$，求椭圆的标准方程.

解　因为椭圆的焦点在 y 轴上，所以可设它的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

解法1　由椭圆的定义知

$$2a=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}+2\right)^2}+\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{10}+\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$=2\sqrt{10},$$

从而　$a=\sqrt{10}$.

又 $c=2$，所以 $b^2=a^2-c^2=10-4=6$.

所以椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{6}=1.$$

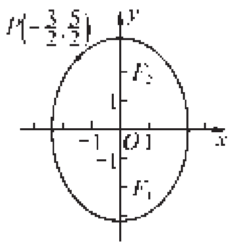


图 3-11

如图 3-11.

解法 2 因为点$\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$在椭圆上，又 $c=2$，得

$$\begin{cases}\dfrac{25}{4a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1,\\ a^2-b^2=4.\end{cases}$$

解得 $b^2=6$ 或 $b^2=-\dfrac{3}{2}$（舍），

则 $a^2=10$.

所以椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{6}=1.$$

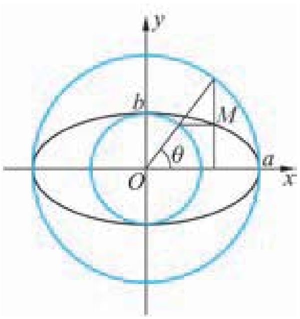


图 3-12

例 3 求证：点 $M(a\cos\theta,b\sin\theta)(0\leqslant\theta<2\pi)$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上.

证明 将点 M 的坐标代入方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，有

$$\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(b\sin\theta)^2}{b^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1.$$

所以点 $M(a\cos\theta,b\sin\theta)(0\leqslant\theta<2\pi)$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上.

θ 的几何意义如图 3-12 所示.

练 习 2

1. 如果椭圆$\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到焦点 F_1 的距离等于 6，则点 P 到另一个焦点 F_2 的距离是______.
2. 写出适合下列条件的椭圆的标准方程，并画出草图：

    (1) $a=\sqrt{5}$，$b=1$，焦点在 x 轴上；

    (2) 焦点坐标为$(0,-4)$，$(0,4)$，$a=5$.
3. 求过点 $P(2\sqrt{5},2\sqrt{3})$，且与椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 有相同焦点的椭圆的标准方程.

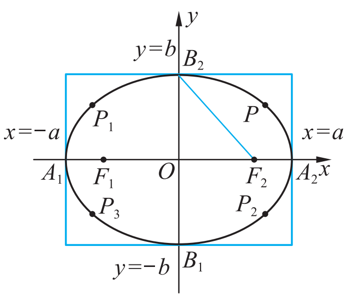


图 3-13

1.2 椭圆的简单性质

通过对椭圆标准方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$和它的图像（图3-13）的研究，可得到以下性质：

1. 对称性

在上一节，由椭圆的定义及其图像认识到了椭圆的对称性. 下面，我们从椭圆的方程进一步认识椭圆的对称性.

根据椭圆方程的结构特点，可以发现：若(x_0,y_0)是方程的一组解，即$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，则$(-x_0,y_0)$，$(x_0,-y_0)$，$(-x_0,-y_0)$也是方程的解，这说明若点$P(x_0,y_0)$在椭圆上，则点$P$分别关于$y$轴、$x$轴、原点$O$的对称点$P_1(-x_0,y_0)$，$P_2(x_0,-y_0)$，$P_3(-x_0,-y_0)$也在椭圆上. 所以，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$是关于$x$轴、$y$轴的轴对称图形，也是关于坐标原点$O$的中心对称图形.

2. 范围

椭圆上所有的点都位于直线$x=\pm a$，$y=\pm b$所围成的矩形内，所以椭圆上点的坐标满足$|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant b$.

3. 顶点

椭圆与它的对称轴的交点叫作**椭圆的顶点**.

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的四个顶点的坐标分别为

$$A_1(-a,0),\ A_2(a,0),\ B_1(0,-b),\ B_2(0,b).$$

这四个特殊点，可以确定椭圆的具体位置.

线段A_1A_2，B_1B_2分别叫作椭圆的**长轴**和**短轴**，且

$$|A_1A_2|=2a,\ |B_1B_2|=2b.$$

a和b分别叫作椭圆的**长半轴长**和**短半轴长**. 它们反映了参数a，b的几何意义.

由于$b^2=a^2-c^2$，a，b，c就是图 3-13 中$\mathrm{Rt}\triangle OB_2F_2$的三边长，它们从另一个角度反映了参数$a$，$b$，$c$的几何意义.

4. 离心率

由参数a，b，c的关系知道：a，c的大小可反映椭圆“扁的程度”. 我们规定椭圆的焦距与长轴长度的比叫作**椭圆的离心率**，用e表示，即$\frac{c}{a}=e$. 显然$0<e<1$，e越接近1，椭圆就越扁. 反之，e越接近0，椭圆就越接近于圆. 当$a=b$时，$c=0$，这时两个焦点重合，图形变为圆，它的方程为$x^2+y^2=a^2$.

例 4　求椭圆$9x^2+25y^2=225$的长轴和短轴的长、离心率、焦点和顶点的坐标，并用描点法画出它的图像.

解　将已知方程化为椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

则　$a=5$，$b=3$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=4$.

因此，椭圆的长轴和短轴的长分别是

$$2a=10,\ 2b=6;$$

离心率是

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5};$$

两个焦点分别是

$$F_1(-4,0),\ F_2(4,0);$$

椭圆的四个顶点分别是

$$A_1(-5,0),\ A_2(5,0),\ B_1(0,-3),\ B_2(0,3).$$

将方程变形为 $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$，由 $y=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$，在 $0\leqslant x\leqslant 5$ 的范围内计算出一些点的坐标 (x,y)，如表 3-1.

表 3-1

x	0	1	2	3	4	5
y	3	2.9	2.7	2.4	1.8	0

先用描点法画出椭圆在第一象限内的图像，再利用对称性画出整个椭圆.（图 3-14）

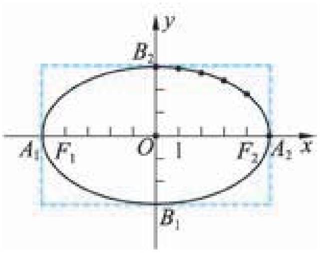


图 3-14

例 5　求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 长轴在 x 坐标轴上，长轴的长等于 12，离心率等于 $\frac{2}{3}$；

(2) 经过点 $P(-6,0)$ 和 $Q(0,8)$.

解　(1) 由已知 $2a=12$，$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$，得

$$a=6,\ c=4,$$

从而

$$b^2=a^2-c^2=20.$$

所以椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$$

(2) 由椭圆的几何性质可知，以坐标轴为对称轴的椭圆与坐标轴的交点就是椭圆的顶点，所以 P，Q 分别是椭圆的短轴和长轴的一个端点，于是有

$$b=6,\ a=8,$$

且短轴、长轴分别在 x 轴和 y 轴上，所以椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{64}+\frac{x^2}{36}=1.$$

例 6　2003 年 10 月 15 日，我国自行研制的载人宇宙飞船“神舟”五号在酒泉卫星发射中心成功升空，实现了中华民族千年的飞天梦.飞船进入的是距地球表面近地点高度约 200 km，远地点约 350 km 的椭圆轨道（地球半径约为 6 370 km）. 求椭圆轨道的标准方程.（精确到 0.1 km）（注：地球球心位于椭圆轨道的一个焦点）

解　如图 3-15，地球的球心为椭圆轨道右焦点 F_2，近地点、远地点分别为 A_2，A_1，以 A_1A_2 的中点为原点，建立平面直角坐标系，使 F_2，A_1，A_2 都在 x 轴上，则

$$|F_2A_2|=a-c=200+6\ 370,$$

$$|A_1F_2|=a+c=350+6\ 370,$$

所以

$$a=6\ 645,\ c=75,$$

从而

$$b^2=a^2-c^2=6\ 645^2-75^2=44\ 150\ 400.$$

椭圆轨道的标准方程为

$$\frac{x^2}{44\ 156\ 025}+\frac{y^2}{44\ 150\ 400}=1.$$

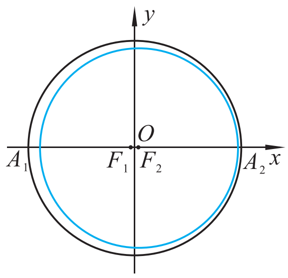


图 3-15

练　习

1. 说出椭圆 $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 的焦点和顶点坐标.
2. 求适合下列条件的椭圆的标准方程，并画出草图：
   (1) $a=6$，$e=\dfrac{1}{3}$；
   (2) $c=3$，$e=\dfrac{3}{5}$，焦点在 y 轴上；
   (3) 长轴长是短轴长的 3 倍，椭圆经过点 $P(3,0)$；
   (4) 椭圆的一个焦点到长轴两端点的距离分别为 10 和 4.

习 题 3—1

A　组

1. 平面内两定点的距离为 6，一动点 M 到两定点的距离之和等于 10. 建立适当的平面直角坐标系，写出动点 M 满足的方程，并画出草图.
2. 已知椭圆的焦点 F_1，F_2 分别为 $(-10,0)$，$(10,0)$，且椭圆上的动点 M 到两焦点 F_1，F_2 的距离之和等于 24. 求椭圆的标准方程，并画出草图.

3. 求满足下列条件的椭圆的标准方程，并画出草图：

(1) $a=10$，$e=\frac{3}{5}$，焦点在 x 轴上；

(2) $c=3$，$e=\frac{1}{2}$，焦点在 y 轴上；

(3) 长轴长是短轴长的 2 倍，椭圆经过点 $P(3,0)$.

4. 若椭圆经过点 $M(-2,\sqrt{3})$ 和 $N(1,2\sqrt{3})$. 求椭圆的标准方程，并画出草图.

5. $\triangle ABC$ 中，B，C 的坐标分别是 $(0,-2)$，$(0,2)$，点 A 是动点，且 $\triangle ABC$ 的三边长 $|AB|$，$|BC|$，$|AC|$ 成等差数列. 求顶点 A 的轨迹方程.

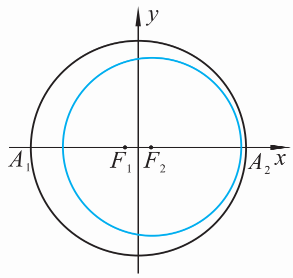
6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 上一点 M 的横坐标是 2，求它的纵坐标，并求点 M 与焦点的距离.

7. 求下列各椭圆的长轴和短轴的长、离心率、焦点坐标、顶点坐标，并画出草图：

(1) $x^2+4y^2=16$；　　(2) $9x^2+y^2=81$.

8. $\triangle ABC$ 两个顶点 A，B 的坐标分别是 $(-6,0)$，$(6,0)$，边 AC，BC 所在直线的斜率之积等于 $-\frac{4}{9}$. 求顶点 C 的轨迹方程，并画出草图.

9. 我国第一颗人造地球卫星的运行轨道是以地心（地球的中心）F_2 为一个焦点的椭圆（如图），已知它的近地点 A_2（离地面最近的点）距地面 439 km，远地点 A_1（离地面最远的点）距地面 2 384 km，并且 A_2，F_2，A_1 在同一直线上，地球的半径约为 6 370 km. 求卫星运行轨道的方程.（精确到 1 km）



（第 9 题）

B　组

1. 分别作出下列方程表示的图形：

(1) $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$；　　(2) $x=\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$.

2. 点 M 到椭圆 $\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$ 的左焦点和右焦点的距离的比为 2∶3. 求点 M 满足的方程，并画出草图.

3. 地球运行的轨道是长半轴长 $a=1.50\times10^8$ km，离心率 $e=0.02$ 的椭圆，太阳在这个椭圆的一个焦点上. 求地球到太阳的最远距离和最近距离.（地球、太阳近似看成是点）

§2　抛 物 线

2.1　抛物线及其标准方程

一、抛物线的定义

我们在初中学过，二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的图像是一条抛物线. 斜抛物体在没有空气阻力的情况下，其轨迹是抛物线，如铅球、足球的运行轨迹等，有些拱桥、雷达的天线等也是利用抛物线的原理制成的.

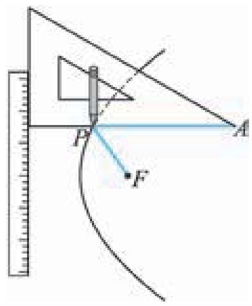


图 3-16

动手实践

如图 3-16，把一根直尺固定在画板上面，把一块三角板的一条直角边紧靠在直尺的边缘，取一根细绳，它的长度与另一直角边相等，细绳的一端固定在顶点 A 处，另一端固定在画板上点 F 处.

用铅笔尖扣紧绳子，靠住三角板，然后将三角板沿着直尺上下滑动，笔尖就在画板上描出了“抛物线”的一段.

定义　**平面内与一个定点 F 和一条定直线 l（l 不过 F）的距离相等的点的集合叫作抛物线.**

这个定点 F 叫作**抛物线的焦点**，这条定直线 l 叫作**抛物线的准线**.

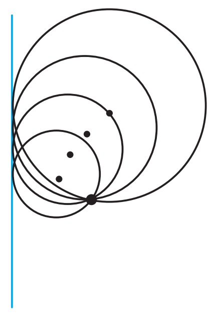


图 3-17

思考交流

观察图 3-17，你能用数学语言来描述吗？请与同学交流.

二、抛物线的标准方程

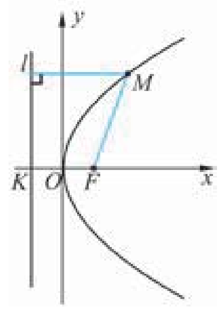


图 3-18

根据抛物线的定义，我们建立如图 3-18 的平面直角坐标系，准线 l 与 x 轴垂直，垂足为 K，焦点 F 在 x 轴上，KF 的中点为坐标系的原点 O.

设$|KF|=p\ (p>0)$，则焦点 F 的坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线 l 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$.

设点 $M(x, y)$是抛物线上任意一点，点 M 到 l 的距离为 d. 由抛物线的定义可知，抛物线上的点 M 满足

$$|MF|=d.$$

因为 $$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\ d=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

所以 $$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

将上式两边平方并化简，得

$$\boxed{y^2=2px\ (p>0).}$$

这就是说抛物线上点的坐标都满足这个方程；反之，可以证明，以这个方程的解为坐标的点都在抛物线上. 这个方程叫作**抛物线的标准方程**. 这条抛物线的焦点在 x 轴正半轴上，坐标是$\left(\frac{p}{2},0\right)$，它的准线方程是

$$x=-\frac{p}{2},$$

其中 p 是焦点到准线的距离.

例 1 根据下列条件求抛物线的标准方程：

(1) 已知抛物线的焦点坐标是 $F(2,0)$；

(2) 已知抛物线的准线方程是 $x=-\frac{3}{2}$.

解 (1) 设抛物线的标准方程为

$$y^2=2px(p>0).$$

其焦点坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)$，根据题意有$\frac{p}{2}=2$，故 $p=4$.

所求抛物线的标准方程为

$$y^2=8x.$$

(2) 设抛物线的标准方程为

$$y^2=2px(p>0).$$

其准线方程为 $x=-\frac{3}{2}$，由题意有$-\frac{p}{2}=-\frac{3}{2}$，故 $p=3$.

所求抛物线的标准方程为

$$y^2=6x.$$

例 2　已知抛物线的焦点在 x 轴正半轴上，焦点到准线的距离是 $\sqrt{2}$. 求抛物线的标准方程、焦点坐标和准线方程.

解　由已知，焦点到准线的距离 $p=\sqrt{2}$，因此，所求抛物线的标准方程为

$$y^2=2\sqrt{2}x.$$

其焦点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，准线方程是 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

思考交流

一条抛物线，由于它在坐标平面内的位置不同，方程也不同. 你能否归纳出开口向左、向上、向下，顶点在原点，焦点在坐标轴上的抛物线的标准方程？分别写出它们的准线方程.

练　习　1

1. 已知抛物线的焦点在 x 轴正半轴上，焦点到准线的距离为 3. 求抛物线的标准方程.
2. 焦点是(3，0)的抛物线的标准方程是____________；准线方程是 $x=-2$ 的抛物线的标准方程是____________.
3. 抛物线 $y^2=8mx\ (m>0)$，F 是焦点，则 m 表示(　　).

A. F 到准线的距离　　B. F 到准线距离的 $\frac{1}{4}$

C. F 到准线距离的 $\frac{1}{8}$　　D. F 到 y 轴的距离

例 3　点 M 到点 $F(4,0)$ 的距离比它到直线 $l:x+6=0$ 的距离小 2. 求点 M 的轨迹.

解　如图 3-19，点 M 到点 F 的距离比它到直线 $l:x+6=0$ 的距离小 2，就是“点 M 到点 F 的距离等于它到直线 $x+4=0$ 的距离”，由此可知，点 M 的轨迹是以 F 为焦点，直线 $x+4=0$ 为准线的抛物线. 即，点 M 的轨迹是一条以 $F(4,0)$ 为焦点，$x=-4$ 为准线的抛物线，此时 $p=8$. 故所求的点 M 的轨迹方程是

$$y^2=16x.$$

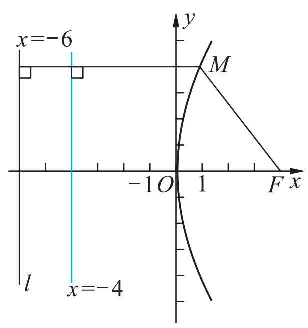


图 3-19

例 4　某单行隧道横断面由一段抛物线及矩形的三边组成，尺寸如图 3-20. 某卡车载一集装箱，车宽 3 m，车与箱总高 4.5 m，此车能否安全通过隧道？说明理由.

解　如图 3-21，以抛物线的顶点为原点建立平面直角坐标系，则 A 点坐标为 $(3,-3)$. 设抛物线的标准方程为

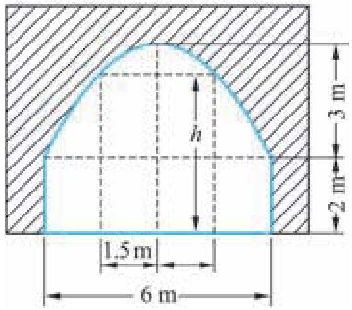


图 3-20

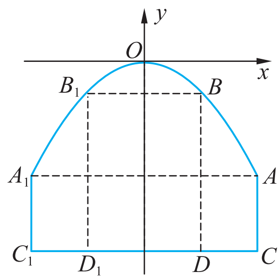


图 3-21

$$x^2=-2py.$$

将 A 点坐标代入上式，得 $9=6p$，即 $p=\dfrac{3}{2}$.

所以抛物线的标准方程为 $x^2=-3y$.

如果此车能通过隧道，集装箱应处于对称位置，将 $x=1.5$ 代入抛物线方程，得 $y=-0.75$. 由于 $5-0.75=4.25<4.5$，所以此车不能安全通过隧道.

练　习　2

1. 根据下列条件写出抛物线的标准方程：

　(1) 焦点是 $F(-3,0)$；　　(2) 准线方程是 $x=-\dfrac{1}{2}$.

2. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

　(1) $y^2=8\sqrt{3}x$；　　(2) $x^2=16y$；

　(3) $2y^2+5x=0$；　　(4) $x^2+8y=0$.

3. 抛物线 $y=ax^2$ 的焦点坐标是________，准线方程是____________.

4. 平面上动点 M 到定点 $F(3,0)$ 的距离比 M 到直线 $x=-1$ 的距离大 2. 求动点 M 满足的方程，并画出相应的草图.

2.2　抛物线的简单性质

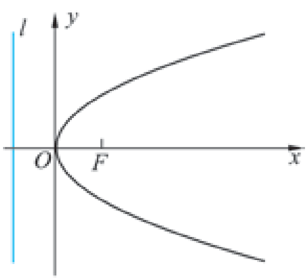


图 3-22

仿照椭圆性质的讨论方法，我们根据抛物线的图像（图 3-22）和标准方程

$$y^2=2px\ (p>0) \quad ①$$

来研究它的几何性质.

1. 对称性

观察图 3-22，不难发现抛物线关于 x 轴对称，我们把抛物线的对称轴叫作**抛物线的轴**. 抛物线只有一条对称轴.

2. 范围

观察图 3-22，我们发现，抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 在 y 轴的右侧，开口向右，这条抛物线上的任意一点 M 的坐标 (x,y) 满足不等式 $x\geqslant 0$；当 x 的值增大时，$|y|$ 也增大，这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸. 抛物线是无界曲线.

3. 顶点

抛物线与它的轴的交点叫作**抛物线的顶点**. 在方程①中，当 $y=0$ 时，$x=0$，因此抛物线的顶点就是坐标原点.

4. 离心率

抛物线上的点 M 到焦点的距离和它到准线的距离的比，叫作**抛物线的离心率**，用 e 表示. 由抛物线的定义可知 $e=1$.

在抛物线的标准方程 $y^2=2px\ (p>0)$ 中，令 $x=\dfrac{p}{2}$，则 $y=\pm p$. 这就是说，通过焦点而垂直于 x 轴的直线与抛物线两交点的坐标分别为 $\left(\dfrac{p}{2},p\right)$，$\left(\dfrac{p}{2},-p\right)$，连接这两点的线段叫作**抛物线的通径**，它的长为 $2p$.（图 3-23）这就是抛物线标准方程中 $2p$ 的一种几何意义. 利用抛物线的几何性质及抛物线上坐标为 $\left(\dfrac{p}{2},p\right)$，$\left(\dfrac{p}{2},-p\right)$ 的两点，能够方便地画出抛物线的草图.

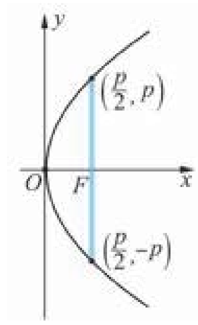
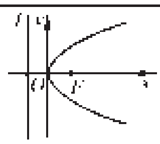
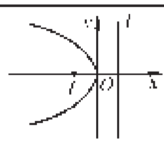
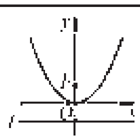
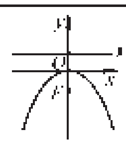


图 3-23

在直角坐标平面内，顶点在原点、轴与坐标轴重合的抛物线有四种位置情况，因此抛物线的方程相应地有四种形式，它们都叫作抛物线的标准方程. 设焦点到准线的距离为 $p(p>0)$，则抛物线标准方程的四种形式如表 3-2 所示.

表 3-2

图　像				
标准方程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
对称轴	x　轴		y　轴	
顶　点	原　点			
焦点坐标	$\left(\dfrac{p}{2},0\right)$	$\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$	$\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$	$\left(0,-\dfrac{p}{2}\right)$
准线方程	$x=-\dfrac{p}{2}$	$x=\dfrac{p}{2}$	$y=-\dfrac{p}{2}$	$y=\dfrac{p}{2}$

例 5 求顶点在原点，通过点$(\sqrt{3},-6)$，且以坐标轴为轴的抛物线的标准方程.

解 如图 3-24，若 x 轴是抛物线的轴，则设抛物线的标准方程为

$$y^2=2px.$$

因为$(\sqrt{3},-6)$在抛物线上，所以

$$(-6)^2=2p\cdot\sqrt{3}.$$

解得 $2p=12\sqrt{3}$，所求抛物线的标准方程为

$$y^2=12\sqrt{3}x.$$

若 y 轴是抛物线的轴，同理可得抛物线的标准方程为

$$x^2=-\frac{1}{2}y.$$

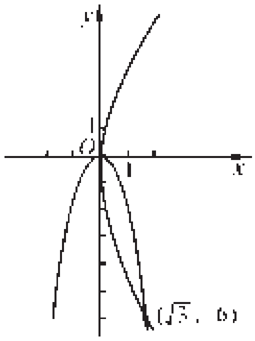


图 3-24

思考交流

平面内哪些点到直线 $l: x=-2$ 和点 $P(2,0)$ 的距离之比小于 1？

练 习

1. 顶点在原点，且经过点$(4,-2)$的抛物线的标准方程是(　　).

   A. $y^2=x$　　　　B. $y^2=-x$ 或 $x^2=8y$

   C. $x^2=-8y$　　　　D. $y^2=x$ 或 $x^2=-8y$

2. 分别写出满足下列条件的抛物线的标准方程：

   (1) 顶点在原点，关于 x 轴对称，过点 $M(4,-4)$；

   (2) 顶点在原点，焦点是 $F(0,5)$；

   (3) 焦点是 $F(0,-8)$，准线是 $y=8$.

3. 在同一平面直角坐标系中画出下列抛物线的草图：

   (1) $y^2=x$；　　(2) $y^2=2x$；　　(3) $y^2=4x$.

   比较这些图形，说明抛物线开口的大小与方程中 x 的系数有怎样的关系.

习 题 3—2

A 组

1. 点 M 到点 $F(3,0)$ 的距离等于它到直线 $x=-3$ 的距离，点 M 运动的轨迹是什么图形？你能写出它的方程吗？能画出草图吗？
2. 根据下列条件求抛物线的标准方程：

（1）焦点在 x 轴上，焦点到准线的距离为 6；

（2）准线方程 $x=-\frac{5}{2}$.

3. 已知两条抛物线的焦点坐标分别是(2,0)，(0,2). 求它们的标准方程.

4. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

（1）$x^2=-2y$；　　（2）$4x^2-3y=0$；

（3）$2y^2=-\sqrt{3}x$；　　（4）$y^2-6\sqrt{2}x=0$.

5. 点 M 到点 $F(2,0)$ 的距离比它到直线 $x=-3$ 的距离小 1. 求点 M 满足的方程.

6. 根据下列条件，求抛物线的标准方程，并画出草图：

（1）准线方程是 $y=2$；

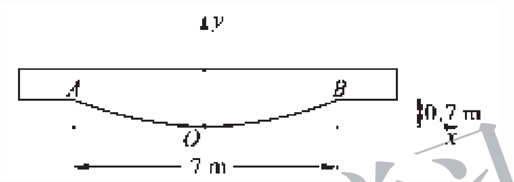
（2）对称轴是 x 轴，并且顶点与焦点的距离等于 8；

（3）对称轴是 y 轴，并经过点 $P(-6,-3)$；

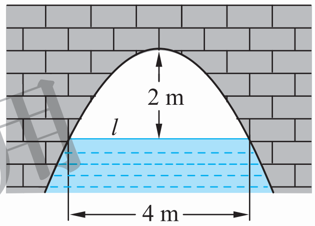
（4）对称轴是 x 轴，焦点在直线 $3x-4y-12=0$ 上.

7. 已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上一点 M 与焦点 F 的距离 $|MF|=2p$. 求点 M 的坐标.

8. 如图，吊车梁的鱼腹部分 AOB 是一段抛物线，宽为 7 m，高为 0.7 m. 求这条抛物线的方程.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图是抛物线形拱桥，当水面在 l 时，拱顶离水面 2 m，水面宽 4 m. 水下降 1 m 后，水面宽多少？

10. 正三角形的一个顶点位于坐标原点，另外两个顶点在抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上. 求这个正三角形的边长.

B　组

1. 抛物线的顶点是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的中心，而焦点是椭圆的左焦点，求抛物线方程.

2. 已知圆 $x^2+y^2-6x-7=0$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线相切，则 p 的值为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 4

3. 抛物线 $y=x^2$ 上到直线 $2x-y=4$ 的距离最小的点的坐标是(　　).

A. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$　　B. (1,1)　　C. $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$　　D. (2,4)

4. 证明：与抛物线的轴平行的直线和抛物线只有一个交点.

§3 双曲线

3.1 双曲线及其标准方程

一、双曲线的定义

我们已经知道，与两定点的距离之和为常数(大于两定点的距离)的点的轨迹是椭圆.那么与两定点的距离的差为非零常数的点的轨迹是怎样的曲线呢？

动手实践

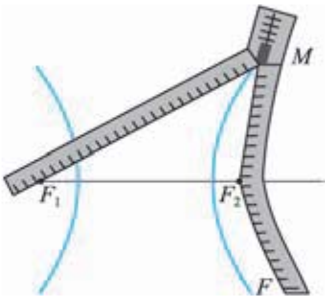


图 3-25

如图 3-25，取一条拉链，拉开它的一部分，在拉开的两边上各选择一点，分别固定在点 F_1，F_2 上，F_1 到 F_2 的长为 $2c(c>0)$. 把笔尖放在拉链开口的咬合处 M，M 与点 F_1 的距离减 M 与点 F_2 的距离所得的差等于 $2a(c>a>0)$，随着拉链逐渐拉开或者闭拢，笔尖就画出一条曲线(图 3-25 中右边的曲线). 这条曲线上的点 M 满足下面的条件：

$$|MF_1|-|MF_2|=2a.$$

如果使点 M 到点 F_2 的距离减点 M 到点 F_1 的距离所得的差等于 $2a$，就得到另一条曲线(图 3-25 中左边的曲线)，这条曲线上的点 M 满足下面的条件：

$$|MF_2|-|MF_1|=2a.$$

这两条曲线合起来叫作双曲线，每一条叫作双曲线的一支.

定义　我们把平面内到两定点 F_1，F_2 的距离之差的绝对值等于常数(大于零且小于 $|F_1F_2|$)的点的集合叫作双曲线.

定点 F_1，F_2 叫作**双曲线的焦点**，两个焦点之间的距离叫作**双曲线的焦距**.

双曲线在我们实际生活中有着十分广泛的应用，如热电厂冷却塔的外形与轴截面的交线，用于大面积照明的照明灯的反光罩与轴截面的交线等都是双曲线.

二、双曲线的标准方程

下面，我们仿照求椭圆方程的方法，根据双曲线的定义来求双曲线的标准方程.

如图 3-26，给定双曲线，它的焦点为 F_1，F_2，焦距 $|F_1F_2|=2c(c>0)$，双曲线上任一点到两焦点的距离之差的绝对值为 $2a(0<a<c)$，以直线 F_1F_2 为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系. 焦点 F_1，F_2 的坐标分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$.

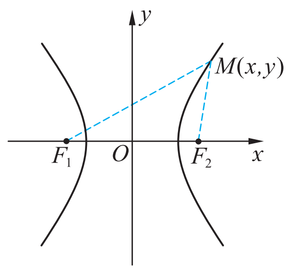


图 3-26

设 $M(x, y)$ 是双曲线上任意一点，由双曲线的定义可知点 M 满足

$$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a.$$

因为　$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，　$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

所以　$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

化简，得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

由双曲线的定义可知，$2c>2a>0$，所以 $c^2-a^2>0$.

设　$c^2-a^2=b^2(b>0)$，代入上式，得

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

即

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0).}$$

说　明

令 $b^2=c^2-a^2$ 可以使方程变得简单整洁，在今后讨论双曲线的几何性质时，b 还有明确的几何意义.

这就是说，双曲线上点的坐标都满足这个方程；反之，可以证明，以这个方程的解为坐标的点都在双曲线上. 这个方程叫作**双曲线的标准方程**. 这条双曲线的焦点在 x 轴上（图 3-26），其坐标为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$.

如果焦点 F_1，F_2 在 y 轴上（图 3-27），利用同样的方法，可以得到双曲线的标准方程为

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0).}$$

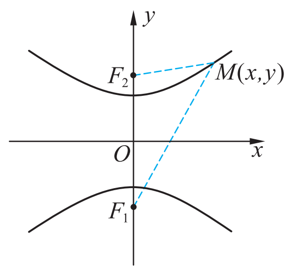


图 3-27

例 1　已知双曲线的两个焦点坐标分别是 $F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$，双曲线上的点到两个焦点距离之差的绝对值是 6，求双曲线的标准方程.

解　因为双曲线的焦点在 x 轴上，所以可设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0).$$

又 $c=5$，$a=3$，故 $b=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

因此，所求双曲线的标准方程是

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

例 2　相距 2 km 的两个哨所 A，B 听到远处传来的炮弹爆炸声，在 A 哨所听到爆炸声的时间比在 B 哨所迟 4 s. 已知当时的声速为 340 m/s，试判断爆炸点在什么样的曲线上，并求出曲线的方程.

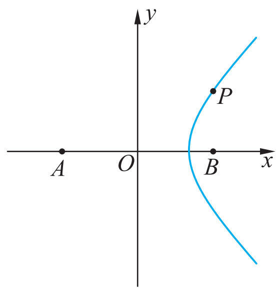


图 3-28

解　设爆炸点为 P，由已知得

$$|PA|-|PB|=340\times4=1\ 360\ (\text{m}).$$

因为 $|AB|=2\ \text{km}=2\ 000\ \text{m}>1\ 360\ \text{m}$，又 $|PA|>|PB|$，所以点 P 在以 A，B 为焦点的双曲线靠近 B 处的那一支上.

如图 3-28，建立平面直角坐标系 xOy，使 x 轴经过 A，B 两点，原点 O 是线段 AB 的中点.

由　$2a=1\ 360$，$2c=2\ 000$，得

$$a=680，c=1\ 000，$$

$$b^2=c^2-a^2=537\ 600.$$

因此，点 P 所在曲线是双曲线，它的方程是

$$\frac{x^2}{462\ 400}-\frac{y^2}{537\ 600}=1\ (x>0).$$

练　习

1. 求满足下列条件的双曲线的标准方程：

　(1) $a=3$，$b=4$，焦点在 x 轴上；

　(2) 焦点为 $(0,-10)$，$(0,10)$，双曲线上的点到两个焦点距离之差的绝对值是 16；

　(3) 焦点为 $(0,-5)$，$(0,5)$，经过点 $\left(2,\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. 证明：椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 与双曲线 $x^2-15y^2=15$ 有相同的焦点.

3.2　双曲线的简单性质

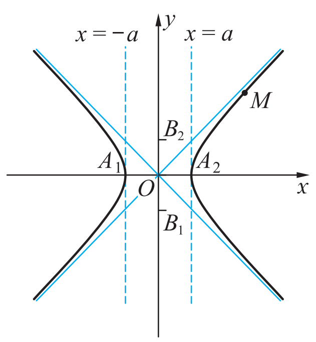


图 3-29

仿照椭圆性质的讨论方法，根据双曲线的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 和图像（图 3-29），我们来研究双曲线的简单性质.

1. 对称性

由图 3-29 可见，双曲线是以 x 轴和 y 轴为对称轴的轴对称图形，也是以原点为对称中心的中心对称图形，这个对称中心称为**双曲**

线的中心.

2. 范围

由图 3-29 可见，双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$都在两条平行直线 $x=-a$ 和 $x=a$ 的两侧，因此双曲线上点的横坐标满足 $x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$.

3. 顶点

我们把双曲线与它的对称轴的交点 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$叫作**双曲线的顶点**. 显然顶点是双曲线两支之间距离最近的点. 两个顶点间的线段 A_1A_2 叫作双曲线的**实轴**，它的长度等于 $2a$.

设 $B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$为 y 轴上的两个点，我们把线段 B_1B_2 叫作双曲线的**虚轴**，它的长度等于 $2b$.

a 叫作双曲线的**实半轴长**，b 叫作双曲线的**虚半轴长**.

4. 离心率

我们把$\dfrac{c}{a}=e$ 叫作双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$的离心率，因为 $c>a>0$，所以 $e=\dfrac{c}{a}>1$.

$\dfrac{b}{a}$决定双曲线的开口大小，$\dfrac{b}{a}$越大，双曲线的开口就越大. 因为 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{\left(\dfrac{c}{a}\right)^2-1}=\sqrt{e^2-1}$，所以$\dfrac{b}{a}$越大，$e$ 也越大，从而离心率 e 可以用来表示双曲线开口的程度.

*5. 渐近线

设 $M(x,y)$是双曲线在第一象限内的点，则

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ (x>a). \qquad ①$$

因为　$x^2-a^2<x^2$，所以

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}<\frac{b}{a}\sqrt{x^2}=\frac{b}{a}x,$$

即

$$y<\frac{b}{a}x.$$

所以，双曲线在第一象限内的点都在直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 的下方.

如图 3-30，设 $M(x,y)$，$N(x,y_1)$是第一象限内两个具有相同横坐标的点，且点 M 在双曲线上，点 N 在直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上，则根据①得

$$|MN|=y_1-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\quad (x>a).$$

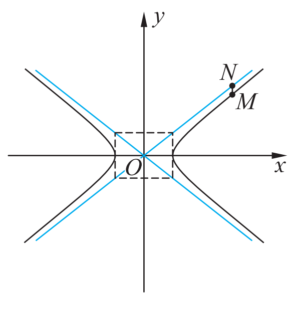
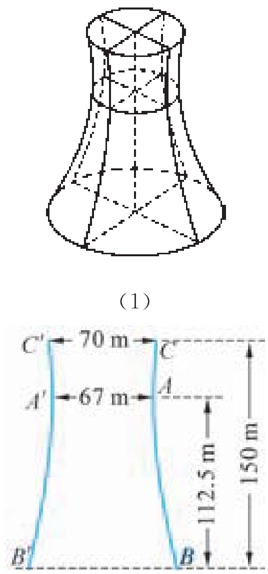


图 3-30

这样，当 $x+\sqrt{x^2-a^2}$ 随着 x 的增大而增大时，$\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$ 随着 x 的增大而减小，从而 M，N 两点间的距离 $|MN|$ 随着 x 的增大而减小，且当 x 无限增大时，$|MN|$ 无限接近于 0，即双曲线在第一象限内与直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 越来越近.

由双曲线的对称性可知，当双曲线的两支在向外无限延伸时，双曲线与两条直线 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 和 $y=\dfrac{b}{a}x$ 无限逼近，但永远不会与这两条直线相交.

所以，我们把直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 和 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 叫作双曲线的**渐近线**.



(1)　　(2)

图 3-31

例 3　如图 3-31(1)，火力发电厂的冷却塔的外形是由双曲线绕其虚轴所在直线旋转所得到的曲面. 已知塔的总高度为 150 m，塔顶直径为 70 m，塔的最小直径(喉部直径)为 67 m，喉部标高 112.5 m. 求双曲线的标准方程.

解　如图 3-31(2)是冷却塔的轴截面，为了要得到双曲线的标准方程，以最小直径处所在直线为 x 轴，直径的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系(图 3-32)，则点 A 坐标为(33.5，0).

设双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0),$$

则 $a=33.5$.

由已知可得点 C 的坐标为(35，37.5)，代入双曲线方程有

$$\frac{35^2}{33.5^2}-\frac{37.5^2}{b^2}=1,$$

所以

$$b\approx 123.9.$$

所求双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{33.5^2}-\frac{y^2}{123.9^2}=1.$$

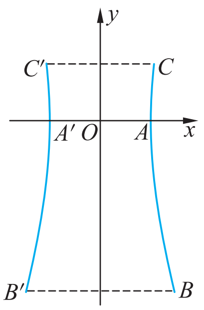


图 3-32

练　习

1. 求下列双曲线的实轴和虚轴的长、焦距和离心率：

　(1) $x^2-y^2=-4$；　　(2) $9x^2-y^2=81$；

　(3) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$；　　(4) $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{9}=1$.

2. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 与双曲线 $-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$，它们的离心率 e_1，e_2 是否满足等式 $e_1^{-2}+e_2^{-2}=1$?

习 题 3—3

A 组

1. 求下列双曲线的焦点坐标：

(1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$；　(2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{20}=1$；

(3) $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=-1$；　(4) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

2. 已知两定点 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$，曲线上的点 P 到 F_1，F_2 的距离之差的绝对值为 6. 求曲线的方程，并画出草图.

3. 已知两定点 $F_1(0,-5)$，$F_2(0,5)$，曲线上的点 P 到 F_1，F_2 的距离之差的绝对值为 6. 求曲线的方程，并画出草图.

4. 求过点 $(3,-4\sqrt{2})$，$\left(\frac{9}{4},5\right)$ 的双曲线的标准方程.

5. 在直角坐标系中画出下列双曲线的草图，并求实轴和虚轴的长、焦距、离心率：

(1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$；　(2) $5x^2-20y^2=100$；

(3) $x^2-y^2=1$；　(4) $16x^2-9y^2=-144$.

6. 求以椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 短轴的两个顶点为焦点，且过点 $A(4,-5)$ 的双曲线的标准方程.

7. 在相距 1 400 m 的 A，B 两个观察哨所测得炮弹爆炸声的时差为 3 s，已知当时声音的速度为 340 m/s，求炮弹爆炸点所在曲线的方程.

B 组

若双曲线 $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{m}=1$ 的离心率 $e\in(1,2)$，求 m 的取值范围.

§4 曲线与方程

4.1 曲线与方程

问题提出

在解析几何中，我们学习了直线、圆、椭圆、抛物线、双曲线等一些特殊曲线，通过坐标法研究了它们的方程，通过方程探索了这些曲线的一些特性. 一般地，曲线与方程有一种什么关系呢？

分析理解

我们知道，平面直角坐标系中坐标满足二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0）的点 (x,y) 在一条直线 l 上；而这条直线 l 上每一点的坐标 (x,y) 都满足二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0）.

坐标满足方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ (r>0)$ 的点 (x,y) 都在以 (a,b) 为圆心、r 为半径的圆上；而这个圆上每一点的坐标 (x,y) 都满足方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ (r>0)$.

坐标满足方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的点 (x,y) 都在一个椭圆上；而这个椭圆上每一点的坐标 (x,y) 都满足方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

这是平面直角坐标系中直线、圆、椭圆与其对应的方程之间的关系.

抽象概括

一般地，在平面直角坐标系中，如果某曲线 C（看作满足某种条件的点的集合或轨迹）上的点与一个二元方程的实数解建立了如下的关系：

(1) 曲线上点的坐标都是这个方程的解；

(2) 以这个方程的解为坐标的点都在曲线上，

那么，这条曲线叫作**方程的曲线**，这个方程叫作**曲线的方程**.

例 1　证明圆心为 $M(3,4)$，半径等于 5 的圆的方程是 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$，并判断点 $O(0,0)$，$A(-1,0)$，$B(1,2)$ 是否在这个圆上.

证明　首先，证明圆心为 $M(3,4)$，半径等于 5 的圆的方程是 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

一方面，设 $P(x_0,y_0)$ 是已知圆上任意一点，由于点 P 到圆心 M 的距离等于 5，所以有

$$\sqrt{(x_0-3)^2+(y_0-4)^2}=5,$$

即

$$(x_0-3)^2+(y_0-4)^2=25.$$

这说明圆上任一点的坐标 (x_0,y_0) 都是方程 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ 的一组解.

另一方面，设数对 (x_1,y_1) 是方程 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ 的任意一组解，那么就有

$$(x_1-3)^2+(y_1-4)^2=25.$$

两边开平方取算术根，得

$$\sqrt{(x_1-3)^2+(y_1-4)^2}=5.$$

这说明 $P(x_1,y_1)$ 是以 $M(3,4)$ 为圆心，半径等于 5 的圆上的一点.

所以 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ 是圆心为点 $M(3,4)$，半径等于 5 的圆的方程.

将点 $O(0,0)$ 的坐标代入方程 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$，显然，左右两边的值相等，这说明数对 $(0,0)$ 是方程的解，所以点 O 在这个圆上；

因为 $(-1-3)^2+(0-4)^2=32>25$，这表明 $(-1,0)$ 不是方程 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ 的解，所以点 $A(-1,0)$ 不在这个圆上，它在圆外；

同理，点 $B(1,2)$ 也不在这个圆上，它在圆内.

思考交流

到两坐标轴距离相等的点满足的方程是 $x-y=0$ 吗？为什么？

练 习

1. 用曲线与方程的概念说一说抛物线、双曲线与其标准方程的关系.
2. 点 $A(1,3)$,$B(-1,-1)$,$C(2,2)$是否在方程 $y=x^2+2x$ 的曲线上?
3. 已知两点 $A(-1,0)$,$B(1,2)$,求到 A,B 两点距离相等的点 P 满足的方程.

4.2 圆锥曲线的共同特征

实例分析

例 2 曲线上的点 $M(x,y)$到定点 $F(2,0)$的距离和它到定直线 l:$x=8$ 的距离的比是常数$\frac{1}{2}$.求曲线方程.

解 设 d 是点 M 到直线 l 的距离,根据题意,曲线上的点 M 满足:

$$\frac{|MF|}{d}=\frac{1}{2}.$$

由此得

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{|8-x|}=\frac{1}{2},$$

即有

$$2\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x-8|.$$

将上式两边平方,并化简得

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

这是椭圆的标准方程,即点 M 所在的曲线是长轴、短轴的长分别为 8 和 $4\sqrt{3}$的椭圆.

由此,我们看到,椭圆也是到定点的距离与到定直线的距离之比为常数的点所成的曲线.这样就与抛物线有了类似的特征.

思考交流

曲线上的点 $M(x,y)$到定点 $F(5,0)$的距离和它到定直线 l:$x=\frac{16}{5}$的距离的比是常数$\frac{5}{4}$.

(1) 求曲线方程；

(2) 指出与例 2 的相同处和不同处，与同学交流.

抽象概括

通过上面的研究和进一步的思考，可以得到圆锥曲线的共同特征：圆锥曲线上的点到一个定点的距离与它到一条定直线的距离之比为定值 e. 当 $0<e<1$ 时，圆锥曲线是椭圆；当 $e>1$ 时，圆锥曲线是双曲线；当 $e=1$ 时，圆锥曲线是抛物线.

练　习

1. 曲线上的点 $M(x,y)$ 到定点 $F(2,0)$ 的距离和它到定直线 $l: x=8$ 的距离的比是常数 2. 求曲线方程.

2. 椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一点 P 到一个焦点 $F_1(-3,0)$ 的距离等于 3. 求它到直线 $x=-\dfrac{25}{3}$ 的距离.

4.3　直线与圆锥曲线的交点

实例分析

例 3　给定椭圆方程 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$，斜率为 1 的直线过其焦点 $F_2(1,0)$，直线与椭圆相交于 A,B 两点，求 A 与 B 的坐标.

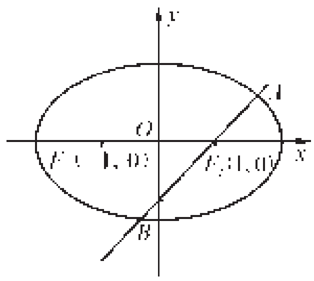


图 3-33

解　如图 3-33. 根据题意，直线的斜率为 1，且过 $F_2(1,0)$，故直线方程为

$$y=x-1. \qquad ①$$

将①代入椭圆方程，有

$$\frac{x^2}{5}+\frac{(x-1)^2}{4}=1,$$

化简，得

$$9x^2-10x-15=0.$$

解得

$$x_1=\frac{5+4\sqrt{10}}{9},\ x_2=\frac{5-4\sqrt{10}}{9}.$$

将 x_1,x_2 代入方程①得

$$y_1=\frac{4\sqrt{10}-4}{9},\ y_2=\frac{-4\sqrt{10}-4}{9}.$$

所以 A,B 的坐标分别为

$$\left(\frac{5+4\sqrt{10}}{9},\frac{4\sqrt{10}-4}{9}\right),\ \left(\frac{5-4\sqrt{10}}{9},\frac{-4\sqrt{10}-4}{9}\right).$$

例 4 若直线 $l:y=(a+1)x-1$ 与曲线 $C:y^2=ax$ 恰好有一个公共点，试求实数 a 的取值集合.

解 因为直线 l 与曲线 C 恰好有一个公共点，所以方程组

$$\begin{cases}y=(a+1)x-1,\\ y^2=ax\end{cases}$$

有唯一一组实数解.

消去 y，得

$$[(a+1)x-1]^2=ax,$$

变形，得

$$(a+1)^2x^2-(3a+2)x+1=0. \qquad ②$$

由题意，要求含有参数 a 的方程②有唯一解.

(1) 当 $a+1=0$，即 $a=-1$ 时，方程②是关于 x 的一元一次方程，它有解 $x=-1$，这时，原方程组有唯一解

$$\begin{cases}x=-1,\\ y=-1.\end{cases}$$

(2) 当 $a+1\neq0$，即 $a\neq-1$ 时，方程②是关于 x 的一元二次方程. 判别式 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数解.

令 $\Delta=(3a+2)^2-4(a+1)^2=a(5a+4)=0$，

解得 $a=0$ 或 $a=-\frac{4}{5}$.

当 $a=0$ 时，原方程组有唯一解 $\begin{cases}x=1,\\ y=0;\end{cases}$

当 $a=-\frac{4}{5}$ 时，原方程组有唯一解 $\begin{cases}x=-5,\\ y=-2.\end{cases}$

故所求实数 a 的取值集合是 $\left\{-1,-\frac{4}{5},0\right\}$.

思考交流

分析参数 a 的几何意义. 例如 $a=-1$，$a=0$ 等.

抽象概括

在直角坐标系 xOy 中，给定两条曲线 C_1，C_2，它们由如下方程确定：

$$C_1: f(x,y)=0, \quad C_2: g(x,y)=0.$$

求曲线 C_1 和 C_2 的交点，即要求出这些交点的坐标.

设 $M(x_0,y_0)$ 是曲线 C_1 和 C_2 的一个交点. 因为点 M 在曲线 C_1 上，所以它的坐标满足方程 $f(x,y)=0$；因为点 M 在曲线 C_2 上，所以它的坐标也满足方程 $g(x,y)=0$. 从而，曲线 C_1 和 C_2 的任意一个交点的坐标都满足方程组

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases}$$

反过来，该方程组的任何一组实数解都对应着这两条曲线某一个交点的坐标.

练　习

1. 点 $A(-1,-1)$，$B(1,-1)$，$C(2,3)$ 是否在方程 $x^2+xy+y^2=1$ 的曲线上？
2. 求直线 $x-y=0$ 被曲线 $2x^2+y^2=2$ 截得的弦长.

习　题 3—4

A　组

1. 已知点 M 到 x 轴、y 轴的距离之积等于 1. 求点 M 满足的方程.
2. 已知点 P 到点 $A(-4,0)$ 与点 $B(4,0)$ 的距离的平方和等于 64. 求点 P 满足的方程.
3. 求直线 $3x-2y=0$ 和椭圆 $4x^2+y^2=25$ 的交点.
4. 已知圆心为 C 的圆经过定点 $F(0,2)$，且与直线 $y+2=0$ 相切. 求圆心 C 满足的方程.
5. 斜率为 1 的直线经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，与抛物线相交于 A，B 两点. 求线段 AB 的长.
6. 过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 焦点的一条直线和此抛物线相交，两交点的纵坐标分别为 y_1，y_2. 求证：$y_1y_2=-p^2$.
7. 直线 $x-2y+2=0$ 与椭圆 $x^2+4y^2=4$ 相交于 A，B 两点. 求 A，B 两点的距离.
8. 过点 $P(0,2)$ 的直线与抛物线 $y=x^2+1$ 有几个公共点？

B 组

1. 如果直线 $y=kx-1$ 与双曲线 $x^2-y^2=4$ 没有公共点，求 k 的取值范围.
2. 已知点 $A(0,-1)$，在抛物线 $y=2x^2+1$ 上任取一点 B，求线段 AB 的中点满足的方程.
3. 两条曲线的方程是 $f_1(x,y)=0$ 和 $f_2(x,y)=0$，它们的交点是 $P(x_0,y_0)$. 求证：方程 $f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$ 的曲线也经过点 P.（这里 λ 是任意实数）
4. 在直角坐标系中，有一条长度为 2 的线段 AB，点 A 在 y 轴上运动，点 B 在 x 轴上运动，且保持线段长度不变，线段 AB 上的点 P 分线段 AB 所成的比为 $1:2$. 求点 P 满足的方程.

阅读材料1

圆锥曲线的光学性质

在日常生活中我们经常使用手电筒，手电筒发出的光是一束平行光线，探照灯也如此．它们的工作原理是什么呢？实际上它们用到了圆锥曲线的光学性质．

探照灯反射镜是一个抛物面，如图3-34，它的轴截面是抛物线的一部分，如图3-35，光源位于抛物线的焦点处．经过抛物面反射，形成一束平行光线．于是，光源为一个灯泡的探照灯光是一束光柱．反过来，一束平行光线经过抛物面反射，就会聚在焦点上，太阳灶就是利用这个原理制成的．

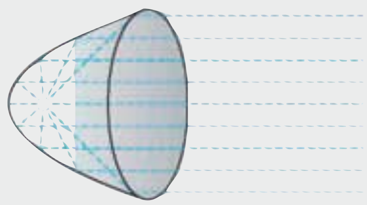


图3-34

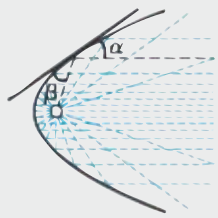


图3-35

如果将反射镜做成椭圆面(用一个椭圆绕它的长轴旋转而成的曲面)，光源放在一个焦点处，则所有的光线经过镜面反射后都聚集在另一个焦点处．

圆锥曲线的性质还有很多应用，有兴趣的同学可以阅读更多的书籍或到网上浏览．

阅读材料2

圆与椭圆

一、均匀压缩

均匀压缩是物理学中一种常见的现象．如图3-36所示，将给定的一个正方形$ABCD$均匀压缩成一个长方形$A_1B_1C_1D_1$，点A,B,C,D分别变成点A_1,B_1,C_1,D_1，其中A_1D_1的长度为AD长度的一半．

若点E为AB边的中点，点F为BC边的中点，在这个均匀压缩下，点E和点F分别变为A_1B_1边的中点E_1和B_1C_1边的中点F_1．

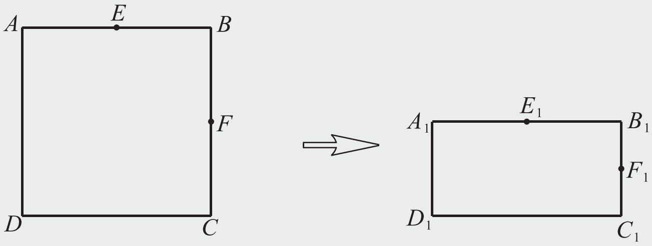


图 3-36

二、均匀压缩的数学表示

均匀压缩图形是一个图形变化问题.我们常常通过坐标系来寻求图形变化的数学表示.

在图 3-36 中分别对这两个图形建立直角坐标系，如图3-37所示，点 A，B，C，D 的坐标分别为(0,1)，(1,1)，(1,0)，(0,0)，根据上述均匀压缩的要求，在图 3-38 中，点 A_1，B_1，C_1，D_1 的坐标分别为$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$，(1,0)，(0,0).同样地，在图 3-37 中，坐标为$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$的点 E 和坐标为$\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$的点 F 分别变成了图 3-38 中坐标为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$的点 E_1 和坐标为$\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$的点 F_1.设 P 为正方形 $ABCD$ 中的任意一个点，在均匀压缩下变成点 P_1，不妨设点 P 的坐标为(x,y)，点 P_1 的坐标为(x_1,y_1)，不难看出，点 P_1 的横坐标和点 P 的横坐标相同，即 $x_1=x$，点 P_1 的纵坐标是点 P 的纵坐标的一半，即 $y_1=\dfrac{1}{2}y$.

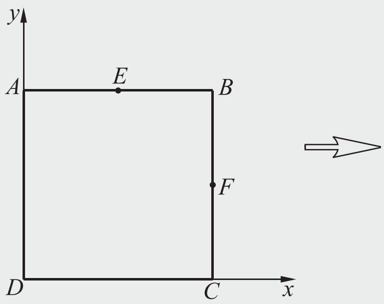


图 3-37

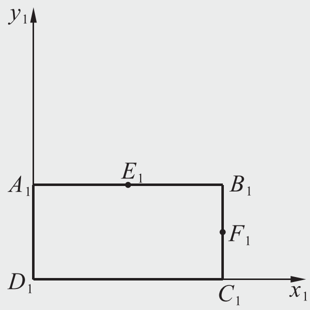


图 3-38

三、圆的压缩

在上述均匀压缩下，其他的几何图形会有什么变化呢？下面我们来考虑圆.如图 3-39 所示，给定单位圆 O.由上述讨论可知，圆上的点 $Q(0,1)$和 $W\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$分别

压缩成点 Q_1 和点 W_1，点 Q_1 在图 3-40 中的坐标为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，点 W_1 在图 3-40 中的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

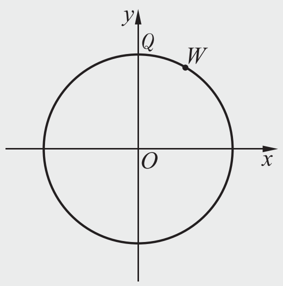


图 3-39

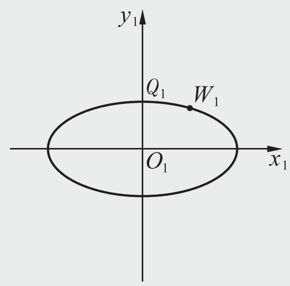


图 3-40

一般地，对于满足 $x^2+y^2=1$ 的任意一点 P，不难看出，经过压缩后所得的点 P_1 的横坐标和点 P 的横坐标相同，即 $x_1=x$，点 P_1 的纵坐标是点 P 的纵坐标的一半，即 $y_1=\dfrac{1}{2}y$. 又因为 $x=x_1$，$y=2y_1$ 满足 $x^2+y^2=1$，所以 $x_1^2+(2y_1)^2=1$. 这说明在图 3-40 中，点 P_1 满足方程

$$x_1^2+\frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1.$$

这是一个长半轴长为 1，短半轴长为 $\dfrac{1}{2}$ 的椭圆方程.

在上述均匀压缩下，单位圆 $x^2+y^2=1$ 变成了一个长半轴长为 1，短半轴长为 $\dfrac{1}{2}$ 的椭圆.

四、问题与思考

1. 如果我们在均匀压缩中，要使得 A_1D_1 的长度为 AD 长度的 $\dfrac{1}{3}$，正方形 $ABCD$ 会变成什么图形？在这种均匀压缩中，圆又会变成什么图形？

2. 如果把正方形 $ABCD$ 均匀地拉伸，使得 A_1D_1 的长度为 AD 长度的 2 倍，试讨论正方形会变成什么图形，在这种均匀拉伸中，圆又会变成什么图形？

3. 如果我们把竖直方向的均匀压缩改为水平方向的均匀压缩，试对问题 1 进行类似的讨论.

4. 如果我们在竖直方向和水平方向同时做均匀压缩，例如，在竖直方向压缩为原来的 $\dfrac{1}{2}$，在水平方向压缩为原来的 $\dfrac{1}{3}$，在上述条件下，试对问题 1 作类似的讨论.

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 了解椭圆的实际背景，掌握椭圆的定义、标准方程和简单几何性质.

2. 了解抛物线的实际背景，掌握抛物线的定义、标准方程和简单几何性质.

3. 掌握双曲线的定义、标准方程和简单几何性质.

4. 能根据具体条件利用某种工具画椭圆、抛物线和双曲线的图像，并了解圆锥曲线在实际问题中的简单应用.

5. 了解曲线和方程的概念，会求简单曲线的方程.

6. 进一步认识坐标法.

二、复习建议

1. 这一章导出了相对于坐标轴位置不同的各种形式的椭圆、双曲线、抛物线的标准方程. 其中最重要的是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0);$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0, b>0);$$

$$y^2=2px \quad (p>0).$$

由这三个方程可以演变出其余的方程. 学习时要抓住重点，熟悉并掌握这三种方程.

2. 认识圆、椭圆、抛物线、双曲线的统一性：

(1) 从方程形式看，在直角坐标系中，这几种曲线的方程都是二元二次的，因而统称它们为二次曲线.

(2) 除圆外，另外三种曲线都可以看作“到定点和定直线的距离比是常数 e 的点的轨迹”. 这个定点是焦点，定直线是准线. 只是由于离心率 e 不同，而分为椭圆、抛物线、双曲线三种曲线.

(3) 从天体运行轨道看：天体运行的轨道是这四种曲线. 例如，人造卫星、行星、彗星等由于运动的速度不同，它们的轨道是圆、椭

圆、抛物线或双曲线.

（4）四种曲线又可以看作不同的平面截圆锥所得到的截线，因此，它们又统称圆锥曲线.

3. 曲线和方程的概念是一个重要的概念，要真正理解和使用好这个概念.

4. 学习本章的目的，不仅是为了掌握圆锥曲线的方程和性质.还要通过对椭圆、抛物线、双曲线的研究，进一步学习如何用代数方法（坐标法）研究几何问题，即掌握坐标法.

5. 圆锥曲线可以看作点在平面内按一定规律运动形成的轨迹，因此本章处处充满运动变化的思想.学习这一章，要学会用运动变化的观点分析问题.

6. 坐标法将数与形紧密结合.解决本章问题时既要运用图形的直观，观察分析图形的几何性质，又要善于把点、曲线用坐标、方程表示，读出式或方程的几何意义，将数形充分结合.

7. 圆锥曲线在生产和日常生活中有许多重要的应用，要了解实际问题转化为数学问题的过程，学会用数学解决一些实际问题.

复习题三

A 组

1. 求下列各椭圆的长轴和短轴的长、离心率、焦点坐标、顶点坐标，并画出草图：

(1) $x^2+4y^2=16$；　　(2) $9x^2+y^2=81$.

2. 根据下列条件判断方程$\frac{x^2}{5-m}+\frac{y^2}{2-m}=1$表示什么曲线：

(1) $m<2$；　　(2) $2<m<5$.

3. 当 α 从 0 到 π 变化时，曲线 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 怎样变化？

4. 一个圆经过点 $F(5,0)$，且和直线 $x+5=0$ 相切. 求圆心满足的方程，并画出图形.

5. 求顶点在原点，对称轴是坐标轴，且焦点在直线 $3x-5y-36=0$ 上的抛物线方程.

6. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作垂直于 x 轴的直线，交抛物线于 A，B 两点. 求以 F 为圆心、AB 为直径的圆的方程.

7. 设 F_1，F_2 为双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在双曲线上，且满足$\angle F_1PF_2=90°$. 求$\triangle F_1PF_2$ 的面积.

8. 已知椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，求以点 $P(2,-1)$为中点的弦所在的直线方程.

9. 设圆过双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的一个顶点和一个焦点，圆心在双曲线上. 求圆心到双曲线中心的距离.

B 组

1. 若双曲线$\frac{x^2}{9k^2}-\frac{y^2}{4k^2}=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 没有公共点，求实数 k 的取值范围.

2. 已知双曲线与椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 共焦点，它们的离心率之和为$\frac{14}{5}$. 求双曲线方程.

3. 已知双曲线$\frac{(x-8)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，有一椭圆，它的右焦点和右顶点分别是双曲线的左焦点和左顶点，且椭圆焦点到相应准线的距离 $p=2.25$. 求椭圆方程.

附录 1

部分数学专业词汇中英文对照表

中文	英文
命题	proposition
充分条件	sufficient condition
必要条件	necessary condition
充分必要条件	sufficient and necessary condition
量词	quantifier
存在量词	existential quantifier
全称量词	universal quantifier
逆命题	converse proposition
否命题	negative proposition
逆否命题	converse-negative proposition
椭圆	ellipse
抛物线	parabola
双曲线	hyperbola
立体几何	solid geometry
向量	vector
直角坐标系	rectangular coordinates system
坐标	coordinate
数量积	interior product
正交分解	orthogonal decomposition
法向量	normal vector
方向向量	directional vector

附录 2

信息检索网址导引

基础教育教材网

http://www.100875.com.cn/

简介:基础教育教材网是由北京师范大学出版社创建的一个综合性网站,内容主要涉及新课程标准改革研究、课题研究、教学研究、评价研究和教学资源等几个方面.网站在提供教学实例、教学课件的同时,也给教师和学生提供了交流互动的宽松平台.

后　　记

本套教材是按照教育部于2003年4月颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的．我们在编写过程中强调了数学课程的基础性和整体性，突出了数学的思想性和应用性，尊重学生的认知特点，创造多层次的学习活动，为不同的学生提供不同的发展平台，注意发挥数学的人文教育价值，好学好用．

教材的建设是长期、艰苦的任务，每一位教师在教学实践中要自主地开发资源，创造性地使用教材．我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作，对教材的逐步完善提供有力的支持，促进基础教育课程改革的深入发展．

本套教材的编委会组成如下(按姓氏笔画排序)：

王希平、王尚志、王建波、任志瑜、刘美仑、吕世虎、吕建生、李亚玲、李延林、汪香志、严士健、张丹、张饴慈、张思明、姚芳、赵大悌、徐勇、戴佳珉．

参加本册教材编写的还有(按姓氏笔画排序)：

马芳华、刘卫锋、刘亚莉、安振平、岳建良、赵冬歌、赵青、夏炎．

由于时间仓促，教材中的错误在所难免，恳请广大使用者批评指正．

北京师范大学出版社