经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

# 数学（选修3-3）

## 球面上的几何

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志
副 主 编　张饴慈　李延林　张思明
本册主编　贺龙光　王建明
编写人员（按姓氏笔画排序）
王尚志　王建明　张饴慈　贺龙光

北京师范大学出版社
·北京·

基础教育教材网址 http://www.100875.com.cn

营销中心电话　010－58802783
服务中心电话　010－58802795
邮购科电话　010－58808083
传　　真　010－58802838
学科编辑电话　010－58802811　58802790
电子邮箱　shuxue3@bnupg.com
通信地址　北京师范大学出版社基础教育分社（100875）

**绿色印刷　保护环境　爱护健康**

亲爱的同学们：

你们手中的这本教科书采用绿色印刷标准印制，在它的封底印有“绿色印刷产品”标志．从2013年秋季学期起，北京地区出版并使用的义务教育阶段中小学教科书全部采用绿色印刷．

按照国家环境标准（HJ2503－2011）《环境标志产品技术要求 印刷 第一部分：平版印刷》，绿色印刷选用环保型纸张、油墨、胶水等原辅材料，生产过程注重节能减排，印刷产品符合人体健康要求．

让我们携起手来，支持绿色印刷，选择绿色印刷产品，共同关爱环境，一起健康成长！

北京市绿色印刷工程

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnupg.com
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：890mm×1240mm　1/16
印　　张：4.5
字　　数：85 千字
版　　次：2007 年 5 月第 2 版
印　　次：2019 年 7 月第 25 次印刷
定　　价：3.90 元
ISBN 978-7-303-07672-7

责任编辑：邢自兴　焦继红　　装帧设计：王　蕊
责任校对：陈　民　　责任印制：孙文凯　窦春香

**版权所有 侵权必究**

反盗版、侵权举报电话：010－58800697
北京读者服务部电话：010－58808104
外埠邮购电话：010－58808083
如发现印装质量问题，影响阅读，请与印制管理部联系调换
印制管理部电话：010－58800825　010－58808061

# 前　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法：“授之以鱼，不如授之以渔”，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高“自学能力”最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26 册书组成：必修教材有5 册；选修系列1 有2 册，选修系列2 有3 册，它们体现了发展的基本方向；选修系列3 有6 册，选修系列4 有10 册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为 A，B 两组；还有一类是复习题，分为 A，B，C 三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程．另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”．

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分．

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作．

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”．它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想．教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解．在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解．教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考．

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值．

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦．

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811．

# 目　录

# 第一章　球面的基本性质

人类生活在地球上，地球的表面非常接近于一个球面. 在科学技术不太发达的时代，人类的活动范围非常有限. 很自然地，人们把大地理解成一个平面，在测量土地、计算面积时用平面几何知识就可以了. 当航海技术发展起来以后，人们逐渐地了解到大地不是一个平面，仍然使用平面几何的知识来计算航海路线将会产生很大的误差. 因此，人们需要了解球面几何图形的性质，即球面几何的知识来解决这个问题. 除了航海，在大地测量、天体观测、航空以及卫星定位等各方面都需要利用球面几何的知识. 与平面一样，球面上也有很多有趣的几何问题，本章将介绍球面的一些基本性质.

**说　明**

本专题课程并不要求在学过“立体几何初步”之后开设，如果没有学习过“立体几何初步”而开设了本专题，可补充附录 1 的内容.

## §1　直线、平面与球面的位置关系

我们生活的地球基本上可以看成是一个半径为 $6.4\times10^3$ km 的球体. 从北京到与北京同一纬度的嘉峪关，怎么飞行最近呢？是不是沿着 $40^\circ$ 纬线飞行呢？

空间中到一个定点的距离等于常数的所有点的集合，称为一个**球面**. 这个定点叫作球面的**球心**，以球心和球面上任意一点为端点的线段叫作球面的**半径**. 显然，半径的长度就是已知常数. 为了简便，也常常把半径的长度叫作半径. 半径等于 1 的球面，称为**单位球面**.

**信息技术建议**

通过计算机信息技术可以很方便地画出球面的直观图，具体步骤见 §1 中的“信息技术应用”栏目.

在平面几何的学习中，我们知道直线与圆有三种位置关系：相离、相切和相交（如图 1-1）.

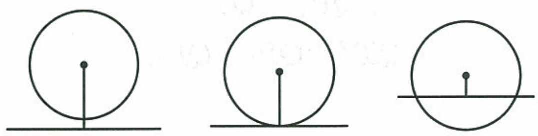


图 1-1

## 问题提出

直线与球面有哪些位置关系？平面与球面有哪些位置关系？

设 $S$ 是以 $O$ 为球心，半径为 $R$ 的球面，$l$ 是一条直线. 作 $OP\perp l$，垂足为 $P$.

(1) 当 $OP>R$ 时，直线 $l$ 与球面 $S$ 相离(如图 1-2(a))；

(2) 当 $OP=R$ 时，直线 $l$ 与球面 $S$ 相切(如图 1-2(b))；

(3) 当 $OP<R$ 时，直线 $l$ 与球面 $S$ 相交(如图 1-2(c)).

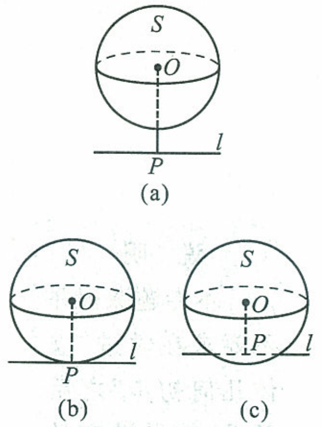


图 1-2

## 思考交流

已知球面 $S$ 和空间直线 $l$，$P$ 为球面上任意一点，如果 $P$ 绕直线 $l$ 旋转任意角度后还在球面 $S$ 上，那么直线 $l$ 与球面 $S$ 有什么位置关系？

如果直线 $l$ 与球面 $S$ 相切，它们有唯一公共点，称为**切点**.

直线与球面相切有以下性质：

过球面外一点 $P$ 作球面的切线，所有的切线段长度相等，它们构成一个圆锥面(如图 1-3 所示).

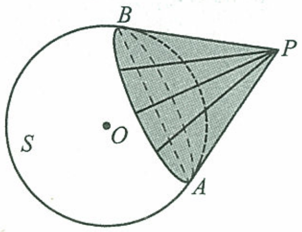


图 1-3

如果直线与球面相交，则它们交于两点. 当直线经过球心时，这两个交点称为**对径点**.

关于直线与球面相交的关系，有一个非常有趣的定理——**球幂定理**.

为了证明球幂定理，先来看一个平面几何中类似的定理——**圆幂定理**.

**定理 1.1(圆幂定理)　从圆外一点 $Q$ 向⊙$O$ 引任一割线交⊙$O$ 于两点 $P_1$，$P_2$，则线段 $QP_1$ 和 $QP_2$ 的长度乘积等于从点 $Q$ 引⊙$O$ 的切线 $QT$ 长度的平方，其中 $T$ 为切点.**

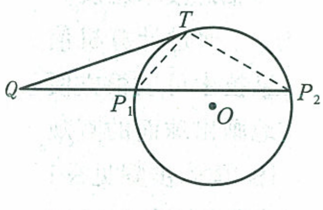


图 1-4

**证明**　如图 1-4，连接 $TP_1$ 和 $TP_2$，则$\triangle QTP_1\backsim\triangle QP_2T$，因此，

$$\frac{QT}{QP_1}=\frac{QP_2}{QT}.$$

所以
$$QT^2=QP_1\cdot QP_2.$$

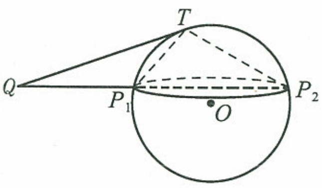


图 1-5

利用圆幂定理，很容易证明球幂定理.

**定理 1.2(球幂定理)**　(如图 1-5)**从球面外一点 $Q$ 向球面引割线，交球面于 $P_1$，$P_2$ 两点，再从 $Q$ 引球面的任一切线，切点为 $T$，则**

$$QT^2=QP_1\cdot QP_2.$$

设 $S$ 是以 $O$ 为球心，半径为 $R$ 的球面，$\alpha$ 是一个平面. 作 $OP\perp\alpha$，$P$ 是垂足(如图 1-6 所示).

(1) 当 $OP>R$ 时，平面 $\alpha$ 与球面 $S$ 相离(如图 1-6(a));

(2) 当 $OP=R$ 时，平面 $\alpha$ 与球面 $S$ 相切(如图 1-6(b));

(3) 当 $OP<R$ 时，平面 $\alpha$ 与球面 $S$ 相交(如图 1-6(c)).

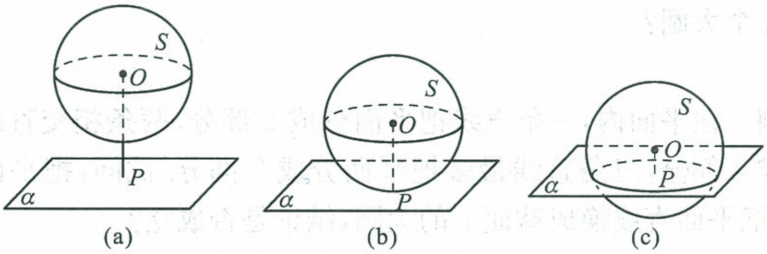


图 1-6

如果平面 $\alpha$ 与球面 $S$ 相切，则它们有唯一的公共点，称为**切点**.

在平面几何中，如果一条直线与一个圆相切，那么圆心到切点的连线与该直线垂直.

类似地，在球面几何中有如下的定理：

**定理 1.3　若平面 $\alpha$ 与球面 $S$ 相切于 $P$ 点，$O$ 是 $S$ 的球心，则 $OP\perp\alpha$.**

如果平面 $\alpha$ 与球面 $S$ 相交，它们有多少公共点？这些公共点构成什么图形？

如图 1-7，设 $P$ 是平面 $\alpha$ 与球面 $S$ 的一个交点，从球心 $O$ 作平面 $\alpha$ 的垂线 $OO'$，垂足为 $O'$. 连接 $OP$ 和 $O'P$，由勾股定理得，

$$O'P=\sqrt{OP^2-OO'^2}.$$

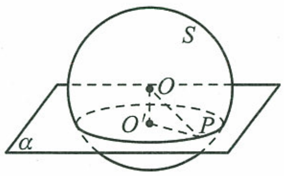


图 1-7

当球面 $S$ 与平面 $\alpha$ 给定后，$OP$，$OO'$ 都是常数，所以 $O'P$ 也是常数，即平面 $\alpha$ 与球面 $S$ 的交线是以 $O'$ 为圆心，半径等于 $\sqrt{R^2-OO'^2}$ 的圆，其中 $R$ 为球面 $S$ 的半径.

## 抽象概括

若平面与球面相交，则它们的交线是一个圆.

显然，如果平面与球面的相对位置不同，它们相交所得圆的位置和大小也不同.

不难看出，当平面过球心时，所得的圆最大，这时圆的半径就是球面的半径. 我们把这种圆叫作球面的**大圆**，其他情形所得的圆叫作

球面的小圆.

### 思考交流

1. 球面上任意两个大圆一定相交吗？相交的话，交于几点？它们是对径点吗？

2. 过球面上不是对径点的任意两点，可以作几个大圆？过对径点有几个大圆？

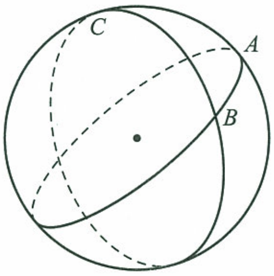



图 1-8

**例**　在平面内，一条直线把平面分成 2 部分，两条相交直线把平面分成 4 部分，三条直线最多把平面分成 7 部分. 试问：把平面换成球面，把平面直线换成球面上的大圆，结论是否成立？

**解**　球面上的一个大圆把球面分成 2 部分；

球面上的 2 个大圆一定相交，它们把球面分成 4 部分；

球面上的 3 个大圆最多可以把球面分成 8 部分(如图 1-8).

### 信息技术应用

**利用几何画板作球面的直观图**

步骤：

1. 打开几何画板，新建画板. 以点 $O$ 为圆心，$OP$ 为半径作 $\odot O$ 表示球面的正视图.

2. 作球面上过两点的大圆：

(1) 在 $\odot O$ 内任意取一点 $A$，$\odot O$ 上取一点 $B$，使得 $A,O,B$ 不共线，根据球面大圆的定义，由 $A,B$ 两点可以确定一个大圆. 球面直观图的关键是用椭圆表示这个大圆(如图 1-9 所示).

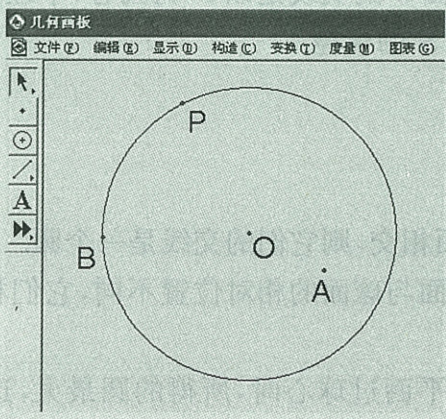



图 1-9

(2) 作过点 $A,B$，以点 $O$ 为中心，$B$ 点为长轴上一个端点的椭圆，表示球面上由 $A,B$ 两点确定的大圆（如图 1-10 所示）.

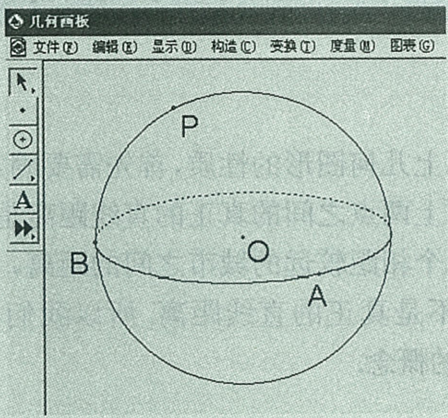



图 1-10

3. 拖动点 $A$ 或 $B$，可以观察不同状态下的球面直观图（如图 1-11 所示）.

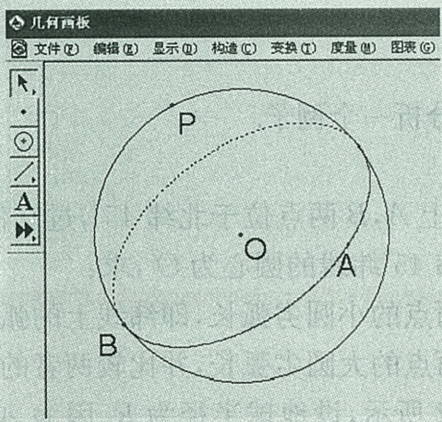



图 1-11

## 练　习

1. 证明：过球面外一定点所作的球面的所有切线构成一个圆锥面，且这个点到所有切点的距离等于常数.
2. 证明：过球面上不是对径点的任意两点，有唯一确定的大圆.

## 习题 1—1

1. 设球面半径为 1，小圆所在平面与球心的距离为 $d(d<1)$，求小圆半圆的弧长.
2. 证明球幂定理.

# §2 球面直线与球面距离

为了研究球面上几何图形的性质，首先需要确定球面上两点之间的距离. 显然，球面上两点之间的真正的直线距离是毫无意义的. 比如在地球上要说明两个相距较远的城市之间的距离，一定是通过地球表面进行测量的，而不是真正的直线距离. 所以我们必须给出“球面直线”和“球面距离”的概念.

> **说 明**
>
> 经线是过地球南北极的大圆的一半，它们以南极和北极为端点. 国际上，以过格林尼治天文台的经线为 0°经线，向东叫东经，向西叫西经. 与赤道平行的平面上的小圆叫作纬线.
>
> 球面上一点的纬度是球心与该点的连线与赤道平面的夹角. 赤道以北叫北纬，赤道以南叫南纬.
>
> 球面上一点的经度是过该点的经线所在平面与过格林尼治天文台的经线所在平面的夹角.

## 问题提出

给定球面上的两点 $A, B$，球面上以这两点为端点的曲线段哪一条最短？

首先，我们来分析一个例子.

**例 1** 设地球上 $A, B$ 两点位于北纬 45°，过它们的经线的交角为 90°，球心为 $O$，北纬 45°纬线的圆心为 $O'$，求：

(1) 过 $A, B$ 两点的小圆劣弧长，即纬线上的弧长；

(2) 过 $A, B$ 两点的大圆劣弧长，并比较两者的结果.

**解** 如图 1-12 所示，设地球半径为 $R$. 因为 $A, B$ 两点位于北纬 45°，所以，$OO'=R\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}R$，$O'A=O'B=\frac{\sqrt{2}}{2}R$. 又因为过 $A, B$ 两点的经线的交角为 90°，所以 $AO'\perp BO'$，即 $\angle AO'B=\frac{\pi}{2}$.

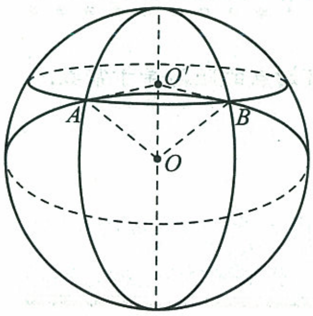


图 1-12

因此，$AB=\sqrt{O'A^2+O'B^2}=R$，即三角形 $AOB$ 为正三角形，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$.

(1) 在小圆中，劣弧$\overset{\frown}{AB}=O'A\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi R$；

(2) 在大圆中，劣弧$\overset{\frown}{AB}=R\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}\pi R$.

所以，$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi R>\frac{1}{3}\pi R$.

**动手实践**

(1) 准备一条足够长的细绳，一枝铅笔和一个皮球.

(2) 给定皮球上两点，画出过这两点的大圆的劣弧，过这两点再另外画一条曲线，分别用细绳丈量，比较它们的长短.

(3) 最后请同学们相互交流.

实际上，对于球面上的任意两点，在数学上可以严格证明过这两点的大圆的劣弧长度是最短的. 应该把大圆上这段劣弧的长度看作是这两点的距离.

在平面几何中，$A$，$B$ 两点之间的距离等于以 $A$，$B$ 为端点的线段的长度. 由上看出，球面上的大圆起了平面上直线的作用. 所以，可以说大圆就是球面上的“直线”.

**定义 2.1**　过球面上两点 $A$，$B$ 的大圆叫作过 $A$，$B$ 两点的球面直线. 过球面上两点 $A$，$B$ 的大圆的劣弧$\overset{\frown}{AB}$叫作连接 $A$，$B$ 两点的线段.

**性质 1　过球面上任意两个非对径点有唯一一条直线；过球面上任意两个非对径点有唯一一条线段.**

**性质 2　球面上任意两条直线都相交.**

**定义 2.2**　球面上两点 $A$，$B$ 的球面距离，是通过 $A$，$B$ 两点的大圆上以 $A$，$B$ 为端点的劣弧的长度，记为 $d(A,B)$.

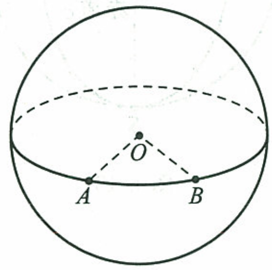


图 1-13

如图 1-13 所示，通过 $A$，$B$ 两点的大圆是在 $A$，$B$ 和球心 $O$ 所确定的平面上，以 $O$ 为圆心，半径等于球面半径 $R$ 的圆. 连接 $OA$，$OB$，则劣弧$\overset{\frown}{AB}$所对的中心角为$\angle AOB$.

我们约定，在球面几何中，角度的单位一律用“弧度”.

因此，得到球面上两点的球面距离公式：

$$d(A,B)=R\cdot\angle AOB.$$

当 $S$ 为单位球面时，$d(A,B)=\angle AOB$.

我们不难看出，球面上两点 $A$，$B$ 与它们的对径点 $A'$，$B'$ 在同一平面上，利用平面三角形全等的性质容易得到 $d(A,B)=d(A',B')$.

**性质 3　球面上两点 $A$，$B$ 的球面距离 $d(A,B)$ 等于它们的对径点 $A'$，$B'$ 的球面距离 $d(A',B')$.**

**例 2**　已知北京天安门位于北纬 39°56′、东经 116°20′，问：天安门到北极和南极的距离分别是多少？（地球半径约等于 $6.4\times10^3$ km）

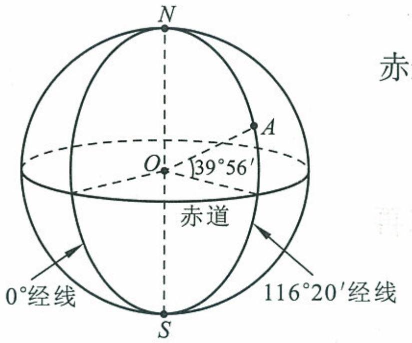


图 1-14

**解**　如图 1-14 所示，设点 $A$ 为天安门所在位置，因为 $NS$ 垂直赤道平面，所以

$$\angle AON = 90° - 39°56' = 50°04' \approx 0.28\pi,$$

$$\angle AOS = 180° - 50°04' = 129°56' \approx 0.72\pi.$$

又已知地球半径约等于 $6.4\times10^3$ km，所以

$$AN \approx 6.4\times10^3\times0.28\pi \approx 5.6\times10^3(\text{km});$$

$$AS \approx 6.4\times10^3\times0.72\pi \approx 1.4\times10^4(\text{km}).$$

即天安门到北极的距离约为 $5.6\times10^3$ km，天安门到南极的距离约为 $1.4\times10^4$ km.

## 思考交流

平面几何中直线与直线之间的位置关系与球面几何中直线与直线之间的位置关系有何区别?

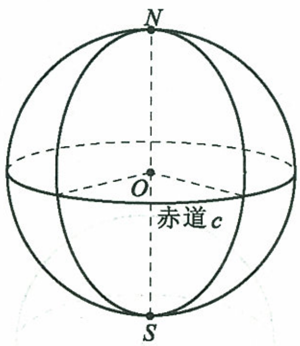


图 1-15

我们把地球近似地看作一个球体，在地球表面上有赤道、南极、北极，我们用 $c$ 表示赤道，$S$ 表示南极，$N$ 表示北极.（如图 1-15）

$S$ 和 $N$ 是一对对径点，连接 $S$ 和 $N$ 得到地球的一条直径 $SN$，$SN$ 与赤道 $c$ 所在平面垂直.

## 抽象概括

一般地，设 $c$ 是球面 $S$ 上的一个大圆，则在球面 $S$ 上存在一对对径点 $P$ 和 $P'$，使得直径 $PP'$ 垂直大圆 $c$ 所在平面. 我们把对径点 $P$ 和 $P'$ 叫作大圆 $c$ 的**极点**.

设 $P$ 是球面 $S$ 上任意一点，$P'$ 是它的对径点，那么存在唯一一个大圆 $c$，使得 $P$ 和 $P'$ 是大圆 $c$ 的极点，我们把大圆 $c$ 叫作点 $P$ 的**极线**.

极点和极线的概念是球面几何中最基本的概念，在后面的学习中经常用到.

## 练 习

1. 证明性质 3.
2. 证明：过球面上 $A$，$B$ 两点的小圆劣弧大于过 $A$，$B$ 两点的大圆劣弧.

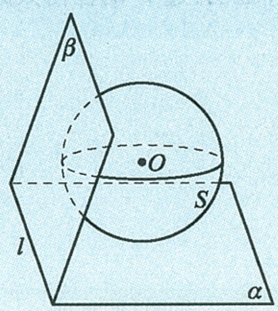
## 习 题 1—2

### A 组

1. 球面上两点之间的距离的最大值是多少？
2. 地球赤道上一点到北极的距离是多少？地球赤道上一点到南极的距离是多少？
3. 证明：在单位球面上，设 $B,C$ 是非对径点，如果 $d(A,B)=\frac{\pi}{2}$，$d(A,C)=\frac{\pi}{2}$，那么 $A$ 是过 $B,C$ 两点的大圆的极点.

### B 组

1. 如图，设 $S$ 是一个单位球面，$l$ 是一条直线，球心 $O$ 到直线 $l$ 的距离为 2. 平面 $\alpha$ 和平面 $\beta$ 过直线 $l$ 且与球面 $S$ 相切. 求平面 $\alpha$ 和平面 $\beta$ 构成的二面角的平面角.




（第 1 题）

2. 请把平面与球面的基本概念和基本性质作一个对比，谈谈你对平面与球面性质的认识.

# 复习题一

## A 组

1. 证明:大圆 $c$ 的极点 $P$(或 $P'$)到大圆 $c$ 上各点的距离都等于 $\frac{\pi}{2}R$,其中 $R$ 为球面半径.
2. 已知球面上一个大圆,如何作出它的极点;已知球面上一个点 $P$,如何作出它的极线.
3. 设 $A,B$ 是地球赤道上两点,过它们的经线的夹角为 $60°$,求它们之间的球面距离.

## B 组

1. 已知上海位于北纬 $31°14'$、东经 $121°29'$,求上海到南极、北极的距离.
2. 在球面 $S$ 上,设点 $P$ 是大圆 $c$ 的极点.证明:过 $P$ 的任何大圆的极点在 $c$ 上.

# 第二章　球面上的三角形

在平面几何中，我们知道三角形是最基本、最重要的几何图形，对许多图形的研究都可以转化为对三角形的研究. 同样，在球面上，球面三角形也是最基本、最重要的几何图形. 本章主要研究球面三角形的性质和全等定理.

## §1　球面三角形

在地球表面上，过北京和上海两地的经线的夹角是多少?

以格林尼治天文台所在经线为0°经线，北京所在的时区为东八区（即比格林尼治时间早 8 个小时），你知道在西八时区中有哪些主要城市吗?

**说　明**

为表述简单清晰，从本节开始，如果没有特别说明，所讨论的球面都是单位球面.

### 1.1　球面上两直线的交角

首先回顾一下平面内关于“角”的定义.

过平面上一点 $A$ 的两条射线 $AB$，$AC$ 所形成的图形叫作**角**，记成 $\angle BAC$.（如图 2-1(a)）

过平面上一点 $A$ 的两条直线，可以形成 4 个角. 一般规定，两条直线的夹角为不大于 90°的角.（如图 2-1(b)）

在平面几何中，一般不区分角和角的大小，都用同一个记号，比如在三角形 $ABC$ 中，$\angle BAC$ 既表示角，也表示角的大小.（如图2-1(c)）

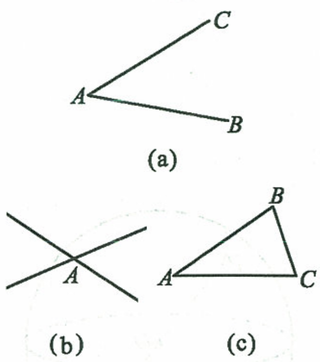


图 2-1

从球面 $S$ 上的一点出发的两条大圆半弧所构成的图形叫作**球面角**. 这个点叫作球面角的顶点，两条大圆半弧叫作球面角的边.

如图 2-2 所示，球面角的顶点为 $P$，$P$ 的极线与球面角的两边交于 $A$，$B$ 两点. 设 $P$ 的对径点是 $P'$，则这个球面角的两边是 $\overset{\frown}{PAP'}$ 和 $\overset{\frown}{PBP'}$.

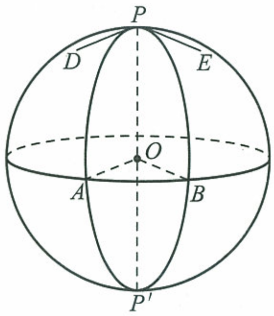



图 2-2

球面角可以表示成$\angle APB$，在不产生混淆时，也可简单地表示成$\angle P$. 与平面几何相同，$\angle APB$既表示角，也表示角的大小.

设射线$PD$是$\overset{\frown}{PA}$的切线，射线$PE$是$\overset{\frown}{PB}$的切线，则球面角$\angle APB$的大小$=\angle DPE$的大小. 简写为$\angle P=\angle DPE$. 我们规定$0\leqslant\angle P<\pi$.

当两个大圆所交成的球面角等于$\frac{\pi}{2}$时，就说这两个大圆**垂直**.

可以证明：$\angle AOB=\angle DPE$.

**抽象概括**

**定理 1.1　球面角的大小等于它的两边所在平面组成的二面角的大小；**

**球面角的大小等于顶点的极线夹在两边之间的弧长.**

**例 1**　(1) 地球上，经线与赤道的夹角是多少？

(2) 已知北京位于北纬 39°56′、东经 116°20′；上海位于北纬 31°14′、东经 121°29′，求过这两点的经线的夹角.

**解**　(1) 因为经线是过南北极的大圆，它所在平面与赤道平面垂直，所以经线与赤道的夹角为$\frac{\pi}{2}$；

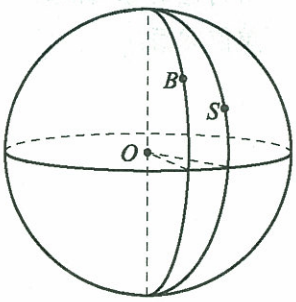



图 2-3

(2) 如图 2-3 所示，设$B$为北京所在位置，$S$为上海所在位置，那么过点$B$的经线所在平面与过点$S$的经线所在平面的夹角为：

$$121°29'-116°20'=5°9'.$$

因此，过北京和上海两点的经线的夹角为 5°9′.

## 1.2　球面上的对称性

球面是空间中具有最鲜明对称性的图形. 例如，球面是关于球心中心对称的图形（如图 2-4）.

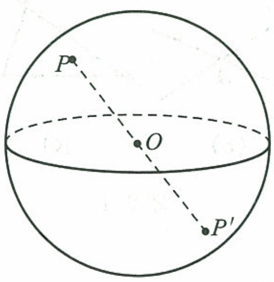



图 2-4

**例 2**　(1) 球面上线段关于球心的中心对称图形是什么？

(2) 球面上直线关于球心的中心对称图形是什么？

(3) 球面上两条大圆半弧形成的球面角关于球心的中心对称图形是什么？

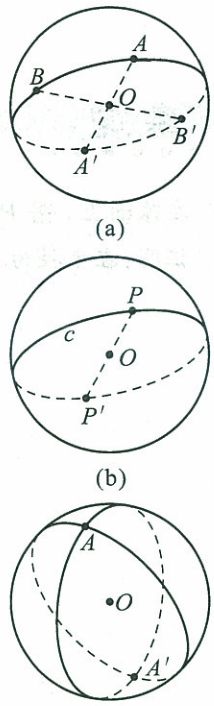
**解**　因为球面上的点关于球心的中心对称图形就是该点的对径

点，所以

(1) 球面上线段 $AB$ 关于球心的中心对称图形是 $A$，$B$ 的对径点 $A'$，$B'$ 连线所得线段 $A'B'$；(如图 2-5(a))

(2) 因为球面直线上的每一点 $P$ 的对径点 $P'$ 还在该直线上，所以球面直线 $c$ 关于球心的中心对称图形是直线 $c$ 自身；(如图 2-5(b))

(3) 分别取球面角两边所在大圆的另一半圆弧，所构成的球面角就是原球面角的中心对称图形，显然它们的大小相等. (如图 2-5(c))



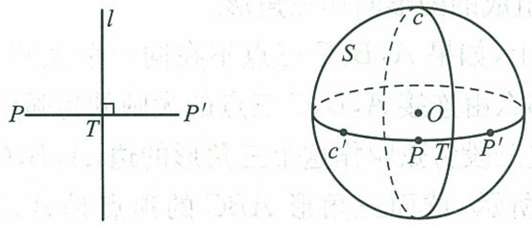

(a)

(b)

(c)

图 2-5

我们知道，在平面几何中有轴对称的概念：设 $l$ 为一条直线，$P$ 是平面上任意一点. 过 $P$ 作 $l$ 的垂线，垂足为 $T$，延长 $PT$ 到 $P'$，使得 $TP'=PT$，则称 $P'$ 是 $P$ 关于直线 $l$ 的对称点. 也称点 $P$ 和 $P'$ 关于直线 $l$ 对称，$l$ 称为对称轴. (如图 2-6(a))




(a) (b)

图 2-6

在球面上也可以类似地定义"轴对称"：

设 $c$ 是球面上的大圆，$P$ 是球面上任一点，过 $P$ 作一个与 $c$ 垂直的大圆 $c'$，垂足为 $T$，在 $c'$ 上取一点 $P'$，使得 $P'$ 与 $P$ 在 $c$ 的两侧，且 $d(T,P')=d(T,P)$，我们称 $P$ 和 $P'$ 关于 $c$ 轴对称. (如图 2-6(b))

**思考交流**

设 $c$ 是球面上的大圆，点 $P$ 和 $P'$ 关于 $c$ 对称，点 $Q$ 与 $Q'$ 也关于 $c$ 对称，这时 $d(P,Q)$ 和 $d(P',Q')$ 有什么关系？(如图 2-7)

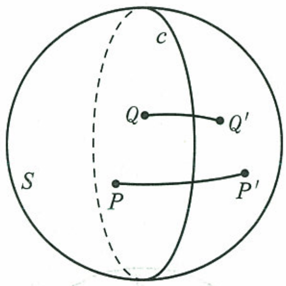



图 2-7

在立体几何中有一个镜面反射(也称面对称)的概念：

设 $\alpha$ 是一个平面，$P$ 和 $P'$ 是位于 $\alpha$ 两侧的两点. 如果线段 $PP'$ 垂直平面 $\alpha$，垂足为 $T$，且 $PT=TP'$，则称 $P$ 和 $P'$ 关于平面 $\alpha$ 成镜面反射(或面对称).

可以证明：若 $P$ 和 $P'$，$Q$ 和 $Q'$ 都关于平面 $\alpha$ 成镜面反射，则 $PQ=P'Q'$. (如图 2-8)

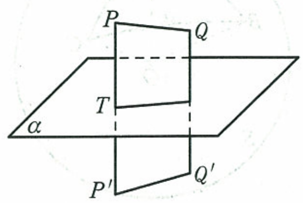



图 2-8

利用这个结论，可以证明：

**定理 1.2 在球面上，若 $P$ 和 $P'$，$Q$ 和 $Q'$ 都关于大圆 $c$ 对称，则**

$$d(P,Q)=d(P',Q').$$

有兴趣的同学可以给出证明.

## 练 习

1. 在球面上，若 $P$ 和 $P'$，$Q$ 和 $Q'$ 都关于大圆 $c$ 对称，$O$ 是球心. 求证：$\angle POQ=\angle P'OQ'$.
2. 证明：在半径为 $R$ 的球面上，球面角的大小等于顶点的极线夹在两边之间的弧长与半径之比.

## 1.3 球面三角形

在平面上，如果 $A,B,C$ 三点不在同一条直线上，那么连接 $A,B,C$ 三点的线段组成的图形叫作三角形.

在球面 $S$ 上，如果 $A,B,C$ 三点不在同一个大圆上，并且三点中没有对径点，那么由连接 $A,B,C$ 三点的大圆的劣弧组成的图形叫作**球面三角形**. 这三段劣弧叫作这个三角形的**边**，$A,B,C$ 叫作**顶点**.

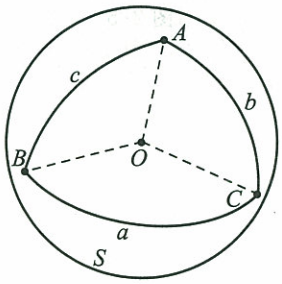



图 2-9

如图 2-9 所示，球面三角形 $ABC$ 的顶点是 $A,B,C$，三条边是 $\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CA}$. 习惯上分别用小写字母 $a,b,c$ 表示 $\angle A,\angle B,\angle C$ 所对的边.

设球心是 $O$，由大圆弧的弧长与所对的圆心角的关系，有

$$a=\angle BOC,$$
$$b=\angle COA,$$
$$c=\angle AOB.$$

**例 3** 已知一个球心为 $O$，半径为 2 的球面 $S$，球心 $O$ 与球面 $S$ 上三点 $A,B,C$ 构成的三面角 $O—ABC$ 的三个面角分别是 $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$，求球面三角形 $ABC$ 的三边长.

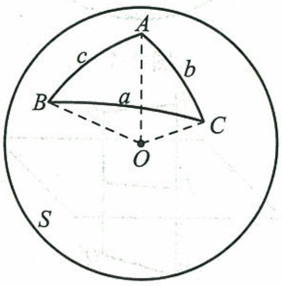



图 2-10

**解** 如图 2-10 所示，不妨设三面角 $O—ABC$ 的三个面角分别为

$$\angle AOB=\frac{\pi}{6},\angle BOC=\frac{\pi}{3},\angle COA=\frac{\pi}{4},$$

那么球面三角形 $ABC$ 的三条边长分别为

$$a=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3},\quad b=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},\quad c=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$$

**思考交流**

在球面三角形的定义中，为什么要规定：

(1) $A,B,C$ 三点不在同一个大圆上；

(2) $A,B,C$ 三点中没有两个是对径点；

(3) 三条边都是大圆劣弧.

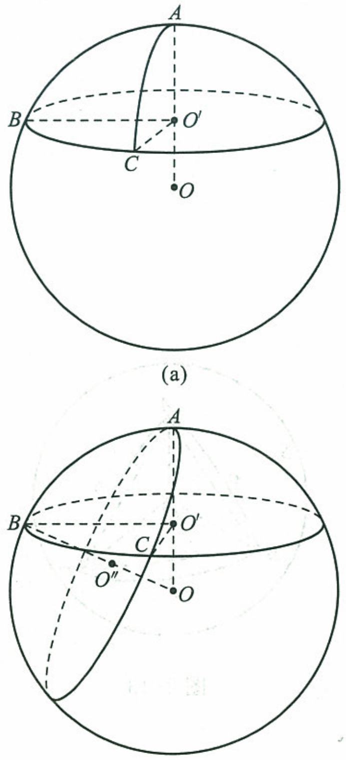


图 2-11

**例 4**　在球面上，如何作出等腰三角形？如何作出等边三角形？

**解**　在平面几何中，是通过圆规作已知线段的相等线段，因此，在球面上，要作已知线段的相等线段，首先要定义“球面上的圆”.

如图 2-11(a)所示，设 $A,B$ 是球面上两点，连接球心 $O$ 与 $A$，过点 $B$ 作 $OA$ 的垂直平面，它交球面得到小圆$\odot O'$，则 $A$ 到$\odot O'$上任一点 $C$ 的球面距离 $d(A,C)$等于 $d(A,B)$.

我们把$\odot O'$叫作球面上以 $A$ 为圆心，$d(A,B)$为半径的圆.

在$\odot O'$上任取一点 $C$，连接$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$，其中$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CA}$，这样就作出了一个等腰三角形 $ABC$.（如图 2-11(a)）

同理，以 $B$ 为圆心，$d(A,B)$为半径，作$\odot O''$，设$\odot O'$与$\odot O''$相交于 $C$ 点，则作出以 $d(A,B)$为边的等边三角形 $ABC$.（如图 2-11(b)）

有了球面三角形的概念，还可以给出球面四边形的定义：

如果 $A,B,C,D$ 是球面 $S$ 上半球面上的四个点，其中任意三点都不在同一大圆上，并且点 $A$ 和点 $C$ 位于 $B,D$ 所在大圆的两侧或者点 $B$ 和点 $D$ 位于 $A,C$ 所在大圆的两侧. 连接大圆劣弧$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{DA}$得到球面四边形 $ABCD$. 点 $A,B,C,D$ 称为这个球面四边形的顶点；劣弧$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{DA}$称为这个球面四边形的边；劣弧$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{BD}$称为对角线.（如图 2-12）

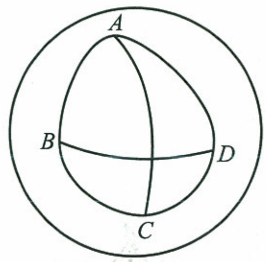


图 2-12

**思考交流**

在给定的球面三角形中，每条边上的中线是否确定？每个内角的角平分线是否确定？每条边上的高线是否确定？每条边上的垂直平分线是否确定？

## 练　习

1. 以地球为例，找到一个有 2 个角为$\frac{\pi}{2}$的球面三角形.

2. 以地球为例，找到一个 3 个角都是$\frac{\pi}{2}$的球面三角形.

## 1.4　球面三角形的基本性质

**问题提出**

我们知道，平面三角形的两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，那么球面三角形是否有类似的性质呢？

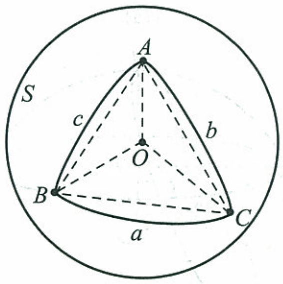



图 2-13

设球面三角形 $ABC$ 的三条边分别为 $a$，$b$，$c$，球心为 $O$，那么 $O—ABC$ 是一个三面角，且

$$a=\overset{\frown}{BC}=\angle BOC,b=\overset{\frown}{CA}=\angle COA,c=\overset{\frown}{AB}=\angle AOB,$$

根据三面角的性质，可以直接得到下面的性质：

$$a+b>c,\quad |a-b|<c,$$
$$b+c>a,\quad |b-c|<a,$$
$$c+a>b,\quad |c-a|<b.$$

**定理 1.3　球面三角形的两边之和大于第三边，两边之差小于第三边.**

**例 5**　已知球面上三条大圆弧的长分别是$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{6}$，问：以这三条圆弧为边是否可以构成一个球面三角形.

**解**　因为$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$，所以根据定理 1.3，以这三条圆弧为边不能构成一个球面三角形.

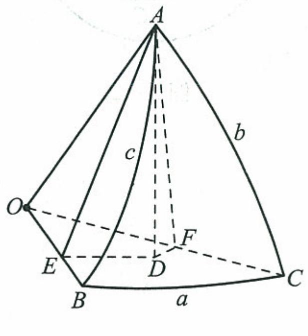



图 2-14

**问题提出**

在球面上，三角形的等边是否对等角？三角形的等角是否对等边？

如图 2-14 所示，设在球面三角形 $ABC$ 中，$b=c$. 连接 $OA$，$OB$，

$OC$，作 $AD\perp$ 平面 $OBC$，垂足为 $D$，作 $DE\perp OB$，$DF\perp OC$，垂足分别是 $E$ 和 $F$，连接 $AE$ 和 $AF$.

根据三垂线定理，不难证明 $AE\perp OB$，$AF\perp OC$. 因为 $b=c$，所以 $\angle AOB=\angle AOC$（等弧对等圆心角），由此可知：

直角三角形 $AOE\cong$ 直角三角形 $AOF$；

直角三角形 $AED\cong$ 直角三角形 $AFD$.

所以 $\angle AED=\angle AFD$，即 $\angle B=\angle C$. 于是，我们证明了，在球面三角形中，等边对等角.

反过来，也不难证明球面三角形中等角对等边.

**定理 1.4　球面三角形中，如果两边相等，则它们的对角相等；如果两角相等，则它们的对边相等.**

我们知道，在平面三角形中，大边对大角，大角对大边. 在球面三角形中，也有同样的性质，有兴趣的同学可以证明一下.

**定理 1.5　在球面三角形中，大角对大边；大边对大角.**

## 问题提出

在平面三角形中，三角形的每条边长都可以是任意长，因此三边之和可以等于任意大的数. 我们把这个事情说成：对于平面三角形，三边之和无上界.

因为球面三角形的每条边都必须小于半个圆周长，即小于 $\pi$，显然三边之和小于 $3\pi$.

球面三角形的周长有没有更小的范围呢？

如图 2-15 所示，设球面三角形 $ABC$ 的三边分别是 $a$，$b$，$c$，连接 $OA$，$OB$，$OC$，$AB$，$BC$ 和 $CA$.

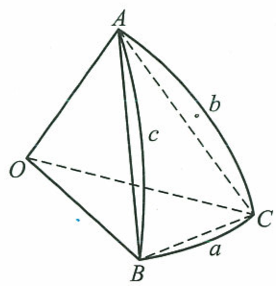


图 2-15

在平面三角形 $AOB$，$BOC$ 和 $AOC$ 中，

$$\angle AOB=\pi-(\angle OAB+\angle OBA),$$
$$\angle BOC=\pi-(\angle OBC+\angle OCB),$$
$$\angle COA=\pi-(\angle OCA+\angle OAC),$$

所以

$$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA$$
$$=3\pi-(\angle OAB+\angle OBA+\angle OBC+\angle OCB+\angle OCA+\angle OAC).$$

根据在三面角中两个面角之和大于第三个面角的性质，有

$$\angle OAB+\angle OAC>\angle CAB,$$
$$\angle OBA+\angle OBC>\angle ABC,$$

$$\angle OCB+\angle OCA>\angle BCA.$$

又因为　　$\angle CAB+\angle ABC+\angle BCA=\pi$，

所以　　$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA<2\pi$.

所以，　　$a+b+c<2\pi$.

**定理 1.6　球面三角形的三边之和小于 $2\pi$.**

**信息技术应用**

**利用几何画板体验球面距离及其基本性质**

步骤：

1. 打开几何画板，新建画板. 利用球面几何工具箱中的工具包，作球面 $S$ 上过任意两点 $A,B$ 的线段 $AB$.（如图 2-16 所示）

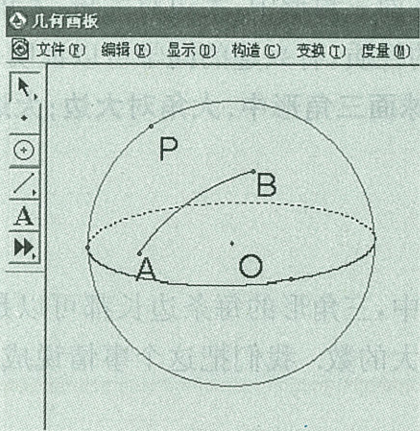



图 2-16

2. 利用工具包测量球面距离 $d(A,B)$，与球面大圆周长的一半比较，可以发现不论如何拖动 $A,B,d(A,B)$ 总不能大于球面大圆周长的一半.（如图 2-17，图 2-18 所示）

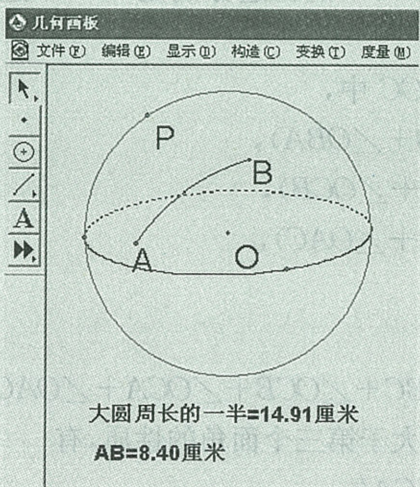



图 2-17

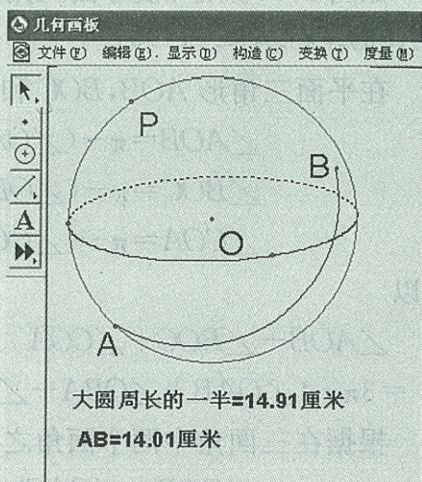



图 2-18

3. 利用工具包测量球面三角形的三条边长满足：两边之和大于第三边．(如图 2-19，图 2-20 所示)

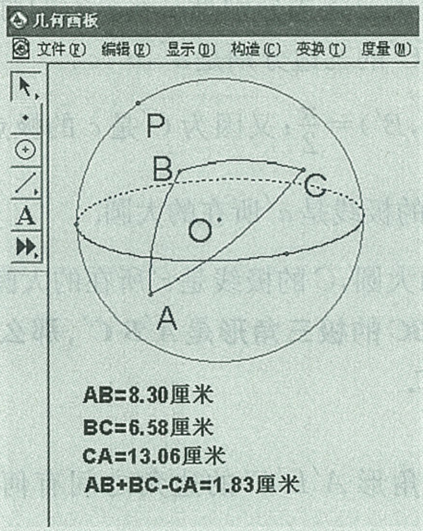



图 2-19

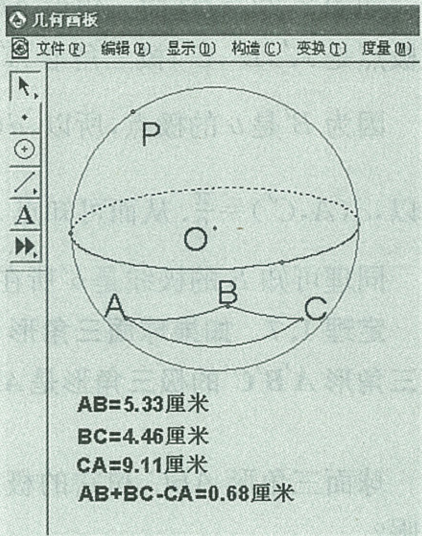



图 2-20

## 练　习

1. 证明：在球面三角形中，等角对等边．
2. 以地球为例，找出一个两边相等的球面三角形．

## 1.5　球面极三角形

### 问题提出

在平面内，三角形内角和等于 $\pi$．在前面练习中我们让大家找一个内角和为$\frac{3\pi}{2}$的球面三角形的例子，一般地，我们需要讨论：球面三角形的内角和在什么范围？

为了讨论这个问题，我们引入极三角形的概念．

如图 2-21 所示，已知球面三角形 $ABC$，现在对每条边各选择一个极点 $A'$，$B'$，$C'$，使得 $d(A,A')$，$d(B,B')$和 $d(C,C')$都小于$\frac{\pi}{2}$．我们把球面三角形 $A'B'C'$叫作球面三角形$ABC$ 的**球面极三角形**，简称**极三角形**．

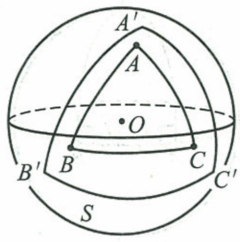



图 2-21

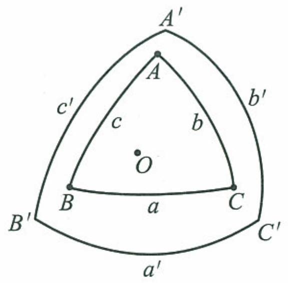



图 2-22

设三角形 $A'B'C'$ 是球面三角形 $ABC$ 的极三角形，那么，三角形 $A'B'C'$ 的极三角形是什么？

如图 2-22，设球面三角形 $ABC$ 的三条边分别是 $a,b,c$，它们对应的极点是 $A',B',C'$，极三角形 $A'B'C'$ 的三边分别是 $a',b',c'$.

因为 $B'$ 是 $b$ 的极点，所以，$d(A,B')=\frac{\pi}{2}$；又因为 $C'$ 是 $c$ 的极点，所以，$d(A,C')=\frac{\pi}{2}$. 从而可知点 $A$ 的极线是 $a'$ 所在的大圆.

同理可知 $B$ 的极线是 $b'$ 所在的大圆，$C$ 的极线是 $c'$ 所在的大圆.

**定理 1.7　如果球面三角形 $ABC$ 的极三角形是 $A'B'C'$，那么球面三角形 $A'B'C'$ 的极三角形是 $ABC$.**

球面三角形 $ABC$ 和它的极三角形 $A'B'C'$ 的边角之间有何关系呢？

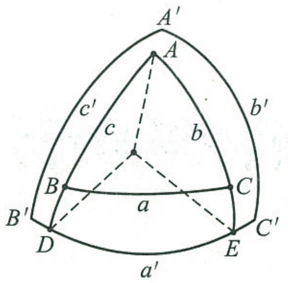



图 2-23

如图 2-23 所示，延长三角形 $ABC$ 的边 $b$ 和 $c$，交 $a'$ 于 $D,E$ 两点，则

$$a'=\overset{\frown}{B'E}+\overset{\frown}{C'D}-\overset{\frown}{DE}.$$

因为 $A$ 的极线是 $a'$ 所在的大圆，根据定理 1.1 有 $\angle A=\overset{\frown}{DE}$. 又因为 $B'$ 的极线是 $b$ 所在的大圆，所以 $\overset{\frown}{B'E}=\frac{\pi}{2}$；因为 $C'$ 的极线是 $c$，所以 $\overset{\frown}{C'D}=\frac{\pi}{2}$.

由此得到　　$a'=\pi-\angle A.$

**定理 1.8　如果球面三角形 $ABC$ 的极三角形是 $A'B'C'$，它们的内角和边长分别为 $\angle A,\angle B,\angle C,a,b,c$ 和 $\angle A',\angle B',\angle C',a',b',c'$，则**

$$a'=\pi-\angle A,\quad b'=\pi-\angle B,\quad c'=\pi-\angle C;$$
$$a=\pi-\angle A',\quad b=\pi-\angle B',\quad c=\pi-\angle C'.$$

**思考交流**

在平面三角形中，三个内角之和等于 $\pi$. 在球面三角形中，三个内角之和还等于 $\pi$ 吗？球面三角形的内角和在什么范围内？

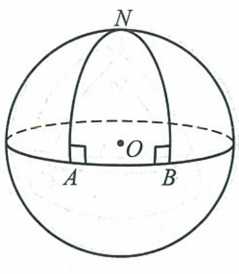



图 2-24

以地球为例，在赤道上两个不是对径点的点 $A,B$ 和北极 $N$ 点组成的球面三角形中，$\angle A=\frac{\pi}{2}$，$\angle B=\frac{\pi}{2}$.（如图 2-24）

显然，球面三角形 $NAB$ 的内角和大于 $\pi$.

一般地，设球面三角形 $ABC$ 的极三角形是 $A'B'C'$，设它们的边和角分别是 $a,b,c,\angle A,\angle B,\angle C$ 和 $a',b',c',\angle A',\angle B',\angle C'$，那么根据定理 1.8，

$$\angle A=\pi-a',$$
$$\angle B=\pi-b',$$
$$\angle C=\pi-c',$$

而球面三角形的三边之和小于 $2\pi$，所以，$0<a'+b'+c'<2\pi$，

因此 $$\pi<\angle A+\angle B+\angle C<3\pi.$$

**定理 1.9　球面三角形的内角和大于 $\pi$ 而小于 $3\pi$.**

## 信息技术应用

### 利用几何画板验证球面三角形内角和的范围

步骤：

1. 打开几何画板，新建画板. 利用球面工具包作一个球面三角形 $ABC$.（如图 2-25 所示）

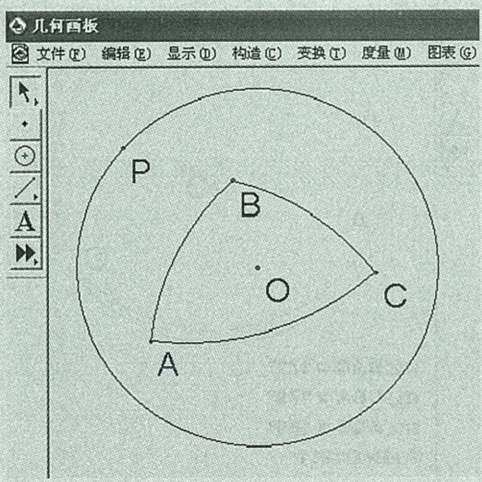



图 2-25

2. 测量球面三角形的三个内角，并计算它们的和，验证球面三角形内角和大于 180°.（如图 2-26 所示）

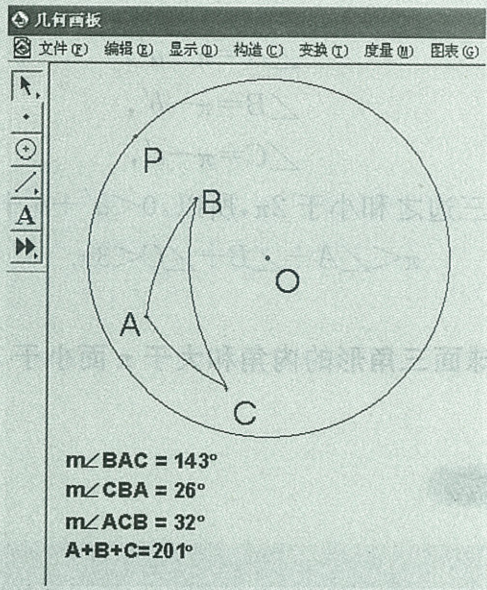



图 2-26

3. 适当拖动球面三角形顶点 $A$，$B$，$C$，验证球面三角形内角和不超过 540°.（如图 2-27 所示）

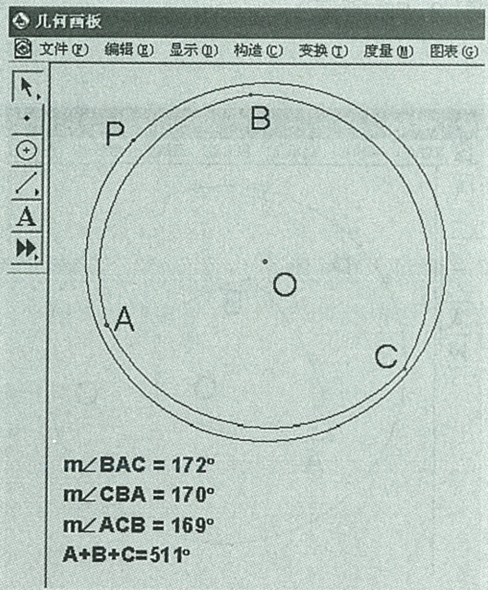



图 2-27

## 练　习

1. 如果一个球面三角形的三个角都是 $\frac{\pi}{2}$，那么它的极三角形是什么？

2. 证明：在半径为 $R$ 的球面上，球面极三角形的边除以 $R$ 与原三角形对应角的和等于 $\pi$.

## 习 题 2—1

### A 组

1. 在平面几何中，三角形的外角大于不相邻的内角. 在球面几何中，这个性质还成立吗？举例说明.
2. 平面等边三角形的三个内角都是$\frac{\pi}{3}$，球面上的等边三角形是否有这个性质？举例说明.
3. 在球面四边形的定义中，为什么要求四个顶点都在同一个半球面内？
4. 以地球为例，找到一个三边相等的球面三角形.
5. 证明：在球面三角形中大边对大角.
6. 球面上三条大圆弧分别为$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{6}$，以它们为边可以构成球面三角形吗？
7. 以地球为例，构造一个四边相等的球面四边形，并说明它的四个内角是否是$\frac{\pi}{2}$.
8. 试证明定理 1.5.
9. 设 $N$ 是地球的北极，$A$ 是赤道上任一点，$B$ 是南半球上一点，且 $N$，$A$，$B$ 不共大圆，证明：

   (1) $\angle NAB>\frac{\pi}{2}$；　　(2) $\angle NBA<\angle NAB$.
10. 证明：在半径为 $R$ 的球面上，球面三角形的三边之和小于 $2\pi R$.
11. 证明：球面四边形的内角和大于 $2\pi$，小于 $6\pi$.
12. 球面三角形的中位线是否等于底边的一半，并且平行于底边.
13. 查阅资料，获得下列信息，并用直观图表示出来.

    (1) 地球半径的数据；

    (2) 地球北极的天文学意义；

    (3) 地球经线和纬线的界定；

    (4) 地球经度和纬度的含义.

### B 组

1. 证明：在两个球面三角形中，如果有两条对应边分别相等，那么在它们所夹的角中，角大的所对应的第三边也大；反之，第三边大的所对的角也大.
2. 在球面上，作只有一个角是直角的三角形，作只有 2 个角是直角的三角形，作 3 个角都是直角的三角形.

# §2　球面三角形的全等

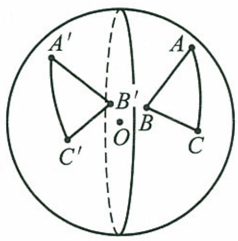
在平面几何中，我们学习过两个三角形的全等. 同样，在球面几何中，我们也需要研究两个三角形全等的问题. 在讨论球面三角形全等的问题时，只能在同一球面上或半径相等的球面上. 半径相等的球面简称为**等球面**.

**问题提出**

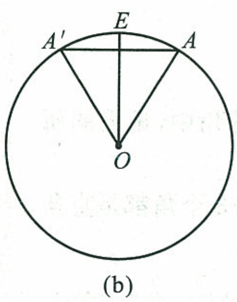
与平面几何类比，我们应该如何定义两个球面三角形的全等、如何判断两个球面三角形全等呢？

### 一、球面三角形全等的定义

在同一球面或等球面上，两个球面三角形的对应边和对应角分别相等，则称这两个**球面三角形全等**.



(a)



(b)

图 2-28

**例 1**　设在同一球面上的两个球面三角形 $ABC$ 和 $A'B'C'$ 关于大圆 $l$ 对称，求证它们全等.

**证明**　现在考虑球面三角形 $ABC$ 和 $A'B'C'$. 因为它们关于大圆 $l$ 对称，那么大圆弧 $\overset{\frown}{AA'}$ 被大圆 $l$ 垂直平分(如图 2-28(a)).

设 $O$, $A$ 和 $A'$ 三点所确定的平面与 $l$ 所在平面交于直线 $OE$(如图 2-28(b))，不难看出：$A$ 和 $A'$ 关于 $l$ 所在平面成镜面反射. 同样地，$B$ 和 $B'$，$C$ 和 $C'$ 都关于 $l$ 所在平面成镜面反射.

因此，三面角 $O\text{-}ABC$ 与三面角 $O\text{-}A'B'C'$ 关于 $l$ 所在平面成镜面反射. 所以，它们的三个面角分别相等，即

$$\angle AOB=\angle A'OB',$$
$$\angle COA=\angle C'OA',$$
$$\angle BOC=\angle B'OC'.$$

由此得到　$a=a', b=b', c=c'$.

这两个三面角的三个二面角也分别相等，由此得到

$$\angle A=\angle A', \angle B=\angle B', \angle C=\angle C'.$$

因此，球面三角形 $ABC\cong$ 球面三角形 $A'B'C'$.

**抽象概括**

在同一个球面上，轴(大圆)对称的两个球面三角形全等.

## 二、球面三角形全等的判定

在平面几何中，如果两个三角形的三对对应边相等，则这两个三角形全等.

在同一球面或等球面上，如果两个球面三角形的三对对应边相等，这两个球面三角形全等吗?

设在同一球面或等球面上，有两个球面三角形 $ABC$ 和 $A'B'C'$，它们的三对对应边相等，即

$$a=a',\quad b=b',\quad c=c'.$$

(1) 如图 2-29(a)所示，球面三角形 $ABC$ 与球面三角形 $A'B'C'$ 顶点的顺序按逆时针方向是相同的. 这时，由于它们在同一球面上，可以通过移动使 $A$ 与 $A'$重合，$c$ 与 $c'$重合，$B$ 与 $B'$必然重合. 由于 $a=a'$，$b=b'$，所以 $C$ 与 $C'$一定重合. 因此，这两个球面三角形可以完全重合.

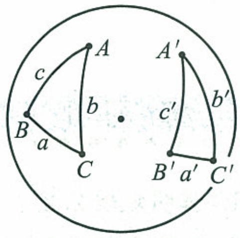
(2) 如图 2-29(b)所示，球面三角形 $ABC$ 与球面三角形 $A'B'C'$ 顶点的顺序按逆时针方向是不相同的，这时，先作球面三角形 $ABC$ 的对称球面三角形 $A''B''C''$，由对称球面三角形的性质：

$$\text{球面三角形 } ABC \cong \text{ 球面三角形 } A''B''C''.$$

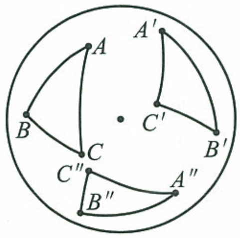
这时，球面三角形 $A''B''C''$与球面三角形 $A'B'C'$ 按逆时针方向顶点相同且对应边相等，所以，

$$\text{球面三角形 } A''B''C'' \cong \text{ 球面三角形 } A'B'C'.$$

于是，　球面三角形 $ABC \cong$ 球面三角形 $A'B'C'$.



(a)



(b)

图 2-29

**定理 2.1**　**在同一球面或等球面上，如果两个球面三角形的三对对应边相等，那么这两个球面三角形全等.**

我们把这个定理叫作球面三角形全等的“边边边”判定定理，简记为“SSS”.

同样地，我们还可以得到：

**定理 2.2**　**在同一球面或等球面上，如果两个球面三角形的两对对应边和它们的夹角对应相等，那么这两个球面三角形全等.(“边角边”，简记为“SAS”)**

**定理 2.3**　**在同一球面或等球面上，如果两个球面三角形的两对**

对应角和它们的夹边对应相等，那么这两个球面三角形全等.（“角边角”，简记为“ASA”）

**例 2**　如果球面上的两条线段互相平分，那么以这两条线段的 4 个端点为顶点的球面四边形的对边相等.

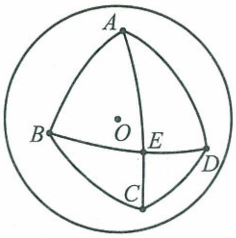



图 2-30

**证明**　如图 2-30 所示，设线段$\overset{\frown}{AC}$与线段$\overset{\frown}{BD}$互相平分，交点为 $E$. 连接$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{DA}$得到球面四边形 $ABCD$.

在球面三角形 $ABE$ 和球面三角形 $CDE$ 中，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CE}$，$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{DE}$，$\angle AEB=\angle DEC$，根据“SAS”，球面三角形 $ABE\cong$ 球面三角形 $DCE$，所以$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

同理可证，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$.

## 练 习 1

1. 证明定理 2.2.
2. 证明定理 2.3.

## 问题提出

在平面几何中，如果两个三角形的三对对应角对应相等，则这两个三角形相似，它们的对应边长度成比例.

在同一球面或等球面上，如果两个球面三角形的三对对应角对应相等，那么这两个球面三角形的对应边有什么关系？

假设在同一球面或等球面上，有两个球面三角形 $ABC$ 和 $DEF$，已知它们的对应角相等，即 $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$.

再设球面三角形 $ABC$ 和 $DEF$ 的极三角形分别是 $A'B'C'$ 和 $D'E'F'$，那么根据球面三角形与它的极三角形之间的关系，有

$$a'=\pi-\angle A,\quad d'=\pi-\angle D,$$
$$b'=\pi-\angle B,\quad e'=\pi-\angle E,$$
$$c'=\pi-\angle C,\quad f'=\pi-\angle F,$$

所以
$$a'=d',\quad b'=e',\quad c'=f'.$$

根据“SSS”，球面三角形 $A'B'C'\cong$ 球面三角形 $D'E'F'$.

所以
$$\angle A'=\angle D',\angle B'=\angle E',\angle C'=\angle F'.$$

又根据球面三角形与它的极三角形之间的关系，有

$$a=\pi-\angle A',\quad d=\pi-\angle D',$$
$$b=\pi-\angle B',\quad e=\pi-\angle E',$$
$$c=\pi-\angle C',\quad f=\pi-\angle F',$$

所以 $$a=d,\quad b=e,\quad c=f.$$

再根据“SSS”，则球面三角形 $ABC\cong$ 球面三角形 $DEF$.

**定理 2.4　在同一球面或等球面上，如果两个球面三角形的三对对应角分别相等，那么这两个球面三角形全等.（“角角角”，简记为“AAA”）**

从这个定理可以看到球面几何与平面几何的差异. 即在平面几何中，如果两个三角形对应角相等，则这两个三角形相似，但是它们不一定全等；而在同一球面或等球面上，两个球面三角形如果对应角都相等，则这两个球面三角形一定全等. 这说明在同一球面或等球面上不存在相似的概念.

### 三、球面三角形全等的应用

利用球面三角形全等的判定定理，可以把平面几何中的一些性质推广到球面几何中.

**例 3**　证明：在对边相等的球面四边形中，如果对角线相交，则它的对角线互相平分.

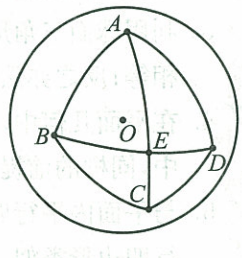


图 2-31

**证明**　如图 2-31 所示，已知球面四边形 $ABCD$ 的对边 $AB=DC$，$AD=BC$，对角线 $AC$ 与 $BD$ 相交于 $E$.

在球面三角形 $ABD$ 与球面三角形 $CDB$ 中，有 $AB=DC$，$BD=BD$，$AD=BC$. 根据“SSS”，有球面三角形 $ABD\cong$球面三角形 $CDB$，所以$\angle ABD=\angle CDB$.

同理可证，$\angle BAC=\angle DCA$.

在球面三角形 $ABE$ 与球面三角形 $CDE$ 中，有 $\angle ABE=\angle CDE$，$\angle BAE=\angle DCE$，$\angle BEA=\angle DEC$. 根据“AAA”，球面三角形 $ABE\cong$ 球面三角形 $CDE$，所以 $AE=CE$，$BE=DE$. 即对角线互相平分.

**例 4**　证明：四边相等的球面四边形，对角线垂直平分.

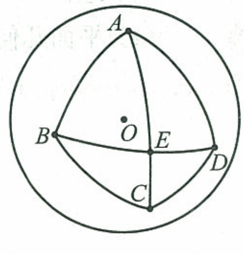


图 2-32

**证明**　如图 2-32 所示，由例 3 可知，对角线$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{BD}$互相平分，即 $AE=EC$，$BE=ED$.

在球面三角形 $AED$ 与球面三角形 $AEB$ 中，$AD=AB$，$AE=AE$，$DE=BE$. 根据“SSS”，球面三角形 $AED\cong$球面三角形 $AEB$，所以$\angle AED=\angle AEB$. 因为 $\angle AED+\angle AEB=\pi$，所以 $\angle AED=$

$\angle AEB=\frac{\pi}{2}$.

因此四边相等的球面四边形的对角线互相垂直平分.

## 练习 2

1. 以地球为例,作一个对边相等的球面四边形,并验证例 3 的结论.
2. 以地球为例,作一个四边相等的球面四边形,并验证例 4 的结论.

## 习题 2—2

### A 组

1. 证明:如果 $C'$ 是 $C$ 关于大圆弧 $l$ 的对称点,$\overset{\frown}{AB}$ 是 $l$ 上一段劣弧,那么球面三角形 $ABC\cong$ 球面三角形 $ABC'$.
2. 设球面三角形 $ABC$ 三个顶点 $A,B,C$ 的对径点分别是 $A',B',C'$,利用球面三角形全等的判定定理证明:球面三角形 $ABC\cong$ 球面三角形 $A'B'C'$.
3. 利用球面三角形全等的判定定理证明:若一个球面三角形有两条边相等,则这两条边所对的角也相等;反之亦然.
4. 在平面几何中,两条直线被第三条直线所截,且同位角相等,则这两条直线不相交. 在球面几何中,同样的前提条件下,将出现什么情况呢?
5. 与平面内平行四边形比较,对边相等的球面四边形,除了对角线互相平分外,还有什么性质与平行四边形类似.
6. 在球面 $S$ 上,有球面三角形 $ABC$ 和球面三角形 $A'B'C'$,满足 $b=b'$,$c=c'$,$\angle A>\angle A'$. 证明:$a>a'$.

### B 组

1. 设计一个利用球面等腰三角形构造球面正四边形(四边相等,四个内角也相等)的方案.
2. (1) 在平面几何中,两个对应边相等的四边形是否全等?试给出一个四边形全等的判定定理;

   (2) 平面几何的上述结果在球面几何中是否成立?

# §3　球面三角形的边角关系

从上海出发的南极科学考察船要在地球表面上行驶多远才能到达南极？

在理想情况下，从上海到北京的飞行航向应该如何确定呢？

地球表面上很小区域的测量为什么可以近似地用平面替代呢？

## 3.1　平面三角形的余弦定理和正弦定理

一个平面三角形包含六个元素——三条边和三个角，但是，这六个元素并不是独立的. 例如，只要知道三条边，这个三角形就被确定了，因此它的三个角也就被确定了. 这说明三角形的六个元素之间存在某种相互依赖的关系. 例如，三角形的三个角之和等于 $\pi$ 就是一种依赖关系. 此外，还有两种重要的边角关系.

**定理 3.1（三角形的余弦定理）　设平面三角形 $ABC$ 的三条边分别是 $a,b,c$，它们的对角分别是 $\angle A,\angle B,\angle C$，则**

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\angle B,$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A.$$

其中，$\cos\angle A$，$\cos\angle B$，$\cos\angle C$ 分别表示 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的余弦.

**证明**　如图 2-33 所示，作 $AD\perp BC$，垂足为 $D$. 则

$$\begin{aligned}c^2&=BD^2+AD^2\\&=(a-b\cos\angle C)^2+(b\sin\angle C)^2\\&=a^2+b^2-2ab\cos\angle C.\end{aligned}$$

同理，可证其余两式.

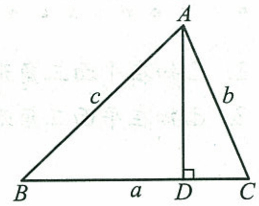


图 2-33

**定理 3.2（三角形的正弦定理）　设平面三角形 $ABC$ 的三条边分别是 $a,b,c$，它们的对角分别是 $\angle A,\angle B,\angle C$，则**

$$\frac{\sin\angle A}{a}=\frac{\sin\angle B}{b}=\frac{\sin\angle C}{c}.$$

**证明**　如图 2-33 所示，$AD=b\sin\angle C=c\sin\angle B$，

所以 $$\frac{\sin\angle B}{b}=\frac{\sin\angle C}{c}.$$

同理可证 $$\frac{\sin\angle A}{a}=\frac{\sin\angle B}{b}.$$

**例1** 已知在平面三角形 $ABC$ 中，$\angle A=45°$，$\angle B=60°$，$a=4$，求 $b$，$c$ 和 $\angle C$.

**解** 由 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，有 $\angle C=75°$，根据正弦定理

$$\frac{\sin\angle A}{a}=\frac{\sin\angle B}{b}=\frac{\sin\angle C}{c},$$

有 $$b=2\sqrt{6},\quad c=4\sqrt{2}\sin 75°,$$

利用计算器计算，得到：$b\approx4.90$，$c\approx5.46$.

在平面几何中，利用三角形的余弦定理、正弦定理和三角形内角和等于 $\pi$，就可以由三角形的六个元素中的三个(至少包含一条边)求出另外三个元素.

例如：

(1) 若已知平面三角形 $ABC$ 的两边 $a$ 和 $c$，以及它们的夹角 $\angle B$，那么根据余弦定理，可以求出边 $b$.(如图 2-34(a))

(2) 若已知平面三角形 $ABC$ 的边 $a$ 和 $b$，以及边 $b$ 所对的角 $\angle B$，那么根据正弦定理，可以求出 $\angle A$ 的正弦值，这时可能对应 $\angle A$ 的两个值.(如图 2-34(b))

在情形(1)中，根据平面三角形全等的判定定理，保证有唯一的三角形；

在情形(2)中，根据平面三角形全等的判定定理，不能保证有唯一的三角形.

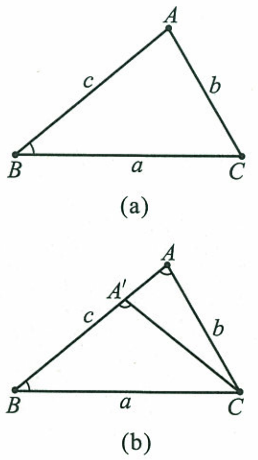


图 2-34

## 练 习

1. 已知在平面三角形 $ABC$ 中，$\angle A=60°$，$AB=3$，$AC=6$，求 $BC$，$\angle B$ 和 $\angle C$.
2. 已知在平面三角形 $ABC$ 中，$\angle A=30°$，$AC=6$，$BC=4$，求三角形 $ABC$ 的其他量.

## 3.2 球面三角形边的余弦定理

对于一个球面三角形，也有六个元素——三条边和三个角.这六个元素之间也不是独立的，它们之间也存在某种依赖关系.但是要注意它们与平面三角形的重要区别：球面三角形的三个内角之和大于 $\pi$.

## 问题提出

在球面三角形中，是否存在类似于平面三角形的正弦定理和余弦定理呢？

**定理 3.3（球面三角形边的余弦定理）**　设球面三角形 $ABC$ 的三条边分别是 $a,b,c$，则

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\angle A,$$
$$\cos b=\cos c\cdot\cos a+\sin c\cdot\sin a\cdot\cos\angle B,$$
$$\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos\angle C.$$

**证明**　设球心为 $O$，连接 $OA,OB,OC$，则

$$\angle AOB=c,\angle AOC=b,\angle BOC=a.$$

过点 $A$ 作 $\overset{\frown}{AB}$ 的切线交直线 $OB$ 于 $D$，过点 $A$ 作 $\overset{\frown}{AC}$ 的切线交直线 $OC$ 于 $E$，连接 $DE$（如图 2-35 所示）。

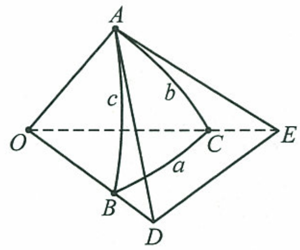



图 2-35

显然，$AD\perp AO$，$AE\perp AO$，在直角三角形 $OAD$ 中，

$$AO=1,$$
$$AD=\tan\angle AOD=\tan c,$$
$$OD=\frac{1}{\cos\angle AOD}=\frac{1}{\cos c}.$$

在直角三角形 $OAE$ 中，

$$AE=\tan\angle AOE=\tan b,$$
$$OE=\frac{1}{\cos\angle AOE}=\frac{1}{\cos b}.$$

注意 $\angle A=\angle EAD$. 在三角形 $ODE$ 中，利用平面三角形的余弦定理（定理 3.1），

$$\begin{aligned}DE^2&=OD^2+OE^2-2OD\cdot OE\cos\angle BOC\\&=\frac{1}{\cos^2 c}+\frac{1}{\cos^2 b}-\frac{2\cos a}{\cos c\cdot\cos b}.\end{aligned}\tag{1}$$

在三角形 $ADE$ 中，

$$\begin{aligned}DE^2&=AD^2+AE^2-2AD\cdot AE\cos\angle A\\&=\tan^2 c+\tan^2 b-2\tan c\cdot\tan b\cdot\cos\angle A.\end{aligned}\tag{2}$$

因为（1）式与（2）式左端相等，所以右端也相等，整理得

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\angle A.$$

类似地可以得到另外两式.

在球面三角形 $ABC$ 中，当 $\angle A=\frac{\pi}{2}$ 时，构成球面直角三角形. 这时三条边所满足的公式就是球面直角三角形的“勾股定理”：

$$\cos a=\cos b\cos c.$$

对于球面三角形的三条边与三个角，如果已知其中的三个元素，来求另外三个未知元素，就是解球面三角形的问题. 有了边的余弦定理，就可以解决其中一部分问题.

**例 2**　设球面三角形 $ABC$ 的三边分别为 $a=\frac{\pi}{2}$，$b=\frac{\pi}{3}$，$c=\frac{\pi}{4}$，求 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$.

**解**　利用球面三角形边的余弦定理

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\angle A,$$

可以求得 $$\cos\angle A=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

利用计算器计算，可得 $$\angle A\approx 125.3°.$$

类似地，由 $$\cos b=\cos a\cdot\cos c+\sin a\cdot\sin c\cdot\cos\angle B,$$

可以求得 $$\cos\angle B=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $$\angle B=45°.$$

由 $$\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos\angle C,$$

可以求得 $$\cos\angle C=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

利用计算器计算，可得 $$\angle C\approx 35.2°.$$

**例 3**　设球面三角形 $ABC$ 中，$a=\frac{\pi}{4}$，$b=\frac{\pi}{4}$，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，求 $c$，$\angle A$，$\angle B$.

**解**　利用球面三角形边的余弦定理

$$\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos\angle C,$$

可以求得 $$\cos c=\frac{1}{2},$$

所以 $$c=\frac{\pi}{3}.$$

继续使用边的余弦定理

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\angle A,$$

可以求得 $$\cos\angle A=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

利用计算器计算，可得 $$\angle A\approx 54.7°.$$

因为 $a=b$，所以 $\angle A=\angle B$，

即 $$\angle B\approx 54.7°.$$

由例 2 和例 3 可以看出，如果已知球面三角形的三边或两边及夹角，那么都可以利用边的余弦定理求出其他未知元素.

## 练 习

1. 已知北京位于北纬 $39°56'$、东经 $116°20'$，上海位于北纬 $31°14'$、东经 $121°29'$，问：
   (1) 如果飞机从北京飞到上海，按大圆飞行，距离是多少？
   (2) 飞机起飞的方位角（即飞机飞行方向与正北方向的顺时针夹角）是多少？
2. 假设有一架飞机从位于北纬 $39°56'$、东经 $116°20'$ 的地点出发，按大圆以方位角 $90°$ 的方向飞行，问飞行 5 000 km 后，位于地球什么地点？

## 3.3　球面三角形角的余弦定理和正弦定理

我们知道，在球面三角形 $ABC$ 和它的极三角形 $A'B'C'$ 之间，存在关系：

$$a'=\pi-\angle A,$$
$$b'=\pi-\angle B,$$
$$c'=\pi-\angle C.$$

如果把定理 3.3 用到极三角形 $A'B'C'$ 上，立即得到球面三角形 $ABC$ 的一个边角关系.

**定理 3.4（球面三角形角的余弦定理）**

$$\cos\angle A=-\cos\angle B\cdot\cos\angle C+\sin\angle B\cdot\sin\angle C\cdot\cos a,$$
$$\cos\angle B=-\cos\angle C\cdot\cos\angle A+\sin\angle C\cdot\sin\angle A\cdot\cos b,$$
$$\cos\angle C=-\cos\angle A\cdot\cos\angle B+\sin\angle A\cdot\sin\angle B\cdot\cos c.$$

**例 4**　设在球面三角形 $ABC$ 中，三个角分别是 $\angle A=\frac{\pi}{2}$，$\angle B=\frac{\pi}{2}$，$\angle C=\frac{\pi}{4}$，求三角形 $ABC$ 的三条边.

**解**　利用球面三角形角的余弦定理

$$\cos\angle A=-\cos\angle B\cdot\cos\angle C+\sin\angle B\cdot\sin\angle C\cdot\cos a,$$

有

$$0=0+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a,$$

即

$$a=\frac{\pi}{2}.$$

同理可得

$$b=\frac{\pi}{2},\ c=\frac{\pi}{4}.$$

最后，我们再给出球面三角形的正弦定理.

**定理 3.5（球面三角形的正弦定理）**

$$\frac{\sin\angle A}{\sin a}=\frac{\sin\angle B}{\sin b}=\frac{\sin\angle C}{\sin c}.$$

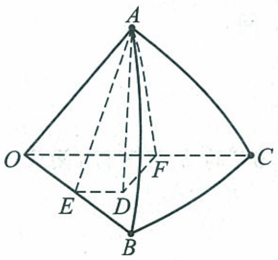



图 2-36

**证明** 如图 2-36，设球心是 $O$，连接 $OA$，$OB$，$OC$，过点 $A$ 作平面 $OBC$ 的垂线，垂足为 $D$. 作 $DE\perp OB$，$DF\perp OC$，垂足分别是点 $E$，$F$. 连接 $AE$，$AF$，由三垂线定理，可以知道，$OB\perp AE$，$OC\perp AF$. 于是得到四个直角三角形：$AEO$，$AFO$，$ADE$，$ADF$，在这些三角形中

$$\angle AOE=c,\angle AOF=b,$$

$$\angle AED=\angle B,\angle AFD=\angle C,$$

所以
$$\frac{\sin\angle B}{\sin b}=\frac{\frac{AD}{AE}}{AF}=\frac{AD}{AF\cdot AE},$$

$$\frac{\sin\angle C}{\sin c}=\frac{\frac{AD}{AF}}{AE}=\frac{AD}{AF\cdot AE}.$$

所以
$$\frac{\sin\angle B}{\sin b}=\frac{\sin\angle C}{\sin c}.$$

同理
$$\frac{\sin\angle A}{\sin a}=\frac{\sin\angle B}{\sin b}.$$

**例 5** 设在球面三角形 $ABC$ 中，$\angle A=\frac{\pi}{6}$，$\angle B=\frac{\pi}{2}$，$c=\frac{\pi}{3}$，求 $a$，$b$，$\angle C$.

**解** 由球面三角形角的余弦定理

$$\cos\angle C=-\cos\angle A\cdot\cos\angle B+\sin\angle A\cdot\sin\angle B\cdot\cos c,$$

有
$$\cos\angle C=0+\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

利用计算器计算，得 $\angle C\approx75.32°$.

由球面三角形的正弦定理

$$\frac{\sin\angle A}{\sin a}=\frac{\sin\angle B}{\sin b}=\frac{\sin\angle C}{\sin c},$$

有
$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin a}=\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sin b},$$

利用计算器可以算出 $a\approx0.46$，$b\approx1.11$.

由例 4 和例 5 可以看出，如果已知球面三角形的三个角可以用角的余弦定理求出三边. 如果已知两角及夹边，可以利用角的余弦定

理先求出第三角，再用正弦定理求出另两边. 也可以用例 1 的方法，继续使用角的余弦定理求出另两边.

**信息技术建议**

利用计算机信息技术可以对平面三角形的余弦定理和正弦定理、球面三角形的余弦定理和正弦定理进行验证，有兴趣的同学可以用几何画板做一做.

### 思考交流

1. 如果已知球面三角形的两边和一个对角，能否求出其余的边和角.

2. 如果已知球面三角形的两角和一个对边，能否求出其余的边和角.

考虑以下特例：设球面三角形 $ABC$ 中，$\angle A=\frac{\pi}{2}$，$\angle B=\frac{\pi}{2}$，$a=\frac{\pi}{2}$，能否求出 $c$ 和 $\angle C$.

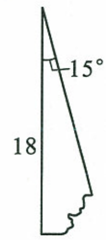
## 练 习

1. 在单位球面上作一个等边三角形，三个内角都是 $\frac{2\pi}{3}$，它的边长是多少？

2. 证明：三个内角都是 $\frac{\pi}{2}$ 的球面三角形，它的边长都是 $\frac{\pi}{2}$；反之亦然.

## 习题 2—3

### A 组



（第 1 题）

1. 如图所示，直角三角板的一个锐角被损坏，已知其中一个锐角为 15°，一条直角边为 18 cm，求这块三角板的斜边、另一个锐角和另一条直角边.

2. 在单位球面上求解球面三角形：

(1) 已知 $a=\frac{\pi}{3}$，$b=\frac{\pi}{2}$，$c=\frac{\pi}{2}$；

(2) 已知 $a=\frac{\pi}{2}$，$b=\frac{\pi}{2}$，$\angle C=\frac{2\pi}{3}$；

(3) 已知 $\angle A=\frac{2\pi}{3}$，$\angle B=\frac{\pi}{2}$，$\angle C=\frac{3\pi}{4}$；

(4) 已知 $c=\frac{3\pi}{4}$，$\angle B=\frac{3\pi}{5}$，$\angle A=\frac{\pi}{3}$.

3. 设球面半径为 2,求解三角形:

(1) 已知 $a=\frac{\pi}{3}, b=\frac{\pi}{3}, c=\frac{2\pi}{3}$;

(2) 已知 $a=\frac{\pi}{2}, \angle B=\frac{\pi}{2}, c=\frac{2\pi}{3}$;

(3) 已知 $\angle A=\frac{\pi}{3}, \angle B=\frac{\pi}{4}, \angle C=\frac{3\pi}{4}$;

(4) 已知 $a=\frac{2\pi}{3}, c=\frac{\pi}{2}, \angle C=\frac{\pi}{3}$.

4. 如果一个三角形的三条边分别是 100 km,150 km,180 km,试比较把它放在平面上和放在地球表面上,两者内角分别相差多少?内角和相差多少?

5. 在地球表面,如果一个等边三角形的边长分别是(1)100 km;(2)500 km. 那么它的内角分别是多少度?

6. 给出半径为 $R$ 的球面三角形的余弦定理和正弦定理.

7. 在平面几何中,给定一个三角形的三个内角,能确定这个三角形的面积吗?在球面几何中,给定一个三角形的三个内角,能确定这个三角形的面积吗?

8. 你知道某些特殊球面三角形的面积吗?

## B 组

1. 设球面三角形 $ABC$ 是一个直角三角形,$\angle C=\frac{\pi}{2}$,试证:

$$\cos\angle B=\frac{\tan a}{\tan c},\quad \tan\angle A=\frac{\tan a}{\sin b},\quad \tan\angle B=\frac{\tan b}{\sin a}.$$

2. 你能从上述结论中发现一些有关平面几何与球面几何的关系吗?

# §4　球面三角形的面积

如何估算中国领土面积？

如果我们把北京、上海、重庆看作是地球表面上的三个点，它们确定的球面三角形面积是多少呢？

## 问题提出

如何计算单位球面上球面三角形的面积？

## 4.1　球面二角形

我们知道，单位球面面积为 $S=4\pi$. 现在考虑球面上的一个小区域：球面上由两个大圆的半周所围成的较小部分叫作一个**球面二角形.**

如图 2-37 所示，大圆半周 $\overset{\frown}{PAP'}$ 和 $\overset{\frown}{PBP'}$ 所围成的阴影部分就是一个球面二角形. 显然 $P$ 和 $P'$ 是对径点，大圆半周 $\overset{\frown}{PAP'}$ 和 $\overset{\frown}{PBP'}$ 称为球面二角形的边. 球面角 $\angle P=\angle P'$ 称为球面二角形的夹角. 如果大圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 以 $P$ 和 $P'$ 为极点，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 $\alpha$，则 $\angle P=\angle P'=\alpha$.

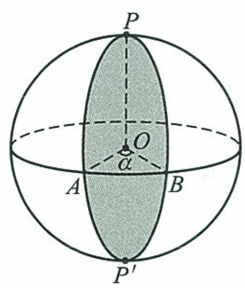



图 2-37

如果球面二角形的夹角是 $\pi$，它的面积就是球面面积的一半；如果球面二角形的夹角是 $\frac{\pi}{2}$，它的面积就是球面面积的 $\frac{1}{4}$. 我们不难看出，球面二角形的面积与其夹角成比例.

设这个二角形的面积为 $U$，则

$$\frac{U}{4\pi}=\frac{\alpha}{2\pi},$$

即

$$U=2\alpha.$$

## 抽象概括

单位球面上，夹角为 $\alpha$ 的二角形的面积为 $U=2\alpha$.

## 4.2 球面三角形的面积

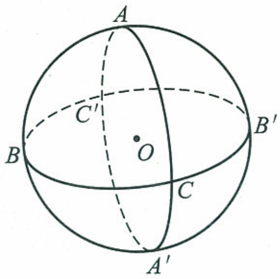



图 2-38

设 $S(ABC)$ 表示球面三角形 $ABC$ 的面积(如图 2-38).

1. 对球面三角形 $ABC$,分别画出三条边所在的大圆.

2. 设 $A,B,C$ 的对径点分别是 $A',B',C'$,根据二角形的面积公式(如图 2-39),有

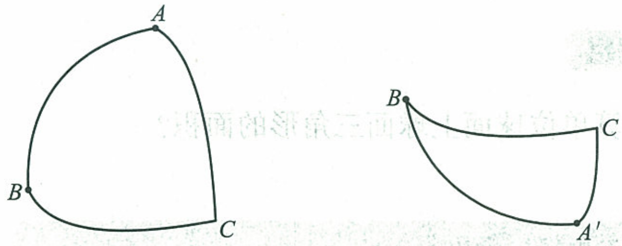



图 2-39

$$S(ABC)+S(A'BC)=2\angle A. \tag{1}$$

类似地还有

$$S(ABC)+S(ABC')=2\angle C, \tag{2}$$

$$S(ABC)+S(ACB')=2\angle B. \tag{3}$$

3. $A,B,A',B'$ 在一个大圆上,这个大圆把球面分成两个半球面,我们考虑点 $C$ 所在的半球面,如图 2-40,可以看出它由四个球面三角形组成:

球面三角形 $ABC$、球面三角形 $A'BC$、球面三角形 $ACB'$、球面三角形 $A'B'C$.

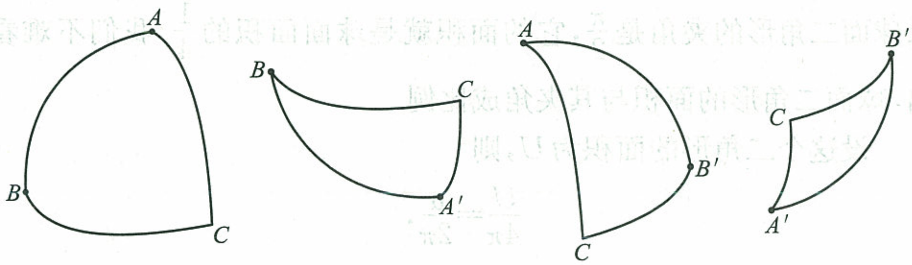



图 2-40

所以

$$S(ABC)+S(A'BC)+S(ACB')+S(A'B'C)=2\pi. \tag{4}$$

计算(1)+(2)+(3)-(4),得到

$$2S(ABC)=2(\angle A+\angle B+\angle C)-2\pi,$$

即 $$S(ABC)=\angle A+\angle B+\angle C-\pi.$$

**定理 4.1 单位球面上三角形的面积等于其内角和减去 $\pi$.**

即单位球面上三角形 $ABC$ 的面积 $S=\angle A+\angle B+\angle C-\pi$,其中

$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是球面三角形 $ABC$ 的内角.

推论：球面三角形的三个内角之和大于 $\pi$.

**例**　计算以北京、上海、重庆为顶点的球面三角形的边长和面积.

**解**　根据地理知识可知，北京位于北纬 $39°56'$、东经 $116°20'$，上海位于北纬 $31°14'$、东经 $121°29'$，重庆位于北纬 $29°30'$、东经 $106°30'$，地球半径为 $R\approx 6\ 400$ km.

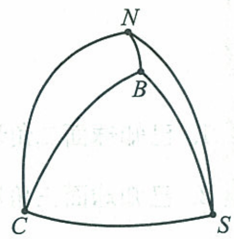


图 2-41

如图 2-41 所示，设 $N$ 为北极点，$B$ 为北京，$S$ 为上海，$C$ 为重庆. 在球面三角形 $NBC$ 中，

$$\angle BNC=116.3°-106.5°=9.8°\approx 0.17\ \text{rad},$$

$$NB=\frac{50.1}{180}\pi\times R\approx 0.87\times R=5.6\times 10^3(\text{km}),$$

$$NC=\frac{60.5}{180}\pi\times R\approx 1.06\times R=6.8\times 10^3(\text{km}).$$

解球面三角形 $NBC$，利用边的余弦定理

$$\cos\frac{BC}{R}=\cos 0.87\cdot\cos 1.06+\sin 0.87\cdot\sin 1.06\cdot\cos 0.17,$$

可以求出　$BC\approx 0.24R=1.5\times 10^3(\text{km})$，

同理　$BC\approx 0.16R=1.0\times 10^3(\text{km})$，

$CS\approx 0.22R=1.4\times 10^3(\text{km})$.

解球面三角形 $BSC$，仍然利用边的余弦定理

$$\cos 0.22=\cos 0.24\cdot\cos 0.16+\sin 0.24\cdot\sin 0.16\cdot\cos\angle CBS,$$

可以求出　$\angle CBS\approx 1.11\ \text{rad}$.

同理　$\angle BSC\approx 1.34\ \text{rad}$，　$\angle SCB\approx 0.71\ \text{rad}$.

所以球面三角形 $BSC$ 的面积为

$$(1.11+1.34+0.71-\pi)R^2\approx 8.2\times 10^5(\text{km}^2).$$

## 练　习

1. 证明：半径为 $R$ 的球面上，夹角为 $\alpha$ 的二角形的面积为 $U=2\alpha R^2$.
2. 证明：半径为 $R$ 的球面上，球面三角形 $ABC$ 的面积为 $S=(\angle A+\angle B+\angle C-\pi)R^2$.

## 习 题 2—4

### A 组

1. 已知球面二角形的面积是球面面积的$\frac{1}{8}$，求其夹角.
2. 已知球面三角形的边、角如下，求它的面积(前两组为单位球面，后两组球面半径为 2)：

   (1) 已知 $a=\frac{\pi}{3}, b=\frac{\pi}{3}, c=\frac{2\pi}{3}$；

   (2) 已知 $a=\frac{\pi}{2}, \angle B=\frac{\pi}{2}, c=\frac{2\pi}{3}$；

   (3) 已知$\angle A=\frac{\pi}{3}, \angle B=\frac{\pi}{4}, \angle C=\frac{3\pi}{4}$；

   (4) 已知 $a=\frac{2\pi}{3}, \angle B=\frac{\pi}{2}, \angle C=\frac{\pi}{3}$.
3. 查阅资料，比较例 2 结果与实际数据的差异.
4. 在单位球面上，已知等边球面三角形的面积等于球面面积的$\frac{1}{4}$，求它的三个内角和三条边.
5. 用 4 个全等的球面三角形覆盖整个球面，如何构造？
6. 已知地球表面上的球面三角形的三边分别是 1 000 km，1 500 km，2 000 km，求它的面积.

### B 组

1. 用 8 个全等的球面三角形覆盖整个球面，如何构造？
2. 在平面上，用同样大小的等边三角形可以覆盖整个平面，从一点出发需要 6 个等边三角形. 从球面上一点出发，要求有 5 个球面等边三角形，这样的球面三角形覆盖是否成立？说明你的想法.

# 复习题二

## A　组

1. 已知三个球面角分别为$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{6}$，它们可以是一个球面三角形的三个内角吗？

2. 如果一个球面三角形 $ABC$ 的三边都是$\frac{\pi}{2}$，证明：球面三角形 $ABC$ 的极三角形是它自身.

3. 与平面内菱形比较，四边相等的球面四边形，除了对角线垂直平分外，还有什么性质与菱形类似.

4. 已知球面三角形的三边分别为 $a=\frac{\pi}{4}$，$b=\frac{\pi}{2}$，$c=\frac{\pi}{3}$，求中位线的长.

5. 已知球面三角形 $ABC$ 的三边分别为 $a=\frac{\pi}{3}$，$b=\frac{\pi}{2}$，$c=\frac{\pi}{4}$，求三条边上的高，再求各边与对应高线的乘积的一半，比较三个结果是否一样. 比较这个结果和平面几何中相类似的情况，你发现了什么？

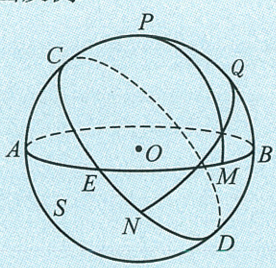
6. 在地球表面，当一个等边三角形的内角为 60.01°时，它所对的边长是多长？当一个等边三角形的内角为 60.001°时，它所对的边长是多长？当一个等边三角形的内角为 60.000 1°时，它所对的边长是多长？

7. 已知球面三角形 $ABC$ 的三个内角之和为$\frac{5\pi}{4}$，求这个球面三角形的面积与球面面积的比.

## B　组

1. 在一个给定的球面三角形中，每条边上的中线是否确定？每个内角的角平分线是否确定？每条边上的高线是否确定？每条边上的垂直平分线是否确定？证明你的想法或给出反例.

2. 如图所示，设球面 $S$ 上两个大圆弧$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{CD}$相交于 $E$，在$\overset{\frown}{EB}$，$\overset{\frown}{ED}$上各取一点 $M$，$N$，使得$\overset{\frown}{EM}>\overset{\frown}{EN}$. 过$\overset{\frown}{AB}$的极点 $P$ 作大圆弧$\overset{\frown}{PM}$，过$\overset{\frown}{CD}$的极点 $Q$ 作大圆弧$\overset{\frown}{QN}$，且 $A$，$B$，$C$，$D$，$P$，$Q$ 在同一个大圆上.
   证明：$\angle BPM<\angle DQN<\angle CQN$.



（第 2 题）

3. 如果一个三角形的三条边分别是 10，15，18，把它放在平面上和放在半径为 10 000 的球面上，试比较这两个三角形的正弦定理.

4. 求以北京、上海、广州为顶点的球面三角形的面积.

# 第三章　欧拉公式与非欧几何

球面上的几何有很多应用，不仅可以帮助我们计算线段的长度、夹角的大小、球面图形的面积等，而且还可以帮助我们探索某些问题的规律. 本章我们将利用球面上的几何证明欧拉公式.

球面上的几何是不同于平面欧氏几何的一种新的几何，本章还将介绍一些非欧几何，使同学感受到客观世界中不同的数学模型.

## §1　球面上的欧拉公式

### 1.1　球面三角剖分

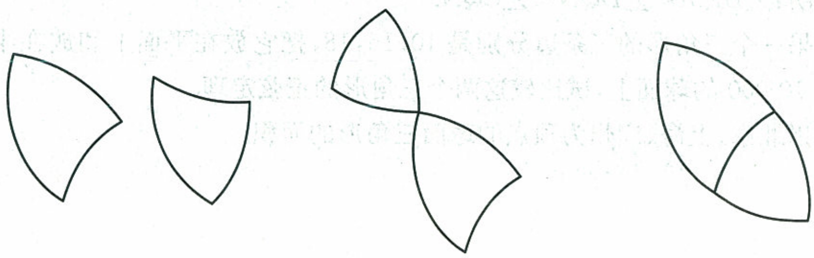
设 $S$ 是一个球面，我们把球面分割成若干个球面三角形，要求球面上的每一点都属于某个球面三角形的内部或边.

在这些球面三角形中，任何两个球面三角形的位置关系只有以下 3 种：

(1) 两个球面三角形没有公共点；(如图 3-1(a))

(2) 两个球面三角形只有一个公共的顶点；(如图 3-1(b))

(3) 两个球面三角形有一条公共边. (如图 3-1(c))



(a)　　(b)　　(c)

图 3-1

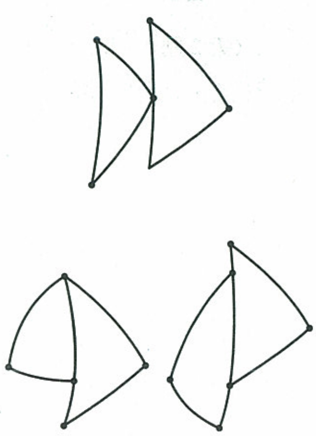


图 3-2

球面上由这些球面三角形所构成的网络，叫作球面 $S$ 上的一个三角剖分，记为 $\sigma$.

如图 3-2 中所示的两个球面三角形的位置关系在球面的三角剖分中都是不允许出现的.

## 1.2　球面上的欧拉公式

设 $\sigma$ 是球面 $S$ 的一个三角剖分，每一个三角形的顶点称为这个三角剖分 $\sigma$ 的顶点，每一个三角形的边称为这个三角剖分 $\sigma$ 的边，我们把这个三角剖分 $\sigma$ 的顶点数记为 $V$，边数记为 $E$，这个三角剖分 $\sigma$ 的三角形的个数记为 $F$，那么 $V,E,F$ 满足什么关系呢？

### 动手实践

观察下面的球面三角剖分(如图 3-3)，记录它们的顶点数 $V$，边数 $E$ 和三角形的个数 $F$，把这些数据填写在表 3-1 中，说明它们满足什么关系.

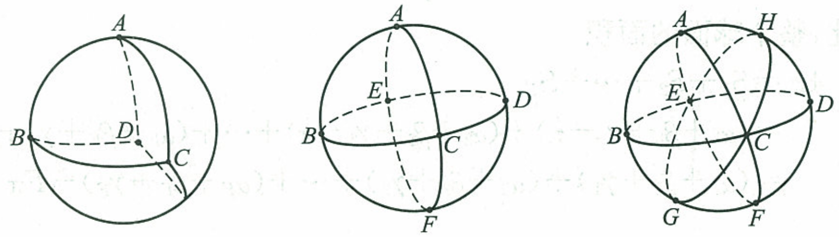



图 3-3

**表 3-1**

| | 顶点数 $V$ | 边数 $E$ | 三角形个数 $F$ | $V-E+F$ |
|---|---|---|---|---|
| 图 3-3(a) | | | | |
| 图 3-3(b) | | | | |
| 图 3-3(c) | | | | |

### 抽象概括

球面上的三角剖分 $\sigma$ 满足下面的公式：

$$V-E+F=2.$$

其中 $V,E,F$ 分别是三角剖分 $\sigma$ 的顶点数、边数和三角形的个数.

我们把这个公式叫作球面的**欧拉公式**.

这个公式与球面的大小，三角剖分的方式无关. 不管你在怎样的球面上，如何进行三角剖分，虽然 $V,E,F$ 都发生了很大的变化，但是它们之间的关系永远满足欧拉公式. 因此，欧拉公式反映了球面本身所固有的性质.

在选修系列 3 课程中，专题《欧拉公式与闭曲面的分类》对欧拉公式及它的作用进行了详细讨论. 有兴趣的同学可以选读.

## 1.3　球面上欧拉公式的证明

1. 考虑 $E$ 和 $F$ 的关系：球面上共有 $F$ 个三角形，每个三角形有三条边，每条边属于两个三角形，所以

$$3F=2E,$$

即

$$\frac{1}{2}F=E-F. \tag{1}$$

2. 把 $F$ 个三角形编号，记为 $i=1,2,\cdots,F$. 对于第 $i$ 个三角形，设它的面积为 $S_i$，内角的大小分别为 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$，则

$$S_i=\alpha_i+\beta_i+\gamma_i-\pi,$$

因此，整个球面的面积

$$\begin{aligned}4\pi&=S_1+S_2+\cdots+S_F\\&=(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-\pi)+(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2-\pi)+\cdots+(\alpha_F+\beta_F+\gamma_F-\pi)\\&=(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)+(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)+\cdots+(\alpha_F+\beta_F+\gamma_F)-F\pi.\end{aligned} \tag{2}$$

3. 因为三角剖分 $\sigma$ 共有 $V$ 个顶点，并且在每个顶点处，以它为顶点的所有球面角之和为 $2\pi$，所以

$$(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)+(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)+\cdots+(\alpha_F+\beta_F+\gamma_F)=2\pi V. \tag{3}$$

4. 根据(1)(2)(3)式，得

$$V-E+F=2.$$

## 习 题 3—1

1. 在一个球面上，画出一个三角剖分，并分别数出 $V,E,F$，验证欧拉公式.
2. 若 $\sigma$ 是球面上的一个三角剖分，说明 $\sigma$ 的三角形个数一定是偶数.

# §2　简单多面体的欧拉公式

## 2.1　凸多面体和简单多面体

由若干个平面多边形所围成的封闭的几何体，称为**多面体**. 如果一个多面体在它的每一个面所决定的平面的同一侧，就称为**凸多面体**.

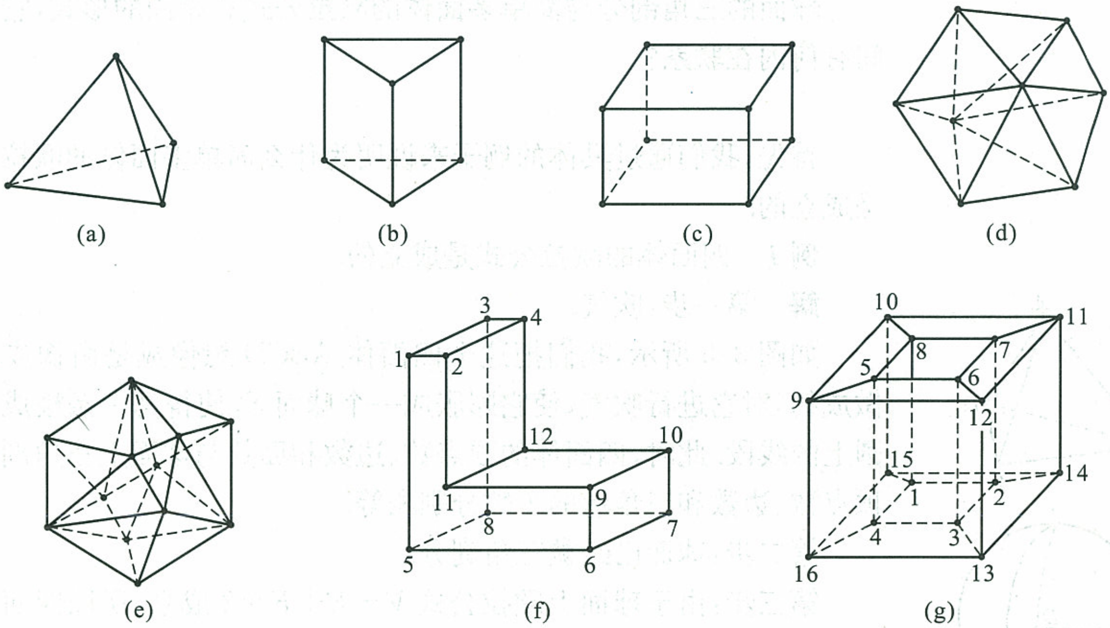



图 3-4

在图 3-4 中，(a)(b)(c)(d)(e) 都是凸多面体，而(f)(g)不是凸多面体.

我们把多面体想像成是由橡皮薄膜围成的，对这个橡皮薄膜做成的多面体进行充气，如果能变成一个球面，我们就把这样的多面体叫作**简单多面体**.

图 3-4 中的(a)(b)(c)(d)(e)(f)都是简单多面体，而(g)不是简单多面体.

### 动手实践

用 $V$ 表示多面体的顶点数，$E$ 表示多面体的棱数，$F$ 表示多面体的面数，对图 3-4 中的 6 种简单多面体计算 $V-E+F$.

**抽象概括**

简单多面体的欧拉公式为 $V-E+F=2$.

## 2.2 简单多面体的欧拉公式的证明

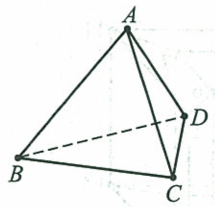
**问题提出**

球面的三角剖分与简单多面体的欧拉公式有相同的形式，它们之间有何内在联系?

首先，我们通过具体的例子来说明为什么简单多面体的欧拉公式是成立的.

**例 1** 四面体的欧拉公式是成立的.

**解** 第一步：吹气.



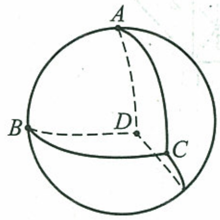




图 3-5

如图 3-5 所示，我们把这个四面体 $ABCD$ 想像成是由橡皮薄膜做成的，对它进行吹气，使它膨胀成一个球面 $S$，使得每一条棱成为大圆上的线段. 此时，四面体的顶点数、边数和面数与球面上三角剖分的顶点数、边数和三角形的个数分别相等.

第二步：球面已经被三角剖分.

第三步：由于球面上欧拉公式 $V-E+F=2$ 成立，所以四面体的欧拉公式也成立.

**例 2** 长方体的欧拉公式是成立的.

**解** 第一步：吹气.

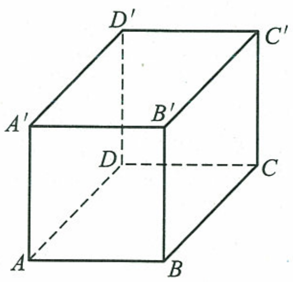



图 3-6

如图 3-6 所示，我们把这个长方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 想像成是由橡皮薄膜做成的，对它进行吹气，使它膨胀成一个球面 $S$(如图 3-7)，使得每一条棱成为大圆上的线段. 此时，长方体的上底面长方形 $A'B'C'D'$ 为球面四边形 $A'B'C'D'$，下底面长方形 $ABCD$ 为球面四边形 $ABCD$，同样，长方体中的其他面 $BCC'B'$，$ADD'A'$，$ABB'A'$，$DCC'D'$ 分别变成了球面四边形 $BCC'B'$，$ADD'A'$，$ABB'A'$，$DCC'D'$. 此时，长方体的顶点数、边数和面数与球面上球面四边形的顶点数、边数和面数分别相等；

第二步：把球面四边形进行三角剖分.

对每一个球面四边形增加一条对角线，使其变成两个球面三角形；

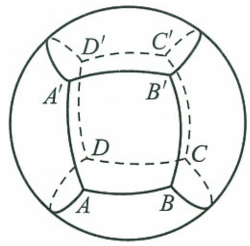



图 3-7

第三步：在对球面四边形进行剖分时，每剖分 1 次，边数 $E$ 都增加 1 条，面数 $F$ 也增加 1 个，而顶点数 $V$ 不变. 因为总共剖分 6 次，所以剖分的边数总共为 $E+6$，剖分的面数总共是 $F+6$，顶点数仍然是 $V$. 根据球面三角剖分的欧拉公式，有 $V-(E+6)+(F+6)=2$，即有 $V-E+F=2$. 所以，长方体的欧拉公式成立.

实际上，我们可以按照上面的思路证明一般简单多面体的欧拉公式是成立的：

第一步：我们把简单多面体想像成是由橡皮薄膜做成的，对它进行吹气，使它膨胀成一个球面，使得每一条棱成为大圆上的线段. 此时，多面体的顶点数、边数和面数与球面上球面多边形的顶点数、边数和面数分别相等；

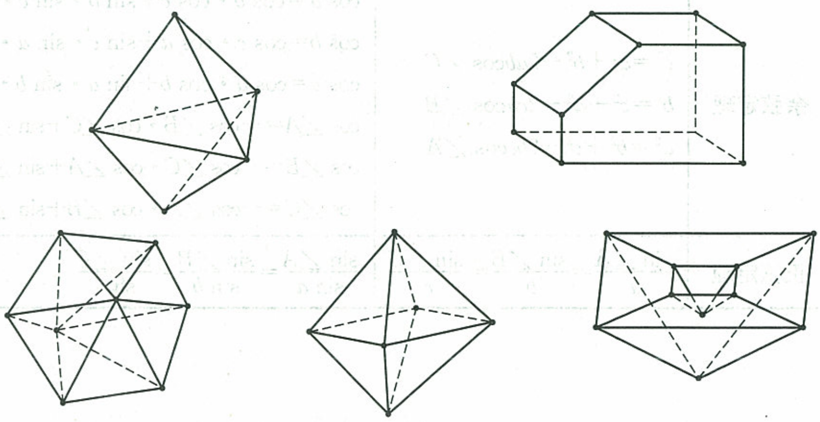
第二步：把球面多边形进行三角剖分；

第三步：在对球面多边形进行剖分时，每剖分一次，边数 $E$ 都增加 1 条，面数 $F$ 也增加 1 个，而顶点数 $V$ 不变. 如果总共剖分 $N$ 次，那么剖分的边数总共为 $E+N$，剖分的面数总共是 $F+N$，顶点数仍然是 $V$. 根据球面三角剖分的欧拉公式，有 $V-(E+N)+(F+N)=2$，即有 $V-E+F=2$.

所以，简单多面体的欧拉公式成立. 这个公式是由数学家欧拉(L. Euler，1707—1783)于 1750 年首先发现的. 由于欧拉公式的出现，引出了一门影响深远的数学分支——拓扑学. 为此，这个公式用欧拉的名字命名.

## 习 题 3—2

1. 已知一个简单多面体的顶点数为 8，面数为 6，求这个多面体的棱数.
2. 找出下图中哪些多面体是简单多面体，并验证简单多面体的欧拉公式.



(第 2 题)

# §3　欧氏几何与球面几何的比较

## 3.1　欧氏几何与球面几何的区别与联系

球面上几何图形与平面上几何图形的性质的差别见表 3-2.

表 3-2

| | 欧氏几何 | 球面几何 |
|---|---|---|
| 直线 | 过两点有唯一一条直线 | 过两个非对径点有唯一一条直线(大圆) |
| | 直线可以无限延伸 | 大圆是封闭的、有限的 |
| 角的含义 | 两直线的交角 | 两个大圆在交点处切线的交角(即两个大圆所在平面的二面角的平面角) |
| 两点间距离的含义 | 连接它们的直线段长度 | 过两点的大圆中的劣弧弧长 |
| 三角形内角和 | 等于 180° | 大于 180° |
| 三角形面积 | 底边长乘高线长的一半 | $S(ABC)=\angle A+\angle B+\angle C-\pi$,其中$\angle A,\angle B,\angle C$为单位球面上三角形的三个内角(弧度制) |
| 三角形全等条件 | SSS,SAS,ASA | SSS,SAS,ASA,AAA |
| 相似性 | 存在不全等的相似三角形 | 同一球面或等球面上没有相似三角形,不存在相似概念 |
| 平行性 | 过直线外一点有且只有一条直线与之平行 | 任意两条直线必相交于两点;没有平行的概念 |
| 勾股定理 | $c^2=a^2+b^2$ | $\cos c=\cos a\cdot\cos b$ |
| 余弦定理 | $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C$<br>$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\angle B$<br>$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A$ | $\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\angle A$<br>$\cos b=\cos c\cdot\cos a+\sin c\cdot\sin a\cdot\cos\angle B$<br>$\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos\angle C$<br>$\cos\angle A=-\cos\angle B\cdot\cos\angle C+\sin\angle B\cdot\sin\angle C\cdot\cos a$<br>$\cos\angle B=-\cos\angle C\cdot\cos\angle A+\sin\angle C\cdot\sin\angle A\cdot\cos b$<br>$\cos\angle C=-\cos\angle A\cdot\cos\angle B+\sin\angle A\cdot\sin\angle B\cdot\cos c$ |
| 正弦定理 | $\frac{\sin\angle A}{a}=\frac{\sin\angle B}{b}=\frac{\sin\angle C}{c}$ | $\frac{\sin\angle A}{\sin a}=\frac{\sin\angle B}{\sin b}=\frac{\sin\angle C}{\sin c}$ |

## 抽象概括

通过上面的比较，我们看到，球面上的几何是与平面几何不同的一种几何理论．平面几何最早由古希腊数学家欧几里得（Euclid，公元前 300 年左右）整理成系统的理论．他的不朽之作《几何原本》不仅包含了平面几何，也包含了立体几何．为了纪念他对人类作出的伟大贡献，后来就把这种几何称为欧氏几何．

球面上的几何与欧氏几何有不同之处，但它们之间也有一些共同特征．（如表 3-3）

**表 3-3**

| | 欧氏几何 | 球面几何 |
|---|---|---|
| 直线 | 都是两点间距离最短的道路 | |
| 三角形的性质 | 大边对大角，大角对大边；<br>两边之和大于第三边，两边之差小于第三边 | |
| 三角形全等的条件 | SSS，SAS，ASA | |

两种几何的这些相同之处，说明它们之间应该有某种内在的联系．

首先分析一下球面三角形的面积公式

$$S=(\angle A+\angle B+\angle C-\pi)R^2,$$

把这个公式改写成　$\angle A+\angle B+\angle C-\pi=\dfrac{S}{R^2}$．

这个等式的左端反映出球面上的几何与平面几何的差距．

不难看出，当球面半径 $R$ 无限增大时，球面逐渐趋向于平面，$\dfrac{S}{R^2}$ 越来越小，球面三角形逐渐趋向于平面三角形，球面几何的性质逐渐接近于平面几何的性质．

所以我们可以说：

**当球面半径趋向于无穷大时，球面上的几何以平面几何为极限．**

因为地球的半径非常大，当我们研究的范围相对于地球半径很小时，$\dfrac{S}{R^2}$ 就一定很小．因此，可以用平面几何的知识来代替球面几何知识，所产生的误差很小．

## 练　习

1. 测得地面上三角形的三边分别为 32 km，43 km，53 km，地球半径约为6 400 km，计算$\frac{S}{R^2}$.
2. 计算第 1 题中球面三角形的面积并计算把它看作平面三角形时的面积，再求二者之差.

## *3.2　另一种非欧几何

通过前一小节的分析，我们发现三角形的三个内角之和的大小，在很大程度上反映了平面欧氏几何与球面几何的差别.

当三角形的三个内角之和等于 $\pi$ 时，就是欧氏几何；当三角形的三个内角之和大于 $\pi$ 时，就反映出球面几何的主要特征.

### 问题提出

有没有三角形三个内角之和小于 $\pi$ 的几何呢？

我们简单回顾一段几何发展史. 在 17 世纪以前，人们认为只有一种几何，就是欧氏几何，它是一切科学的基础. 但是到了 17，18 世纪，数学家在对几何理论的基础进行深入研究时，首先把注意力集中在“平行公理”上.

平行公理是这样叙述的：在平面上，过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线不相交（如图 3-8）.

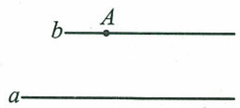


图 3-8

人们没有怀疑这条公理的真伪，而是感到这条公理涉及无穷的概念，不够直观，人们希望能够证明它，或者用一条更简单、更直观的公理代替它.

在探索过程中，人们证明了平行公理与“三角形内角和等于 $\pi$”是等价的. 即可以用“三角形内角和等于 $\pi$”来代替平行公理. 当然，这没有什么实质意义，因为它并不比平行公理简单多少.

在经过漫长的研究历程和许多数学家的失败与挫折之后，俄国数学家罗巴切夫斯基（N. I. Lobachevsky，1792—1856）认识到“平行公理”是不可能证明的. 如果用一条与“平行公理”对立的命题来替换“平行公理”，将会得到一种新的几何理论. 这个命题最后被称为“罗氏平行公理”.

罗氏平行公理是这样叙述的：

**在平面上，过直线 $AB$ 外一点 $C$，可以作无穷多条直线与 $AB$ 不相交.**（如图 3-9）

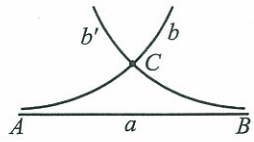



图 3-9

罗巴切夫斯基用这条罗氏平行公理代替了原来的欧氏平行公理，在保留欧氏几何中其他所有公理的基础上，推导出了一套几何理论. 虽然这种几何理论中有许多看似荒谬的不符合人类实际经验的结论，但是在逻辑上这套理论却是无矛盾的. 后人就把这种几何理论称为罗氏几何. 这也是人们最早发现的非欧几何.

在罗氏平面几何中，过已知直线 $AB$ 外一点 $C$ 有无穷多条直线与已知直线 $AB$ 不相交. 当然还有无穷多条直线与已知直线 $AB$ 相交. 因此存在两条界限直线 $b$ 和 $b'$，介于交与不交两类直线之间. 这两条直线称为直线 $AB$ 的平行线. 过点 $C$ 的其他与 $AB$ 不相交的直线称为 $AB$ 的离散线.

罗巴切夫斯基证明了：

两条平行线，在一侧无限接近，而在另一侧无限远离；（如图 3-10）

三角形的三个内角之和小于 $\pi$；（如图 3-11）

存在边长无限而内角和为零的三角形；（如图 3-12）

……

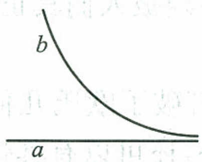



图 3-10

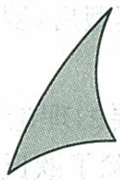


图 3-11

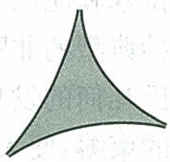


图 3-12

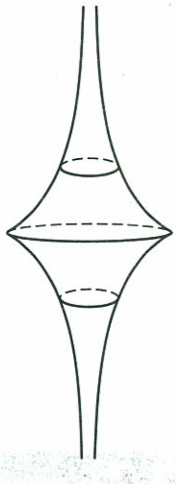


图 3-13

罗巴切夫斯基在世时，由于罗氏几何的结论与人类的直觉不一致，当时并没有被大多数数学家接受. 1868 年意大利数学家贝尔特拉米（Beltrami，1835—1900）找到了一种称为伪球面的像两朵喇叭花形状的旋转曲面（如图 3-13）. 在这种曲面的一片区域上，他发现三角形的三个内角之和小于 $\pi$. 这等价于这种曲面上可以建立罗氏几何. 这相当于给罗氏几何找到了一种有实际意义的模型.

后来，法国数学家庞加莱（Poincare，1854—1912）构造出罗氏几何的另一个模型，这种模型有助于对罗氏几何的直观理解. 具体模型如下：

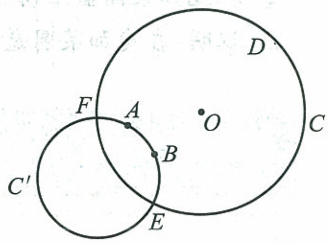



图 3-14

设 $C$ 是一圆，$D$ 是 $C$ 的内部，如图 3-14 所示.

（1）庞加莱模型中的点是 $D$ 中的点，称为“罗氏点”；

（2）庞加莱模型中，过点 $A,B$ 的“直线”$l$ 是过点 $A,B$ 的圆 $C'$ 在 $D$ 内的那部分圆弧. 其中 $C'$ 是和 $C$ 在交点处垂直的圆，即在交点 $E$，

$F$ 处分别作两个圆的切线，它们相互垂直.

当 $A$，$B$ 在 $C$ 的直径上时，过点 $A$，$B$ 的“直线”即是该直径.

若 $D$ 中两条“直线”（即上述圆弧）相交于圆 $C$ 上，称这两条直线平行；若 $D$ 中两条直线不相交时，称这两条直线离散（如图 3-15）.

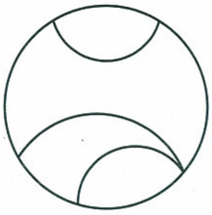


图 3-15

根据平面几何的知识，可以得到以下结果（如图 3-16）：

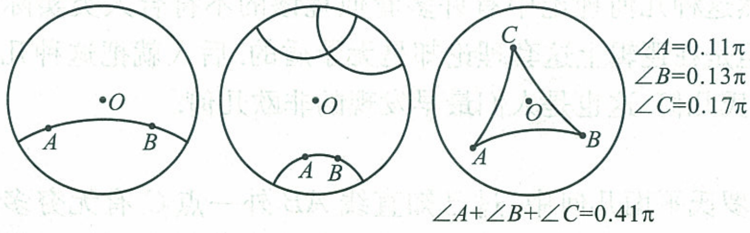



图 3-16

(1) 经过两个罗氏点，有唯一的罗氏直线；

(2) 罗氏平行公理成立：在平面上，过直线 $AB$ 外一点 $C$，可以作无穷多条直线与 $AB$ 不相交；

(3) 三角形的三个内角之和小于 $\pi$.

庞加莱的模型说明罗氏几何可以在欧氏平面的一个开圆盘上实现. 因此，只要欧氏几何是无矛盾的，罗氏几何也就是无矛盾的. 有了贝尔特拉米和庞加莱等人的模型后，罗氏几何逐渐被人们真正接受，成为一种典型的非欧几何.

罗氏几何的发现有着重要的理论意义. 它打破了欧氏几何对人类认识的束缚，使人们认识到除了欧氏几何以外，还可以有其他的几何. 为了实际问题的需要，完全可以把原本不属于几何范畴的问题，通过一种适当的解释，转化为几何问题. 再根据它所遵循的基本规律，建立起一套新的几何理论. 于是就构造出一种新的几何. 正是在这种思想指导下，在现代数学中，才有了多种多样的几何理论.

## 练习

1. 在庞加莱圆盘上，找到一种“罗氏直线”的作图方法.
2. 证明：在庞加莱圆盘上，经过两个罗氏点，有唯一的罗氏直线.

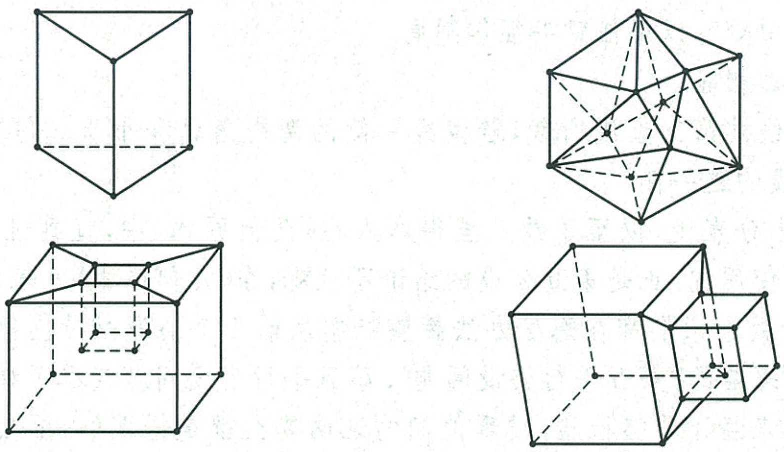
## 习题 3—3

证明：在球面几何中，过直线外一个不是该直线极点的点存在唯一一条直线与该直线垂直.

# 复习题三

## A　组

1. 找出下图中哪些多面体是简单多面体，并验证简单多面体和欧拉公式.



（第 1 题）

2. 在庞加莱圆盘上，画出一个罗氏三角形，测量其三个内角. 验证：在罗氏几何中，三角形的内角和小于 π.

## B　组

结合本节后的阅读材料，写一下你对非欧几何发现的意义的认识.

## 阅读材料

### 一、非欧几何背景

公元前 300 年，古希腊数学家欧几里得在其传世之作《几何原本》中规定了 5 个公设：

1. 从任一点到另一点可以引直线.
2. 每条直线都可以无限延长.
3. 以任意点作中心可以用任意半径作圆周.
4. 所有的直角都相等.
5. 平面上两直线被第三直线所截，若截线一侧的两内角之和小于二倍直角，则两直线必相交于截线的这一侧.

第五公设不是十分直观，以至于欧几里得本人在《几何原本》中，直到证明第 29 个命题时，才不得不使用它. 正是第五公设的结论不直观，在《几何原本》发表后 2 000 多年内，世界各国的数学家们都在想尽办法希望能够从前 4 个公设推导出第五个公设，这就是数学史上著名的“第五平行公设问题”. 第五平行公设问题耗尽了许多数学家一生的心血，但后来经过严格检验，发现他们的证明要么就是错误的，要么就是在证明过程中用了与第五平行公设等价的命题. 尽管如此，数学家们的工作还是为新几何的建立奠定了实践的基础.

1795 年，苏格兰数学家普雷菲(J. Playfair，1748—1819)提出一条跟欧氏第五公设等价的命题，其直观性明显比第五公设好：过直线外一点有唯一直线与该线平行(这也是中学教材中经常使用的公理).

1697 年，意大利数学家萨开里(G. Saccheri，1667—1733)讨论“萨开里四角形”(在 $ABCD$ 中，$AD=BC$，$\angle A=\angle B=90°$)，得到了定理：“在萨开里四角形中，$\angle C=\angle D$.”

萨开里关于他的四角形 $ABCD$ 曾做过三种假设：

(1) 锐角假设：若 $\angle C=\angle D<90°$.

(2) 直角假设：若 $\angle C=\angle D=90°$.

(3) 钝角假设：若 $\angle C=\angle D>90°$.

萨开里证明过直角假设和第五公设等价. 他与其他数学家一样相信直角假设成立，而另外两个假设必须抛弃. 他首先正确地得到钝角假设矛盾，所以只要将锐角假设也导致矛盾，那么第五公设就证明了. 他从锐角假设出发得出一系列属于罗巴切夫斯基几何的命题，尽管这些命题与直观不相符，却找不到一个逻辑矛盾. 但他认为锐角假设是与直线的本质抵触的. 事实上，萨开里的工作离非欧几何只有一步之遥.

1794 年，法国数学家勒让德(A. M. Legendre，1752—1833)在著作《几何原理》中试证第五公设时，讨论了三种互相排斥的假定：

(1) 三角形的内角和大于两直角.

(2) 三角形的内角和等于两直角.

(3) 三角形的内角和小于两直角.

他用正确的推理证明了第一个假定矛盾，若能证明第三个假定也矛盾，那就证明了三角形内角和等于两直角，即证明了第五公设. 但在证明第三个假定矛盾时，他不觉察地用上一个与第五公设等价的命题.

德国大数学家高斯(J. C. F. Gauss，1777—1855)是真正认识到第五公设问题本质的人. 1817 年，他确信第五公设独立于其他公设，并开始得到一系列非欧几何的结论，但是高斯(由于哲学观点的原因)没有发表他的任何证明与结论，只是与他的朋友讨论了有关问题.

1823 年，匈牙利年轻的数学家鲍耶(J. Bolyai，1802—1860)给他父亲(高斯的朋友之一)的信中叙述了自己对第五公设问题的研究，两年后发表在他父亲一本书的附录中，其中主要的结论是首次说明可能存在一种全新的几何.

毫无疑问，发现非欧几何的名誉最后落在俄罗斯数学家罗巴切夫斯基(N. I. Lobachevsky，1792—1856)头上. 1829 年，他在喀山用俄文发表了他的非欧几何论文. 这篇首创性论文的问世，标志着非欧几何的诞生. 非欧几何也称高斯—鲍耶—罗巴切夫斯基几何，简称罗氏几何(也叫双曲几何).

罗氏几何平行公设是：过直线外一点存在无穷多条直线与该直线不相交. 罗氏几何又叫双曲几何，在它上面“三角形内角和小于一个平角”.

几何学更大的发展应该归功于德国数学家黎曼(G. F. B. Riemann，1826—1866)，他在 1854 年提交的博士论文中，用“长度”给几何一个全新的理解，即空间由“长度”决定. 尽管论文在他去世后两年才得以发表，但这丝毫不影响其思想的重要性，它建立了一个全新的几何空间观念. 在黎曼的“球面”中，过直线外一点没有直线与之平行，三角形内角和大于一个平角.

不管是鲍耶还是罗巴切夫斯基，都没有给出非欧几何的模型理解. 直到 1868 年意大利数学家贝尔特拉米(E. Beltrami，1835—1900)才在三维欧氏空间中的伪球面上给出了非欧几何的模型. 这样人们就可以在欧氏空间中看见非欧氏几何.

## 二、学习非欧几何的意义

1. 通过学习球面几何与罗氏几何，使我们看到“几何学”并不是欧氏几何一统天下. 虽然欧氏几何在我们的日常生活、生产实践与科学试验中有着广泛的应用，但是在某些领域或某种场合欧氏几何并不适用. 例如在地球上要测量相距较远的两地之间的距离，或者较大范围的面积时，用欧氏几何的知识会产生很大的误差，而用球面几何的知识才能真实地反映出客观现实. 所以，非欧几何也有很重要的实际应用价值，也是我们应该学习的重要理论.

2. 历史上，从第一种非欧几何——罗氏几何产生以来，逐步地把人们的思想从欧氏几何的束缚中解放出来. 特别是使一些科学家认识到，为了解决某一类实际问题

(虽然这些问题并不属于几何范畴),也可以仿照几何中的办法,建立起一个空间和一套几何理论,来适应解决这一类问题的需要.于是,人们对“几何”的理解大大扩展了.正是这种思想促使数学科学获得了长足发展,使得在现代数学中出现了多种多样的几何理论,它们各自有着不同的应用范围.这种思想也逐渐形成了数学理论发展的一种模式.

3.非欧几何的出现还自然而然地引发出一个问题:我们的宇宙到底是一种什么样的空间?它适用什么样的几何理论?人类对宇宙的探索从来没有停止过.长期以来,人们一直把宇宙空间简单地理解为三维欧氏空间.但是从非欧几何产生后,人们开始有了怀疑.直到20世纪初,一些天文学家、物理学家经过反复观测与研究,证实了“光线在通过大质量星球时会产生弯曲”.在宇宙中只有光线才能代表直线,而光线又是弯曲的.这很像球面几何中只有大圆才能代表直线,而大圆是弯曲的.由此可以断定宇宙中应该适用一种非欧几何.爱因斯坦的广义相对论,也是建立在这样一种几何之上来描述宇宙的.这种几何一般称为黎曼几何.探索大自然的奇妙是全人类共同的神圣任务,而要成为一个探索者,必须掌握丰富的科学知识.

# ◆ 复习小结建议

**一、复习本专题知识，结合自己的课堂笔记、作业和学习体会，对本专题的内容进行小结.**

请绘制出本专题的知识结构框图，在这个框图中包括下面的内容：

1. 直线、平面与球面有几种位置关系？如何判断？

2. 什么是圆幂定理？什么是球幂定理？

3. 什么是大圆？什么是小圆？什么是球面上的直线？什么是球面上的线段？与平面上的直线比较，球面上的直线有什么相同性质，有什么不同性质？

4. 什么是球面距离？如何计算球面距离？已知地球表面上两点的经纬度，如何计算它们之间的球面距离？

5. 什么是球面三角形？什么是极三角形？与平面几何比较，在确定一个球面三角形时，需要注意什么？与平面三角形比较，球面三角形有什么相同性质？有什么不同性质？

6. 与平面三角形比较，球面三角形全等的判定有什么相同定理？有什么不同定理？

7. 与平面三角形的内角和比较，球面三角形的内角和有什么特征？

8. 平面三角形的余弦定理和正弦定理是什么？球面三角形的余弦定理和正弦定理是什么？它们在解三角形的过程中的作用是什么？

9. 与平面几何比较，球面上是否有相似比不为 1 的两个图形？球面上是否有四个内角为直角的正方形？

10. 球面三角形的面积可以用“底乘高除以 2”计算吗？如何计算球面三角形的面积？如何计算地球表面三点确定的三角形的面积？通过球面三角形的面积公式，如何理解平面几何是球面几何的极限？

11. 什么是简单多面体的欧拉公式？如何理解简单多面体与球面多面体之间的顶点数、棱数和面数是一一对应的？如何利用球面三角形面积公式，证明简单多面体的欧拉公式？

12. 欧氏几何、球面几何、罗氏几何之间有什么相同性质？有

什么不同性质？

13. 罗氏几何是如何产生的？它的重要意义是什么？

**二、通过对本专题的小结，完成一份学习小结报告. 建议包括以下四方面内容：**

1. 你对本专题的整体结构和内容的理解；你认为在学习本专题过程中有哪些值得注意的问题；体会到哪些重要的数学思想和方法.

2. 整理你自己学习过的平面几何（三角形、四边形）知识，尽可能多地比较，它们是否在球面几何中成立.

3. 指出平面几何、球面几何、罗氏几何最本质的区别及相互关系，说明为什么相对于半径来说很小的一片球面可以作为一个平面来对待. 用几个最明显的结论支持你的观点.

4. 有条件的话，上网查找有关球面几何、罗氏几何的知识和软件，通过几何画板或 Java 语言制作一些非欧几何的程序，更多地发现有别于欧氏几何的性质.

**三、在教师组织的交流活动中，尽可能清晰简洁地介绍你做本专题报告中的收获、体会和发现. 在与其他同学的交流中分享思考的成果. 同时注意找出自己在本专题学习中尚未弄清楚的问题，提出有待进一步研究的新问题.**

附录 1

# 立体几何中的几个概念和性质

在数学 2(必修)“立体几何初步”中,立体几何知识已经有详细的讲述,这里只给出简要的介绍.

## 1 基本图形的位置关系

### 一、直线与直线的位置关系

观察图 1 所示的长方体,我们不难发现,空间中的直线与直线有以下 3 种位置关系:

(1) 两条不同直线是平行的,例如,$AB$ 与 $A'B'$,$AD$ 与 $A'D'$;

(2) 两条不同直线是相交的,例如,$AB$ 与 $BB'$,$AD$ 与 $DC$;

(3) 两条不同直线既不平行也不相交,例如,$AD$ 与 $BB'$,$A'B'$与 $CC'$.

我们把空间中既不平行也不相交的两条直线叫作**异面直线**.

如果两条直线相交,并且它们形成的夹角为 $90°$,那么称这两条直线互相**垂直**.

如果两条直线是异面直线,如 $AD$ 与 $BB'$,过点 $A$ 在平面$ABB'A'$中作 $AA'\parallel BB'$,如果 $AA'\perp AD$,我们也称异面直线 $AD$ 与 $BB'$**垂直**,记作 $AD\perp BB'$.

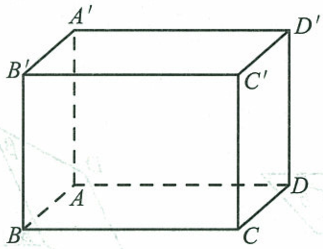



图 1

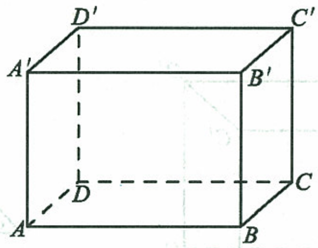



图 2

### 二、直线与平面的位置关系

观察图 2 所示的长方体 $ABCD—A'B'C'D'$,我们不难发现,空间中直线与平面有以下 3 种位置关系:

(1) 直线与平面是平行的,例如,$AB$ 平行于平面 $CC'D'D$;

(2) 直线与平面是相交的,例如,$AB$ 与平面 $ADD'A'$相交于点 $A$;

(3) 直线在平面内,例如,$AB$ 在平面 $ABCD$ 内.

在直线与平面相交的情形中,如果这条直线与平面内所有的直线都垂直,则称这条**直线与平面垂直**. 它们的交点称为**垂足**.

在图 2 所示的长方体 $ABCD—A'B'C'D'$中,直线 $AB$ 垂直于平面 $ADD'A'$和平面 $BCC'B'$,垂足分别是点 $A$ 和点 $B$.

**定理 1　如果一条直线与一个平面内两条相交直线都垂直,那么该直线垂直此平面.**(如图 3)

我们把这个定理叫作直线与平面垂直的判定定理.

**定理 2　如果平面外的一条直线与此平面内的一条直线平行，那么该直线与此平面平行.** (如图 4)

我们把这个定理叫作直线与平面平行的判定定理.

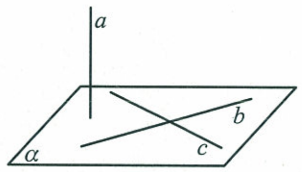



图 3

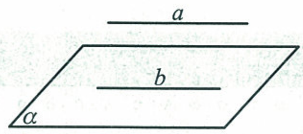



图 4

## 2　平面与平面的位置关系

观察图 5 所示的长方体 $ABCD—A'B'C'D'$，我们不难发现，空间中的两个不同平面有以下 2 种位置关系：

(1) 两个不同平面是平行的，例如，平面 $ABCD$ 与平面 $A'B'C'D'$ 互相平行；

(2) 两个不同平面是相交的，例如，平面 $ABCD$ 与平面 $ABB'A'$ 相交，交线为 $AB$.

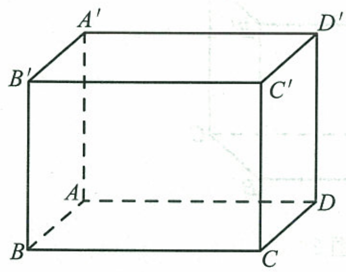



图 5

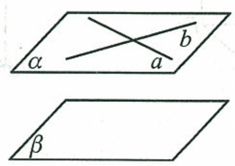



图 6

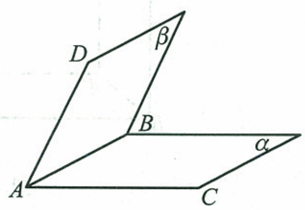



图 7

**定理 3　如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.** (如图 6)

我们把这个定理叫作平面与平面平行的判定定理.

一个平面内的一条直线，把这个平面分成两部分，其中的每一部分叫作**半平面**.

从一条直线出发的两个半平面组成的图形叫作**二面角**. 这条直线叫作**二面角的棱**，这两个半平面叫作**二面角的面**. 如图 7 所示，以直线 $AB$ 为棱，半平面 $\alpha$ 和 $\beta$ 为面的二面角，记成二面角 $\alpha$-$AB$-$\beta$ 或 $\overset{2}{\angle}\alpha$-$AB$-$\beta$.

以二面角的棱上任一点为端点，分别在两个半平面内作垂直于棱的射线，这两条射线所构成的角叫作这个二面角的**平面角**. 一个二面角的大小就是指它的平面角的大小，我们规定

二面角的大小在0°～180°之间.

如图 7 所示,如果 $AD\perp AB$,$AC\perp AB$,那么$\angle DAC$就是二面角$\alpha$-$AB$-$\beta$的平面角.

如果二面角的平面角是直角,那么称这个二面角为**直二面角**.

如果两个平面相交,并形成直二面角,那么称这两个**平面垂直**.

如图 8 所示,在长方体 $ABCD$—$A'B'C'D'$中,若$\alpha$,$\beta$分别表示平面$ABCD$和平面$AA'B'B$,那么$\alpha$-$AB$-$\beta$就是直二面角,即$\alpha\perp\beta$.

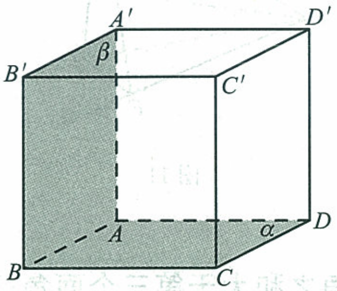


图 8

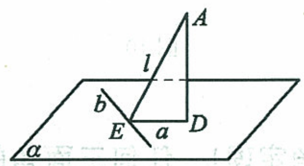


图 9

**定理 4　如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面垂直.**

我们把这个定理叫作平面与平面垂直的判定定理.

## 3　三垂线定理、三面角

如图 9 所示,设点 $A$ 是平面$\alpha$外一点,直线$AD\perp\alpha$,$D$是垂足,$b$是平面$\alpha$内的一条直线,$DE\perp b$且垂足是$E$,再连接$AE$,那么直线$AE$与$b$有什么关系?

因为$AD\perp\alpha$,而$b$在平面$\alpha$内,根据直线垂直平面的定义,$AD\perp b$;又因为$DE\perp b$,所以$b$垂直平面$ADE$中两条相交直线$AD$和$DE$,根据直线与平面垂直的判定定理,$b\perp$平面$ADE$. 所以$b\perp AE$.

**定理 5　若平面内的一条直线 $b$ 垂直平面外的另一条直线 $l$ 在该平面内的投影 $a$,则直线 $b$ 与直线 $l$ 垂直.**

我们把这个定理叫作三垂线定理. 这个定理在立体几何和球面几何中都有重要的应用.

**定理 5′　若平面内的一条直线 $b$ 垂直平面外的另一条与平面相交的直线 $l$,则这条直线 $b$ 与直线 $l$ 在该平面内的投影 $a$ 互相垂直.**

**证明**　如图 9,设直线$l$与平面$\alpha$的交点为$E$. 在$l$上取一点$A$,过$A$作$AD\perp\alpha$,垂足为$D$. 因为$b$在平面$\alpha$中,根据直线垂直平面的定义,$AD\perp b$,又因为$AE\perp b$,所以$b$垂直平面$ADE$中两条相交直线$AD$和$AE$. 根据直线与平面垂直的判定定理,$b\perp$平面$ADE$. 所以$b\perp DE$.

我们把这个定理叫作三垂线定理的逆定理.

以空间中一点 $O$ 为端点，引三条射线 $OA$，$OB$，$OC$，它们不在同一个平面内（如图 10 所示），这样的图形叫作**三面角**，记成$O\text{-}ABC$. 其中 $OA$，$OB$，$OC$ 叫作三面角的边，$\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle COA$ 叫作三面角的三个面角.

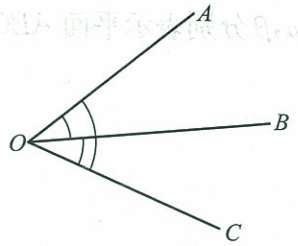


图 10

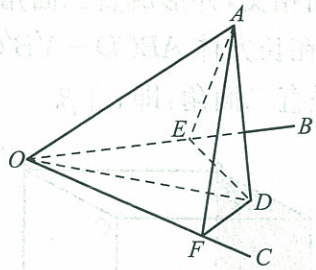


图 11

**定理 6（三面角定理）　任何三面角的两个面角之和大于第三个面角；两个面角之差小于第三个面角.**

**证明**　如图 11，过点 $A$ 作平面 $BOC$ 的垂线，垂足为 $D$. 假设 $D$ 在$\angle BOC$ 的内部. 在平面 $BOC$ 中，过 $D$ 作 $DE$ 垂直 $OB$，$DF$ 垂直 $OC$，垂足分别为点 $E$，$F$.

因为 $AD\perp OB$，$DE\perp OB$，所以 $AE\perp OB$（三垂线定理）.

从而 $\cos\angle AOB=\dfrac{OE}{OA}$，$\cos\angle DOB=\dfrac{OE}{OD}$.

又因为 $OA>OD$，所以 $\cos\angle AOB<\cos\angle DOB$.

根据三角函数的性质，有　$\angle AOB>\angle DOB$.

同理可证　$\angle AOC>\angle DOC$，

因此　$$\angle AOB+\angle AOC>\angle BOC.$$

类似地可以证明　$$\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC,$$
$$\angle AOC+\angle BOC>\angle AOB.$$

不妨假设$\angle BOC\geqslant\angle AOC$，从而可得
$$\angle BOC-\angle AOC<\angle AOB,$$
可以写成
$$|\angle BOC-\angle AOC|<\angle AOB.$$
同理可得
$$|\angle AOB-\angle AOC|<\angle BOC,$$
$$|\angle AOB-\angle BOC|<\angle AOC.$$

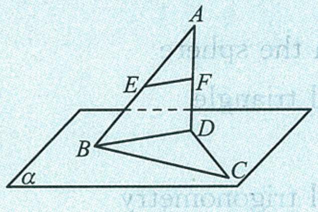
**思考交流**

垂足 $D$ 不在$\angle BOC$ 内部时，证明定理 6.

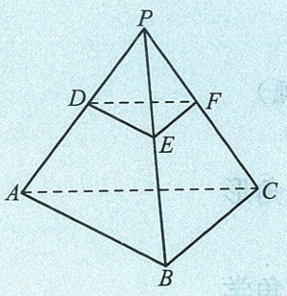
## 练 习

1. 在如图所示的空间四边形 $ABCD$ 中，$E,F$ 分别是 $AB,AD$ 的中点，试判断直线 $EF$ 与平面 $BCD$ 的位置关系.

2. 如图所示，已知点 $P$ 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，点 $D,E,F$ 分别在射线 $PA,PB,PC$ 上，并且 $\frac{PD}{PA}=\frac{PE}{PB}=\frac{PF}{PC}$. 求证：平面 $DEF$ // 平面 $ABC$.



(第 1 题)



(第 2 题)

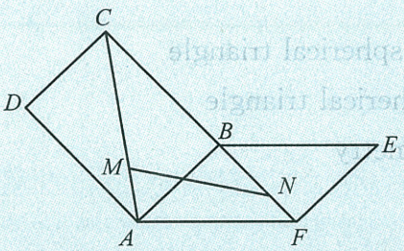
3. 证明定理 1.4.

4. 设 $ABCD$ 是菱形，$MC$ 垂直于平面 $ABCD$，则 $MA$ 与 $BD$ 的位置关系是(　　).

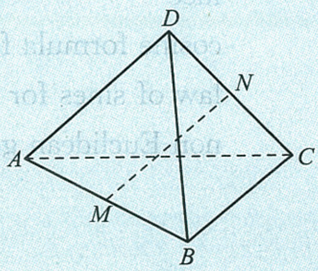
　A. 垂直且相交　　　　B. 垂直不相交

　C. 相交但不垂直　　　D. 异面且不垂直

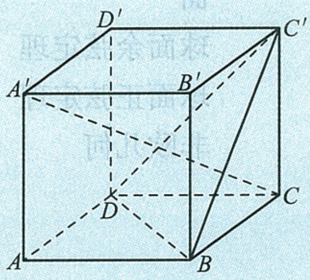
5. 如图所示，已知 $ABCD$ 和 $AFEB$ 是两个正方形，并且不在同一个平面上. $M,N$ 分别是正方形 $ABCD$ 和 $AFEB$ 的对角线 $AC,FB$ 上的点，且 $AM=FN$. 求证：$MN$ // 平面 $CBE$.



(第 5 题)



(第 6 题)



(第 7 题)

*6. 如图所示，$ABCD$ 是空间四边形，$M,N$ 分别是 $AB$ 和 $CD$ 的中点，求证：$MN<\frac{1}{2}(AC+BD)$.

*7. 如图所示，已知正方体 $ABCD—A'B'C'D'$，求证：$A'C\perp$ 平面 $BC'D$.

# 附录 2

## 部分数学专业词汇中英文对照表

| 中文 | 英文 |
|---|---|
| 球面几何 | geometry on the sphere |
| 距离 | distance |
| 大圆 | great circle |
| 弧(劣弧) | arc |
| 球面角 | angle on the sphere |
| 球面三角形 | spherical triangle |
| 极 | pole |
| 球面三角学 | spherical trigonometry |
| 球面多边形 | polygon on the sphere |
| 球面三角形面积公式 | area formula of spherical triangle |
| 内角和 | sum of the interior angle |
| 欧拉公式 | Euler formula |
| 顶点 | vertex |
| 边 | edge |
| 面 | face |
| 球面余弦定理 | cosine formula for spherical triangle |
| 球面正弦定理 | law of sines for spherical triangle |
| 非欧几何 | non-Euclidean geometry |

## 附录 3

### 信息检索网址导引

基础教育教材网

http://www.100875.com.cn/

简介：基础教育教材网是由北京师范大学出版社创建的一个综合性网站，内容主要涉及新课程标准改革研究、课题研究、教学研究、评价研究和教学资源等几个方面. 网站在提供教学实例、教学课件的同时，也给教师和学生提供了交流互动的宽松平台.

# 后 记

本套教材是按照国家教育部于 2003 年 4 月颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的. 我们在编写过程中强调了数学课程的基础性和整体性，突出了数学的思想性和应用性，尊重学生的认知特点，创造多层次的学习活动，为不同的学生提供不同的发展平台，注意发挥数学的人文教育价值. 好学好用.

教材的建设是长期、艰巨的任务，每一位教师在教学实践中要自主地开发资源，创造性地使用教材. 我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作，对教材的逐步完善提供有利的支持，促进基础教育课程改革的深入发展.

本套教材的编委会组成如下(按姓氏笔画排序)：

王希平、王尚志、王建波、任志瑜、刘美仑、吕世虎、吕建生、李亚玲、李延林、汪香志、严士健、张丹、张饴慈、张思明、姚芳、赵大悌、徐勇、戴佳珉.

由于时间仓促，教材中的错误在所难免，恳请广大使用者批评指正.

北京师范大学出版社