义务教育教科书

数学

教师教学用书

九年级下册

湖南教育出版社

总 体 说 明

湘教版《义务教育教科书·数学》（七~九年级）是依据教育部制订的《义务教育数学课程标准（2011年版）》(以下简称《课程标准（2011年版)》)，在原实验教科书的基础上修订而成的，全套书分为6册，每学期一册，内容包括“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”四个领域，知识体系中的重要概念和数学思想按照学生的认知规律螺旋式上升，重视知识之间的联系与综合，体现“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”以及“综合与实践”之间的实质性关联，形成一个有机的整体.

一、教材的主要特点

1. 重视培养学生科学理性的思维方式.

本教材按照“观察—抽象—探索—猜测—分析和论证”的数学思维方式编写，通过设立“观察”“探究”“动脑筋”“做一做”“议一议”等栏目，加强抽象、分析的环节，同时辅以设问的方式，让学生在“观察—抽象—探索—猜测—分析和论证”的活动过程中生动活泼地学习数学，受到数学思维方式全过程的熏陶.

2. “数与代数”部分强调建立数学模型和渗透算法，并且把握数学的实质，准确阐述初中数学的基本概念.

教材高度重视建立数学模型并渗透算法，采取螺旋上升的方式将模型思想贯穿于整个初中代数部分，同时，为了浅显易懂地渗透算法，我们常采用形象、生动的卡通流程图给出一般的解法步骤.

3. “图形与几何”部分用变换的观点来研究图形的性质.

考虑到初中阶段是学生处在形象思维逐步向抽象思维转变的过渡阶段，一开始学生很难接受严格的演绎证明，而通过图形变换来研究图形的性质，在此基础上再进一步证明这些性质，这对学生来讲既直观、形象，又易于理解和接受. 教材尝试将几何的直观性和思维的严谨性有机地结合起来，用变换的观点来研究图形的位置关系和度量关系.

4. “统计与概率”部分强调数据分析观念的培养和“随机性”的渗透.

教材通过设计有效的统计活动，使学生经历完整的统计过程，包括收集数据、整理数据、描述数据、分析数据，同时注重在数据分析的过程中渗透随机思想，使学生在这样的统计过程中，不断积累统计活动经验，发展数据分析观念并加深对统计思想与方法的理解.

5. “综合与实践”更具可操作性，“数学与文化”力求通俗易懂.

“综合与实践”是一类以问题为载体、以学生自主参与为主的学习活动. 教材每册设置1个“综合与实践”，强调问题情境与学生所学的知识以及生活经验相结合，鼓励学生独立思考、合作交流，自主设计解决问题的方案和步骤，经历发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的全过程，感悟数学与生活实际、数学与其他学科、数学各部分内容之间的联系，加深对所学数学内容的理解. 同时，通过该活动，帮助学生积累数学活动经验，培养学生的应用意识和创新意识.

“数学与文化”栏目中的内容主要是介绍数学学科知识背景、数学在自然与社会中的应用、数学发展史的有关材料等，目的是帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用，激发学生学习数学的兴

趣，感受数学家治学的严谨性，欣赏数学的美.

二、使用说明

关于本套教材栏目设置的说明：

1. 正文设置“观察”“探究”“动脑筋”“做一做”“议一议”等栏目，加强抽象、分析的环节，同时辅以设问的方式，让学生在“观察—抽象—探索—猜测—分析和论证”的活动过程中生动活泼地学习数学，受到数学思维方式全过程的熏陶.

2. 正文针对易错点、归纳的结论或启发学生思考的问题，增设小贴士.

3. 每章安排“小结与复习”栏目，包括“回顾”“本章知识结构”“注意”三个环节. 其中“回顾”环节以提问的方式引导学生全面回顾、梳理本章所学知识；“本章知识结构”以结构图的形式，呈现本章知识间的内在联系，从整体上把握全章知识全貌；“注意”环节突出本章容易忽视的关键点，同时提示本章隐含出现的一些重要的数学思想和方法.

4. 本书的习题分为练习、习题、复习题三类，每一课时安排一个“练习”，供课内使用；每一大节安排一个“习题”，习题分 A、B 组，与课时对应，便于学生课外巩固提高；每一章安排一个“复习题”，供复习全章时使用，并按 A、B、C 组分类，其中 C 组不做要求，供学有余力的学生选择完成.

5. 每册教材安排一个“综合与实践”，视本册内容灵活安排在最恰当的知识点之后.

6. 每册分别安排两个“数学与文化”和“IT 教室”栏目，供学有余力或有兴趣的学生自行阅读或操作.

关于教师教学用书栏目的说明：

本套教师教学用书与《义务教育教科书·数学》（七~九年级）相对应，供教师教学参考使用. 全套书分为 6 册，每册书按章编排，具体栏目设置如下：

（一）概述

1. “课程内容”将《课程标准（2011 年版)》关于本章内容的要求进行罗列，便于教师掌握本章的基本要求.

2. “课时建议”分别列出本章各节内容教学所需的课时数.

3. “教材说明”介绍本章的线索和设计思路，本章各小节之间的内在逻辑性和关联.

4. “评价建议”结合本章内容，提出了在本章学习中评价学生发展的建议.

（二）教学建议

1. 按节描述本节知识在“知识技能”“数学思考”“问题解决”“情感态度”等方面的目标.

2. 按节描述本节的教学重点和难点.

3. 按节阐述教材编写意图与教学参考建议，便于教师更好地理解、使用教材.

4. “补充例题”为教师在上课时补充课内例题的需要.

5. “资源拓展”提供与本节内容相关的学科背景介绍、数学史料等.

6. 按节提供教材练习、习题、复习题的参考答案.

（三）本章相关链接

提供本章相应的拓展资料，供教师教学时参考.

在本书的最后附有与本册教材配套的教学资源光盘，光盘内容包括两部分，第一部分是主编对本册教材特点的解读，第二部分是教学课件示例，供教师设计课件时参考.

目　录

目　录

第 4 章　概　率

第 1 章　二次函数

Ⅰ. 概　述

一、课程内容

1. 通过对实际问题的分析，体会二次函数的意义.

2. 会用描点法画出二次函数的图象，通过图象了解二次函数的性质.

3. 会用配方法将数字系数的二次函数的表达式化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，并能由此得到二次函数图象的顶点坐标，说出图象的开口方向，画出图象的对称轴，并能解决简单实际问题.

4. 会利用二次函数的图象求一元二次方程的近似解.

5. * 知道给定不共线三点的坐标可以确定一个二次函数.

二、课时建议

1.1	二次函数	1 课时
1.2	二次函数的图象与性质	5 课时
*1.3	不共线三点确定二次函数的表达式	1 课时
1.4	二次函数与一元二次方程的联系	1 课时
1.5	二次函数的应用	1 课时
小结与复习		2 课时

三、教材说明

二次函数是第三学段研究的最重要、内容最丰富的函数，也是今后进一步学习函数的重要基础. 学生在前面已学习了一次函数和反比例函数，对于函数已经有基本的认识. 函数学习大致包括以下内容：

（1）通过具体实例抽象出这种函数；

（2）探索这种函数的图象和性质；

（3）探索这种函数与相应方程等的关系；

（4）利用这种函数解决实际问题.

本章“二次函数”的学习就是按照这种思路来展开的.

作为本章的主体——二次函数，其图象和性质的研究是重点，而二次函数与一元二次方程的联系以及二次函数的应用既是重点，也是难点.

根据知识间的内在联系，本章的教学内容分为 5 个小节，顺序安排如下：

二次函数 → 二次函数的图象与性质 → 不共线三点确定二次函数的表达式 → 二次函数与一元二次方程的联系 → 二次函数的应用

本章教材在编写中力图体现以下几个特点：

1. 凸显函数教学的主线

二次函数来源于实际又服务于实际，教材从实际中抽象出二次函数的概念，又运用二次函数解决实际问题，这是贯穿于函数学习的主线. 二次函数的图象和性质是函数理论的主体，通过对函数图象

与性质的研究，从数量和图形两个侧面以及相互联系中，显示出函数的本质特征是联系和变化，这也是函数教学的主线. 因此教材编写紧扣这两条主线来编排内容.

2.重视几何变换思想在代数部分的应用，科学地探究二次函数的图象与性质

通常研究二次函数的图象与性质的方法是：先列表、描点、连线，然后从图象上看出它的单调性、对称性等性质. 这种做法有科学性的错误. 因为在描点之后，为什么可以用一条光滑（或平滑）曲线顺次连接各点呢？而不是用锯齿形曲线顺次连接各点呢？这表明写书的作者心目中已经默认了函数的单调性. 可是又让学生从这样画出的图象上看出二次函数的单调性等，可见其逻辑上是有问题的. 本教材创造性地提出了一整套的解决方案：在让学生探究画二次函数 $y=x^2$ 的图象时，在列表，描点之后，先让学生进行观察和分析：描出的若干个点，成对地关于 y 轴对称，并且 y 轴右边描出的几个点，其纵坐标随着横坐标的增大而增大，由此猜想：$y=x^2$ 的图象关于 y 轴对称；并且 y 轴右边的部分，函数值随自变量取值的增大而增大. 进而指出：数学上可以证明 $y=x^2$ 的图象的确具有这两种性质. 因此我们可以用一条光滑曲线把原点和 y 轴右边各点顺次连接起来，然后利用对称性，画出图象在 y 轴左边的部分. 这样就得到了 $y=x^2$ 的图象.

类似地，当 $a>0$ 时，$y=ax^2$ 的图象也具有上述性质，于是今后在画 $y=ax^2$（$a>0$）的图象时，可以先画出图象在 y 轴右边的部分，然后利用对称性，画出图象在 y 轴左边的部分. 在画右边部分时，只要“列表、描点、连线”三个步骤就可以了(因为我们已经知道了 $y=ax^2$（$a>0$)的图象的性质).

接着我们分析了 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象(在未画出它之前)与 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象关于 x 轴对称，从而只要把 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象沿着 x轴翻折并将图象“复制”下来，就得到 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象. 进一步我们探究 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象 E 向右平移 1 个单位后得到的图形 F 的性质. 由于平移不改变图形的形状和大小，因此图象 E 向右平移 1 个单位后得到的图形 F 的性质，可以由图象 E 的性质推导出来. 通过分析得出图形 F 是函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图象，从而得出了函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的性质. 其他二次函数图象的画法以及性质的得出均采取类似的推理方式和呈现方式，详见“教材说明”.

3. 进一步凸显模型思想

模型思想是数学的一种基本的数学思想，而二次函数是刻画现实世界变量之间关系的重要的数学模型. 本章在编写时高度重视通过设置“问题情境—建立模型—求解验证”的数学活动过程，让学生在精心设计的问题解决的过程之中经历数学建模的一般过程，逐步感悟模型思想. 而且，随着学生经历建立模型、分析模型、求解模型、解释规律等过程，一方面使学生加深对函数的理解；另一方面使学生逐渐深化对数学模型的理解、把握与构建，也使学生自然地养成从不同的问题情境中找出同一类的数学结构关系的数学模型的思维习惯和观念意识，从而也就有可能使学生日后在面对不熟悉的问题情境乃至数学学科以外的现实世界时，像数学家那样进行“模型化”的处理，这个过程就是逐步理解和掌握模型思想的过程.

在本章的教学中，要注意以下几点：

1. 重视通过实际问题情境，由具体到抽象地认识二次函数

现实中存在大量的问题涉及具有简单函数关系的变量，其中许多问题中的数量关系是二次的，这为学习本章内容提供了大量的现实素材. 在本章中，实际问题多次出现，其目的一是引入或解释二次函数的概念，二是作为函数的应用举例，以体现函数的广泛应用性. 在教学中，教师要积极引导学生经历“问题情境—建立模型—求解验证”的数学活动过程，在此过程中使学生理解、掌握有关知识(二次函数的概念、图象、性质)、技能(从情境中抽象出数量关系，列出函数表达式，借助图象分

析、解决实际问题等)，积累数学活动思想，感悟模型思想的本质，这也有利于学生去发现、提出、分析、解决问题，培养其创新意识.

2. 重视数形结合的研究方法

本章讨论的对象是二次函数，函数的表示法之一是图象法. 这种表示法将数量关系直观化、形象化，为数形结合地研究问题提供了载体，这在数学发展中具有重要地位. 在教学中，教师一方面要使学生了解二次函数图象的意义和画法，分析二次函数图象的性质；另一方面要引导学生学会结合图象，从数与形两个角度来分析和解决问题，使其体会图象的作用和数形结合研究问题的思想. 事实上，数形结合是研究每一类函数的基本思路和方法，应当引起教师足够的重视.

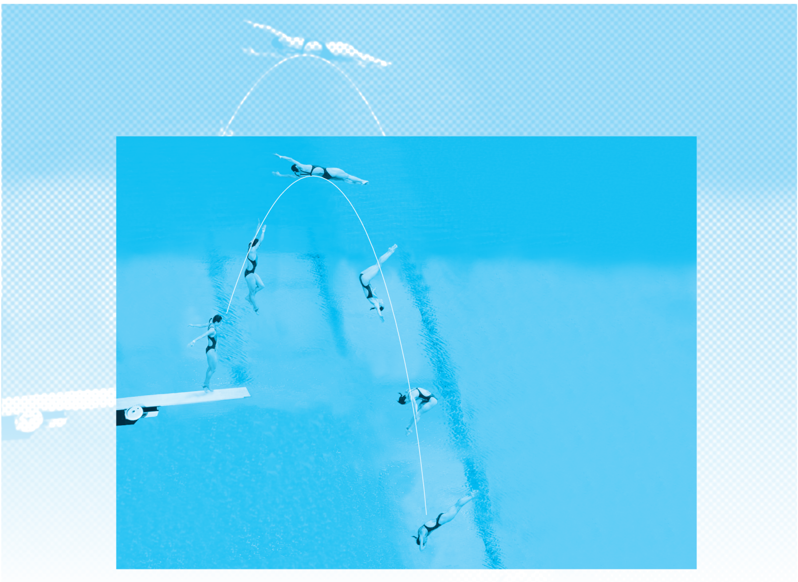
3.加强对知识之间内在联系的认识，体会函数观点的统领作用

此前在“一次函数”一章介绍了一次函数与一元一次方程、二元一次方程组和一元一次不等式的联系. 本章专设一节，探讨二次函数与一元二次方程的关系. 通过本节的学习，要使学生了解一元二次方程的根的几何意义（抛物线与 x 轴的公共点的横坐标)，知道抛物线与 x 轴的三种位置关系对应着一元二次方程的根的三种情况，会利用二次函数的图象求一元二次方程的近似解. 在这里，再一次展示了函数与方程的联系. 教师应体会这一内容编排的意图，指导学生关注二次函数与一元二次方程的内在联系，发挥函数对相关内容的统领作用，同时构建学生自己的知识网络.

四、评价建议

1. 本章涉及的二次函数概念、表示方法、性质以及解决问题的方法与前面所学习的函数内容一脉相承，关注从变化和对应的角度来思考数量之间的变化规律，并且在分析和解决问题的过程中运用了数形结合、建模等数学思想. 因此在确定本章评价方法时，既要选择纸笔测验，还要考虑运用课堂观察思考、开展综合与实践活动等方式（例如本章后的“综合与实践”内容)考查学生对基础知识和基本技能的熟练掌握程度. 针对纸笔测验内容，应有针对性地着眼于本章核心内容(利用函数图象和性质解决问题、数学建模及函数应用等等)进行合理的布局，同时还要适当关注对函数与线性运算的内在联系的认识，为后续学习打好基础.

2. 过程性评价很难在一般的测验中完成，更多地体现在学生学习过程中，体现在学生参与学习活动和解决问题的过程中. 着眼于本章，教师应该考虑评价学生能从各种具体的数学事实中抽象出数学概念、结果、方法、思想，同时对抽象出来的数学概念、结果、方法、思想能给出具体、简洁、生动的实例，还能总结出知识间的联系、脉络、结构，形成整体理解，知晓哪些地方是关键；能够有条理地表述问题，养成讲道理的习惯，逐步掌握数学推理；在讨论问题时，能主动地、自然地运用数学的三种语言（符号语言、图形语言、自然语言)，针对不同的问题选择适合的语言进行描述等. 教师应针对学生所表现出来的创造性和闪光点予以鼓励，同时还可以考虑学生的自评与互评形式.



第1章

二次函数

物体运动的轨迹并不总是呈直线形的，有时会成为一条曲线. 例如在跳水比赛中，运动员在空中划过一道优美的曲线，像这样的曲线与我们将要学习的二次函数的图象很相似.

那么什么是二次函数呢？二次函数的图象有什么特征？二次函数具有哪些性质？学完本章知识，你将能回答上述问题，并能运用二次函数的知识去解决一些实际问题.

1

Ⅱ. 教学建议

本章章前图呈现了奥运会跳水比赛中运动员的跳水轨迹，这与本章要学习的二次函数的图象很相似. 事实上，所有的抛物体的轨迹都是抛物线. 在这里，教师还可以通过投篮球或掷铅球的例子，让学生对抛物线这种新学的曲线加以认识.

针对章前图，我们可以进一步发现，人体在自由下落过程中，下落的距离 s 随下落时间 t 的变化而变化，我们如何从函数的角度来分析 s 与 t 之间有什么关系？从而引入本章新知识.

教学目标

1. 通过对实际问题的分析，体会二次函数的意义.

2. 初步理解二次函数的概念.

3. 进一步体验建立函数模型的思想方法.

教学重点、难点

能够表示简单变量之间的二次函数关系，并体会二次函数的意义.

第 1 节是通过具体实例认识二次函数. 由于学生已有了有关一元二次方程知识的储备以及学过一次函数的意义，因此教材通过分析实际问题中的数量关系，列出函数表达式，在此基础上，设置“说一说”栏目，分析列出的函数表达式（①式和②式）的共同点，即这些函数表达式是自变量的二次多项式，从而引出二次函数的定义.

需说明的是，上述过程实质上渗透了函数建模，但由于本节课的重点是通过实例认识二次函数，因此，在教学中要注意控制难度.

1.1 二次函数

动脑筋

学校准备在校园里利用围墙的一段和篱笆墙围成一个矩形植物园，如图 1-1 所示. 已知篱笆墙的总长度为 100 m，设与围墙相邻的一面篱笆墙的长度为 x(m)，那么矩形植物园的面积 S(m^2) 与 x 之间有何关系？

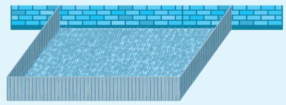


图 1-1

由于与围墙相邻的一面篱笆墙的长度为 x m，可知，与围墙相对的一面篱笆墙的长度为 $(100-2x)$ m. 于是矩形植物园的面积 S 与 x 之间有如下关系：

$$S=x(100-2x),\ 0<x<50,$$

即 $$S=-2x^2+100x,\ 0<x<50. \quad ①$$

①式表示植物园面积 S 与围墙相邻的一面篱笆墙长度 x 之间的关系，而且对于 x 的每一个取值，S 都有唯一确定的值与它对应，即 S 是 x 的函数.

动脑筋

某型号笔记本电脑两年前的销售价为 6 000 元. 现降价销售，若每年的平均降价率为 x，怎样用 x 来表示该型号电脑现在的售价 y(元)？

笔记本电脑每次降价后的售价都是降价前的 $(1-x)$ 倍，于是我们得到售价 y 与平均降价率 x 之间有如下的关系：

$$y=6\,000(1-x)^2,\ 0<x<1,$$

即 $$y=6\,000x^2-12\,000x+6\,000,\ 0<x<1. \quad ②$$

②式表示两年后的售价 y 与平均降价率 x 之间的关系，而且对于 x 的每一个取值，y 都有唯一确定的值与它对应，即 y 是 x 的函数.

说一说

①式与②式有什么共同点？它们与一次函数的表达式有什么不同？

像①、②式那样，如果函数的表达式是自变量的二次多项式，[1]那么，这样的函数称为**二次函数**(quadratic function)，它的一般形式是

$$y=ax^2+bx+c\ (a,\ b,\ c\text{ 是常数},\ a\neq 0).$$

其中 x 是自变量，a，b，c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项.

二次函数的自变量的取值范围是所有实数. 但在实际问题中，它的自变量的取值范围会有一些限制. 例如，上面第一个例子中，$0<x<50$，在第二个例子中，$0<x<1$.

例 如图 1-2，一块矩形木板，长为 120 cm、宽为 80 cm，在木板 4 个角上各截去边长为 x(cm)的正方形，求余下面积 S(cm²)与 x 之间的函数表达式.

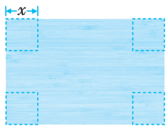


图 1-2

分析 本问题中的数量关系是：

木板余下面积 = 矩形面积 − 截去面积.

解 木板余下面积 S 与截去正方形边长 x 有如下函数关系：

$$S=120\times 80-4\times x^2=-4x^2+9\ 600,\quad 0<x\leqslant 40.$$

练习

写出下列函数的表达式，并指出哪些是二次函数，哪些是一次函数，哪些是反比例函数.

(1) 正方形的面积 S 关于它的边长 x 的函数；

(2) 圆的周长 C 关于它的半径 r 的函数；

(3) 圆的面积 S 关于它的半径 r 的函数；

(4) 当菱形的面积 S 一定时，它的一条对角线的长度 y 关于另一条对角线的长度 x 的函数.

由二次函数的定义可以看出与前面所学的一次函数、反比例函数的定义相类似，均是由其解析表达式的特征来定义的.

任何一个二次函数的解析式都可以化成 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq 0$）的形式，因此把 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）叫作二次函数的一般形式. 这里应强调条件 $a\neq 0$.

从实际问题中抽象出的函数，其自变量取值范围是有限制的. 一般地，对函数自变量取值范围的确定，主要从两方面考虑：一是自变量的取值要使函数解析式有意义；二是自变量取值要使实际问题有意义.

练习

（1）$S=x^2$；

（2）$C=2\pi r$；

（3）$S=\pi r^2$；

（4）$y=\dfrac{2S}{x}$.

其中(1)、(3)式是二次函数，(2)式是一次函数，(4)式是反比例函数.

补充例题

1. 多边形的对角线条数 d 与边数 n 有什么关系？

2. 一个圆柱的高等于底面半径，写出它的表面积 S 与半径 r 之间的关系式.

[1] 一元二次多项式是最常见的一种多项式，它的标准形式为 ax^2+bx+c（$a\neq 0$），a，b，c 为常数. 另单项式是多项式的特例，参见《数学辞海》.

习题1.1

A组

1. (2)、(3)、(4)、(6)是二次函数； (1)是一次函数； (5)是反比例函数.

2. $y=-2x^2+8x$.

3. $y=x^2-180x+8\ 000$，$0<x<80$.

B组

4. $S=\frac{1}{2}\pi r^2+5r$.

习题 1.1

A 组

1. 下列函数中，哪些是二次函数，哪些是一次函数，哪些是反比例函数？

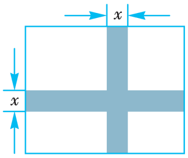
(1) $y=3x+1$； (2) $y=3x^2+2x+1$；

(3) $y=3x^2+1$； (4) $y=-3x^2+x$；

(5) $y=\frac{1}{3x}$； (6) $y=\frac{1}{3}x^2$.

2. 一长方体水池深2 m，底面矩形的周长为8 m，设底面一边长为x(m)，水池的容积为y(m³)，求y关于x的函数表达式.

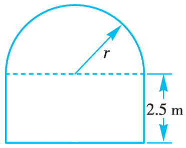
3. 如图，一块矩形田地长 100 m，宽 80 m，现计划在田地中修 2 条互相垂直且宽度为x(m)的小路，剩余面积种植庄稼，设剩余面积为y(m²)，求y关于x的函数表达式，并写出自变量的取值范围.



(第 3 题图)

B 组

4. 如图为一隧道的截面示意图，它的上部是一个半圆，下部是一个矩形，且矩形的竖直的边长为 2.5 m. 设隧道截面积为S(m²)，截面半圆的半径为r(m)，试写出S关于r的函数表达式.



(第 4 题图)

1.2 二次函数的图象与性质

我们已经学习过用描点法画一次函数、反比例函数的图象，如何画一个二次函数的图象呢？

探究

画二次函数 $y=x^2$ 的图象.

列表：对于二次函数 $y=x^2$，其自变量 x 可以取任意实数. 因此让 x 取 0 和一些互为相反数的数，并且算出相应的函数值，列成下表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

描点：在平面直角坐标系内，以 x 取的值为横坐标，相应的函数值为纵坐标，描出相应的点. 如图 1–3.

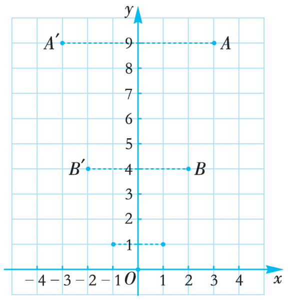


图 1–3

观察图 1–3，点 A 与点 A'，点 B 与点 B'，…，它们有什么关系？取更多的点试试，你能得出函数 $y=x^2$ 的图象关于 y 轴对称吗？

观察图 1–3，y 轴右边描出的各点，当横坐标增大时，纵坐标有什么变化？y 轴右边的所有点都具有纵坐标随着横坐标的增大而增大的特点吗？

可以证明 $y=x^2$ 的图象关于 y 轴对称；图象在 y 轴右边的部分，函数值随自变量取值的增大而增大，简称为“右升”.

教学目标

1. 会用描点法画二次函数 $y=ax^2(a>0)$ 的图象.

2. 能结合图象直观，初步地了解函数 $y=ax^2(a>0)$ 的性质.

教学重点、难点

二次函数 $y=ax^2(a>0)$ 的图象的画法及其函数性质的归纳.

本节内容是全章的重点. 教材首先从最简单的二次函数 $y=x^2$ 开始探究图象画法. 为了描点画出其图象，先要列出函数的对应值表. 由函数的表达式可以看出 x 可以取任意实数，不妨以 0 为中心，均匀选取一些便于计算的 x 的值.

“描点”环节有两个作用：一是直观地发现 $y=x^2$ 的图象具有关于 y 轴对称及“右升”的性质；二是说明为什么是用光滑曲线连接各点，而不是剧齿形曲线，为第三个步骤（连线）打下基础.

通常研究二次函数的图象与性质的方法是：先列表、描点、连线，然后从图象上看出它的单调性、对称性等性质. 这种做法有科学性的错误. 因为在描点之后，为什么可以用一条光滑曲线来顺次连接各点，而不是用锯齿形曲线顺次连接各点呢？这表明作者心中已默认了函数的单调性. 本教材提出了一套新的解决方案. 在根据函数表达式列表、描点之后，进行观察和分析（小贴士中的问题）：描出的若干个点，成对关于 y 轴对称，y 轴右边描出的几个点，其纵坐标随着横坐标的增大而增大，由此猜想：$y=x^2$ 的图象关于 y 轴对称；并且 y 轴右边的部分，函数值随自变量取值的增大而增大. 教材接着指出：数学上可以证明 $y=x^2$ 的图象的确具有这两种性质. 因此我们可以用一条光滑的曲线把原点和 y 轴右边各点顺次连接起来，然后利用对称性，画出图象在 y 轴左边的部分，这样就得到了 $y=x^2$ 的图象.

从上述过程可以看出，教材在追求一种科学严谨性. 教师在开展本节课的讲授前需领会上述编写意图，从而在带领学生“探究”的过程中按新的画函数图象的做法予以实施.

“连线”环节出现“然后利用对称性，画出图象在 y 轴左边的部分（把 y 轴左边的点和原点用一条光滑曲线顺次连接起来）”，这是教材第一次指明如何画二次函数对称轴左边的部分，后面叙述从简，教师在后续教学中，可再次指明这点.

“观察”栏目意在对函数 $y=x^2$ 的性质予以归纳总结. 除了画图过程中归纳出的两条性质（关于 y 轴对称和“右升”）外，还可以从教材图 1–4 中看出二次函数 $y=x^2$ 的图象是一条曲线，它的开口向上，对称轴与图象的交点是原点(0，0)，图象在对称轴左边的部分是“左降”，当 $x=0$ 时，函数值最小，为 0.

在义务教育阶段，对函数性质的研究是初步的，这包括单调性（增减性）、奇偶性（对称性暗含了奇偶性）、最大（小）值. 数形结合是研究每一类函数的数量特征以及图象的几何特征的基本方法，需引起教师足够的重视，可引导学生自行观察，用自己的语言进行抽象、归纳，教师最后用数学语言进行总结.

连线： 根据前面的分析，我们可以用一条光滑曲线把原点和 y 轴右边各点顺次连接起来；然后利用对称性，画出图象在 y 轴左边的部分（把 y 轴左边的点和原点用一条光滑曲线顺次连接起来）. 这样就得到了 $y=x^2$ 的图象，如图 1–4.

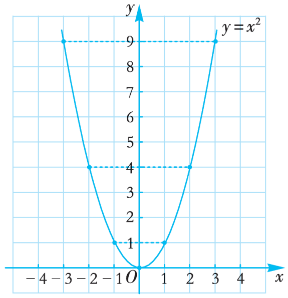


图 1–4

观察

观察图 1–4，函数 $y=x^2$ 的图象除了具有关于 y 轴对称和“右升”外，还具有哪些性质？

从图 1–4 中可以看出，二次函数 $y=x^2$ 的图象是一条曲线，它的开口向上，对称轴与图象的交点是原点(0，0)；

图象在对称轴左边的部分，函数值随自变量取值的增大而减小，简称为“左降”；

当 $x=0$ 时，函数值最小，最小值为 0.

一般地，当 $a>0$ 时，$y=ax^2$ 的图象都具有上述性质. 于是我们画 $y=ax^2$ $(a>0)$ 的图象时，可以先画出图象在 y 轴右边的部分，然后利用对称性，画出图象在 y 轴左边的部分. 在画右边部分时，只需“列表、描点、连线”三个步骤.

例 1 画二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象.

解 因为二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象关于 y 轴对称，因此列表时，自变量 x 可以从原点的横坐标 0 开始取值.

列表：

x	0	1	2	3	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	…

在“观察”栏目后，教材总结归纳了 $y=ax^2(a>0)$ 的图象画法步骤，例 1 是利用画法进行作图. 教师可引导学生自学例 1，按照步骤画出 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象.

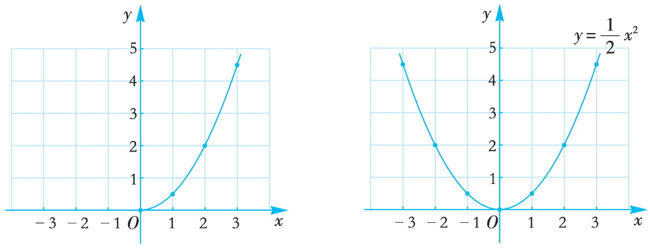
资源拓展

函数图象的画法

列表、描点、连线是画初等函数图象的常用三步骤. 这么做简单易行，便于学生模仿，符合“双基”教学，但问题也有. 例如画好图象后，从图上观察函数的性质，难免有一些疑问：只靠眼睛观察得到的认识是不是准确呢？比如，从有界限的图怎能看出函数值是无界限的呢？描点连线画图的可靠性如何保证呢？

下转 12 页

描点和连线：画出图象在 y 轴右边的部分. 如图 1-5(1).



(1)　　(2)

图 1-5

利用对称性，画出图象在 y 轴左边的对称点，并用一条光滑曲线把 y 轴左边的点和原点顺次连接起来，这样就得到了 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象. 如图 1-5(2).

练习

1. 画出二次函数 $y=6x^2$ 的图象，并填空：

（1）图象的对称轴是 ________，对称轴与图象的交点是 ________；

（2）图象的开口向 ________；

（3）图象在对称轴左边的部分，函数值随自变量取值的增大而 ______；图象在对称轴右边的部分，函数值随自变量取值的增大而 ______.

2. 在同一直角坐标系中画出二次函数 $y=3x^2$ 及 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的图象，并比较它们的共同点与不同点.

探究

我们已经会画 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象，能不能从它得出二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象呢？

例 1 完整地展示了画二次函数 $y=ax^2$（$a>0$）的图象的全过程. 从画法中可以看出，较以往传统画法简单：一是“列表”环节只需列原点一侧的点，简化计算；二是由已描点作出关于 y 轴的对称点，方便精准作图.

练习

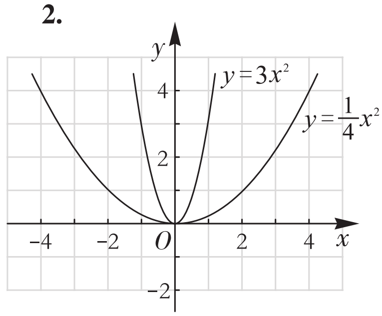
1. 图略.

（1）y 轴，（0，0）；

（2）上；

（3）减小，增大.

2.



共同点：均开口向上，对称轴为 y 轴，对称轴与图象的交点是（0，0）；

图象均是“左降”“右升”；

当 $x=0$ 时，函数值最小，为 0.

不同点：开口大小不一样.（对于 $y=ax^2$（$a>0$），a 越大，其函数图象开口越小.）

教学目标

1. 会用描点法画二次函数 $y=ax^2$（$a<0$）的图象.
2. 能结合图象了解 $y=ax^2$（$a<0$）的性质.

教学重点、难点

二次函数 $y=ax^2$（$a<0$）的图象的画法及其函数性质的归纳.

二次函数的图象与性质第2 节课重点探讨 $y=ax^2$（$a<0$）的图象的画法及性质，从而形成对 $y=ax^2$（$a\neq0$）函数图象的整体认识.

由于我们并不知道 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的函数图象是怎样的，因而，我们可以借助已学的 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象，探究要画的 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 与 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的关系，从而画出 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象，画出图象后，再归纳其图象性质.

通过探究，可以发现 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ 与 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象关于 x 轴对称，因此只要把 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象沿着 x 轴翻折并将图象“复制”出来，就可以得到 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象，有了图象，我们可以数形结合地研究其性质. 需注意的是：此时并未介绍函数 $y=ax^2(a<0)$ 的画法，需研究完性质，并以此做保障，进而用“列表、描点、连线”三个步骤画出函数 $y=ax^2$ $(a<0)$ 的图象.

教师在总结归纳 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的函数图象的性质时，可以以教材当中的图 1-6 作为参考，归纳 $a>0$ 及 $a<0$ 时函数图象的性质.

在 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象上任取一点 $P\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$，它关于 x 轴的对称点 Q 的坐标是 $\left(a,\ -\dfrac{1}{2}a^2\right)$，如图 1-6 所示. 从点 Q 的坐标看出，点 Q 在 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象上. 由此可知，$y=-\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象与 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象关于 x 轴对称. 因此只要把 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象沿着 x 轴翻折并将图象“复制”出来，就可以得到 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象，如图 1-6 的绿色曲线.

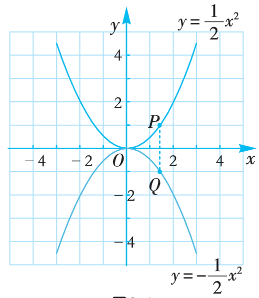


图 1-6

观察

观察图 1-6，函数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象具有哪些性质？

从图 1-6 中可以看出，二次函数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$的图象是一条曲线，它的开口向下，图象的对称轴是 y 轴，对称轴与图象的交点是原点(0，0)；

图象在对称轴左边的部分，函数值随自变量取值的增大而增大，简称为“左升”；

图象在对称轴右边的部分，函数值随自变量取值的增大而减小，简称为“右降”；

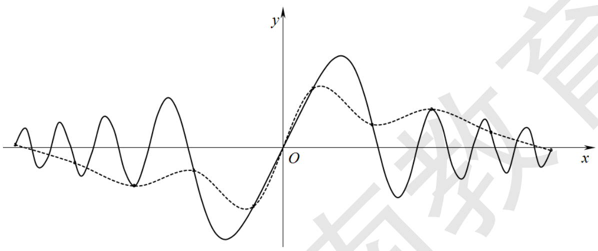
当 $x=0$ 时，函数值最大，最大值为 0.

一般地，当 $a<0$ 时，$y=ax^2$ 的图象都具有上述性质. 于是我们画 $y=ax^2$ $(a<0)$的图象时，可以先画出图象在 y 轴右边的部分，然后利用对称性，画出图象在 y 轴左边的部分. 在画右边部分时，只需“列表、描点、连线”三个步骤.

8 数学 九年级下册

上接 10 页

下图是计算机用描点连线方法画出的同一个函数的两个图象. 虚线是取 10 个点描出的，实线是取 50 个点描出的，两者明显不同.



可见，光靠描点作图看图来研究函数的性质还不够. 从解析式出发研究函数的性质，在数学推理的指导下画图，对函数的性质会了解得更全面、更准确.

例 2 画二次函数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的图象.

解 列表：自变量 x 从原点的横坐标 0 开始取值.

x	0	1	2	3	4	…
$y=-\frac{1}{4}x^2$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$	-4	…

描点和连线：

画出图象在 y 轴右边的部分.

利用对称性，画出图象在 y 轴左边的部分.

这样就得到了 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的图象，如图 1-7.

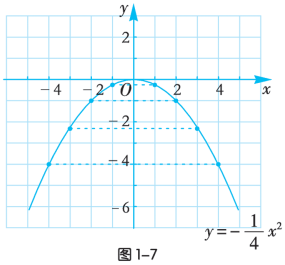


图 1-7

例 2 是一道函数图象画法的示范题，学生需切实掌握.

在例 2 后，教师可让学生在同一直角坐标系中画出二次函数 $y=-x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$，$y=-2x^2$ 的图象，找出这些函数图象的共同点和不同点.

说一说

如图 1-8，在棒球赛场上，棒球在空中沿着一条曲线运动，它与二次函数 $y=ax^2$（$a<0$）的图象相像吗？

图 1-8

二次函数 $y=ax^2$ 的图象的开口大小由 $|a|$ 确定，$|a|$ 越大，开口越小；$|a|$ 越小，开口越大.

以棒球在空中经过的路线的最高点为原点建立直角坐标系，x 轴的正方向水平向右，y 轴的正方向竖直向上，则可以看出棒球在空中经过的路线是形如 $y=ax^2(a<0)$ 的图象的一段. 由此受到启发，我们把二次函数 $y=ax^2$ 的图象这样的曲线叫作**抛物线**（parabola），简称为抛物线 $y=ax^2$.

“抛物线”一词，源于物体运动轨迹.

抛物线的主要特征包括：开口方向、对称轴和顶点坐标.

一般而言，作函数图象，通常先对函数解析式进行讨论，以了解曲线的大致形态，然后列表、描点、连线. 主要步骤如下：（1）讨论曲线的存在范围；（2）讨论曲线的对称性；（3）求曲线的截距；（4）曲线的变化情况（如渐近线，函数的周期性、增减性、凹凸性以及极值点、拐点、尖点等）；（5）列表；（6）描点、连线.

因为初等函数的图象一般是光滑的曲线，所以用描点法画这类函数的图象时要把所描的点用光滑的曲线连接起来. 但应注意某些曲线在某些点处不光滑，例如有尖点.

关于“抛物线”的研究始于16世纪，其研究的成果应用十分广泛，教师可适当补充一些史料，以激发学生的兴趣.

一般地，二次函数 $y=ax^2$ 的图象关于 y 轴对称，抛物线与它的对称轴的交点(0，0)叫作抛物线 $y=ax^2$ 的顶点.

意大利著名科学家伽利略将炮弹发射经过的路线命名为“抛物线”.

练习

1. 图略.

  (1) y 轴， (0，0)；

  (2) 下；

  (3) 增大，减小.

2. 略.

练习

1. 画出二次函数 $y=-10x^2$ 的图象，并填空：

(1) 抛物线的对称轴是 __________，顶点坐标是 __________；

(2) 抛物线的开口向 __________；

(3) 抛物线在对称轴左边的部分，函数值随自变量取值的增大而 __________；在对称轴右边的部分，函数值随自变量取值的增大而 __________.

2. 在同一直角坐标系中画出二次函数 $y=-0.3x^2$ 与 $y=-8x^2$ 的图象，并比较它们的共同点与不同点.

探究

把二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象 E 向右平移1个单位，得到图形 F，如图1-9.

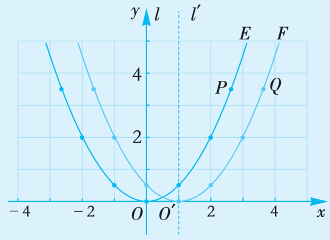


图 1-9

教学目标

1. 运用平移知识，体会二次函数 $y=a(x-h)^2$ 与 $y=ax^2$ 的图象的位置关系.

2. 能结合图象，说出抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的对称轴、顶点坐标和开口方向.

3. 会用描点法画出 $y=a(x-h)^2$ 的函数图象.

教学重点、难点

教学重点：能结合图象说出抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的性质，及用描点法画出其函数图象.

教学难点：运用平移知识，体会二次函数 $y=a(x-h)^2$ 与 $y=ax^2$ 的图象之间的关系.

资源拓展

聚光的曲线——抛物线

16世纪的欧洲人认为，炮弹是沿着折线飞行的，他们往往这样认为：炮弹是沿着直线飞出去的，又沿着直线从天而降，把二者结合在一起，炮弹就是按照折线飞行的. 意大利的科学家伽利略纠正了人们的错误认识，他指出：炮弹并不是沿着折线飞行，而是沿着一条曲线飞行. 他给这条曲线起名叫作“抛物线”.

抛物线有一个奇特的性质：它有一根对称轴，一束和对称轴平行的光线照射到抛物线上，这些光线被全部聚焦到对称轴的一点上，这个点叫作“焦点”. 反过来，如果在抛物线的焦点处放置一个点光

由于平移不改变图形的形状和大小，因此图象 E 在向右平移 1 个单位后：

原　像	像
抛物线 E：$y=\frac{1}{2}x^2$	图形 F 也是抛物线
E 的顶点 $O\,(0,0)$	F 的顶点是点 $O'(1,0)$
E 的对称轴是直线 l（与 y 轴重合）	F 的对称轴是直线 l'（过点 O' 且与 y 轴平行）
E 开口向上	F 开口向上

抛物线 F 是哪个函数的图象呢？

在抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上任取一点 $P\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$，那么在向右平移 1 个单位后，点 P 的像点 Q 的坐标是什么？

把点 P 的横坐标 a 加上 1，纵坐标 $\frac{1}{2}a^2$ 不变，就得到像点 Q 的坐标为 $\left(a+1,\ \frac{1}{2}a^2\right)$.

记 $b=a+1$，则 $a=b-1$，从而点 Q 的坐标为 $\left(b,\ \frac{1}{2}(b-1)^2\right)$. 这表明：点 Q 在函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象上. 由此得出，抛物线 F 是函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象.

从上面的过程可以说明：函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象是抛物线 F，它的开口向上，顶点是 $O'(1,\ 0)$，对称轴是过点 $O'(1,\ 0)$ 且平行于 y 轴的直线 l'. 直线 l' 是由横坐标为 1 的所有点组成的，我们把直线 l' 记作直线 $x=1$.

类似地，我们可以证明下述结论：

二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象是抛物线，它的对称轴是直线 $x=h$，它的顶点坐标是 $(h,0)$. 当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下.

第 3 节课依然是沿续前面几节课的思路，先探究 $y=a(x-h)^2$ 的图象是什么形状，再结合图象研究其性质，最后用“描点法”画出其函数图象.

由探究过程，我们发现二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象可以由抛物线 $y=ax^2$ 向左（或向右）平移得到，当 $h>0$ 时，向右平移 h 个单位；当 $h<0$ 时，向左平移 $|h|$ 个单位.

源，其发出的光经抛物线的反射，就会变成一束平行光发射出去. 我们把抛物线绕它的对称轴旋转一周，就会形成一个曲面——旋转抛物面，此时，把一颗电珠放到焦点处，电珠发出的光经过旋转抛物面的反射，就变成一束平行光照射出去，手电筒、探照灯就是根据这个原理制作出来的，而雷达也往往设计成旋转抛物面，这样能将电磁波发射得更远.

科学家为了研究宇宙中不可见的射线，设计了射电望远镜，他们把射电望远镜的天线做成巨大的抛物面，以便最大限度地把来自宇宙的电磁聚集到它的焦点处，在这种望远镜的帮助下，科学家相继发现了类星体、脉冲星等等. 我国于 2011 年在贵州的喀斯特地形上开始建设全球最大的单体射电望远镜，预计 2016 年完工.

有了函数性质做保障，我们就可以用“描点法”画出 $y=a(x-h)^2$ 的函数图象.

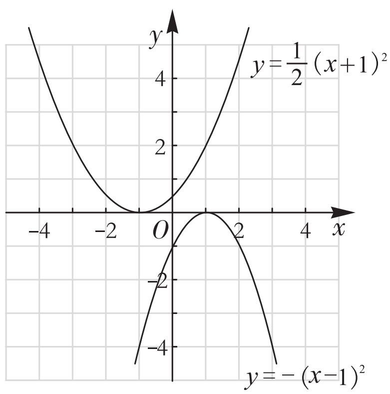
例 3 是函数图象画法的示范题，学生需切实掌握.

练习

1.（1）对称轴直线 $x=5$，顶点坐标（5，0），开口向上；

（2）对称轴直线 $x=-2$，顶点坐标（-2，0），开口向下.

2.



由于我们已经知道了二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象的性质，因此今后在画 $y=a(x-h)^2$ 的图象时，只要先画出对称轴以及图象在对称轴右边的部分，然后利用对称性，画出图象在对称轴左边的部分. 在画图象的右边部分时，只需“列表、描点、连线”三个步骤.

例 3 画函数 $y=(x-2)^2$ 的图象.

解 抛物线 $y=(x-2)^2$ 的对称轴是直线 $x=2$，顶点坐标是(2，0).

列表：自变量 x 从顶点的横坐标 2 开始取值.

x	2	3	4	5	…
$y=(x-2)^2$	0	1	4	9	…

描点和连线：

画出图象在对称轴右边的部分.

利用对称性，画出图象在对称轴左边的部分.

这样就得到了 $y=(x-2)^2$ 的图象，如图 1-10.

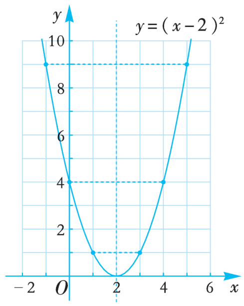


图 1-10

练习

1. 写出下列二次函数图象的对称轴、顶点坐标和开口方向.

(1) $y=\frac{1}{3}(x-5)^2$；　　(2) $y=-3(x+2)^2$.

2. 分别画出二次函数 $y=-(x-1)^2$，$y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图象.

探究

如何画二次函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$ 的图象?

我们先来探究二次函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$ 与 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 之间的关系.

二次函数	图象上的点	
	横坐标 x	纵坐标 y
$y=\frac{1}{2}(x-1)^2$	a	$\frac{1}{2}(a-1)^2$
$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$	a	$\frac{1}{2}(a-1)^2+3$

从上表看出:对于每一个给定的 x 值,函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$ 的值都要比函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的值大 3,由此可见函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$ 的图象可由二次函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象向上平移 3 个单位而得到(如图 1-11). 因此,二次函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$ 的图象也是抛物线,它的对称轴为直线 $x=1$ (与抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的对称轴一样),顶点坐标为(1, 3)(它是由抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的顶点(1, 0)向上平移 3 个单位得到的),它的开口向上.

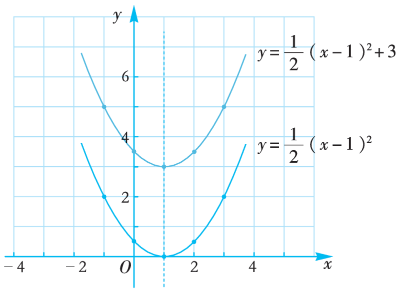


图 1-11

教学目标

1. 了解怎样平移 $y=a(x-h)^2$ 的图象得到 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象 $(a\neq0)$.

2. 能结合图象,说出抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的对称轴、顶点坐标和开口方向.

3. 会用描点法画出 $y=a(x-h)^2+k$ 的函数图象.

教学重点、难点

教学重点:能结合图象说出抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的性质,用描点法画出其函数图象.

教学难点:运用平移知识,体会二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=a(x-h)^2$ 的图象之间的关系.

第 4 节课仍然沿袭“探究函数图象形状→性质→画法”的思路.

“探究”过程并不难,教师可借助多媒体演示来说明道理. 事实上,限于篇幅,教材只探讨了 $a>0$ 时的情况,教师应补充 $a<0$ 时的平移情况,以此为基础,归纳出二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的性质.

一般地,抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=ax^2$ 形状相同,位置不同.

(1) 当 $h>0$,$k>0$ 时,把抛物线 $y=ax^2$ 向上平移 k 个单位,再向右平移 h 个单位就得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$.

(2) 当 $h>0$,$k<0$ 时,把抛物线 $y=ax^2$ 向下平移 $|k|$ 个单位,再向右平移 h 个单位就得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$.

(3) 当 $h<0$,$k>0$ 时,把抛物线 $y=ax^2$ 向上平移 k 个单位,再向左平移 $|h|$ 个单位就得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$.

(4) 当 $h<0$,$k<0$ 时,把抛物线 $y=ax^2$ 向下平移 $|k|$ 个单位,再向左平移 $|h|$ 个单位就得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$.

简单地说,就是“左加右减,上加下减”.

一般地，二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象是抛物线，它具有下述性质：

抛物线 $y=a(x-h)^2+k$	对称轴	顶点坐标	开口方向	性质	
				在对称轴的左边	在对称轴的右边
$a>0$	$x=h$	(h, k)	向上	y 随 x 的增大而减小	y 随 x 的增大而增大
$a<0$	$x=h$	(h, k)	向下	y 随 x 的增大而增大	y 随 x 的增大而减小

由于我们已经知道了二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象的性质，因此画 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象的步骤如下：

第一步　写出对称轴和顶点坐标，并且在平面直角坐标系内画出对称轴，描出顶点；

第二步　列表(自变量 x 从顶点的横坐标开始取值)，描点和连线，画出图象在对称轴右边的部分；

第三步　利用对称性，画出图象在对称轴左边的部分(这只要先把对称轴左边的对称点描出来，然后用一条光滑曲线顺次连接它们和顶点).

例 4　画二次函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-3$ 的图象.

解　对称轴是直线 $x=-1$，顶点坐标为$(-1, -3)$.

列表：自变量 x 从顶点的横坐标-1 开始取值.

x	-1	0	1	2	3	…
$y=\frac{1}{2}(x+1)^2-3$	-3	-2.5	-1	1.5	5	…

描点和连线：

画出图象在对称轴右边的部分.

利用对称性，画出图象在对称轴左边的部分. 这样就得到了 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-3$ 的图象，如图 1-12.

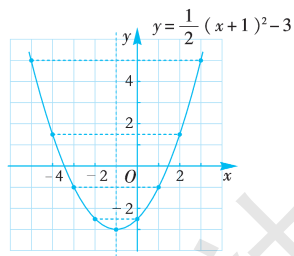


图 1-12

由于平移时，抛物线上所有点的移动规律都相同，所以研究抛物线的平移问题，只需研究其顶点的移动情况即可. 在画抛物线时，也应首先找出顶点坐标和对称轴.

例 4 是函数图象画法的示范题，学生需切实掌握.

补充例题

1. 抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 经过怎样的变换可以得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$？

(把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位，再向下平移 1 个单位，就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$).

2. 抛物线 $y=5x^2$ 向左平移 2 个单位，再向下平移 3 个单位，得到的抛物线是（　　）

A. $y=5(x+2)^2+3$　　B. $y=5(x+2)^2-3$

C. $y=5(x-2)^2+3$　　D. $y=5(x-2)^2-3$

例 5 已知某抛物线的顶点坐标为$(-2,\ 1)$，且与 y 轴相交于点$(0,\ 4)$，求这个抛物线所表示的二次函数的表达式.

解 由于点$(-2,\ 1)$是该抛物线的顶点，可设这个抛物线所表示的二次函数的表达式为 $y=a(x+2)^2+1$.

由函数图象过点$(0,\ 4)$，可得

$$4=a(0+2)^2+1,$$

解得 $a=\frac{3}{4}$.

因此，所求的二次函数的表达式为

$$y=\frac{3}{4}(x+2)^2+1=\frac{3}{4}x^2+3x+4.$$

练习

1. 写出下列二次函数图象的对称轴、顶点坐标和开口方向：

(1) $y=\frac{2}{5}(x-9)^2+7$； (2) $y=-\frac{1}{3}(x+18)^2-13$.

2. 画出二次函数 $y=-2(x-2)^2+3$ 的图象.

3. 已知某抛物线的顶点坐标为$(-3,\ 2)$，且经过点$(-1,\ 0)$，求这个抛物线所表示的二次函数的表达式.

动脑筋

如何画二次函数 $y=-2x^2+6x-1$ 的图象?

由于我们已经会画 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象了，因此只需把$-2x^2+6x-1$ 配方成$-2(x-h)^2+k$ 的形式就可以了.

$y=a(x-h)^2+k$ 是二次函数非常重要的解析式之一，它清楚地体现了二次函数的顶点及函数性质，凸显了“数”与“形”的相互联系. 教材设置的例 5，是一道利用“顶点式”并借助待定系数法来确定二次函数表达式的例题. 本例的解法具有一定的代表性，教师可适当补充一些例子，使学生体会确定二次函数表达式的方法.

练习

1. (1) 对称轴直线 $x=9$，顶点坐标 $(9,\ 7)$，开口向上；

(2) 对称轴直线 $x=-18$，顶点坐标 $(-18,\ -13)$，开口向下.

2. 画图略.

3. $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+2$

$=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{5}{2}$.

教学目标

1. 利用配方法将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化为函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式.

2. 掌握二次函数$y=ax^2+bx+c$ 的图象画法.

3. 通过图象了解二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质.

4. 会求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最大(小)值.

教学重点、难点

用配方法将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化为函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，画出其函数图象，探究其最大(小)值性质.

为了画出 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$的函数图象，以第 4 节课为基础，我们可以借助配方法，将二次函数的一般式 $y=ax^2+bx+c$ 转化为我们熟悉的 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式. 在这里，配方法需要学生熟练掌握.

在画二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象时，通常先通过配方，将其变形为 $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 的形式，再确定顶点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，然后以顶点开始取值并列表，最后画出函数图象.

配方：

$$\begin{aligned} y&=-2x^2+6x-1\\ &=-2(x^2-3x)-1\\ &=-2\left[x^2-3x+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]-1\\ &=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2\times\frac{9}{4}-1\\ &=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

故对称轴是直线 $x=\dfrac{3}{2}$，顶点坐标是 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$.

列表：自变量 x 从顶点的横坐标 $\dfrac{3}{2}$ 开始取值.

x	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	…
$y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{9}{2}$	…

描点和连线：画出图象在对称轴右边的部分.

利用对称性，画出图象在对称轴左边的部分，这样就得到了函数 $y=-2x^2+6x-1$ 的图象，如图 1-13.

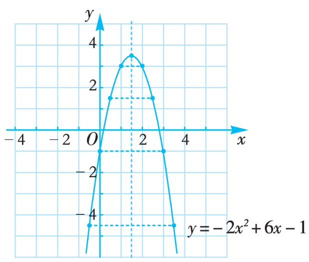


图 1-13

可利用计算机和数学软件来画任意一个二次函数的图象.

说一说

观察图 1-13，当 x 等于多少时，函数 $y=-2x^2+6x-1$ 的值最大？这个最大值是多少？

补充例题

1. 画出函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象.

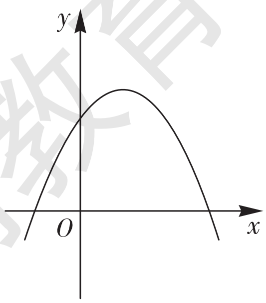
2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则下列结论中，正确的是（　　）

A. $a<0$，$b>0$，$c>0$

B. $a<0$，$b>0$，$c<0$

C. $a<0$，$b<0$，$c>0$

D. $a<0$，$b<0$，$c<0$



当 x 等于顶点的横坐标 $\frac{3}{2}$ 时，函数值最大，这个最大值等于顶点的纵坐标 $\frac{7}{2}$.

一般地，有下述结论：

二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 x 等于顶点的横坐标时，达到最大值($a<0$)或最小值($a>0$)，这个最大(小)值等于顶点的纵坐标.

例 6 求二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$ 的最大值.

解 配方：
$$\begin{aligned} y&=-\frac{1}{2}x^2+2x-1\\ &=-\frac{1}{2}(x^2-4x+2^2-2^2)-1\\ &=-\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{2}\times 4-1\\ &=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1. \end{aligned}$$

顶点坐标是 $(2, 1)$，于是当 $x=2$ 时，y 达到最大值 1.

一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 进行配方：
$$\begin{aligned} y&=ax^2+bx+c\\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}, \end{aligned}$$

顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

因此，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数达到最大值($a<0$)或最小值($a>0$)：$\frac{4ac-b^2}{4a}$.

关于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质的归纳，主要从抛物线的开口方向、顶点、对称轴、函数的增减性（函数的最大或最小值）等几方面来研究.

例 6 是求函数最大值的问题，教师可适当补充求最小值的问题.

教材对于一般形式的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 进行配方，得到当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数达到最大(最小)值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$，以后可直接运用该结论求二次函数的最大(最小)值.

补充例题

飞机着陆后滑行的距离 s(单位：m)与滑行的时间 t(单位：s)的函数关系式是 $s=60t-1.5t^2$. 飞机着陆后滑行多远才能停下来？

练习

1.（1）对称轴直线$x=1$，顶点坐标（1，-2），开口向上，图略；

（2）对称轴直线$x=2$，顶点坐标（2，2），开口向下，图略.

2.（1）$\left(\frac{3}{2}，-\frac{1}{4}\right)$；

（2）（-3，4）.

3.（1）最小值为$-\frac{1}{4}$；

（2）最大值为4.

习题1.2

A组

1. 画图略.

2.（1）对称轴直线$x=0$，顶点坐标（0，3），图略；

（2）对称轴直线$x=0$，顶点坐标（0，-4），图略；

（3）对称轴直线$x=\frac{3}{4}$，顶点坐标$\left(\frac{3}{4}，0\right)$，图略；

（4）对称轴直线$x=-2$，顶点坐标（-2，0），图略.

3.（1）对称轴直线$x=-3$，顶点坐标（-3，-2），开口向上，图略；

（2）对称轴直线$x=3$，顶点坐标（3，5），开口向上，图略；

（3）对称轴直线$x=-\frac{4}{5}$，顶点坐标$\left(-\frac{4}{5}，-6\right)$，开口向下，图略；

（4）对称轴直线$x=2$，顶点坐标（2，1），开口向下，图略.

练习

1. 写出下列二次函数图象的对称轴、顶点坐标和开口方向，并画出它们的图象.

（1）$y=3x^2-6x+1$；（2）$y=-\frac{1}{4}x^2+x+1$.

2. 求下列二次函数图象的顶点坐标：

（1）$y=x^2-3x+2$；（2）$y=-\frac{1}{3}x^2-2x+1$.

3. 用配方法求第 2 题中各个二次函数的最大值或最小值.

习题 1.2

A 组

1. 画出下列二次函数的图象：

(1) $y=2x^2$；(2) $y=-3x^2$；

(3) $y=-\frac{2}{3}x^2$；(4) $y=\frac{3}{4}x^2$.

2. 写出下列二次函数图象的对称轴、顶点坐标，并画出它们的图象.

(1) $y=-\frac{1}{4}x^2+3$；(2) $y=\frac{1}{2}x^2-4$；

(3) $y=7\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$；(4) $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$.

3. 写出下列二次函数图象的对称轴、顶点坐标和开口方向，并画出它们的图象.

(1) $y=\frac{1}{3}(x+3)^2-2$；(2) $y=2(x-3)^2+5$；

(3) $y=-3\left(x+\frac{4}{5}\right)^2-6$；(4) $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$.

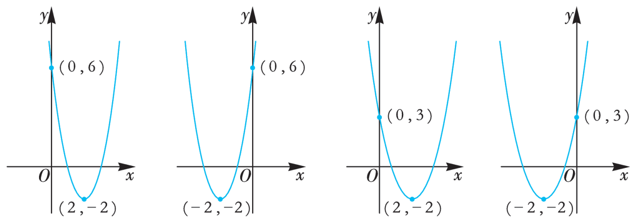
4. 已知某抛物线的顶点坐标为(2，3)，且与 y 轴相交于点(0，1)，求这个抛物线所表示的二次函数的表达式.

5. 写出下列二次函数图象的对称轴、顶点坐标，并画出它们的图象.

(1) $y=2x^2-4x+1$；　　(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+3$；

(3) $y=-3x^2+9x-5$；　　(4) $y=x^2-5x+7$.

6. 二次函数 $y=2x^2-8x+6$ 的图象大致是（　　）



(A)　(B)　(C)　(D)

7. 用配方法求下列二次函数的最大值或最小值：

(1) $y=x^2+10x-7$；　　(2) $y=-x^2+5x+2$；

(3) $y=\frac{1}{5}x^2-2x+3$；　　(4) $y=-\frac{2}{3}x^2+2x-6$.

B 组

8. 在二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象上任取一点 $P\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$.

(1) 点 P 关于 y 轴的对称点 Q 的坐标是什么？

(2) 点 P 关于 y 轴的对称点 Q 在 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象上吗？为什么？

(3) 从第 (2) 小题的结论得出，$y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象关于哪条直线对称？

9. 填空：

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$.

(1) 当 $a>0$ 时，图象的开口向 ________，对称轴为 ________，顶点坐标为________. 当 $x<$________时，y随 x 的增大而减小；当 $x>$________时，y 随 x 的增大而增大；当 $x=$________ 时，y 取最 ________.

4. $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3$

$=-\frac{1}{2}x^2+2x+1.$

5. (1) 对称轴直线$x=1$，顶点坐标（1，−1），图略；

(2) 对称轴直线$x=2$，顶点坐标（2，5），图略；

(3) 对称轴直线$x=\frac{3}{2}$，顶点坐标$\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{4}\right)$，图略；

(4) 对称轴直线$x=\frac{5}{2}$，顶点坐标$\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{4}\right)$，图略.

6. (A).

7. (1) 最小值为−32；

(2) 最大值为$8\frac{1}{4}$；

(3) 最小值为−2；

(4) 最大值为$-\frac{9}{2}$.

B组

8. (1) $Q\left(-a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$；

(2) Q点在$y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象上，代入验证即可；

(3) 图象关于 y 轴对称.

9. (1) 上，直线$x=-\frac{b}{2a}$，$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，$-\frac{b}{2a}$，$-\frac{b}{2a}$，$-\frac{b}{2a}$，小值.

(2) 下，直线$x=-\dfrac{b}{2a}$，

$\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，$-\dfrac{b}{2a}$，$-\dfrac{b}{2a}$，

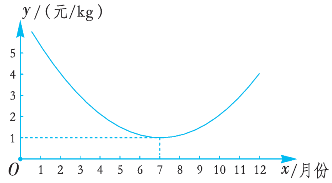
$-\dfrac{b}{2a}$，大值.

10. 这是一道开放性题，重在培养学生的读图能力.

从图中可以发现，蔬菜在一年中的最低价是 7 月的 1 元/kg，一年当中的最高价出现在上半年，1 至 7 月，价格随月份的增长而降低；7 至 12 月，价格随月份的增长而增长.

（2）当 $a<0$ 时，图象的开口向________，对称轴为________，顶点坐标为________. 当 $x<$________时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>$________时，y 随 x 的增大而减小；当 $x=$________时，y 取最________.

10. 某农场种植一种蔬菜，销售员李平根据往年的销售情况，对今年这种蔬菜的销售价格进行了预测，预测情况如图所示，图中的抛物线（部分）表示这种蔬菜每千克销售价与月份之间的关系. 观察图象，你能得到关于这种蔬菜销售情况的哪些信息？



（第 10 题图）

*1.3 不共线三点确定二次函数的表达式

我们学习过用待定系数法求一次函数的表达式，一次函数的表达式是 $y=kx+b$，只要求出 k 和 b 的值，就可以确定一次函数的表达式.

二次函数的表达式是 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，因此，要确定这个表达式，就需要求出 a，b，c 的值.

与一次函数相类似，如果已知二次函数图象上三个点的坐标（也就是函数的三组对应值），将它们代入函数表达式，列出一个关于待定系数 a，b，c 的三元一次方程组，求出 a，b，c 的值，就可以确定二次函数的表达式.

例 1 已知一个二次函数的图象经过三点(1，3)，(−1，−5)，(3，−13)，求这个二次函数的表达式.

解 设该二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$.

将三个点的坐标(1，3)，(−1，−5)，(3，−13) 分别代入函数表达式，得到关于 a，b，c的三元一次方程组：

$$\begin{cases}a+b+c=3,\\ a-b+c=-5,\\ 9a+3b+c=-13,\end{cases}$$

解得 $a=-3$，$b=4$，$c=2$.

因此，所求的二次函数的表达式为 $y=-3x^2+4x+2$.

例 2 已知三个点的坐标，是否有一个二次函数，它的图象经过这三个点？

(1) $P(1,\ -5)$，$Q(-1,\ 3)$，$R(2,\ -3)$；

(2) $P(1,\ -5)$，$Q(-1,\ 3)$，$M(2,\ -9)$.

解 (1)设有二次函数 $y=ax^2+bx+c$，它的图象经过 P，Q，R 三点，则

* 本节为选学内容.

教学目标

1. 掌握用待定系数法确定二次函数的表达式.

2. 知道满足何种条件的三点确定一个二次函数.

教学重点、难点

教学重点：用待定系数法确定一个二次函数的表达式.

教学难点：知道满足何种条件的三点确定一个二次函数.

会利用待定系数法确定二次函数的表达式是本次《课程标准(2011 年版)》新增的选学内容. 待定系数法在前面已学习过，再加上三元一次方程组的解法（选学）基础，本课时内容更强调综合应用. 在这里，重在方法的掌握，可适度训练，务求落实.

例 2 在方法上仍使用待定系数法，但在思维方式上是逆向思维，即强调满足什么条件的三点确定一个二次函数，这一点，教师在归纳环节应结合具体例子说明.

得到关于a，b，c的三元一次方程组：

$$\begin{cases} a+b+c=-5, \\ a-b+c=3, \\ 4a+2b+c=-3, \end{cases}$$

解得　$a=2$，$b=-4$，$c=-3$.

因此，二次函数 $y=2x^2-4x-3$ 的图象经过 P，Q，R 三点.

（2）设有二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过 P，Q，M 三点，则得到关于 a，b，c 的三元一次方程组：

$$\begin{cases} a+b+c=-5, \\ a-b+c=3, \\ 4a+2b+c=-9, \end{cases}$$

解得　$a=0$，$b=-4$，$c=-1$.

因此一次函数 $y=-4x-1$ 的图象经过 P，Q，M 三点. 这说明没有一个这样的二次函数，它的图象能经过 P，Q，M 三点.

例 2 中，两点 $P(1，-5)$，$Q(-1，3)$确定了一个一次函数 $y=-4x-1$.

点 $R(2，-3)$的坐标不适合 $y=-4x-1$，因此点 R 不在直线 PQ 上，即 P，Q，R 三点不共线.

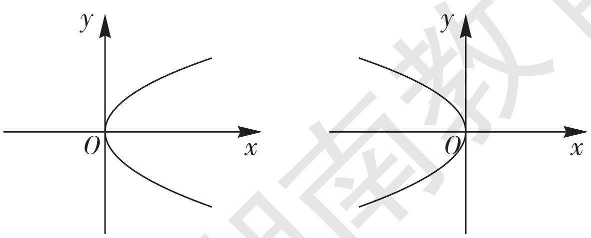
点 $M(2，-9)$的坐标适合 $y=-4x-1$，因此点 M 在直线 PQ 上，即 P，Q，M 三点共线.

例 2 表明：若给定不共线三点的坐标，且它们的横坐标两两不等，则可以确定一个二次函数；而给定共线三点的坐标，不能确定二次函数.

可以证明：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象上任意三个不同的点都不在一条直线上. 还可以证明：若给定不共线三点的坐标，且它们的横坐标两两不等，则可以确定唯一的一个二次函数，它的图象经过这三点.

通过例 2 说明给定不共线三点的坐标，且它们的横坐标两两不等，则可以确定一个二次函数；而给定共线三点的坐标，则不能确定二次函数. 需注意的是，条件中强调的是三点的横坐标要两两不等，结论中强调的是二次函数而不是抛物线.

高中将学习如下类型的抛物线，它们满足不共线三点确定一个二次曲线，但存在两个点的横坐标相等的情形，这并不是二次函数.（注：这一点教师有所了解即可）



练习

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过三点 $A(0,\ 2)$，$B(1,\ 3)$，$C(-1,\ -1)$，求这个二次函数的表达式.

习题 1.3

A 组

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过三点 $A(-1,0)$，$B(0,2)$，$C(2,0)$，求这个二次函数的表达式.

2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中的部分自变量 x 与所对应的函数值 y 如下表：

x	-4	-3	-2
y	3	5	3

求当 $x=1$ 时，y 的函数值.

3. 已知二次函数的图象与 x 轴的交点的横坐标分别是 $x_1=-3$，$x_2=1$，且与 y 轴的交点为 $(0,\ -2)$，求这个二次函数的表达式.

B 组

4. 已知二次函数的图象经过一次函数 $y=-x+3$ 的图象与 x 轴、y 轴的交点，且过点 $(1,\ 1)$，求这个二次函数的表达式.

5. 已知三个点的坐标，是否有一个二次函数，它的图象经过这三个点？

(1) $P(1,\ 6)$，$Q(2,\ 11)$，$R(-1,\ 14)$；

(2) $P(1,\ 6)$，$Q(2,\ 11)$，$M(-1,\ -4)$.

练习

$y=-x^2+2x+2$.

习题1.3

A组

1. $y=-x^2+x+2$.

2. $y=-2x^2-12x-13$.
当 $x=1$ 时，$y=-27$.

3. $y=\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x-2$.

B组

4. $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{5}{2}x+3$.

5. （1）$y=3x^2-4x+7$；
（2）没有这样一个二次函数，它的图象经过 P，Q，M 三点.

资源拓展

二次函数图象与抛物线的异同

我们知道二次函数的图象是抛物线，更准确地说，它的图象是以 y 轴或平行于 y 轴的直线为对称轴的一条抛物线.

抛物线是解析范畴的内容，我们把平面内与一个定点和一条定直线的距离相等的点的轨迹叫作抛物线，其标准方程为 $y^2=\pm 2px\,(p>0)$，$x^2=\pm 2py\,(p>0)$，对于标准方程 $x^2=\pm 2py\,(p>0)$，其实质等同于二次函数 $y=ax^2$，即 $a=\pm\dfrac{1}{2p}$，其他位置的二次函数图象可通过平移坐标轴而得到. 由此可见二次函数的图象是抛物线的一种情况.

教学目标

1. 经历探索二次函数与一元二次方程的关系的过程，体会方程与函数之间的联系. 使学生知道二次函数的图象与 x 轴的三种位置关系对应着一元二次方程的根的三种情况.

2. 会利用二次函数的图象求一元二次方程的近似解.

3. 运用二次函数与一元二次方程的关系解决实际问题.

教学重点、难点

教学重点：二次函数与一元二次方程的关系.

教学难点：运用二次函数与一元二次方程的关系解决实际问题.

1.4 二次函数与一元二次方程的联系

探究

画出二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象，你能从图象中看出它与 x 轴的交点吗？二次函数 $y=x^2-2x-3$ 与一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 有怎样的关系？

如图1-14，二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象与 x 轴的交点坐标分别是(−1，0)，(3，0). 由交点坐标可知，当 $x=-1$ 时，$y=0$，即 $x^2-2x-3=0$，也就是说，$x=-1$ 是一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 的一个根.

同理，当 $x=3$ 时，$y=0$，即 $x^2-2x-3=0$，也就是说，$x=3$ 是一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 的一个根.

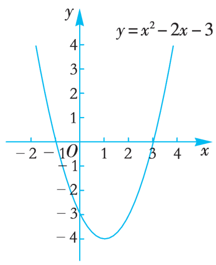


图 1-14

一般地，如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，那么一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实根 $x=x_1$，$x=x_2$.

动脑筋

观察二次函数 $y=x^2-6x+9$，$y=x^2-2x+2$ 的图象(如图 1-15)，分别说出一元二次方程 $x^2-6x+9=0$ 和 $x^2-2x+2=0$ 的根的情况.

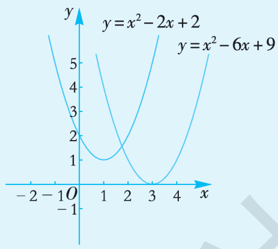


图 1-15

本节通过“探究”与“动脑筋”两个栏目来使学生了解二次函数与一元二次方程的联系. 数形结合是分析问题的基本方法. 由分析可知：若二次函数的图象与 x 轴有交点，当自变量取交点的横坐标时，函数的值为 0，而此时对应的一元二次方程的根就是二次函数的图象与 x 轴交点的横坐标，若二次函数的图象与 x 轴没有交点时，表明当自变量取任何实数值时，函数的值都不会为 0，相应的一元二次方程没有实数根.

二次函数 $y=x^2-6x+9$ 的图象与 x 轴有重合的两个交点，其坐标都是(3，0)，而一元二次方程 $x^2-6x+9=0$ 有两个相等的实根：$x_1=3$，$x_2=3$.

二次函数 $y=x^2-2x+2$ 的图象与 x 轴没有交点，而一元二次方程 $x^2-2x+2=0$ 没有实数根.

一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的位置关系有三种：有两个不同的交点、有两个重合的交点、没有交点，这对应着一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的三种情况：有两个不相等的实根、有两个相等的实根和没有实数根. 反过来，由一元二次方程的根的情况，也可以确定相应的二次函数的图象与 x 轴的位置关系.

$\Delta>0 \Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴有两个交点；

$\Delta=0 \Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴有一个交点；

$\Delta<0 \Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴没有交点.

从上面的分析可以看出，二次函数与一元二次方程关系密切. 那么解一元二次方程能不能借助二次函数呢？求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根就是求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $y=0$ 时，自变量 x 的值，也就是二次函数图象与 x 轴交点的横坐标，因而我们可以利用二次函数的图象来求一元二次方程的根. 由于作图或观察的误差，由图象求得的根，一般是近似的.

例 1 求一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的根的近似值（精确到 0.1）.

分析 一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的根就是抛物线 $y=x^2-2x-1$ 与 x 轴的交点的横坐标. 因此我们可以先画出这条抛物线，然后从图象上找出它与 x 轴的交点的横坐标. 这种解一元二次方程的方法叫作图象法.

解 设二次函数 $y=x^2-2x-1$.

作出二次函数 $y=x^2-2x-1$ 的图象，如图 1-16. 可以发现抛物线与 x 轴的一个交点在 −1 和 0 之间，另一个交点在 2 和 3 之间.

通过观察或测量，可得抛物线与 x 轴的交点的横坐标约为 −0.4 或 2.4，即一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的实数根为 $x_1\approx-0.4$，$x_2\approx2.4$.

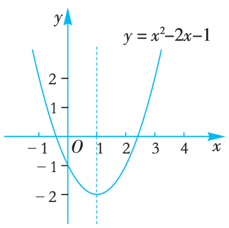
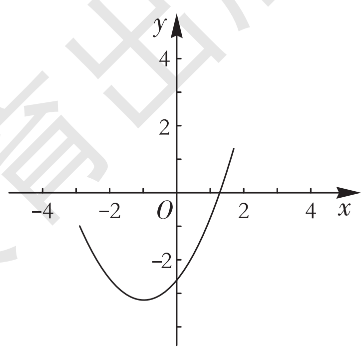


图 1-16

例1的解法涉及图象观察法和计算器法，重点在前者，其目的是让学生借助图象体会函数与方程的联系.

补充例题

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标（−1，−3.2）及部分图象，由图象可知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根分别是 $x_1=1.3$ 和 $x_2=$_________.



我们还可以借助计算器来分析所求方程的实数根．将二次函数 $y=x^2-2x-1$ 在 -1 至 0 范围内的部分 x 值所对应的 y 值列表如下：

x	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
y	2	1.61	1.24	0.89	0.56	0.25	-0.04	-0.31	-0.56	-0.79	-1

可以发现，当 $x=-0.5$ 时，$y=0.25>0$；

而当 $x=-0.4$ 时，$y=-0.04<0$.

结合图象可以看出，使 $y=0$ 的 x 的值一定在 -0.5 与 -0.4 之间，即 $-0.5<x<-0.4$.

题目只要求精确到 0.1，这时取 $x=-0.4$ 或 $x=-0.5$ 作为所求的根均满足要求．但当 $x=-0.4$ 时，$y=-0.04$，比当 $x=-0.5$ 时，$y=0.25$ 更接近于 0，因此选 $x=-0.4$.

同理，借助计算器，我们可以确定一元二次方程的另一个实数根为 $x=2.4$.

例 2 如图1-17，丁丁在扔铅球时，铅球沿抛物线 $y=-\frac{x^2}{10}+\frac{6}{10}x+\frac{8}{5}$ 运行，其中 x 是铅球离初始位置的水平距离，y 是铅球离地面的高度.

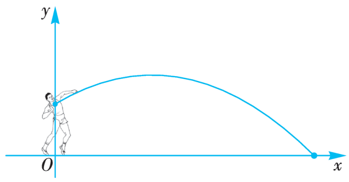


图 1-17

（1）当铅球离地面的高度为2.1 m 时，它离初始位置的水平距离是多少？

（2）铅球离地面的高度能否达到2.5 m，它离初始位置的水平距离是多少？

（3）铅球离地面的高度能否达到3 m？为什么？

解　（1）由抛物线的表达式得

$$2.1=-\frac{x^2}{10}+\frac{6}{10}x+\frac{8}{5},$$

你能结合图1-17指出，为什么在不同的水平距离，铅球的高度均为2.1 m？

即　　$x^2-6x+5=0$,

解得　　$x_1=1$，$x_2=5$.

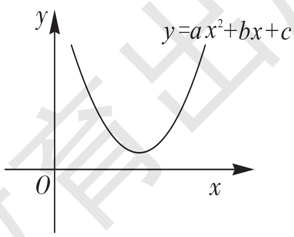
即当铅球离地面的高度为2.1 m 时，它离初始位置的水平距离是 1 m 或 5 m.

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当已知函数的某个值 y，求对应的自变量 x 的值时，就变成了求某一个一元二次方程的根的问题.

例 2 的教学，除了使用代数方法求解外，还应从函数图象的角度来加以分析，如第(1)题，就是直线 $y=2.1$ 与抛物线有两个交点；第(2)题，直线 $y=2.5$ 与抛物线有一个交点；第(3)题，直线 $y=3$ 与抛物线没有交点.

补充例题

如图，无论 x 为何值，$y=ax^2+bx+c$ 恒为正的条件是（　　）



A. $a>0$，$b^2-4ac>0$

B. $a<0$，$b^2-4ac>0$

C. $a>0$，$b^2-4ac<0$

D. $a<0$，$b^2-4ac<0$

（2）由抛物线的表达式得 $$2.5=-\frac{x^2}{10}+\frac{6}{10}x+\frac{8}{5},$$

即 $$x^2-6x+9=0,$$

解得 $$x_1=x_2=3.$$

当铅球离地面的高度为2.5 m时，它离初始位置的水平距离是3 m.

（3）由抛物线的表达式得 $$3=-\frac{x^2}{10}+\frac{6}{10}x+\frac{8}{5},$$

即 $$x^2-6x+14=0,$$

因为$\Delta=(-6)^2-4\times1\times14=-20<0$，所以方程无实数根.

所以铅球离地面的高度不能达到3 m.

从例 2 可以看出，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的某一个函数值 $y=M$，求对应的自变量的值时，需要解一元二次方程 $ax^2+bx+c=M$，这样，二次函数与一元二次方程就紧密地联系起来了.

练习

1. 试判断下列抛物线与 x 轴的交点情况：

（1）$y=x^2-x-2$；（2）$y=9x^2+12x+4$；（3）$y=x^2-2x+3$.

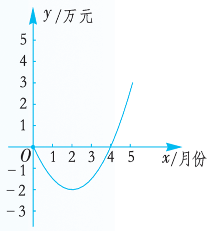
2. 用图象法求一元二次方程 $x^2+x-1=0$ 的根的近似值(精确到 0.1).

3. 某公司推出了一种高效环保型洗涤用品，年初上市后，公司经历了从亏损到赢利的过程. 如图，已知 $y=\frac{1}{2}x^2-2x$ 刻画了该公司年初以来累积利润 y（万元)与销售时间 x(月份)之间的关系. 试根据图象提供的信息，回答下列问题：

(1) 该公司亏损期是几个月？几月末开始赢利？

(2) 求截止到几月末公司累积利润可达到 30 万元；

(3) 该公司第 8 月末所获利润是多少？



(第 3 题图)

练习

1.（1）两个交点；

（2）一个交点；

（3）没有交点.

2. $x_1\approx0.6$，$x_2\approx-1.6$.

3.（1）4个月，4月末开始赢利；

（2）10月末；

（3）16万元.

习题1.4

A组

1. （1）两个交点；

（2）一个交点；

（3）两个交点；

（4）没有交点.

2. $x_1 \approx -0.8$，$x_2 \approx 1.8$.

3. $x_1=2$，$x_2=-1$.

B组

4. $t=\pm\sqrt{5}$；

5. （1）3.5 m；

（2）由 $y=-\frac{1}{5}x^2+3.5$ 得 $x^2=5(3.5-y)$，所以水平距离为：$\sqrt{5(3.5-2.25)}+\sqrt{5(3.5-3.05)}=2.5+1.5=4(\mathrm{m})$.

习题 1.4

A 组

1. 试判断下列抛物线与 x 轴的交点情况：

（1）$y=4x^2+12x+5$；　　（2）$y=x^2+2x+1$；

（3）$y=x^2-3x+1$；　　（4）$y=2x^2+3x+2$.

2. 用图象法求一元二次方程 $2x^2-2x-3=0$ 的根的近似值(精确到 0.1).

3. 求抛物线 $y=2x^2-2x+5$ 上纵坐标为 9 的点的横坐标.

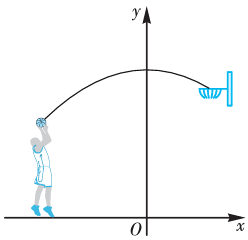
B 组

4. 当 t 取什么值时，抛物线 $y=5x^2+4tx+t^2-1$ 与 x 轴有一个交点？

5. 如图，一位篮球运动员跳起投篮，球沿抛物线 $y=-\frac{1}{5}x^2+3.5$ 运行，然后准确落入篮筐内，已知篮筐的中心离地面的高度为 3.05 m.

（1）球在空中运行的最大高度为多少米？

（2）如果该运动员跳投时，球出手时离地面的高度为 2.25 m，请问他距篮筐中心的水平距离是多少米？



(第 5 题图)

1.5 二次函数的应用

动脑筋

如图 1–18，一座拱桥的纵截面是抛物线的一部分，拱桥的跨度是 4.9 m，当水面宽 4 m 时，拱顶离水面 2 m. 若想了解水面宽度变化时，拱顶离水面高度怎样变化，你能建立函数模型来解决这个问题吗？

图 1–18

拱桥的纵截面是抛物线的一部分，应当是某个二次函数的图象，因此可以建立二次函数模型来刻画.

为简便起见，以拱顶为原点，抛物线的对称轴为 y 轴，建立直角坐标系，如图 1–19. 由于顶点坐标是 (0，0)，因此这条抛物线的形式为 $y=ax^2$.

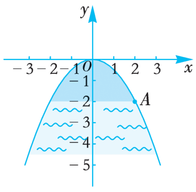


图 1–19

已知水面宽 4 m 时，拱顶离水面高 2 m，因此点 $A(2,-2)$ 在抛物线上. 由此得出

$$-2=a\cdot 2^2,$$

解得 $a=-\dfrac{1}{2}$.

因此，这个函数的表达式是 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$，其中 $|x|$ 是水面宽度的一半，y 是拱顶离水面高度的相反数. 这样我们从水面宽度的变化情况可以了解到拱顶离水面高度的变化情况.

由于拱桥的跨度为 4.9 m，因此自变量 x 的取值范围是：$-2.45\leqslant x\leqslant 2.45$.

想一想，当水面宽 4.6 m 时，拱顶离水面几米？

教学目标

1. 会分析实际问题中的数量关系和变化规律，能建立二次函数模型(包括确定二次函数的表达式)来解决简单的实际问题.

2. 体会数形结合在解决实际问题中的作用，能运用二次函数的性质解决最值问题.

3. 经历函数建模的过程，体会函数建模的方法和思想，进一步提高学生的应用意识.

教学重点、难点

教学重点：从实际问题中抽象出数量关系，确定二次函数的表达式，运用二次函数的性质解决最值问题，体会数形结合的重要性.

教学难点：从实际问题中抽象出二次函数的模型；理解自变量取值范围的限制对函数最值的影响.

“动脑筋”栏目呈现的是一个比较经典的函数建模问题，它需要先建立适当的直角坐标系，建立函数模型，通过待定系数法确定二次函数的表达式，最后利用二次函数的性质解决实际问题(其中需根据实际问题的背景确定自变量的取值范围). 教师可结合该例清晰地展示函数建模的步骤，让学生体会函数建模的方法，感受数学应用的价值.

议一议

建立二次函数模型解决实际问题的基本步骤是什么？

实际问题 → 建立二次函数模型 → 利用二次函数的图象和性质求解 → 实际问题的解

动脑筋

如图 1-20，用 8 m 长的铝材做一个日字形窗框. 试问：窗框的宽和高各为多少时，窗框的透光面积 S(m²)最大？最大面积是多少？(假设铝材的宽度不计)

图 1-20

由于做窗框的铝材长度已确定，而窗框的面积 S 随矩形一边长的变化而变化. 因此设窗框的宽为 x m，则窗框的高为 $\frac{8-3x}{2}$ m，其中 $0<x<\frac{8}{3}$.

则窗框的透光面积为

$$S=x\cdot\frac{8-3x}{2}=-\frac{3}{2}x^2+4x,\ 0<x<\frac{8}{3}.$$

将上式进行配方，

$$S=-\frac{3}{2}x^2+4x=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{8}{3}.$$

当 $x=\frac{4}{3}$ 时，S 取最大值 $\frac{8}{3}$.

要考虑 $x=\frac{4}{3}$ 是不是在自变量 x 的取值范围内.

这时高为 $\dfrac{8-3\times\frac{4}{3}}{2}=2$(m).

则当窗框的宽为 $\frac{4}{3}$ m，高为 2 m 时，窗框的透光面积最大，最大透光面积为 $\frac{8}{3}$ m².

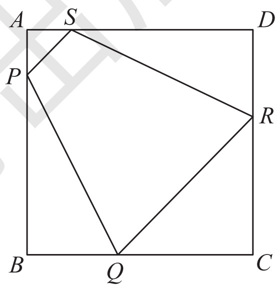
这个“动脑筋”栏目中的问题不同于上一个栏目，它不需要数形结合地构建函数模型，而是直接分析问题中蕴含的数量关系，并根据面积公式确定函数的表达式. 随后，运用配方法，并利用二次函数的性质求得问题的最大值. 要注意提示学生思考 $x=\frac{4}{3}$ 在不在自变量 x 的取值范围之内.

上述数学建模体现了实际问题→数学问题→数学结果→实际结果这样一个过程.

在求二次函数何时达到最大(小)值时，需要注意顶点的横坐标是否在实际问题中 x 的允许值范围之内.

补充例题

如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 a，点 P，Q，R，S 分别在 AB，BC，CD，DA 上，且 $BQ=2AP$，$CR=3AP$，$DS=4AP$. 问 AP 为多少时，四边形 $PQRS$ 的面积有最小值？最小值是多少？



例 某网络玩具店引进一批进价为 20 元 / 件的玩具，如果以单价 30 元销售，那么一个月内可售出 180 件. 根据销售经验，提高销售单价会导致销售量的下降，即销售单价每上涨 1 元，月销售量将相应减少 10 件. 当销售单价为多少元时，该店能在一个月内获得最大利润？

解 设每件商品的销售单价上涨 x 元，一个月内获取的商品总利润为 y 元.

每月减少的销售量为 $10x$（件），实际销售量为 $180-10x$（件），单件利润为 $(30+x-20)$ 元，则

$$y=(10+x)(180-10x),$$

即

$$y=-10x^2+80x+1\ 800\quad(0\leqslant x\leqslant 18).$$

将上式进行配方，

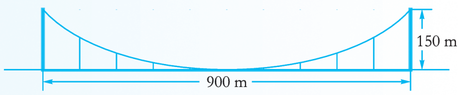
$$\begin{aligned}y&=-10x^2+80x+1\ 800\\&=-10(x-4)^2+1\ 960.\end{aligned}$$

当 $x=4$ 时，即销售单价为 34 元时，y 取最大值 1 960.

答：当销售单价定为 34 元时，该店在一个月内能获得最大利润 1 960 元.

练习

1. 如图是某抛物线形悬索桥的截面示意图，已知悬索桥两端主塔高 150 m，主塔之间的距离为 900 m，试建立适当的直角坐标系，求出该抛物线形桥所对应的二次函数表达式.



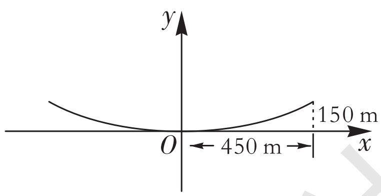
（第 1 题图）

2. 小妍想将一根 72 cm长的彩带剪成两段，分别围成两个正方形，则她要怎么剪才能让这两个正方形的面积和最小？此时的面积和为多少？

上一个“动脑筋”栏目中的问题与这个例题均是求最值的问题，教材的解答过程是用配方法来求，这是强调配方法是学生必须掌握的一种基本方法. 实际上，待学生熟练掌握配方法求最值后，也可采用二次函数的顶点公式来求最大(小)值.

练习

1. 为简便起见，可以以悬索桥的中心点为原点，抛物线的对称轴为 y 轴建立平面直角坐标系. 如图：



这个二次函数的表达式是 $y=\dfrac{x^2}{1\ 350}$，$-450\leqslant x\leqslant 450$.

2. 设剪断后的彩带其中一段长为 x cm，则分别围成的两个正方形的面积和为

$$y=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{72-x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{8}-9x+324,\quad 0<x<72.$$

当 $x=36$ cm 时，y 取最小值162 cm^2.

习题1.5

A组

1. 为简便起见，可以点 A 为原点，BC 所在直线为 x 轴，AO 所在直线为 y 轴建立直角坐标系. 这个二次函数的表达式是：

$$y=\frac{1}{2.25}x^2-1，-1.5\leqslant x\leqslant 1.5.$$

当 $x=0.5$ 时，$y=-\frac{8}{9}$，即 DE 的高度为 $\frac{8}{9}$ m.

2.（1）$y=-x^2+18x$（$0<x<18$）；

（2）当$x=9$ 时，$y=81$，即最大面积为 81 m^2.

3.（1）每天获取的利润为 $(-10x+700)(x-10)=-10(x-40)^2+9\ 000$，$x>0$，当 $x=40$ 时，最大利润为 9 000 元；

（2）当 $0<x<40$ 时，利润随 x 的增大而增大，因此，当 $x=35$ 时，最大利润为 8 750 元.

B组

4.（1）$y=2x^2-4x+4$，$0<x<2$；

（2）有，当 $x=1$ 时，$y_{min}=2$.

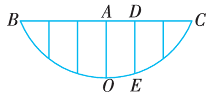
注：本题应当先证边上四个三角形全等，再求y关于x的函数表达式.

5. 本题是一道开放题，直角坐标系的建法不同，则所得函数的表达式不同. 为方便起见，我们以起跳后达到的最高处为原点，抛物线的对称轴为 y 轴，建立直角坐标系，对应的抛物线的表达式为 $y=-x^2$，$-1\leqslant x\leqslant\sqrt{11}$.

习题 1.5

A 组

1. 如图，一段拱形栅栏为抛物线的一部分，已知拱高 OA 为 1 m，栅栏的跨径 BC 间有 5 根间距为 0.5 m 的立柱. 试建立适当的直角坐标系，求出该拱形栅栏所对应的二次函数表达式，并求出立柱 DE 的高度.



(第 1 题图)


(第 2 题图)

2. 如图，用长为 18 m 的篱笆(虚线部分)，围成两面靠墙的矩形苗圃.

(1) 设矩形的一边为 x(m)，面积为 y(m^2)，求 y 关于 x 的函数表达式；

(2) 当 x 为何值时，所围苗圃的面积最大，最大面积是多少?

3. 某工艺厂设计了一款成本为10元 / 件的产品，并投放市场进行试销. 经过调查，发现每天的销售量 y(件)与销售单价 x(元)存在一次函数关系 $y=-10x+700$.

(1) 销售单价定为多少时，该厂每天获取的利润最大? 最大利润为多少?

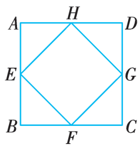
(2) 若物价部门规定，该产品的最高销售单价不得超过 35 元，那么销售单价如何定位才能获取最大利润?

B 组

4. 如图，正方形$EFGH$的顶点在边长为 2 的正方形$ABCD$的边上，若设$AE=x$，正方形$EFGH$的面积为y.

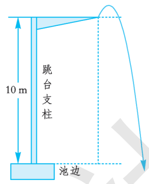
(1) 求 y 关于 x 的函数表达式.

(2) 正方形$EFGH$有没有最小面积? 若有，试确定E点的位置；若没有，试说明理由.



(第 4 题图)

5. 如图，某跳水运动员在进行 10 m 跳台比赛时，身体（看成一点）在空中的运动轨迹是一条抛物线，已知该运动员在离跳台的水平距离为 1 m 处达到最高点，高度为 1 m，试建立适当的直角坐标系，求该抛物线的表达式.



(第 5 题图)

32 数学 九年级下册

IT 教室

用计算机研究二次函数的图象与性质

在本章，我们采用描点法画出了二次函数的图象，并研究其性质．下面，我们借助计算机软件来绘制二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，并研究其性质.

(1) 打开“几何画板”软件，选择【工具栏】中的【自定义工具】，在弹出的菜单中选择【滑块工具】，如图 1. 点击【基本的水平滑块】，在工作区出现一条线段，就得到参数 a，如图 2 所示. 任意拖动 “a” 点，可以改变参数 “a” 的大小． 同理，可得参数 b，c．

图 1

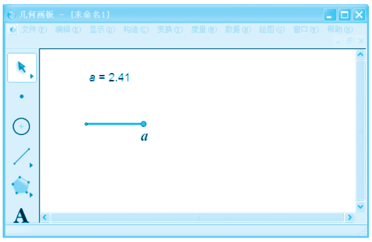


图 2

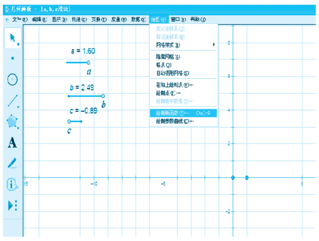


图 3

(2) 同时选择参数 a，b，c，选择【绘图】菜单中的【绘制新函数】命令，如图 3，在弹出的【新建函数】对话框中，输入“$a*x$^2 + $b*x+c$”，如图 4. 点击“确定”按钮，就可以得到二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，如图 5. 任意拖动参数 a，b，c 至给定的常数，我们可以得到任意给定的二次函数的图象.

这篇材料介绍了如何使用计算机软件“几何画板”画二次函数的图象. 用计算机画二次函数图象的基本原理与描点法画二次函数图象是一致的，只是它的取值、计算、描点和连线由计算机完成，描点数不受人工描点的限制，因而用计算机画图比人工画图要快速准确.

这里使用的几何画板软件，是一种简单易用的具备函数画图功能的软件，输入一般的初等函数的解析式，计算机就能自动画出相应的图象. 有条件的学校可以尝试让学生亲自动手操作，学习使用几何画板的基本功能，对后续学习函数以及其他相关内容，构建数学实验探究平台，培养学生动手操作与探究创新能力是大有好处的.

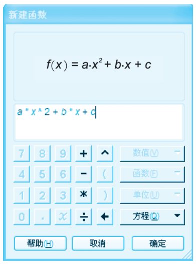


图 4

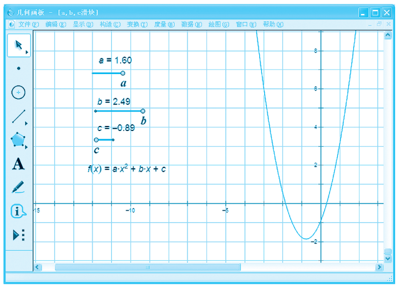


图 5

(3) 任意拖动参数，观察二次函数的图象发生了怎样的变化. a 的变化对函数图象有什么影响？你能得出什么结论？同样，分别拖动参数b，c，观察图象又会发生怎样的变化.

同时，我们可以利用作出的二次函数的图象来求得一元二次方程的根的近似值. 例如，当抛物线与x 轴有交点时，在工具栏中选择“点工具”，构造出两个（或一个）交点，测量出交点的横坐标，如图 6，这样就得到相应的一元二次方程的根的近似值.

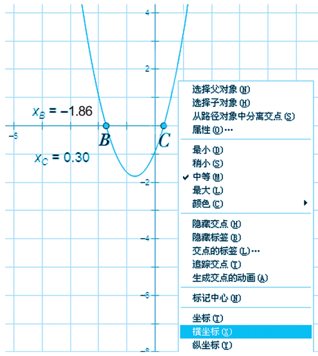


图 6

请同学们用软件绘制二次函数 $y=x^2-2x-3$ 和 $y=-x^2-5x-3$ 的图象，并求出一元二次方程 $x^2-2x-3=0$，$-x^2-5x-3=0$ 的根的近似值.

小结与复习

回顾

1. 什么形式的函数叫作二次函数？试举例说明.

2. 举例说明如何用描点法来作出一个二次函数的图象，并指出画图的步骤.

3. 说出二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象具有哪些性质.

4. 如何将 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 配方成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式？

*__5.__ 如何用不共线三点的坐标来求出二次函数的表达式？

6. 结合抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的位置关系，说明一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的各种情况.

7. 如何利用二次函数的图象求一元二次方程的根的近似值？

8. 试结合实例说明，建立二次函数模型解决实际问题的基本步骤是什么？

本章知识结构

二次函数
- 二次函数的概念
- 二次函数的图象与性质
- * 不共线三点确定二次函数的表达式
- 二次函数与一元二次方程的联系
- 二次函数的应用

注意

1. 我们可以从 $y=ax^2\ (a>0)$ 的图象与性质出发，得出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质，探究过程如下：

二次函数是第三学段研究的最重要、内容最丰富的函数，本章函数学习沿袭以往的思路：

（1）通过具体实例抽象出这种函数；

（2）探索这种函数的图象和性质；

（3）探索这种函数与相应方程等的关系；

（4）利用这种函数解决实际问题.

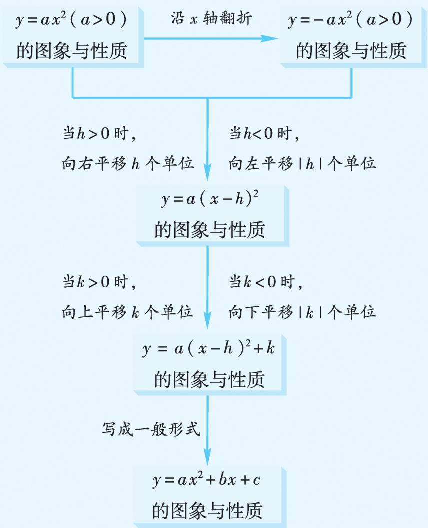
按照这个思路，从实际中抽象出二次函数的概念，进而运用二次函数解决实际问题，这是贯穿于函数学习的主线；而对函数图象与性质的研究，也是函数学习的主线. 因此，“小结与复习”仍要按照这几条主线，结合实际问题来帮助学生梳理本章所学的主要知识点，总结出知识间的联系、脉络，知晓哪些地方是关键，以形成整体理解，这将对今后进一步学习函数打下重要的基础.

同时，通过复习，应使学生进一步体会本章内容中蕴含的丰富的数学思想与方法，如函数建模、几何变换在函数中的应用（运用轴反射和平移）、数形结合、函数与方程的转化、分类、配方法以及待定系数法等.

教师可结合右侧的图让学生说一说将二次函数沿 x 轴翻折改变了什么，而什么没变；将二次函数平移改变了什么，而什么没变.

同时，可结合实例说明二次函数的平移规律：即“左加右减、上加下减”.

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的特征与系数 a，b，c 的关系：(1) a 决定抛物线的开口方向：$a>0$，开口向上；$a<0$，开口向下.（2）a，b 决定对称轴的位置：a，b 同号，对称轴在 y 轴左侧；a，b 异号，对称轴在 y 轴右侧.（3）c 决定抛物线与 y 轴交点的位置：$c>0$，图象与 y 轴的交点在 y 轴正半轴上；$c=0$，图象与 y 轴的交点是原点；$c<0$，图象与 y 轴的交点在 y 轴负半轴上.（4）抛物线与 x 轴的交点个数由 $\Delta=b^2-4ac$ 确定.



由于从二次函数 $y=ax^2\,(a>0)$ 的图象经过轴反射和平移可得出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，而轴反射和平移都不改变图形的形状和大小，因此二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象都是抛物线.

2. 二次函数的图象都是轴对称图形. 抛物线 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ 关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称.

3. 结合图象讨论函数性质是数形结合地研究函数的重要方法，本章我们需认真体会这种方法的作用与价值.

4. 对于现实生活中的许多问题，我们可以通过建立二次函数模型来解决. 在此过程中，我们需体会函数模型在反映现实世界的运动变化中的作用，体会模型是沟通数学与现实的有效桥梁.

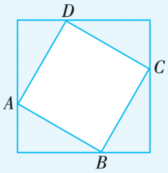
5. 利用二次函数解决实际问题时，自变量的取值范围要结合具体问题来确定.

36 数学 九年级下册

复习题 1

A 组

1. 如图，一张正方形纸板的边长为 4，将它剪去 4 个全等的直角三角形，设这 4 个直角三角形短直角边的长度为 x，四边形 $ABCD$ 的面积为 y，求 y 关于 x 的函数表达式.



（第 1 题图）

2. 画出下列二次函数的图象，并指出图象的对称轴、顶点坐标和开口方向.

(1) $y=-\frac{1}{3}x^2$；　(2) $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$；

(3) $y=-\frac{2}{3}(x-3)^2+2$；　(4) $y=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+2$；

(5) $y=-x^2+7x-11$；　(6) $y=x^2-10x+21$.

3. 填空：

(1) 抛物线 $y=3x^2$ 先向左平移 2 个单位，得到抛物线 ________；接着向上平移 1 个单位，得到抛物线 ________.

(2) 抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 沿着 x 轴翻折并“复制”出来，得到抛物线 ________；接着向右平移 5 个单位，得到抛物线 ________；接着向下平移 2 个单位，得到抛物线 ________.

4. 已知二次函数的图象的顶点坐标为 $\left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$，且过点 $\left(2,\ \frac{11}{2}\right)$. 求这个二次函数的表达式及它与 y 轴的交点坐标.

5. 用配方法求下列二次函数的最大值或最小值.

(1) $y=-x^2+3x+4$；　(2) $y=\frac{1}{4}x^2-2x+1$.

*6. 已知二次函数的图象与 x 轴交于点（2，0），（−1，0），与 y 轴交于点（0，−1）. 求这个二次函数的表达式及顶点坐标.

7. 用图象法求一元二次方程 $x^2+4x-3=0$ 的根的近似值(精确到 0.1).

复习题1

A组

1. $y=2x^2-8x+16$，$0<x<4$.

2. （1）对称轴为 y 轴，顶点坐标(0，0)，开口向下；

（2）对称轴为直线 $x=2$，顶点坐标(2，0)，开口向上；

（3）对称轴为直线 $x=3$，顶点坐标(3，2)，开口向下；

（4）对称轴为直线 $x=\frac{7}{2}$，顶点坐标 $\left(\frac{7}{2},\ 2\right)$，开口向上；

（5）对称轴为直线 $x=\frac{7}{2}$，顶点坐标 $\left(\frac{7}{2},\ \frac{5}{4}\right)$，开口向下；

（6）对称轴为直线 $x=5$，顶点坐标(5，−4)，开口向上.

3. （1）$y=3(x+2)^2$，$y=3(x+2)^2+1$；

（2）$y=-\frac{1}{3}x^2$，$y=-\frac{1}{3}(x-5)^2$，$y=-\frac{1}{3}(x-5)^2-2$.

4. $y=\frac{1}{5}(x+3)^2+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{5}x^2+\frac{6}{5}x+\frac{23}{10}$，

与y轴的交点坐标为 $\left(0,\ \frac{23}{10}\right)$.

5. （1）$y=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$，最大值为 $\frac{25}{4}$；

（2）$y=\frac{1}{4}(x-4)^2-3$，最小值为−3.

***6.** $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$，顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{9}{8}\right)$.

7. $x_1\approx0.6$，$x_2\approx-4.6$.

8. 将一个小球以 20 m / s 的初速度从地面垂直抛向空中，经过时间 t (s)，小球的高度 h (m)为 $h=20t-5t^2$.

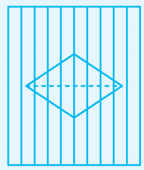
(1) 经过多长时间，小球达到最高点？此时小球离地面多高？

(2) 经过多长时间，小球落到地上？

9. 如图，一种铁栅栏护窗的正面是高为 120 cm，宽为 100 cm 的矩形，在中间有一个由 4 根铁条组成的菱形. 菱形的水平方向的对角线比竖直方向的对角线长 20 cm，设竖直方向的对角线的长度为 x(cm).

(1) 求菱形的面积 S(cm²)关于 x 的函数表达式；

(2) 当 x 取何值时，菱形的面积是护窗面积的 $\frac{1}{5}$？



(第 9 题图)

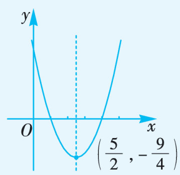
B 组

10. 如图为二次函数 $y=(x+m)^2+k$ 的图象.

(1) 根据图中提供的信息求二次函数的表达式；

(2) 求图象与 x 轴的交点坐标；

(3) 观察图象回答：当 x 取何值时，$y>0$？当 x 取何值时，$y=0$？当 x 取何值时，$y<0$？



(第 10 题图)

11. 当 b^2-4ac 分别满足什么条件时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个不同的交点、有两个重合的交点、没有交点？试判断下列抛物线与 x 轴的交点情况：

(1) $y=2x^2-3x+1$；　(2) $y=4x^2+4x+1$；　(3) $y=-x^2+2x-4$.

12. 如图，排球运动员站在点 O 处练习发球，将球从 O 点正上方 2 m 的 A 处发出，把球看成点，其运行的高度 y(m)与运行的水平距离 x(m)满足表达式 $y=a(x-6)^2+h$. 已知球网与 O 点的水平距离为 9 m，高度为 2.43 m，球场的边界距 O 点的水平距离为 18 m.

8. (1) 当 $t=2$ s 时，小球达到最高点，此时离地面 20 m；

(2) 当 $t=4$ s 时，小球落到地上.

9. (1) $S=x^2+20x$，$0<x<80$；

(2) $x=40$ cm.

B组

10. (1) $y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$；

(2) (1，0)，(4，0)；

(3) 当$x<1$或$x>4$时，$y>0$；当$x=1$或$x=4$时，$y=0$；当$1<x<4$时，$y<0$.

11. $b^2-4ac>0$，有两个不同的交点；

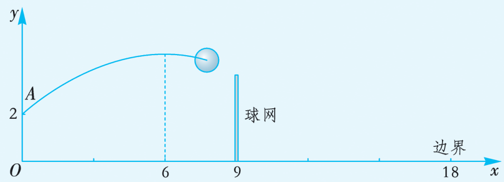
$b^2-4ac=0$，有两个重合的交点；

$b^2-4ac<0$，没有交点.

(1) 有两个不同的交点；

(2) 有两个重合的交点；

(3) 没有交点.



(第 12 题图)

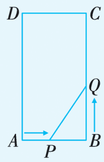
(1) 当 $h=2.6$ 时，求 y 关于 x 的函数表达式；

(2) 当 $h=2.6$ 时，球能否越过球网？球会不会出界？试说明理由.

13. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$ cm，$BC=12$ cm，点 P 从点 A 出发，沿 AB 边向点 B 以 1 cm/s 的速度移动，同时，点 Q 从点 B 出发，沿 BC 边向点 C 以 2 cm/s 的速度移动. 如果 P，Q 两点在分别到达 B，C 两点后就停止移动，回答下列问题：

(1) 设运动开始后第 t s 时，五边形 $APQCD$ 的面积为 S(cm²)，求 S 关于 t 的函数表达式，并指出自变量 t 的取值范围；

(2) 当 t 为何值时，S 最小？并求出 S 的最小值.



(第 13 题图)

C 组

14. 抛物线 $y=x^2-4x+3.5$ 与 x 轴交于 A，B 两点，抛物线的顶点为 P，求 $\triangle PAB$ 的面积.

15. 某地发生旱情，为抗旱保丰收，当地政府制定农户投资购买抗旱设备的补贴办法，其中购买Ⅰ型、Ⅱ型抗旱设备所投资的金额与政府补贴的金额存在下表所示的函数对应关系.

型号 金额	Ⅰ型设备		Ⅱ型设备		
投资金额 x/万元	x	5	x	2	4
补贴金额 y/万元	$y_1=kx$ $(k\neq0)$	2	$y_2=ax^2+bx$ $(a\neq0)$	2.4	3.2

(1) 分别求出 y_1，y_2 的函数表达式；

(2) 有一农户同时对Ⅰ型、Ⅱ型两种设备共投资 10 万元购买，请你设计一个能获得最大补贴金额的方案，并求出按此方案能获得的最大补贴金额.

12. (1) $y=-\dfrac{1}{60}x^2+\dfrac{1}{5}x+2$.

(2) 当 $x=9$ 时，$y=2.45>2.43$，因此球能越过球网；

当 $x=18$ 时，$y=\dfrac{1}{5}>0$，因此球会出界.

13. (1) $S=t^2-6t+72$，$0<t\leqslant6$；

(2) 当 $t=3$ 时，S 最小，为 63.

C组

14. 根据题意可得

$x_{A,B}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2$, $y_p=-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

15. (1) $y_1=\dfrac{2}{5}x$，$y_2=-0.2x^2+1.6x$；

(2) 设Ⅰ型投入 x 万元，则Ⅱ型投入 $(10-x)$ 万元，补贴金额为 y 万元. 因此

$y=\dfrac{2}{5}x+[-0.2(10-x)^2+1.6(10-x)]$

$=-0.2x^2+2.8x-4$,

当 $x=7$ 时，$y=5.8$，即最大补贴金额为 5.8 万元.

一、教学目标

1. 经历“问题解决”的全过程，体会“函数建模”的方法和思想.

2. 能通过建立函数模型解决简单的实际问题，感受数学应用的价值.

二、教学建议

1. 本课题在课前可让学生预习，思考如何将实际问题数学化，怎样建立直角坐标系，怎样建立二次函数模型. 在教学中，可按照“选题(问题导入)—开题(探寻路径)—做题(实践操作)—结题（交流评价)”这样四个环节进行. “微科研”活动，使得学生在“微科研”中提升问题意识、应用意识，并培养其创新精神.

2. 让学生以小组合作形式经历“数学建模”过程，体会函数建模的思想与方法. 同时，要反思活动过程，将研究过程和结果形成报告或小论文，并进行班级交流，这能进一步促使学生获得数学活动的经验.

综合与实践

汽车能通过隧道吗?

在离李亮同学所在学校不远的一条双行线公路上有一个隧道，如图 1 所示.

图 1

通过隧道的车辆应该有一个限制高度，这个限制高度怎样确定呢?

为了解决这个问题，李亮和他的同学经实地考察获取了以下情况:

(1) 隧道的纵截面由一个矩形和一段抛物线构成;

(2) 隧道内路面的总宽度为 8 m，双行车道宽度为 6 m，隧道顶部最高处距路面 6 m，矩形的高为 2 m;

(3) 为了保证安全，交通部门要求行驶车辆的顶部(设为平顶)与隧道顶部在竖直方向上的高度差至少要有 0.5 m.

李亮和他的同学运用已学的数学知识，解决了这个实际问题，其过程如下:

画出隧道的截面图. 设双行车道的两个端点分别为 A，B，以 AB 为 x 轴的正方向，AB 的中点为原点建立直角坐标系，如图 2 所示，于是(0，6)为抛物线的顶点，因此可设抛物线的表达式为

$$y=ax^2+6,\ -4\leqslant x\leqslant 4.$$

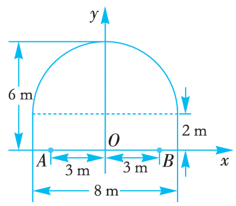


图 2

又因为抛物线经过点(4，2)，所以

$$2=16a+6.$$

解得 $$a=-\frac{1}{4}.$$

这样，抛物线的表达式确定为 $y=-\frac{1}{4}x^2+6$.

40 数学 九年级下册

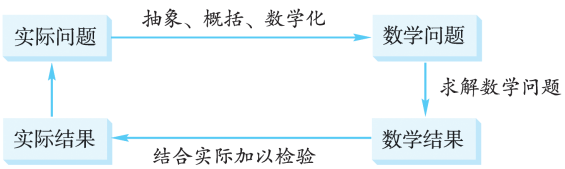
令 $x=3$，得 $y=3.75$.

所以 $3.75-0.5=3.25\approx 3.2$.

李亮和他的同学把通过隧道的车辆限制高度定为 3.2 m.

从李亮和他的同学解决这个实际问题的过程中，我们看到，将一个实际问题，用所学过的数学语言加以抽象概括，建立数学模型(这里是建立适当的直角坐标系，求函数的表达式)，再应用数学方法来求出能够反映实际问题所要求的实际结果(这里是求当 $x=3$ 时，y 的值，所求的限制高度则为 $y-0.5$)，这就是简单数学建模的全过程.

简单数学建模的过程，我们可用下面的框图来说明：



想一想

若有一辆宽为4.5 m，高度为4.5 m的超宽超高车辆欲通过该隧道，能通过吗？是否要采取单向限行措施呢？（假设车辆顶部与隧道顶部在竖直方向上的高度差不小于20 cm)？

交 流

请你收集一些素材，建立函数模型，并求出问题的解.

在老师的组织下，将自己或小组研究问题的思路（或方案）、求解过程中使用的方法、反思与发现以报告的形式与全班同学交流，总结建立数学模型解决实际问题的策略与收获.

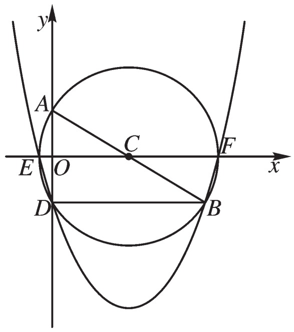
Ⅲ. 本章相关链接

用图解一元二次方程

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求解可转化为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与横轴的交点问题. 抛物线与横轴的交点的横坐标就是一元二次方程的解.

也就是说，我们只要把二次函数的图象画出来，就可以得到一元二次方程的解了. 可问题是，在传统作图工具中，只有直尺、圆规，没有作一元二次函数图象的作图工具. 即使使用描点法，作出来的函数图象也未必精确. 对于现代人而言，我们可以采用计算机来作图，但假如没有计算机呢？下面我们就来介绍一种古代数学家采用的图解法求一元二次方程解的方法.

作法如下：如图，作 $A(0,\ 1)$，$B\left(-\frac{b}{a},\ \frac{c}{a}\right)$，取 AB 中点 C，以点 C 为圆心，AC 为半径画圆，此时圆与横轴的交点的横坐标就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解.



证明：因为 $D\left(0,\ \frac{c}{a}\right)$，设 $E(x_1,\ 0)$，$F(x_2,\ 0)$为圆与横轴的交点，

则 $x_1+x_2=2x_c=x_a+x_b=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=OE\times OF=OA\times OD=\frac{c}{a}$.

这种作图方式看似简单，但涉及的知识点不少，包括韦达定理、垂径定理、圆幂定理. 我们不得不佩服前辈们在作图工具极其简单的条件下，能够发挥聪明才智，利用直尺和圆规，求出方程的准确解. 更为神奇的是，当二次函数与横轴不相交，将此种作图法进一步推广，也可以求出方程的复根.

第 2 章　圆

Ⅰ. 概　述

一、课程内容

1. 理解圆、弧、弦、圆心角、圆周角的概念，了解等圆、等弧的概念；探索并了解点与圆的位置关系.

2. 探索圆周角与圆心角及其所对弧的关系，了解并证明圆周角定理及其推论：圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半；直径所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径；圆内接四边形的对角互补.

*3. 探索并证明垂径定理：垂直于弦的直径平分弦以及弦所对的两条弧.

4. 知道三角形的内心和外心.

5. 了解直线和圆的位置关系，掌握切线的概念，探索切线与过切点的半径的关系，会用三角尺过圆上一点画圆的切线.

*6. 探索并证明切线长定理：过圆外一点所画的圆的两条切线长相等.

7. 会计算圆的弧长、扇形的面积.

8. 了解正多边形的概念及正多边形与圆的关系.

9. 探索圆、正多边形的轴对称性质及中心对称性质.

10. 会利用基本作图完成：过不在同一直线上的三点作圆；作三角形的外接圆、内切圆；作圆的内接正方形和正六边形.

11. 通过实例体会反证法的含义.

二、课时建议

2.1	圆的对称性	1 课时
2.2	圆心角、圆周角	3 课时
*2.3	垂径定理	1 课时
2.4	过不共线三点作圆	1 课时
2.5	直线与圆的位置关系	5 课时
2.6	弧长与扇形面积	2 课时
2.7	正多边形与圆	1 课时
小结与复习		2 课时

三、教材说明

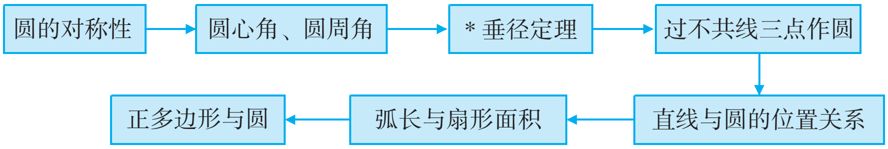
圆是常见的一类几何图形，也是平面几何中的基本图形，它应用广泛，因此，也是第三学段“图形与几何”的主要研究对象. 本章是在小学已经学习过的圆的一些知识的基础上，对圆作进一步较系统的学习和研究.

本章从生活实例出发，介绍圆的概念及点与圆的位置关系，接着探究圆的对称性，利用圆的对称性(轴对称及旋转对称性)来推导圆的诸多性质：圆的弧、弦、圆心角的关系定理，证明圆周角定理及其推论；证明垂径定理及切线长定理(选学内容)；推导圆的弧长公式和扇形面积公式；推导正多边形

与圆的关系. 其间，还穿插介绍了直线与圆的位置关系（包括切线的性质和判定），从而完成对圆的性质较为完整的认识.

本章涉及的概念多，性质多，学习的重点是圆的诸多性质及其应用，而这些性质的推导和证明是本章学习的难点. 特别是对于选学内容(垂径定理及切线长定理)，一方面可根据学情，利用这些知识点帮助学生提高逻辑思维能力和分析解决问题的能力，另一方面要把握好度，不列入考试范围.

根据知识间内在的逻辑性，本章的教学内容分为 7 个小节，顺序安排如下：



在本章小结与复习时，教师可结合“本章知识结构”图，帮助学生在头脑中建立起本章的知识结构，理解知识之间的逻辑关联，以完成对圆的系统认识.

本章教材在编写中力图体现以下几个特点：

1. 以“圆的对称性”为主线贯穿始终，科学地探究圆的诸多性质

圆是一种具有独特对称性的平面几何图形：它不仅是轴对称图形、中心对称图形，而且圆绕圆心旋转任意一个角度都能与原来的图形重合（旋转对称性). 本章在编写过程中，注意以“圆的对称性”为主线来展开对圆的性质的探究.

具体来说，教材首先从图片入手，引入圆的定义，接着借助圆规介绍了圆的另一个定义：圆也可以看成是平面内一个动点绕一个定点旋转一周所形成的图形. 这个定义为圆具有旋转对称性埋下了伏笔. 教材设置“探究”栏目，让学生在硬纸板和薄的白纸上分别画一个圆，它们的半径相等，把白纸放在硬纸板上面，使两个圆的圆心重合，让学生观察两个圆是否重合. 然后用一根大头针穿过这两个圆的圆心，让硬纸板保持不动，让白纸绕圆心旋转任意角度，观察旋转后，白纸上的圆是否仍与硬纸板上的圆重合. 并提问：这体现了圆具有什么样的性质？接着指出：由于圆是由一个动点绕一个定点旋转一周所形成的图形(定义)，因此圆具有旋转对称性，即圆绕圆心旋转任意角度，都能与自身重合. 显然，圆是中心对称图形. 接着，将任意画下的一个圆，使其沿圆的任意一条直径对折，发现圆的两部分重合，由此得到圆是轴对称图形.

有了圆的对称性做基础，我们利用圆具有旋转对称性证明了：在同一个圆中，如果圆心角相等，那么它们所对的弧相等，所对的弦也相等. 利用圆的轴对称性，我们可以探究得出垂径定理和切线长定理.

在推导弧长和扇形面积时，课本利用圆的旋转对称性推出计算公式. 最后一节，课本利用圆的旋转对称性等分圆来画出正 n 边形，同时借助圆的轴对称性分析正多边形与圆的关系，最后利用圆的旋转对称性分析得出正 n 边形(n 为偶数)是中心对称图形.

教师在教学中，要理解编者的意图，强调用变换的观点来研究图形的位置关系和度量关系. 在探索图形的性质时，合理地运用图形变换来说理，对于培养学生的几何直观和思维的严谨是有好处的，在教学时应予以重视.

2. 重视图形性质的探索，突出直观操作(合情推理)和证明(演绎推理)的有机结合

本章要研究的图形性质较多，在图形性质的探索过程中，课本一如既往地重视直观操作和证明的有机结合. 例如，教材通过折纸、旋转实验操作等方法来探索图形的性质（实质渗透了图形变换的手法)，用合情推理来获得猜想，然后对猜想进行证明. 强调合情推理与演绎推理相结合的做法，既是培养学生科学的数学思维方式的良好方式，同时也有利于实现增强学生发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力的课标要求.

在教学本章的过程中，需注意以下几点：

1. 要重视数学思想方法的渗透

本章涉及的数学思想方法较多，如诸多性质的推导运用了合情推理和演绎推理，这其中渗透抽象、推理等数学基本思想；教学点与圆的位置关系、直线与圆的位置关系，比较典型地体现了“形”与“数”的内在联系，蕴含着数形结合的数学思想方法；还比如圆周角定理的证明，通过分类讨论，把一般问题转化为特殊情况来证明；讲“过不共线三点作圆”分别讨论了过一点、过两点、过不共线三点作圆，能作多少个，在渗透分类思想的同时达到教学目的；等等. 在教学中，教师应把握这些数学知识所蕴含的教育价值，把握数学内容所蕴含的数学思想和教育理念，在实际教学中把这些重要的思想落实在具体的教学中.

2. 要重视推理论证能力的培养

本章实际上是初中阶段推理证明要求的最后一章，在内容呈现上不仅是圆的问题，也有很多是和前面所学的几何问题的结合，具有一定的综合性；在教学上也处于推理论证方法的巩固和提高阶段.对此，教师一方面要多帮助学生复习前面所学的几何知识，强调学生熟练地掌握用综合法证明命题，进一步提高其推理论证能力；另一方面，教师可结合实例适当归纳图形性质及其证明的依据和要求，总结证明的思路、途径、方法，以落实《课程标准（2011 年版)》所提出的教育目标.

反证法在八上“三角形”中的“命题与证明”一节就介绍过，反证法是一种间接证法，它在思维方式上与直接证法有所不同，而真正掌握它需要一个长期的过程，并且《课程标准》对此提出要求：借助相当数量的实例感悟反证法的思想，在适当的时机结合课程内容呈现反证法及其步骤（作出反设→推出矛盾→肯定结论）. 为此，本章在“圆的切线垂直于过切点的半径”的证明时应用了反证法，让学生结合实例进一步体会反证法的思想.值得注意的是，教师要把握好反证法的要求，要求学生体会其含义，不要求学生独立运用反证法证明命题，因此，教材后没有安排相应的习题.

3. 重视信息技术的应用

本章许多圆的性质的探索借助实验操作、图形变换来探究，例如探索圆的对称性、探索点（或直线）与圆的位置关系等. 在这一过程中，应充分重视利用信息技术来辅助教学. 许多软件具有测量的功能，可以很方便地让图形动起来，这将有利于学生在图形运动变化的过程中去发现其中变与不变的关系(例如探究圆的旋转对称性，探究弧、弦、圆心角之间的关系等)，从而为推理论证找到思路，丰富探索图形性质的多种方法.

四、评价建议

1. 恰当评价学生的基础知识和基本技能

本章内容基本属于“双基”范畴，因此除了传统纸笔测验考核学生是否对重要的性质和判定定理理解和灵活运用外，还要采取多样的考核形式，如创造交流、讨论的机会，考查学生对知识的掌握程度，对演绎推理的理解，对所学知识的归纳概括能力，以形成系统的知识体系等.

在实施笔试测验时，题型难度不要超过教材的水平，应尽可能使所有的学生能主动参与. 值得指出的是：在实施笔试测验时，要认真落实《课程标准（2011 年版)》提出的要求，超出范围的定理不作为证明命题的依据，不列入考查范围.

2. 关注对学生学习过程的评价

（1）在教学中，应重点关注学生经历数学知识的形成过程，例如圆的诸多性质定理和判定定理的得出渗透了观察—抽象—探索—分析和论证这一思维过程，要关注学生在这一探索过程中所表现出的思维水平和闪光点，关注学生参与活动过程的积极性和对数学基本思想的领悟，鼓励学生联系已学的知识作出思考判断，对于学生从不同角度来思考问题，应给予充分重视和鼓励.

（2）本章的概念多、定理多，教师在引导学生探索并理解数学本质的同时，要关注学生思维能力的提升，可以要求学生自我设计“学习小结”，用合适的形式归纳学到的知识和方法、学习中的收获、遇到的问题等等，教师可通过学习小结对学生的学习情况进行评价，也可以组织学生将自己的小结在班级展示交流，通过这种形式总结自己的进步，反思自己的不足以及需要改进的地方，汲取他人值得借鉴的经验.

Ⅱ. 教学建议

本章的章前图是摩天轮的照片，通过对章前图的观察，让学生了解本章将要学习的主要内容.

由于圆是学生熟悉的、生活中常见的几何图形，因此在开启本章教学前，可让学生多举出一些生活中的圆形案例，回忆圆的知识，让学生思考它的特征，为后面给出圆的定义做准备. 同时，让其感受圆的应用广泛，圆中蕴含的数学美，以提高学生的学习兴趣.

第2章

圆

在日常生活中，我们常常会见到圆形的物体，如车轮、钟表、摩天轮等，国际奥林匹克标志图案也是用五个圆组成的. 圆的应用非常广泛.

圆是最基本也是最重要的平面图形之一，本章我们将学习关于圆的一些知识，这包括：什么样的图形叫圆？圆有哪些基本性质？平面上的点、直线与圆有哪些位置关系？怎样求圆的弧长和扇形面积以及正多边形与圆有哪些关系？等等.

42

2.1 圆的对称性

观察

在生活中，我们经常看到圆的形象(如图 2-1).

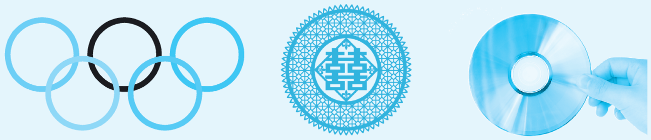


图 2-1

圆(circle)是平面内到一定点的距离等于定长的所有点组成的图形，这个定点叫作**圆心**(center of a circle)，定长叫作**半径**(radius).

如图 2-2，点 O 是圆心，圆心 O 与圆上一点的连线段叫作半径，线段 OA 是一条半径，线段 OA 的长度也叫作半径，记作半径 r. 以点 O 为圆心的圆叫作圆 O，记作⊙O.

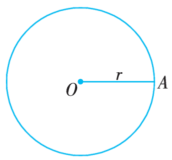


图 2-2

圆也可以看成是平面内一个动点绕一个定点旋转一周所形成的图形(如图2-3)，定点叫作圆心，定点与动点的连线段叫作半径.

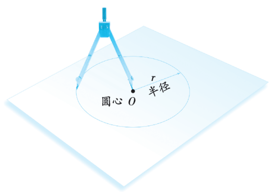


图 2-3

我们把到圆心的距离小于半径的点叫作**圆内的点**；到圆心的距离大于半径的点叫作**圆外的点**.

教学目标

1. 理解圆、弧、弦的概念，了解等圆、等弧的概念.

2. 探索并了解点与圆的位置关系.

3. 探索圆的中心对称性质和轴对称性质.

教学重点、难点

教学重点：理解圆的概念、点与圆的位置关系、圆的中心对称性质和轴对称性质.

教学难点：探索并理解圆的中心对称性质(含旋转对称性质)以及轴对称性质.

本节主要介绍圆的定义和相关概念以及圆的对称性，这是今后进一步学习圆的相关内容的基础.

教材首先举出了一些生活中常见的圆的形象，并引出圆的定义. 这是从集合的角度对圆下定义. 关于满足某种条件的点的集合的说法，本套教材在介绍角平分线、线段和垂直平分线的性质时有所渗透，在这里，教材仍采取进一步渗透的做法.

接着，教材结合圆规画图的过程介绍了圆的另一种描述性定义. 上述两种定义是从静态和动态两个角度给出了圆的概念.

由圆的定义可知，圆上的点到圆心的距离都等于圆的半径. 实际上，平面上的一个圆，把平面上的点分成三类：圆上的点、圆内的点和圆外的点，教师可结合圆的定义指明“圆上的点”.

“圆”这个概念，包含两层意思. 一是圆周，二是圆面. 如本节中，把圆看成是一个动点绕一个定点旋转一周所形成的图形，显然这里的“圆”是指“圆周”. 但在高中立体几何中，又说圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆，这里的“圆”指的却是“圆面”. 关于“圆”何时取何意义，应视具体情形而定.

点与圆的位置关系是由圆的定义所决定的. 它的内容包括三种情况及其正反两个方面.

点与圆的位置关系可转化为点到圆心的距离与半径的数量关系，反过来，也可通过这种数量关系判断点与圆的位置关系. 这样一来，点与圆的位置关系可以和点到圆心的距离的数量关系建立一一对应. 教材给出了双推符号（即等价符号）来表示这种对应关系，这应让学生掌握.

本节课与圆有关的概念比较多，在教学时要引导学生分析它们之间的区别与联系. 如直径和弦——直径是弦，是经过圆心的特殊弦，但弦不一定是直径；又如弧与优弧、劣弧——优弧、劣弧都是弧，但优弧大于半圆，劣弧小于关圆.

圆有许多重要性质，这其中最主要的是圆的对称性（旋转不变性和轴对称）. 教材设置“探究”栏目，重点研究圆的旋转不变性，即圆绕圆心旋转任意角度，都能与自身重合(又称旋转对称性)，从而圆也是中心对称图形. 同时，有这些性质做基础，后续内容将从圆的旋转不变性出发，推导出弧、弦、圆心角之间的相等关系和弧长、面积公式. 教学中，可采用多媒体或模型进行演示，使学生了解圆的旋转对称性的确切含义.

你能说出同一平面内的点与圆有几种位置关系？怎样确定点与圆的位置关系？请与同学交流.

一般地，设⊙O 的半径为 r，点 P 到圆心 O 的距离$OP=d$，则有：

(1) 点 P 在圆内 $\Leftrightarrow$[①] $d<r$；

(2) 点 P 在圆上 $\Leftrightarrow d=r$；

(3) 点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d>r$.

连接圆上任意两点的线段叫作弦(chord)，经过圆心的弦叫作直径(diameter). 如图 2-4，线段 AB，CD 是⊙O 的弦，弦 AB 经过圆心 O，因此线段 AB 是⊙O 的直径.

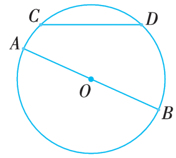


图 2-4

圆上任意两点间的部分叫作圆弧，简称弧(arc)，弧用符号“⌒”表示. 如图 2-5，⊙O 上两点 A，B 间小于半圆的部分叫作劣弧(minor arc)，记作 $\overset{\frown}{AB}$；A，B 间大于半圆的部分叫作优弧（major arc)，记作 $\overset{\frown}{AMB}$，其中点 M 是优弧上一点.

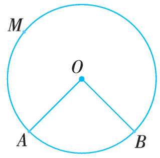


图 2-5

探究

1. 如图 2-6，在一块硬纸板和一张薄的白纸上分别画一个圆，使它们的半径相等，把白纸放在硬纸板上面，使两个圆的圆心重合，观察这两个圆是否重合.

2. 如图 2-7，用一根大头针穿过上述两个圆的圆心. 让硬纸板保持不动，让白纸绕圆心旋转任意角度. 观察旋转后白纸上的圆是否仍然与硬纸板上的圆重合. 这体现圆具有什么样的性质?

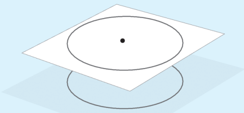


图 2-6

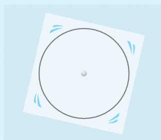


图 2-7

① “$\Leftrightarrow$”是双向推出符号，表示从左端可以推出右端，并且从右端可以推出左端.

我们把能够重合的两个圆叫作**等圆**，把能够互相重合的弧叫作**等弧**.

由于圆是由一个动点绕一个定点旋转一周所形成的图形，因此圆绕圆心旋转任意角度，都能与自身重合.

特别地，将圆绕圆心旋转 180°时能与自身重合，所以，

圆是中心对称图形，圆心是它的对称中心.

说一说

如图 2–8，在纸上任画一个⊙O，并剪下来. 将⊙O 沿任意一条直径（例如直径 CD）对折，你发现了什么？

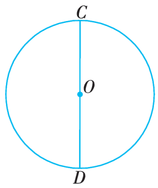


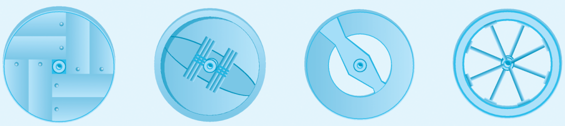
图 2–8

由此我们得到：

圆是轴对称图形，任意一条直径所在的直线都是圆的对称轴.

议一议

如图 2–9，为什么通常要把车轮设计成圆形？请说说理由.



古代车轮的演变

图 2–9

教材设置“说一说”栏目，强调通过学生动手实验——折叠的方法，让学生发现圆是一种特殊的轴对称图形，应当注意的是，学生可能会把圆的对称轴说成是每一条直径，教学中要强调对称轴是直线而不是线段.

把车轮设计成圆形，车轮边缘上各点到车轮中心(圆心)的距离都等于车轮的半径，当车轮在平面上滚动时，车轮中心与平面的距离保持不变，因此，当车辆在平坦的路上行驶时，坐车的人会感觉到平稳，这就是把车轮设计成圆形的道理.

从物理的角度考虑：滚动摩擦阻力小于滑动摩擦阻力.

资源拓展

大家也许见过这样一道题：设有数量足够多的硬币，让两个人轮流在圆形桌面上摆硬币，每次摆一个，不能互相重叠，也不能有一部分落在桌面的边缘外. 这样经过多次以后，谁先摆不下硬币就算准输. 问先摆的人有何办法使对方一定输？

先摆的人为什么能稳操胜券呢？就因为圆形桌面是中心对称图形！“先手”只要把第一个硬币摆在桌面的中心，以后不管“后手”把硬币摆在哪里，“先手”总可以把相同的硬币摆在与“后手”所摆硬币（关于中心）对称的地方. 这样，只要“后手”有地方摆得下，“先手”也总可以摆得下，因此“后手”准输.

这里，就是利用了圆的中心对称性质.

练习

1. (1) 对;

(2) 不对,弦是连接圆上任意两点的线段,包括直径,但不仅限于直径;

(3) 对;

(4) 对.

2. (1) 点 B 在圆内;

(2) 点 B 在圆上;

(3) 点 B 在圆外.

习题2.1

A组

1. AB 是直径;OA,OB,OC 是半径;AB,DC 是弦.

2. (1) 对;

(2) 对;

(3) 错,过圆心的线段的两个端点不一定在圆上;

(4) 对;

(5) 错.

3. C 在圆上,D 在圆内,E 在圆外.

B组

4. 由于矩形的对角线相等且互相平分,因此矩形的四个顶点在以对角线的交点为圆心,以对角线的$\frac{1}{2}$长为半径的圆上.

练习

1. 下面的说法对吗?如不对,请说明理由.

(1) 直径是弦;　　(2) 弦是直径;

(3) 半径相等的两个圆是等圆;

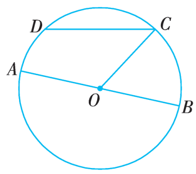
(4) 圆既是中心对称图形,又是轴对称图形.

2. 已知⊙O 的半径为 4 cm,B 为线段 OA 的中点,当线段 OA 满足下列条件时,分别指出点 B 与⊙O 的位置关系:

(1) $OA=6$ cm;　(2) $OA=8$ cm;　(3) $OA=10$ cm.

习题 2.1

A 组



(第 1 题图)

1. 如图,线段 AB 过圆心 O,点 A,B,C,D 均在⊙O上,请指出哪些是直径、半径、弦,并把它们表示出来.

2. 下面的说法对吗?如不对,请说明理由.

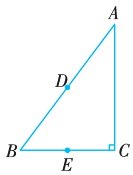
(1) 同一个圆的直径的长是半径的 2 倍;

(2) 圆是轴对称图形,过圆心的任意一条直线均是圆的对称轴;

(3) 过圆心的线段是圆的直径;

(4) 圆是中心对称图形,圆心是它的对称中心;

(5) 弦过圆心.



(第 3 题图)

3. 如图,在Rt△ABC中,$\angle ACB=90°$,$AC=4$ cm,$AB=5$ cm. D,E分别是AB,BC的中点,以点A为圆心,AC为半径画圆,试判断点C,D,E与⊙A的位置关系.

B 组

4. 矩形的四个顶点在以对角线的交点为圆心的同一个圆上吗?请说说理由.

46 数学 九年级下册

2.2 圆心角、圆周角

2.2.1 圆心角

观察图 2-10 中的 $\angle AOB$，可以发现它的顶点在圆心，角的两边与圆相交，像这样的角叫作**圆心角**（central angle），我们把 $\angle AOB$ 叫作 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角，$\overset{\frown}{AB}$ 叫作圆心角 $\angle AOB$ 所对的弧.

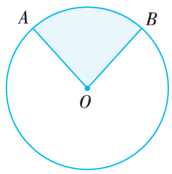


图 2-10

在生活中，我们常遇到圆心角，如飞镖靶中有圆心角（如图 2-11），还有手表的时针与分针所成的角（如图 2-12）等也是圆心角.


图 2-11

图 2-12

动脑筋

如图 2-13，已知在 $\odot O$ 中，圆心角 $\angle AOB = \angle COD$. 它们所对的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{CD}$ 相等吗？它们所对的弦 AB 与 CD 相等吗？

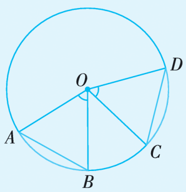


图 2-13

教学目标

1. 理解圆心角的概念.

2. 掌握圆心角、弧、弦之间的关系.

3. 体验利用旋转变换来研究圆的性质的思想方法.

教学重点、难点

教学重点：圆心角定理.

教学难点：根据圆的旋转不变性推导出圆心角定理.

教材在给出圆心角概念的基础上，设置“动脑筋”栏目，让学生探究在同圆中，已知两个圆心角相等，还有哪些等量关系.

因为将圆绕圆心旋转任一角度都能与自身重合，所以可以将⊙O绕圆心 O 旋转，使点 A 与点 C 重合. 由于$\angle AOB=\angle COD$，因此，点 B 与点 D 重合. 从而$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$AB=CD$.

由此得到下述结论：

在同圆中，如果圆心角相等，那么它们所对的弧相等，所对的弦也相等.

上述结论对于等圆也成立.

议一议

在同圆或等圆中，如果弧相等，那么它们所对的圆心角相等吗？所对的弦相等吗？

在同圆或等圆中，如果弦相等，那么它们所对的圆心角相等吗？所对的弧相等吗？

一般地，有以下结论：

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧和两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

例 1 如图 2-14，等边△ABC 的顶点 A，B，C 在⊙O 上，求圆心角$\angle AOB$ 的度数.

解 ∵ △ABC 为等边三角形，

∴ $AB=BC=AC$.

∴ $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA$.

又∵ $\angle AOB+\angle BOC+\angle COA=360°$，

∴ $\angle AOB=\dfrac{1}{3}(\angle AOB+\angle BOC+\angle COA)$

$=\dfrac{1}{3}\times 360°=120°$.

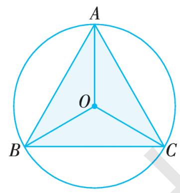


图 2-14

在说理过程中，要明确每一步的理论依据. 例如由点 A 与点 C 重合，点 B 与点 D 重合，得到$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，根据的是圆的旋转不变性；弦 AB 与 CD 重合，根据的是两点确定一条直线. 在这里应让学生感受旋转变换在说理过程中带来的方便，但不要求学生运用旋转变换来写出证明过程. 教学中要把握好这个要求.

注意圆心角定理不能丢掉“同圆或等圆”这个前提.

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条劣（优）弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量分别相等. 可简记为：圆心角相等⇔劣（优）弧相等⇔弦相等.

在同一个圆中，如果弦相等，那么它们所对的圆心角相等. 但因一条非直径的弦所对的弧有劣弧与优弧之分，故应分别说明. 即在同一个圆中，如果弦相等，那么它们所对的劣弧(或优弧)相等. 不要笼统地说成“等弦对等弧”.

例 1 是圆心角定理的应用.

补充例题

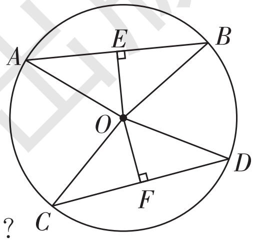
如图，AB，CD 是⊙O 的两条弦.

（1）如果 $AB=CD$，那么__________，__________；

（2）如果$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，那么__________，__________；

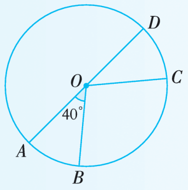
（3）如果$\angle AOB=\angle COD$，那么__________，__________；

（4）如果 $AB=CD$，$OE\perp AB$ 于 E，$OF\perp CD$ 于 F，OE 与 OF 相等吗？为什么？

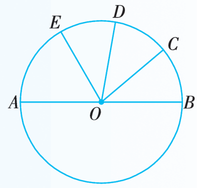


练习

1. 在⊙O中，已知$\angle AOB=40°$，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，求$\angle COD$的度数.



（第1题图）



（第2题图）

2. 如图，在⊙O中，AB是直径，$\angle AOE=60°$，点C，D是$\overset{\frown}{BE}$的三等分点，求$\angle COE$的度数.

练习

1. $\angle COD=40°$.

2. $\angle COE=80°$.

2.2.2 圆周角

观察图2–15中的$\angle BAC$，可以发现它的顶点A在圆上，它的两边都与圆相交，像这样的角叫作**圆周角**(circumference angle).

我们把$\angle BAC$叫作$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角，$\overset{\frown}{BC}$叫作圆周角$\angle BAC$所对的弧.

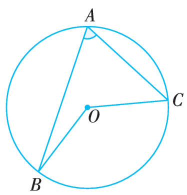


图2–15

圆周角在我们生活中处处可见，比如，我们从共青团团旗上的图案抽象出如图2–16所示的图形，该图形中就有许多圆周角.

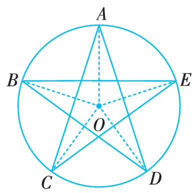


图2–16

教学目标

1. 理解圆周角的概念及圆周角与它所对圆心角之间的关系.

2. 经历探索圆周角与圆心角之间关系的过程，加深对分类讨论和由特殊到一般的转化等数学思想方法的理解.

3. 会运用圆周角定理及其推论解决简单的几何问题.

教学重点、难点

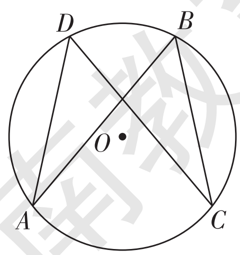
教学重点：圆周角定理.

教学难点：圆周角定理的证明过程(分类讨论,由特殊到一般的转化).

圆周角不像圆心角那样容易识别，教学中应强调作为圆周角的两个必须具备的条件：一是一个角的顶点在圆上；二是角的两边必须与圆相交，这里的“相交”是指角边与圆除了顶点外还有公共点. 教学中也可以举一些反例来说明.

补充例题

如图，在⊙O中，弦$AB=CD$，求证：$AD=BC$.



“探究”栏目注重探索与证明的有机结合. 其中探索环节让学生通过度量同弧所对的圆周角与圆心角的度数来发现它们之间的规律. 教师可借助几何软件的测量功能，让学生在角的动态变化中发现这种规律.

圆周角定理的证明，分三种情况进行讨论. 这对学生来说是一个难点，在教学中应加强引导和分析. 首先通过画图和观察，使学生明确，以圆上任意一点为顶点的圆周角虽然有无数多个，但它们与圆心的位置关系，归纳起来只有三种情况. 在这三种情况中，第一种情况是特殊情况，是证明的基础，其他两种情况都可以转化为第一种情况来解决，转化的条件是添加以角的顶点为端点的直径为辅助线，这里渗透了分类讨论和特殊到一般的思想方法，应当让学生注意和掌握.

探究

分别测量图 2-15 中 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角 $\angle BAC$ 和圆心角 $\angle BOC$ 的度数，它们之间有什么关系？

每位同学任画一个圆，并在圆上任取一条弧，作出这条弧所对的圆周角和圆心角，测量出它们的度数. 你能得出同样的结论吗？由此你能发现什么规律？

通过度量，我发现圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半.

下面我们来证明这个结论.

已知：在⊙O中，$\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角是 $\angle BAC$，圆心角是 $\angle BOC$.

求证：$\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

在画图时，可以发现圆心 O 与圆周角的位置关系有以下三种情形：

(1) 圆周角的一边通过圆心；

(2) 圆心在圆周角的内部；

(3) 圆心在圆周角的外部.

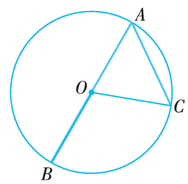


图 2-17

对于第(1)种情况，如图 2-17，圆心 O 在 $\angle BAC$ 的一边 AB 上.

$\because\ OA=OC$,

$\therefore\ \angle C=\angle BAC$,

$\therefore\ \angle BOC=\angle C+\angle BAC$

$=2\angle BAC$,

即 $\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

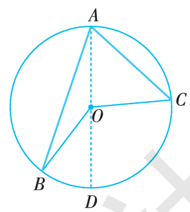


图 2-18

对于第(2)种情况，如图 2-18，圆心 O 在 $\angle BAC$ 的内部.

作直径 AD，根据第(1)种情况的结果得

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD,\ \angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC.$$

$$\therefore\ \angle BAC=\angle BAD+\angle DAC$$
$$=\frac{1}{2}\angle BOD+\frac{1}{2}\angle DOC$$
$$=\frac{1}{2}\angle BOC.$$

对于第(3)种情况，如图 2-19，圆心 O 在 $\angle BAC$ 的外部.

请你完成 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$ 的证明.

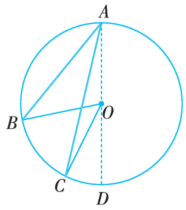


图 2-19

由此得到**圆周角定理**：

> 圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半.

动脑筋

如图 2-20，$\angle C_1$，$\angle C_2$，$\angle C_3$ 都是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角，那么 $\angle C_1=\angle C_2=\angle C_3$ 吗？

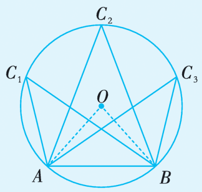


图 2-20

在图 2-20 中，连接 AO，BO，则 $\angle C_1$，$\angle C_2$，$\angle C_3$ 所对弧上的圆心角均为 $\angle AOB$. 由圆周角定理，可知 $\angle C_1=\angle C_2=\angle C_3$.

由此得到以下结论：

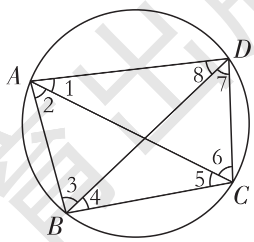
> 在同圆（或等圆）中，同弧或等弧所对的圆周角相等；相等的圆周角所对的弧也相等.

圆周角定理的证明实际上使用了完全归纳法. 完全归纳法是把要研究的某类事物的所有情况，逐一加以讨论，再概括得出一般结论，有时也可以把所有情况分成几类，对每类加以讨论，再概括出一般情况.

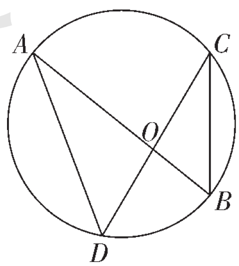
“动脑筋”栏目讨论了圆周角定理的一个重要推论. 这个结论在今后的证明和计算中经常要用到，需让学生理解和掌握.

补充例题

1. 如图，点 A，B，C，D 在同一个圆上，四边形 $ABCD$ 的对角线把 4 个内角分成 8 个角，这些角中哪些是相等的角？



2. 如图，在⊙O 中，弦 AB 与 CD 相交于点 O，求证：$\triangle ADO\backsim\triangle CBO$.



例 2 是圆周角定理的应用，教师可根据学情适当补充一些例子.

练习

1. (1)、(2)是圆周角；

(3)、(4)不是圆周角.

因为 (3)、(4) 中的角不满足圆周角定义，角的顶点不在圆上.

2. ∵ $\angle CAB$ 与 $\angle CDB$ 所对的弧为 $\overset{\frown}{BC}$，

∴ $\angle CDB=\angle CAB=25°$.

同理，$\angle ACD=\angle ABD=95°$.

3. ∵ $AC/\!/OB$，$\angle OBA=25°$，

∴ $\angle BAC=\angle OBA=25°$.

∵ 圆心角 $\angle BOC$ 与圆周角 $\angle BAC$ 所对的弧为 $\overset{\frown}{BC}$，

∴ $\angle BOC=2\angle BAC=50°$.

例 2 如图2-21，OA，OB，OC都是⊙O的半径，$\angle AOB=50°$，$\angle BOC=70°$. 求$\angle ACB$和$\angle BAC$的度数.

解 ∵ 圆心角$\angle AOB$与圆周角$\angle ACB$所对的弧为$\overset{\frown}{AB}$，

∴ $\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=25°$.

同理 $\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC=35°$.

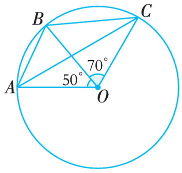
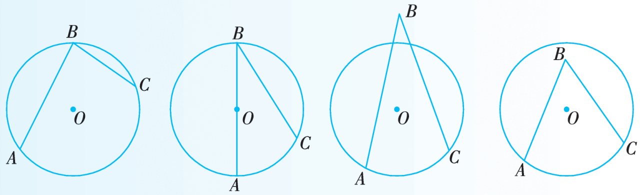


图 2-21

练习

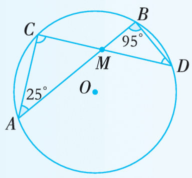
1. 下图中各角是不是圆周角？请说明理由.



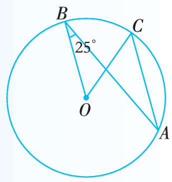
(1)　(2)　(3)　(4)

(第 1 题图)

2. 如图，在⊙O中，弦AB与CD相交于点M，若$\angle CAB=25°$，$\angle ABD=95°$，试求$\angle CDB$和$\angle ACD$的度数.



(第 2 题图)



(第 3 题图)

3. 如图，点A，B，C在⊙O上，$AC/\!/OB$. 若$\angle OBA=25°$，求$\angle BOC$的度数.

动脑筋

在图 2-22 中，AB 是$\odot O$的直径，那么$\angle C_1$，$\angle C_2$，$\angle C_3$的度数分别是多少呢？

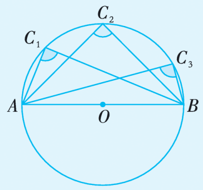


图 2-22

因为圆周角$\angle C_1$，$\angle C_2$，$\angle C_3$所对弧上的圆心角是$\angle AOB$，只要知道$\angle AOB$的度数，利用圆周角定理，就可以求出$\angle C_1$，$\angle C_2$，$\angle C_3$的度数.

因为 A，O，B 在一条直线上，所以圆心角$\angle AOB$是一个平角，即$\angle AOB=180°$. 故$\angle C_1=\angle C_2=\angle C_3=\frac{1}{2}\times 180°=90°$.

在图2-22中，若已知$\angle C_1=90°$，它所对的弦AB是直径吗？

由此得到以下结论：

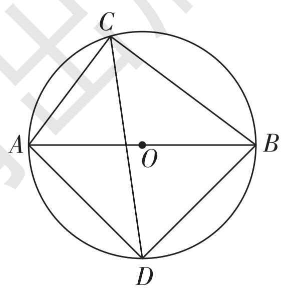
直径所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径.

本节课重点讨论圆周角定理的两个推论.

这个推论，为在圆中确定直角，构成垂直关系，创造了条件. 在今后的证明和计算中经常用到，是圆的一条很重要的性质，需学生理解和掌握.

补充例题

如图，$\odot O$ 的直径 AB=10 cm，弦 AC 为 6 cm，$\angle ACB$ 的平分线交$\odot O$ 于 D，求 BC，AD，BD 的长.



例 3 如图 2-23，BC 是⊙O 的直径，$\angle ABC=60°$，点 D 在⊙O 上，求 $\angle ADB$ 的度数.

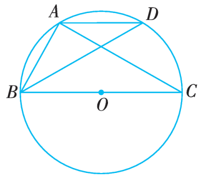


图 2-23

解 ∵ BC 为直径，

∴ $\angle BAC=90°$.

又 $\angle ABC=60°$，

∴ $\angle C=30°$.

又∵ $\angle ADB$ 与 $\angle C$ 都是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角，

∴ $\angle ADB=\angle C=30°$.

“接”是说明四边形的顶点与圆的关系．“内”“外”是相对的概念，是以一个图形为准，说另一个图形是在它的里面或外面.

如图2-24，A，B，C，D是⊙O上的四点，顺次连接A，B，C，D四点，得到四边形$ABCD$，我们把四边形$ABCD$称为**圆内接四边形**.

这个圆叫作这个**四边形的外接圆**.

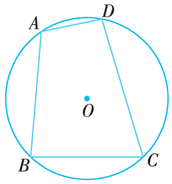


图 2-24

动脑筋

在图 2-24 的四边形 $ABCD$ 中，两组对角 $\angle A$ 与 $\angle C$，$\angle B$ 与 $\angle D$ 有什么关系？

在图2-24中，连接OB，OD，得图2-25.

∵ $\angle A$所对的弧为$\overset{\frown}{BCD}$，$\angle C$所对的弧为$\overset{\frown}{BAD}$，

又 $\overset{\frown}{BCD}$ 与 $\overset{\frown}{BAD}$ 所对的圆心角之和是周角，

∴ $\angle A+\angle C=\dfrac{360°}{2}=180°$.

由四边形内角和定理可知，$\angle ABC+\angle ADC=180°$.

由此得到以下结论：

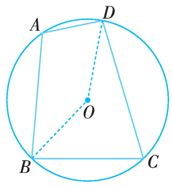


图 2-25

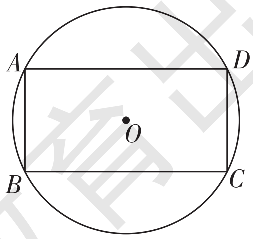
圆内接四边形的对角互补.

这个结论是圆周角定理的一个推论.

补充例题

如图，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，且 $AB /\!/ DC$，$AD /\!/ BC$.

求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.



例 4 如图2–26，四边形$ABCD$为⊙O的内接四边形，已知$\angle BOD$为100°，求$\angle BAD$及$\angle BCD$的度数.

解 ∵ 圆心角$\angle BOD$与圆周角$\angle BAD$所对的弧为$\overset{\frown}{BD}$，

$\angle BOD = 100°$,

∴ $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD = \frac{1}{2}\times 100° = 50°$.

∵ $\angle BCD + \angle BAD = 180°$,

∴ $\angle BCD = 180° - \angle BAD = 180° - 50° = 130°$.

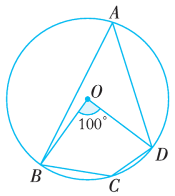
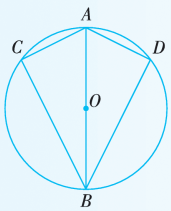


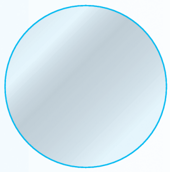
图 2–26

练习

1. 如图，在⊙O中，AB是直径，C，D是圆上两点，且$AC = AD$.
求证：$BC = BD$.



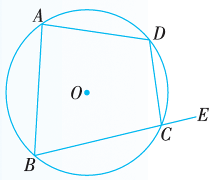
（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 怎样运用三角板画出如图所示的圆形件表面上的直径，并标出圆心，试说明画法的理由.

3. 如图，圆内接四边形$ABCD$的外角$\angle DCE = 85°$，求$\angle A$的度数.



（第 3 题图）

练习

1. 连接CO，DO.

∵ $AC=AD$，

∴ $\angle AOC=\angle AOD$.

∴ $\angle COB=\angle DOB$.

∴ $BC=BD$.

2. 将直角三角板的直角顶点放在圆上，则三角板的两边与圆的交点的连线是圆的直径，直径的中点即为圆心.

理由是“90°的圆周角所对的弦是直径”.

3. ∵ $\angle DCB+\angle DCE=180°$，

∴ $\angle DCB=180°-\angle DCE$

$=180°-85°=95°$.

又 ∵ $\angle A+\angle DCB=180°$，

∴ $\angle A=85°$.

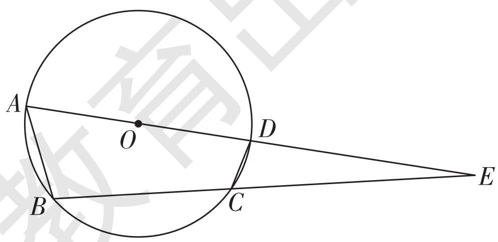
这道题的结论是：圆内接四边形的外角等于它的内对角.

补充例题

如图，A，B，C，D是⊙O上四点，AD，BC的延长线相交于点E，直径$AD=8$，$OE=12$.

（1）求证：$\frac{EC}{EA}=\frac{ED}{EB}$；

（2）计算$EC\cdot EB$的值.



习题2.2

A组

1. $\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，

又 $\overset{\frown}{BC}$ 公共，

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

$\therefore AB=CD$.

2. $\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，

$\therefore \angle AOC=\angle BOC$，

$\because OA=OB$，M，N 为 OA，OB 的中点，

$\therefore OM=ON$.

又 $\because OC$ 公共，

$\therefore \triangle OMC\cong\triangle ONC$（SAS）.

$\therefore MC=NC$.

3. $\because \angle AOB=100°$，

$\therefore$ 优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所对应的圆心角为260°.

$\therefore \angle ACB=\dfrac{1}{2}\times260°=130°$.

4. $\because \angle A=72°$，

$\therefore \angle BOC=2\times72°=144°$.

$\because OB=OC$，

$\therefore \angle OBC=\dfrac{180°-144°}{2}=18°$.

5. $\because \angle BCD=40°$，$\angle BFD=70°$，

$\therefore \angle B=30°$.

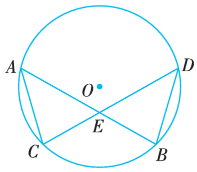
$\because \angle B$ 与 $\angle ADC$ 所对应的弧都是$\overset{\frown}{AC}$，

$\therefore \angle ADC=30°$.

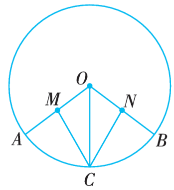
习题 2.2

A 组

1. 如图，点A，B，C，D在⊙O上，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，$AB$与$CD$相等吗？为什么？



（第 1 题图）

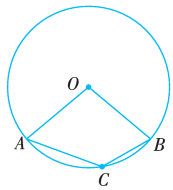


（第 2 题图）

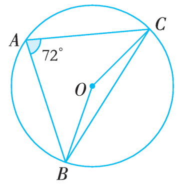
2. 如图，OA，OB，OC是⊙O的三条半径，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，点$M$，$N$分别是$OA$，$OB$的中点.

求证：$MC=NC$.

3. 如图，已知圆心角$\angle AOB$的度数为100°，求圆周角$\angle ACB$的度数.



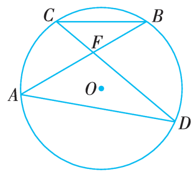
（第 3 题图）



（第 4 题图）

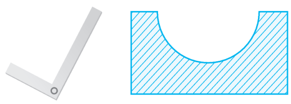
4. 如图，点A，B，C在⊙O上，$\angle A=72°$，求$\angle BOC$和$\angle OBC$的度数.

5. 如图，在⊙O中，弦AB与CD相交于点F，$\angle BCD=40°$，$\angle BFD=70°$，求$\angle ADC$的度数.

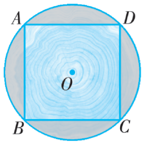


（第 5 题图）

6. 如图，一工件的凹面要求做成半圆，如何用一把曲尺（它的角是直角）检查工件的凹面是否符合要求？



（第 6 题图）



（第 7 题图）

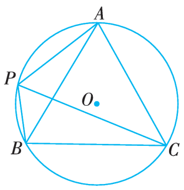
7. 如图，把一根圆柱形的木头锯成正方体形的柱子，使截面正方形的四个顶点均在圆上.

（1）正方形的对角线与圆的直径有什么关系？

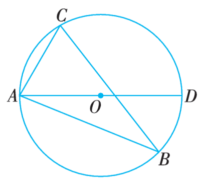
（2）设⊙O 的半径为 2，求图中阴影部分的面积之和.

B 组

8. 如图，点A，P，B，C是⊙O上的四点，$\angle APC=\angle CPB=60°$.
求证：$\triangle ABC$ 为等边三角形.



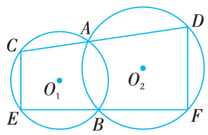
（第 8 题图）



（第 9 题图）

9. 如图，$\triangle ABC$ 的三个顶点都在⊙O 上，直径 $AD=3$ cm，$\angle B=\dfrac{1}{2}\angle DAC$. 试求 AC 的长.

10. 如图，⊙O_1 和⊙O_2 都经过 A，B 两点，经过点 A 的直线 CD 与⊙O_1 交于点 C，与⊙O_2 交于点 D. 经过点 B 的直线 EF 与⊙O_1 交于点 E，与⊙O_2 交于点 F. 求证：$CE\parallel DF$.（提示：连接 AB）



（第 10 题图）

6. 当曲尺的两边紧靠凹面，且曲尺的直角顶点落在圆弧上，由圆周角定理的推论可知90°的圆周角所对的弦是直径，则凹面是半圆形状，否则凹面不合要求.

7. （1）∵ $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$，

∴ 对角线 AC，BD 即为圆的直径.

（2）阴影部分的面积为圆面积减去正方形面积，为 $4\pi-8$.

B组

8. ∵ $\angle APC$ 与 $\angle ABC$ 所对的弧为$\overset{\frown}{AC}$，

∴ $\angle ABC=\angle APC=60°$.

同理，$\angle BAC=\angle CPB=60°$.

∴ $\angle ACB=60°$.

∴ $\triangle ABC$ 为等边三角形.

9. 连接 DC.

∵ $\angle ADC$ 与$\angle B$ 所对的弧为$\overset{\frown}{AC}$，

∴ $\angle ADC=\angle B=\dfrac{1}{2}\angle DAC$.

又 ∵ AD 为直径，

∴ $\angle ACD=90°$.

∴ 在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\angle ADC=30°$.

∴ $AC=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{3}{2}$ cm.

10. 连接 AB.

∵ 四边形 $CEBA$ 与四边形 $ABFD$ 分别内接于⊙O_1 和⊙O_2，

∴ $\angle C+\angle ABE=180°$，$\angle D+\angle ABF=180°$.

又 ∵ $\angle ABE+\angle ABF=180°$，

∴ $\angle C+\angle D=180°$.

∴ $CE\parallel DF$.

教学目标

1. 探索并证明垂径定理.

2. 运用垂径定理解决一些有关证明、计算问题.

教学重点、难点

垂径定理的证明以及运用.

垂径定理反映了圆的重要性质，是证明线段、角相等、垂直关系的重要依据，同时也为进行一些圆的计算和作图问题提供了方法和依据.

“动脑筋”栏目注重探索与证明的有机结合. 首先将⊙O 沿直径 CD 对折，引导学生发现教材图 2–28 中相等的线段和弧. 接着，利用等腰三角形的性质证明了垂径定理.

得到定理后，还可进一步帮助学生分析定理的题设和结论，并可将定理改述为：一条直线若满足：（1）过圆心；（2）垂直于弦，则可以推出：（1）平分弦；（2）平分弦所对的优（劣）弧.

*2.3 垂径定理

动脑筋

在图2–27的⊙O中，AB是任一条弦，CD是⊙O的直径，且$CD\perp AB$，垂足为E. 试问：AE与BE，$\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD}$ 与$\overset{\frown}{BD}$ 分别相等吗?

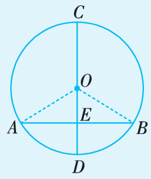


图 2–27

因为圆是轴对称图形，将⊙O 沿直径 CD 对折，如图 2–28，我发现 AE 与 BE 重合，$\overset{\frown}{AC}$ ，$\overset{\frown}{AD}$ 分别与 $\overset{\frown}{BC}$ ，$\overset{\frown}{BD}$ 重合，即 $AE=BE$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$ ，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

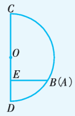


图 2–28

下面我们来证明这个结论.

在图 2–27 中，连接 OA，OB.

∵ $OA=OB$，

∴ $\triangle OAB$是等腰三角形.

∵ $OE\perp AB$，

∴ $AE=BE$，$\angle AOD=\angle BOD$.

从而 $\angle AOC=\angle BOC$.

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$ ，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

由此得到**垂径定理**：

垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧.

* 本节为选学内容.

例 1 如图2–29，弦$AB=8$ cm，CD是⊙O的直径，$CD\perp AB$，垂足为E，$DE=2$ cm，求⊙O 的直径 CD 的长.

解 连接 OA.

设 $OA=r$ cm，则 $OE=r-2$ (cm).

$\because$ $CD\perp AB$，

由垂径定理得 $AE=\dfrac{AB}{2}=4$ (cm).

在Rt△AEO中，由勾股定理得

$$OA^2=OE^2+AE^2.$$

即 $$r^2=(r-2)^2+4^2.$$

解得 $r=5$.

$\therefore$ $CD=2r=10$ (cm).

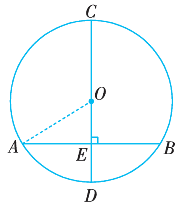


图 2–29

例 2 证明：圆的两条平行弦所夹的弧相等.

已知：如图2–30，在⊙O中，弦AB与弦CD平行.

求证：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

证明 作直径 $EF\perp AB$，

$\therefore$ $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$.

又$\because$ $AB/\!/CD$，$EF\perp AB$，

$\therefore$ $EF\perp CD$.

$\therefore$ $\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{DE}$.

因此 $\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{BE}-\overset{\frown}{DE}$，

即 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

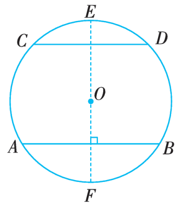
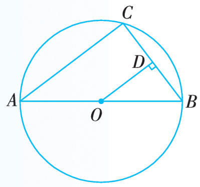


图 2–30

练习

如图，AB 是⊙O 的直径，C 是⊙O 上一点，$AC=8$ cm，$AB=10$ cm，$OD\perp BC$于点 D，求 BD 的长.



在例 1 中，把垂径定理和勾股定理结合起来，容易得到圆的半径 r，圆心到弦的距离 d，弦长 a 之间的关系式：

$$r^2=d^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

在圆中，解决有关弦的问题时，常常需要作“垂直于弦的直径”为辅助线. 这种添加辅助线的方法很重要，需学生认真体会.

练习

$\because AB$ 是直径，

$\therefore$ $\angle ACB=90°$.

在Rt△ACB 中，$AC=8$ cm，$AB=10$ cm，

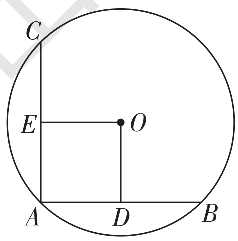
$\therefore$ $BC=6$ cm.

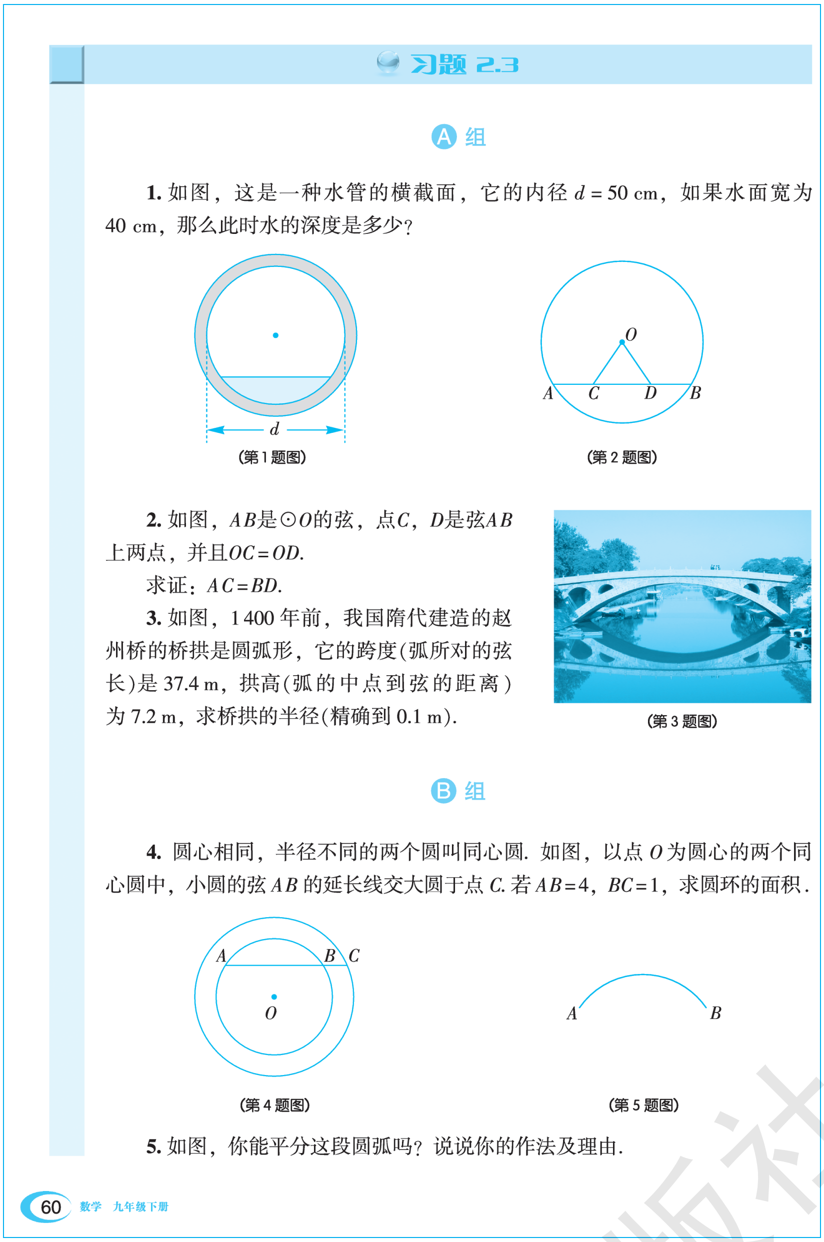
又$\because OD\perp BC$，

$\therefore$ $BD=\dfrac{1}{2}BC=3$ cm.

补充例题

如图，在⊙O 中，AB，AC 为互相垂直且相等的两条弦，$OD\perp AB$ 于 D，$OE\perp AC$ 于 E. 求证：四边形 $ADOE$ 是正方形.




习题 2.3

A 组

1. 如图，这是一种水管的横截面，它的内径 $d=50$ cm，如果水面宽为 40 cm，那么此时水的深度是多少？

(第 1 题图)　(第 2 题图)

2. 如图，AB是⊙O的弦，点C，D是弦AB上两点，并且$OC=OD$.

求证：$AC=BD$.

3. 如图，1 400 年前，我国隋代建造的赵州桥的桥拱是圆弧形，它的跨度(弧所对的弦长)是 37.4 m，拱高(弧的中点到弦的距离)为 7.2 m，求桥拱的半径(精确到 0.1 m).

(第 3 题图)

B 组

4. 圆心相同，半径不同的两个圆叫同心圆. 如图，以点 O 为圆心的两个同心圆中，小圆的弦 AB 的延长线交大圆于点 C. 若 $AB=4$，$BC=1$，求圆环的面积.

(第 4 题图)　(第 5 题图)

5. 如图，你能平分这段圆弧吗？说说你的作法及理由.

60 数学 九年级下册

习题2.3

A组

1. 水管中心到水面的高度为 $\sqrt{\left(\frac{50}{2}\right)^2-\left(\frac{40}{2}\right)^2}=15$（cm），水深为 $25-15=10$（cm）.

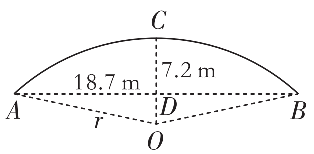
2. 过点 O 作 $OE\perp CD$，

则 $AE=BE$，$CE=DE$.

$\therefore AE-CE=BE-DE$，

即 $AC=BD$.

3. 如图，用$\overset{\frown}{AB}$表示桥拱，设$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心为 O，半径为 r，经过圆心 O 作弦 AB 的垂线，D 为垂足，OC 与$\overset{\frown}{AB}$相交于点 C，则 D 是 AB 的中点，CD 为拱高.



在Rt△ADO 中，

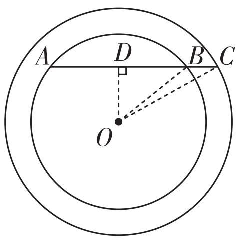
$r^2=18.7^2+(r-7.2)^2$，

解得 $r\approx 27.9$(m).

B组

4. 如图，过点 O 作 $OD\perp AB$，连接 OB，OC. 设小圆的半径为 r，大圆的半径为 R，则

在Rt△ODB中，$OD^2+2^2=r^2$，



在Rt△ODC中，$OD^2+3^2=R^2$，

$\therefore$ 圆环面积 $S=\pi R^2-\pi r^2=\pi(3^2-2^2)=5\pi$.

5. 连接 AB，作线段 AB 的垂直平分线，交$\overset{\frown}{AB}$于点 C，所以 C 点为$\overset{\frown}{AB}$的中点.

理由是：垂直于弦的直径平分这条弦所对的弧.

2.4 过不共线三点作圆

议一议

1. 如何过一点 A 作一个圆？过点 A 可以作多少个圆？

2. 如何过两点 A，B 作一个圆？过两点可以作多少个圆？

对于问题 1，以不与点 A 重合的任意一点为圆心，以这个点和点 A 的距离为半径画圆即可，如图 2-31. 由画图可知，过点 A 可作无数个圆.

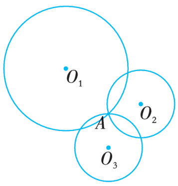


图 2-31

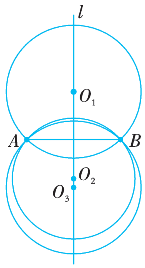


图 2-32

对于问题 2，作线段 AB 的垂直平分线 l，以 l 上任意一点为圆心，以这点和点 A(或点 B)的距离为半径画圆即可，如图 2-32. 由画图可知，过两点 A，B 可以作无数个圆.

动脑筋

如何过不在同一直线上的三个点作圆？可以作多少个圆？

教学目标

1. 经历不在同一直线上的三个点确定一个圆的探索过程.

2. 了解不在同一直线上的三个点确定一个圆，以及过不在同一直线上的三个点作圆的方法.

3. 了解三角形的外接圆、三角形的外心等概念.

教学重点、难点

教学重点：过不在同一直线上的三点作圆.

教学难点：对圆“不在同一直线上的三个点确定一个圆”这条性质需要从存在性和唯一性两个方面来理解.

教材通过“议一议”“动脑筋”栏目来探索过一点、两点和不在同一直线上的三点可能作多少个圆，使学生认识到“不在同一直线上的三个点确定一个圆”这一确定圆的条件.

完成“议一议”栏目时(过一点、过两点画圆)，要注意帮助学生紧紧抓住对圆心和半径的探讨，要确定一个圆的基本条件是确定圆心和半径，这是从圆的定义出发的，至于能作多少个圆，也取决于圆心的位置和圆心的个数. 明确了这一点，就为后面讨论过不在同一直线上的三个点的圆的唯一性铺平了道路.

对于经过三点作圆的问题，关键在于能否找到这样一个圆心，使它与三个已知点的距离相等. 把这个问题与前面过两点作圆以及与线段的垂直平分线联系起来，问题就迎刃而解了.

需指出的是，只有当三个点不在同一直线上时，才能确定一个圆.

“说一说”栏目是“动脑筋”栏目的拓展，由于 $\triangle ABC$ 的三个顶点不在同一直线上，因此过 $\triangle ABC$ 的三个顶点可以作一个圆，并且只可以作一个圆.

接着，教材介绍了三角形的外接圆、圆的内接三角形、三角形的外心等概念，这与前面介绍四边形的外接圆是一脉相承的.

已知：不在同一直线上的三点 A，B，C.

求作：$\odot O$，使它经过点 A，B，C.

分析 由于圆心 O 与三点 A，B，C 的距离相等，因此圆心 O 既在线段 AB 的垂直平分线上，又在线段 BC 的垂直平分线上.

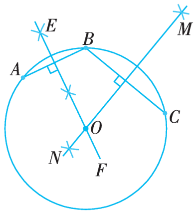


图 2-33

作法：

(1) 连接 AB，作线段 AB 的垂直平分线 EF；

(2) 连接 BC，作线段 BC 的垂直平分线 MN；

(3) 以 EF 和 MN 的交点 O 为圆心，以 OA 为半径作圆.

则 $\odot O$ 就是所求作的圆，如图 2-33.

由作法和上面的分析可知，过不在同一直线上的三点 A，B，C 可以作一个圆且只可以作一个圆.

过在同一直线上的三点 A，B，C 可以作一个圆吗？

说一说

经过 $\triangle ABC$ 的三个顶点可以作一个圆吗？

由于 $\triangle ABC$ 的三个顶点不在同一直线上，因此过这三个顶点可以作一个圆，并且只可以作一个圆.

经过三角形各顶点的圆叫作这个三角形的**外接圆**（circumcircle），外接圆的圆心叫作这个三角形的**外心**（circumcenter），这个三角形叫作这个圆的**内接三角形**（inscribed triangle），如图 2-34. 从前面的讨论知道，**三角形的外心是它的三条边的垂直平分线的交点**.

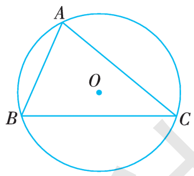


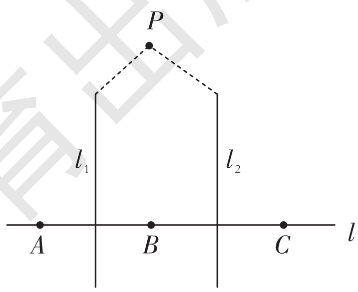
图 2-34

62 数学 九年级下册

资源拓展

过同一直线上的三个点能作出一个圆吗？

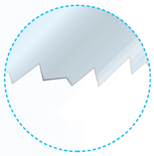
如图，假设过同一直线 l 上的 A，B，C 三点可以作一个圆，设这个圆的圆心为 P. 那么点 P 既在线段 AB 的垂直平分线 l_1 上，又在线段 BC 的垂直平分线 l_2 上，即点 P 为 l_1 和 l_2 的交点，而 $l_1 \perp l$，$l_2 \perp l$，这与“过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”矛盾，所以，过同一直线上的三点不能作圆.



练习

1. 任意画一个三角形，作这个三角形的外接圆.

2. 如图是一块破残的圆形玻璃镜，现要复制一块同样大小的圆形玻璃，你能画出要复制的圆形玻璃镜图吗？

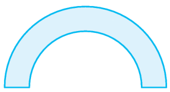


（第 2 题图）

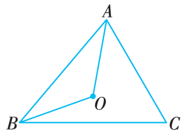
习题 2.4

A 组

1. 如图是某一圆弧管道，请想办法作出圆弧管道的圆心.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，在△ABC中，∠BAC=70°，∠ABC=50°，点 O是△ABC的外心，求∠AOB 的度数.（提示：作△ABC的外接圆）

B 组

3. 求边长为 a 的等边三角形的外接圆的半径.

4. 如图2-34，△ABC 是锐角三角形，它的外心 O 在三角形的内部. 如果△ABC 是钝角三角形，外心 O 在三角形的什么位置？如果△ABC 是直角三角形，外心 O 在△ABC 的什么位置？分别画出它们的外接圆，并给予判断.

第 2 章 圆 63

练习

1. 作圆的关键是确定圆心与半径，作图略.

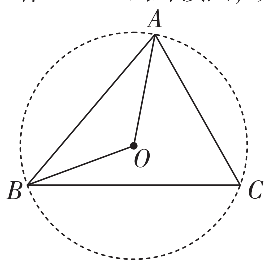
2. 在残缺玻璃镜的边缘上任取不共线三点作圆，作图略.

习题2.4

A组

1. 在内弧（或外弧）上任取不共线三点，如 A，B，C，连接 AB，BC，作线段AB，BC的垂直平分线，它们的交点即为圆心.

2. 作△ABC 的外接圆，如图.



∵ ∠BAC=70°，∠ABC=50°，

∴ ∠ACB=60°.

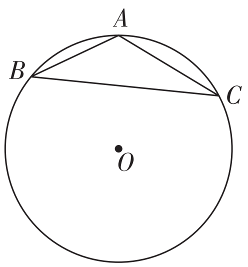
∵ ∠AOB 与 ∠ACB 所对的弧为$\overset{\frown}{AB}$，

∴ ∠AOB=2∠ACB=120°.

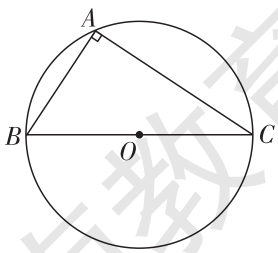
B组

3. $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

4.①如果△ABC是钝角三角形，其中一个角（即圆周角）大于90°，则对应的圆心角大于180°，因此外心 O 在△ABC 的外部，如图(a).



(a)



(b)

②如果△ABC是直角三角形，其中一个角是直角，则对应的圆心角为180°，即外心 O 在直角三角形的斜边上（斜边的中心），如图(b).

教学目标

1. 了解直线与圆的三种位置关系.

2. 能通过比较圆心到直线的距离与半径之间的数量关系来揭示直线与圆的位置关系.

3. 经历探索直线与圆的位置关系的过程，加深对分类、数形结合等数学思想方法的理解.

4. 掌握切线的概念.

教学重点、难点

教学重点：探索直线与圆的三种位置关系.

教学难点：探索圆心到直线的距离与半径之间的数量关系来揭示直线与圆的位置关系.

2.5 节重点研究直线与圆的不同位置关系以及切线的判定和性质、切线长定理、三角形的内切圆等. 其中切线的判定和性质是 2.5 节的重点.

2.5.1 节研究直线与圆的位置关系. 教材通过用太阳升起的过程(即运动的过程)来引出直线与圆的三种位置关系. 教学时可先复习点与圆的三种位置关系以及各种位置关系的数量表示，然后以运动的观点来理解直线和圆相交、相切、相离的概念.

2.5 直线与圆的位置关系

2.5.1 直线与圆的位置关系

观察

图 2–35 是小明在海边观日出时所看到的景象示意图.

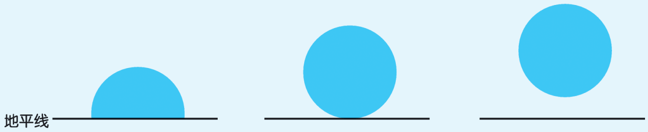


图 2–35

观察上图，你发现了什么？

若将图中太阳看作圆，地平线看作直线，我发现直线与圆有三种位置关系，如图 2–36.

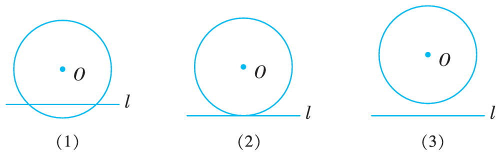


图 2–36

可以说明：在平面内，直线与圆的位置关系有三种情况.

设圆心到直线的距离为 d，圆的半径为 r，则：

当 $d<r$ 时，直线与圆恰好有两个不同的公共点，这时称直线与圆**相交**，这条直线叫作圆的**割线**；

当 $d=r$ 时，直线与圆只有一个公共点，这时称直线与圆**相切**，这条直线叫作圆的**切线**（tangent line），这个公共点叫作**切点**（point of tangency）；

当 $d>r$ 时，直线与圆没有公共点，这时称直线与圆**相离**.

一般地，设$\odot O$ 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d，则有：

(1) 直线 l 和$\odot O$ 相交 $\Leftrightarrow d<r$；

(2) 直线 l 和$\odot O$ 相切 $\Leftrightarrow d=r$；

(3) 直线 l 和$\odot O$ 相离 $\Leftrightarrow d>r$.

例 1 如图2-37，$\angle C=30°$，O为BC上一点，且$CO=6$ cm，以O为圆心，r为半径的圆与直线CA有怎样的位置关系？为什么？

(1) $r=2.5$ cm；

(2) $r=3$ cm；

(3) $r=5$ cm.

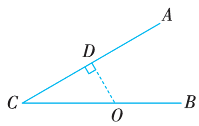


图 2-37

解 过 O 作 $OD\perp CA$ 交 CA 于 D.

在 Rt$\triangle CDO$ 中，$\angle C=30°$，

$$\therefore\ OD=\frac{1}{2}CO=3(\text{cm}).$$

即圆心 O 到直线 CA 的距离 $d=3$ cm.

(1) 当 $r=2.5$ cm 时，有 $d>r$，因此$\odot O$ 与直线 CA 相离；

(2) 当 $r=3$ cm 时，有 $d=r$，因此$\odot O$ 与直线 CA 相切；

(3) 当 $r=5$ cm 时，有 $d<r$，因此$\odot O$ 与直线 CA 相交.

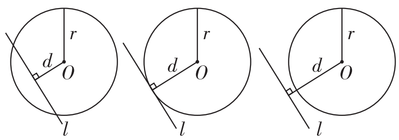
练习

1. 已知$\odot O$ 的半径 $r=7$ cm，圆心 O 到直线 l_1，l_2，l_3 的距离分别为 $d_1=7.1$ cm，$d_2=6.8$ cm，$d_3=7$ cm. 判断直线 l_1，l_2，l_3 与$\odot O$ 的位置关系.

2. 已知$\odot O$ 的直径为 18 cm，圆心 O 到直线 l 的距离为 9 cm. 判断直线 l 与$\odot O$ 的位置关系.

对于直线和圆相切，要向学生指出，这时的公共点是唯一的，是有一个并且只有一个公共点.

研究直线与圆的位置关系，可以转化为圆心到直线的距离与半径的大小关系.



应当使学生明确，归纳的这三条结论用到了“$\Leftrightarrow$”符号，因此它们既可以作为各种位置的判定，也可以作为性质.

实际上，直线与圆的位置关系还可以用它们的交点个数来区分，它与前者的本质是一致的.

练习

1. l_1与$\odot O$ 相离，

l_2与$\odot O$ 相交，

l_3与$\odot O$ 相切.

2. l与$\odot O$ 相切.

教学目标

1. 探索切线与过切点的半径的关系，理解切线的判定定理.

2. 运用切线的判定定理，用三角尺过圆上一点画圆的切线.

教学重点、难点

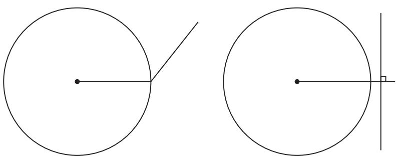
教学重点：切线的判定定理.

教学难点：探索切线与过切点的半径的关系，理解切线的判定定理.

2.5.2 节重点讨论切线的判定和性质.

第 1 课时探讨切线的判定定理及其应用.

对于切线的判定定理，要注意让学生分清定理的题设和结论，应强调“经过半径的外端”和“垂直于这条半径”这两个条件缺一不可，否则就不是圆的切线，这里可举出反例，如图：



2.5.2 圆的切线

观察

观察图2-38，工人用砂轮磨一把刀，在接触的一瞬间，擦出的火花是沿着砂轮的什么方向飞出去的？

图 2-38

生活中，我们常常看到切线的实例，如何判断一条直线是不是$\odot O$的切线呢？

探究

如图 2-39，OA是$\odot O$的半径，经过OA的外端点A，作一条直线$l \perp OA$，圆心O到直线l的距离是多少？直线l和$\odot O$有怎样的位置关系？

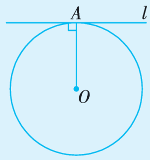


图 2-39

圆心O到直线l的距离等于半径OA.

由圆的切线定义可知直线l与圆O相切.

由此得出以下结论：

经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

66 数学 九年级下册

切线的判定定理实际上是从前一节所讲的“圆心O到直线l的距离d等于半径r时，直线和圆相切”这个结论直接得出来的，只是为了便于应用，把它改写成判定定理这一形式.

做一做

用三角尺过圆上一点画圆的切线.

如图 2-40，已知⊙O 上一点 P，过点 P 画⊙O 的切线.

画法：（1）连接 OP，将三角尺的直角顶点放在点 P 处，并使一直角边与半径 OP 重合；

（2）过点 P 沿着三角尺的另一条直角边画直线 l，则 l 就是所要画的切线.

如图 2-40.

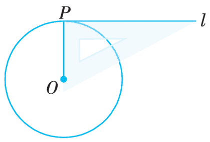
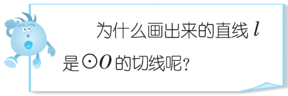


图 2-40



例 2 如图 2-41，已知 AD 是⊙O 的直径，直线 BC 经过点 D，并且 $AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAD$.

求证：直线 BC 是⊙O 的切线.

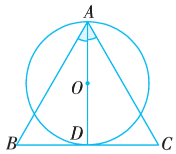


图2-41

证明 $\because$ $AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAD$，

$\therefore$ $AD\perp BC$.

又$\because$ OD 是⊙O 的半径，且 BC 经过点 D，

$\therefore$ 直线 BC 是⊙O 的切线.

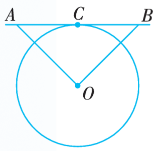
练习

1.（1）垂直于半径的直线一定是圆的切线吗？为什么？

（2）经过半径外端的直线一定是圆的切线吗？为什么？

2. 如图，已知直线 AB 经过⊙O 上的点 C，并且 $OA=OB$，$AC=BC$.

求证：直线 AB 是⊙O 的切线.



（第 2 题图）

“做一做”栏目介绍了画切线的方法，其画法的依据是切线的判定定理，画法需学生切实掌握.

判定一条直线是圆的切线，必须紧扣“经过半径的外端”和“垂直于这条半径”这两个缺一不可的条件，教师可根据学情，适当补充一些例子.

练习

1.（1）不一定；

（2）不一定.

2. 连接 OC.

$\because OA=OB$，$AC=BC$，

$\therefore OC\perp AB$（等腰三角形“三线合一”）.

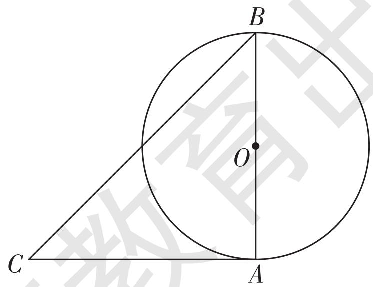
又 $\because$ 直线 AB 经过半径 OC 的外端点，

$\therefore$ 直线 AB 是⊙O 的切线.

补充例题

如图，AB 是⊙O 的直径，$\angle ABC=45°$，$AC=AB$.

求证：AC 是⊙O 的切线.



教学目标

1. 理解切线的性质定理的证明过程.

2. 区分切线的判定定理和性质定理，并能灵活运用.

教学重点、难点

切线的性质定理的证明过程及其应用.

第 2 课时探讨切线的性质定理及其应用.

切线的性质定理的证明用到了反证法. 当直接证明一个命题比较困难时，可以采取间接证法，反证法就是一种间接证法.

用反证法证明命题的过程可以归纳为“作出反设、推出矛盾、肯定结论”三个步骤，在此处，要使学生进一步体会反证法的基本思路和一般步骤.

切线的判定定理和性质定理极易混淆，要使学生分清判定定理和性质定理的题设和结论，并帮助学生总结切线的判定方法和切线的性质.

动脑筋

如图 2–42，直线 l 是⊙O 的切线，A 为切点，切线 l 与半径 OA 垂直吗？

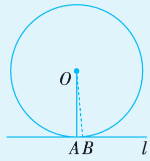


图 2–42

我用量角器量得切线 l 与半径 OA 所成的角为 90°，即切线 l 与半径 OA 垂直.

下面我们用反证法来证明这个结论.

假设直线 l 与半径 OA 不垂直.

过圆心 O 作 $OB \perp l$ 于点 B. 由于垂线段最短，可得 $OB < OA$，那么圆心 O 到直线 l 的距离小于半径，即直线 l 与⊙O 相交. 这与已知直线 l 是⊙O 的切线相矛盾.

因此直线 $l \perp OA$.

由此，我们得出下面的结论：

圆的切线垂直于过切点的半径.

例 3 如图 2–43，AB 是⊙O的直径，C 为⊙O上一点，BD 和过点 C 的切线 CD 垂直，垂足为 D.

求证：BC 平分 $\angle ABD$.

证明 连接OC.

∵ CD 是⊙O的切线，

∴ $OC \perp CD$.

又∵ $BD \perp CD$，

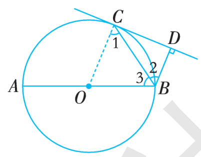


图 2–43

判定切线有三种方法：（1）和圆只有一个公共点的直线是圆的切线；

（2）和圆心的距离等于半径的直线是圆的切线；

（3）经过半径的外端且垂直于半径的直线是圆的切线.

应根据题目的特点选择合适的判定方法.

关于切线的性质有如下几个：（1）切线和圆只有一个公共点；

（2）切线和圆心的距离等于圆的半径；

（3）切线垂直于过切点的半径.

$\therefore$ $BD \parallel OC$.

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.

又 $OC = OB$,

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 3$.

$\therefore$ $\angle 2 = \angle 3$，即 BC 平分$\angle ABD$.

例 4 证明：经过直径两端点的切线互相平行.

已知：如图 2-44，AB 是$\odot O$ 的直径，l_1，l_2 分别是经过点 A，B 的切线.

求证：$l_1 \parallel l_2$.

证明 $\because$ OA 是$\odot O$ 的半径，l_1 是过点 A 的切线，

$\therefore$ $l_1 \perp OA$.

同理 $l_2 \perp OB$.

$\therefore$ $l_1 \perp AB$，且 $l_2 \perp AB$.

$\therefore$ $l_1 \parallel l_2$.

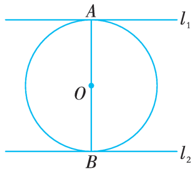
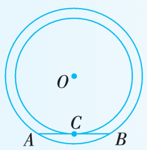


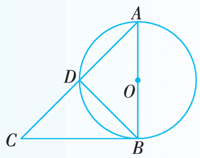
图 2-44

练习

1. 如图，两个同心圆的圆心是 O，大圆的弦 AB 所在直线切小圆于点 C. 求证：点 C 是线段 AB 的中点.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，在$\odot O$中，AB 为直径，AD 为弦，过点 B 的切线与 AD 的延长线交于点 C，且 $AD=DC$. 求$\angle ABD$ 的度数.

切线的判定定理和性质定理是本章的重点，在证明和计算的过程中，往往需要添加辅助线. 当已知一条直线是某圆的切线时，切点的位置是确定的，辅助线常常是连接圆心和切点得到半径，那么半径垂直于切线. 当要证明某直线是圆的切线时，如果已知直线过圆上一点，则作出过这一点的半径，证明直线垂直于半径；如果直线与圆的公共点没有确定，则应过圆心作该直线的垂线，证明圆心到直线的距离等于半径.

例4应要求学生说明：由$l_1 \perp AB$，$l_2 \perp AB$，为什么可以得到$l_1 \parallel l_2$的理由.

练习

1. 连接 OC，OA，OB.

$\because AB$ 是小圆的切线，切点为 C，$\therefore OC \perp AB$.

又$\because$在大圆中，$OA=OB$，

$\therefore$点 C 是线段 AB 的中点.

2. $\because$ CB 是$\odot O$ 的切线，切点为 B，$\therefore AB \perp BC$.

$\because AB$为$\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ADB=90°$.

又$\because AD=DC$，

$\therefore$ 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$DB=AD=DC$，$\therefore \angle ABD=45°$.

资源拓展

欧几里得最喜爱的证法

英国著名数学家哈代说过：“欧几里得最喜爱的间接法(反证法)是数学最好的武器之一，它比象棋中任何的‘丢卒保车’招法远为高明. 因为一个棋手提供牺牲的只是一兵一卒，而一个数学家可以提供的是整个求证目标.”

反证法是一种间接证法，它分为两种：如果所要证明的结论，它的反面只有一种情况就叫归谬法；如果结论的反面有两种以上的情况就叫穷举法.

古希腊学者欧几里得早在两千多年前，就用反证法巧妙地证明了质数的个数是无穷的，他的证明至今仍被认为是最简单的证法. (接下页)

教学目标

1. 了解切线长的概念.
2. 探索并证明切线长定理.
3. 切线长定理的简单应用.

教学重点、难点

教学重点：切线长的概念、切线长定理的证明.

教学难点：探索并证明切线长定理.

“说一说”栏目首先过⊙O外一点 P 及圆上一点 A 作⊙O的切线，方法仍然是前面所学的“用三角尺过圆上一点画圆的切线”，同样的方法，作出过点 P 及圆上 B 点的切线. 接着将圆外一点 P 与切点 A，B 之间的线段长定义为切线长.

要注意切线和切线长的区别：切线是直线，不可度量，而切线长是切线上一条线段的长，可以度量. 要让学生明白：切线是直线，为了研究切线的一些特征，需要定义切线长.

“探究”栏目探索并证明了切线长定理. 其中探索环节利用圆的轴对称性探索发现一些线段相等、角相等，并获得猜想，最后对这些猜想进行证明. 从整个过程可以看出教材注重探索发现(合情推理)与证明(演绎推理)的有机结合. 这种呈现方式是落实《课程标准（2011 年版）》的要求，望教师在教学过程中予以落实.

*2.5.3　切线长定理

说一说

如图 2–45，将三角尺的一条直角边过⊙O 外一点 P 及圆上的点 A，另一条直角边过圆心 O，然后作直线 PA，则 PA 是⊙O 的切线. 用同样的方法可作出切线 PB. 你能说出 PA 和 PB 是⊙O 的切线的理由吗？

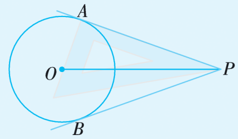


图 2–45

经过圆外一点作圆的切线，这点和切点之间的线段的长，叫作这点到圆的**切线长**. 如图2–45，线段 PA，PB 的长度是点 P 到⊙O 的切线长.

探究

在透明纸上画出图 2–46，设 PA，PB 是⊙O 的两条切线，A，B 是切点，沿直线 OP 将图形对折，你发现了什么？

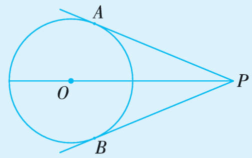


图 2–46

我把图形沿直线 OP 对折后，发现线段 PA 与线段 PB 重合，$\angle APO$ 与 $\angle BPO$ 重合. 即 $PA=PB$，$\angle APO=\angle BPO$.

* 本节为选学内容.

（接上页）美国现代数学家克斯特教授和格里查博士认为，现在大多数发表的证明都是采用反证法来证的. 一些据说是直接证法的证明，实际上是经过伪装的间接证明. 这是因为实际上只有那些最初等的定理，是完全用直接证法证明的，而所有其他定理的证明，都是借助于已知事实和已证定理，通过推理而得到. 如果这些辅助定理中，有任何一个是采用间接证明的，那么用它们所证明的定理，就不能认为是用直接证法证明的. 事实上，现在一些最简单最基本的定理，都是采用反证法证明的.

由此我们猜测：过圆外一点所作的圆的两条切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角.

下面我们来证明这个猜测是真的.

如图2-47，连接 OA，OB.

$\because$ PA，PB 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore$ $\angle PAO=\angle PBO=90°$，

即 $\triangle PAO$ 和 $\triangle PBO$ 均为直角三角形.

又 $\because$ $OA=OB$，

$OP=OP$，

$\therefore$ $\text{Rt}\triangle PAO\cong\text{Rt}\triangle PBO$.

$\therefore$ $PA=PB$，$\angle APO=\angle BPO$.

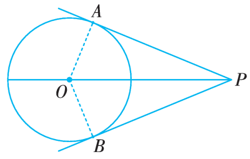


图 2-47

由此得到**切线长定理**：

> **过圆外一点所作的圆的两条切线长相等，圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角.**

例 5 如图2-48，AD是$\odot O$的直径，点C为$\odot O$外一点，CA和CB是$\odot O$的切线，A和B是切点，连接BD.

求证：$CO/\!/BD$.

分析 连接AB，因为AD为直径，那么$\angle ABD=90°$，即$BD\perp AB$. 因此要证$CO/\!/BD$，只要证$CO\perp AB$即可.

证明 连接AB.

$\because$ CA，CB是$\odot O$的切线，点A，B为切点，

$\therefore$ $CA=CB$，$\angle ACO=\angle BCO$.

$\therefore$ $CO\perp AB$.

$\because$ AD是$\odot O$的直径，

$\therefore$ $\angle ABD=90°$，

即 $BD\perp AB$.

$\therefore$ $CO/\!/BD$.

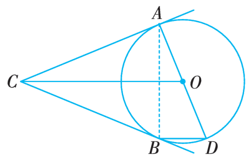


图 2-48

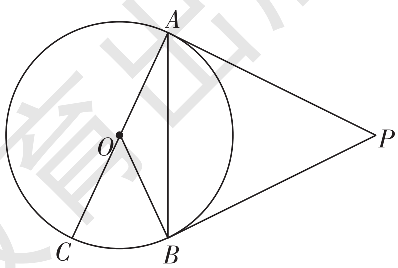
切线长定理再次体现了圆的轴对称性，它为证明线段相等、角相等、弧相等、垂直关系等提供了理论依据，是一条重要的定理.

例 5 中，注意提醒学生说明 $CO\perp AB$ 的理由（等腰三角形“三线合一”的性质).

本章所呈现的例题均是一些经典问题，教师应结合例题的教学，帮助学生理清一些基本图形的基本证法和规律. 例如经过圆外一点引圆的两条切线，连接两个切点可以得到一个等腰三角形，利用等腰三角形的性质又可以得出一些结论.

补充例题

如图，PA，PB 是$\odot O$ 的切线，A，B 为切点，AC 是$\odot O$ 的直径，$\angle BAC=25°$，求$\angle P$ 的度数.



练习

1. ∵ AD，AE 分别与⊙O 相切，

∴ $AD=AE$.

同理，$BE=BC$.

∴ 四边形 $ABCD$ 的周长

$=AD+AE+EB+BC+DC$

$=2AB+DC$

$=2\times5+2\times2$

$=14$.

2. ∵ PA，PB 是⊙O 的切线，

∴ $\angle APO=\angle BPO$，$OA\perp AP$，$OB\perp BP$.

∴ $\angle AOP=\angle BOP$.

在 Rt△OAP 中，

$\cos\angle APO=\dfrac{AP}{OP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $\angle APO=30°$.

∴ $\angle AOP=60°$.

∴ $\angle AOB=2\angle AOP=120°$.

教学目标

1. 通过尺规作图的方法，经历三角形的内切圆的产生过程，理解三角形的内切圆的概念.

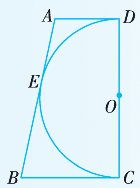
2. 知道三角形的内心，并理解其性质.

教学重点、难点

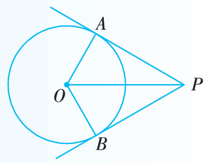
三角形的内切圆的画法及相关概念的理解.

练习

1. 如图，已知半圆 O 与四边形 $ABCD$ 的边 AD，AB，BC 相切，切点分别为 D，E，C. 设半圆 O 的半径为 2，AB 为 5，求四边形 $ABCD$ 的周长.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，已知 PA，PB 是⊙O 的两条切线，点 A，B 为切点，若 $OP=4$，$PA=2\sqrt{3}$，求 $\angle AOB$ 的度数.

2.5.4 三角形的内切圆

议一议

想在一块三角形硬纸板上剪下一个面积最大的圆形纸板，应当怎样剪？

如图 2-49，为了使圆形纸板的面积最大，这个圆应当与三角形的三条边都尽可能贴近.

（1）　　（2）

图 2-49

72 数学 九年级下册

“议一议”栏目通过一个实际问题，使学生认识学习三角形的内切圆的意义，此环节，可让学生动手操作，并围绕问题展开讨论，并适时引导求三角形内面积最大的圆的问题转化到这个圆与三角形的三边均相切的情况.

这使得我们猜测：这个圆应当与三角形的三条边都相切.

动脑筋

与三角形的三条边都相切的圆存在吗？若存在，如何画出这样的圆？

如果圆与$\triangle ABC$的三条边都相切，那么圆心O与三角形三边的距离应等于圆的半径，从而这些距离相等.

到一个角的两边距离相等的点一定在这个角的平分线上，因此圆心O应是$\angle A$与$\angle B$的平分线的交点.

根据以上分析，我们可以按下面的方法画一个圆与三角形的三边都相切.

如图2-50，已知$\triangle ABC$.

求作：与$\triangle ABC$的各边都相切的圆.

作法：（1）作$\angle A$，$\angle B$的平分线AD，BE，它们相交于点O；

（2）过点O作AB的垂线，垂足为M；

（3）以点O为圆心，OM为半径作圆. $\odot O$就是所求作的圆，如图2-50.

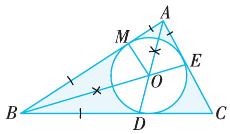


图2-50

由以上分析和作法可知，与三角形的三条边都相切的圆有且只有一个.

与三角形各边都相切的圆叫作三角形的**内切圆**（inscribed circle），内切圆的圆心叫作三角形的**内心**（incenter），这个三角形叫作圆的**外切三角形**（externally tangent triangle）.

如图2-50，设点O是$\triangle ABC$的内心，由于AB，BC，CA都与$\odot O$相切，因此圆心O到AB，BC，CA的距离都等于圆的半径. 从而圆心O在$\triangle ABC$的每个内角的平分线上. 由此得出：**三角形的内心是这个三角形的三条角平分线的交点.**

“动脑筋”栏目首先分析假设圆已作出，圆心应满足什么条件，圆心确定后，如何确定半径？这个过程实际上勾勒出三角形内切圆的内涵以及作图的依据.

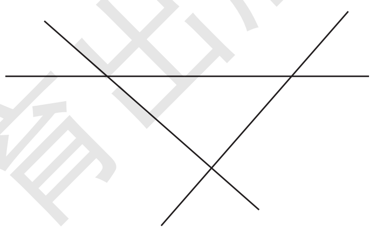
作一个三角形的内切圆使用尺规作图方法，可回顾作一个角的平分线的方法，作出图后，应引导学生说一说作图的依据.

教材是用“三角形内切圆的圆心”来定义三角形的内心的. 因为三角形的内心就是三角形的三条角平分线的交点.

在知道三角形的内切圆、内心概念后，要注意让学生将三角形的内心和外心、内切圆和外接圆进行比较，“接”与“切”是说明多边形的顶点和边与圆的关系：多边形的顶点都在圆上叫“接”，多边形的各边都与圆相切叫“切”.

补充例题

如图，某公园有一块由三条马路围成的三角形绿地. 现准备在其中建一个尽可能大的圆亭供人们休息，试作出这个表示圆亭范围的圆.



如果已知三角形的内心，过三角形顶点和内心的射线平分三角形的内角.

例 6 如图 2-51，⊙O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，$\angle A=70°$，求 $\angle BOC$ 的度数.

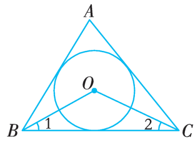


图 2-51

解 ∵ $\angle A=70°$，

∴ $\angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A=110°$.

∵ ⊙O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，

∴ BO，CO 分别是 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线，

即 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$.

∴ $\angle BOC=180°-(\angle 1+\angle 2)=180°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$

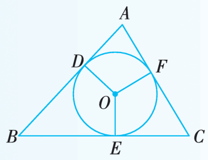
$=180°-\frac{1}{2}\times 110°$

$=125°$.

练习

1. 任画一个三角形，求作它的内切圆.

2. 如图，$\triangle ABC$ 的内切圆的三个切点分别为 D，E，F，$\angle A=74°$，$\angle B=47°$，求圆心角 $\angle EOF$ 的度数.



(第 2 题图)

3. 已知等边三角形 ABC 的边长为 a，求它的内切圆的半径.

练习

1. 略.

2. ∵ ⊙O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，

∴ $OE\perp BC$，$OF\perp AC$，

即 $\angle OEC=\angle OFC=90°$.

又 ∵ $\angle A=74°$，$\angle B=47°$，

∴ $\angle C=59°$.

∴ 在四边形 $OECF$ 中，$\angle EOF=360°-90°-90°-59°=121°$.

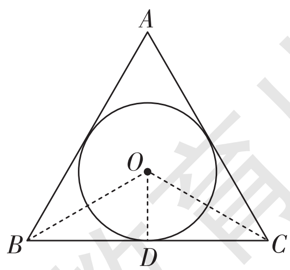
3. 如图，⊙O 是等边三角形 ABC 的内切圆，连接 OB，OC，

则 $\angle OBC=\frac{1}{2}\angle B=30°$，

$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle C=30°$.

设 BC 边与⊙O 的切点为 D，连接 OD，则 $OD\perp BC$，且 OD 为内切圆的半径.

在 Rt$\triangle OBD$ 与 Rt$\triangle OCD$ 中，$\tan 30°=\frac{OD}{BD}=\frac{OD}{DC}$，



∴ $BD=DC$，即 $DC=\frac{a}{2}$.

∴ $OD=\tan 30°\cdot\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

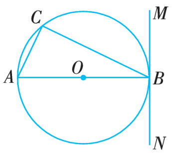
即内切圆的半径长为 $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

习题 2.5

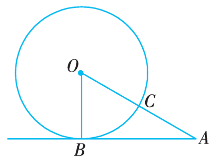
A 组

1. ⊙O的直径为 10 cm，圆心 O 到直线 l 的距离是：（1）3 cm；（2）5 cm；（3）7 cm．判断直线 l 与⊙O有几个公共点，为什么？

2. 如图，AB 是⊙O 的直径，直线 MN 过点 B，$\triangle ABC$ 内接于⊙O，$\angle CBM=\angle A$．求证：MN 是⊙O 的切线．



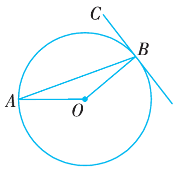
（第 2 题图）



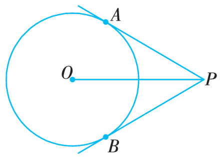
（第 3 题图）

3. 如图，$OC=CA$，OB 为⊙O 的半径，$\angle COB=60°$，求证：AB 是⊙O 的切线．

4. 如图，AB是⊙O的弦，BC与⊙O相切于点B，连接OA，OB，若$\angle ABC=70°$，求$\angle A$的度数．



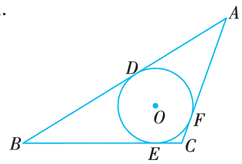
（第 4 题图）



（第 5 题图）

***5.** 如图，⊙O的半径为3 cm，P为⊙O外一点，PA，PB为⊙O的切线，点A，B为切点，$PO=6$ cm，求这两条切线的夹角及切线长．

***6.** 如图，若$\triangle ABC$ 的三边长分别为 $AB=9$，$BC=6$，$AC=5$，$\triangle ABC$ 的内切圆⊙O 切 AB，BC，CA 于点 D，E，F，求 AF 的长．



（第 6 题图）

7. 证明：等腰三角形的内切圆与底边的切点是底边的中点．

习题2.5

A组

1.（1）两个公共点；

（2）一个公共点；

（3）没有公共点．

2. ∵ AB 是⊙O 的直径，$\triangle ABC$ 内接于⊙O，

∴ $\angle C=90°$，$\angle A+\angle CBA=90°$．

又∵ $\angle CBM=\angle A$，

∴ $\angle CBM+\angle CBA=90°$，

即$AB\perp MN$．

又∵ OB 是⊙O 的半径，直线 MN 经过点 B，

∴ MN是⊙O 的切线．

3. 连接 BC．

∵ $OC=OB$，$\angle COB=60°$，

∴ $\triangle OBC$ 为等边三角形．

∴ $\angle OBC=\angle OCB=60°$，$BC=OC$．

又∵ $OC=CA$，∴ $BC=CA$．

∴ $\angle CBA=30°$．

∴ $\angle OBA=90°$，即$OB\perp BA$．

又∵ OB 为⊙O 的半径，且 AB 经过点 B，

∴ AB 是⊙O 的切线．

4. ∵ BC 与⊙O 相切于点 B，OB 是半径，

∴ $OB\perp BC$，即$\angle OBC=90°$．

∵ $\angle ABC=70°$，∴ $\angle OBA=20°$．

又∵ $OA=OB$，

∴ $\angle A=\angle OBA=20°$．

***5.** 连接 OA，OB．

∵ OA，OB 为⊙O 的半径，PA，PB 为⊙O 的切线，点 A，B 为切点，

∴ $OA\perp AP$，$OB\perp BP$，$OA=OB=3$ cm．

在Rt$\triangle OPA$ 中，$\sin\angle OPA=\dfrac{OA}{OP}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，

∴ $\angle OPA=30°$．

∴ $\cos 30°=\dfrac{PA}{OP}$，得 $PA=OP\cdot\cos 30°=3\sqrt{3}$ cm．

同理，$\angle OPB=30°$，$PB=3\sqrt{3}$ cm．

***6.** ∵ ⊙O 是$\triangle ABC$ 的内切圆，切点为D，E，F，

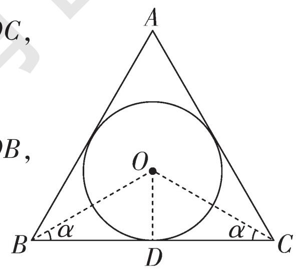
∴ 由切线长定理得：$AD=AF$，$BD=BE$，$CE=CF$．

∴ $BD+CF=BE+CE=BC$，

即 $L_{\triangle ABC}=2AF+2BC=9+6+5$，

∴ $AF=4$．

7. 已知：如图，⊙O 是等腰三角形 ABC 的内切圆，$AB=AC$，⊙O 与 BC 边相切于点 D，求证：$BD=CD$．



证明：连接 OB，OC，OD，

则 $OD\perp BC$，

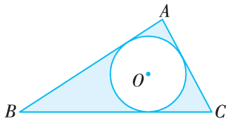
由内切圆性质可知OB，OC分别平分$\angle B$，$\angle C$，

又$\angle B=\angle C$，

∴ $\angle OBD=\angle OCD=\alpha$，

∴ $\tan\alpha=\dfrac{OD}{BD}=\dfrac{OD}{DC}$，∴ $BD=DC$．

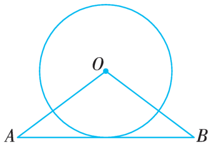
8. 如图，设△ABC的内切圆的半径为r，△ABC的周长为l，求△ABC的面积S.



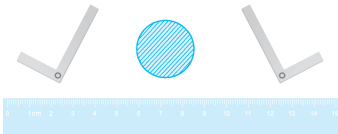
（第 8 题图）

B 组

9. 如图，已知⊙O的直径为6 cm，$OA=OB=5$ cm，线段AB经过⊙O上一点，长为8 cm. 求证：AB所在的直线与⊙O相切.



（第 9 题图）



（第 10 题图）

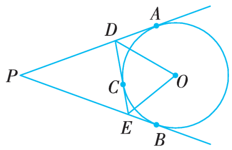
10. （1）证明：如果圆的两条切线互相平行，那么连接两个切点的线段是直径.

（2）利用（1）的结论，如何用两把曲尺和一把刻度尺测量圆形工件的直径？

***11.** 如图，P是⊙O外一点，PA，PB是⊙O的切线，点A，B为切点，$PA=4$ cm，$\angle APB=40°$，C是$\overset{\frown}{AB}$上任意一点，过C作⊙O的切线分别交PA，PB于D，E.

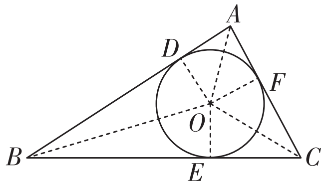
求：（1）△PDE的周长；

（2）$\angle DOE$的度数.



（第 11 题图）

8. 如图，设⊙O与△ABC相切于点D，E，F，连接OD，OE，OF，因此$OD\perp AB$，$OE\perp BC$，$OF\perp AC$，且$OD=OE=OF=r$.



连接OA，OB，OC，

则$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OBA}+S_{\triangle OAC}$

$=\frac{1}{2}AB\cdot OD+\frac{1}{2}BC\cdot OE+\frac{1}{2}AC\cdot OF$

$=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)\cdot r=\frac{1}{2}lr.$

B组

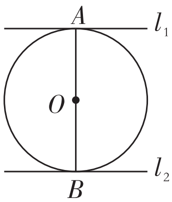
9. 作△OAB底边上的高OD，D为垂足，由等腰三角形的性质知D也为AB的中点，即$AD=4$ cm.

在Rt△OAD中，$OA=5$ cm，$AD=4$ cm，∴ $OD=3$ cm.

而⊙O的直径为6 cm，即OD为⊙O的半径，

∴ AB所在的直线与⊙O相切.

10. (1)如图，已知l_1，l_2是⊙O的两条平行切线，设l_1与⊙O的切点为A，连接AO，并延长交l_2于B.



∵ $OA\perp l_1$，$l_1/\!/l_2$，

∴ $OA\perp l_2$，则$OB\perp l_2$.

又∵ l_2与⊙O相切，

由过直线外一点有且只有一条直线与已知直线垂直，

则l_2与⊙O的切点为点B，

因此AB为⊙O的直径.

(2)略.

***11.** (1) ∵ DC，DA分别为⊙O的切线，

∴ $DC=DA$. 同理，$EC=EB$.

∴ △PDE的周长$=DC+EC+PE+PD=(DA+PD)+(EB+PE)=PA+PB=8$(cm).

(2) 连接OA，OB，OC. 在四边形$PBOA$中，$\angle P=40°$，$\angle A=\angle B=90°$，

∴ $\angle BOA=360°-40°-2\times90°=140°$.

易证△OAD≌△OCD（SSS），

∴ $\angle AOD=\angle COD$. 同理，$\angle COE=\angle BOE$.

∴ $\angle DOE=\angle COD+\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOC$

$=\frac{1}{2}\angle AOB=70°.$

2.6 弧长与扇形面积

动脑筋

如图 2-52 是某城市摩天轮的示意图. 点 O 是圆心, 半径 r 为 15 m, 点 A, B 是圆上的两点, 圆心角 $\angle AOB = 120°$. 你能想办法求出 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度吗? 说说你的理由.

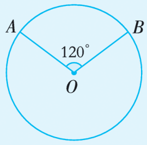


图 2-52

因为 $\angle AOB=120°$, 所以 $\overset{\frown}{AB}$ 的长是圆周长的 $\frac{1}{3}$,

因此 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 $\frac{1}{3}\times 2\pi\times 15 = 10\pi$ (m).

如果 $\angle AOB = n°$, 你能求出 $\overset{\frown}{AB}$ 的长吗?

我们知道圆周长的计算公式为 $C = 2\pi r$, 其中 r 是圆的半径, 即360°的圆心角所对的弧长就是圆周长 C.

在同一个圆中, 由于圆心角相等, 它们所对的弧也相等, 因此 1°的圆心角所对的弧长为 $\frac{1}{360}\cdot 2\pi r$, $n°$的圆心角所对的弧长 l 为

$$l = n\cdot\frac{1}{360}\cdot 2\pi r.$$

由此得出以下结论:

半径为 r 的圆中, $n°$的圆心角所对的弧长 l 为

$$l = \frac{n}{360}\cdot 2\pi r = \frac{n\pi r}{180}.$$

教学目标

1. 经历探索弧长、扇形面积公式的过程, 进一步加深对圆的旋转对称性质的理解.

2. 会恰当运用公式计算弧长及扇形面积.

教学重点、难点

弧长、扇形面积公式的探索过程.

教材首先从“动脑筋”栏目中的实际问题出发, 求一个特殊圆心角所对应的弧长, 在明白原理的基础上, 进一步探索求 $n°$ 圆心角所对应的弧长.

由于前面学过: 在同一个圆中, 如果圆心角相等, 它们所对的弧也相等.

一个圆 360°, 那么 1°的圆心角所对应的弧长为圆周长 $(2\pi r)$ 的 $\frac{1}{360}$, 则 $n°$的圆心角所对应的弧长 l 为 $\frac{n\pi r}{180}$. 在抽象出弧长公式后, 应向学生说明, 这里的 180, n 在计算公式中表示倍分关系, 没有单位.

从上述过程可以看出, 探索弧长公式实质运用了圆的旋转对称性性质, 这一点可以向学生作进一步说明.

掌握了弧长公式，自然就要运用公式解决实际问题. 已知 l，n，r 中的任意两个量，就可以求出另一个量.（这一点在第 3 章将应用.）

在计算中，若没有标明结果的精确度，则可以用含"π"的式子表示弧长.

练习

1. 内轮廓线的圆弧的长度为

$$\frac{(360-83)\pi\times 3.2}{180}=\frac{277\times 3.2\times\pi}{180}=\frac{1\ 108}{225}\pi.$$

2. 因为 $34=2OA+\dfrac{80\times\pi\times OA}{180}$，

$34\approx 2OA+1.40OA$，

$34=3.4OA$，

所以 $OA=10.0$(m).

例 1 已知⊙O 的半径为 30 cm，求 40° 的圆心角所对的弧长(精确到 0.1 cm).

解 $$l=\frac{40\cdot\pi\cdot 30}{180}\approx\frac{40\times 3.14\times 30}{180}\approx 20.9\ (\text{cm}).$$

例 2 如图2–53，一个边长为10 cm的等边三角形木板ABC在水平桌面上绕顶点C按顺时针方向旋转到$\triangle A'B'C$的位置，求顶点A从开始到结束所经过的路程为多少.

解 由图可知，由于$\angle A'CB'=60°$，则等边三角形木板绕点C按顺时针方向旋转了120°，即$\angle ACA'=120°$，这说明顶点A经过的路程长等于$\overset{\frown}{AA'}$的长.

∵ 等边三角形ABC的边长为10 cm，

∴ $\overset{\frown}{AA'}$所在圆的半径为10 cm.

∴ $$l_{\overset{\frown}{AA'}}=\frac{120\cdot\pi\cdot 10}{180}=\frac{20}{3}\pi\ (\text{cm}).$$

答：顶点A从开始到结束时所经过的路程为$\dfrac{20}{3}\pi$ cm.

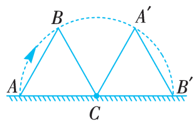
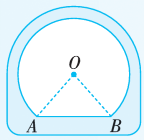


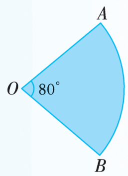
图 2–53

练习

1. 如图是一个闹钟正面的内、外轮廓线. 内轮廓线由一段圆弧和一条弦 AB 组成，圆心为 O，半径为 3.2 cm，圆心角 $\angle AOB=83°$，求内轮廓线的圆弧的长度.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，一块铅球比赛场地是由一段 80°的圆心角所对的圆弧和两条半径围成的，若该比赛场地的周界是 34 m，求它的半径 OA 长(精确到 0.1 m).

圆的一条弧和经过这条弧的端点的两条半径所围成的图形叫作**扇形**(sector).

如图 2-54，蓝色部分是一个扇形，记作扇形 OAB.

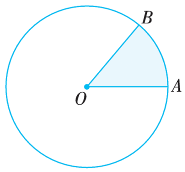


图 2-54

我们可以发现，扇形面积与组成扇形的圆心角的大小有关，在同一个圆中，圆心角越大，扇形面积也越大.

探究

如何求半径为r，圆心角为n°的扇形的面积呢？

我们可以把圆看作是圆心角为 360°的扇形，它的面积即圆面积$S=\pi r^2$. 因为圆绕圆心旋转任意角度，都能与自身重合，所以圆心角为 1°的扇形能够互相重合，从而圆心角为 1°的扇形的面积等于圆面积的$\frac{1}{360}$，即$\frac{\pi r^2}{360}$. 因此，

圆心角为n°的扇形的面积为$n\cdot\frac{\pi r^2}{360}$.

由此得到：

半径为 r 的圆中，圆心角为 n° 的扇形的面积为

$$S_{扇形}=\frac{n\pi r^2}{360}.$$

又因为扇形的弧长 $l=\frac{n\pi r}{180}$，因此 $S_{扇形}=\frac{n\pi r^2}{360}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n\pi r}{180}\cdot r$

$$=\frac{1}{2}lr.$$

例 3 如图 2-55，⊙O的半径为 1.5 cm，圆心角 $\angle AOB=58°$，求扇形 OAB 的面积(精确到 0.1 cm²).

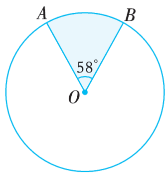


图 2-55

解 ∵ $r=1.5$ cm，$n=58$，

∴ $S_{扇形OAB}=\frac{58\times\pi\times1.5^2}{360}\approx\frac{58\times3.14\times1.5^2}{360}\approx1.1(\text{cm}^2)$.

第 2 课时介绍扇形面积公式的推导过程及公式的运用.

在公式的推导过程中，仍然是利用圆的旋转对称性. 要求学生明白推导的道理，这将有助于他们掌握这个公式.

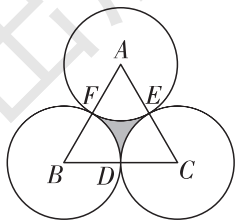
公式中的 n 与弧长公式中的 n 一样，应理解为 1°的倍数，不带单位.

扇形面积的另一个计算公式 $S=\frac{1}{2}lr$ 与三角形的面积公式 $S=\frac{1}{2}ah$ 十分相似，为便于记忆，可把扇形看作曲边三角形，将弧长 l 看作三角形的底，半径 r 看作底边上的高即可. 实际上，把扇形的弧分得越来越小，作经过各分点的半径，并顺次连接各分点，得到越来越多的小等腰三角形，扇形的面积就是这些等腰三角形面积和的极限.

根据扇形面积公式和弧长公式，已知 S，n，l，r 四个量中的任意两个量，可以求出另外两个量.

补充例题

如图，等边三角形 ABC 的边长为 a，分别以 A，B，C 为圆心，以$\frac{a}{2}$为半径的圆相切于点 D，E，F. 求图中阴影部分的面积.



例 4 是一道实际问题，为求不同扇形的面积，应用了两个公式，这就要求根据条件(已知)，灵活选择公式进行计算. 教师可根据学情，适当补充一些例子.

例 4 如图2-56是一条圆弧形弯道，已知OA = 20 m，$OC = 12$ m，$\overset{\frown}{CD}$ 的长度为9π m，求圆弧形弯道的面积.

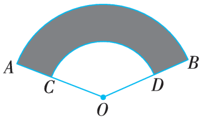


图 2-56

解 设$\angle AOB = n°$，

$\because$ $OC = 12$ m，$\overset{\frown}{CD}$ 的长度为 9π m，

$\therefore$ $9\pi = \dfrac{n \cdot \pi \cdot 12}{180}$，

解得 $n = 135$，即圆心角$\angle COD = 135°$.

$\therefore$ $S_{扇形OAB} = \dfrac{135 \cdot \pi \cdot 20^2}{360} = 150\pi\ (\text{m}^2)$，

$S_{扇形OCD} = \dfrac{1}{2}lr = \dfrac{1}{2} \cdot 9\pi \cdot 12 = 54\pi\ (\text{m}^2)$，

$\therefore$ $S_{弯道ACDB} = S_{扇形OAB} - S_{扇形OCD} = 150\pi - 54\pi = 96\pi\ (\text{m}^2)$.

答：这条圆弧形弯道的面积为 96π m².

练习

1. $\because \angle AOB = 120°$，

$AB = 2\sqrt{3}$ cm，

$\therefore OA = 2$ cm.

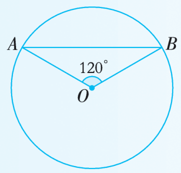
$\therefore S_{扇形OAB} = \dfrac{120 \times \pi \times 2^2}{360}$

$= \dfrac{4\pi}{3}\ (\text{cm}^2)$.

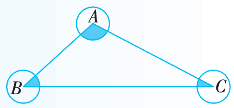
2. 由图知绿色部分圆弧所对的三个圆心角正好是$\triangle ABC$的三个内角，和为180°，所以绿色部分的面积为$\dfrac{180 \times \pi \times 1^2}{360} = \dfrac{\pi}{2}$.

练习

1. 如图，在⊙O 中，$\angle AOB = 120°$，弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$ cm，求扇形 OAB 的面积.



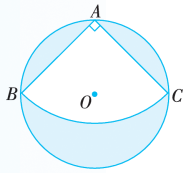
(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，分别以$\triangle ABC$ 的顶点 A，B，C 为圆心，以 1 为半径画圆，求图中绿色部分的面积.

3. 如图，有一直径是 20 cm 的圆形纸片，现从中剪出一个圆心角是 90°的扇形 ABC，求被剪掉部分的面积.

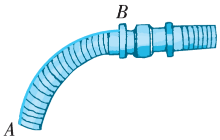


（第 3 题图）

习题 2.6

A 组

1. 如图，已知一段弯管的外轮廓线是一条圆弧 $\overset{\frown}{AB}$，弧长为 4.5 cm，圆弧的半径为 3 cm. 求这条弧所对的圆心角的度数(精确到 1°).



（第 1 题图）

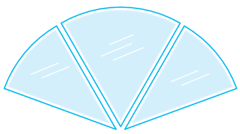
（第 2 题图）

2. 如图，8 位朋友均匀地围坐在圆桌旁共度佳节. 圆桌的半径为 80 cm，每人离圆桌的距离为 10 cm. 现又来了两名客人，每人向后挪动了相同的距离，再左右调整位置，使 10 人都坐下，并且 10 人之间的距离与原来 8 人之间的距离（即在圆周上两人之间的圆弧的长）相等，求每人应向后挪动的距离.

3. 如图为一扇木门上的三块扇形玻璃，已知它们的半径相同，而圆心角分别是 40°，60°，40°，每块玻璃均由金属边包裹，而所用金属边总长度为 228 cm.

（1）求扇形玻璃的半径(精确到 0.1 cm)；

（2）求三块扇形玻璃的总面积(精确到0.1 cm²).



（第 3 题图）

3. 连接 BC.

$\because \angle BAC=90°$,

$\therefore BC$ 是直径.

易求出扇形的半径

$AB=10\sqrt{2}$ cm.

$\therefore$ 被剪掉部分的面积为

$$\pi\times10^2-\frac{90\times\pi\times(10\sqrt{2})^2}{360}=50\pi.$$

习题2.6

A组

1. 设这条弧所对的圆心角为$n°$,

$\because 4.5=\dfrac{n\times\pi\times3}{180}$,

$\therefore n\approx86$.

2. 设每人应向后挪动 x cm，

则 $\dfrac{2\pi(80+10)}{8}=\dfrac{2\pi(80+10+x)}{10}$,

解得 $x=22.5$.

$\therefore$ 每人应向后挪动 22.5 cm.

3.（1）设扇形玻璃的半径为r，

则$228=\dfrac{40\times\pi\times r}{180}\times2+\dfrac{60\times\pi\times r}{180}+6r$,

$\therefore 228=\left(\dfrac{7\pi}{9}+6\right)r$,

$\therefore r\approx27.0$(cm).

（2）三块扇形玻璃的总面积为

$$\frac{40\times\pi\times27^2}{360}\times2+\frac{60\times\pi\times27^2}{360}\approx890.2(\text{cm}^2).$$

4. ∵$\overset{\frown}{AB}=6\pi$ cm，$\overset{\frown}{CD}=10\pi$ cm，$AC=12$ cm，

∴ $6\pi=\dfrac{n\times\pi\times r}{180}$，

$10\pi=\dfrac{n\times\pi\times(r+12)}{180}$，

∴ $n=60$，$r=18$ (cm).

∴ 蓝色部分的面积为

$\dfrac{1}{2}\times10\pi\times(18+12)-\dfrac{1}{2}\times6\pi\times18=96\pi(\text{cm}^2)$.

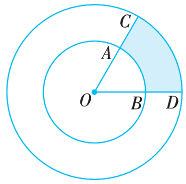
B组

5. (1) 易得 $\angle AOB=120°$，则拱形的弧长为 $\dfrac{120\times\pi\times20}{180}=\dfrac{40}{3}\pi$ (m).

(2) $S_{扇形OAB}=\dfrac{120\times\pi\times20^2}{360}=\dfrac{400}{3}\pi$ (m^2).

6. 由图知红色部分圆弧所对的四个角正好是四边形 $ABCD$ 的四个内角，和为 360°，所以红色部分的面积为 $\dfrac{360\times\pi\times1^2}{360}=\pi$ (cm^2).

4. 如图，两个同心圆被两条半径截得$\overset{\frown}{AB}=6\pi$ cm，$\overset{\frown}{CD}=10\pi$ cm，又 $AC=12$ cm，求图中蓝色部分的面积.



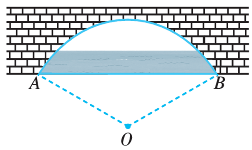
（第 4 题图）

B 组

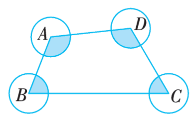
5. 如图为一座圆弧形拱桥的示意图，拱形的半径为 20 m，拱的跨度 AB 为 $20\sqrt{3}$ m.

求：(1) 拱形的弧长；

(2) 扇形 OAB 的面积.



（第 5 题图）



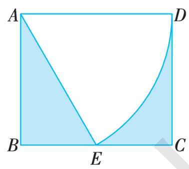
（第 6 题图）

6. 如图，以四边形 $ABCD$ 各个顶点为圆心，以 1 cm为半径画圆，求图中红色部分的面积之和.

7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$BC=2$，以点 A 为圆心，以 AD 长为半径画弧交 BC 于点 E.

(1) 若$\overset{\frown}{DE}$的长度为$\dfrac{2\pi}{3}$，求圆心角 $\angle DAE$ 的度数；

(2) 求图中绿色部分的面积之和.



（第 7 题图）

7. (1) ∵$\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{n\times\pi\times2}{180}$，∴ $n=60$. ∴$\angle DAE=60°$.

(2) 由(1)知$\angle BAE=30°$，∴ $BE=1$，$AB=\sqrt{3}$，

故绿色部分的面积之和为$2\times\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{3}\times2=2\sqrt{3}-\dfrac{2\pi}{3}$.

2.7 正多边形与圆

说一说

如图2-57，这些多边形有什么共同的特点？

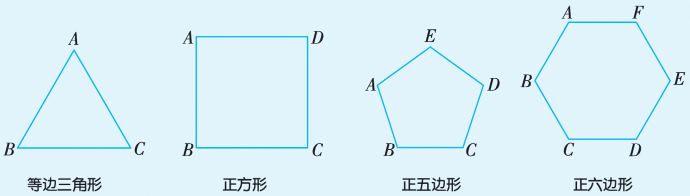


图 2-57

每个多边形的各边都相等，各内角也相等.

我们把各边相等，各内角也相等的多边形叫作**正多边形**(regular polygon).

动脑筋

如何作一个正多边形呢？

由于在同圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等，因此可以用量角器将圆心角 n 等分，从而使圆 n 等分，依次连接各等分点，可得到一个正 n 边形.

将一个圆 $n(n\geqslant 3)$等分，依次连接各等分点所得的多边形叫作这个圆的内接正多边形，这个圆是这个正多边形的外接圆，正多边形的外接圆的圆心叫作正多边形的中心.

教学目标

1. 了解正多边形的概念及正多边形与圆的关系.

2. 会通过等分圆心角的方法，画出所需的内接正多边形.

3. 能够用尺规作图，作出圆的内接正方形和内接正六边形.

4. 探索正多边形的轴对称性质和中心对称性质.

教学重点、难点

教学重点：正多边形的概念及正多边形与圆的关系，用尺规作图作出圆的内接正方形和内接正六边形，探索正多边形的轴对称性质和中心对称性质.

教学难点：了解正多边形与圆的关系，并利用尺规作图作出圆的内接正方形和内接正六边形，探索正多边形的轴对称性质和中心对称性质.

正多边形与圆的关系密切，尽管正多边形的概念在八下“四边形”一章已出现，教材仍通过举例，复习正多边形的概念.

对于其概念，教师要强调与“正三角形”概念的区别.

“动脑筋”栏目通过问题“如何作一个正多边形”，阐述了正多边形与圆的关系.接下来，给出了圆内接正多边形、正多边形的外接圆、正多边形的中心等概念.

通过等分圆心角进而等分弧的方法，画出所需的正多边形可看作通法，这其中的道理是：

$$\text{等分圆心角}\to\text{等分弧}\to\left.\begin{cases}\text{弦相等}\to\text{正多边形的边长相等}\\ \text{圆周角相等}\to\text{正多边形的各角相等}\end{cases}\right\}\to\text{多边形是正多边形}$$

而在具体操作中，我们往往想办法等分圆周（即把圆分成相等的一些弧），再依次连接各等分点，就得到所需的正多边形.

前面介绍了作圆的内接正多边形的通法. 事实上，作圆的内接正六边形和内接正方形还有其他的方法，如“做一做”和例题的呈现. 这里使用尺规作图的方法需强调的是：在尺规作图的教学中，仍要求学生会运用逻辑推理的方式来探索作法和步骤，做到有理有据. 作图完毕后，老师应引导学生说明作图的道理. 这其中的关键是说明为什么作出的是正多边形，而正多边形的定义是说理的线索.

需对教师说明的是，并不是任意等分圆都能使用尺规作图方法，一般该方法只能画出一些特殊的正多边形，例如正四边形、正八边形、正三边形、正六边形、正十二边形等.

做一做

已知⊙O 的半径为 r，求作⊙O 的内接正六边形.

因为正六边形每条边所对的圆心角为60°，所以正六边形的边长与圆的半径相等. 因此在半径为r的圆上依次截取等于r的弦，就可以将圆六等分.

作法：（1）作⊙O 的任意直径 BE，分别以 B，E 为圆心，以 r 为半径作弧，与⊙O 分别相交于点 A，C 和 F，D.

（2）依次连接 AB，BC，CD，DE，EF，FA，则六边形 $ABCDEF$ 就是所求作的⊙O 的内接正六边形，如图 2–58.

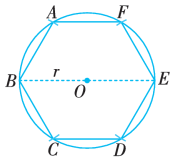


图 2–58

例　如图 2–59，已知⊙O的半径为 r，求作⊙O的内接正方形.

分析　作两条互相垂直的直径，就可以将⊙O四等分.

作法：（1）作直径 AC 与 BD，使 $AC \perp BD$.

（2）依次连接 AB，BC，CD，DA，则四边形 $ABCD$ 就是所求作的⊙O的内接正方形，如图 2–59.

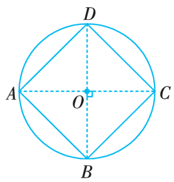


图 2–59

在生产设计中，人们经常会遇到等分圆的问题. 例如设计剪纸、齿轮、汽车轮毂等就是通过等分圆而得到的(如图2–60).

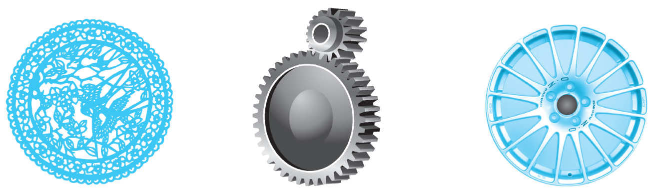


图 2–60

补充例题

1. 矩形是正多边形吗？菱形呢？正方形呢？为什么？

2. 各边相等的圆内接多边形是正多边形吗？各角相等的圆内接多边形呢？如果是，说明为什么；如果不是，举出反例.

【解】各边相等的圆内接多边形的各个角也相等，它是正多边形.

各角相等的圆内接多边形不是正多边形，例如矩形.

做一做

观察图 2-57 中的正多边形，哪些是轴对称图形？哪些是中心对称图形？

如果是轴对称图形，画出其对称轴；如果是中心对称图形，找出其对称中心.

图 2-57 中的正多边形都是轴对称图形.

图 2-57 中的正方形、正六边形既是轴对称图形，又是中心对称图形.

由于每个正多边形都有外接圆，因此利用圆的轴对称性可得到：

正多边形都是轴对称图形，一个正 n 边形共有 n 条对称轴，每条对称轴都通过正 n 边形的中心. 当 n 为奇数时，正 n 边形的 n 条对称轴都是顶点与中心的连线；当 n 为偶数时，正 n 边形有 $\frac{n}{2}$ 条对称轴是顶点与中心的连线，有 $\frac{n}{2}$ 条对称轴是过中心与边垂直的直线.

利用圆绕圆心旋转任意角度，所得图形都与自身重合这一性质，可得出：

一个正 n 边形，绕它的中心旋转 $\frac{360°}{n}$ 所得图形与这个正 n 边形重合，从而当 n 为偶数时，正 n 边形绕它的中心旋转 $\frac{n}{2}\cdot\frac{360°}{n}=180°$ 所得图形与这个正 n 边形重合. 因此正 n 边形(n 为偶数)也是中心对称图形，它的对称中心就是这个正 n 边形的中心.

练习

1. 已知⊙O 的半径为 2 cm，求作⊙O 的内接正方形和内接正六边形.

"做一做"栏目探索正多边形的轴对称性质和中心对称性质. 从探索过程看，总是利用圆的对称性质来加以分析，这足以说明正多边形与圆有着非常密切的联系.

教材限于篇幅，没有从实例出发一一阐述具体正多边形的轴对称性质和中心对称性质，而是比照圆，采取一种抽象的语言来描述. 为了增加学习的效果，建议教师多结合具体正多边形来说理，再逐步归纳，以帮助学生形成正确理解.

练习

1. 略.

资源拓展

用圆规分圆周为四等份

在教材中(例题)，我们学会了用尺规作图的方法将一个圆周四等分，现在如果仅给你一个圆规让你把圆周四等分，你会吗？ "用圆规分圆周为四等份" 这个问题，据说还是法国皇帝拿破仑提出的.

拿破仑出的题一定很难吗？这倒不一定，这个问题可以这样来解：如图 1，在已知圆心为 O 的圆周上任选一点 A，以 OA 为半径，从 A 点开始在圆周上依次截得 B，C，D 三点.再以 A，D 为圆心、AC 为半径画弧，两弧交于 E 点. 以 OE 为半径在圆周上依次截取，就可以把圆周四等分了.

下面我们来证明这种分法是正确的. 如图

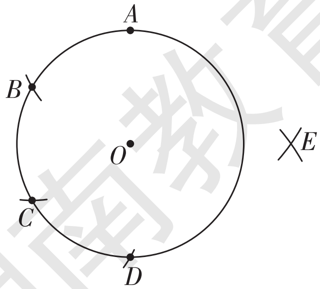


图 1

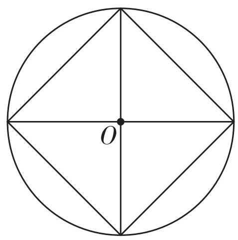


图 2

2. 注：第 1 幅图是先三等分圆周，再依次连接各等分点，得到圆的内接正三角形. 第 2 幅图是以圆的六等分点为圆心，圆的半径为半径作六条弧而得到.

习题2.7

A组

1. 作图略. 正三角形的边长为 $3\sqrt{3}$ cm.

2. 周长为$6r$，面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

B组

3. $\pi\times10^2-\frac{1}{2}\times10\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times6\approx314.2-259.8=54.4$.

4. (1) 边长为 2 cm；

(2) 剪去边长为2 cm的全等的三个正三角形.

2. 许多图案设计都和圆有关，观察下图，请利用等分圆的方法设计一幅图案.

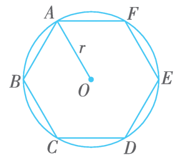
(第 2 题图)

习题 2.7

A 组

1. 作半径为3 cm的圆内接正三角形，并求这个内接正三角形的边长.

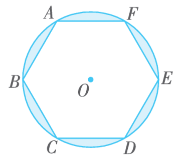
2. 如图，已知半径为r的圆内接正六边形$ABCDEF$，求这个正六边形的周长和面积.



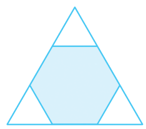
(第 2 题图)

B 组

3. 如图，正六边形$ABCDEF$内接于⊙O，⊙O的半径为10，求图中蓝色部分的面积(精确到0.1).



(第 3 题图)



(第 4 题图)

4. 如图，要把边长为 6 cm 的正三角形剪成一个最大的正六边形.

(1) 剪成的正六边形的边长是多少?

(2) 剪去怎样的三个三角形?

2，当把一个圆周四等分时，连接四等分点就构成一个圆内接正方形，这个正方形的边长为$\sqrt{2}R$. 接下来，我们只要证明 $OE=\sqrt{2}R$ 即可.

如图 3，∵ $AO=R$，

∴ $\overset{\frown}{AB}$ 等于圆周长的$\frac{1}{6}$，$\overset{\frown}{AC}$ 等于圆周长的$\frac{1}{3}$，AC 为圆内接正三角形的一边，即 $AC=\sqrt{3}R$.

∵ $AE=DE=\sqrt{3}R$，

∴ △AED 为等腰三角形，OE 为 AD 边的中垂线，

∴ $OE=\sqrt{AE^2-OA^2}=\sqrt{3R^2-R^2}=\sqrt{2}R$.

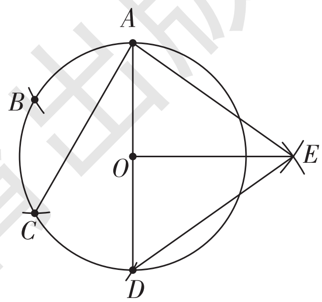


图 3

小结与复习

回顾

1. 请举例说明什么叫作圆，什么叫作弦，什么叫作弧.
2. 举例说明圆有哪些对称性质.
3. 在同圆或等圆中，如果圆心角相等，那么它们所对的弦和弧相等吗？
4. 在同圆中，同一条弧所对的圆周角与圆心角有什么关系？
***5.** 试描述垂直于弦的直径有什么性质.
6. 怎样过不在同一直线上的三个点作圆？
7. 直线与圆有哪几种位置关系？
8. 怎样判定一条直线是圆的切线？圆的切线有什么性质？
***9.** 圆的切线长有什么性质？
10. 什么叫作三角形的内心和外心？怎样作已知三角形的内切圆和外接圆？
11. 举例说明如何计算弧长与扇形面积.
12. 怎样作圆的内接正方形、正六边形？正多边形有哪些对称的性质？

本章知识结构

圆
- 圆的概念
- 圆的性质
  - 圆的对称性
    - 圆是中心对称图形
    - 圆是轴对称图形，任意一条直径所在直线都是它的对称轴
  - 圆心角、圆周角、弧与弦之间的关系
  - * 垂径定理
- 与圆有关的位置关系
  - 四边形的外接圆、三角形的外接圆
  - 直线与圆的位置关系 — 切线
    - * 切线长定理
    - 三角形的内切圆
- 弧长与扇形面积的计算
- 正多边形与圆
- 作图

本章是初中几何体系中重要的一章，由于涉及的概念多、性质多、判定方法多，复习课时，要通过问题的形式回顾本章所学的主要知识，提高学生的归纳、概括能力.

教师要帮助学生在头脑中建立起本章的知识结构图，特别是圆的对称性是理解圆的其他性质的重要基础. 同时，要从定理的角度进一步梳理圆的相关性质，使全章的内容形成一个完整的体系.

“注意”栏目的设置，旨在突出本章学习中学生容易忽视或容易出错的问题，在教学中应给予强调.

本章还涉及合情推理与演绎推理、分类、转化、数形结合等数学思想与方法，在复习中应结合实例给予提示与渗透.

注意

1. 圆既是中心对称图形，又是轴对称图形. 圆的许多性质都可以由它的对称性得出，因此，在学习本章时要充分利用圆的对称性.

2. 点、直线与圆的位置关系，体现了“形”与“数”的内在联系，因此，学习本章时需认真体会数形结合是认识数学的基本方法.

3. 各边都相等的三角形是正三角形，但对于边数 n 大于 3 的多边形，由各边相等不能推出各个角相等，所以需定义“各边相等，各角相等的多边形叫作正多边形”.

复习题 2

A 组

1. 判断（对的画“√”，错的画“×”）：

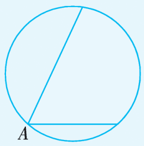
(1) 圆只有一条对称轴；（　）

(2) 直径是圆内最长的弦；（　）

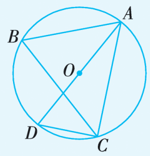
(3) 长度相等的两条弧是等弧；（　）

(4) 和半径垂直的直线是圆的切线.（　）

2. 如图，有一圆形展示厅，在其圆形边缘上的点 A 处安装了一台监视器，它的监控角度是 65°. 为了监控整个展厅，最少需在圆形边缘上共安装这样的监视器多少台？



（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. 如图，⊙O 是△ABC的外接圆，AD 是⊙O 的直径，连接 CD，若 $AD=3$，$AC=2$，求 $\cos D$ 的值. 你还能求出 $\cos B$ 的值吗？

复习题2

A组

1. （1）×；

（2）√；

（3）×；

（4）×.

2. 3 台.

3. ∵ AD 是⊙O 的直径，

∴ $\angle ACD=90°$.

在 Rt△ACD 中，

$$\cos D=\frac{DC}{AD}=\frac{\sqrt{3^2-2^2}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

又 ∵ $\angle D$ 与 $\angle B$ 为$\overset{\frown}{AC}$ 所对的圆周角.

∴ $\angle D=\angle B$，

则 $\cos B=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

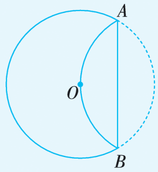
*4. 如图，半径为 4 的⊙O 中，有弦 AB，以 AB为折痕对折，劣弧恰好经过圆心 O，求弦 AB的长度.

5. 已知 Rt△ABC 的两直角边的长分别为 6 cm，8 cm，求它的外接圆的半径.

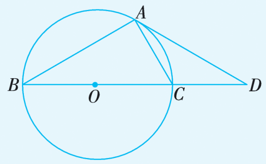
6. 如图，已知 BC 是⊙O 的直径，点 D 为 BC 延长线上一点，点 A 为圆上一点，$AB=AD$，$\angle ADB=30°$.

（1）求证：AD 是⊙O 的切线；

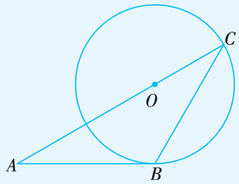
（2）若⊙O 的半径为 2，求$\overset{\frown}{AC}$ 的长.



（第 4 题图）



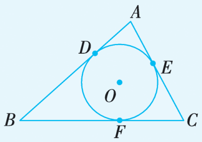
（第 6 题图）



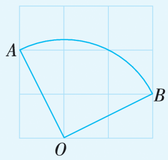
（第 7 题图）

7. 如图，线段 AB 与⊙O 相切于点 B，AO 的延长线交⊙O 于点 C，连接 BC，若$\angle ABC=120°$，$OC=3$，求$\overset{\frown}{BC}$ 的长.

*8. 如图，⊙O是△ABC的内切圆. 求证：$AB+CF=AC+BF$.



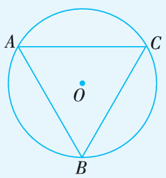
（第 8 题图）



（第 9 题图）

9. 如图，在3×3 的方格纸中，每个小方格都是边长为 1 的正方形，O，A，B是格点，求$\overset{\frown}{AB}$ 的长及扇形 OAB的面积.

10. 如图，若⊙O 的内接正三角形 ABC 的边长为 12 cm，求图中蓝色部分的面积.



（第 10 题图）

***4.** 过 O 向 AB 作垂线，垂足为 D. 显然 OD 为半径的一半长，即为 2.

连接 AO，在 Rt△AOD 中，$AD=2\sqrt{3}$，则弦 AB 的长度为 $2AD=4\sqrt{3}$.

5. $r=5$ cm.

6.（1）连接 AO.

∵ BC 是⊙O 的直径，

∴ $\angle BAC=90°$.

∵ $AB=AD$，$\angle ADB=30°$，

∴ $\angle B=\angle ADB=30°$.

又 ∵ $OB=OA$，

∴ $\angle OAB=30°$.

∴ $\angle AOC=60°$.

在△OAD 中，$\angle AOD=60°$，$\angle D=30°$，

∴ $\angle OAD=90°$，即 $OA\perp AD$.

∴ AD 是⊙O 的切线.

（2）$l_{\overset{\frown}{AC}}=\dfrac{60\times\pi\times2}{180}=\dfrac{2\pi}{3}$.

7. 连接 OB.

∵ AB 与⊙O 相切于点 B，

∴ $\angle OBA=90°$.

又 $\angle ABC=120°$，

∴ $\angle OBC=30°$.

则 $\angle BOC=180°-2\times30°=120°$.

∴ $l_{\overset{\frown}{BC}}=\dfrac{120\times\pi\times3}{180}=2\pi$.

***8.** ∵ ⊙O 是△ABC 的内切圆，

∴ $AD=AE$，$BD=BF$，$CF=CE$.

∴ $AB+CF=AD+BD+CF=AE+BF+CE=AC+BF$.

9. 易证两个小直角三角形全等，则$\angle AOB=90°$，直角三角形的斜边长为$\sqrt{5}$.

$l_{\overset{\frown}{AB}}=\dfrac{\sqrt{5}\,\pi}{2}$，$S_{扇形OAB}=\dfrac{5\pi}{4}$.

10. 易得圆半径为$4\sqrt{3}$ cm，所以蓝色部分的面积为

$\pi\times(4\sqrt{3})^2-\dfrac{1}{2}\times12\times12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=48\pi-36\sqrt{3}$ (cm^2).

B组

11. ∵ $AB=DC$，

∴ $\angle BCA=\angle CBD$.

∵ $\angle BAC$ 与 $\angle BDC$ 所对的弧为 $\overset{\frown}{BC}$，

∴ $\angle BAC=\angle BDC$.

又∵ BC 边公共，

∴ $\triangle ABC\cong\triangle DCB$.

*__12.__ 如图，过 O 作 $EF\perp AB$ 于点 E，交 CD 于点 F，

∵ $AB\parallel CD$，∴ $EF\perp CD$.

∴ $EF=7$，$EB=3$，$FD=4$.

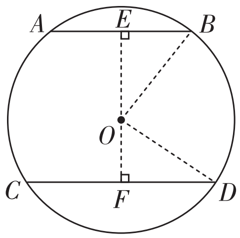
连接 OB，OD.

设 $EO=x$，则 $OF=7-x$，

因此 $x^2+3^2=(7-x)^2+4^2$，

解得 $x=4$.

∴ ⊙O 的半径为 5.



13. 连接 OD.

∵ $DO=OA$，∴ $\angle 1=\angle 2$.

又 ∵ $AD\parallel OC$，

∴ $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$.

∴ $\angle 3=\angle 4$.

在 $\triangle ODC$ 与 $\triangle OBC$ 中，

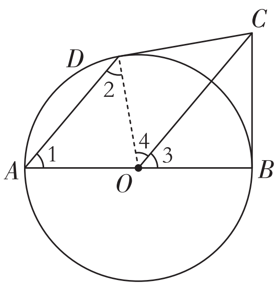
$$\because\begin{cases}OD=OB,\\ \angle 4=\angle 3,\\ OC\text{ 边公共},\end{cases}$$

∴ $\triangle ODC\cong\triangle OBC$.

即 $\angle ODC=\angle OBC=90°$.

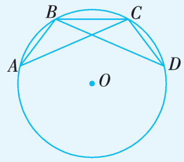
又 ∵ OD 是⊙O 的半径，DC 经过点 D，

∴ DC 是⊙O 的切线.

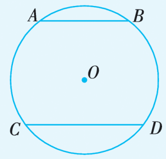


B 组

11. 如图，点 A，B，C，D 是⊙O上的点，且 $AB=DC$，$\triangle ABC$与$\triangle DCB$全等吗？为什么？



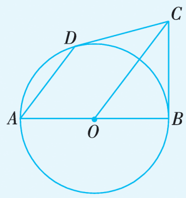
（第 11 题图）



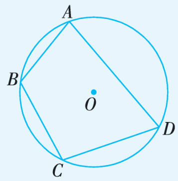
（第 12 题图）

*__12.__ 如图，⊙O 的弦 $AB\parallel CD$，且 $AB=6$，$CD=8$，AB 与 CD 的距离为 7，求⊙O 的半径.

13. 如图，已知 AB 是⊙O 的直径，BC 与⊙O 相切于点B，⊙O 的弦 AD 平行于 OC. 求证：DC 是⊙O 的切线.



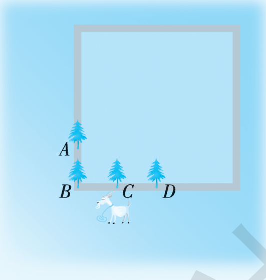
（第 13 题图）



（第 14 题图）

14. 如图，四边形 $ABCD$ 为⊙O的内接四边形，$\angle A=80°$，若圆周长为 18π，求 $\overset{\frown}{BAD}$ 的长度.

15. 如图是边长为 12 m 的正方形池塘，周围是草地，池塘边 A，B，C，D处各有一棵树，且 $AB=BC=CD=3$ m. 现在用长 4 m 的绳子将一头羊拴在其中的一棵树上，为了使羊在草地上活动区域的面积最大，应将绳子拴在哪棵树上呢？并求出最大面积.



（第 15 题图）

14. 连接 BO，DO.

∵ 四边形 $ABCD$ 为⊙O 的内接四边形，$\angle A=80°$，

∴ $\angle BCD=180°-80°=100°$.

又 ∵ 圆周角$\angle BCD$ 与圆心角$\angle BOD$ 所对应的弧为$\overset{\frown}{BAD}$，

∴ $\angle BOD=2\angle BCD=200°$.

∴ $l_{\overset{\frown}{BAD}}=\dfrac{200}{360}\times 18\pi=10\pi$.

15. 若将绳子拴在 A 树，则活动面积为 $8\dfrac{1}{4}\pi$ m²；

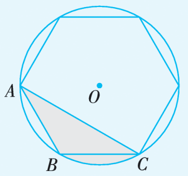
若将绳子拴在 B 树，则活动面积为 12π m²；

若将绳子拴在 C 树，则活动面积为 $8\dfrac{1}{4}\pi$ m²；

若将绳子拴在 D 树，则活动面积为 8π m²；

因此，应将羊拴在 B 树，此时面积最大，为 12π m².

16. 如图，在半径为 6 cm 的圆内画一个正六边形，求阴影部分的面积.

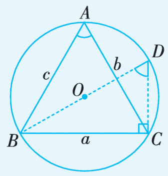


（第 16 题图）

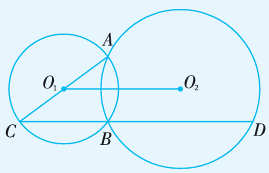
C 组

17. 如图，在锐角三角形 ABC 中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，其外接圆的半径为R.

求证：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.（提示：连 BO 并延长交⊙O于 D，连CD）



（第 17 题图）



（第 18 题图）

18. 如图，⊙O_1 与⊙O_2 相交于 A，B 两点，连接 AO_1 并延长交⊙O_1 于点 C，连接 CB 并延长交⊙O_2 于点 D. 若 $O_1O_2=2$，求 CD 的长.

16. $S_{阴影}=S_{扇形OBC}=6\pi$（cm^2）.

C组

17. 连接 BO，并延长交⊙O 于 D，连 CD.

则直径 BD 所对的圆周角 $\angle BCD=90°$.

在 Rt△BCD 中，$BD=2R$，

$\sin D=\frac{BC}{BD}=\frac{a}{2R}$.

又 $\angle A$ 与 $\angle D$ 所对的弧为 $\overset{\frown}{BC}$，

∴ $\angle A=\angle D$.

∴ $\frac{a}{\sin A}=2R$.

同理，可连接 AO，并延长交⊙O 于 E，连 EC，则 $\angle ACE=90°$.

在 Rt△ACE 中，$\sin E=\frac{b}{2R}$.

又 $\angle E=\angle B$，

∴ $\sin B=\frac{b}{2R}$，即 $\frac{b}{\sin B}=2R$.

同理可证 $\frac{c}{\sin C}=2R$.

∴ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

18. 连接AB，AD.

∵ AC 为⊙O_1 的直径，

∴ $\angle ABC=90°$，

则$\angle ABD=90°$.

∴ AD 为⊙O_2 的直径，

即 AD 经过圆心 O_2.

在△ACD 中，O_1O_2 为△ACD 的中位线，

又 $O_1O_2=2$，

∴ $CD=4$.

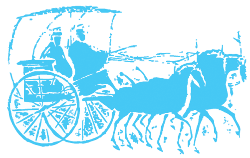
古往今来，优美的对称性曾激起无数科学探索者创造的灵感．在具有对称性的平面图形中，圆这个最简单的曲线图形最令人惊叹．它是唯一具有无穷多条对称轴的轴对称图形，它又是旋转对称图形，这是圆的独特性质，怪不得圆被称为最美的平面图形．本章较为系统地介绍了圆的概念和相关性质，而“数学与文化”栏目介绍了古往今来的人们对圆的认识的一些史料，限于篇幅，不能详尽介绍，建议学生在阅读本文的基础上，还可以利用课外时间查阅资料进一步丰富对圆的认识，在感受数学文化熏陶的同时，感悟数学为推动人类文明发展所起到的独特作用，激发其学习数学的兴趣．

数学与文化

圆的再认识

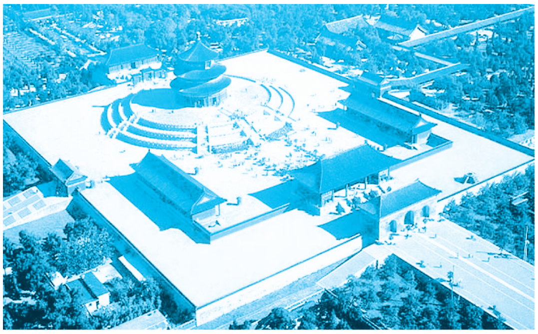
圆是我们生活中最常见的几何形状．当人类仰望天空，太阳和圆月总给我们以圆的形象；而雨滴落在池塘里，圆形的涟漪便不断扩大．翻阅人类的历史，几乎所有的古老文明都留下了众多对圆认识的足迹．18 000 年前的山顶洞人曾经在兽牙上钻出圆孔，到了陶器时代，人们开始制作出许多圆形陶器．大约在 6 000 年前，美索不达米亚人做出了世界上第一个轮子——圆形木盘．大约在 4 000 多年前，人们将圆的木盘固定在木架下，这就成了最初的车子．

2 000 多年前，中国的墨子在《墨经》中给圆下了一个定义：“圆，一中同长也．”意思是说：圆有一个圆心，圆心到圆周的长都相等．这个定义比古希腊数学家欧几里得给圆下定义还要早．



说到圆，就不能不谈起数千年来被众多数学家所研究的圆周率．美索不达米亚人在做出世界上第一个轮子的时候，就已知道圆周率是 3．中国魏晋时期的刘徽于公元 263 年给《九章算术》作注时，发现“周三径一”只是圆内接正六边形周长和直径的比值．他创立了割圆术，认为圆内接正多边形边数无限增加时，周长就越逼近圆周长．他算到圆内接正 3 072 边形时，可得 $\pi=\frac{3\,927}{1\,250}$．刘徽把极限的概念运用于解决实际数学问题中，这在世界数学史上也是一项重大的成就． 祖冲之(公元 429—500 年）在前人的计算基础上继续推算，求出圆周率在 3.141 592 6 与 3.141 592 7 之间，这一成果使得他成为世界上最早将圆周率精确到小数点后第 7 位的人．在欧洲，直到 16 世纪，德国人鄂图和安托尼兹才得到这个数值．现在有了电子计算机，圆周率已经算到了小数点后 12 400 亿位了．

随着人们对圆的认识不断深入，圆也被各民族文化所选择、运用．中国古人崇尚“方地为舆，圆天为盖”，因此圆在中国古建筑中有比较明显的体现．例如天坛等古代祭神的场所便采用了圆形的屋顶，这给人们一种雄武、神圣和圆润辉煌之感．



圆的应用也大量见于雕塑、舞蹈等．例如舞蹈家们在长期的舞蹈实践与研究中，发现以“圆”为中心设计舞蹈动作，舞姿优美．这从唐代敦煌壁画乃至近现代的芭蕾舞、体操运动员的动作中，我们都可以看到这种回旋圆融的运动痕迹．

人们也常借助圆的均匀、对称的特性来表达公正、公平的寓意．奥运会的五环标志，象征着全球五大洲人民，通过体育竞技构筑友谊；国际上重大会议都以圆桌会议的形式举行，此举在于不分大国、小国，国家之间一律平等．

随着时代的发展，“圆”也渗透进我们生活的方方面面，这也寓意着人们一直在渴望追求圆满的生活与人生．

Ⅲ. 本章相关链接

圆周率 π 的历史

圆周率，数学中的重要常数之一，在欧氏平面上，圆的周长和直径的比称为圆周率，记为 π. 数 π 的常用值取为 3.1416，它在天文、数学、物理、工程等学科中都有着广泛的应用.

由于圆周率所涉及的计算面很广，在数学研究的历史进程中，世界各国都曾有许多数学家为此做出贡献. 对 π 的研究最早的文献记载，首推古埃及的不知名数学家，约公元前 1650 年，莱因德纸草书中就有对于圆周率的记载，译为今文是

$$\pi=\left(\frac{4}{3}\right)^4\approx 3.160.$$

约公元前 240 年，阿基米德（Archimedes）利用计算圆内接和外切正 96 边形周长的方法，求得

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}.$$

约公元 150 年，托勒密（Ptolemy. C. ）用 60 进制记数法表示出

$$\pi\approx 38'30''=3+\frac{8}{60}+\frac{30}{60^2}=\frac{377}{120}\approx 3.141\ 6.$$

在中国，《周髀算经》载有中国远古就有的“周三径一”之说，取 π 的经验值为 3. 魏晋时代数学家刘徽运用类似于阿基米德算法的割圆术，先算到圆内接 192 边形面积，求得

$$3.14+\frac{64}{625}\times 10^{-2}<\pi<3.14+\frac{169}{625}\times 10^{-2},$$

从而得到准确至小数点后两位的 π=3.14 的值，他尚不满意这一结果，又提出：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣.”刘徽用他创造的圆幂法进而推得更精确的比率：

$$\text{圆幂}:\text{外方幂}:\text{内方幂}=3\ 927:5\ 000:2\ 500$$

及

$$\text{圆周}:\text{直径}=3\ 927:1\ 250.$$

从而得到

$$\pi=\frac{3\ 927}{1\ 250}\approx 3.141\ 6.$$

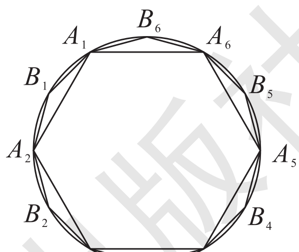


图 1

后人把 $\pi=\frac{3\ 927}{1\ 250}$ 称为徽率. 这时他比较满意的说：“若此者，盖尽其纤微矣！”但他仍怕有误，锲而不舍，又用割圆术继续算至圆内接 3 072 边形，得

$$\pi=S_{3\ 072}=768\times(a_{768}\times R)\approx 3.141\ 59\approx 3.141\ 6.$$

式中 a 为内接 3 072 边形的边长，R 为圆半径. 后来，中国南北朝（公元 420—589）时代的杰出科学家祖冲之继承了刘徽的数学思想，求得

$$3.141\ 592\ 6<\pi<3.141\ 592\ 7.$$

并得到 π 的两个重要近似值：

$$\text{“约率”(也称疏率)}\ \frac{22}{7}\ \text{和“密率”}\ \frac{355}{113}.$$

祖冲之用盈亏二限来限定一个尚未完全知道的数值范围是一种创见，盈亏二限的平均值 3.141 592 65 已精确到小数点后第 8 位，是当时世界上的最佳结果. 有学者认为祖冲之要算出圆内接正 24 576 边

形的周长，才能得出小数点后第 7 位那样精确的数字. 计算这样一个圆内接正多边形的周长是相当繁杂的，除去加、减、乘、除，还要乘方和开方. 开方尤其麻烦，估计他计算的时候，要保留 16 位小数，进行 22 次开方. 当时还没有算盘，只能用一种叫作“算筹”的小竹棒摆来摆去进行计算，可见祖冲之计算圆周率花费劳动之大！因此，三上义夫提出把$\frac{355}{113}$命名为祖率，以纪念祖冲之的贡献.

圆周率计算的重大突破，肇始于寻求 π 的解析表达式. 1579 年，韦达（Viete，F. ）从圆内接正多边形与圆周率的关系的分析中得出如下关系式

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots.$$

虽然此公式在计算上要多次开平方而不方便，但他开创了一条用解析式计算圆周率 π 值的道路.

1671 年，格雷果里（Gregory，J. ）给出下面计算 π 值的无穷级数

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots,$$

他首创了用无穷级数计算 π 值的新方法，人们将此级数命名为格雷果里级数.

1676 年，牛顿（Newton，I. ）也给出了类似的级数

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots.$$

1706 年，梅钦（Machin，J. ）提出了计算 π 值的梅钦公式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}.$$

从而使计算 π 值的精确度迅速提高，他用此公式将 π 值的计算首次突破 100 位大关. 近代计算 π 的近似值利用幂级数的展开式

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\quad(|x|\leqslant 1).$$

1761 年，朗伯（Lambert，J. H. ）利用连分数展开式第一次证明了 π 是无理数. 1882 年，林德曼(Lindemann,(C. L.) F. von）利用关系式 $e^{\pi i}=-1$，第一次证明了 π 是超越数. 对于圆周率的符号，最早有人采用方框□或希伯来文字母 Π（读作 men）来表示圆周率，意即化圆为方. 1600 年，奥特雷德(Oughtred，W. ）首先使用π/δ表示圆周率，他的依据为 π 是希腊文圆周一词的第一个字母，奥特雷德用它来表示圆周长，而δ是希腊文直径的第一个字母，奥特雷德用它来表示直径，所以，π/δ理应表示圆周率，但人们在推求圆周率的过程中，常设$\delta=1$，于是π/δ就可简记为 π 了. 1706 年，琼斯(Jones，W. ）首先采用 π 表示圆周率，1736 年，经欧拉（Euler，L. ）的提倡和推广使用，才得以普遍应用至今.

无视直觉

数学公式来自生产与生活实践，再经过提炼而升华为理论，变为“金科玉律”，因而在绝大多数场合，它们能同人的直觉吻合一致，十分完美. 然而，在极度个别的情形下，“牙齿同舌头也会打架”，两者也要闹摩擦，产生一些矛盾.

请看一个由数学老师“精心炮制”出来的妙题，有两个三角形，其边长分别为 17，25，26 与 17，25，28，求它们的内切圆半径.

题目看来十分平淡无奇，貌不惊人，是个计算题而非证明题，求内切圆半径无非是“例行公事”地照现成公式来算一算.

有些人也许已经忘记了内切圆半径的公式，不过，临时推导一下也并不困难.

如图 2，设$\triangle ABC$的三边之长分别为a，b，c，内切圆半径为r，于是

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}+S_{\triangle OAB}\\
&=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc\\
&=\frac{1}{2}r\ (a+b+c)\ .
\end{aligned}
$$

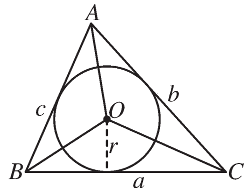


图 2

习惯上，用p表示半周长$\frac{1}{2}(a+b+c)$，

从而得出$S=rp$，即$r=\frac{S}{p}$.

但根据有名的三斜求积公式也叫海伦-秦九韶公式（海伦（Helon）生卒年代无可考，活跃在公元 62 年前后；秦九韶，南宋人（约 1202 — 1261）），

$$\text{三角形的面积}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ,$$

于是内切圆半径

$$r=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\ .$$

接下来的工作便是不动脑筋的代公式了，结果如下：

（1）以 17，25，26 为边长的三角形. $p_1=34$，

$$r_1=\sqrt{\frac{17\times 9\times 8}{34}}=\sqrt{36}=6.$$

（2）以 17，25，28 为边长的三角形，$p_2=35$，

$$r_2=\sqrt{\frac{18\times 10\times 7}{35}}=\sqrt{36}=6.$$

所以$r_1=r_2$.

这个结果却令人目瞪口呆，大吃一惊，简直不敢相信，因为这是完全违反直觉的.

很明显，在上面的两个三角形中，有两边完全相同，而第三边却有长有短，一为 26，一为 28；凭人们的“直觉”来推想，第三边较长的那个三角形可以完全把第三边较短的三角形“包容”在内，而所谓“内切圆”则是与各边长密切相关的. 因此，百分之九十九点九的人会认为，内切圆的半径虽然彼此相差不大，但总有些微小差别，绝对不会是相等的.

然而公式却明白无误，毫不含糊地告诉我们：两个三角形的内切圆的半径百分之百的相等，它们之间连一点微小差别都没有！

人们究竟应该相信数学，还是相信直觉？

事情并没有完，还可以修改数据，搞得更迷惑人. 设有两个三角形，有两边的长度完全相等，都是 97 与 169，但第三边的长相差悬殊，一个为 122，另一个则长达 228. 试问：在这样的情形下，内切圆半径还能相等吗？

真是不算不知道，一算吓一跳了！计算如下：

（1）$p_1=194$，

$$r_1=\sqrt{\frac{97\times 25\times 72}{194}}=\sqrt{25\times 36}=30.$$

（2）$p_2=247$，

$$r_2=\sqrt{\frac{150\times 78\times 19}{247}}=\sqrt{150\times 6}=\sqrt{900}=30.$$

所以$r_1=r_2$.

通过根号底下的约分，可以看出数据的设计多么巧妙.