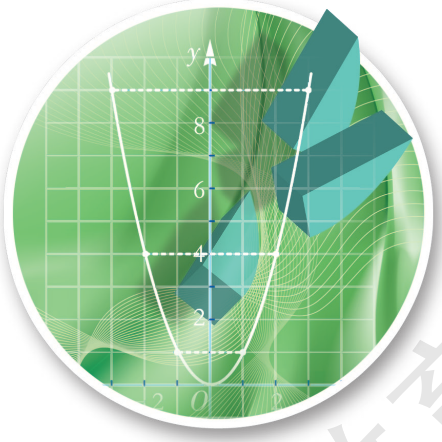
义务教育教科书

数学

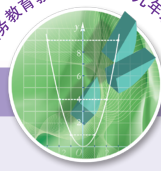
S H U X U E

九年级下册



湖南教育出版社

义务教育教科书 数学 九年级下册



主　　编：严士健　黄楚芳
执行主编：丘维声
副 主 编：赵雄辉　胡　旺
编　　委：肖果能　袁宏喜　胡伟红

理性之光照亮数学之旅

亲爱的同学们：

过去两年多的数学旅程早已将我们在数学天空中飞翔的双翼锻炼得坚实有力。未来，在越来越广阔和复杂的探索中，我们更需要理性之光的照耀与引领。

在本书中，我们将学习“二次函数”，通过建立函数模型、研究二次函数的性质以及应用，将使我们体会到：生活中有数学，数学在生活中有用。在“圆”中，我们将通过观察、探索、猜想并论证这一思维方式来学习圆的诸多性质，丰富对“最美的平面图形”的认识。在“投影与视图”中，我们将从生活中的影子出发逐步展开对投影的认识，并借助投影来认识视图，还将知道如何运用最合理的投影方法来反映物体的全貌。在“概率”中，我们将了解到现实世界除了有确定性现象外，还有许多随机现象，而学习概率将帮助我们更好地认识随机现象中隐含的规律。在这里，我们将通过大量的有趣案例、数学试验来理解概率的意义，并解决一些简单的实际问题。

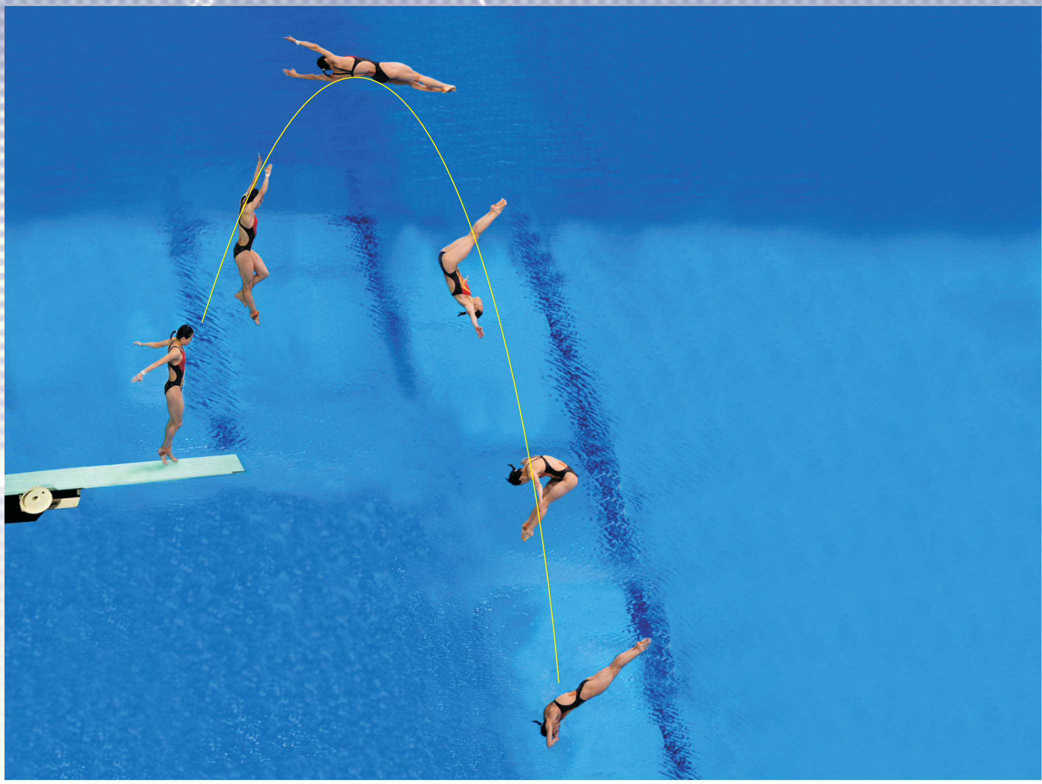
当然，在我们同行的路途中，“综合与实践”“IT 教室”“数学与文化”都不容错过，因为任何缜密的思维，只有在通往实践的过程中，才具备非凡的价值。在这里，我们将感受到数学的威力与无穷魅力！

要学好这些内容，需要我们充满信心，养成良好的学习习惯，克服许许多多的困难。要善于回忆学过的知识与方法，并找到适合自己的数学学习方法。同学们可以依照书中的栏目设置，多“观察”“探究”“动脑筋”“说一说”“做一做”“议一议”，多动手试一试，从熟悉的生活事例中认识数学，把数学应用到你的生活中去，不断提高自己探索问题的能力。

同学们，让我们在深入认识数学的旅途中努力吧！

从最平凡的真理中，探索到最深奥的秘密，这正是数学之旅最富吸引力的生命之光。

Contents 目录



第1章

二次函数

物体运动的轨迹并不总是呈直线形的，有时会成为一条曲线．例如在跳水比赛中，运动员在空中划过一道优美的曲线，像这样的曲线与我们将要学习的二次函数的图象很相似．

那么什么是二次函数呢？二次函数的图象有什么特征？二次函数具有哪些性质？学完本章知识，你将能回答上述问题，并能运用二次函数的知识去解决一些实际问题．

1.1 二次函数

动脑筋

学校准备在校园里利用围墙的一段和篱笆墙围成一个矩形植物园，如图 1-1 所示．已知篱笆墙的总长度为 100 m，设与围墙相邻的一面篱笆墙的长度为 x(m)，那么矩形植物园的面积 S(m^2) 与 x 之间有何关系？

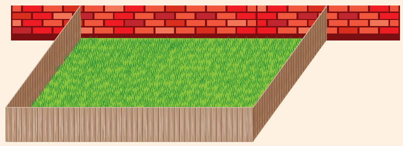


图 1-1

由于与围墙相邻的一面篱笆墙的长度为 x m，可知，与围墙相对的一面篱笆墙的长度为 $(100-2x)$ m．于是矩形植物园的面积 S 与 x 之间有如下关系：

$$S=x(100-2x),\quad 0<x<50,$$

即
$$S=-2x^2+100x,\quad 0<x<50. \qquad ①$$

①式表示植物园面积 S 与围墙相邻的一面篱笆墙长度 x 之间的关系，而且对于 x 的每一个取值，S 都有唯一确定的值与它对应，即 S 是 x 的函数．

动脑筋

某型号笔记本电脑两年前的销售价为 6 000 元．现降价销售，若每年的平均降价率为 x，怎样用 x 来表示该型号电脑现在的售价 y(元)？

笔记本电脑每次降价后的售价都是降价前的 $(1-x)$ 倍，于是我们得到售价 y 与平均降价率 x 之间有如下的关系：

$$y=6\,000(1-x)^2,\quad 0<x<1,$$

即
$$y=6\,000x^2-12\,000x+6\,000,\quad 0<x<1. \qquad ②$$

②式表示两年后的售价 y 与平均降价率 x 之间的关系，而且对于 x 的每一个取值，y 都有唯一确定的值与它对应，即 y 是 x 的函数．

说一说

①式与②式有什么共同点？它们与一次函数的表达式有什么不同？

像①、②式那样，如果函数的表达式是自变量的二次多项式，那么，这样的函数称为**二次函数**(quadratic function)，它的一般形式是

$$y=ax^2+bx+c\ (a,\ b,\ c\ 是常数，a\neq 0).$$

其中 x 是自变量，a，b，c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项.

二次函数的自变量的取值范围是所有实数. 但在实际问题中，它的自变量的取值范围会有一些限制. 例如，上面第一个例子中，$0<x<50$，在第二个例子中，$0<x<1$.

例 如图 1-2，一块矩形木板，长为 120 cm、宽为 80 cm，在木板 4 个角上各截去边长为 x(cm)的正方形，求余下面积 $S(\text{cm}^2)$与 x 之间的函数表达式.

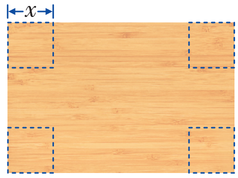


图 1-2

分析 本问题中的数量关系是：

木板余下面积 = 矩形面积 − 截去面积.

解 木板余下面积 S 与截去正方形边长 x 有如下函数关系：

$$S=120\times 80-4\times x^2=-4x^2+9\ 600,\quad 0<x\leqslant 40.$$

练习

写出下列函数的表达式，并指出哪些是二次函数，哪些是一次函数，哪些是反比例函数.

(1) 正方形的面积 S 关于它的边长 x 的函数；

(2) 圆的周长 C 关于它的半径 r 的函数；

(3) 圆的面积 S 关于它的半径 r 的函数；

(4) 当菱形的面积 S 一定时，它的一条对角线的长度 y 关于另一条对角线的长度 x 的函数.

习题 1.1

A 组

1. 下列函数中，哪些是二次函数，哪些是一次函数，哪些是反比例函数？

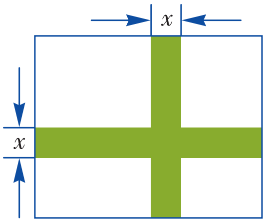
(1) $y=3x+1$；　　(2) $y=3x^2+2x+1$；

(3) $y=3x^2+1$；　　(4) $y=-3x^2+x$；

(5) $y=\frac{1}{3x}$；　　(6) $y=\frac{1}{3}x^2$.

2. 一长方体水池深2 m，底面矩形的周长为8 m，设底面一边长为x(m)，水池的容积为y(m^3)，求y关于x的函数表达式.

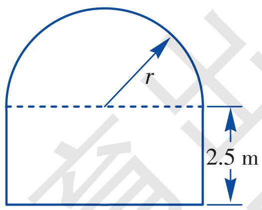
3. 如图，一块矩形田地长 100 m，宽 80 m，现计划在田地中修 2 条互相垂直且宽度为x(m)的小路，剩余面积种植庄稼，设剩余面积为y(m^2)，求y关于x的函数表达式，并写出自变量的取值范围.



(第 3 题图)

B 组

4. 如图为一隧道的截面示意图，它的上部是一个半圆，下部是一个矩形，且矩形的竖直的边长为 2.5 m. 设隧道截面积为S(m^2)，截面半圆的半径为r(m)，试写出S关于r的函数表达式.



(第 4 题图)

1.2 二次函数的图象与性质

我们已经学习过用描点法画一次函数、反比例函数的图象，如何画一个二次函数的图象呢？

探究

画二次函数 $y=x^2$ 的图象.

列表： 对于二次函数 $y=x^2$，其自变量 x 可以取任意实数. 因此让 x 取 0 和一些互为相反数的数，并且算出相应的函数值，列成下表：

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

描点： 在平面直角坐标系内，以 x 取的值为横坐标，相应的函数值为纵坐标，描出相应的点. 如图 1–3.

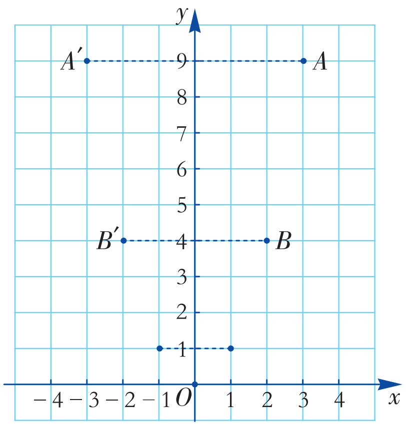


图 1–3

观察图 1–3，点 A 与点 A'，点 B 与点 B'，…，它们有什么关系？取更多的点试试，你能得出函数 $y=x^2$ 的图象关于 y 轴对称吗？

观察图 1–3，y 轴右边描出的各点，当横坐标增大时，纵坐标有什么变化？y 轴右边的所有点都具有纵坐标随着横坐标的增大而增大的特点吗？

可以证明 $y=x^2$ 的图象关于 y 轴对称；图象在 y 轴右边的部分，函数值随自变量取值的增大而增大，简称为“右升”.

连线：根据前面的分析，我们可以用一条光滑曲线把原点和 y 轴右边各点顺次连接起来；然后利用对称性，画出图象在 y 轴左边的部分（把 y 轴左边的点和原点用一条光滑曲线顺次连接起来）. 这样就得到了 $y=x^2$ 的图象，如图 1–4.

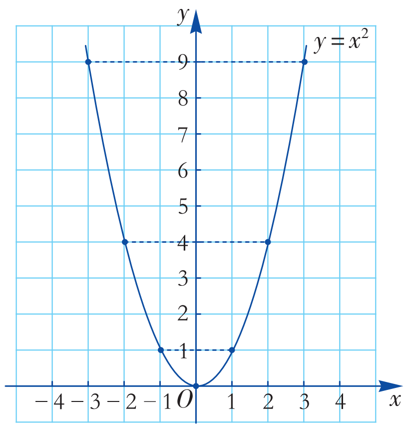


图 1–4

观察

观察图 1–4，函数 $y=x^2$ 的图象除了具有关于 y 轴对称和“右升”外，还具有哪些性质？

从图 1–4 中可以看出，二次函数 $y=x^2$ 的图象是一条曲线，它的开口向上，对称轴与图象的交点是原点(0，0)；

图象在对称轴左边的部分，函数值随自变量取值的增大而减小，简称为“**左降**”；

当 $x=0$ 时，函数值最小，最小值为 0.

一般地，当 $a>0$ 时，$y=ax^2$ 的图象都具有上述性质. 于是我们画 $y=ax^2$ ($a>0$)的图象时，可以先画出图象在 y 轴右边的部分，然后利用对称性，画出图象在 y 轴左边的部分. 在画右边部分时，只需“列表、描点、连线”三个步骤.

例 1 画二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象.

解 因为二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象关于 y 轴对称，因此列表时，自变量 x 可以从原点的横坐标 0 开始取值.

列表：

x	0	1	2	3	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	…

描点和连线：画出图象在 y 轴右边的部分. 如图 1–5(1).

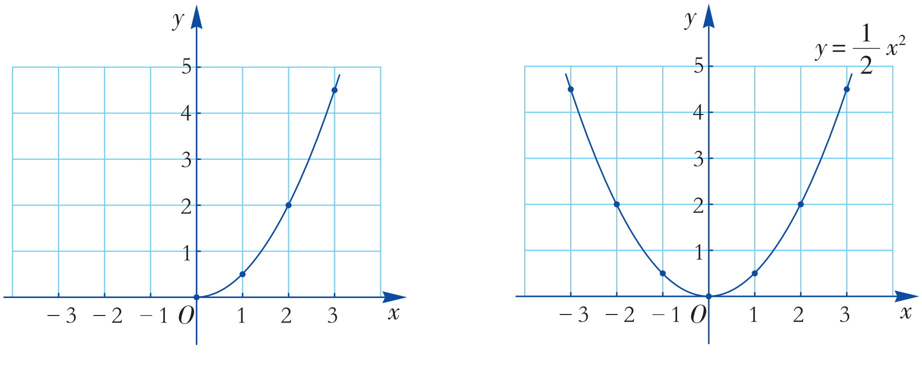


图 1–5

利用对称性，画出图象在 y 轴左边的对称点，并用一条光滑曲线把 y 轴左边的点和原点顺次连接起来，这样就得到了 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象. 如图 1–5(2).

练习

1. 画出二次函数 $y=6x^2$ 的图象，并填空：

(1) 图象的对称轴是 __________，对称轴与图象的交点是 __________；

(2) 图象的开口向 __________；

(3) 图象在对称轴左边的部分，函数值随自变量取值的增大而 ______；图象在对称轴右边的部分，函数值随自变量取值的增大而 _______.

2. 在同一直角坐标系中画出二次函数 $y=3x^2$ 及 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的图象，并比较它们的共同点与不同点.

探究

我们已经会画 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象，能不能从它得出二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象呢?

在 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象上任取一点 $P\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$，它关于 x 轴的对称点 Q 的坐标是 $\left(a,\ -\frac{1}{2}a^2\right)$，如图 1–6 所示. 从点 Q 的坐标看出，点 Q 在 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象上. 由此可知，$y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象与 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象关于 x 轴对称. 因此只要把 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象沿着 x 轴翻折并将图象“复制”出来，就可以得到 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象，如图 1–6 的绿色曲线.

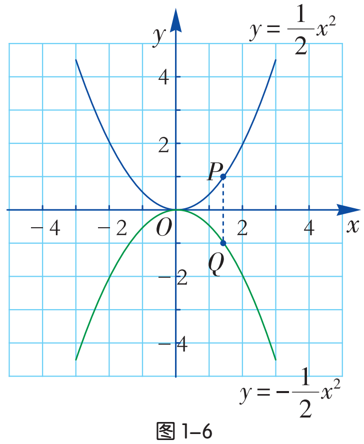


图 1–6

观察

观察图 1–6，函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象具有哪些性质？

从图 1–6 中可以看出，二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$的图象是一条曲线，它的开口向下，图象的对称轴是 y 轴，对称轴与图象的交点是原点(0，0)；

图象在对称轴左边的部分，函数值随自变量取值的增大而增大，简称为“左升”；

图象在对称轴右边的部分，函数值随自变量取值的增大而减小，简称为“右降”；

当 $x=0$ 时，函数值最大，最大值为 0.

一般地，当 $a<0$ 时，$y=ax^2$ 的图象都具有上述性质. 于是我们画 $y=ax^2$ $(a<0)$的图象时，可以先画出图象在 y 轴右边的部分，然后利用对称性，画出图象在 y 轴左边的部分. 在画右边部分时，只需“列表、描点、连线”三个步骤.

例 2 画二次函数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的图象.

解 列表：自变量 x 从原点的横坐标 0 开始取值.

x	0	1	2	3	4	…
$y=-\frac{1}{4}x^2$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$	-4	…

描点和连线：

画出图象在 y 轴右边的部分.

利用对称性，画出图象在 y 轴左边的部分.

这样就得到了 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的图象，如图 1–7.

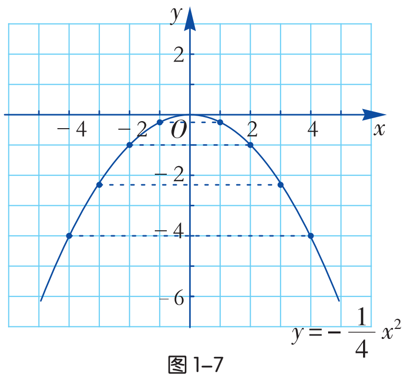


图 1–7

说一说

如图 1–8，在棒球赛场上，棒球在空中沿着一条曲线运动，它与二次函数 $y=ax^2\,(a<0)$ 的图象相像吗?

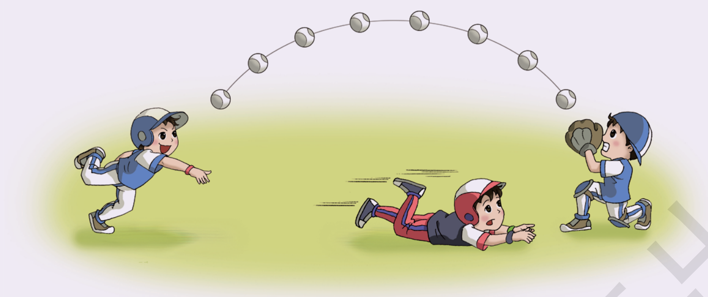
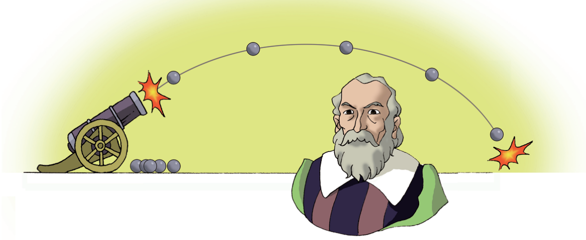


图 1–8

以棒球在空中经过的路线的最高点为原点建立直角坐标系，x 轴的正方向水平向右，y 轴的正方向竖直向上，则可以看出棒球在空中经过的路线是形如 $y=ax^2\,(a<0)$ 的图象的一段. 由此受到启发，我们把二次函数 $y=ax^2$ 的图象这样的曲线叫作**抛物线**(parabola)，简称为抛物线 $y=ax^2$.

一般地，二次函数 $y=ax^2$ 的图象关于 y 轴对称，抛物线与它的对称轴的交点(0，0)叫作抛物线 $y=ax^2$ 的顶点.



意大利著名科学家伽利略将炮弹发射经过的路线命名为“抛物线”.

练习

1. 画出二次函数 $y=-10x^2$ 的图象，并填空：

(1) 抛物线的对称轴是 ________，顶点坐标是 ________；

(2) 抛物线的开口向 ________；

(3) 抛物线在对称轴左边的部分，函数值随自变量取值的增大而 ________；在对称轴右边的部分，函数值随自变量取值的增大而 ________.

2. 在同一直角坐标系中画出二次函数 $y=-0.3x^2$ 与 $y=-8x^2$ 的图象，并比较它们的共同点与不同点.

探究

把二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象 E 向右平移 1 个单位，得到图形 F，如图 1-9.

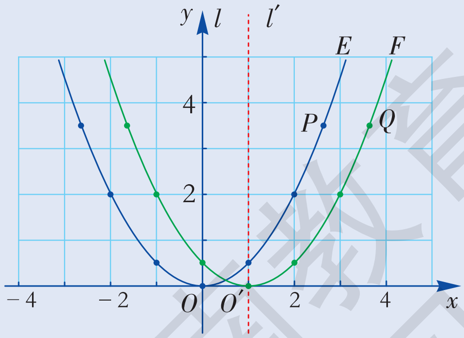


图 1-9

由于平移不改变图形的形状和大小，因此图象 E 在向右平移 1 个单位后：

原　像	像
抛物线 E：$y=\frac{1}{2}x^2$	图形 F 也是抛物线
E 的顶点 $O(0,0)$	F 的顶点是点 $O'(1,0)$
E 的对称轴是直线 l（与 y 轴重合）	F 的对称轴是直线 l'（过点 O' 且与 y 轴平行）
E 开口向上	F 开口向上

抛物线 F 是哪个函数的图象呢？

在抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上任取一点 $P\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$，那么在向右平移 1 个单位后，点 P 的像点 Q 的坐标是什么？

把点 P 的横坐标 a 加上 1，纵坐标 $\frac{1}{2}a^2$ 不变，就得到像点 Q 的坐标为 $\left(a+1,\ \frac{1}{2}a^2\right)$.

记 $b=a+1$，则 $a=b-1$，从而点 Q 的坐标为 $\left(b,\ \frac{1}{2}(b-1)^2\right)$. 这表明：点 Q 在函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象上. 由此得出，抛物线 F 是函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象.

从上面的过程可以说明：函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象是抛物线 F，它的开口向上，顶点是 $O'(1,\ 0)$，对称轴是过点 $O'(1,\ 0)$ 且平行于 y 轴的直线 l'. 直线 l' 是由横坐标为 1 的所有点组成的，我们把直线 l' 记作直线 $x=1$.

类似地，我们可以证明下述结论：

二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象是抛物线，它的对称轴是直线 $x=h$，它的顶点坐标是 $(h,0)$. 当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下.

由于我们已经知道了二次函数$y=a(x-h)^2$的图象的性质，因此今后在画$y=a(x-h)^2$的图象时，只要先画出对称轴以及图象在对称轴右边的部分，然后利用对称性，画出图象在对称轴左边的部分. 在画图象的右边部分时，只需“列表、描点、连线”三个步骤.

例 3 画函数 $y=(x-2)^2$ 的图象.

解 抛物线 $y=(x-2)^2$ 的对称轴是直线 $x=2$，顶点坐标是(2，0).

列表：自变量 x 从顶点的横坐标 2 开始取值.

x	2	3	4	5	…
$y=(x-2)^2$	0	1	4	9	…

描点和连线：

画出图象在对称轴右边的部分.

利用对称性，画出图象在对称轴左边的部分.

这样就得到了 $y=(x-2)^2$ 的图象，如图 1–10.

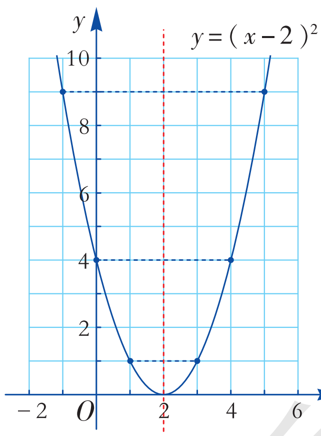


图 1–10

练习

1. 写出下列二次函数图象的对称轴、顶点坐标和开口方向.

(1) $y=\frac{1}{3}(x-5)^2$ ；　　(2) $y=-3(x+2)^2$.

2. 分别画出二次函数 $y=-(x-1)^2$，$y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图象.

探究

如何画二次函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$ 的图象?

我们先来探究二次函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$ 与 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 之间的关系.

二次函数	图象上的点	
	横坐标 x	纵坐标 y
$y=\frac{1}{2}(x-1)^2$	a	$\frac{1}{2}(a-1)^2$
$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$	a	$\frac{1}{2}(a-1)^2+3$

从上表看出：对于每一个给定的 x 值，函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$ 的值都要比函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的值大 3，由此可见函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$ 的图象可由二次函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象向上平移 3 个单位而得到（如图 1–11）. 因此，二次函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+3$ 的图象也是抛物线，它的对称轴为直线 $x=1$（与抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的对称轴一样），顶点坐标为(1, 3)(它是由抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的顶点(1，0)向上平移 3 个单位得到的)，它的开口向上.

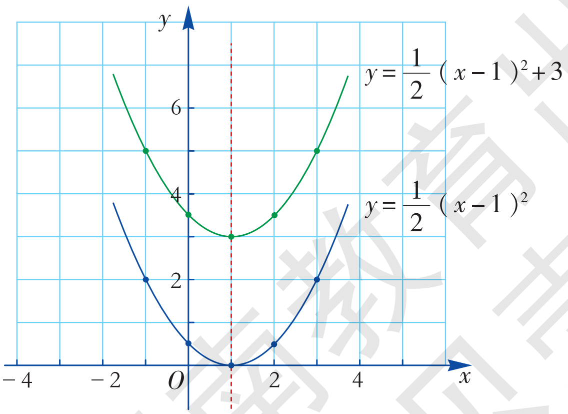


图 1–11

一般地，二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象是抛物线，它具有下述性质：

抛物线 $y=a(x-h)^2+k$	对称轴	顶点坐标	开口方向	性质	
				在对称轴的左边	在对称轴的右边
$a>0$	$x=h$	(h,k)	向上	y 随 x 的增大而减小	y 随 x 的增大而增大
$a<0$	$x=h$	(h,k)	向下	y 随 x 的增大而增大	y 随 x 的增大而减小

由于我们已经知道了二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象的性质，因此画 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象的步骤如下：

第一步 写出对称轴和顶点坐标，并且在平面直角坐标系内画出对称轴，描出顶点；

第二步 列表(自变量 x 从顶点的横坐标开始取值)，描点和连线，画出图象在对称轴右边的部分；

第三步 利用对称性，画出图象在对称轴左边的部分(这只要先把对称轴左边的对称点描出来，然后用一条光滑曲线顺次连接它们和顶点).

例 4 画二次函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-3$ 的图象.

解 对称轴是直线 $x=-1$，顶点坐标为$(-1,-3)$.

列表：自变量 x 从顶点的横坐标-1 开始取值.

x	-1	0	1	2	3	…
$y=\frac{1}{2}(x+1)^2-3$	-3	-2.5	-1	1.5	5	…

描点和连线：

画出图象在对称轴右边的部分.

利用对称性，画出图象在对称轴左边的部分. 这样就得到了 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-3$ 的图象，如图 1–12.

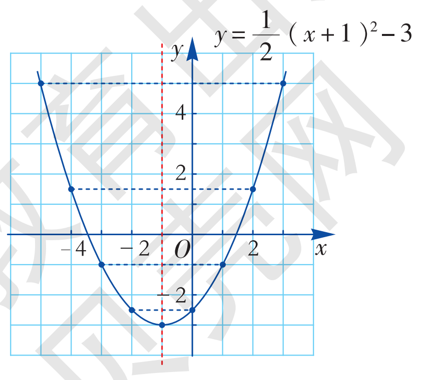


图 1–12

例 5 已知某抛物线的顶点坐标为(−2，1)，且与 y 轴相交于点(0，4)，求这个抛物线所表示的二次函数的表达式.

解 由于点(−2，1)是该抛物线的顶点，可设这个抛物线所表示的二次函数的表达式为 $y=a(x+2)^2+1$.

由函数图象过点(0，4)，可得

$$4=a(0+2)^2+1,$$

解得 $a=\frac{3}{4}$.

因此，所求的二次函数的表达式为

$$y=\frac{3}{4}(x+2)^2+1=\frac{3}{4}x^2+3x+4.$$

练习

1. 写出下列二次函数图象的对称轴、顶点坐标和开口方向：

(1) $y=\frac{2}{5}(x-9)^2+7$；　　(2) $y=-\frac{1}{3}(x+18)^2-13$.

2. 画出二次函数 $y=-2(x-2)^2+3$ 的图象.

3. 已知某抛物线的顶点坐标为(−3，2)，且经过点(−1，0)，求这个抛物线所表示的二次函数的表达式.

动脑筋

如何画二次函数 $y=-2x^2+6x-1$ 的图象？

由于我们已经会画 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象了，因此只需把 $-2x^2+6x-1$ 配方成 $-2(x-h)^2+k$ 的形式就可以了.

配方：

$$\begin{aligned} y &= -2x^2+6x-1 \\ &= -2(x^2-3x)-1 \\ &= -2\left[x^2-3x+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]-1 \\ &= -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2\times\frac{9}{4}-1 \\ &= -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

故对称轴是直线 $x=\frac{3}{2}$，顶点坐标是 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2}\right)$.

列表：自变量 x 从顶点的横坐标 $\frac{3}{2}$ 开始取值.

x	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	…
$y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{9}{2}$	…

描点和连线：画出图象在对称轴右边的部分.

利用对称性，画出图象在对称轴左边的部分，这样就得到了函数 $y=-2x^2+6x-1$ 的图象，如图 1-13.

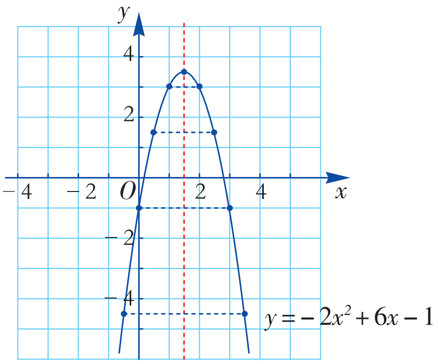
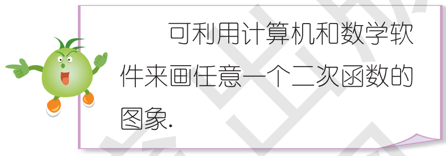


图 1-13



说一说

观察图 1-13，当 x 等于多少时，函数 $y=-2x^2+6x-1$ 的值最大？这个最大值是多少？

当 x 等于顶点的横坐标 $\frac{3}{2}$ 时，函数值最大，这个最大值等于顶点的纵坐标 $\frac{7}{2}$.

一般地，有下述结论：

二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 x 等于顶点的横坐标时，达到最大值($a<0$)或最小值($a>0$)，这个最大(小)值等于顶点的纵坐标.

例 6 求二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$ 的最大值.

解 配方：
$$\begin{aligned}y&=-\frac{1}{2}x^2+2x-1\\&=-\frac{1}{2}(x^2-4x+2^2-2^2)-1\\&=-\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{2}\times4-1\\&=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1.\end{aligned}$$

顶点坐标是 (2，1)，于是当 $x=2$ 时，y 达到最大值 1.

一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 进行配方：
$$\begin{aligned}y&=ax^2+bx+c\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},\end{aligned}$$

顶点坐标是$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

因此，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数达到最大值($a<0$)或最小值($a>0$)：$\frac{4ac-b^2}{4a}$.

练习

1. 写出下列二次函数图象的对称轴、顶点坐标和开口方向，并画出它们的图象.

(1) $y=3x^2-6x+1$；　　(2) $y=-\frac{1}{4}x^2+x+1$.

2. 求下列二次函数图象的顶点坐标：

(1) $y=x^2-3x+2$；　　(2) $y=-\frac{1}{3}x^2-2x+1$.

3. 用配方法求第 2 题中各个二次函数的最大值或最小值.

习题 1.2

A 组

1. 画出下列二次函数的图象：

(1) $y=2x^2$;　　(2) $y=-3x^2$;

(3) $y=-\frac{2}{3}x^2$;　　(4) $y=\frac{3}{4}x^2$.

2. 写出下列二次函数图象的对称轴、顶点坐标，并画出它们的图象.

(1) $y=-\frac{1}{4}x^2+3$；　　(2) $y=\frac{1}{2}x^2-4$；

(3) $y=7\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$；　　(4) $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$.

3. 写出下列二次函数图象的对称轴、顶点坐标和开口方向，并画出它们的图象.

(1) $y=\frac{1}{3}(x+3)^2-2$；　　(2) $y=2(x-3)^2+5$；

(3) $y=-3\left(x+\frac{4}{5}\right)^2-6$；　　(4) $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$.

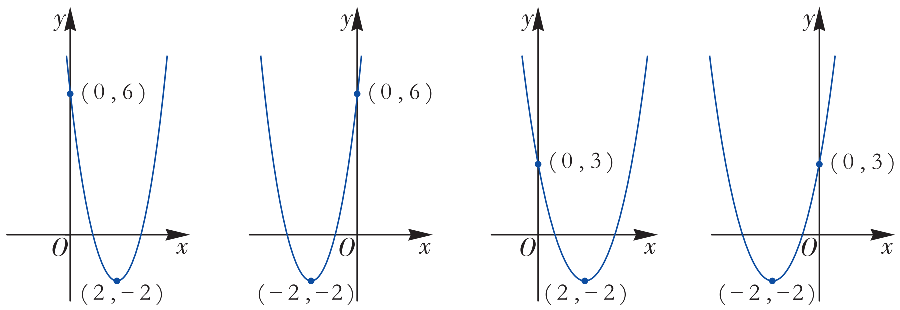
4. 已知某抛物线的顶点坐标为(2，3)，且与 y 轴相交于点(0，1)，求这个抛物线所表示的二次函数的表达式.

5. 写出下列二次函数图象的对称轴、顶点坐标，并画出它们的图象.

(1) $y=2x^2-4x+1$；　　(2) $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+3$；

(3) $y=-3x^2+9x-5$；　　(4) $y=x^2-5x+7$.

6. 二次函数 $y=2x^2-8x+6$ 的图象大致是（　　）



(A)　(B)　(C)　(D)

7. 用配方法求下列二次函数的最大值或最小值：

(1) $y=x^2+10x-7$；　　(2) $y=-x^2+5x+2$；

(3) $y=\dfrac{1}{5}x^2-2x+3$；　　(4) $y=-\dfrac{2}{3}x^2+2x-6$.

B 组

8. 在二次函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象上任取一点 $P\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$.

(1) 点 P 关于 y 轴的对称点 Q 的坐标是什么？

(2) 点 P 关于 y 轴的对称点 Q 在 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象上吗？为什么？

(3) 从第 (2) 小题的结论得出，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象关于哪条直线对称？

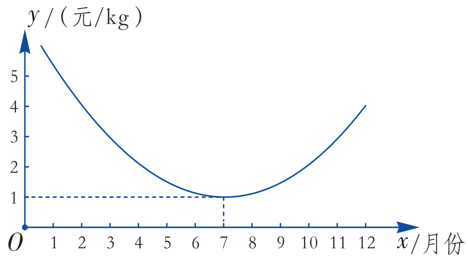
9. 填空：

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$.

(1) 当 $a>0$ 时，图象的开口向________，对称轴为________，顶点坐标为________. 当 $x<$________时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>$________时，y 随 x 的增大而增大；当 $x=$________时，y 取最________.

（2）当 $a<0$ 时，图象的开口向__________，对称轴为__________，顶点坐标为________. 当 $x<$_______ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>$_______ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x=$________ 时，y 取最________.

10. 某农场种植一种蔬菜，销售员李平根据往年的销售情况，对今年这种蔬菜的销售价格进行了预测，预测情况如图所示，图中的抛物线（部分）表示这种蔬菜每千克销售价与月份之间的关系. 观察图象，你能得到关于这种蔬菜销售情况的哪些信息？



(第 10 题图)

*1.3 不共线三点确定二次函数的表达式

我们学习过用待定系数法求一次函数的表达式，一次函数的表达式是 $y=kx+b$，只要求出 k 和 b 的值，就可以确定一次函数的表达式.

二次函数的表达式是 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，因此，要确定这个表达式，就需要求出 a，b，c 的值.

与一次函数相类似，如果已知二次函数图象上三个点的坐标（也就是函数的三组对应值），将它们代入函数表达式，列出一个关于待定系数 a，b，c 的三元一次方程组，求出 a，b，c 的值，就可以确定二次函数的表达式.

例 1 已知一个二次函数的图象经过三点(1，3)，(–1，–5)，(3，–13)，求这个二次函数的表达式.

解 设该二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$.

将三个点的坐标(1，3)，(–1，–5)，(3，–13）分别代入函数表达式，得到关于 a，b，c的三元一次方程组：

$$\begin{cases} a+b+c=3, \\ a-b+c=-5, \\ 9a+3b+c=-13, \end{cases}$$

解得 $a=-3$，$b=4$，$c=2$.

因此，所求的二次函数的表达式为 $y=-3x^2+4x+2$.

例 2 已知三个点的坐标，是否有一个二次函数，它的图象经过这三个点？

(1) $P(1,\ -5)$，$Q(-1,\ 3)$，$R(2,\ -3)$；

(2) $P(1,\ -5)$，$Q(-1,\ 3)$，$M(2,\ -9)$.

解 (1)设有二次函数 $y=ax^2+bx+c$，它的图象经过 P，Q，R 三点，则

* 本节为选学内容.

得到关于a，b，c的三元一次方程组：

$$\begin{cases} a+b+c=-5, \\ a-b+c=3, \\ 4a+2b+c=-3, \end{cases}$$

解得　$a=2$，$b=-4$，$c=-3$.

因此，二次函数 $y=2x^2-4x-3$ 的图象经过 P，Q，R 三点.

(2) 设有二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过 P，Q，M 三点，则得到关于 a，b，c 的三元一次方程组：

$$\begin{cases} a+b+c=-5, \\ a-b+c=3, \\ 4a+2b+c=-9, \end{cases}$$

解得　$a=0$，$b=-4$，$c=-1$.

因此一次函数 $y=-4x-1$ 的图象经过 P，Q，M 三点. 这说明没有一个这样的二次函数，它的图象能经过 P，Q，M 三点.

例 2 中，两点 $P(1，-5)$，$Q(-1，3)$确定了一个一次函数 $y=-4x-1$.

点 $R(2，-3)$的坐标不适合 $y=-4x-1$，因此点 R 不在直线 PQ 上，即 P，Q，R 三点不共线.

点 $M(2，-9)$的坐标适合 $y=-4x-1$，因此点 M 在直线 PQ 上，即 P，Q，M 三点共线.

例 2 表明：若给定不共线三点的坐标，且它们的横坐标两两不等，则可以确定一个二次函数；而给定共线三点的坐标，不能确定二次函数.

可以证明：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象上任意三个不同的点都不在一条直线上. 还可以证明：若给定不共线三点的坐标，且它们的横坐标两两不等，则可以确定唯一的一个二次函数，它的图象经过这三点.

练习

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过三点 $A(0, 2)$，$B(1, 3)$，$C(-1, -1)$，求这个二次函数的表达式.

习题 1.3

A 组

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过三点 $A(-1,0)$，$B(0,2)$，$C(2,0)$，求这个二次函数的表达式.

2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中的部分自变量 x 与所对应的函数值 y 如下表：

x	-4	-3	-2
y	3	5	3

求当 $x=1$ 时，y 的函数值.

3. 已知二次函数的图象与 x 轴的交点的横坐标分别是 $x_1=-3$，$x_2=1$，且与 y 轴的交点为 $(0, -2)$，求这个二次函数的表达式.

B 组

4. 已知二次函数的图象经过一次函数 $y=-x+3$ 的图象与 x 轴、y 轴的交点，且过点 $(1, 1)$，求这个二次函数的表达式.

5. 已知三个点的坐标，是否有一个二次函数，它的图象经过这三个点？

(1) $P(1, 6)$，$Q(2, 11)$，$R(-1, 14)$；

(2) $P(1, 6)$，$Q(2, 11)$，$M(-1, -4)$.

1.4 二次函数与一元二次方程的联系

探究

画出二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象，你能从图象中看出它与 x 轴的交点吗？二次函数 $y=x^2-2x-3$ 与一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 有怎样的关系？

如图1-14，二次函数$y=x^2-2x-3$ 的图象与 x 轴的交点坐标分别是$(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$. 由交点坐标可知，当 $x=-1$ 时，$y=0$，即 $x^2-2x-3=0$，也就是说，$x=-1$ 是一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 的一个根.

同理，当 $x=3$ 时，$y=0$，即 $x^2-2x-3=0$，也就是说，$x=3$ 是一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 的一个根.

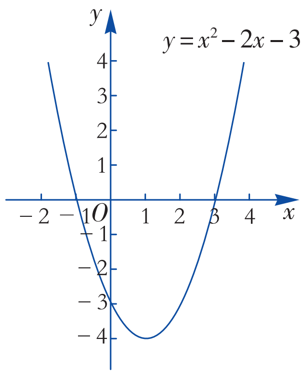


图 1-14

一般地，如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点$(x_1,\ 0)$，$(x_2,\ 0)$，那么一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实根 $x=x_1$，$x=x_2$.

动脑筋

观察二次函数 $y=x^2-6x+9$，$y=x^2-2x+2$ 的图象（如图 1-15），分别说出一元二次方程 $x^2-6x+9=0$ 和 $x^2-2x+2=0$ 的根的情况.

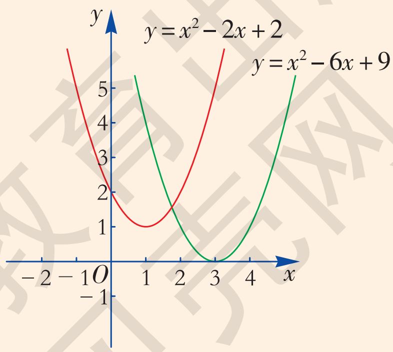


图 1-15

二次函数 $y=x^2-6x+9$ 的图象与 x 轴有重合的两个交点，其坐标都是(3，0)，而一元二次方程 $x^2-6x+9=0$ 有两个相等的实根：$x_1=3$，$x_2=3$.

二次函数 $y=x^2-2x+2$ 的图象与 x 轴没有交点，而一元二次方程 $x^2-2x+2=0$ 没有实数根.

一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的位置关系有三种：有两个不同的交点、有两个重合的交点、没有交点，这对应着一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的三种情况：有两个不相等的实根、有两个相等的实根和没有实数根. 反过来，由一元二次方程的根的情况，也可以确定相应的二次函数的图象与 x 轴的位置关系.

从上面的分析可以看出，二次函数与一元二次方程关系密切. 那么解一元二次方程能不能借助二次函数呢？求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根就是求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $y=0$ 时，自变量 x 的值，也就是二次函数图象与 x 轴交点的横坐标，因而我们可以利用二次函数的图象来求一元二次方程的根. 由于作图或观察的误差，由图象求得的根，一般是近似的.

例 1 求一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的根的近似值（精确到 0.1）.

分析 一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的根就是抛物线 $y=x^2-2x-1$ 与 x 轴的交点的横坐标. 因此我们可以先画出这条抛物线，然后从图象上找出它与 x 轴的交点的横坐标. 这种解一元二次方程的方法叫作**图象法**.

解 设二次函数 $y=x^2-2x-1$.

作出二次函数 $y=x^2-2x-1$ 的图象，如图 1-16. 可以发现抛物线与 x 轴的一个交点在 -1 和 0 之间，另一个交点在 2 和 3 之间.

通过观察或测量，可得抛物线与 x 轴的交点的横坐标约为 -0.4 或 2.4，即一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的实数根为 $x_1\approx-0.4$，$x_2\approx2.4$.

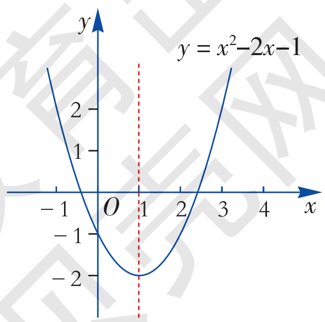


图 1-16

我们还可以借助计算器来分析所求方程的实数根. 将二次函数 $y=x^2-2x-1$ 在 -1 至 0 范围内的部分 x 值所对应的 y 值列表如下：

x	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
y	2	1.61	1.24	0.89	0.56	0.25	-0.04	-0.31	-0.56	-0.79	-1

可以发现，当 $x=-0.5$ 时，$y=0.25>0$；

而当 $x=-0.4$ 时，$y=-0.04<0$.

结合图象可以看出，使 $y=0$ 的 x 的值一定在 -0.5 与 -0.4 之间，即 $-0.5<x<-0.4$.

题目只要求精确到 0.1，这时取 $x=-0.4$ 或 $x=-0.5$ 作为所求的根均满足要求. 但当 $x=-0.4$ 时，$y=-0.04$，比当 $x=-0.5$ 时，$y=0.25$ 更接近于 0，因此选 $x=-0.4$.

同理，借助计算器，我们可以确定一元二次方程的另一个实数根为 $x=2.4$.

例 2 如图1-17，丁丁在扔铅球时，铅球沿抛物线 $y=-\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{6}{10}x+\dfrac{8}{5}$ 运行，其中 x 是铅球离初始位置的水平距离，y 是铅球离地面的高度.

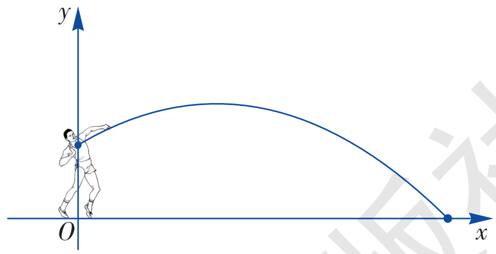


图 1-17

（1）当铅球离地面的高度为2.1 m时，它离初始位置的水平距离是多少？

（2）铅球离地面的高度能否达到2.5 m，它离初始位置的水平距离是多少？

（3）铅球离地面的高度能否达到3 m？为什么？

解 （1）由抛物线的表达式得

$$2.1=-\frac{x^2}{10}+\frac{6}{10}x+\frac{8}{5},$$

即 $$x^2-6x+5=0,$$

解得 $$x_1=1,\ x_2=5.$$

你能结合图1-17指出，为什么在不同的水平距离，铅球的高度均为2.1 m？

即当铅球离地面的高度为2.1 m时，它离初始位置的水平距离是 1 m 或 5 m.

(2) 由抛物线的表达式得 $$2.5=-\frac{x^2}{10}+\frac{6}{10}x+\frac{8}{5},$$

即 $$x^2-6x+9=0,$$

解得 $$x_1=x_2=3.$$

当铅球离地面的高度为2.5 m时，它离初始位置的水平距离是3 m.

(3) 由抛物线的表达式得 $$3=-\frac{x^2}{10}+\frac{6}{10}x+\frac{8}{5},$$

即 $$x^2-6x+14=0,$$

因为$\Delta=(-6)^2-4\times1\times14=-20<0$，所以方程无实数根.

所以铅球离地面的高度不能达到3 m.

从例 2 可以看出，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的某一个函数值 $y=M$，求对应的自变量的值时，需要解一元二次方程 $ax^2+bx+c=M$，这样，二次函数与一元二次方程就紧密地联系起来了.

练习

1. 试判断下列抛物线与 x 轴的交点情况：

(1) $y=x^2-x-2$；　(2) $y=9x^2+12x+4$；　(3) $y=x^2-2x+3$.

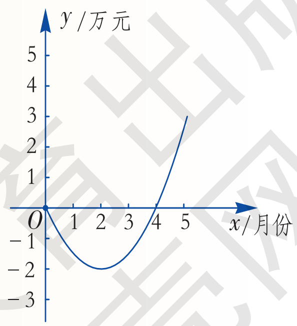
2. 用图象法求一元二次方程 $x^2+x-1=0$ 的根的近似值(精确到 0.1).

3. 某公司推出了一种高效环保型洗涤用品，年初上市后，公司经历了从亏损到赢利的过程. 如图，已知 $y=\frac{1}{2}x^2-2x$ 刻画了该公司年初以来累积利润 y (万元)与销售时间 x(月份)之间的关系. 试根据图象提供的信息，回答下列问题：

(1) 该公司亏损期是几个月？几月末开始赢利？

(2) 求截止到几月末公司累积利润可达到 30 万元；

(3) 该公司第 8 月末所获利润是多少？



(第 3 题图)

习题 1.4

A 组

1. 试判断下列抛物线与 x 轴的交点情况：

（1）$y=4x^2+12x+5$；（2）$y=x^2+2x+1$；

（3）$y=x^2-3x+1$；（4）$y=2x^2+3x+2$.

2. 用图象法求一元二次方程 $2x^2-2x-3=0$ 的根的近似值(精确到 0.1).

3. 求抛物线 $y=2x^2-2x+5$ 上纵坐标为 9 的点的横坐标.

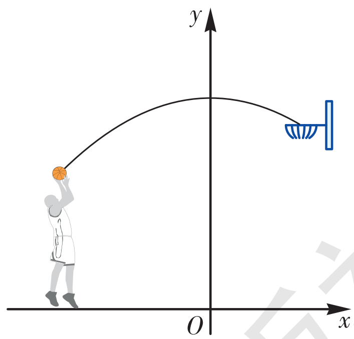
B 组

4. 当 t 取什么值时，抛物线 $y=5x^2+4tx+t^2-1$ 与 x 轴有一个交点？

5. 如图，一位篮球运动员跳起投篮，球沿抛物线 $y=-\frac{1}{5}x^2+3.5$ 运行，然后准确落入篮筐内，已知篮筐的中心离地面的高度为 3.05 m.

（1）球在空中运行的最大高度为多少米？

（2）如果该运动员跳投时，球出手时离地面的高度为 2.25 m，请问他距篮筐中心的水平距离是多少米？



(第 5 题图)

1.5 二次函数的应用

动脑筋

如图 1-18，一座拱桥的纵截面是抛物线的一部分，拱桥的跨度是 4.9 m，当水面宽 4 m 时，拱顶离水面 2 m. 若想了解水面宽度变化时，拱顶离水面高度怎样变化，你能建立函数模型来解决这个问题吗?

图 1-18

拱桥的纵截面是抛物线的一部分，应当是某个二次函数的图象，因此可以建立二次函数模型来刻画.

为简便起见，以拱顶为原点，抛物线的对称轴为 y 轴，建立直角坐标系，如图 1-19. 由于顶点坐标是 $(0,\ 0)$，因此这条抛物线的形式为 $y=ax^2$.

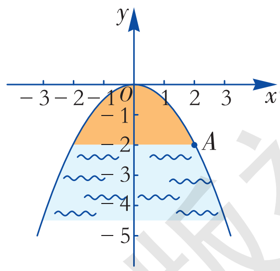


图 1-19

已知水面宽 4 m 时，拱顶离水面高 2 m，因此点 $A(2,-2)$在抛物线上. 由此得出

$$-2=a\cdot 2^2,$$

解得 $a=-\dfrac{1}{2}$.

因此，这个函数的表达式是 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$，其中 $|x|$ 是水面宽度的一半，y 是拱顶离水面高度的相反数. 这样我们从水面宽度的变化情况可以了解到拱顶离水面高度的变化情况.

由于拱桥的跨度为 4.9 m，因此自变量 x 的取值范围是：$-2.45\leqslant x\leqslant 2.45$.

想一想，当水面宽 4.6 m 时，拱顶离水面几米?

议一议

建立二次函数模型解决实际问题的基本步骤是什么？

实际问题 → 建立二次函数模型 → 利用二次函数的图象和性质求解 → 实际问题的解

动脑筋

如图 1–20，用 8 m 长的铝材做一个日字形窗框. 试问：窗框的宽和高各为多少时，窗框的透光面积 $S(\mathrm{m}^2)$最大？最大面积是多少？（假设铝材的宽度不计）

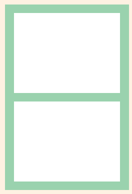


图 1–20

由于做窗框的铝材长度已确定，而窗框的面积 S 随矩形一边长的变化而变化. 因此设窗框的宽为 x m，则窗框的高为$\frac{8-3x}{2}$ m，其中$0<x<\frac{8}{3}$.

则窗框的透光面积为

$$S=x\cdot\frac{8-3x}{2}=-\frac{3}{2}x^2+4x,\quad 0<x<\frac{8}{3}.$$

将上式进行配方，

$$S=-\frac{3}{2}x^2+4x=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{8}{3}.$$

当 $x=\frac{4}{3}$ 时，S 取最大值$\frac{8}{3}$.

这时高为 $\dfrac{8-3\times\frac{4}{3}}{2}=2(\mathrm{m})$.

要考虑 $x=\frac{4}{3}$是不是在自变量 x 的取值范围内.

则当窗框的宽为$\frac{4}{3}$ m，高为 2 m 时，窗框的透光面积最大，最大透光面积为$\frac{8}{3}$ m^2.

例 某网络玩具店引进一批进价为 20 元 / 件的玩具，如果以单价 30 元销售，那么一个月内可售出 180 件. 根据销售经验，提高销售单价会导致销售量的下降，即销售单价每上涨 1 元，月销售量将相应减少 10 件. 当销售单价为多少元时，该店能在一个月内获得最大利润？

解 设每件商品的销售单价上涨 x 元，一个月内获取的商品总利润为 y 元.

每月减少的销售量为 $10x$（件），实际销售量为 $180-10x$（件），单件利润为 $(30+x-20)$ 元，则

$$y=(10+x)(180-10x),$$

即

$$y=-10x^2+80x+1\ 800\quad(0\leqslant x\leqslant 18).$$

将上式进行配方，

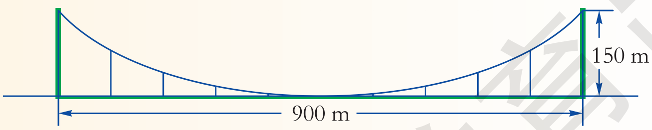
$$\begin{aligned}y&=-10x^2+80x+1\ 800\\&=-10(x-4)^2+1\ 960.\end{aligned}$$

当 $x=4$ 时，即销售单价为 34 元时，y 取最大值 1 960.

答：当销售单价定为 34 元时，该店在一个月内能获得最大利润 1 960 元.

练习

1. 如图是某抛物线形悬索桥的截面示意图，已知悬索桥两端主塔高 150 m，主塔之间的距离为 900 m，试建立适当的直角坐标系，求出该抛物线形桥所对应的二次函数表达式.



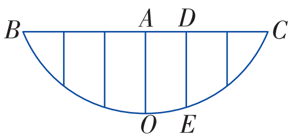
（第 1 题图）

2. 小妍想将一根 72 cm长的彩带剪成两段，分别围成两个正方形，则她要怎么剪才能让这两个正方形的面积和最小？此时的面积和为多少？

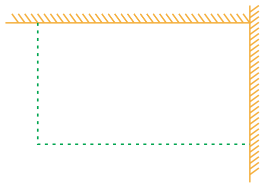
习题 1.5

A 组

1. 如图，一段拱形栅栏为抛物线的一部分，已知拱高 OA 为 1 m，栅栏的跨径 BC 间有 5 根间距为 0.5 m 的立柱. 试建立适当的直角坐标系，求出该拱形栅栏所对应的二次函数表达式，并求出立柱 DE 的高度.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，用长为 18 m 的篱笆(虚线部分)，围成两面靠墙的矩形苗圃.

(1) 设矩形的一边为 x(m)，面积为 y(m^2)，求 y 关于 x 的函数表达式；

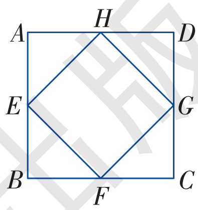
(2) 当 x 为何值时，所围苗圃的面积最大，最大面积是多少？

3. 某工艺厂设计了一款成本为10元 / 件的产品，并投放市场进行试销. 经过调查，发现每天的销售量 y(件)与销售单价 x(元)存在一次函数关系 $y=-10x+700$.

(1) 销售单价定为多少时，该厂每天获取的利润最大？最大利润为多少？

(2) 若物价部门规定，该产品的最高销售单价不得超过 35 元，那么销售单价如何定位才能获取最大利润？

B 组



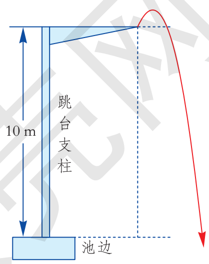
(第 4 题图)

4. 如图，正方形$EFGH$的顶点在边长为 2 的正方形$ABCD$的边上，若设$AE=x$，正方形$EFGH$的面积为y.

(1) 求 y 关于 x 的函数表达式.

(2) 正方形$EFGH$有没有最小面积？若有，试确定E点的位置；若没有，试说明理由.

5. 如图，某跳水运动员在进行 10 m 跳台比赛时，身体（看成一点）在空中的运动轨迹是一条抛物线，已知该运动员在离跳台的水平距离为 1 m 处达到最高点，高度为 1 m，试建立适当的直角坐标系，求该抛物线的表达式.



(第 5 题图)

用计算机研究二次函数的图象与性质

在本章，我们采用描点法画出了二次函数的图象，并研究其性质. 下面，我们借助计算机软件来绘制二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，并研究其性质.

(1) 打开“几何画板”软件，选择【工具栏】中的【自定义工具】，在弹出的菜单中选择【滑块工具】，如图 1. 点击【基本的水平滑块】，在工作区出现一条线段，就得到参数 a，如图 2 所示. 任意拖动“a”点，可以改变参数“a”的大小. 同理，可得参数 b，c .

图 1

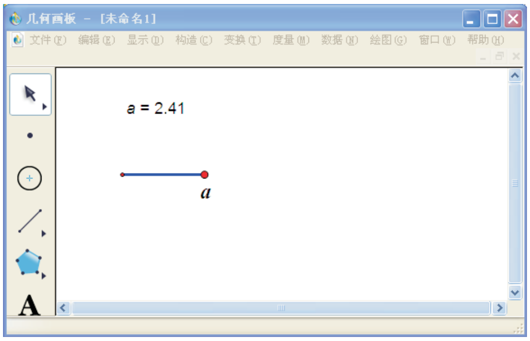


图 2

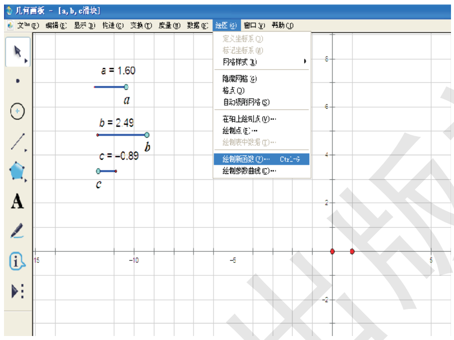


图 3

(2) 同时选择参数 a，b，c，选择【绘图】菜单中的【绘制新函数】命令，如图 3，在弹出的【新建函数】对话框中，输入“$a*x$^2 + $b*x+c$ ”，如图 4. 点击“确定”按钮，就可以得到二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，如图 5. 任意拖动参数 a，b，c 至给定的常数，我们可以得到任意给定的二次函数的图象.

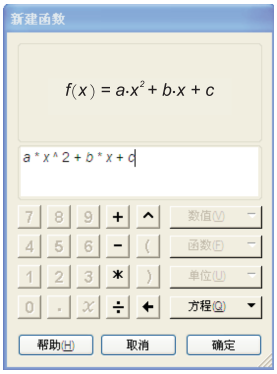


图 4

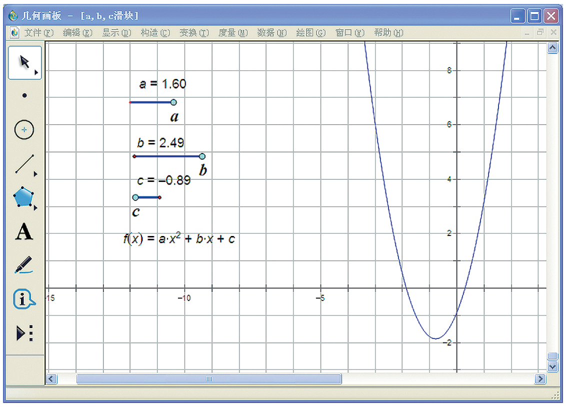


图 5

(3) 任意拖动参数，观察二次函数的图象发生了怎样的变化. a 的变化对函数图象有什么影响？你能得出什么结论？同样，分别拖动参数b，c，观察图象又会发生怎样的变化.

同时，我们可以利用作出的二次函数的图象来求得一元二次方程的根的近似值. 例如，当抛物线与x 轴有交点时，在工具栏中选择“点工具”，构造出两个（或一个）交点，测量出交点的横坐标，如图 6，这样就得到相应的一元二次方程的根的近似值.

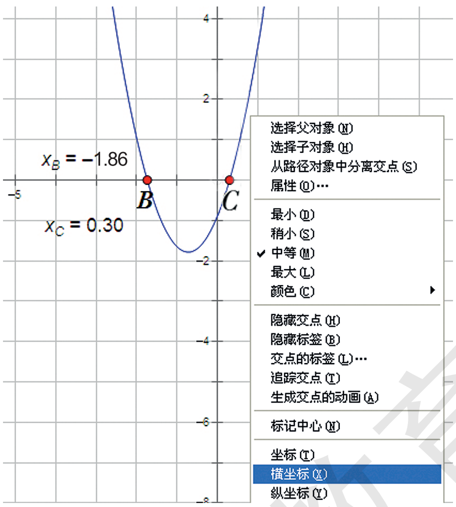


图 6

请同学们用软件绘制二次函数 $y=x^2-2x-3$ 和 $y=-x^2-5x-3$ 的图象，并求出一元二次方程 $x^2-2x-3=0$，$-x^2-5x-3=0$ 的根的近似值.

小结与复习

回顾

1. 什么形式的函数叫作二次函数？试举例说明.

2. 举例说明如何用描点法来作出一个二次函数的图象，并指出画图的步骤.

3. 说出二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象具有哪些性质.

4. 如何将 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 配方成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式？

*__5.__ 如何用不共线三点的坐标来求出二次函数的表达式？

6. 结合抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的位置关系，说明一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的各种情况.

7. 如何利用二次函数的图象求一元二次方程的根的近似值？

8. 试结合实例说明，建立二次函数模型解决实际问题的基本步骤是什么？

本章知识结构

二次函数
- 二次函数的概念
- 二次函数的图象与性质
- * 不共线三点确定二次函数的表达式
- 二次函数与一元二次方程的联系
- 二次函数的应用

注意

1. 我们可以从 $y=ax^2\ (a>0)$ 的图象与性质出发，得出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质，探究过程如下：

$y=ax^2\ (a>0)$ 的图象与性质 —沿 x 轴翻折→ $y=-ax^2\ (a>0)$ 的图象与性质

当 $h>0$ 时，向右平移 h 个单位；当 $h<0$ 时，向左平移 $|h|$ 个单位

$y=a(x-h)^2$ 的图象与性质

当 $k>0$ 时，向上平移 k 个单位；当 $k<0$ 时，向下平移 $|k|$ 个单位

$y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质

写成一般形式

$y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

由于从二次函数 $y=ax^2\ (a>0)$ 的图象经过轴反射和平移可得出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，而轴反射和平移都不改变图形的形状和大小，因此二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象都是抛物线.

2. 二次函数的图象都是轴对称图形. 抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称.

3. 结合图象讨论函数性质是数形结合地研究函数的重要方法，本章我们需认真体会这种方法的作用与价值.

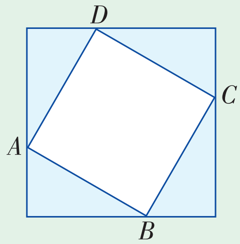
4. 对于现实生活中的许多问题，我们可以通过建立二次函数模型来解决. 在此过程中，我们需体会函数模型在反映现实世界的运动变化中的作用，体会模型是沟通数学与现实的有效桥梁.

5. 利用二次函数解决实际问题时，自变量的取值范围要结合具体问题来确定.

复习题 1

A 组

1. 如图，一张正方形纸板的边长为 4，将它剪去 4 个全等的直角三角形，设这 4 个直角三角形短直角边的长度为 x，四边形 $ABCD$ 的面积为 y，求 y 关于 x 的函数表达式.



(第 1 题图)

2. 画出下列二次函数的图象，并指出图象的对称轴、顶点坐标和开口方向.

(1) $y=-\frac{1}{3}x^2$；　　(2) $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$；

(3) $y=-\frac{2}{3}(x-3)^2+2$；　　(4) $y=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+2$；

(5) $y=-x^2+7x-11$；　　(6) $y=x^2-10x+21$.

3. 填空：

(1) 抛物线 $y=3x^2$ 先向左平移 2 个单位，得到抛物线 ________；接着向上平移 1 个单位，得到抛物线 ________.

(2) 抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 沿着 x 轴翻折并“复制”出来，得到抛物线 ________；接着向右平移 5 个单位，得到抛物线 ________；接着向下平移 2 个单位，得到抛物线 ________.

4. 已知二次函数的图象的顶点坐标为 $\left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$，且过点 $\left(2,\ \frac{11}{2}\right)$. 求这个二次函数的表达式及它与 y 轴的交点坐标.

5. 用配方法求下列二次函数的最大值或最小值.

(1) $y=-x^2+3x+4$；　　(2) $y=\frac{1}{4}x^2-2x+1$.

*6. 已知二次函数的图象与 x 轴交于点 $(2,\ 0)$，$(-1,\ 0)$，与 y 轴交于点 $(0,\ -1)$. 求这个二次函数的表达式及顶点坐标.

7. 用图象法求一元二次方程 $x^2+4x-3=0$ 的根的近似值(精确到 0.1).

8. 将一个小球以 20 m/s 的初速度从地面垂直抛向空中，经过时间 t (s)，小球的高度 h (m)为 $h=20t-5t^2$.

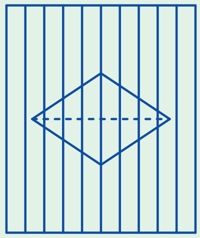
(1) 经过多长时间，小球达到最高点？此时小球离地面多高？

(2) 经过多长时间，小球落到地上？

9. 如图，一种铁栅栏护窗的正面是高为 120 cm，宽为 100 cm 的矩形，在中间有一个由 4 根铁条组成的菱形. 菱形的水平方向的对角线比竖直方向的对角线长 20 cm，设竖直方向的对角线的长度为 x(cm).

(1) 求菱形的面积 S(cm²)关于 x 的函数表达式；

(2) 当 x 取何值时，菱形的面积是护窗面积的 $\frac{1}{5}$？



(第 9 题图)

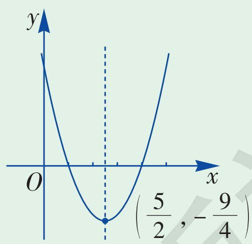
Ⓑ 组

10. 如图为二次函数 $y=(x+m)^2+k$ 的图象.

(1) 根据图中提供的信息求二次函数的表达式；

(2) 求图象与 x 轴的交点坐标；

(3) 观察图象回答：当 x 取何值时，$y>0$？当 x 取何值时，$y=0$？当 x 取何值时，$y<0$？

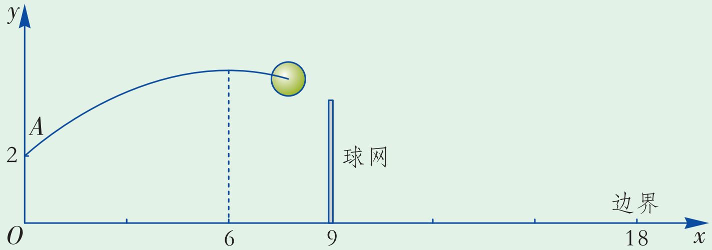


(第 10 题图)

11. 当 b^2-4ac 分别满足什么条件时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个不同的交点、有两个重合的交点、没有交点？试判断下列抛物线与 x 轴的交点情况：

(1) $y=2x^2-3x+1$；　(2) $y=4x^2+4x+1$；　(3) $y=-x^2+2x-4$.

12. 如图，排球运动员站在点 O 处练习发球，将球从 O 点正上方 2 m 的 A 处发出，把球看成点，其运行的高度 y(m)与运行的水平距离 x(m)满足表达式 $y=a(x-6)^2+h$. 已知球网与 O 点的水平距离为 9 m，高度为 2.43 m，球场的边界距 O 点的水平距离为 18 m.



（第 12 题图）

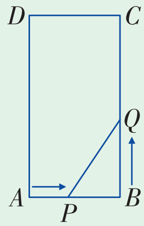
（1）当 $h=2.6$ 时，求 y 关于 x 的函数表达式；

（2）当 $h=2.6$ 时，球能否越过球网？球会不会出界？试说明理由.

13. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$ cm，$BC=12$ cm，点 P 从点 A 出发，沿 AB 边向点 B 以 1 cm/s 的速度移动，同时，点 Q 从点 B 出发，沿 BC 边向点 C 以 2 cm/s 的速度移动. 如果 P，Q 两点在分别到达 B，C 两点后就停止移动，回答下列问题：

（1）设运动开始后第 t s 时，五边形 $APQCD$ 的面积为 $S(\text{cm}^2)$，求 S 关于 t 的函数表达式，并指出自变量 t 的取值范围；

（2）当 t 为何值时，S 最小？并求出 S 的最小值.



（第 13 题图）

C 组

14. 抛物线 $y=x^2-4x+3.5$ 与 x 轴交于 A，B 两点，抛物线的顶点为 P，求 $\triangle PAB$ 的面积.

15. 某地发生旱情，为抗旱保丰收，当地政府制定农户投资购买抗旱设备的补贴办法，其中购买Ⅰ型、Ⅱ型抗旱设备所投资的金额与政府补贴的金额存在下表所示的函数对应关系.

金额 \ 型号	Ⅰ型设备		Ⅱ型设备		
投资金额 x / 万元	x	5	x	2	4
补贴金额 y / 万元	$y_1=kx$ $(k\neq0)$	2	$y_2=ax^2+bx$ $(a\neq0)$	2.4	3.2

（1）分别求出 y_1，y_2 的函数表达式；

（2）有一农户同时对Ⅰ型、Ⅱ型两种设备共投资 10 万元购买，请你设计一个能获得最大补贴金额的方案，并求出按此方案能获得的最大补贴金额.

汽车能通过隧道吗?

在离李亮同学所在学校不远的一条双行线公路上有一个隧道，如图 1 所示.

图 1

通过隧道的车辆应该有一个限制高度，这个限制高度怎样确定呢?

为了解决这个问题，李亮和他的同学经实地考察获取了以下情况：

(1) 隧道的纵截面由一个矩形和一段抛物线构成;

(2) 隧道内路面的总宽度为 8 m，双行车道宽度为 6 m，隧道顶部最高处距路面 6 m，矩形的高为 2 m;

(3) 为了保证安全，交通部门要求行驶车辆的顶部(设为平顶)与隧道顶部在竖直方向上的高度差至少要有 0.5 m.

李亮和他的同学运用已学的数学知识，解决了这个实际问题，其过程如下：

画出隧道的截面图. 设双行车道的两个端点分别为 A，B，以 AB 为 x 轴的正方向，AB 的中点为原点建立直角坐标系，如图 2 所示，于是(0，6)为抛物线的顶点，因此可设抛物线的表达式为

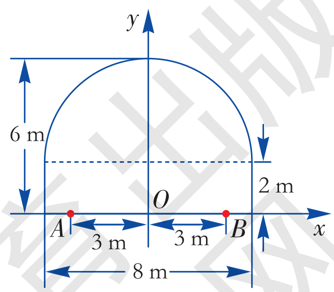


图 2

$$y=ax^2+6,\ -4\leqslant x\leqslant 4.$$

又因为抛物线经过点(4，2)，所以

$$2=16a+6.$$

解得 $$a=-\frac{1}{4}.$$

这样，抛物线的表达式确定为 $y=-\dfrac{1}{4}x^2+6$.

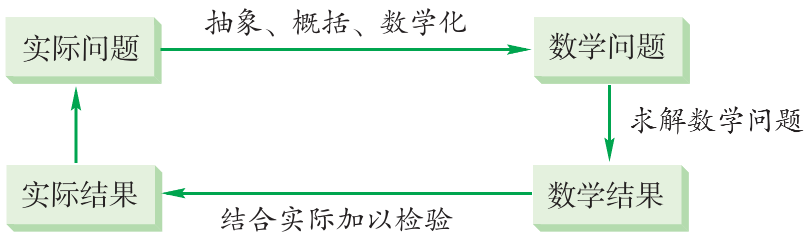
令 $x=3$，得 $y=3.75$.

所以 $\qquad 3.75-0.5=3.25\approx 3.2.$

李亮和他的同学把通过隧道的车辆限制高度定为 3.2 m.

从李亮和他的同学解决这个实际问题的过程中，我们看到，将一个实际问题，用所学过的数学语言加以抽象概括，建立数学模型(这里是建立适当的直角坐标系，求函数的表达式)，再应用数学方法来求出能够反映实际问题所要求的实际结果(这里是求当 $x=3$ 时，y 的值，所求的限制高度则为 $y-0.5$)，这就是简单数学建模的全过程.

简单数学建模的过程，我们可用下面的框图来说明：



想一想

若有一辆宽为4.5 m，高度为4.5 m的超宽超高车辆欲通过该隧道，能通过吗？是否要采取单向限行措施呢？（假设车辆顶部与隧道顶部在竖直方向上的高度差不小于20 cm)？

交 流

请你收集一些素材，建立函数模型，并求出问题的解.

在老师的组织下，将自己或小组研究问题的思路（或方案)、求解过程中使用的方法、反思与发现以报告的形式与全班同学交流，总结建立数学模型解决实际问题的策略与收获.

第2章

圆

在日常生活中，我们常常会见到圆形的物体，如车轮、钟表、摩天轮等，国际奥林匹克标志图案也是用五个圆组成的．圆的应用非常广泛．

圆是最基本也是最重要的平面图形之一，本章我们将学习关于圆的一些知识，这包括：什么样的图形叫圆？圆有哪些基本性质？平面上的点、直线与圆有哪些位置关系？怎样求圆的弧长和扇形面积以及正多边形与圆有哪些关系？等等．

2.1 圆的对称性

观察

在生活中，我们经常看到圆的形象(如图 2–1).

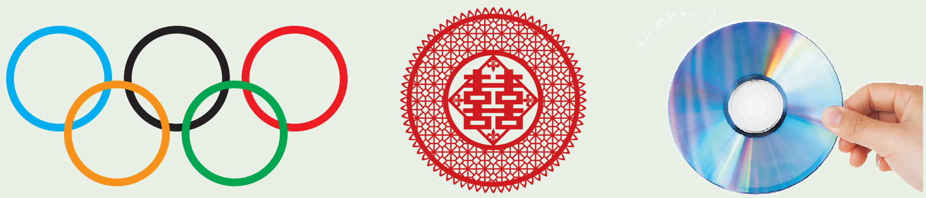


图 2–1

圆(circle)是平面内到一定点的距离等于定长的所有点组成的图形，这个定点叫作**圆心**(center of a circle)，定长叫作**半径**(radius).

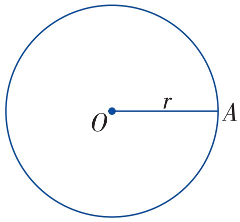


图 2–2

如图 2–2，点 O 是圆心，圆心 O 与圆上一点的连线段叫作半径，线段 OA 是一条半径，线段 OA 的长度也叫作半径，记作半径 r. 以点 O 为圆心的圆叫作圆 O，记作$\odot O$.

圆也可以看成是平面内一个动点绕一个定点旋转一周所形成的图形(如图2–3)，定点叫作圆心，定点与动点的连线段叫作半径.

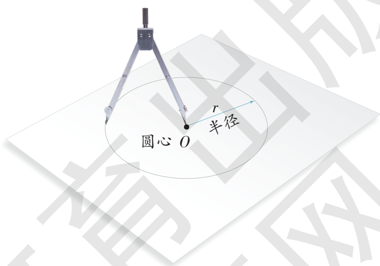


图 2–3

我们把到圆心的距离小于半径的点叫作**圆内的点**；到圆心的距离大于半径的点叫作**圆外的点**.

你能说出同一平面内的点与圆有几种位置关系？怎样确定点与圆的位置关系？请与同学交流.

一般地，设⊙O的半径为r，点P到圆心O的距离$OP=d$，则有：

（1）点P在圆内 $\Leftrightarrow$[1] $d<r$;

（2）点P在圆上 $\Leftrightarrow d=r$;

（3）点P在圆外 $\Leftrightarrow d>r$.

连接圆上任意两点的线段叫作**弦**(chord)，经过圆心的弦叫作**直径**(diameter). 如图 2–4，线段AB，CD是⊙O的弦，弦AB经过圆心O，因此线段AB是⊙O的直径.

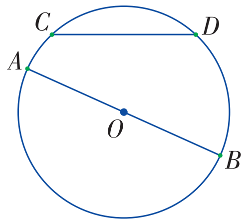


图 2–4

圆上任意两点间的部分叫作**圆弧**，简称**弧**(arc)，弧用符号“⌒”表示. 如图 2–5，⊙O上两点A，B间小于半圆的部分叫作**劣弧**(minor arc)，记作$\overset{\frown}{AB}$；A，B间大于半圆的部分叫作**优弧**（major arc），记作$\overset{\frown}{AMB}$，其中点M是优弧上一点.

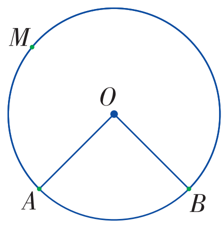


图 2–5

探究

1. 如图 2–6，在一块硬纸板和一张薄的白纸上分别画一个圆，使它们的半径相等，把白纸放在硬纸板上面，使两个圆的圆心重合，观察这两个圆是否重合.

2. 如图 2–7，用一根大头针穿过上述两个圆的圆心. 让硬纸板保持不动，让白纸绕圆心旋转任意角度. 观察旋转后白纸上的圆是否仍然与硬纸板上的圆重合. 这体现圆具有什么样的性质？

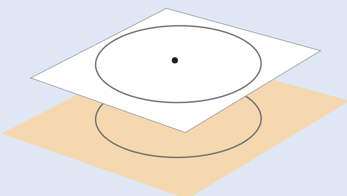


图 2–6

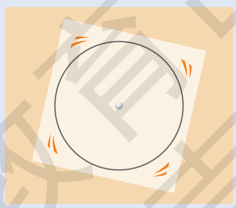


图 2–7

① “$\Leftrightarrow$”是双向推出符号，表示从左端可以推出右端，并且从右端可以推出左端.

我们把能够重合的两个圆叫作**等圆**，把能够互相重合的弧叫作**等弧**.

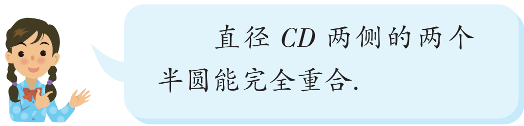
由于圆是由一个动点绕一个定点旋转一周所形成的图形，因此圆绕圆心旋转任意角度，都能与自身重合.

特别地，将圆绕圆心旋转 180°时能与自身重合，所以，

圆是中心对称图形，圆心是它的对称中心.

说一说

如图 2–8，在纸上任画一个⊙O，并剪下来. 将⊙O 沿任意一条直径(例如直径 CD）对折，你发现了什么?



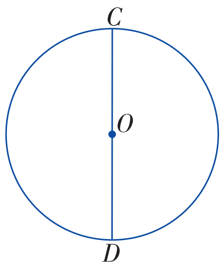


图 2–8

由此我们得到:

圆是轴对称图形，任意一条直径所在的直线都是圆的对称轴.

议一议

如图 2–9，为什么通常要把车轮设计成圆形? 请说说理由.

古代车轮的演变

图 2–9

练习

1. 下面的说法对吗？如不对，请说明理由.

（1）直径是弦；　　　　　　（2）弦是直径；

（3）半径相等的两个圆是等圆；

（4）圆既是中心对称图形，又是轴对称图形.

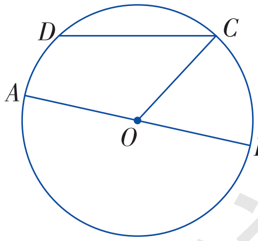
2. 已知⊙O 的半径为 4 cm，B 为线段 OA 的中点，当线段 OA 满足下列条件时，分别指出点 B 与⊙O 的位置关系：

（1）$OA=6$ cm；　　（2）$OA=8$ cm；　　（3）$OA=10$ cm.

习题 2.1

A 组

1. 如图，线段 AB 过圆心 O，点 A，B，C，D 均在⊙O上，请指出哪些是直径、半径、弦，并把它们表示出来.



（第 1 题图）

2. 下面的说法对吗？如不对，请说明理由.

（1）同一个圆的直径的长是半径的 2 倍；

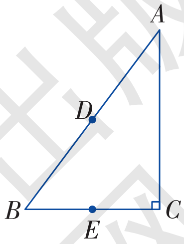
（2）圆是轴对称图形，过圆心的任意一条直线均是圆的对称轴；

（3）过圆心的线段是圆的直径；

（4）圆是中心对称图形，圆心是它的对称中心；

（5）弦过圆心.

3. 如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$ cm，$AB=5$ cm. D，E分别是AB，BC的中点，以点A为圆心，AC为半径画圆，试判断点C，D，E与⊙A的位置关系.



（第 3 题图）

B 组

4. 矩形的四个顶点在以对角线的交点为圆心的同一个圆上吗？请说说理由.

2.2 圆心角、圆周角

2.2.1 圆心角

观察图 2-10 中的 $\angle AOB$，可以发现它的顶点在圆心，角的两边与圆相交，像这样的角叫作**圆心角**(central angle)，我们把 $\angle AOB$ 叫作 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角，$\overset{\frown}{AB}$ 叫作圆心角 $\angle AOB$ 所对的弧.

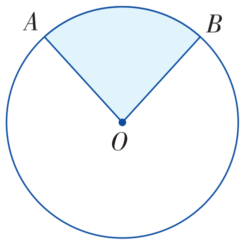


图 2-10

在生活中，我们常遇到圆心角，如飞镖靶中有圆心角(如图 2-11)，还有手表的时针与分针所成的角(如图 2-12)等也是圆心角.


图 2-11

图 2-12

动脑筋

如图 2-13，已知在 $\odot O$ 中，圆心角 $\angle AOB = \angle COD$. 它们所对的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{CD}$ 相等吗？它们所对的弦 AB 与 CD 相等吗？

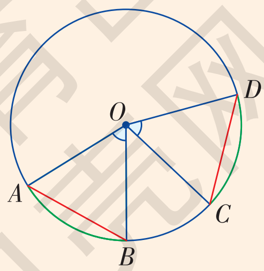


图 2-13

因为将圆绕圆心旋转任一角度都能与自身重合，所以可以将⊙O绕圆心 O 旋转，使点 A 与点 C 重合．由于$\angle AOB=\angle COD$，因此，点 B 与点 D 重合．从而$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$AB=CD$.

由此得到下述结论：

在同圆中，如果圆心角相等，那么它们所对的弧相等，所对的弦也相等.

上述结论对于等圆也成立.

议一议

在同圆或等圆中，如果弧相等，那么它们所对的圆心角相等吗？所对的弦相等吗？

在同圆或等圆中，如果弦相等，那么它们所对的圆心角相等吗？所对的弧相等吗？

一般地，有以下结论：

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧和两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

例 1 如图 2-14，等边△ABC 的顶点 A，B，C 在⊙O 上，求圆心角$\angle AOB$ 的度数.

解 ∵ △ABC 为等边三角形，

∴ $AB=BC=AC$.

∴ $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA$.

又∵ $\angle AOB+\angle BOC+\angle COA=360°$，

∴ $\angle AOB=\frac{1}{3}(\angle AOB+\angle BOC+\angle COA)$

$=\frac{1}{3}\times 360°=120°$.

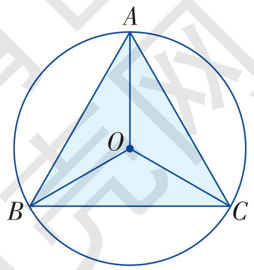
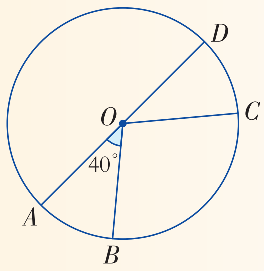


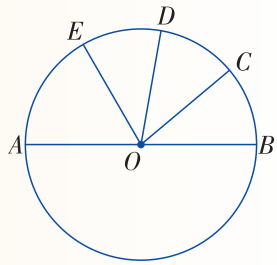
图 2-14

练习

1. 在⊙O中，已知$\angle AOB=40°$，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，求$\angle COD$的度数.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，在⊙O中，AB是直径，$\angle AOE=60°$，点C，D是$\overset{\frown}{BE}$的三等分点，求$\angle COE$的度数.

2.2.2 圆周角

观察图 2–15 中的$\angle BAC$，可以发现它的顶点A在圆上，它的两边都与圆相交，像这样的角叫作**圆周角**(circumference angle).

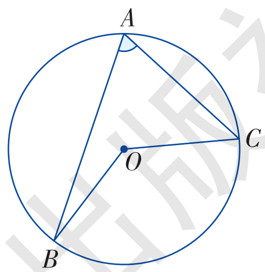


图 2–15

我们把$\angle BAC$叫作$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角，$\overset{\frown}{BC}$叫作圆周角$\angle BAC$所对的弧.

圆周角在我们生活中处处可见，比如，我们从共青团团旗上的图案抽象出如图 2–16 所示的图形，该图形中就有许多圆周角.

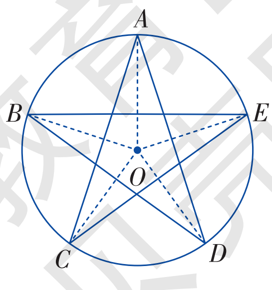


图 2–16

探究

分别测量图 2-15 中$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角$\angle BAC$和圆心角$\angle BOC$的度数，它们之间有什么关系？

每位同学任画一个圆，并在圆上任取一条弧，作出这条弧所对的圆周角和圆心角，测量出它们的度数. 你能得出同样的结论吗？由此你能发现什么规律？

通过度量，我发现圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半.

下面我们来证明这个结论.

已知：在$\odot O$中，$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角是$\angle BAC$，圆心角是$\angle BOC$.

求证：$\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

在画图时，可以发现圆心 O 与圆周角的位置关系有以下三种情形：

(1) 圆周角的一边通过圆心；

(2) 圆心在圆周角的内部；

(3) 圆心在圆周角的外部.

对于第(1)种情况，如图 2-17，圆心 O 在$\angle BAC$的一边 AB 上.

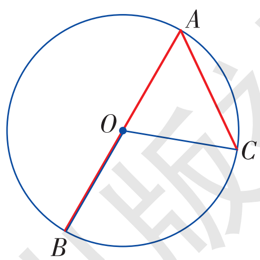


图 2-17

$\because\ OA=OC$,

$\therefore\ \angle C=\angle BAC$,

$\therefore\ \angle BOC=\angle C+\angle BAC$

$\qquad=2\angle BAC$,

即 $\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

对于第(2)种情况，如图 2-18，圆心 O 在$\angle BAC$的内部.

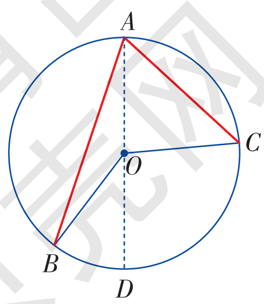


图 2-18

作直径 AD，根据第(1)种情况的结果得

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD,\quad \angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \angle BAC&=\angle BAD+\angle DAC\\&=\frac{1}{2}\angle BOD+\frac{1}{2}\angle DOC\\&=\frac{1}{2}\angle BOC.\end{aligned}$$

对于第(3)种情况，如图 2–19，圆心 O 在 $\angle BAC$ 的外部.

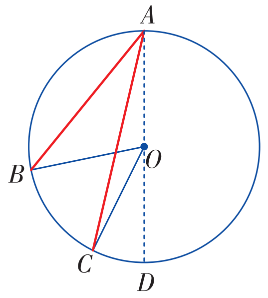


图 2–19

请你完成 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$ 的证明.

由此得到**圆周角定理**：

> **圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半.**

动脑筋

如图 2–20，$\angle C_1$，$\angle C_2$，$\angle C_3$ 都是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角，那么 $\angle C_1=\angle C_2=\angle C_3$ 吗？

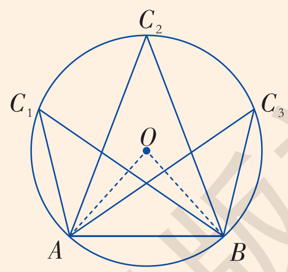


图 2–20

在图 2–20 中，连接 AO，BO，则 $\angle C_1$，$\angle C_2$，$\angle C_3$ 所对弧上的圆心角均为 $\angle AOB$. 由圆周角定理，可知 $\angle C_1=\angle C_2=\angle C_3$.

由此得到以下结论：

> **在同圆（或等圆）中，同弧或等弧所对的圆周角相等；相等的圆周角所对的弧也相等.**

例 2 如图2-21，OA，OB，OC都是⊙O的半径，$\angle AOB=50°$，$\angle BOC=70°$. 求$\angle ACB$和$\angle BAC$的度数.

解 ∵ 圆心角$\angle AOB$与圆周角$\angle ACB$所对的弧为$\overset{\frown}{AB}$，

∴ $\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=25°$.

同理 $\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC=35°$.

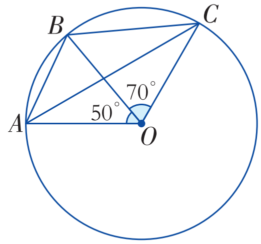
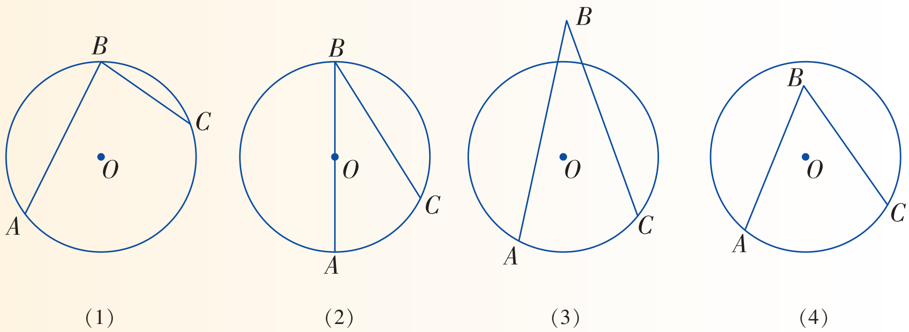


图 2-21

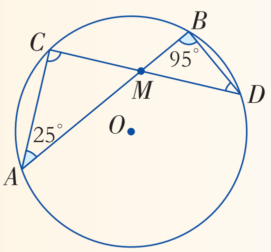
练习

1. 下图中各角是不是圆周角？请说明理由.

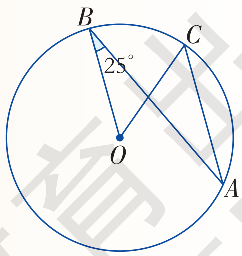


(第 1 题图)

2. 如图，在⊙O中，弦AB与CD相交于点M，若$\angle CAB=25°$，$\angle ABD=95°$，试求$\angle CDB$和$\angle ACD$的度数.



(第 2 题图)



(第 3 题图)

3. 如图，点A，B，C在⊙O上，$AC // OB$. 若$\angle OBA=25°$，求$\angle BOC$的度数.

动脑筋

在图 2-22 中，AB 是⊙O的直径，那么∠C_1，∠C_2，∠C_3的度数分别是多少呢？

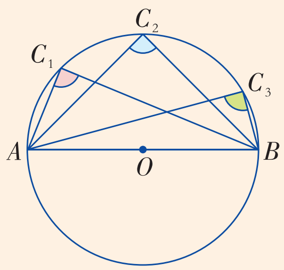


图 2-22

因为圆周角∠C_1，∠C_2，∠C_3所对弧上的圆心角是∠AOB，只要知道∠AOB的度数，利用圆周角定理，就可以求出∠C_1，∠C_2，∠C_3的度数.

因为 A，O，B 在一条直线上，所以圆心角∠AOB是一个平角，即∠$AOB=180°$. 故∠C_1=∠C_2=∠C_3=$\frac{1}{2}\times180°=90°$.

在图2-22中，若已知∠$C_1=90°$，它所对的弦AB是直径吗？

由此得到以下结论：

直径所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径.

例 3 如图 2–23，BC 是⊙O 的直径，$\angle ABC=60°$，点 D 在⊙O 上，求$\angle ADB$ 的度数.

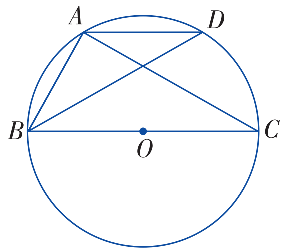


图 2–23

解 ∵ BC 为直径，

∴ $\angle BAC=90°$.

又 $\angle ABC=60°$，

∴ $\angle C=30°$.

又∵ $\angle ADB$ 与$\angle C$ 都是$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角，

∴ $\angle ADB=\angle C=30°$.

如图2–24，A，B，C，D是⊙O上的四点，顺次连接A，B，C，D四点，得到四边形$ABCD$，我们把四边形$ABCD$称为**圆内接四边形**.

这个圆叫作这个**四边形的外接圆**.

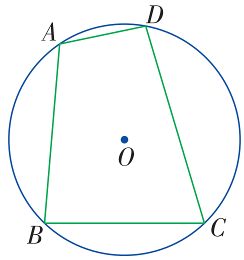


图 2–24

动脑筋

在图 2–24 的四边形 $ABCD$ 中，两组对角$\angle A$与$\angle C$，$\angle B$与$\angle D$有什么关系？

在图2–24中，连接OB，OD，得图2–25.

∵ $\angle A$所对的弧为$\overset{\frown}{BCD}$，$\angle C$所对的弧为$\overset{\frown}{BAD}$，

又 $\overset{\frown}{BCD}$ 与 $\overset{\frown}{BAD}$ 所对的圆心角之和是周角，

∴ $\angle A+\angle C=\dfrac{360°}{2}=180°$.

由四边形内角和定理可知，$\angle ABC+\angle ADC=180°$.

由此得到以下结论：

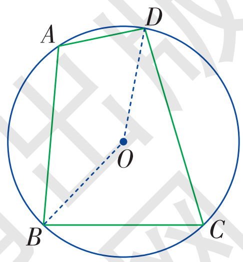


图 2–25

圆内接四边形的对角互补.

例 4 如图2–26，四边形$ABCD$为⊙O的内接四边形，已知$\angle BOD$为100°，求$\angle BAD$及$\angle BCD$的度数.

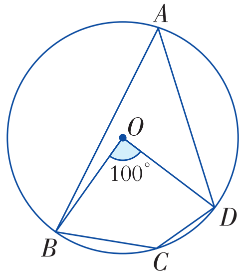


图 2–26

解 ∵ 圆心角$\angle BOD$与圆周角$\angle BAD$所对的弧为$\overset{\frown}{BD}$，

$\angle BOD = 100^\circ$,

∴ $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD = \frac{1}{2}\times 100^\circ = 50^\circ$.

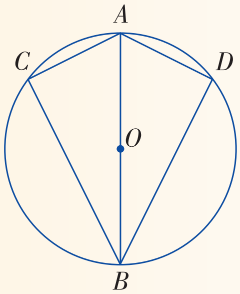
∵ $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$,

∴ $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

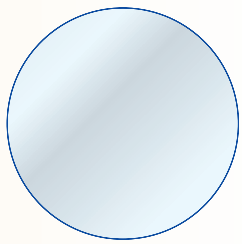
练习

1. 如图，在⊙O中，AB是直径，C，D是圆上两点，且$AC = AD$.

求证：$BC = BD$.



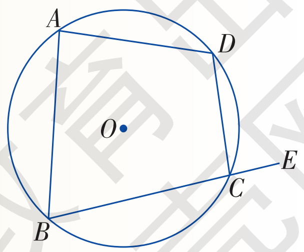
（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 怎样运用三角板画出如图所示的圆形件表面上的直径，并标出圆心，试说明画法的理由.

3. 如图，圆内接四边形$ABCD$的外角$\angle DCE = 85^\circ$，求$\angle A$的度数.

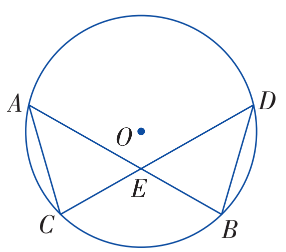


（第 3 题图）

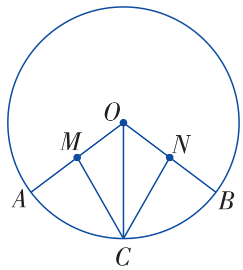
习题 2.2

A 组

1. 如图，点A，B，C，D在⊙O上，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，$AB$ 与 CD 相等吗？为什么？



（第 1 题图）

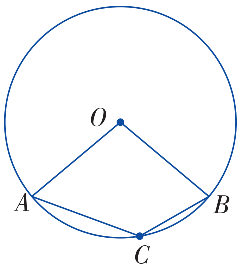


（第 2 题图）

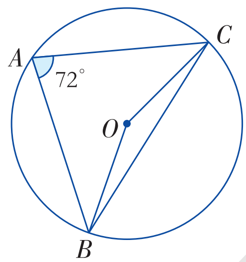
2. 如图，OA，OB，OC是⊙O的三条半径，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，点$M$，$N$ 分别是 OA，OB 的中点.

求证：$MC=NC$.

3. 如图，已知圆心角$\angle AOB$ 的度数为 100°，求圆周角$\angle ACB$ 的度数.



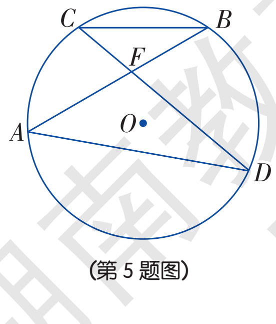
（第 3 题图）



（第 4 题图）

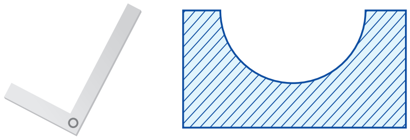
4. 如图，点A，B，C在⊙O上，$\angle A=72°$，求$\angle BOC$ 和$\angle OBC$ 的度数.

5. 如图，在⊙O中，弦AB与CD相交于点F，$\angle BCD=40°$，$\angle BFD=70°$，求$\angle ADC$ 的度数.

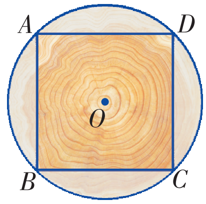


（第 5 题图）

6. 如图，一工件的凹面要求做成半圆，如何用一把曲尺（它的角是直角）检查工件的凹面是否符合要求？



（第 6 题图）



（第 7 题图）

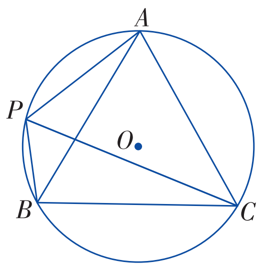
7. 如图，把一根圆柱形的木头锯成正方体形的柱子，使截面正方形的四个顶点均在圆上.

（1）正方形的对角线与圆的直径有什么关系？

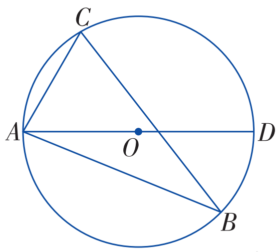
（2）设⊙O 的半径为 2，求图中阴影部分的面积之和.

B 组

8. 如图，点A，P，B，C是⊙O上的四点，$\angle APC=\angle CPB=60°$.
求证：$\triangle ABC$ 为等边三角形.



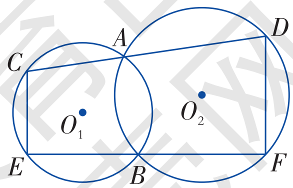
（第 8 题图）



（第 9 题图）

9. 如图，$\triangle ABC$ 的三个顶点都在⊙O 上，直径 $AD=3$ cm，$\angle B=\dfrac{1}{2}\angle DAC$. 试求 AC 的长.

10. 如图，⊙O_1 和⊙O_2 都经过 A，B 两点，经过点 A 的直线 CD 与⊙O_1 交于点 C，与⊙O_2 交于点 D. 经过点 B 的直线 EF 与⊙O_1 交于点 E，与⊙O_2 交于点 F. 求证：$CE /\!/ DF$.（提示：连接 AB）



（第 10 题图）

*2.3 垂径定理

动脑筋

在图2–27的⊙O中，AB是任一条弦，CD是⊙O的直径，且$CD \perp AB$，垂足为E. 试问：AE与BE，$\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ ，$\overset{\frown}{AD}$ 与$\overset{\frown}{BD}$ 分别相等吗？

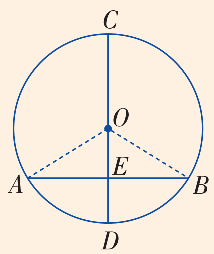


图 2–27

因为圆是轴对称图形，将⊙O 沿直径 CD 对折，如图 2–28，我发现 AE 与 BE 重合，$\overset{\frown}{AC}$ ，$\overset{\frown}{AD}$ 分别与 $\overset{\frown}{BC}$ ，$\overset{\frown}{BD}$ 重合，即 $AE=BE$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$ ，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

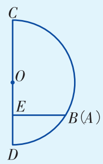


图 2–28

下面我们来证明这个结论.

在图 2–27 中，连接 OA，OB.

∵ $OA=OB$，

∴ $\triangle OAB$是等腰三角形.

∵ $OE \perp AB$，

∴ $AE=BE$，$\angle AOD=\angle BOD$.

从而 $\angle AOC=\angle BOC$.

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$ ，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

由此得到**垂径定理**：

垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧.

* 本节为选学内容.

例 1 如图2–29，弦$AB=8$ cm，CD是$\odot O$的直径，$CD\perp AB$，垂足为E，$DE=2$ cm，求$\odot O$的直径CD的长.

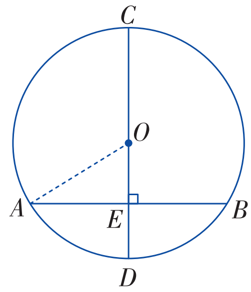


图 2–29

解 连接OA.

设$OA=r$ cm，则$OE=r-2$ (cm).

$\because$ $CD\perp AB$，

由垂径定理得 $AE=\dfrac{AB}{2}=4$ (cm).

在Rt△AEO中，由勾股定理得

$$OA^2=OE^2+AE^2.$$

即 $$r^2=(r-2)^2+4^2.$$

解得 $r=5$.

$\therefore$ $CD=2r=10$ (cm).

例 2 证明：圆的两条平行弦所夹的弧相等.

已知：如图2–30，在$\odot O$中，弦AB与弦CD平行.

求证：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

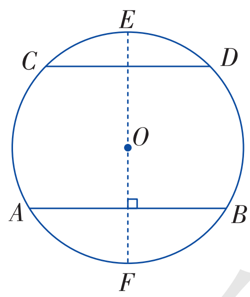


图 2–30

证明 作直径$EF\perp AB$，

$\therefore$ $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$.

又$\because$ $AB/\!/CD$，$EF\perp AB$，

$\therefore$ $EF\perp CD$.

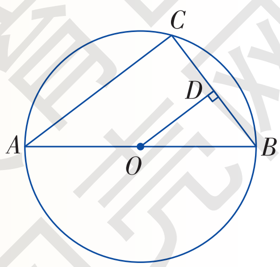
$\therefore$ $\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{DE}$.

因此 $\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{BE}-\overset{\frown}{DE}$，

即 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

练习

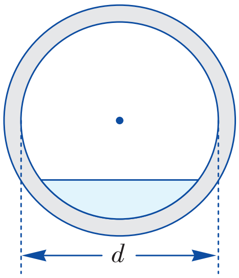
如图，AB是$\odot O$的直径，C是$\odot O$上一点，$AC=8$ cm，$AB=10$ cm，$OD\perp BC$于点D，求BD的长.



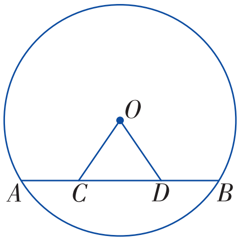
习题 2.3

A 组

1. 如图，这是一种水管的横截面，它的内径 $d=50$ cm，如果水面宽为 40 cm，那么此时水的深度是多少？



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，AB是$\odot O$的弦，点C，D是弦AB上两点，并且$OC=OD$.

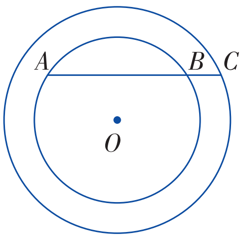
求证：$AC=BD$.

3. 如图，1 400 年前，我国隋代建造的赵州桥的桥拱是圆弧形，它的跨度（弧所对的弦长）是 37.4 m，拱高（弧的中点到弦的距离）为 7.2 m，求桥拱的半径（精确到 0.1 m）.


（第 3 题图）

B 组

4. 圆心相同，半径不同的两个圆叫同心圆. 如图，以点 O 为圆心的两个同心圆中，小圆的弦 AB 的延长线交大圆于点 C. 若 $AB=4$，$BC=1$，求圆环的面积.



（第 4 题图）

（第 5 题图）

5. 如图，你能平分这段圆弧吗？说说你的作法及理由.

2.4 过不共线三点作圆

议一议

1. 如何过一点 A 作一个圆？过点 A 可以作多少个圆？

2. 如何过两点 A，B 作一个圆？过两点可以作多少个圆？

对于问题 1，以不与点 A 重合的任意一点为圆心，以这个点和点 A 的距离为半径画圆即可，如图 2-31. 由画图可知，过点 A 可作无数个圆.

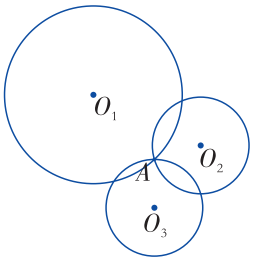


图 2-31

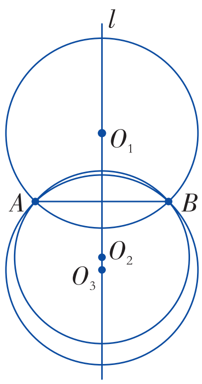


图 2-32

对于问题 2，作线段 AB 的垂直平分线 l，以 l 上任意一点为圆心，以这点和点 A（或点 B）的距离为半径画圆即可，如图 2-32. 由画图可知，过两点 A，B 可以作无数个圆.

动脑筋

如何过不在同一直线上的三个点作圆？可以作多少个圆？

已知：不在同一直线上的三点 A，B，C.

求作：$\odot O$，使它经过点 A，B，C.

分析　由于圆心 O 与三点 A，B，C 的距离相等，因此圆心 O 既在线段 AB 的垂直平分线上，又在线段 BC 的垂直平分线上.

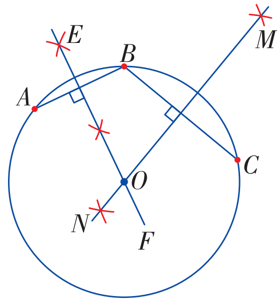


图 2-33

作法：

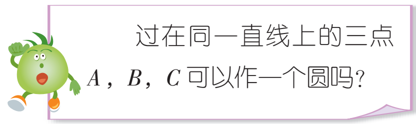
(1) 连接 AB，作线段 AB 的垂直平分线 EF；

(2) 连接 BC，作线段 BC 的垂直平分线 MN；

(3) 以 EF 和 MN 的交点 O 为圆心，以 OA 为半径作圆.

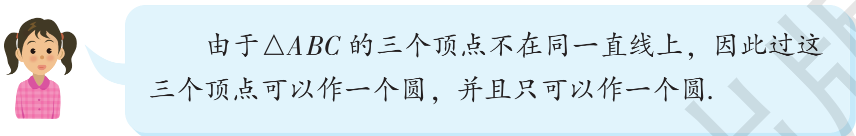
则 $\odot O$ 就是所求作的圆，如图 2-33.

由作法和上面的分析可知，过不在同一直线上的三点 A，B，C 可以作一个圆且只可以作一个圆.



说一说

经过 $\triangle ABC$ 的三个顶点可以作一个圆吗?



经过三角形各顶点的圆叫作这个三角形的**外接圆**(circumcircle)，外接圆的圆心叫作这个三角形的**外心**(circumcenter)，这个三角形叫作这个圆的**内接三角形**(inscribed triangle)，如图 2-34. 从前面的讨论知道，**三角形的外心是它的三条边的垂直平分线的交点**.

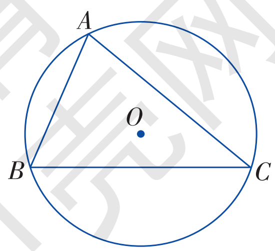
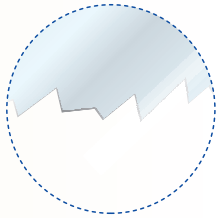


图 2-34

练习

1. 任意画一个三角形，作这个三角形的外接圆.

2. 如图是一块破残的圆形玻璃镜，现要复制一块同样大小的圆形玻璃，你能画出要复制的圆形玻璃镜图吗？

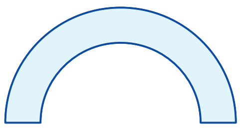


（第 2 题图）

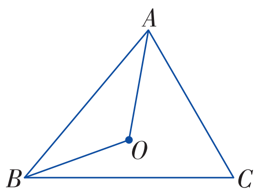
习题 2.4

A 组

1. 如图是某一圆弧管道，请想办法作出圆弧管道的圆心.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=70°$，$\angle ABC=50°$，点 O是$\triangle ABC$的外心，求$\angle AOB$ 的度数.(提示：作$\triangle ABC$的外接圆)

B 组

3. 求边长为 a 的等边三角形的外接圆的半径.

4. 如图2-34，$\triangle ABC$ 是锐角三角形，它的外心 O 在三角形的内部. 如果$\triangle ABC$ 是钝角三角形，外心 O 在三角形的什么位置？如果$\triangle ABC$ 是直角三角形，外心 O 在$\triangle ABC$ 的什么位置？分别画出它们的外接圆，并给予判断.

2.5 直线与圆的位置关系

2.5.1 直线与圆的位置关系

观察

图 2–35 是小明在海边观日出时所看到的景象示意图.

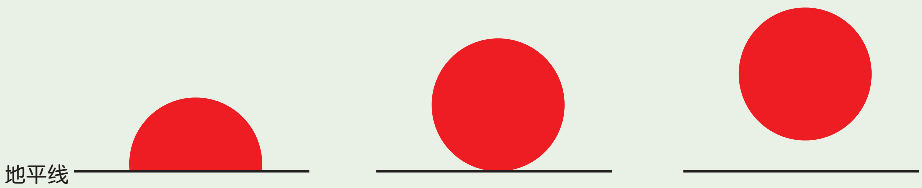
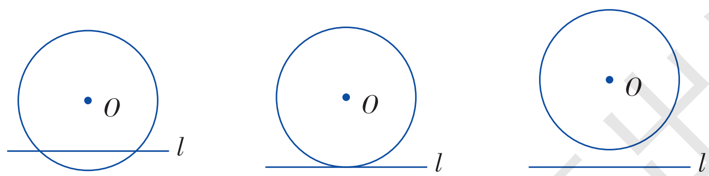


图 2–35

观察上图，你发现了什么?

若将图中太阳看作圆，地平线看作直线，我发现直线与圆有三种位置关系，如图 2–36.



(1)　　(2)　　(3)

图 2–36

可以说明：在平面内，直线与圆的位置关系有三种情况.

设圆心到直线的距离为 d，圆的半径为 r，则：

当 $d<r$ 时，直线与圆恰好有两个不同的公共点，这时称直线与圆**相交**，这条直线叫作圆的**割线**；

当 $d=r$ 时，直线与圆只有一个公共点，这时称直线与圆**相切**，这条直线叫作圆的**切线**（tangent line），这个公共点叫作**切点**（point of tangency）；

当 $d>r$ 时，直线与圆没有公共点，这时称直线与圆**相离**.

一般地，设⊙O 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d，则有：

（1）直线 l 和⊙O 相交 $\Leftrightarrow d<r$；

（2）直线 l 和⊙O 相切 $\Leftrightarrow d=r$；

（3）直线 l 和⊙O 相离 $\Leftrightarrow d>r$.

例 1 如图2–37，$\angle C=30°$，O为BC上一点，且$CO=6$ cm，以O为圆心，r为半径的圆与直线CA有怎样的位置关系？为什么？

（1）$r=2.5$ cm；

（2）$r=3$ cm；

（3）$r=5$ cm.

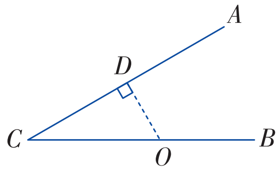


图 2–37

解 过 O 作 $OD\perp CA$ 交 CA 于 D.

在 Rt△CDO 中，$\angle C=30°$，

$$\therefore\quad OD=\frac{1}{2}CO=3(\text{cm}).$$

即圆心 O 到直线 CA 的距离 $d=3$ cm.

（1）当 $r=2.5$ cm 时，有 $d>r$，因此⊙O 与直线 CA 相离；

（2）当 $r=3$ cm 时，有 $d=r$，因此⊙O 与直线 CA 相切；

（3）当 $r=5$ cm 时，有 $d<r$，因此⊙O 与直线 CA 相交.

练习

1. 已知⊙O 的半径 $r=7$ cm，圆心 O 到直线 l_1，l_2，l_3 的距离分别为 $d_1=7.1$ cm，$d_2=6.8$ cm，$d_3=7$ cm. 判断直线 l_1，l_2，l_3 与⊙O 的位置关系.

2. 已知⊙O 的直径为 18 cm，圆心 O 到直线 l 的距离为 9 cm. 判断直线 l 与⊙O 的位置关系.

2.5.2 圆的切线

观察

观察图2-38，工人用砂轮磨一把刀，在接触的一瞬间，擦出的火花是沿着砂轮的什么方向飞出去的?

图 2-38

生活中，我们常常看到切线的实例，如何判断一条直线是不是⊙O 的切线呢?

探究

如图 2-39，OA 是⊙O 的半径，经过 OA 的外端点 A，作一条直线 $l\perp OA$，圆心 O 到直线 l 的距离是多少？直线 l 和⊙O 有怎样的位置关系?

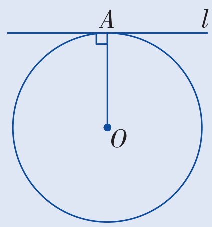


图 2-39

圆心 O 到直线 l 的距离等于半径 OA.

由圆的切线定义可知直线 l 与圆 O 相切.

由此得出以下结论:

经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

做一做

用三角尺过圆上一点画圆的切线.

如图 2–40，已知⊙O 上一点 P，过点 P 画⊙O 的切线.

画法：（1）连接 OP，将三角尺的直角顶点放在点 P 处，并使一直角边与半径 OP 重合；

（2）过点 P 沿着三角尺的另一条直角边画直线 l，则 l 就是所要画的切线. 如图 2–40.

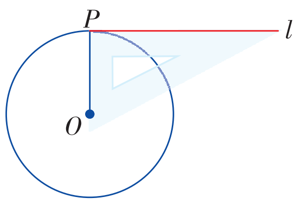
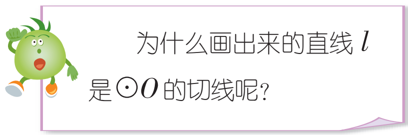


图 2–40



例 2 如图 2–41，已知 AD 是⊙O 的直径，直线 BC 经过点 D，并且 $AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAD$.

求证：直线 BC 是⊙O 的切线.

证明 $\because$ $AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAD$，

$\therefore$ $AD\perp BC$.

又$\because$ OD 是⊙O 的半径，且 BC 经过点 D，

$\therefore$ 直线 BC 是⊙O 的切线.

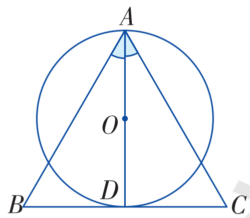


图2–41

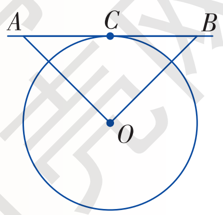
练习

1.（1）垂直于半径的直线一定是圆的切线吗？为什么？

（2）经过半径外端的直线一定是圆的切线吗？为什么？

2. 如图，已知直线 AB 经过⊙O 上的点 C，并且 $OA=OB$，$AC=BC$.

求证：直线 AB 是⊙O 的切线.



（第 2 题图）

动脑筋

如图 2–42，直线 l 是⊙O 的切线，A 为切点，切线 l 与半径 OA 垂直吗？

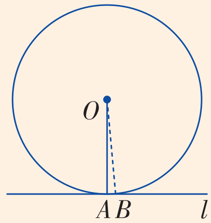


图 2–42

下面我们用反证法来证明这个结论.

假设直线 l 与半径 OA 不垂直.

过圆心 O 作 $OB \perp l$ 于点 B. 由于垂线段最短，可得 $OB < OA$，那么圆心 O 到直线 l 的距离小于半径，即直线 l 与⊙O 相交. 这与已知直线 l 是⊙O 的切线相矛盾.

因此直线 $l \perp OA$.

由此，我们得出下面的结论：

圆的切线垂直于过切点的半径.

例 3 如图 2–43，AB 是⊙O的直径，C 为⊙O上一点，BD 和过点 C 的切线 CD 垂直，垂足为 D.

求证：BC 平分 $\angle ABD$.

证明 连接OC.

$\because$ CD 是⊙O的切线，

$\therefore$ $OC \perp CD$.

又$\because$ $BD \perp CD$，

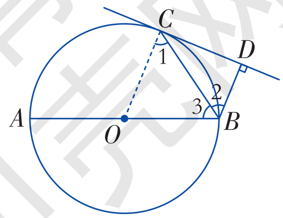


图 2–43

∴ $BD \parallel OC$.

∴ $\angle 1 = \angle 2$.

又 $OC = OB$,

∴ $\angle 1 = \angle 3$.

∴ $\angle 2 = \angle 3$, 即 BC 平分$\angle ABD$.

例 4 证明：经过直径两端点的切线互相平行.

已知：如图 2–44，AB 是⊙O 的直径，l_1，l_2 分别是经过点 A，B 的切线.

求证：$l_1 // l_2$.

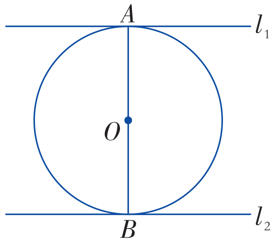


图 2–44

证明 ∵ OA 是⊙O 的半径，l_1 是过点 A 的切线，

∴ $l_1 \perp OA$.

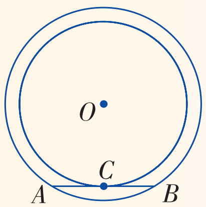
同理 $l_2 \perp OB$.

∴ $l_1 \perp AB$，且 $l_2 \perp AB$.

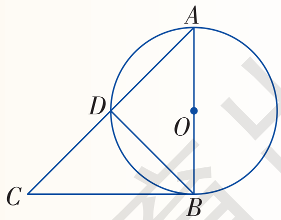
∴ $l_1 // l_2$.

练习

1. 如图，两个同心圆的圆心是 O，大圆的弦 AB 所在直线切小圆于点 C. 求证：点 C 是线段 AB 的中点.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，在⊙O中，AB 为直径，AD 为弦，过点 B 的切线与 AD 的延长线交于点 C，且 $AD = DC$. 求$\angle ABD$ 的度数.

*2.5.3 切线长定理

说一说

如图 2–45，将三角尺的一条直角边过⊙O 外一点 P 及圆上的点 A，另一条直角边过圆心 O，然后作直线 PA，则 PA 是⊙O 的切线．用同样的方法可作出切线 PB．你能说出 PA 和 PB 是⊙O 的切线的理由吗？

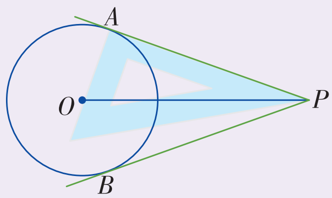


图 2–45

经过圆外一点作圆的切线，这点和切点之间的线段的长，叫作这点到圆的**切线长**．如图2–45，线段 PA，PB 的长度是点 P 到⊙O 的切线长．

探究

在透明纸上画出图 2–46，设 PA，PB 是⊙O 的两条切线，A，B 是切点，沿直线 OP 将图形对折，你发现了什么？

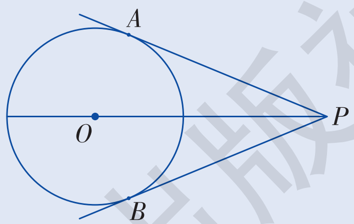


图 2–46

我把图形沿直线 OP 对折后，发现线段 PA 与线段 PB 重合，$\angle APO$ 与 $\angle BPO$ 重合．即 $PA=PB$，$\angle APO=\angle BPO$．

* 本节为选学内容．

由此我们猜测：过圆外一点所作的圆的两条切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角.

下面我们来证明这个猜测是真的.

如图2–47，连接 OA，OB.

∵　PA，PB 是⊙O 的切线，

∴　$\angle PAO=\angle PBO=90°$，

即△PAO 和△PBO 均为直角三角形.

又∵　$OA=OB$，

　　$OP=OP$，

∴　Rt△PAO≌Rt△PBO.

∴　$PA=PB$，$\angle APO=\angle BPO$.

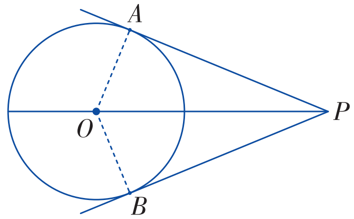


图 2–47

由此得到**切线长定理**：

> **过圆外一点所作的圆的两条切线长相等，圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角.**

例 5 如图2–48，AD是⊙O的直径，点C为⊙O外一点，CA和CB是⊙O的切线，A和B是切点，连接BD.

求证：$CO\parallel BD$.

分析　连接AB，因为AD为直径，那么$\angle ABD=90°$，即$BD\perp AB$. 因此要证$CO\parallel BD$，只要证$CO\perp AB$即可.

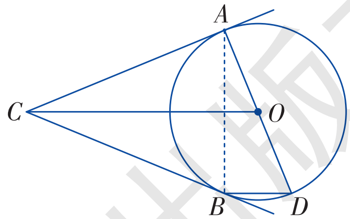


图 2–48

证明　连接AB.

∵　CA，CB是⊙O的切线，点A，B为切点，

∴　$CA=CB$，$\angle ACO=\angle BCO$.

∴　$CO\perp AB$.

∵　AD是⊙O的直径，

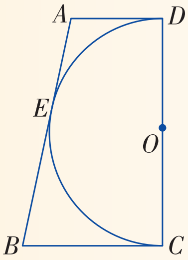
∴　$\angle ABD=90°$，

即　$BD\perp AB$.

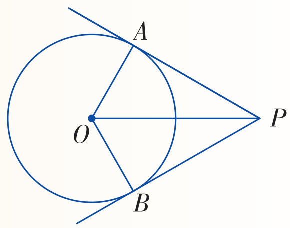
∴　$CO\parallel BD$.

练习

1. 如图，已知半圆 O 与四边形 $ABCD$ 的边 AD，AB，BC 相切，切点分别为 D，E，C. 设半圆 O 的半径为 2，AB 为 5，求四边形 $ABCD$ 的周长.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

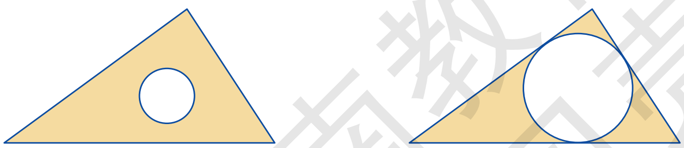
2. 如图，已知 PA，PB 是⊙O 的两条切线，点 A，B 为切点，若 $OP=4$，$PA=2\sqrt{3}$，求 $\angle AOB$ 的度数.

2.5.4 三角形的内切圆

议一议

想在一块三角形硬纸板上剪下一个面积最大的圆形纸板，应当怎样剪？

如图 2-49，为了使圆形纸板的面积最大，这个圆应当与三角形的三条边都尽可能贴近.



(1)　　(2)

图 2-49

这使得我们猜测：这个圆应当与三角形的三条边都相切.

动脑筋

与三角形的三条边都相切的圆存在吗？若存在，如何画出这样的圆？

如果圆与$\triangle ABC$的三条边都相切，那么圆心O与三角形三边的距离应等于圆的半径，从而这些距离相等.

到一个角的两边距离相等的点一定在这个角的平分线上，因此圆心O应是$\angle A$与$\angle B$的平分线的交点.

根据以上分析，我们可以按下面的方法画一个圆与三角形的三边都相切.

如图2-50，已知$\triangle ABC$.

求作：与$\triangle ABC$的各边都相切的圆.

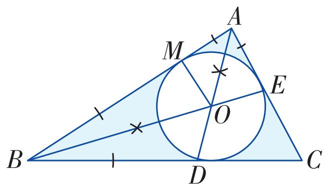


图 2-50

作法：（1）作$\angle A$，$\angle B$的平分线AD，BE，它们相交于点O；

（2）过点O作AB的垂线，垂足为M；

（3）以点O为圆心，OM为半径作圆. $\odot O$就是所求作的圆，如图 2-50.

由以上分析和作法可知，与三角形的三条边都相切的圆有且只有一个.

与三角形各边都相切的圆叫作三角形的**内切圆**(inscribed circle)，内切圆的圆心叫作三角形的**内心**(incenter)，这个三角形叫作圆的**外切三角形**(externally tangent triangle).

如图 2-50，设点O是$\triangle ABC$的内心，由于AB，BC，CA都与$\odot O$相切，因此圆心O到AB，BC，CA的距离都等于圆的半径. 从而圆心O在$\triangle ABC$的每个内角的平分线上. 由此得出：**三角形的内心是这个三角形的三条角平分线的交点.**

例 6 如图 2-51，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，$\angle A=70°$，求 $\angle BOC$ 的度数.

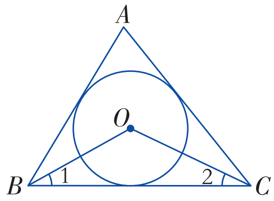


图 2-51

解 $\because \angle A=70°$,

$\therefore \angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A=110°$.

$\because \odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，

$\therefore$ BO，CO 分别是 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线，

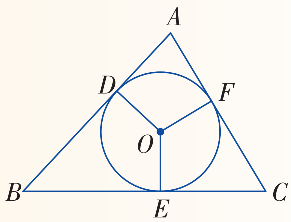
即 $\angle 1=\dfrac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\dfrac{1}{2}\angle ACB$.

$$\begin{aligned}\therefore \angle BOC&=180°-(\angle 1+\angle 2)=180°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)\\&=180°-\frac{1}{2}\times 110°\\&=125°.\end{aligned}$$

练习

1. 任画一个三角形，求作它的内切圆.

2. 如图，$\triangle ABC$ 的内切圆的三个切点分别为 D，E，F，$\angle A=74°$，$\angle B=47°$，求圆心角 $\angle EOF$ 的度数.



(第 2 题图)

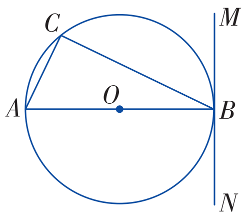
3. 已知等边三角形 ABC 的边长为 a，求它的内切圆的半径.

习题 2.5

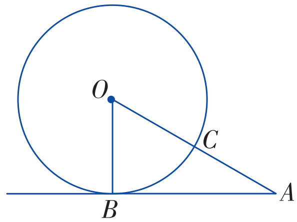
A 组

1. $\odot O$的直径为 10 cm，圆心 O 到直线 l 的距离是：（1）3 cm；（2）5 cm；（3）7 cm. 判断直线 l 与$\odot O$有几个公共点，为什么？

2. 如图，AB 是$\odot O$ 的直径，直线 MN 过点 B，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，$\angle CBM=\angle A$. 求证：MN 是$\odot O$ 的切线.



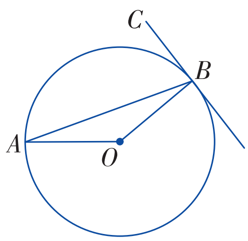
（第 2 题图）



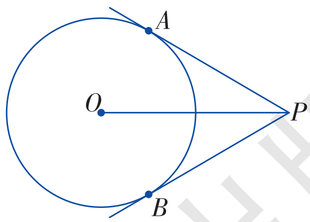
（第 3 题图）

3. 如图，$OC=CA$，OB 为$\odot O$ 的半径，$\angle COB=60^\circ$，求证：AB 是$\odot O$ 的切线.

4. 如图，AB是$\odot O$的弦，BC与$\odot O$相切于点B，连接OA，OB，若$\angle ABC=70^\circ$，求$\angle A$的度数.



（第 4 题图）

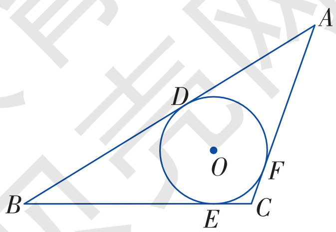


（第 5 题图）

***5.** 如图，$\odot O$的半径为3 cm，P为$\odot O$外一点，PA，PB为$\odot O$的切线，点A，B为切点，$PO=6$ cm，求这两条切线的夹角及切线长.

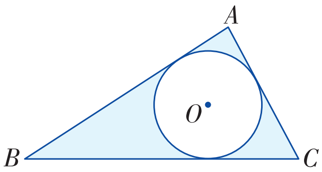
***6.** 如图，若$\triangle ABC$ 的三边长分别为 $AB=9$，$BC=6$，$AC=5$，$\triangle ABC$ 的内切圆$\odot O$ 切 AB，BC，CA 于点 D，E，F，求 AF 的长.

7. 证明：等腰三角形的内切圆与底边的切点是底边的中点.



（第 6 题图）

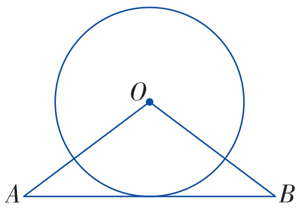
8. 如图，设$\triangle ABC$的内切圆的半径为r，$\triangle ABC$的周长为l，求$\triangle ABC$的面积S.



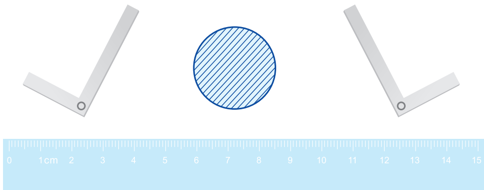
（第 8 题图）

B 组

9. 如图，已知$\odot O$的直径为6 cm，$OA=OB=5$ cm，线段AB经过$\odot O$上一点，长为8 cm. 求证：AB所在的直线与$\odot O$相切.



（第 9 题图）


（第 10 题图）

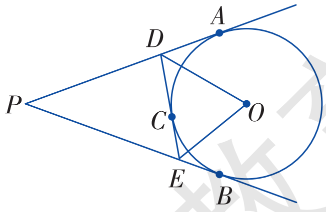
10. （1）证明：如果圆的两条切线互相平行，那么连接两个切点的线段是直径.

（2）利用（1）的结论，如何用两把曲尺和一把刻度尺测量圆形工件的直径？

***11.** 如图，P是$\odot O$外一点，PA，PB是$\odot O$的切线，点A，B为切点，$PA=4$ cm，$\angle APB=40°$，C是$\overset{\frown}{AB}$上任意一点，过C作$\odot O$的切线分别交PA，PB于D，E.

求：（1）$\triangle PDE$的周长；

（2）$\angle DOE$的度数.



（第 11 题图）

2.6 弧长与扇形面积

动脑筋

如图 2-52 是某城市摩天轮的示意图. 点 O 是圆心，半径 r 为 15 m，点 A，B 是圆上的两点，圆心角 $\angle AOB = 120°$. 你能想办法求出 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度吗？说说你的理由.

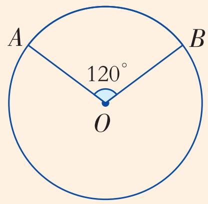


图 2-52

因为 $\angle AOB=120°$，所以 $\overset{\frown}{AB}$ 的长是圆周长的 $\frac{1}{3}$，因此 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 $\frac{1}{3} \times 2\pi \times 15 = 10\pi\ (\text{m})$.

如果 $\angle AOB = n°$，你能求出 $\overset{\frown}{AB}$ 的长吗？

我们知道圆周长的计算公式为 $C = 2\pi r$，其中 r 是圆的半径，即360°的圆心角所对的弧长就是圆周长 C.

在同一个圆中，由于圆心角相等，它们所对的弧也相等，因此 1°的圆心角所对的弧长为 $\frac{1}{360} \cdot 2\pi r$，$n$°的圆心角所对的弧长 l 为

$$l = n \cdot \frac{1}{360} \cdot 2\pi r.$$

由此得出以下结论：

> **半径为 r 的圆中，n°的圆心角所对的弧长 l 为**
>
> $$l = \frac{n}{360} \cdot 2\pi r = \frac{n\pi r}{180}.$$

例 1 已知⊙O的半径为 30 cm，求 40° 的圆心角所对的弧长(精确到 0.1 cm).

解 $$l=\frac{40\cdot\pi\cdot30}{180}\approx\frac{40\times3.14\times30}{180}\approx20.9\ (\text{cm}).$$

例 2 如图2–53，一个边长为10 cm的等边三角形木板ABC在水平桌面上绕顶点C按顺时针方向旋转到△$A'B'C$的位置，求顶点A从开始到结束所经过的路程为多少.

解 由图可知，由于∠$A'CB'=60°$，则等边三角形木板绕点C按顺时针方向旋转了120°，即∠$ACA'=120°$，这说明顶点A经过的路程长等于$\overset{\frown}{AA'}$的长.

∵ 等边三角形ABC的边长为10 cm，

∴ $\overset{\frown}{AA'}$所在圆的半径为10 cm.

∴ $l_{\overset{\frown}{AA'}}=\dfrac{120\cdot\pi\cdot10}{180}=\dfrac{20}{3}\pi\ (\text{cm}).$

答：顶点A从开始到结束时所经过的路程为$\dfrac{20}{3}\pi$ cm.

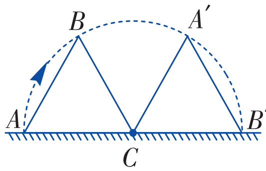
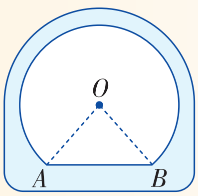


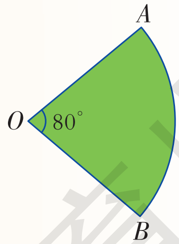
图 2–53

练习

1. 如图是一个闹钟正面的内、外轮廓线. 内轮廓线由一段圆弧和一条弦AB组成，圆心为O，半径为 3.2 cm，圆心角∠AOB=83°，求内轮廓线的圆弧的长度.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，一块铅球比赛场地是由一段 80°的圆心角所对的圆弧和两条半径围成的，若该比赛场地的周界是 34 m，求它的半径OA长(精确到 0.1 m).

圆的一条弧和经过这条弧的端点的两条半径所围成的图形叫作**扇形**(sector).

如图 2-54，蓝色部分是一个扇形，记作扇形 OAB.

我们可以发现，扇形面积与组成扇形的圆心角的大小有关，在同一个圆中，圆心角越大，扇形面积也越大.

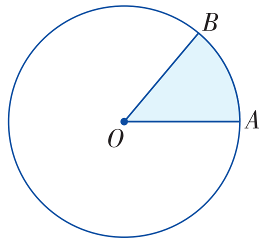


图 2-54

探究

如何求半径为r，圆心角为$n°$的扇形的面积呢？

我们可以把圆看作是圆心角为 360°的扇形，它的面积即圆面积 $S=\pi r^2$. 因为圆绕圆心旋转任意角度，都能与自身重合，所以圆心角为 1°的扇形能够互相重合，从而圆心角为 1°的扇形的面积等于圆面积的$\frac{1}{360}$，即$\frac{\pi r^2}{360}$. 因此，

圆心角为 $n°$ 的扇形的面积为 $n\cdot\frac{\pi r^2}{360}$.

由此得到：

半径为 r 的圆中，圆心角为 $n°$ 的扇形的面积为

$$S_{扇形}=\frac{n\pi r^2}{360}.$$

又因为扇形的弧长 $l=\frac{n\pi r}{180}$，因此 $S_{扇形}=\frac{n\pi r^2}{360}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n\pi r}{180}\cdot r$

$$=\frac{1}{2}lr.$$

例 3 如图 2-55，⊙O的半径为 1.5 cm，圆心角 $\angle AOB=58°$，求扇形 OAB 的面积(精确到 0.1 cm²).

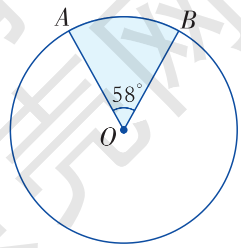


图 2-55

解 $\because\ r=1.5\text{ cm},\ n=58,$

$$\therefore\ S_{扇形OAB}=\frac{58\times\pi\times1.5^2}{360}\approx\frac{58\times3.14\times1.5^2}{360}\approx1.1(\text{cm}^2).$$

例 4 如图2-56是一条圆弧形弯道，已知$OA=20$ m，$OC=12$ m，$\overset{\frown}{CD}$ 的长度为9π m，求圆弧形弯道的面积.

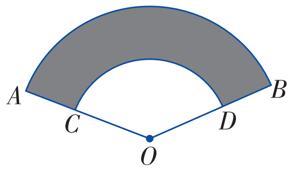


图 2-56

解 设$\angle AOB=n°$，

$\because$ $OC=12$ m，$\overset{\frown}{CD}$ 的长度为 9π m，

$\therefore$ $9\pi=\dfrac{n\cdot\pi\cdot 12}{180}$，

解得 $n=135$，即圆心角$\angle COD=135°$.

$\therefore$ $S_{扇形OAB}=\dfrac{135\cdot\pi\cdot 20^2}{360}=150\pi\ (\text{m}^2)$，

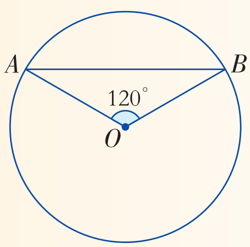
$S_{扇形OCD}=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}\cdot 9\pi\cdot 12=54\pi\ (\text{m}^2)$，

$\therefore$ $S_{弯道ACDB}=S_{扇形OAB}-S_{扇形OCD}=150\pi-54\pi=96\pi\ (\text{m}^2)$.

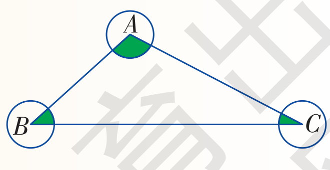
答：这条圆弧形弯道的面积为 96π m^2.

练习

1. 如图，在⊙O 中，$\angle AOB=120°$，弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$ cm，求扇形 OAB 的面积.



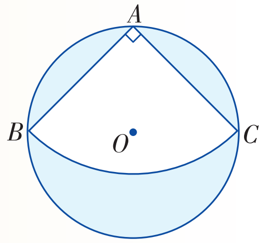
(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，分别以△ABC 的顶点 A，B，C 为圆心，以 1 为半径画圆，求图中绿色部分的面积.

3. 如图，有一直径是 20 cm 的圆形纸片，现从中剪出一个圆心角是 90°的扇形 ABC，求被剪掉部分的面积.

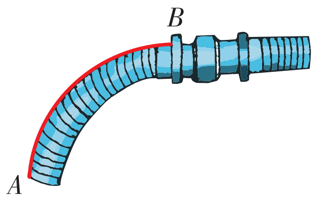


(第 3 题图)

习题 2.6

A 组

1. 如图，已知一段弯管的外轮廓线是一条圆弧 $\overset{\frown}{AB}$，弧长为 4.5 cm，圆弧的半径为 3 cm. 求这条弧所对的圆心角的度数(精确到 1°).



(第 1 题图)

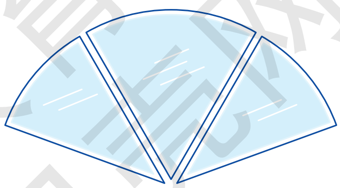
(第 2 题图)

2. 如图，8 位朋友均匀地围坐在圆桌旁共度佳节. 圆桌的半径为 80 cm，每人离圆桌的距离为 10 cm. 现又来了两名客人，每人向后挪动了相同的距离，再左右调整位置，使 10 人都坐下，并且 10 人之间的距离与原来 8 人之间的距离（即在圆周上两人之间的圆弧的长）相等，求每人应向后挪动的距离.

3. 如图为一扇木门上的三块扇形玻璃，已知它们的半径相同，而圆心角分别是 40°，60°，40°，每块玻璃均由金属边包裹，而所用金属边总长度为 228 cm.

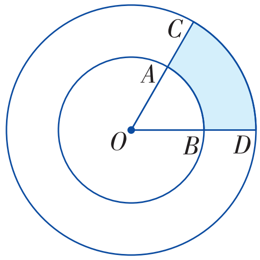
（1）求扇形玻璃的半径(精确到 0.1 cm)；

（2）求三块扇形玻璃的总面积(精确到0.1 cm^2).



(第 3 题图)

4. 如图，两个同心圆被两条半径截得$\overset{\frown}{AB}=6\pi$ cm，$\overset{\frown}{CD}=10\pi$ cm，又 $AC=12$ cm，求图中蓝色部分的面积.



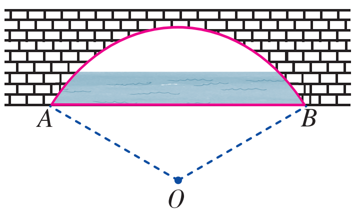
（第 4 题图）

B 组

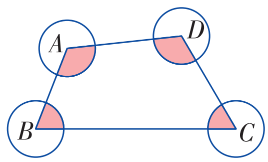
5. 如图为一座圆弧形拱桥的示意图，拱形的半径为 20 m，拱的跨度 AB 为 $20\sqrt{3}$ m.

求：（1）拱形的弧长；

（2）扇形 OAB 的面积 .



（第 5 题图）



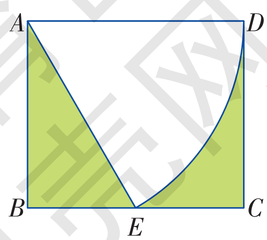
（第 6 题图）

6. 如图，以四边形 $ABCD$ 各个顶点为圆心，以 1 cm为半径画圆，求图中红色部分的面积之和.

7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$BC=2$，以点 A 为圆心，以 AD 长为半径画弧交 BC 于点 E.

（1）若$\overset{\frown}{DE}$的长度为$\dfrac{2\pi}{3}$，求圆心角 $\angle DAE$ 的度数；

（2）求图中绿色部分的面积之和.

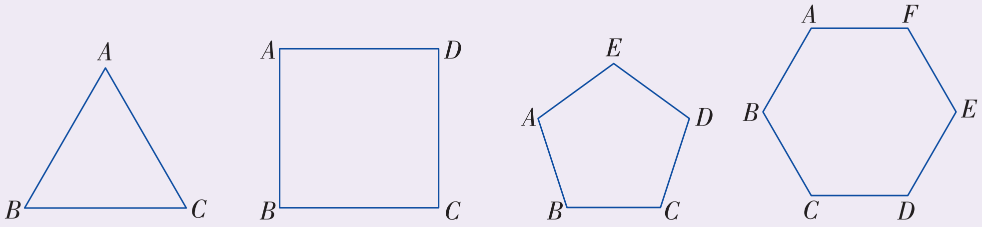


（第 7 题图）

2.7 正多边形与圆

说一说

如图2-57，这些多边形有什么共同的特点？



等边三角形　　正方形　　正五边形　　正六边形

图 2-57

每个多边形的各边都相等，各内角也相等.

我们把各边相等，各内角也相等的多边形叫作**正多边形**(regular polygon).

动脑筋

如何作一个正多边形呢？

由于在同圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等，因此可以用量角器将圆心角 n 等分，从而使圆 n 等分，依次连接各等分点，可得到一个正 n 边形.

将一个圆 $n(n \geqslant 3)$ 等分，依次连接各等分点所得的多边形叫作这个圆的内接正多边形，这个圆是这个正多边形的外接圆，正多边形的外接圆的圆心叫作正多边形的中心.

做一做

已知⊙O 的半径为 r，求作⊙O 的内接正六边形.

因为正六边形每条边所对的圆心角为60°，所以正六边形的边长与圆的半径相等. 因此在半径为r 的圆上依次截取等于r 的弦，就可以将圆六等分.

作法： (1) 作⊙O 的任意直径 BE，分别以 B，E 为圆心，以 r 为半径作弧，与⊙O 分别相交于点 A，C 和 F，D.

(2) 依次连接 AB，BC，CD，DE，EF，FA，则六边形 $ABCDEF$ 就是所求作的⊙O 的内接正六边形，如图 2–58.

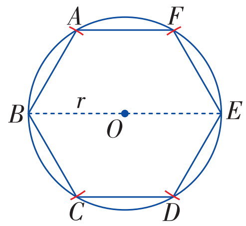


图 2–58

例 如图 2–59，已知⊙O的半径为 r，求作⊙O的内接正方形.

分析 作两条互相垂直的直径，就可以将⊙O四等分.

作法： (1) 作直径 AC 与 BD，使 $AC \perp BD$.

(2) 依次连接 AB，BC，CD，DA，则四边形 $ABCD$ 就是所求作的⊙O的内接正方形，如图 2–59.

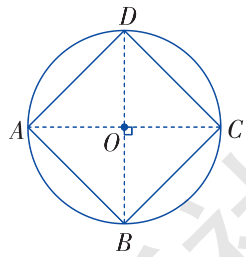


图 2–59

在生产设计中，人们经常会遇到等分圆的问题. 例如设计剪纸、齿轮、汽车轮毂等就是通过等分圆而得到的(如图2–60).

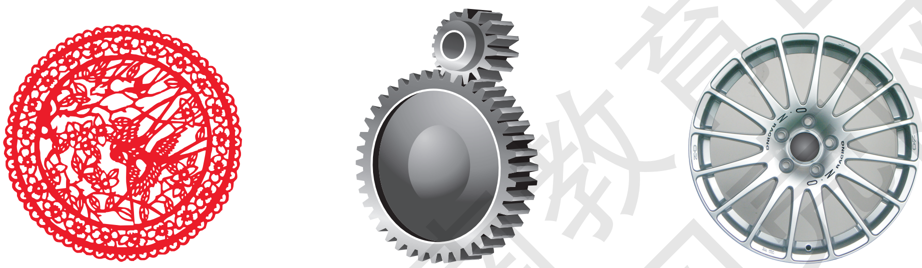


图 2–60

做一做

观察图 2-57 中的正多边形，哪些是轴对称图形？哪些是中心对称图形？

如果是轴对称图形，画出其对称轴；如果是中心对称图形，找出其对称中心.

图 2-57 中的正多边形都是轴对称图形.

图 2-57 中的正方形、正六边形既是轴对称图形，又是中心对称图形.

由于每个正多边形都有外接圆，因此利用圆的轴对称性可得到：

正多边形都是轴对称图形，一个正 n 边形共有 n 条对称轴，每条对称轴都通过正 n 边形的中心. 当 n 为奇数时，正 n 边形的 n 条对称轴都是顶点与中心的连线；当 n 为偶数时，正 n 边形有 $\frac{n}{2}$ 条对称轴是顶点与中心的连线，有 $\frac{n}{2}$ 条对称轴是过中心与边垂直的直线.

利用圆绕圆心旋转任意角度，所得图形都与自身重合这一性质，可得出：

一个正 n 边形，绕它的中心旋转 $\frac{360°}{n}$ 所得图形与这个正 n 边形重合，从而当 n 为偶数时，正 n 边形绕它的中心旋转 $\frac{n}{2}\cdot\frac{360°}{n}=180°$ 所得图形与这个正 n 边形重合. 因此正 n 边形（n 为偶数）也是中心对称图形，它的对称中心就是这个正 n 边形的中心.

练习

1. 已知⊙O 的半径为 2 cm，求作⊙O 的内接正方形和内接正六边形.

2. 许多图案设计都和圆有关，观察下图，请利用等分圆的方法设计一幅图案.

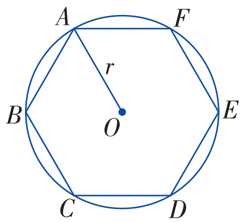
（第 2 题图）

习题 2.7

A 组

1. 作半径为3 cm的圆内接正三角形，并求这个内接正三角形的边长.

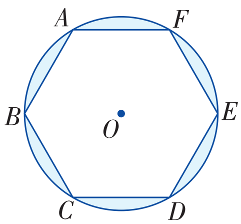
2. 如图，已知半径为r的圆内接正六边形$ABCDEF$，求这个正六边形的周长和面积.



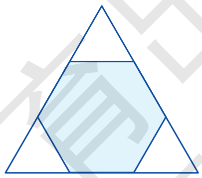
（第 2 题图）

B 组

3. 如图，正六边形$ABCDEF$内接于$\odot O$，$\odot O$的半径为10，求图中蓝色部分的面积(精确到0.1).



（第 3 题图）



（第 4 题图）

4. 如图，要把边长为 6 cm 的正三角形剪成一个最大的正六边形.

(1) 剪成的正六边形的边长是多少?

(2) 剪去怎样的三个三角形?

小结与复习

回顾

1. 请举例说明什么叫作圆，什么叫作弦，什么叫作弧.

2. 举例说明圆有哪些对称性质.

3. 在同圆或等圆中，如果圆心角相等，那么它们所对的弦和弧相等吗?

4. 在同圆中，同一条弧所对的圆周角与圆心角有什么关系?

***5.** 试描述垂直于弦的直径有什么性质.

6. 怎样过不在同一直线上的三个点作圆?

7. 直线与圆有哪几种位置关系?

8. 怎样判定一条直线是圆的切线? 圆的切线有什么性质?

***9.** 圆的切线长有什么性质?

10. 什么叫作三角形的内心和外心? 怎样作已知三角形的内切圆和外接圆?

11. 举例说明如何计算弧长与扇形面积.

12. 怎样作圆的内接正方形、正六边形? 正多边形有哪些对称的性质?

本章知识结构

- 圆
  - 圆的概念
  - 圆的性质
    - 圆的对称性
      - 圆是中心对称图形
      - 圆是轴对称图形，任意一条直径所在直线都是它的对称轴
    - 圆心角、圆周角、弧与弦之间的关系
    - * 垂径定理
  - 与圆有关的位置关系
    - 四边形的外接圆、三角形的外接圆
    - 直线与圆的位置关系 — 切线
      - * 切线长定理
      - 三角形的内切圆
  - 弧长与扇形面积的计算
  - 正多边形与圆
  - 作图

注意

1. 圆既是中心对称图形，又是轴对称图形. 圆的许多性质都可以由它的对称性得出，因此，在学习本章时要充分利用圆的对称性.

2. 点、直线与圆的位置关系，体现了“形”与“数”的内在联系，因此，学习本章时需认真体会数形结合是认识数学的基本方法.

3. 各边都相等的三角形是正三角形，但对于边数 n 大于 3 的多边形，由各边相等不能推出各个角相等，所以需定义“各边相等，各角相等的多边形叫作正多边形”.

复习题 2

A 组

1. 判断（对的画“√”，错的画“×”）：

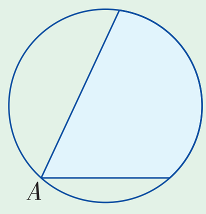
（1）圆只有一条对称轴；（　　）

（2）直径是圆内最长的弦；（　　）

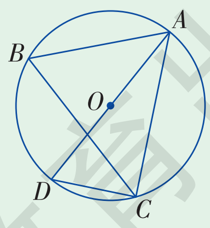
（3）长度相等的两条弧是等弧；（　　）

（4）和半径垂直的直线是圆的切线.（　　）

2. 如图，有一圆形展示厅，在其圆形边缘上的点 A 处安装了一台监视器，它的监控角度是 65°. 为了监控整个展厅，最少需在圆形边缘上共安装这样的监视器多少台？

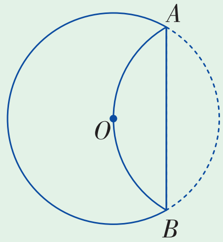


（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. 如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，AD 是 $\odot O$ 的直径，连接 CD，若 $AD=3$，$AC=2$，求 $\cos D$ 的值. 你还能求出 $\cos B$ 的值吗？



（第 4 题图）

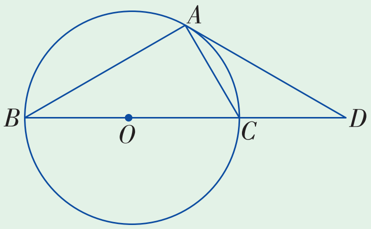
***4.** 如图，半径为 4 的⊙O 中，有弦 AB，以 AB为折痕对折，劣弧恰好经过圆心 O，求弦 AB的长度.

5. 已知 Rt△ABC 的两直角边的长分别为 6 cm，8 cm，求它的外接圆的半径.

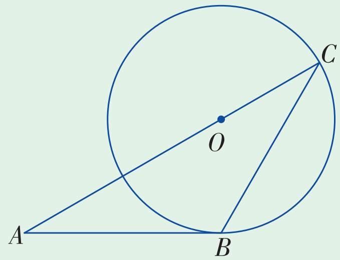
6. 如图，已知 BC 是⊙O 的直径，点 D 为 BC 延长线上一点，点 A 为圆上一点，$AB=AD$，$\angle ADB=30°$.

（1）求证：AD 是⊙O 的切线；

（2）若⊙O 的半径为 2，求$\overparen{AC}$ 的长.



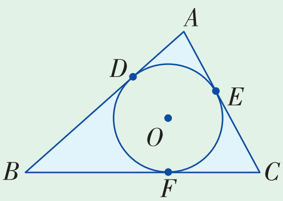
（第 6 题图）



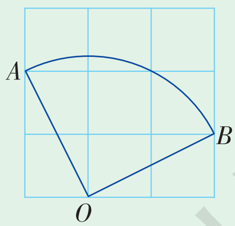
（第 7 题图）

7. 如图，线段 AB 与⊙O 相切于点 B，AO 的延长线交⊙O 于点 C，连接 BC，若$\angle ABC=120°$，$OC=3$，求$\overparen{BC}$ 的长.

***8.** 如图，⊙O是△ABC的内切圆. 求证：$AB+CF=AC+BF$.



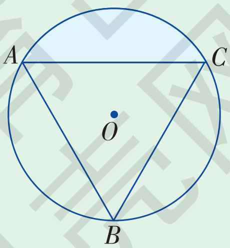
（第 8 题图）



（第 9 题图）

9. 如图，在3×3的方格纸中，每个小方格都是边长为 1 的正方形，O，A，B是格点，求$\overparen{AB}$ 的长及扇形 OAB的面积.

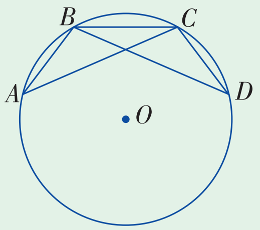
10. 如图，若⊙O 的内接正三角形 ABC 的边长为 12 cm，求图中蓝色部分的面积.



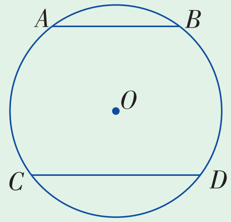
（第 10 题图）

B 组

11. 如图，点 A，B，C，D 是⊙O上的点，且 $AB=DC$，$\triangle ABC$与$\triangle DCB$全等吗？为什么？



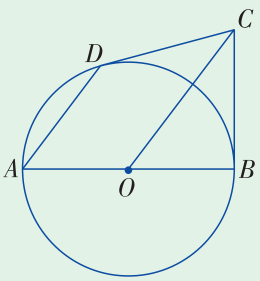
（第 11 题图）



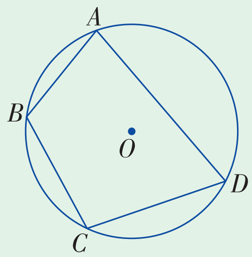
（第 12 题图）

***12.** 如图，⊙O 的弦 $AB /\!/ CD$，且 $AB=6$，$CD=8$，AB 与 CD 的距离为 7，求⊙O 的半径.

13. 如图，已知 AB 是⊙O 的直径，BC 与⊙O 相切于点B，⊙O 的弦 AD 平行于 OC. 求证：DC 是⊙O 的切线.



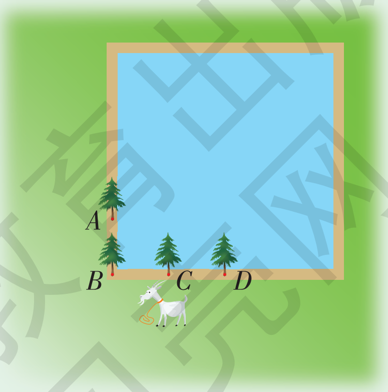
（第 13 题图）



（第 14 题图）

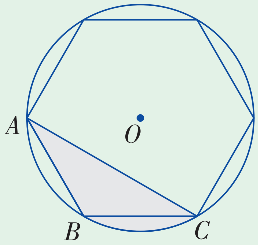
14. 如图，四边形 $ABCD$ 为⊙O的内接四边形，$\angle A=80°$，若圆周长为 18π，求 $\overset{\frown}{BAD}$ 的长度.

15. 如图是边长为 12 m 的正方形池塘，周围是草地，池塘边 A，B，C，D处各有一棵树，且 $AB=BC=CD=3$ m. 现在用长 4 m 的绳子将一头羊拴在其中的一棵树上，为了使羊在草地上活动区域的面积最大，应将绳子拴在哪棵树上呢？并求出最大面积.



（第 15 题图）

16. 如图，在半径为 6 cm 的圆内画一个正六边形，求阴影部分的面积.

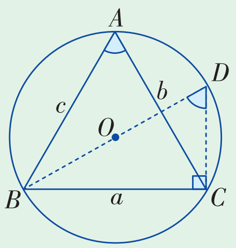


（第 16 题图）

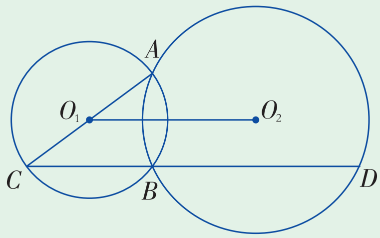
Ⓒ 组

17. 如图，在锐角三角形 ABC 中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，其外接圆的半径为R.

求证：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.（提示：连 BO 并延长交⊙O于 D，连CD）



（第 17 题图）

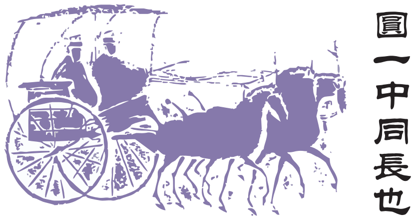


（第 18 题图）

18. 如图，⊙O_1 与⊙O_2 相交于 A，B 两点，连接 AO_1 并延长交⊙O_1 于点 C，连接 CB 并延长交⊙O_2 于点 D. 若 $O_1O_2=2$，求 CD 的长.

圆的再认识

圆是我们生活中最常见的几何形状．当人类仰望天空，太阳和圆月总给我们以圆的形象；而雨滴落在池塘里，圆形的涟漪便不断扩大．翻阅人类的历史，几乎所有的古老文明都留下了众多对圆认识的足迹．18 000 年前的山顶洞人曾经在兽牙上钻出圆孔，到了陶器时代，人们开始制作出许多圆形陶器．大约在 6 000 年前，美索不达米亚人做出了世界上第一个轮子——圆形木盘．大约在 4 000 多年前，人们将圆的木盘固定在木架下，这就成了最初的车子．



2 000 多年前，中国的墨子在《墨经》中给圆下了一个定义：“圆，一中同长也．”意思是说：圆有一个圆心，圆心到圆周的长都相等．这个定义比古希腊数学家欧几里得给圆下定义还要早．

说到圆，就不能不谈起数千年来被众多数学家所研究的圆周率．美索不达米亚人在做出世界上第一个轮子的时候，就已知道圆周率是 3．中国魏晋时期的刘徽于公元 263 年给《九章算术》作注时，发现“周三径一”只是圆内接正六边形周长和直径的比值．他创立了割圆术，认为圆内接正多边形边数无限增加时，周长就越逼近圆周长．他算到圆内接正 3 072 边形时，可得$\pi=\dfrac{3\,927}{1\,250}$．刘徽把极限的概念运用于解决实际数学问题中，这在世界数学史上也是一项重大的成就．祖冲之(公元 429—500 年) 在前人的计算基础上继续推算，求出圆周率在 3.141 592 6 与 3.141 592 7 之间，这一成果使得他成为世界上最早将圆周率精确到小数点后第 7 位的人．在欧洲，直到 16 世纪，德国人鄂图和安托尼兹才得到这个数值．现在有了电子计算机，圆周率已经算到了小数点后 12 400 亿位了．

随着人们对圆的认识不断深入，圆也被各民族文化所选择、运用.中国古人崇尚“方地为舆，圆天为盖”，因此圆在中国古建筑中有比较明显的体现. 例如天坛等古代祭神的场所便采用了圆形的屋顶，这给人们一种雄武、神圣和圆润辉煌之感.

圆的应用也大量见于雕塑、舞蹈等. 例如舞蹈家们在长期的舞蹈实践与研究中，发现以“圆”为中心设计舞蹈动作，舞姿优美. 这从唐代敦煌壁画乃至近现代的芭蕾舞、体操运动员的动作中，我们都可以看到这种回旋圆融的运动痕迹.

人们也常借助圆的均匀、对称的特性来表达公正、公平的寓意. 奥运会的五环标志，象征着全球五大洲人民，通过体育竞技构筑友谊；国际上重大会议都以圆桌会议的形式举行，此举在于不分大国、小国，国家之间一律平等.

随着时代的发展，“圆”也渗透进我们生活的方方面面，这也寓意着人们一直在渴望追求圆满的生活与人生.

日晷是我国古代利用日影测定时刻的仪器.

第3章 投影与视图

你读过李白的诗句：“举杯邀明月，对影成三人”吗？光线照射物体，会在平面上留下它的影子. 俗话说“形影不离”，影子和物体之间有着怎样的关系呢？你能从物体的影子判断物体的大致形状吗？

要回答这些问题，我们需要了解什么是投影，投影有哪些性质. 通过学习，我们将知道仅凭一个物体在一个投影面上的形状是很难确定它本身的形状，必须从多个方向对物体进行观察. 通过视图知识的学习，我们将知道如何通过最合理的投影方法来反映物体的全貌.

3.1 投 影

观察

太阳光照射物体，会在地面上留下影子.

（1）

在灯光旁做不同的手势，会在墙壁上留下影子.

（2）

图 3–1

如图 3–1（1）、（2）那样，光线照射物体，会在平面上（如地面、墙壁）留下它的影子，把物体映成它的影子叫作**投影**（projection）. 照射的光线叫投影线，投影所在的平面叫投影面. 物体在投影下的像简称为物体的**投影**.

由于太阳距离地球很远，从太阳射到地面的光线可以看成平行光线，因此这种投影称为**平行投影**（parallel projection）. 如图 3–2.

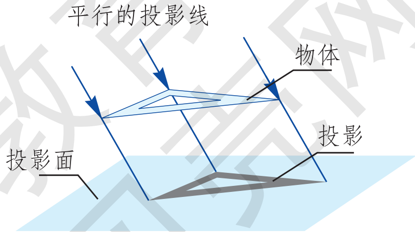
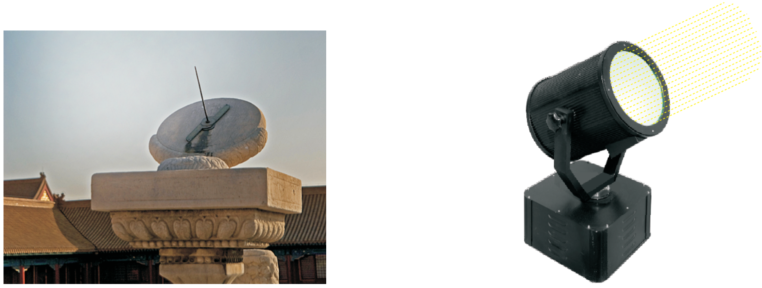


图 3–2

在中国古代，天文学家利用日影来测定时间，北京故宫中的日晷就是利用晷针投射在石盘面上的影子来显示时刻(如图 3–3(1))；人们还利用平行光线不易发散，照射得更远的特性制造了探照灯(如图 3–3(2))；在现代工业中，人们利用仪器发出平行光线，并照射产品的光洁面来检测划痕、微小气泡等.



(1)　　(2)

图 3–3

如果光线从一点发出(如灯泡、电影放映机、幻灯机的光线)，这样的投影称为**中心投影**(center projection)，如图 3–4.

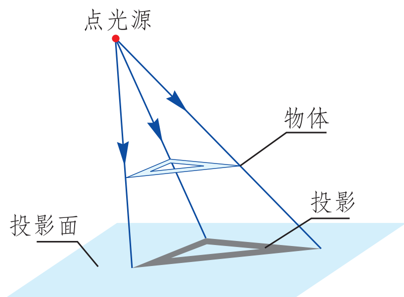


图 3–4

在生活中，人们常常利用中心投影来形成光影效果. 例如，艺人在银幕后，用灯光把人物剪影照射在银幕上，形成皮影戏. 电影放映机把电影胶片上的图像投影到银幕上，再配以声音，就形成了电影.

皮影戏

在平行投影中，如果投影线与投影面互相垂直，就称为**“正投影”**，如图 3–5.

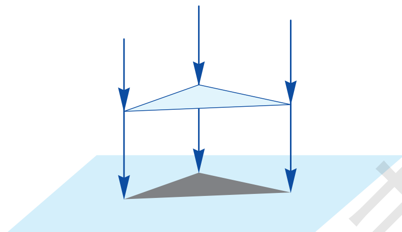


图 3–5

正投影属于平行投影.

动脑筋

如图 3-6，按照箭头所指的投影方向，分别画出线段 AB 在投影面 P 上的正投影的像 A_1B_1：(1)线段 AB 平行于投影面；(2)线段 AB 倾斜于投影面；(3)线段 AB 垂直于投影面. 试比较 AB 与 A_1B_1 的长度.

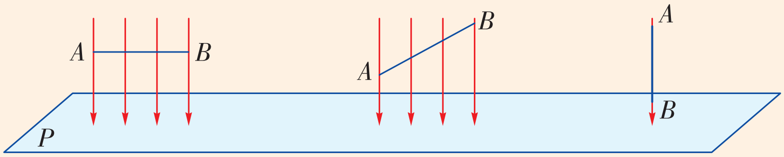


图 3-6

(1) AB 平行于投影面：AB________A_1B_1；

(2) AB 倾斜于投影面：AB________A_1B_1；

(3) AB 垂直于投影面：A_1 与 B_1________.

做一做

如图 3-7，按照箭头所指的投影方向，分别画出纸板 $ABCD$ 在投影面 P 上的正投影：(1)纸板平行于投影面；(2)纸板倾斜于投影面；(3)纸板垂直于投影面. 说一说哪一种情形下的纸板的正投影不改变纸板的形状和大小.

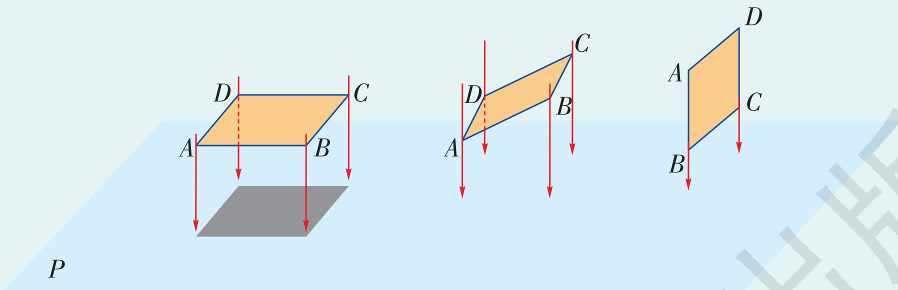


图 3-7

当纸板 $ABCD$ 平行于投影面 P 时，纸板的正投影与纸板的形状、大小一样.

当纸板 $ABCD$ 倾斜或垂直于投影面 P 时，纸板的形状和大小发生了变化.

事实上，当物体的某个面平行于投影面时，这个面的正投影与该面的形状、大小完全相同.

例 如图3-8，按照箭头所指的投影方向，画出长方体的正投影，并标明尺寸：

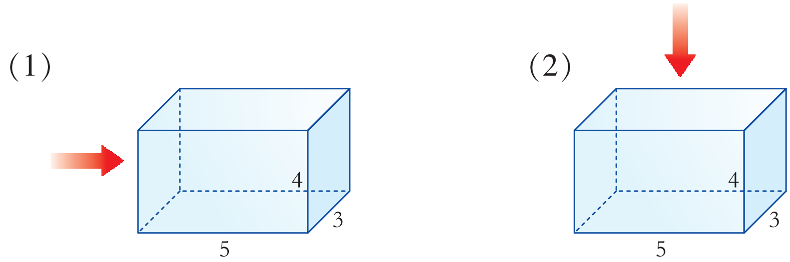


图 3-8

解 （1）正投影是一个矩形，如图3-9(1).

（2）正投影是一个矩形，如图 3-9(2).

(1) (2)

图 3-9

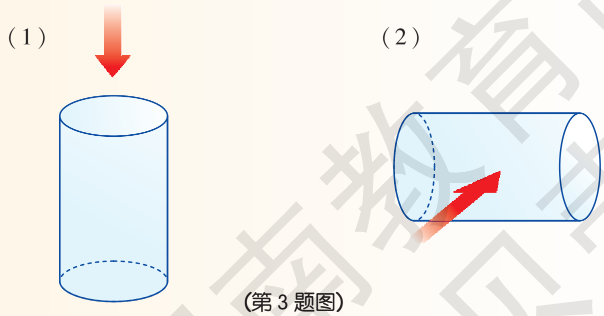
练习

1. （1）上午站在太阳光下，越接近正午，人的影子越______.

（2）下午站在太阳光下，越接近傍晚，人的影子越______.

2. 你能举出生活中平行投影和中心投影的例子吗？

3. 按照箭头所指的投影方向，画出圆柱形物体的正投影.



（第 3 题图）

习题 3.1

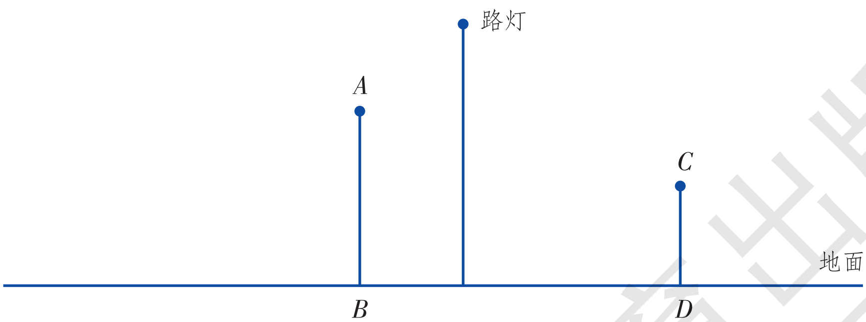
A 组

1. 一个与地面平行的圆盘，在与地面垂直的太阳光线照射下，影子是什么形状？在与地面倾斜的太阳光线照射下，影子还会是圆盘形状吗？

2. 下面是对同一棵树分别在中午和下午拍的两张照片，哪张照片是下午拍的？

（第 2 题图）

3. 路灯下有两根木棍AB，CD，请画出夜晚时木棍在路灯下的影子.



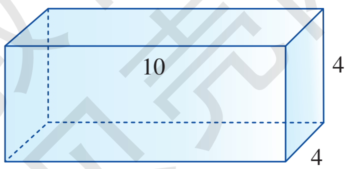
（第 3 题图）

4. 画出右图中长方体的正投影：

（1）投影线由物体的前方射到后方；

（2）投影线由物体的左方射到右方；

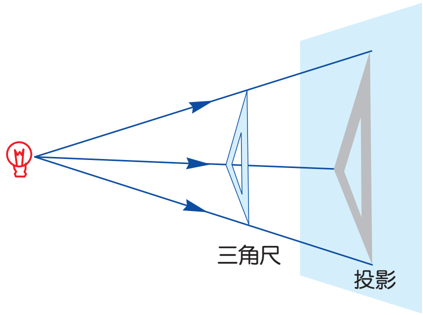
（3）投影线由物体的上方射到下方.



（第 4 题图）

B 组

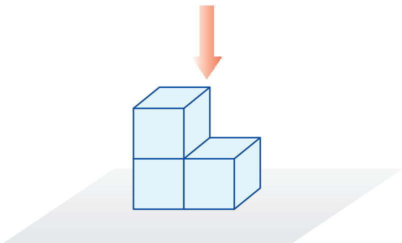
5. 如图，三角尺在灯光照射下形成投影，已知三角尺与其投影的相似比为2:5，且三角尺的一边长为8 cm，则投影三角尺的对应边长为（　　）



（第 5 题图）

（A）8 cm　　（B）20 cm　　（C）3.2 cm　　（D）10 cm

6. 如图是一个立体图形的示意图，若光线由上至下照射这个物体，试问该物体各个面的正投影分别是什么？



（第 6 题图）

3.2 直棱柱、圆锥的侧面展开图

观察

观察图 3–10 中的立体图形，它们的形状有什么共同特点？

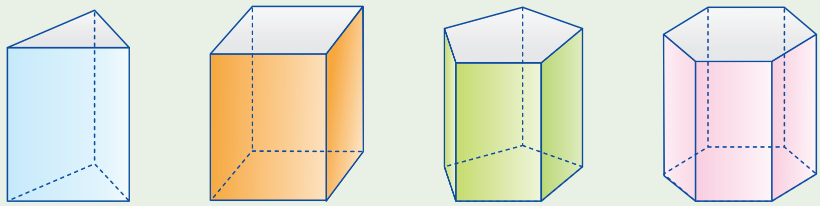


图 3–10

在几何中，我们把上述这样的立体图形称为**直棱柱**，其中“棱”是指两个面的公共边，它具有以下特征：(1)有两个面互相平行，称它们为底面；(2)其余各个面均为矩形，称它们为侧面；(3)侧棱(指两个侧面的公共边)垂直于底面.

根据底面图形的边数，我们分别称图 3–10 中的立体图形为直三棱柱、直四棱柱、直五棱柱、直六棱柱. 例如，长方体和正方体都是直四棱柱. 底面是正多边形的直棱柱叫作正棱柱.

做一做

收集几个直棱柱模型，再把侧面沿一条侧棱剪开，它们的侧面能否展开成平面图形，是矩形吗？

将直棱柱的侧面沿着一条侧棱剪开，可以展开成平面图形，像这样的平面图形称为直棱柱的侧面展开图. 如图 3–11 所示是一个直四棱柱的侧面展开图.

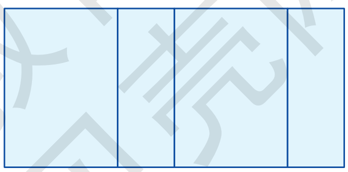


图 3–11

直棱柱的侧面展开图是一个矩形，这个矩形的长是直棱柱的底面周长，宽是直棱柱的侧棱长(高).

例 1 一个食品包装盒的侧面展开图如图 3–12 所示，它的底面是边长为 2 的正六边形，这个包装盒是什么形状的几何体？试根据已知数据求出它的侧面积.

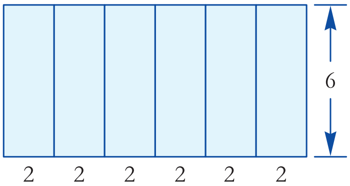


图 3–12

解 根据图示可知该包装盒的侧面是矩形，又已知上、下底面是正六边形，因此这个几何体是正六棱柱（如图 3–13 所示）.

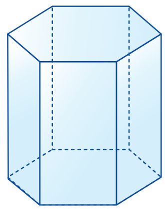


图 3–13

由已知数据可知它的底面周长为 $2\times6=12$，

因此它的侧面积为 $12\times6=72$.

观察

图 3–14 是雕塑与斗笠的形象，它们的形状有什么特点？

图 3–14

在几何中，我们把上述这样的立体图形称为**圆锥**，圆锥是由一个底面和一个侧面围成的图形，它的底面是一个圆，连接顶点与底面圆心的线段叫作圆锥的**高**，圆锥顶点与底面圆上任意一点的连线段都叫作圆锥的**母线**，母线的长度均相等. 如图 3–15，PO 是圆锥的高，PA 是母线.

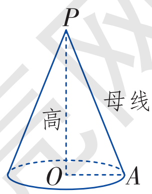


图 3–15

把圆锥沿它的一条母线剪开，它的侧面可以展开成平面图形，像这样的平面图形称为圆锥的侧面展开图，如图 3–16 所示.

圆锥的侧面展开图是一个扇形. 这个扇形的半径是圆锥的母线长 PA，弧长是圆锥底面圆的周长.

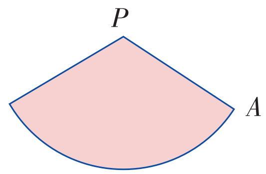


图 3–16

例 2 如图 3–17，小刚用一张半径为 24 cm 的扇形纸板做一个圆锥形帽子(接缝忽略不计)，如果做成的圆锥形帽子的底面半径为 10 cm，那么这张扇形纸板的面积 S 是多少?

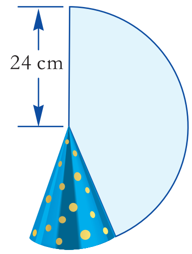


图 3–17

分析 圆锥形帽子的底面周长就是扇形的弧长.

解 扇形的弧长(即底面圆周长)为

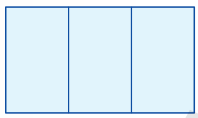
$$l=2\times\pi\times 10=20\pi(\text{cm}).$$

所以扇形纸板的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 20\pi\times 24=240\pi(\text{cm}^2)$.

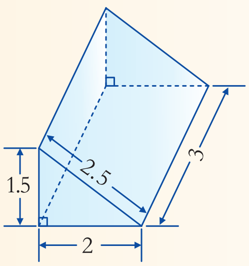
练习

1. 某个立体图形的侧面展开图如图所示，它的底面是正三角形，那么这个立体图形是（　　）

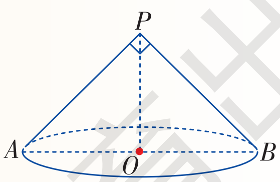
（A）三棱柱　　（B）四棱柱　　（C）三棱锥


（第 1 题图）

2. 如图为一直三棱柱，试画出它的侧面展开图，并求侧面展开图的面积.



（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. 如图，圆锥的顶点为 P，AB 是底面⊙O 的一条直径，$\angle APB=90°$，底面半径为 r，求这个圆锥的侧面积和表面积.

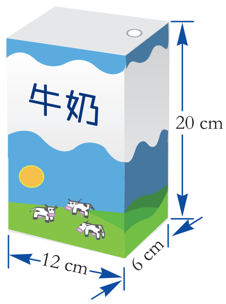
习题 3.2

A 组

1. 有一种牛奶包装盒如图所示. 为了生产这种包装盒，需要先画出侧面展开图纸样.

(1) 你能画出牛奶盒的侧面展开图吗?

(2) 求牛奶盒的侧面积和表面积.

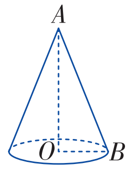


(第 1 题图)

2. 一个正五棱柱的侧面积为250 cm^2，高为10 cm. 如果把它的底面边长变为原来的 2 倍，高不变，那么它的侧面积变为多少?

3. 一个圆锥的底面半径为 6 cm，它的侧面展开图是圆心角为 240°的扇形，求圆锥的母线长.

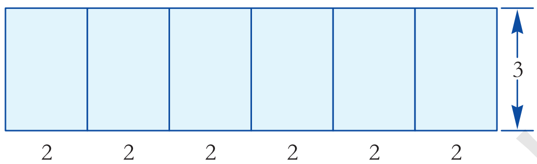
4. 如图，已知一个圆锥的母线 $AB=10$ cm，底面半径 $OB=5$ cm，求圆锥的侧面积.



(第 4 题图)

B 组

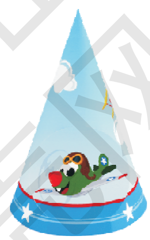
5. 如图是一个正六棱柱的侧面展开图，计算这个正六棱柱的表面积和体积.



(第 5 题图)

6. 用一张A4纸制作一个长方体包装盒，使其体积尽可能大.

7. 请制作如图所示的纸帽，使纸帽的高为 30 cm，底面半径为 16 cm（要求画出纸帽的侧面展开图的示意图,并标明尺寸).



(第 7 题图)

3.3 三视图

议一议

如图 3-18，在正午的阳光下，一个物体在地面上的影子是一个圆，你能确定这个物体的形状吗？

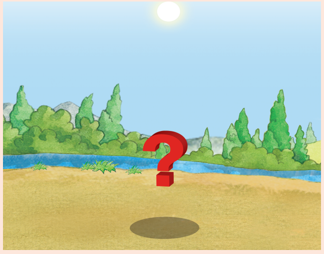


图 3-18

影子是圆的物体可以是圆盘，可以是球，在正午的阳光下，还可以是立着的圆柱，……

单凭在地面上的影子，不可以确定物体的形状.

因此，只从一个方向看物体，不能确定物体的形状，应该从多个方向对物体进行观察.

动脑筋

制造一个圆柱形家具，为了让工人师傅知道工件的准确形状和大小，设计人员应该如何画出这个工件的图呢？

上一节我们知道在正投影下，当物体的某个面平行于投影面时，这个面的正投影不改变这个面的形状和大小. 按照这个原理，当我们从某一角度观察物体在这种正投影下的像就称为该物体的一个**视图**.

可以采用下述方法来画圆柱的视图.

第一步：从前往后看，画出圆柱在立于它的后面的竖直平面上的正投影，如图 3–19，这称为“主视图”．通俗地说，就是从圆柱的正面看这个圆柱．

第二步：从左往右看，画出圆柱在立于它的右边的竖直平面上的正投影，这称为“左视图”. 通俗地说，就是从圆柱的左面看这个圆柱.

第三步：从上往下看，画出圆柱在置于它的下方的水平面上的正投影，这称为“俯视图”. 通俗地说，就是从圆柱的上面看这个圆柱.

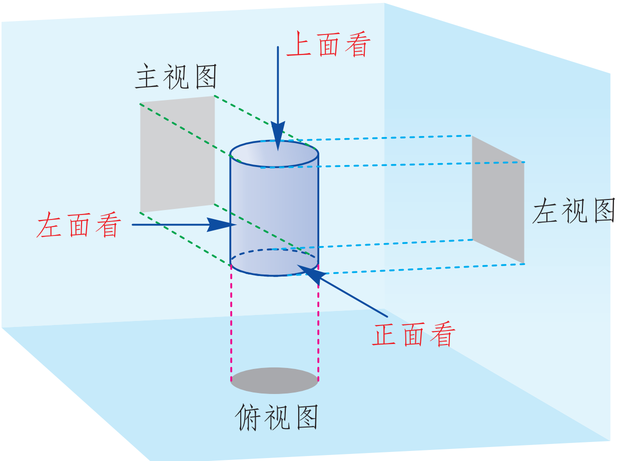
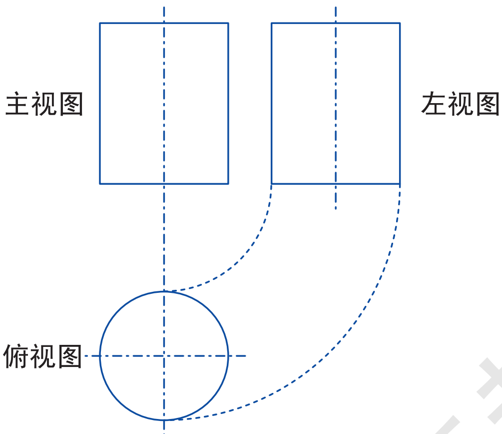


图 3–19

从前后、左右、上下三个方向观察物体，能够比较全面地了解物体的大小和形状，我们把主视图、左视图、俯视图统称为“**三视图**”．如图3–20，即为圆柱的三视图.



在画三视图时，俯视图在主视图的下边，左视图在主视图的右边.

图 3–20

为表示圆柱、圆锥、球等几何体的对称轴，可在视图中加画点划线.

例 1 画球的三视图（如图3–21）.

分析 一个球无论在哪个平面上的正投影都是圆，并且圆的半径与球的半径相等，所以球的主视图、左视图、俯视图都是半径与球的半径相等的圆及其内部.

解 这个球的三视图如图 3–22 所示.

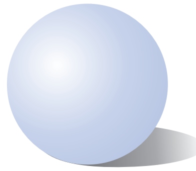


图 3–21

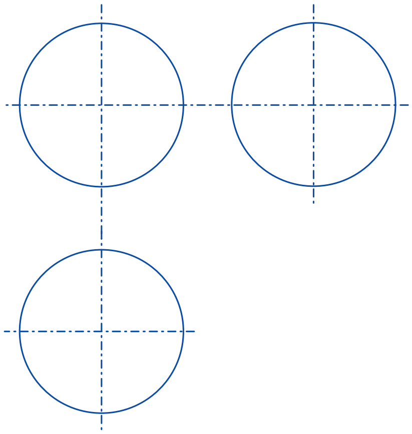


图 3–22

例 2 画圆锥的三视图(如图3–23).

分析 从正面看这个圆锥，它的投影是一个等腰三角形及其内部；从左面看这个圆锥，它的投影是和主视图一样的等腰三角形及其内部；从上面看这个圆锥，它的投影是一个圆及其内部，其中圆锥顶点的投影是这个圆的圆心.

解 这个圆锥的三视图如图 3–24 所示.

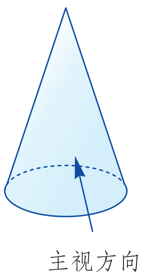


图 3–23

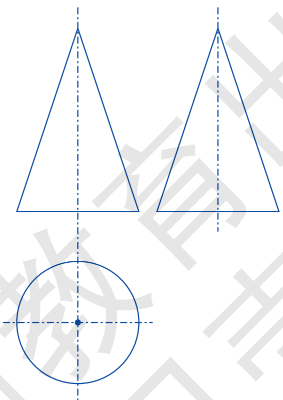


图 3–24

例 3 如图 3–25，这是一个底面为等边三角形的正三棱柱，画出它的三视图.

分析 从正面看，这个正三棱柱的投影是一个矩形及其内部，其中侧棱 C_1C 的投影是这个矩形的上、下两边中点的连线段，由于看不见，因此用虚线表示；从左面看，这个正三棱柱的投影是一个矩形及其内部；从上面看，这个正三棱柱的投影是正三角形及其内部.

解 这个正三棱柱的三视图如图 3–26 所示.

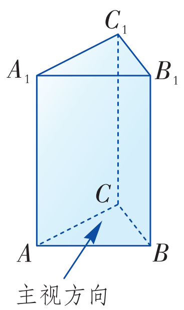


图 3–25

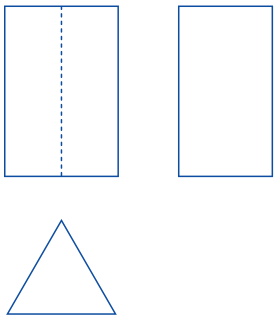
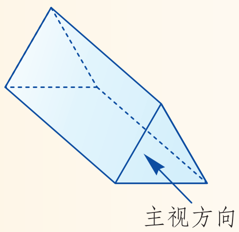


图 3–26

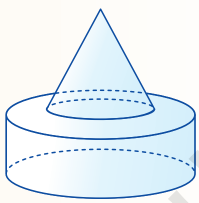
你能看出这个正三棱柱的主视图与左视图的区别吗？

练习

1. 画出如图摆放的正三棱柱的三视图.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 画出如图所示物体的三视图.

三视图可以反映物体在各个方向的形状与大小，因此设计人员可以把设计的作品用三视图表示出来，再交由工人去制造. 你能根据简单物体的三视图描述几何体吗？

说一说

1. 图 3–27 所给的三视图表示什么立体图形？

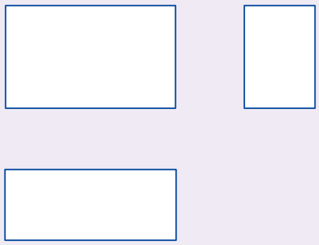


图 3–27

2. 图 3–28 所给的三视图表示什么立体图形？

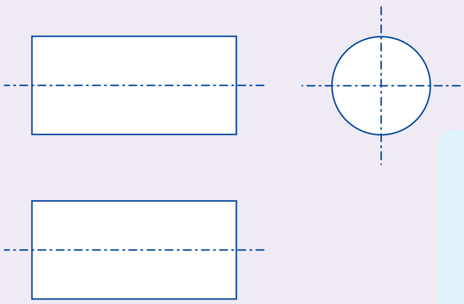


图 3–28

由三视图想象立体图形，要先根据主视图、俯视图和左视图想象立体图形的前面、上面和左侧面，然后再综合起来考虑整体图形.

例 4 根据图 3–29 所给的三视图描述物体的形状.

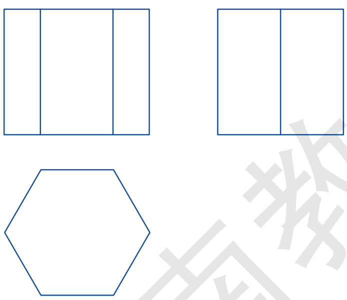


图 3–29

分析　由主视图可知，物体的正面是矩形的样子，且中间有两条棱(实线)可见到；由俯视图可知，由上向下看物体是正六边形的样子；由左视图可知，物体的侧面是矩形的样子，且中间有一条棱可见到．综合各视图可知，该物体是正六棱柱．

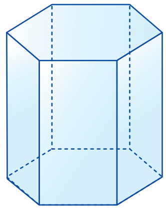


图 3–30

解　物体是正六棱柱，如图 3–30 所示.

例 5　如图3–31是一个零件的三视图，试描述出这个零件的形状.

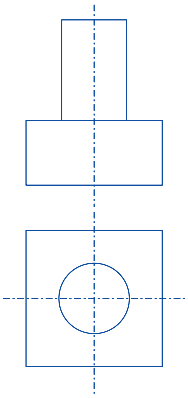


图 3–31

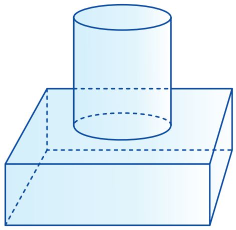


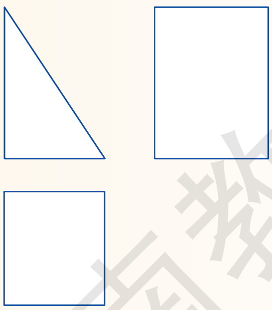
图 3–32

解　这个零件由两部分组成：上面是一个圆柱，下面是一个长方体，圆柱立于长方体的中央（如图3–32）.

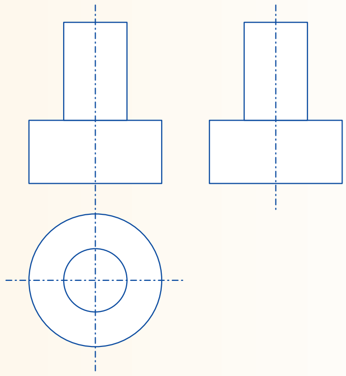
练习

1. 下图所给的三视图表示什么立体图形？

(1)

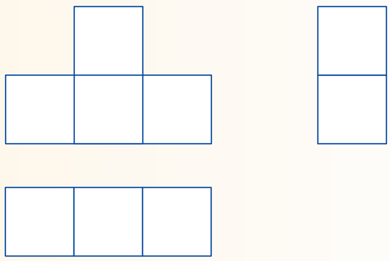


（2）



（第 1 题图）

2. 用四块一样的正方体，根据下图所示的三视图，摆出它表示的立体图形.

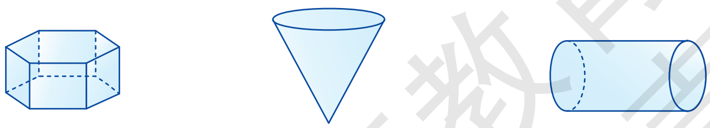


（第 2 题图）

习题 3.3

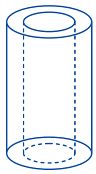
A 组

1. 画出下列立体图形的三视图：

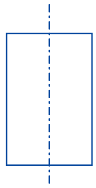


（第 1 题图）

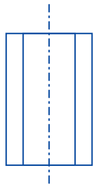
2. 如图，空心圆柱的左视图是（　　）



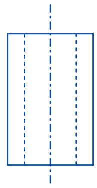
（第 2 题图）



（A）



（B）



（C）

3. 如图，将两个大小完全相同的杯子叠放在一起，则该实物的俯视图是（　　）

（第 3 题图）

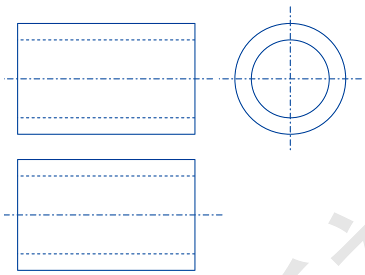
（A）

（B）

（C）

（D）

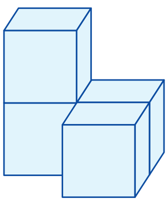
4. 如图是一个物体的三视图，试描述这个物体的形状. 现实生活中什么样的物体像这种几何体？



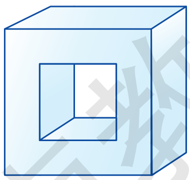
（第 4 题图）

B 组

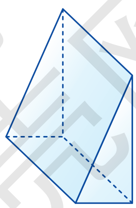
5. 画出下图中立体图形的三视图.



（1）



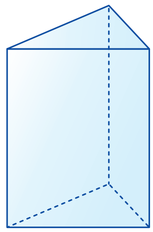
（2）



（3）

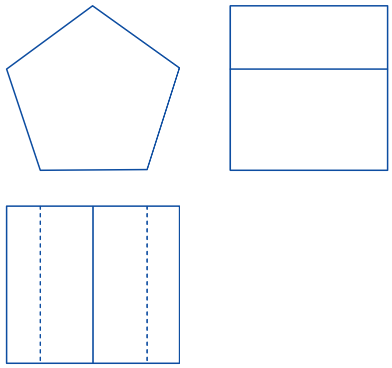
（第 5 题图）

6. 如图是一个直三棱柱，它的底面是一个直角三角形及其内部，两条直角边长分别为3 cm，4 cm，直三棱柱的高为 6 cm. 画出这个直三棱柱的三视图.



（第 6 题图）

7. 根据下图所给的三视图描述物体的形状.



（第 7 题图）

小结与复习

回顾

1. 试结合生活实例说明什么是中心投影，什么是平行投影.

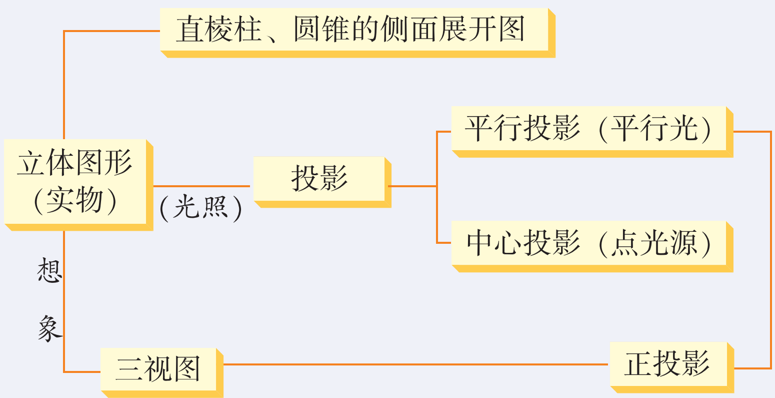
2. 什么是正投影？正投影有什么性质？

3. 三视图包括哪三个方向的视图？

4. 怎样根据三视图想象和描述物体的形状？

5. 直棱柱、圆锥的侧面展开图是什么图形？你能根据展开图想象和制作实物模型吗？

本章知识结构



注意

1. 在平行投影中，如果投影线与投影面互相垂直，称为“正投影”. 当物体的某个面平行于投影面时，这个面的正投影不改变这个面的形状和大小，三视图就是根据这个原理来反映物体的形状的.

2. 三视图的位置有规定：俯视图在主视图的下边，左视图在主视图的右边.

复习题 3

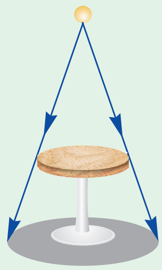
A 组

1. (1) 某日的上午或下午，观察在太阳光线下，一根直立在地面上的棍子，它的影子是不是一条线段？

(2) 观察在路灯下，一根直立在地面上的棍子，它的影子是不是一条线段？

由(1)、(2)小题，你能猜测在平行投影或中心投影下，在同一条直线上的点，它们的像是否仍在同一条直线上？

2. 如图是圆桌正上方的灯泡(看作一个点)发出的光线照射平行于地面的桌面后，在地面上形成阴影（圆形）的示意图. 已知桌面的直径为 1.2 m，桌面距离地面1 m，若灯泡距离地面 3 m，求地面上的投影面积(精确到 0.01 m^2).



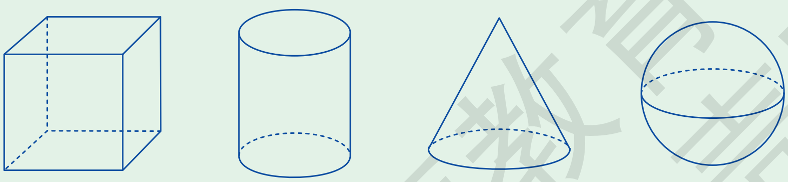
(第 2 题图)

3. (1) 已知一个底面为正方形的直棱柱的侧面展开图是一个边长为 8 的正方形，求这个直棱柱的表面积和体积；

(2) 已知一个圆锥的底面半径为3 cm，它的侧面展开图是圆心角为120°的扇形，求圆锥的侧面积.

4. 下列四个立体图形中，它们各自的三视图有两个相同，而另一个不同的是（　　）

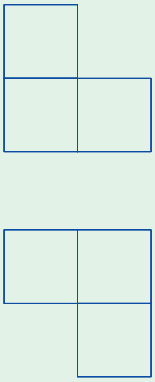
(A) ①②　　(B) ②③　　(C) ②④　　(D) ③④



①正方体　②圆柱　③圆锥　④球

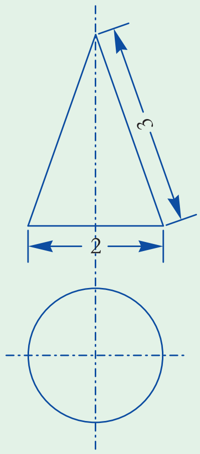
(第 4 题图)

5. 由若干个相同的小立方体搭成的物体的三视图如图所示，求搭成这个物体的小立方体的个数是多少.



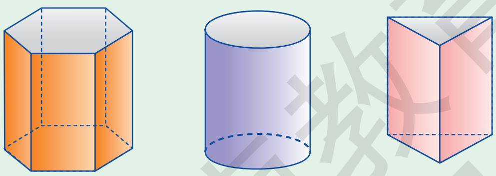
（第 5 题图）

6. 一个物体的三视图如下，其中主视图和左视图都是腰长为 3、底边为2 的等腰三角形，根据三视图求这个物体的表面积，并画出该物体的侧面展开图.



（第 6 题图）

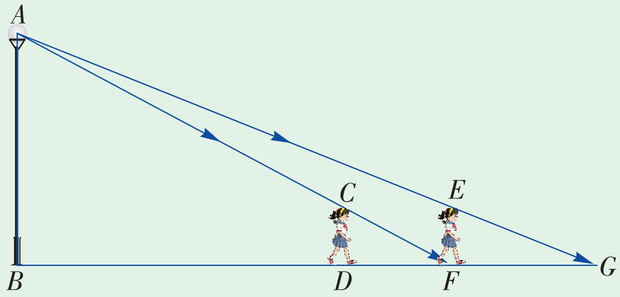
7. 设计一个你喜欢的笔筒，画出三视图和侧面展开图，并制作笔筒模型.



（第 7 题图）

B 组

8. 如图，人行道上有一路灯杆 AB，其顶端 A 点发出灯光. 小芳和小明沿人行道直行，当小芳在点 D 处时，小明测得她的影长 $DF=3$ m，小芳继续前行到达 F 处，此时测得她的影长 $FG=4$ m，如果小芳的身高为 1.6 m，求路灯杆 AB 的高.

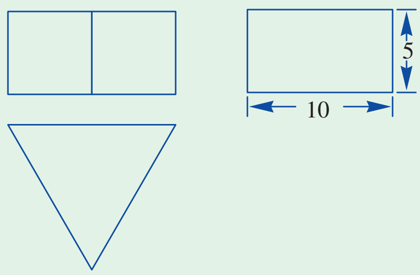


（第 8 题图）

9. 如图为一机器零件的三视图.

（1）请写出符合这个机器零件形状的几何体的名称；

（2）若俯视图中三角形为等边三角形，那么请根据图中所标的尺寸，画出该零件的侧面展开图，并计算其表面积.

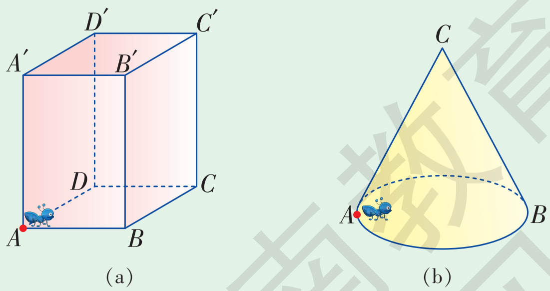


（第 9 题图）

C 组

10. （1）如图(a)，一个正四棱柱的底面边长为 4 cm，侧棱长为 6 cm. 一只蚂蚁从棱柱的底面 A 处沿着侧面爬到 C'处，蚂蚁怎样爬路程最短？

（2）如图(b)，一个圆锥底面圆周 A 处有一只蚂蚁，它要沿圆锥侧面爬一圈后回到 A 处，请你结合圆锥的侧面展开图设计一条最短路径.



（第 10 题图）

第4章
概　率

足球比赛前，主裁判用抛硬币的方式决定甲、乙两队谁先选边．这种做法，对甲、乙双方都公平吗？

在自然界和人类社会中有许多现象具有这样的特点：在基本条件相同的情况下，却可能出现不同的结果，究竟出现哪一种结果，随机遇而定．这类现象称为随机现象．而随机事件的可能性有大小之分，如何用一个数值来表示呢？这就需要学习本章的新知识——概率．

4.1 随机事件与可能性

动脑筋

1. 晴天的早晨，太阳一定从东边升起来吗？

2. 通常，在 1 个标准大气压下，水加热到 100 ℃会沸腾吗？

3. “种瓜”能“收豆”吗？

4. 买 1 张福利彩票，开奖后，一定能中奖吗？

5. 掷一枚均匀硬币，落下时，一定是正面朝上吗？

问题 1，2 的回答都是“一定”，问题 3 的回答是“一定不”．在一定条件下，必然发生的事件称为必然事件；一定不发生的事件称为不可能事件．必然事件与不可能事件统称为**确定性事件**.

问题 4，5 的回答都是“不一定”，买 1 张彩票，开奖后，可能中奖，也可能没有中奖；掷一枚硬币，落下时，可能正面朝上，也可能反面朝上．像这样的一类现象，在基本条件相同的情况下，可能出现不同的结果，究竟出现哪一种结果，随“机遇”而定，带有偶然性，这类现象称为**随机现象**．在随机现象中，如果一件事情可能发生，也可能不发生，那么称这件事情是**随机事件**.

通常，确定性事件和随机事件统称为事件，一般用大写英文字母 A，B，…表示.

说一说

举出你在日常生活中见到的随机现象的例子.

经过有信号灯的十字路口时，可能遇到红灯，也可能遇到绿灯.

我每次跑 50 m 的时间.

动脑筋

掷一枚均匀骰子(如图 4–1)，骰子的 6 个面上分别刻有 1，2，3，4，5，6的点数，试问：下列哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件？

(1) 出现的点数大于 0；

(2) 出现的点数为 7；

(3) 出现的点数为 3.

图 4–1

我们可以重复进行掷骰子试验，从试验结果可以发现，每次掷骰子的结果不一定相同，1，2，3，4，5，6 点这 6 种情况都有可能出现. 因此，事件(1)是必然事件；而骰子中的 6 个面上没有 7 点，因此事件(2)是不可能事件；事件(3)可能发生，也可能不发生，因此这是随机事件.

练习

下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件？

(1) 掷一枚 6 个面上分别刻有 1，2，…，6 点的均匀骰子，朝上一面的点数是偶数；

(2) 在全是红球的袋中任意摸出一球，结果是白球；

(3) 地球绕着太阳转.

动脑筋

1. 掷一枚均匀硬币，当硬币落地后，是“正面朝上”的可能性大，还是“反面朝上”的可能性大？

2. 一个袋中装有 8 个球：5 红 3 白，球的大小和质地完全相同. 搅均匀后，从袋中任意取出一球，是“取得红球”的可能性大，还是“取得白球”的可能性大？

对于问题 1，由于硬币是均匀的，没有理由说明哪一个面朝上的可能性更大，所以，硬币出现“正面朝上”和“反面朝上”的可能性是一样大的.

对于问题 2，一次摸球可能“摸出红球”，也可能“摸出白球”，但是，袋中的红球多于白球，又已经搅均匀，所以“摸出红球”的可能性大于“摸出白球”的可能性.

例 如图 4–2，一个质地均匀的小立方体有 6 个面，其中 1 个面涂成红色，2 个面涂成黄色，3 个面涂成蓝色. 在桌面掷这个小立方体，正面朝上的颜色可能出现哪些结果？这些结果发生的可能性一样大吗？

图 4–2

解 小立方体落在桌面后，可能出现：“红色朝上”“黄色朝上”“蓝色朝上”这 3 种情况.

由于小立方体涂成蓝色的面最多，黄色次之，红色最少，因此，发生“蓝色朝上”的可能性最大，发生“黄色朝上”的可能性次之，发生“红色朝上”的可能性最小.

想一想，若请你来设计这个小立方体的颜色，你有什么办法可使得“红色朝上”“黄色朝上”“蓝色朝上”的可能性一样大？

议一议

袋中装有许多大小、质地都相同的球，搅均匀后，从中取出 10 个球，发现有 7 个红球、3 个白球；将取出的球放回后搅乱，又取出 10 个球，发现有 8 个红球、2 个白球.

(1) 是否可以认为袋中的红球有可能比白球多？

(2) 能否肯定袋中的红球一定比白球多？

(3) 袋中还可能有其他颜色的球吗？

从两次取球的情况分析，因为每次取得的红球多，所以我猜想袋中的红球很可能比白球多，因而取得红球的可能性大；但每次取球都是搅乱后随意取出的，不可避免带有偶然性，所以不能绝对肯定红球一定比白球多.

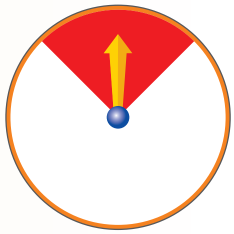
取球有一定的偶然性，因此袋中有可能还有其他颜色的球，只是这两次取球还没有取到它们.

练习

1. 比较下列随机事件发生的可能性大小.

(1) 如图，转动一个能自由转动的转盘，指针指向红色区域和指向白色区域；

(2) 小明和小亮做掷硬币的游戏，他们商定：将一枚硬币掷两次，如果两次朝上的面相同，那么小明获胜；如果两次朝上的面不同，那么小亮获胜. 谁获胜的可能性大?



(第 1 题图)

2. 10 张扑克牌中有 3 张黑桃、2 张方片、5 张红桃. 从中任意抽取一张，抽到哪一种花色牌的可能性最大? 抽到哪一种花色牌的可能性最小?

习题 4.1

A 组

1. 下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件?

(1) 打开电视机，正在播放新闻；

(2) 树上掉下的苹果落到地面；

(3) 种瓜得瓜；

(4) 三角形三边之长为 4 cm，5 cm，10 cm；

(5) 买一张长途汽车票，座位号是奇数号；

(6) 掷两枚均匀骰子，点数之和为 8 点.

2. 从分别写有 1，2，…，49，50 的 50 张卡片中任取一张，试比较随机事件 A，B 的可能性的大小.

(1) A：取出的卡片上的数是奇数；

B：取出的卡片上的数是偶数.

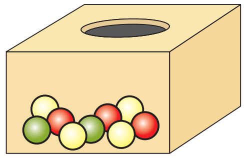
(2) A：取出的卡片上的数是 3 的倍数；

B：取出的卡片上的数是 5 的倍数.

3. 一个盒子里有 3 个红球，2 个绿球和 4 个黄球，球的大小、质地完全相同，搅均匀后从盒中随机地摸出 1 个球.

（1）每种颜色球被取出的可能性一样大吗？

（2）你能怎样改变各色球的数目，使得每种颜色球被取出的可能性一样大？



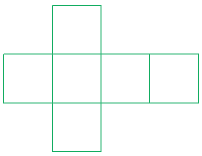
（第 3 题图）

B 组

4. 甲、乙两人练习投篮，各投 50 次，甲投中 40 次，乙投中 27 次，若两人各再投一次，你认为谁投中的可能性较大？他一定能投中吗？

5. 李伟、王亮、张明三人得到朋友送来的一张电影票. 这张票该给谁，一时不好确定. 李伟出了个主意，他说："我们来掷两枚硬币，如果出现两个正面，票就给王亮；如果出现两个反面，就给张明；如果一正一反，票就归我了." 王亮忙说："这个办法好，我赞成. 掷两枚硬币刚好有三种结果，票也正好分给我们三人中的一个." 李伟的方法公平吗？

6. 用硬纸板做一个小正方体，并在正方体的 6 个面上各写上 1 个数字，使掷出 "1" 朝上的可能性比掷出 "7" 朝上的可能性大 .



（第 6 题图）

4.2 概率及其计算

4.2.1 概率的概念

在同样的条件下，某一随机事件可能发生也可能不发生，那么，它发生的可能性究竟有多大？能否用数值来进行刻画呢？

我们来看两个试验：

1. 在一个箱子里放有 1 个白球和 1 个红球，它们除颜色外，大小、质地都相同. 从箱子中随机取出 1 个球，它可能是红球也可能是白球，由于球的大小和质地都相同，又是随机摸取，所以每个球被取到的可能性是一样大的. 很自然地，我们用$\frac{1}{2}$表示取到红球的可能性，同理，取到白球的可能性也是$\frac{1}{2}$.

2. 一个能自由转动的游戏转盘如图 4–3 所示，红、黄、绿 3 个扇形的圆心角度数均为 120°，让转盘自由转动，当它停止后，指针指向的区域可能是红色、黄色、绿色这 3 种情况中的 1 种. 由于每个扇形的圆心角度数相等，对指针指向“红色区域”“黄色区域”“绿色区域”这 3 个事件，发生的条件完全相同，所以出现每种情况的可能性大小相等. 很自然地，我们用$\frac{1}{3}$表示指针指向红色区域、黄色区域和绿色区域的可能性大小.

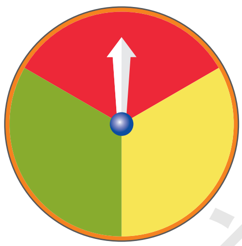


图 4–3

上述例子和其他大量例子表明，在随机现象中，出现的每一个结果的可能性大小，能够用一个不超过 1 的非负数来刻画. 一般地，对于一个随机事件 A，我们把刻画其发生可能性大小的数值，称为随机事件 A 发生的**概率**(probability)，记为 $P(A)$.

例如，上述摸球试验中，P(摸出红球)$=\frac{1}{2}$，P(摸出白球)$=\frac{1}{2}$.

又如，在转盘试验中，P(指针指向红色区域)$=\frac{1}{3}$，……

动脑筋

把分别写有数字 1，2，3，4，5 的 5 张一样的小纸片捻成小纸团放进盒子里，摇匀后，随机取出一个小纸团，试问：

(1) 取出的序号可能出现几种结果，每一个小纸团被取出的可能性一样吗？

(2) “取出数字 3”是什么事件？它的概率是多少？

(3) “取出数字小于 4”是什么事件？它的概率是多少？

(4) “取出数字小于 6”是什么事件？它的概率是多少？

(5) “取出数字 6”是什么事件？它的概率是多少？

(1) 在上述试验中，可能取出序号为 1，2，3，4，5 中的任意一个小纸团，而且这 5 个纸团被取出的可能性都相等.

(2) “取出数字 3”是随机事件，它包含 5 种可能结果中的 1 种可能结果，

因此，P(取出数字 3) $=\dfrac{1}{5}$.

(3) “取出数字小于 4”是随机事件，它包含 5 种可能结果中的 3 种可能结果，即取出数字 1，2，3，

因此，P(取出数字小于 4) $=\dfrac{3}{5}$.

(4) “取出数字小于 6”是必然事件，它包含全部 5 种可能结果，即取出数字 1，2，3，4，5，无论取到其中的哪个数字都小于 6，

因此，P(取出数字小于 6) $=\dfrac{5}{5}=1$.

(5) 由于盒子中没有数字“6”这个小纸团，因此，这一事件是不可能事件，它包含的结果数是 0，因此，P(取出数字 6) $=\dfrac{0}{5}=0$.

一般地，如果在一次试验中，有 n 种可能的结果，其中每一种结果发生的可能性相等，那么出现每一种结果的概率都是 $\dfrac{1}{n}$. 如果事件 A 包含其中的 m 种可能的结果，那么事件 A 发生的概率

$$P(A)=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m\text{个}}=\frac{m}{n}. \qquad ①$$

事件 A 包含的可能结果数

一次试验所有可能出现的结果数

在①式中，由 m 和 n 的含义可知 $0 \leqslant m \leqslant n$，因此 $0 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 1$，

即 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

特别地，当 A 为必然事件时，$P(A)=1$；

当 A 为不可能事件时，$P(A)=0$.

事件发生的概率越大，则该事件就越有可能发生.

事件发生的可能性越来越大

不可能事件 → 必然事件

概率为 0 ← 概率为 1

事件发生的可能性越来越小

例 1 假定按同一种方式掷两枚均匀硬币，如果第一枚出现正面(即正面朝上)，第二枚出现反面，就记为(正，反)，如此类推(如图 4–4).

图 4–4

(1) 写出掷两枚硬币的所有可能结果.

(2) 写出下列随机事件发生的所有可能结果.

A：“两枚都出现反面”；

B：“一枚出现正面、一枚出现反面”；

C：“至少有一枚出现反面”.

(3) 求事件 A，B，C 的概率.

解 (1) 掷两枚均匀硬币，所有可能的结果有 4 个，即(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)，而且这 4 个结果出现的可能性相等.

(2) A，B，C 事件发生的所有可能结果分别是：

A：(反，反)；

B：(正，反)，(反，正)；

C：(反，正)，(正，反)，(反，反).

(3) 由(1)、(2)可知，

$$P(A)=\frac{1}{4},\ P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ P(C)=\frac{3}{4}.$$

练习

1. 掷一枚均匀的骰子，骰子的 6 个面上分别刻有 1，2，3，4，5，6 点，求下列事件的概率：

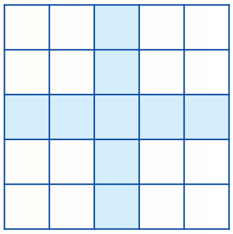
（1）点数为 3；

（2）点数为偶数；

（3）点数为 7；

（4）点数大于 2 小于 6.

2. 一只自由飞行的小鸟，将随意地落在如图所示的方格地面上(每个小方格都是边长相等的正方形)，则小鸟落在阴影方格地面上的概率为 ________.



(第 2 题图)

4.2.2 用列举法求概率

在一次试验中，如果可能出现的结果只有有限个，且各种结果出现的可能性都相等，我们可以通过列举试验结果的方法，分析出随机事件的概率.

动脑筋

李明和刘英各掷一枚骰子，如果两枚骰子的点数之和为奇数，则李明赢；如果两枚骰子的点数之和为偶数，则刘英赢. 这个游戏对双方公平吗？

游戏对双方公平是指双方获胜的可能性相等. 各掷一枚骰子，可能出现的结果数目较多，为了不重不漏地列举所有可能的结果，通常采用**列表法**.

我们可以把掷两枚骰子的全部可能结果列表如下：

点数之和 第二枚 第一枚	1 点	2 点	3 点	4 点	5 点	6 点
1 点	2	3	4	5	6	7
2 点	3	4	5	6	7	8
3 点	4	5	6	7	8	9
4 点	5	6	7	8	9	10
5 点	6	7	8	9	10	11
6 点	7	8	9	10	11	12

从表中可以看出，所有可能结果共有 36 个. 由于骰子是均匀的，这些结果出现的可能性相等.

由上表可知，两枚骰子的点数之和为偶数的可能结果有 18 个（即表中的蓝色格子），而两枚骰子的点数之和为奇数的可能结果有 18 个(即表中的红色格子).

因此，P(点数之和为偶数) $=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$；$P$(点数之和为奇数) $=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$.

由此可见，这个游戏对双方而言是公平的.

做一做

如图 4-5，袋中装有大小和质地都相同的 4 个球：2 红 2 白. 从中依次任意取出 2 个球(第 1 次取出的球不放回袋中)，求下列事件的概率：

A：取出的 2 个球同色；

B：取出 2 个白球.

(1) 列表列举.

用 R_1，R_2 表示两红球；用 W_1，W_2 表示两白球；

用 (R_1, W_2) 表示第 1 次取出红球 R_1，不放回即取第 2 次，取得白球 W_2，如此类推.

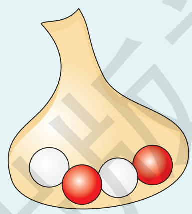


图 4-5

将所有可能结果填在下面的表中：

第 2 次 第 1 次	R_1	R_2	W_1	W_2
R_1		(R_1, R_2)	(R_1, W_1)	(R_1, W_2)
R_2				
W_1				
W_2				

共有______个可能结果.

(2) 写出各指定事件发生的可能结果:

A: 取出的 2 个球同色

____(共____种);

B: 取出 2 个白球

____(共____种).

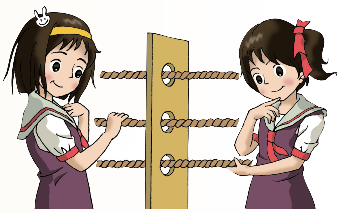
(3) 指定事件的概率为

$P(A)=$______, $P(B)=$______.

练习

1. 如图，有三条绳子穿过一块木板，姐妹两人分别站在木板的左、右两边，各选该边的一段绳子. 若每边每段绳子被选中的机会相等，则两人选到同一条绳子的概率为多少?

2. 小军同时抛掷两枚骰子，求两枚骰子点数之和小于 7 的概率.



(第 1 题图)

动脑筋

小明和小华做“剪刀、石头、布”的游戏，游戏规则是：若两人出的不同，则石头胜剪刀、剪刀胜布、布胜石头；若两人出的相同，则为平局.

(1) 怎样表示和列举一次游戏的所有可能的结果?

(2) 用 A，B，C 表示指定事件:

A:“小明胜”;　　B:“小华胜”;　　C:“平局”.

求事件 A，B，C 的概率.

(1) 为了不重不漏地列出所有可能的结果，除了列表法，我们还可以借助**树状图法**.

小明	小华	结果
	石头	(石头，石头)
石头	剪刀	(石头，剪刀)
	布	(石头，布)
	石头	(剪刀，石头)
剪刀	剪刀	(剪刀，剪刀)
	布	(剪刀，布)
	石头	(布，石头)
布	剪刀	(布，剪刀)
	布	(布，布)

一次游戏共有 9 个可能结果，而且它们出现的可能性相等.

(2) 事件 A 发生的所有可能结果：(石头，剪刀)，(剪刀，布)，(布，石头)；

事件 B 发生的所有可能结果：(石头，布)，(剪刀，石头)，(布，剪刀)；

事件 C 发生的所有可能结果：(石头，石头)，(剪刀，剪刀)，(布，布).

因此 $P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

例 2 如图 4-6，甲、乙、丙三人做传球的游戏. 开始时，球在甲手中，每次传球，持球的人将球任意传给其余两人中的一人，如此传球 3 次.

(1) 写出 3 次传球的所有可能结果(即传球的方式)；

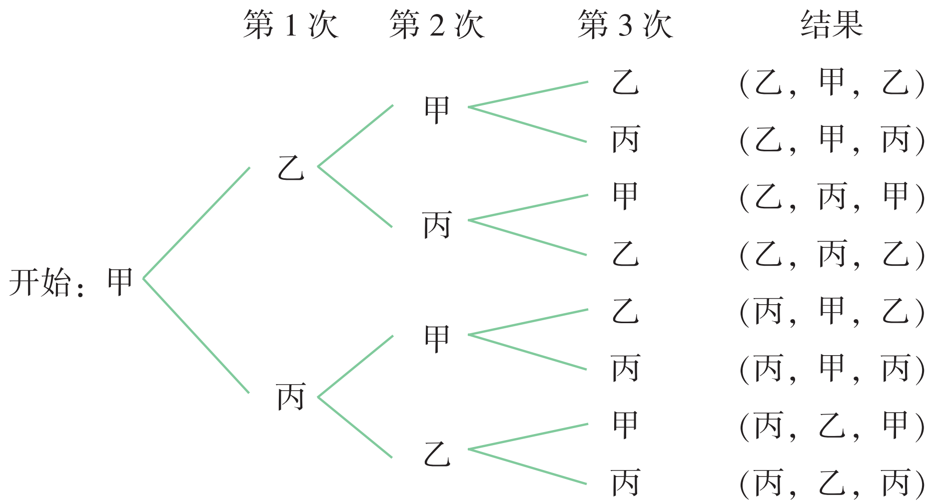
(2) 指定事件 A：“传球 3 次后，球又回到甲的手中”，写出 A 发生的所有可能结果；

(3) 求 $P(A)$.

图 4-6

解 (1) 一种可能传球的方式(结果)是：甲传给乙、乙传给丙、丙又传给甲，即球依次落入乙、丙、甲手中，记为(乙，丙，甲).

我们可以用“树状图”表示所有可能结果：



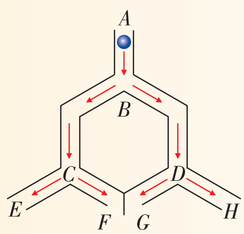
共有 8 个可能结果，而且它们出现的可能性相等.

（2）传球 3 次后，球又回到甲手中，即事件 A 发生有 2 个可能结果：（乙，丙，甲），（丙，乙，甲）.

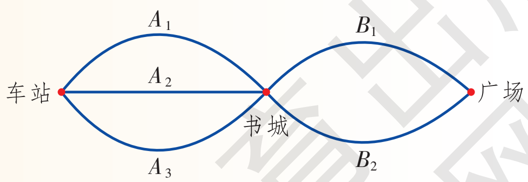
（3）$P(A)=\dfrac{2}{8}=0.25$.

练习

1. 如图，小球从 A 入口往下落，在每个交叉口都有向左或向右两种可能，且可能性相等. 用树状图法求小球从 E 点落出的概率.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，从车站到书城有 A_1，A_2，A_3 三条路线可走，从书城到广场有 B_1，B_2 两条路线可走，现让你随机选择一条从车站出发经过书城到达广场的行走路线，那么恰好选到经过路线 B_1 的概率是多少？

习题 4.2

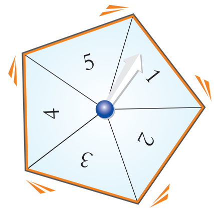
A 组

1. 小明给小华打电话，但电话本中电话号码的最后一位已模糊不清，

（1）当小明拨到最后一位时，随意拨了一个数，求电话能打通的概率；

（2）若电话号码的最后一位是偶数，当他拨到最后一位时，随意拨了一个偶数，求电话能打通的概率.

2. 如图是一个能自由转动的正五边形转盘，指针的位置固定，让转盘自由转动，当转盘停止后，观察指针指向区域内的数，求下列事件的概率：



（第 2 题图）

（1）这个数是一个偶数；（2）这个数是一个奇数；

（3）这个数大于 5；（4）这个数小于 4.

3. 同时抛掷两枚均匀的正四面体骰子，骰子的 4 个面上分别刻有 1,2,3,4 点，求下列事件的概率：

（1）骰子着地一面出现的点数之和为偶数；

（2）骰子着地一面出现的点数之和为奇数 .

4. 根据某合唱比赛的比赛规则，每个参赛的合唱团在比赛时须演唱 4 首歌曲. 爱乐合唱团已确定了 2 首歌曲，还需在 A，B 两首歌曲中确定一首，在 C，D 两首歌曲中确定另一首，求同时确定 A，C 为参赛歌曲的概率.

5. 小刚参观上海世博会，他上午从 A—中国馆、B—沙特馆、C—美国馆中任意选择一处参观，下午从 D—韩国馆、E—英国馆、F—德国馆中任意选择一处参观.

（1）请用列举的方法分析并写出小刚所有可能的参观方式；

（2）求小刚上午和下午都恰好参观亚洲国家展馆的概率.


上海世博会全景

B 组

6. 从-2，-1，2 这三个数中任取两个不同的数，作为点的坐标，求该点在第四象限的概率.

7. 在一个袋中有 4 个大小和质地都相同的小球，把它们分别标号为 1，2，3，4，小明和小强采取的摸取方法分别是：

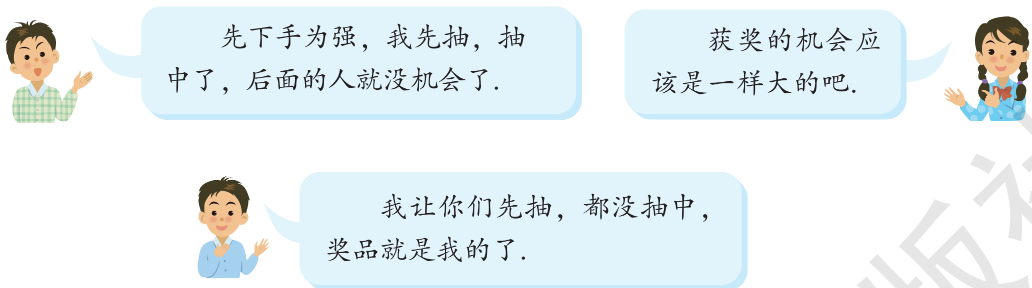
小明：随机摸取一个小球记下标号，然后放回，再随机摸取一个小球，记下标号；

小强：随机摸取一个小球记下标号，不放回，再随机摸取一个小球，记下标号.

（1）请用列举的方法分别表示小明和小强摸球的所有可能出现的结果；

（2）分别求出小明和小强两次摸球的标号之和等于 5 的概率.

8. 三位同学在参加军训射击比赛中，均取得好成绩．由于只有一份奖品，他们决定采取抽签的方式来决定谁获得这份奖品．即准备 3 张相同的纸条，在其中 1 张纸条上画上记号，并把它们折叠好放在一个盒子中搅匀，然后让三位同学先后去抽签 .



抽签有先有后，先抽的人与后抽的人中签的概率一样大吗？请用树状图法列出所有中签的可能结果，并分析这几位同学的看法是否有道理？

（提示：假设三位同学抽签的顺序依次为：甲第一，乙第二，丙第三，3 张纸条中，画有记号的纸条记作 A，其余 2 张纸条分别记作 B_1 和 B_2 .）

4.3 用频率估计概率

我们知道，抛掷一枚均匀硬币，硬币落地后，出现“正面朝上”的可能性和“反面朝上”的可能性是一样的，即“正面朝上”的概率和“反面朝上”的概率都是 $\frac{1}{2}$. 在实际掷硬币时，会出现什么情况？若只抛一次说明不了什么问题，我们不妨多抛掷几次试试.

做一做

（1）抛掷一枚均匀硬币 400 次，每隔 50 次，分别记录“正面朝上”和“反面朝上”的次数，汇总数据后，完成下表：

累计抛掷次数	50	100	150	200	250	300	350	400
“正面朝上”的频数								
“正面朝上”的频率								

（2）根据上表的数据，在图 4–7 中画折线统计图表示“正面朝上”的频率.

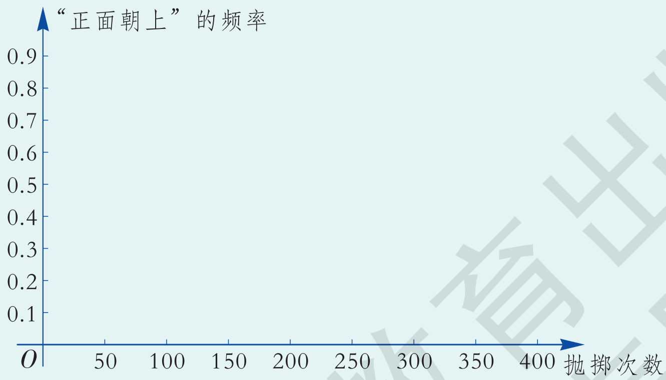


图 4–7

（3）在图 4–7 中，用红笔画出表示频率为 $\frac{1}{2}$ 的直线，你发现了什么？

（4）下表是历史上一些数学家所做的掷硬币的试验数据，这些数据支持你发现的规律吗？

试验者	掷硬币次数	正面朝上的次数	频　率
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊(Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

可以看出，随着掷硬币次数的增加，“正面朝上”的频率稳定在 $\frac{1}{2}$ 左右.

看来用频率估计硬币出现“正面朝上”的概率是合理的.

上面的例子说明，通过大量重复试验，可以用随机事件发生的频率来估计该事件发生的概率.

对于掷硬币试验，它的所有可能结果只有两个，而且出现两种可能结果的可能性相等，而对于一般的随机事件，当试验所有的可能结果不是有限个，或者各种可能结果发生的可能性不相等时，就不能用 4.2 节的方法来求概率. 频率是否可以估计该随机事件的概率呢？

我们再来做一个抛瓶盖试验.

做一做

在一块平整地板上抛掷一个矿泉水瓶盖，瓶盖落地后有两种可能情况：“开口朝上”和“开口不朝上”.

由于瓶盖头重脚轻，上下不对称，“开口朝上”和“开口不朝上”的可能性一样吗？如果不一样，出现哪种情况的可能性大一些？

我们借助重复试验来解决这个问题.

（1）全班同学分成 6 组，每组同学依次抛掷瓶盖 80 次，观察瓶盖着地时的情况，并根据全班试验结果填写下表：

累计抛掷次数	80	160	240	320	400	480
“开口朝上”的频数						
“开口朝上”的频率						

（2）根据上表中的数据，在图 4–8 中画折线统计图表示“开口朝上”的频率.

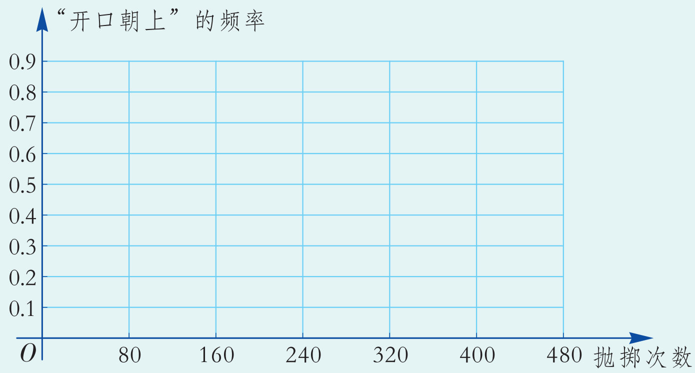


图 4–8

（3）观察图 4–8，随着抛掷次数的增加，“开口朝上”的频率是如何变化的？

（4）该试验中，是“开口朝上”的可能性大还是“开口不朝上”的可能性大？

研究随机现象与随机事件的基本方法就是重复地对现象进行观察，在 n 次观察中，如果某个随机事件发生了 m 次，则在这 n 次观察中这个事件发生的频率为 $\frac{m}{n}$. 如果随机事件发生的概率(即可能性)大，则它在多次的重复观察中出现的次数就越多，因而其频率就大，所以频率在一定程度上也反映了随机事件的可能性的大小.

可以发现，在抛瓶盖试验中，“开口朝上”的频率 $\frac{m}{n}$ 一般会随着抛掷次数的增加，稳定在某个常数 p 附近. 这个常数就是“开口朝上”发生的可能性，

即事件“开口朝上”的概率. 所以，在大量重复试验中，如果事件 A 发生的频率为 $\frac{m}{n}$，那么用 $\frac{m}{n}$ 作为事件 A 发生的概率的估计是合理的.

在抛瓶盖试验中，“开口朝上”的频率稳定于哪一个数值？你能估计出瓶盖“开口朝上”的概率吗？

需要指出的是，频率和概率都是随机事件可能性大小的定量的刻画，但频率与试验次数及具体的试验有关，因此，频率具有随机性；而概率是刻画随机事件发生可能性大小的数值，是一个固定的量，不具有随机性. 因此，掷 100 次硬币并不一定能得到“正面朝上”的频率是 $\frac{1}{2}$ 和“反面朝上”的频率是 $\frac{1}{2}$.

例 瓷砖生产受烧制时间、温度、材质的影响，一块砖坯放在炉中烧制，可能成为合格品，也可能成为次品或废品，究竟发生哪种结果，在烧制前无法预知，所以这是一种随机现象. 而烧制的结果是“合格品”是一个随机事件，这个事件的概率称为“合格品率”.

由于烧制结果不是等可能的，我们常用“合格品”的频率作为“合格品率”的估计.

某瓷砖厂对最近出炉的一大批某型号瓷砖进行质量抽检，结果如下：

抽取瓷砖数 n	100	200	300	400	500	600	800	1 000	2 000
合格品数 m	95	192	287	385	481	577	770	961	1 924
合格品频率 $\frac{m}{n}$									

(1) 计算上表中合格品的各频率(精确到 0.001)；

(2) 估计这种瓷砖的合格品率(精确到 0.01)；

(3) 若该工厂本月生产该型号瓷砖 500 000 块，试估计合格品数.

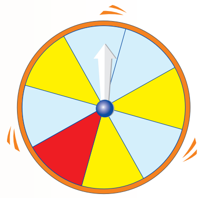
解 (1) 逐项计算，填表如下：

抽取瓷砖数 n	100	200	300	400	500	600	800	1 000	2 000
合格品数 m	95	192	287	385	481	577	770	961	1 924
合格品频率 $\frac{m}{n}$	0.950	0.960	0.957	0.963	0.962	0.962	0.963	0.961	0.962

（2）观察上表，可以发现，当抽取的瓷砖数 $n \geqslant 400$ 时，合格品频率 $\frac{m}{n}$ 稳定在 0.962 的附近，所以我们可取 $p=0.96$ 作为该型号瓷砖的合格品率的估计.

（3）$500\ 000 \times 96\% = 480\ 000$（块），可以估计该型号合格品数为 480 000 块.

练习



如图是一个能自由转动的转盘，盘面被分成 8 个相同的扇形，颜色分为红、黄、蓝 3 种. 转盘的指针固定，让转盘自由转动，当它停止后，记下指针指向的颜色. 如此重复做 50 次，把结果记录在下表中：

	红　色	黄　色	蓝　色
频　数			
频　率			

（1）试估计当圆盘停下来时，指针指向黄色的概率是多少？

（2）如果自由转动圆盘 240 次，那么指针指向黄色的次数大约是多少？

习题 4.3

A 组

1. 某校进行篮球“3 分球”比赛，下表是对某篮球队员进行测试的结果：

投篮次数	10	50	100	150	200
命中次数	9	40	70	108	144

（1）根据上表，估计该运动员投 3 分球命中的概率是多少；

（2）根据上表，假设该运动员在一场比赛中有 20 次投 3 分球的机会，估计他能得多少分.

2. 北京市天气预报“明天降水概率 10%”，请说说这是什么意思. 北京市的居民在明天出门时需不需要带雨具？

3. 某射手在同一条件下进行射击，结果如下：

射击次数	10	20	50	100	200	500
击中靶心次数	9	19	44	91	178	451
击中靶心频率						

(1) 计算上表中击中靶心的各个频率，并填入表格中；

(2) 这个射手射击一次，击中靶心的概率约为多少?

4. 全组同学做掷一枚硬币两次的试验，要求每人做 30 次，把全组出现每一种可能结果的次数填写在下表中：

出现的结果	(正，正)	(正，反)	(反，正)	(反，反)
每种结果出现的次数				

根据上表，估计：掷一枚硬币两次，分别出现(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)的概率各是多少?

B 组

5. 某地发行一种福利彩票，中奖概率是千分之一. 请说说这是什么意思. 买这种彩票 1 000 张，一定会中奖吗?

6. 下表是某地 1 月份的平均温度，统计了168 年：

温度 / ℃	−18	−14	−13	−12	−11	−10	−9	−8	−7	−6
次　数	1	1	3	2	2	2	11	5	13	8
温度 / ℃	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	
次　数	19	26	20	17	15	10	9	2	2	

(1) 1 月份的平均温度是多少摄氏度时，出现的次数最多?

(2) 1 月份的平均温度在−7 ～−1 ℃的频率是多少?

(3) 1 月份的平均温度在−7 ～−1 ℃的概率约为多少?

IT 教室

用计算机模拟掷硬币试验

掷硬币是最简单也是最经典的随机试验. 在同样条件下，反复多次掷一枚均匀的硬币，出现“正面朝上”的次数大致是所掷总次数的一半. 实际地拿一枚硬币真的去抛掷，要花去许多时间，如果我们借助计算机来模拟这个试验，也将取得不错的效果.

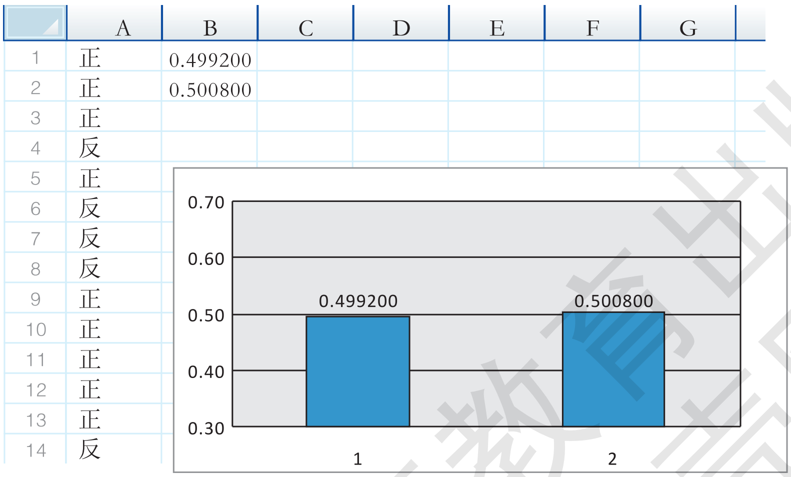
操作步骤：

1. 打开 Excel 软件，在 A1 栏输入“= IF（RAND（）> 0.5,“正”，“反”)”，然后利用填充柄一直拖动到 A5000. 这是让计算机随机生成 [0,1] 之间的数，假设大于 0.5，则认为是正面，否则就是反面.

2. 在 B1 栏输入“=COUNTIF（A1:A5000，“正”）/5000”，在 B2 栏输入“=COUNTIF（A1:A5000，“反”）/5000”. B1 和 B2 分别是统计“正面朝上”和“反面朝上”的频率.

3. 以 B1 和 B2 为数据源作柱形图.

4. 选择一个空白单元格，不断按 Delete 键，那么 A 列数据会不断更新，从而 B1，B2 数据更新，柱形图也在不断发生变化. 但变化是有规律的，就是两个柱形图的高度总是在 0.5 左右波动. 如图.



请你动手在计算机上操作这个试验.

小结与复习

回顾

1. 试举例说明什么是随机事件、不可能事件与必然事件.

2. 什么是事件 A 发生的概率?

3. 如何用列表法和树状图法求随机事件的概率?

4. 说一说随机事件的概率与频率的区别与联系.

本章知识结构

- 事件
  - 确定性事件
    - 必然事件
    - 不可能事件
  - 随机事件
    - 概率的概念
      - 用列举法求概率
        - 列表法
        - 树状图法
      - 用频率估计概率

注意

1. 概率是随机事件自身固有的性质，随机事件可能性大小可以用概率来刻画，随机事件 A 的概率 $P(A)$满足：$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. 必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0，它们可看作随机事件的两种极端情形.

2. 频率和概率都是随机事件可能性大小的定量的刻画，概率是随机事件自身的固有的性质. 当试验次数非常多时，在大多数情况下，频率与概率会很接近，频率可以作为概率的估计.

复习题 4

Ⓐ 组

1. 下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件？

（1）明天当地降水；

（2）抛掷硬币三次，全都正面朝上；

（3）抛两枚骰子，点数之和小于 13；

（4）1 kg 棉花比 1 kg 铁块轻；

（5）任意摸一把围棋子，恰好取得偶数个.

2. 100 个产品中有 10 个是次品，从中随意取出 1 个：

（1）取出的产品可能是次品吗？

（2）取出的产品为正品的可能性大，还是为次品的可能性大？

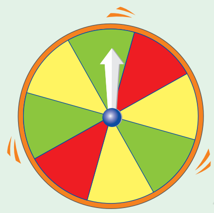
（3）如果从这 100 个产品中随意取出 10 个，在这 10 个产品中，是“正品数量多”这一事件的可能性大，还是“次品数量多”这一事件的可能性大？

3. 如图是一个能自由转动的转盘，盘面被分成 8 个相同的扇形，颜色分为红、黄、绿 3 种. 指针的位置固定，让转盘自由转动，当它停止后，求下列事件的概率：

（1）指针指向绿色；

（2）指针指向红色或黄色；

（3）指针不指向黄色.

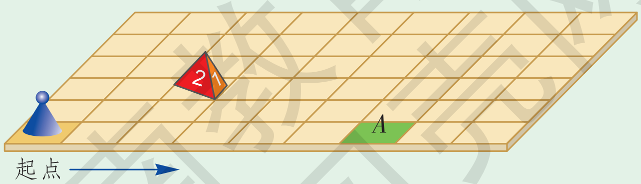


(第 3 题图)

4. 在猜一商品价格的游戏中，参与者事先不知道该商品的价格，主持人要求他从右图中的 4 张卡片中任意拿走一张，使剩下的卡片从左到右连成一个三位数，该数就是他猜的价格. 若商品的价格是 360 元，求他一次就能猜中的概率.

(第 4 题图)

5. 如图，有一游戏棋盘和一个质地均匀的正四面体骰子（各面依次标有 1，2，3，4 四个数字）. 游戏规则是游戏者每掷一次骰子，棋子按骰子着地一面所示的数字前进相应的格数. 请用列表法（或树状图法）求掷骰子两次后，棋子恰好由起点前进 6 格到达 A 处的概率.



(第 5 题图)

6. 某科技小组做黄豆在相同条件下的发芽试验，结果如下表所示：

每批粒数n	100	300	400	600	1 000	2 000	3 000
发芽的粒数m	96	282	382	570	948	1 912	2 850
发芽的频数$\frac{m}{n}$	0.960	0.940	0.955	0.950	0.948	0.956	0.950

则黄豆发芽的概率估计值是多少？

B 组

7. 笔筒中有 10 支笔，将它们逐一标上 1~10 的号码，现在若从笔筒中任意抽出 1 支笔，则：

（1）抽到编号是 3 的倍数的结果有几种？概率是多少？

（2）抽到编号是 5 的倍数的结果有几种？概率是多少？

（3）抽到编号既是 3 的倍数又是 5 的倍数的结果有几种？概率是多少？

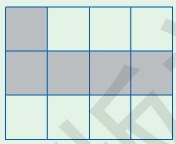
8. 有 5 、6 、7 三张纸牌，将这三张牌任意排成一个三位数，试问：

（1）共可排出几个不同的三位数？

（2）排出的三位数是奇数的概率是多少？

（3）排出的三位数是 4 的倍数的概率是多少？

9. 如图，共有 12 个大小相同的正方形，其中阴影部分的 5 个小正方形是一个正方体的表面展开图的一部分，现从其余的小正方形中任取一个涂上阴影，求能构成这个正方体的表面展开图的概率.



（第 9 题图）

10. 小刚很擅长球类运动，课外活动时，足球队、篮球队都力邀他到自己的阵营，小刚左右为难，最后决定通过掷硬币来确定. 游戏规则如下：连续抛掷硬币三次，如果三次正面朝上或三次反面朝上，则由小刚任意挑选两球队；如果两次正面朝上一次正面朝下，则小刚加入足球阵营；如果两次反面朝上一次反面朝下，则小刚加入篮球阵营.

（1）用树状图法表示三次抛掷硬币的所有结果；

（2）小刚任意挑选两球队的概率有多大？

（3）这个游戏规则对两个球队是否公平？为什么？

11. 某地区在连续 46 年中，每年干燥月份(即降水量低于这 46 年的平均月降水量)的统计情况如下表：

每年干燥月份的月数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	≥11
相应的年数	0	0	0	1	5	8	9	9	7	3	2	2

从上述统计表估计：

(1) 一年中恰有 5 个月是干燥月份的概率是多少(精确到 0.01，以下同此规定)?

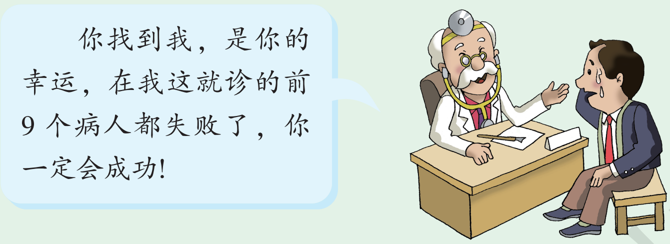
(2) 一年中干燥月份小于 7 个月的概率是多少?

(3) 一年中干燥月份大于 9 个月的概率是多少?

C 组

12. 下面是一则漫画：

某种疾病的手术成功率是$\frac{1}{10}$，李某到一家医院就诊.



你认为这位医生讲得对吗?

13. 为了检验一枚骰子是否质地均匀，小李、小张、小王各投掷了 100 次.

(1) 若出现 1，2，3，4，5，6 点的频率均是$\frac{1}{6}$，你认为这枚骰子质地均匀吗?

(2) 若出现 1，2，3，4，5，6 点的频率各不相等，随后每人又加投 100 次，出现各点的频率基本相同，你认为这枚骰子质地均匀吗?

漫谈小概率事件

成语词典上对“万无一失”的解释是：“比喻有绝对把握.”这仅仅是比喻而已. 从数学上看，虽然一万无一失，但是也许一万零一次就失败了呢？尽管可以“亿无一失”，但十亿次、百亿次后出现失误的可能性不是依然存在吗？因此，“万无一失”只能说出现失败的可能性很小，毕竟不能和“有绝对把握”画等号.

概率论中把发生的概率很小的事件，称作“小概率事件”. 小概率事件是我们经常会碰到的事情. 比如：

●某地的“福利彩票”，10 万户设一个特等奖，奖金为 100 万元. 因此，中特等奖的概率是十万分之一.

●我国 2011 年因交通事故而死亡的人数为 6.7 万余人. 以全国人口 137 053 万计算，某人一年内因车祸死亡的概率约为二万分之一.

●生产某种零件，正品率要达到 0.999 9，意思是生产 1 万个零件，大约有 1 个次品，即次品率为万分之一.

●完成一件任务，有九成把握，即“十拿九稳”. 此时成功的概率达到 $\frac{9}{10}$，失败的概率为 $\frac{1}{10}$.

那么，多大的概率算“小概率”？这是因人、因地、因事而异的，没有统一的标准.

中国古代军事学有“六十庙算”的说法，意思是有六成把握就应该攻打. 实际上把 0.4 也看成小概率了. 一般地说，95%的把握是大家最常见的底线. 也就是说，0.05 通常被认为是小概率. 但是这不可一概而论.

一台设备有 1 000 个零件是常见的. 假如每个零件的合格率是 0.999，而且其中一个零件失效，就会导致整个系统失效. 那么，整台设备正常工作的概率只有

$$0.999^{1\,000} \approx 0.368.$$

这意味着这台机器只有$\frac{1}{3}$的时间能够正常使用. 这样的产品怎么卖得出去? 如果是发射宇宙飞船, 涉及的零件和部件非常之多, 其可靠性的要求必须非常严格. 0.000 1 的次品率已经很高, 不是小概率事件了.

神舟九号发射现场

人们对于小概率事件的理解, 还与人的心理因素有关. 比如, 有些人觉得自己肯定会中奖 (十万分之一), 却认为绝对不会出车祸 (二万分之一).

确实, 如何对待小概率事件, 是人们处理工作和生活问题的必备科学素质. 完全忽视小概率事件, 会因麻痹大意而酿成大祸. 但也不必过分害怕小概率事件, 以致谨小慎微, 裹足不前. 事实上, 你不必因担心天上的飞机会掉落在你的头上而忧心忡忡, 但更不可因疏忽大意使飞机的安全受到威胁. 只有对具体的小概率事件做具体分析, 科学地加以处理, 才能在 "十拿九稳" "万无一失" "绝对把握" 等之间做出正确的抉择.

数学词汇汉英对照表

（按词汇所在页码出现的先后排序）

后　记

本册教科书是依据教育部颁布的《义务教育数学课程标准》（2011年版），在原实验教科书的基础上修订而成的，经国家基础教育课程教材专家工作委员会2013年审查通过.

本书在修订过程中，吸收了基础教育课程改革实验的优秀成果，凝聚了参与课程改革实验的广大数学家、数学课程专家、教研人员以及一线教师的集体智慧. 一大批数学教师为本书的修订提出了宝贵的意见. 在此，对所有为本次修订提供过帮助和支持的社会各界朋友表示衷心的感谢.

在本书出版之前，我们通过多种渠道与教科书所选用资料和图片的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 对此，我们表示诚挚的感谢！但仍有部分作者未能取得联系，恳请这些作者尽快与我们联系，以便支付稿酬.

教材建设是一项长期的任务，我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们. 让我们携起手来，共同完成义务教育教科书建设这一光荣的使命！

湖南教育出版社

2013年5月

图书在版编目(CIP)数据

数学．九年级．下册／严士健，黄楚芳主编．—2版．—长沙：湖南教育出版社，2013.4（2019.10重印）

义务教育教科书

ISBN 978－7－5355－4634－0

Ⅰ．①数… Ⅱ．①严… ②黄… Ⅲ．①中学数学课—初中—教材 Ⅳ．①G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第083011号

义务教育教科书

数　学

九年级　下册

责任编辑：胡　旺

湖南教育出版社出版（长沙市韶山北路443号）

电子邮箱：hnjycbs@sina.com

客服电话：0731－85486979

湖南出版中心重印

湖南省新华书店发行

湖南天闻新华印务有限公司印装

787×1092　16开　印张：9.75　字数：186000

2004年12月第1版　2019年10月第2版第6次印刷

印数：1—520 000册

ISBN 978－7－5355－4634－0

定价：9.43元(2020春)