目　录

第 1 章　常用逻辑用语

一、教学目标

“常用逻辑用语”的课程目标是帮助学生正确使用常用逻辑用语，更好地理解数学内容中的逻辑关系，体会逻辑用语在表述和论证中的作用，利用这些逻辑用语准确地表达数学内容，更好地进行交流，避免在使用过程中产生错误．高中数学课程中，学“常用逻辑用语”不是为逻辑学和数理逻辑奠定基础，这与“简易逻辑”的目标不同，这一点需要老师们特别注意．

1．了解命题的逆命题、否命题与逆否命题．

2．理解充分条件、必要条件与充要条件的意义，会分析四种命题的相互关系．

3．通过数学实例，了解“或”、“且”、“非”的含义．

4．通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词与存在量词的意义．

5．能正确地对含有一个量词的命题进行否定．

二、教材说明

正确地使用逻辑用语是现代社会公民应该具备的基本素质．无论是进行思考、交流，还是从事各项工作，都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思想．在本模块中，学生将在义务教育阶段的基础上，学习常用逻辑用语，体会逻辑用语在表述和论证中的作用，利用这些逻辑用语准确地表达数学内容，更好地进行交流．

高中学生已经具有较丰富的生活经验和一定的科学知识．因此，教材中选择学生感兴趣的、与其生活实际密切相关的素材，现实世界中的常见现象或其他科学的实例，展现逻辑用语概念，理解常用逻辑用语的意义，体会常用逻辑用语的作用，使学生感到数学就在自己身边，数学的应用无处不在．

数学各部分内容之间的知识是相互联系的，学生的学习是循序渐进、逐步发展的．为了培养学生对数学内部联系的认识，教材需要将不同的数学内容相互沟通，以加深学生对数学学习的认识和对本质的理解．对于“常用逻辑用语”的学习，不仅需要用已学过的数学知识为载体，而且需要把常用逻辑用语用于后继的数学学习中．

《课程标准》对“常用逻辑用语”的要求，既是阶段性要求也是终结性要求，正确地使用常用逻辑用语，不仅是学习这一部分内容的要求，而且还需要在今后的学习中，通过不断地正确使用常用逻辑用语，加深对常用逻辑用语的认识．有兴趣选修《开关电路与布尔代数》的学生还会接触到有关命题的一些知识，了解“命题演算”是布尔代数的一个具体

模型.

本章的主要内容有：命题的概念和例子，命题的四种形式，充分条件和必要条件，逻辑联结词“非”、“且”和“或”，全称量词和存在量词.

课程内容的呈现，应注意反映数学发展的规律，以及人们的认识规律，体现从具体到抽象、特殊到一般的原则.

1. 数学知识丰富和发展依赖于人们不断地提出命题并力图证明这些命题，教材通过数学课中大量语句引出命题的概念，在初中已学过的命题的知识的基础上阐述了命题的四种形式之间的转化和关系；进而更进一步地探讨命题“若 p 则 q”的真假性，给出充分条件和必要条件的概念.

2. 人说话时或书面表达意思时，句子之间需要用联结词联结，不同的联结词表达的意思有很大的差别，特别地，数学表达需要精确和严密. 因此，在学习了命题的基础上，要进一步学习联结命题的逻辑联结词. 学习联结词的正确使用，特别是全称量词和存在量词的应用.

随着时代的发展，信息技术已经渗透到数学教学中. 如何使现代信息技术为学生的数学学习提供更多的帮助，是教材编写中值得注意和进一步思考的问题. 教材可以在处理某些内容时，提倡使用计算机或计算器，帮助学生理解数学概念，还应鼓励学生使用现代技术手段处理繁杂的计算、解决实际问题，以取得更多的时间和精力，探索和发现数学的规律，培养创新精神和实践能力. 另一方面，现代信息技术不仅在改进学生的学习方式上可以发挥巨大的潜力，而且还可以渗透到数学的课程内容中来，教材应注意这些资源的整合. 例如，可以把算法融入有关数学课程内容中；也可以引导学生通过网络搜集资料，研究数学的文化，体会数学的人文价值.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1　命题及其关系	
1.1.1　命题的概念和例子	1 课时
1.1.2　命题的四种形式	1 课时
1.1.3　充分条件和必要条件	2 课时
1.2　简单的逻辑联结词	
1.2.1　逻辑联结词“非”、“且”和“或”	1 课时
1.2.2　全称量词和存在量词	2 课时
小结与复习	1 课时

四、教学建议

1. 数学教学要体现课程改革的基本理念，在教学设计中充分考虑数学的学科特点，高中学生的心理特点，不同水平、不同兴趣学生的学习需要，运用多种教学方法和手段，引

导学生积极主动地学习，掌握数学的基础知识和基本技能以及它们所体现的数学思想方法，发展应用意识和创新意识，对数学有较为全面的认识，提高数学素养，形成积极的情感态度，为进一步学习和未来发展打好基础.

2. 在本部分内容的教学中，要通过具体实例来帮助学生按标准要求了解或理解常用逻辑用语，并学会正确使用逻辑用语，避免形式化的讨论. 因为本部分内容不是为逻辑学和数学逻辑奠定基础，而是学习正确地使用逻辑用语来清晰地表达数学内容.

例如，对于一个具体命题，理解它的否定命题的真假并不难. 但是，对于一般形式的命题“若 p 则 q”，认识这个命题否定的含义就比较困难，因此不要求形式化的讨论这类问题.

3. 在这部分内容的教学中，应以学生已经学过的数学内容为载体，帮助学生学会正确地使用逻辑用语，加深对已学过的数学知识之间的逻辑联系和数学本质的认识.

例如，在充要条件的教学中，可以勾股定理和直线斜率的刻画为具体实例.

勾股定理反映了三角形三边之间的一种特殊关系. 这种特殊关系是刻画直角三角形的一个充分必要条件，有了这个条件，我们就可以通过边的长度之间的关系来研究几何中的直角三角形.

两条直线的方向向量的数量积等于零是刻画两条直线垂直的充分必要条件，有了这个条件，我们就可以利用向量的代数运算来研究几何中的垂直问题.

4. 在教学过程中，要结合具体数学内容不断地使用常用逻辑用语，加深对相关数学内容的认识.

例如，在用导数研究函数单调性时，有这样的结果：

一个函数在其定义域内，如果每一点的导数都大于零，则该函数为增函数.

由上述结论可以知道“每一点导数大于零”是“函数为增函数”的一个充分条件. 所以上述结论可以作为一个判定函数单调性的定理. 那么，“每一点导数大于零”是否是“函数为增函数”的必要条件?

以函数 $y=x^3$ 为例. 我们知道函数 $y=x^3$ 是增函数，是否能保证“每一点导数大于零”? 这是一个含有全称量词的命题. 但是，我们知道 $y=x^3$ 在 $x=0$ 处的导数等于零. 这说明“函数为增函数”无法保证“每一点导数大于零”. 即“每一点导数大于零”只是“函数为增函数”的充分条件，而不是必要条件. 这个例子也说明了，如何对含有全称量词的命题进行否定.

5. “常用逻辑用语”的学习重在使用，在使用中不断地加深对于常用逻辑用语的认识. 要通过大量（各个方面）实例让学生充分感受，并在处理具体问题的过程中深化对基本概念的认识，掌握判断的方法，重视用“对比”的方法，引导学生在比较中深化理解. 注意引导学生在使用常用逻辑用语的过程中，掌握常用逻辑用语的用法，纠正出现的逻辑错误，体会运用常用逻辑用语表述数学内容的准确性、简洁性.

6. 某些具体内容的教学要求.

（1）命题及其关系的教学.

第一，对于“命题以及命题的逆命题、否命题、逆否命题”的教学要从具体实例出发，不要形式化的讨论.

例如：已知命题“若 $m>0$，则关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根”，试写出它的逆命题、否命题和逆否命题，并分别判断它们的真假.

第二，这部分教学的重点应放在“充分条件、必要条件、充要条件”的理解上，对于“充分条件、必要条件、充要条件”的教学要求应该参照前面的具体要求.

例如：$\frac{x}{y}>1$ 的一个充分不必要条件是（　　）

A. $x>y$　　B. $x>y>0$　　C. $x<y$　　D. $y<x<0$

例如：下列“若 p 则 q”形式的命题中，p 是 q 的什么条件？

①若两个三角形全等，则这两个三角形的面积相等；

②若 $ab=0$，则 $a=0$；

③若 $b=0$，则函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数；

④若 $x=2$，则 $x-3=\sqrt{3-x}$.

在教学中，应该注意在讨论“充分条件、必要条件、充要条件”时，首先应该考虑命题是否是真命题. 上述例子②中，“若 $ab=0$，则 $a=0$”不是真命题，这时，我们需要判断“若 $a=0$，则 $ab=0$”是不是真命题. 由于它是真命题，所以 $ab=0$ 是 $a=0$ 的必要条件. 因此我们不要形式化地讨论“若 p 则 q”这种命题的充分条件和必要条件.

（2）简单的逻辑联结词的教学.

第一，对于简单的逻辑联结词“或”、“且”、“非”的教学，也要通过具体实例，帮助学生了解它们的含义.

例如：①p：$\sqrt{2}$是无理数，q：$\sqrt{2}$大于 1，写出“p 且 q”，“p 或 q”，“非 p”的形式，并判断它们的真假.

②用 p：$\frac{1}{x^2-x-2}>0$ 表示实数 x 满足的条件，用 q：$\frac{1}{x^2-x-2}\leqslant 0$ 表示实数 x 满足的另一个条件. “非 p”是否等于 q？

显然，$x=2$ 不满足条件 p，也不满足条件 q. 由于 $x=2$ 不满足条件 p，所以 $x=2$ 满足条件“非 p”. 因此，“非 p”不等于 q.

这个例子有助于理解条件（命题）的“非”. 在对“非”的学习中，最基本的性质是条件（命题）和条件（命题）的“非”，不能同时成立. 在教学中，要注意一个条件（命题）和这个条件（命题）所确定的集合是不同的概念.

第二，教学中只要求用这些逻辑联结词做“合成”，不要求对复合命题“分解”.

（3）全称量词与存在量词的教学.

第一，量词的教学也需要通过实例，帮助学生理解全称量词与存在量词的意义.

第二，教学中只要求理解和掌握含有一个量词的命题，对于含有量词的命题的否定，

也只要求对含有一个量词的命题进行否定.

例如：对于给定命题“所有能被 3 整除的整数都是奇数”，写出它的否定命题.

学生有如下的解答：

①存在一个能被 3 整除的整数不是奇数.

②有些能被 3 整除的整数不是奇数.

③有些能被 3 整除的整数是偶数.

④所有能被 3 整除的数不都是奇数.

⑤并非所有能被 3 整除的整数都是奇数.

这些解答都是正确的、本质上是一致的. 有的老师在教学中，要求学生写出几种不同的解答形式，这是不必要的. 也有同学解答为：所有能被 3 整除的数都不是奇数. 这个解答是错误的.

五、评价建议

数学学习评价，既要重视对学生知识、技能的掌握和能力的提高，又要重视其情感、态度和价值观的转变；既要重视对学生学习水平的甄别，又要重视其学习过程中能动性的发挥；既要重视定量的认识，又要重视定性的分析；既要重视教育者对学生的评价，又要重视学生的自评互评. 总之，应将评价贯穿于数学学习的全过程，不忽视评价的甄别与选拔功能，更突出评价的激励与发展功能. 相对于结果，过程更能反映每一个学生的发展变化，体现出学生成长的历程. 因此，数学学习的评价要重视结果，也要重视过程. 对学生数学学习过程的评价，包括学生参与数学活动的动机和态度、完成数学学习的自信、独立思考的习惯、合作交流的意识、数学认知的发展水平等方面.

数学教学的评价应立足于营造优质的育人环境，数学教与学活动过程的调控，学生和教师的共同成长.

下面给出一些具体评价内容的建议与要求：

1. 通过数学学习过程的评价，应努力引导学生正确认识数学的价值，产生积极的数学学习兴趣与动机；数学的特点决定了个体数学知识的学习过程离不开理性思维，对学生独立地进行数学思考的关注应成为学习过程评价的核心之一. 评价中应关注学生是否肯于思考、善于思考、坚持思考并不断地改进思考的方法与过程；学习过程的评价，还应关注学生是否积极主动地参与数学学习活动，是否愿意与同伴交流数学学习的体会、与他人合作探究数学问题；学生学好数学的自信心、勤奋、刻苦以及克服困难的毅力等良好的意志品质，也是数学学习过程评价的重要内容.

2. 应当重视学生理解并有条理地表达对数学内容的思考和理解的过程，关注学生能否不断反思自己的数学学习过程. 可要求学生归纳本章的知识结构，独立写出本章的学习小结，并相互交流，相互点评.

3. 评价对数学的理解，可以关注学生能否独立举出一定数量的用于说明问题的正例和

反例. 特别地，核心概念对数学学习的影响是深远的，对它们的评价应该在高中数学学习的整个过程中予以关注. 例如：对充分条件、必要条件与充要条件的意义的理解，对全称量词、存在量词的含义以及对含有一个量词的命题进行否定及逻辑联结词的含义的理解与运用情况.

4. 进行一次评估测试，了解学生掌握基础知识和基本技能的情况，尤其关注学生对重点知识的掌握情况.

1.1 命题及其关系

1.1.1 命题的概念和例子

教材线索

本小节从学生学过的教材中出现的大量的判断语句引出命题的概念，并根据命题是否成立分成真命题、假命题，结合例题介绍了如何证明一个命题是真命题还是假命题.

教学目标

（一）知识与技能

了解命题的概念.

（二）过程与方法

学会正确判断命题的真假.

（三）情感、态度与价值观

初步形成运用逻辑知识准确地表述问题的数学意识.

教材分析

1. 重点：

命题的概念.

2. 难点：

正确判断命题的真假.

3. 对命题的认识.

对命题的认识我们不从一般的定义出发，而是通过实例了解“命题”，这些实例都能清晰地分辨组成这个命题的条件和结论，并且能判断真假.

例如：

（1）若一个四边形是矩形，则这个四边形是平行四边形；

（2）三角形内角和等于 $180°$；

（3）$x>3$.

（1）明确地给出了条件和结论，并能判断真假；

（2）虽然没有明确地给出条件和结论，但是能清晰地分辨出组成这个命题的条件和结论，即如果三个角是一个三角形的内角，则这三个角的和等于 180°；

（3）不能判断真假，所以它不是一个命题.

4. 要证明一个命题是真命题，需要严格的数学推理、论证；要证明一个命题是假命题，通常方法是举一个反例就可以了. 暂时无法判断真假的命题叫猜想. 一个好的猜想将推动数学的发展，因为人们在证明猜想的过程中会提出许多新的数学概念和想出许多新的数学方法.

教学建议

教学要从具体实例出发，不要形式化的讨论. 对于命题，我们只研究明确地给出条件和结论的命题，也就是说只研究含有“如果……（条件），那么……（结论）”、“若……（条件），则……（结论）”或“因为……（条件），所以……（结论）”的命题.

例如，命题：12 能被 3 整除. 其条件和结论不明确，对这样的命题，在教学中不宜引入，否则，不好给出其逆命题等，容易混淆，我们在这里不予研究.

如果将命题改写为“因为 12 是 3 的倍数，所以 12 能被 3 整除”，这时才可以引入教学.

例题解析

例 判断下列语句是否是命题？若是，则判断其真假，并说明理由.

（1）$x>7$；

（2）若 a，b 是正实数且 $a^2>b^2$，则 $a>b$；

（3）若 a，b 是任意实数且 $a^2>b^2$，则 $a>b$.

分析 证明命题（2）是真命题，即要证明在已知条件下 $a>b$ 成立，可以用求差法证明；要证明命题（3）是假命题，只需举一个特例说明，在已知条件下 $a>b$ 不成立即可.

说明 证明命题是假命题的通常方法是举一个反例.

相关链接

（一）费马大定理

费马大定理又称费马最后“定理”，这个著名的猜想约产生于 1637 年，费马在读丢番图的《算术》时，在第二卷问题 8——“分给定的平方数为两个平方数”——的页边写下如下的注解：“分一立方数为两个立方数，分一个四次幂（或者一般地，任何次幂）为两个同次幂，这是不可能的，我确实找到了一个极妙的证明，但是页边太窄，写不下.”费马是否真有此问题的一个完善的证明，也许将永远是个谜！

费马对 $n=4$ 的情况给出了一个证明，欧拉给出了 $n=3$ 的情况，大约 1825 年，勒让德和狄利克雷独立地对 $n=5$ 的情况给出了证明. 拉梅于 1839 年证明了 $n=7$ 的情形. 德国数学家库默尔对此问题的研究做了有意义的推进. 1908 年，德国数学家佛尔夫斯克尔给哥廷根科学院留下 10 万马克，作为“定理”的第一个完全证明的奖金，更多的证明者纷至沓来.

1995 年，牛顿研究所的著名数学家怀尔斯完成了证明. 至此，这个历时 350 多年的猜想被完美地解决了. 这 350 多年中，有多少优秀的数学家为了费马问题做出不懈的努力，然而，他们都纷纷失败了. 但是，他们为解决问题而做的努力，做出的好设想，却是有价值的，有重大意义的. 正如希尔伯特所说，费马问题是一只会下金蛋的鹅，能激发许多思想，推动数学向前发展.

（二）费马数之谜

伟大的科学家也会犯错误，就连费马这位被誉为 17 世纪最伟大的数学家也不例外. 费马出生于 17 世纪初的法国，是一个皮革商的儿子，童年是在家里接受的教育. 30 岁那年，他得到图卢兹地方议会辩护士的职位. 在那里，他谦虚谨慎地干他的工作，并且利用业余时间从事数学研究. 虽然他一生中发表的著作不多，但他和同时代的许多一流数学家有通信往来，并给他们以相当大的影响.

在费马对数学多种多样的贡献中，最杰出的是对现代数论的奠基. 而他所犯的错误也恰恰是他最擅长的数论中.

1640 年，费马发现：设 $F_n=2^{2^n}+1$，当 $n=0$，1，2，3，4 时，F_n 分别给出 3，5，17，257，65 537，并且这 4 个数都是素数. F_5 太大（$F_5=4\ 294\ 967\ 297$），于是费马没有再进行验证，他猜测：对于一切自然数 n，F_n 都是素数，这种素数后来称费马数. 但他猜错了. 1732 年，欧拉验证发现 $F_5=2^{2^5}+1=4\ 294\ 967\ 297=641\times6\ 700\ 417$，是一个合数. 一百多年后，有人发现 $F_6=2^{2^6}+1=274\ 117\times67\ 280\ 421\ 310\ 721$，也是合数.

令人惊奇的是，陆续有数学家发现 F_7，F_8，…，直到 F_{19} 以及许多 n 值很大的 F_n 全都是合数. 计算机发明后，计算大大简化，但是目前能判断它是素数还是合数的也只有几十个，除费马当年给出的 5 个外，至今尚未有新的素数发现. 人们开始猜测：费马数是否有限？除了那 5 个素数之外，是否再也没有了？这两个问题至今也没有解决，成为数学中的一个谜.

1.1.2 命题的四种形式

教材线索

本小节从学生初中学过的命题与逆命题的知识，引出由一个命题可以构造出命题的其他三种形式，并结合例题介绍了如何由一个命题构造其他命题. 同时介绍了用符号抽象地表示命题的方式. 在此基础上，探讨了命题四种形式之间的关系，特别是其中的等价关系在解决数学问题中的应用.

教学目标

（一）知识与技能

了解原命题、逆命题、否命题、逆否命题的概念，明白四种命题的关系.

（二）过程与方法

能求一般命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

（三）情感、态度与价值观

初步形成运用逻辑知识解决问题的数学意识.

教材分析

1. 重点：

逆命题、否命题、逆否命题的概念及写法.

2. 难点：

四种命题的关系.

3. “了解命题的逆命题、否命题与逆否命题”是指：对给定的具体命题，可以写出它的逆命题、否命题、逆否命题，并可以判断出它们的真假. 会分析四种命题的相互关系，不要求研究含有逻辑连结词“或”、“且”、“非”的命题的逆命题、否命题和逆否命题. 主要包括两部分内容：

第一，通过实例的分析，总结出表示四种命题之间的基本关系，如图 1-1.

第二，知道原命题与其逆否命题是同真同假的，原命题的逆命题与原命题的否命题是同真同假的，通常我们说它们是相互等价的.

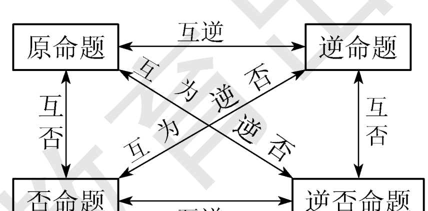


图 1-1

4. 由一个命题出发可以构造出它的逆命题、否命题与逆否命题，构造的关键是分析原

命题的条件和结论．本书中无特别说明，所讨论的命题都是条件与结论比较明显的命题．用符号表示命题可以清晰地显示命题的四种形式，关键还是写好原命题的 p 和 q．

5．原命题和它的逆否命题是等价的，否命题与原命题的逆命题是等价的，我们知道，等价命题不会产生新的命题，但能提供一种思考问题的方法，对拓宽学生的思维有益；原命题和它的逆命题、否命题是不等价的，即当原命题为真时，逆命题、否命题可以为真，也可以为假，但考虑原命题的逆命题、否命题是提出猜想的一个来源，应当引起足够的重视．

教学建议

1．对“命题的逆命题、否命题与逆否命题”只要求做一般性了解．通过教学实例，重点关注四种命题的相互关系，理解原命题与其逆否命题具有相同的真假性（即等价性），由此，对一些问题的解决提供了一种便捷的、间接证明问题的方法，这样便于培养和提高学生的逆向思维能力．

例如：判断命题“若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有实根”是真命题吗？

由该命题的逆否命题易于判断为真，而直接判断原命题，容易出现错误的结论．

2．对于四个命题间的关系图，教师应通过实际例子引导学生得出，使学生理解四种命题之间的真假关系，以及互为逆否命题的两个命题之间的等价关系，能利用这一等价关系转换角度，间接解决一些问题．

例题解析

例 1　分别写出下列两个命题的四种形式．

（1）若 $\alpha=60°$，则 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

（2）设 $a>0$，$b>0$，若 $a>b$，则 $a^2>b^2$．

分析　写好命题的四种形式，关键是认清原命题的条件和结论．第（2）题中的“设 $a>0$，$b>0$”是命题的大前提，在改写时，不作改动．

例 2　把下列命题改写成“若 p 则 q”的形式，并写出它们的逆命题、否命题和逆否命题．

（1）矩形的两条对角线互相平分；

（2）小于 -5 的数的平方大于 25．

分析　所给命题的条件和结论部分都不是很明显，关键是写好原命题的条件 p 和结论 q．今后遇到类似的问题时，也应该这样处理．

例 3　试证：（1）命题“两个角相等的三角形是等腰三角形”的逆命题是真命题．

（2）命题“若 $a>0$，$b>0$，则 $ab>0$”的逆命题是假命题．

分析　第（1）题首先写出原命题的逆命题．由于要证明逆命题是真命题，所以要进行严格的逻辑推理．

第（2）题首先也是写出原命题的逆命题．由于要证明逆命题是假命题，所以只需列举出满足条件，但结论不成立的情形即可．

相关链接

反　证　法

有时候，人们用正向思维解答不了的问题，用逆向思维往往可以轻而易举地解决．数学证明也有相同的情形，靠一般方法难以奏效时，反证法会助人一臂之力．

反证法是数学证明中的一种重要方法，它是从否定命题的结论出发，通过正确的逻辑导出矛盾，从而证明了原命题的正确性的一种重要方法．反证法之所以有效，是因为它对结论的否定实际上增加了论证的条件，这对发现正确的解题思路是有帮助的．在现代数学中，反证法已成为最常用和最有效的解决问题的方法之一．

比如，求证：形如 $4n+3$ 的整数不能化为两整数的平方和．

用反证法证明的过程是这样的：假设 p 是 $4n+3$ 型的整数，且 p 能化成两个整数的平方和，即 $p=a^2+b^2$，则由 p 奇数得 a，b 必为一奇一偶．不妨设 $a=2s+1$，$b=2t$，其中 s，t 为整数，$p=a^2+b^2=(2s+1)^2+(2t)^2=4(s^2+s+t^2)+1$，这与 p 是 $4n+3$ 型的整数矛盾．

再比如，证明：$\triangle ABC$ 内不存在这样的点 P，使得过 P 点的任意一条直线把 $\triangle ABC$ 的面积分成相等的两部分．

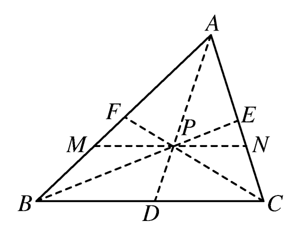


图 1-2

假设在 $\triangle ABC$ 内存在一点 P，使得过 P 点的任一条直线把 $\triangle ABC$ 的面积分成相等的两部分（如图 1-2）．连接 AP，BP，CP 并分别延长交对边 D，E，F．由假设 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$，于是 D 为 BC 的中点，同理 E，F 分别是 AC，AB 的中点，从而 P 是 $\triangle ABC$ 的重心．过 P 作 BC 的平行线分别交 AB，AC 于 M，N，则 $\dfrac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{4}{9}$，这与假设过 P 点的任一条直线把 $\triangle ABC$ 的面积分成相等的两部分矛盾．

1.1.3　充分条件和必要条件

教材线索

本节在学习了命题四种形式的基础上，进一步通过命题“若 p 则 q”的真假性讨论 p 和 q 的真假性之间的联系，从而引出充分条件、必要条件和充要条件的概念．通过判断命题中条件 p 与结论 q 之间的真假性，掌握一种证明命题的方法．

教学目标

（一）知识与技能

理解充分条件、必要条件与充要条件的意义.

（二）过程与方法

结合具体命题，学会判断充分条件、必要条件、充要条件的方法.

（三）情感、态度与价值观

培养学生的辩证思维能力.

教材分析

1. 重点：

充分条件、必要条件和充要条件的意义.

2. 难点：

充分条件、必要条件和充要条件的判断.

3. 对于充分条件、必要条件与充要条件的意义，应通过对具体实例中条件之间的关系的分析来理解.

例如，通过分析下列条件 p 与 q 之间的关系，来理解必要条件的意义.

p：四边形是正方形，q：对角线相互垂直平分.

分析　“若四边形是正方形，则对角线相互垂直平分”是一个真命题，它可以写成“四边形是正方形”$\Rightarrow$“对角线相互垂直平分”.

即 $p\Rightarrow q$.

总结　“若 p 则 q ”为真命题是指：当 p 成立，q 一定成立. 换句话说，p 成立时一定有 q 成立，即 $p\Rightarrow q$，这时，我们就说 q 是 p 的必要条件.

$p\Rightarrow q$ 可以理解为一旦 p 成立，q 必须要成立，即 q 对于 p 成立是必要的. 也就是说，只要 p 成立，必须具备条件 q.

4. 通过具体实例理解充分条件、必要条件和充要条件在解决和思考数学问题中的作用.

在数学中，寻求充分条件是一件很重要的事情. 特别是在引入新的数学对象后，常常需要判断一个对象是不是我们引入的新对象.

例如：(1) 在引入平行四边形后，就需要寻找判定一个图形是不是平行四边形的条件. 我们知道，一组对边平行且相等是判定一个四边形是平行四边形的充分条件，用命题形式表达就是：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

(2) 在引入方程的解的概念后，需要寻找判定方程有解的条件. 像这些条件都是充分条件. 对于区间$[a,b]$上的连续函数 $f(x)$，$f(a)f(b)<0$ 就是判定方程 $f(x)=0$ 在区间$[a,b]$内有解的充分条件. 用命题形式表达就是：对于区间$[a,b]$上的连续函数 $f(x)$，若 $f(a)f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间$[a,b]$内有解.

通常我们把上面的命题称之为判定定理．判定定理中的条件是给出判定一个事物的充分条件．

寻求必要条件也是数学中一件很重要的事情．在数学中，常常要确定一个对象的某些性质．特别是在引入新的数学对象后，常常需要研究这个对象具有什么性质．

例如：（1）在引入平行四边形后，就需要研究平行四边形所具有的性质．我们知道，对角线互相平分是平行四边形的一个性质，用命题形式表达就是：平行四边形的对角线互相平分．

（2）在引入连续函数的概念后，就需要研究连续函数的性质等．有界、最大（小）值等是闭区间上连续函数的性质，用命题形式表达就是：闭区间上的连续函数有界，能取到最大值和最小值．

通常我们把上面的命题称之为性质定理．性质定理中的性质是给出判定一个事物的必要条件，当然，它仅仅是从某些方面反映了事物的特征．因此，必要条件可用来区别一个事物与另一个事物．

在数学上，找到一个“事物”的充分必要条件是特别重要的一件事情，它可以帮助我们从不同的角度，全面地反映同一个“事物”的面貌．在历史上有很多非常重要的充分必要条件的结果．

例如：（1）勾股定理．

勾股定理中的“$a^2+b^2=c^2$”是直角三角形的充分必要条件，有了这个条件，我们就可以通过边的长度之间的关系来研究几何中的直角三角形．

（2）两条直线垂直的充要条件．

两条直线的方向向量的数量积等于零是两条直线垂直的充分必要条件，有了这个条件，我们就可以利用向量的代数运算来研究几何中的垂直问题．

（3）一元二次方程有解的充分必要条件．

判别式 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有解的充分必要条件，有了这个条件，我们就可以定性地研究一元二次方程的解．

一个事物的充分必要条件会给我们讨论问题带来很大的方便，给我们提供了全面刻画事物的另外一个角度，甚至可以帮助我们开拓新的研究方向．

教学建议

“命题的充分条件、必要条件、充要条件”是教学中的一个重点内容．这部分教学的重点应放在“充分条件、必要条件、充要条件”的理解上．根据学生学习的实际情况，许多学生对充分、必要及充要条件意义的理解还存在困难，所以“正确进行充分条件、必要条件、充要条件的判断”是本部分内容的一个难点．判断“充分条件、必要条件、充要条件”的前提，是判断一个给定命题是否是真命题，解决这个问题的关键是需结合实例学习，在不断实践中，加深对其认识，而不是形式上的记忆，因此，讲“充分条件、必要条件、充

要条件”一旦脱离实际就失去意义了.

例题解析

例 1 从“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”和“充要条件”中选择适当的一种填空.

(1) 四边形的对角线相等是四边形是矩形的____________；

(2) $a\geqslant 5$ 是 a 为正数的____________；

(3) 四边形的一组对边平行且相等是四边形的两组对边分别平行的____________.

分析 首先应把命题中的条件即 p 和结论即 q 确定清楚，接着判断原命题是否为真命题，再判断逆命题是否为真命题，从而选择正确的条件.

例 2 试证：

(1) 在实数范围内，$x=1$ 是 $x^2=1$ 的充分而不必要条件；

(2) 四边形的两组对边分别相等是四边形是矩形的必要而不充分条件.

分析 首先应把命题中的条件即 p 和结论即 q 确定清楚，充分性的证明，即条件$\Rightarrow$结论，必要性的证明，即结论$\Rightarrow$条件.

例 3 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件（在“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”、“既不充分也不必要条件”中选出一种）. 为什么？

(1) 设 x，$y\in\mathbf{R}$，p：$x^2+y^2>0$，q：x，y 都不为零；

(2) p：两个三角形的三条边对应成比例，q：两个三角形有两个角对应相等；

(3) p：$0<x<1$，q：$\sin x>0$；

(4) 设 x 是整数，p：x 是 6 的倍数，q：x 是 8 的倍数；

(5) p：圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $ax+by+c=0$ 相切，q：$c^2=(a^2+b^2)r^2$.

分析 分别考虑命题“若 p 则 q”和“若 q 则 p”的真假性，从而选择正确的条件.

1.2 简单的逻辑联结词

1.2.1 逻辑联结词“非”、“且”和“或”

教材线索

本节在学习了命题有关知识的基础上，进一步学习如何用逻辑联结词来精确和严密地表达复杂的数学命题. 首先，学习中学数学常见的三个逻辑联结词“非”、“且”、“或”的数学含义，通过实例说明如何使用这三个逻辑联结词来写数学命题，接着讲述如何根据已知命题的真假性来判断用逻辑联结词表达的数学命题的真假性.

教学目标

（一）知识与技能

通过数学实例，了解简单的逻辑联结词“非”、“且”、“或”的含义.

（二）过程与方法

能正确地利用“非”、“且”、“或”表述相关的数学内容.

（三）情感、态度与价值观

能利用真值表判断复合命题的真假，培养学生的辩证思维能力.

教材分析

1. 重点：

了解逻辑联结词“非”、“且”、“或”的含义，使学生能正确地表述相关数学内容.

2. 难点：

用逻辑联结词“非”、“且”、“或”简洁、准确地表述“否”命题、“且”命题、“或”命题等命题及对所得到的新命题真假的判断.

3. “非”的含义就是对“命题的否定”. 《课程标准》只要求能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

例如：（1）空集是任何集合的真子集，该命题的否定是“空集不是任何集合的真子集”. 显然原命题是真命题，其否定是假命题.

（2）每一个素数都是奇数；该命题的否定是“并非每一个素数都是奇数”. 显然原命题

是假命题，其否定是真命题.

（3）所有的一元二次方程都有实数解；该命题的否定是“存在一个一元二次方程没有实数解”. 显然原命题是假命题，其否定是真命题.

4. 通过一些具体的实例来理解命题否定的作用.

命题的否定常常可以帮助我们证明一些结论.

例如：在（3）中，为了说明原命题是假命题，只需要找到一个无实数解的一元二次方程即可. 这就帮助我们证明了原命题是错误的. 这是数学中常用的一种思考和解决问题的方式.

5. 认识逻辑联结词“非”、“且”、“或”是构造新命题的逻辑用语，利用逻辑联结词“非”、“且”、“或”联结具体命题来构造新命题，通过分析这样构造出的新命题的真假，来理解“非”、“且”、“或”的含义.

例如：对下列各组命题，利用逻辑联结词“且”构造新命题，并判断新命题的真假.

（1）p：12 是 3 的倍数，q：12 是 4 的倍数；

（2）p：$\pi>3$，q：$\pi<2$.

分析 由（1）可得新命题：“12 是 3 的倍数且 12 也是 4 的倍数”；

由（2）可得新命题：“π 大于 3 且 π 小于 2”.

在得出的新命题中，“12 是 3 的倍数且 12 也是 4 的倍数”是真命题，“π 大于 3 且 π 小于 2”是假命题.

概括 从上述例子可以看出，可以用“且”联结两个命题 p 和 q，构成一个新命题“p 且 q”. 当两个命题 p 和 q 都是真命题时，新命题“p 且 q”就是真命题；当两个命题 p 和 q 之中，至少有一个命题是假命题时，新命题“p 且 q”就是假命题.

6. 了解在数学中也可以用逻辑联结词“且”与“或”联结一些条件，形成一个新的条件.

例如：“$x>3$”且“$x<5$”表示的是“$3<x<5$”；“$x<0$”或“$x>5$”表示的是“$x<0$ 或 $x>5$”.

7. 只要求用“或”、“且”把两个命题合成一个命题，不要求把一个复合命题进行“分解”.

例如：“高一一班全体同学考试合格”，这是一个非常明了的命题，实在没有必要说成“高一一班的张三考试合格且李四同学合格，且……”.

教学建议

本节内容课标的要求是通过数学实例，了解逻辑联结词“非”、“且”、“或”的含义. 因此在教学过程中应突出实例，淡化形式，一方面要通过具体实例，帮助学生了解它们的含义；另一方面，要结合具体数学内容不断地使用常用逻辑联结词，加深对相关数学内容的认识. 教学中只要求用这些逻辑联结词做“合成”，不要求对复合命题“分解”. 对于由逻辑联结词“非”、“且”、“或”构成的复合命题，教学时，不应太强调使用真值表，以避

免学生的机械记忆．使学生体会运用逻辑用语表述问题的准确性和简洁性，便于培养学生的表达能力、理解能力和逻辑思维能力．同时，为同学们利用集合这一工具，理解“交”、“并”、“补”与“且”、“或”、“非”之间的关系，构建知识体系提供了再创造的空间．应该让学生明白“p 或 q”，“p 且 q”，“非 p”命题中的“p”，“q”是两个命题，而原命题、逆命题、否命题、逆否命题中的“p”，“q”是一个命题的条件和结论．值得指出的是：一个命题的否定与它的否命题是有区别的，如命题 p：正方形的四条边相等．命题 $\neg p$：正方形的四条边不相等．p 的否命题：若一个四边形不是正方形，则它的四条边不相等．

例题解析

例 1 写出下列命题 p 的否定 $\neg p$：

（1）p：方程 $x^2+x+1=0$ 有实数根；

（2）p：16 不是 5 的倍数；

（3）我们班上每个同学都能言善辩．

分析 命题的 $\neg p$ 形式就是对命题进行全盘否定．

例 2 根据下列命题中的 p，q，写出命题 $p\wedge q$，并判断其真假：

（1）p：矩形的对角线互相垂直，q：矩形的对角线互相平分；

（2）p：函数 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，q：函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减．

分析 命题 $p\wedge q$ 是用逻辑联结词“且”来联结两个命题得到的新命题，可用 p，q 两个命题的真假性来判断新命题的真假性．

例 3 根据下列命题的 p，q，写出命题 $p\vee q$，并判断其真假：

（1）p：5 是集合 $\{2,3,4\}$ 中的元素，q：3 是集合 $\{2,3,4\}$ 中的元素；

（2）p：方程 $x^2+x-1=0$ 有两个正实数根，q：方程 $x^2+x-1=0$ 有两个负实数根．

分析 命题 $p\vee q$ 是用逻辑联结词“或”来联结两个命题得到的新命题，可用 p，q 两个命题的真假性来判断新命题的真假性．

1.2.2 全称量词和存在量词

教材线索

本节从生活和数学两个方面介绍了全称量词和存在量词的含义、数学表示符号，同时介绍常见的全称量词和存在量词，通过实例讲解了全称量词和存在量词的使用及判断一个含有全称量词和存在量词命题真假的方法，最后通过例子讲解了对含有一个全称量词或存在量词的命题进行否定的要求．

教学目标

（一）知识目标

通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词与存在量词的意义.

（二）能力目标

1. 能准确地利用全称量词与存在量词叙述数学内容.

2. 通过生活和数学中的实例，理解对含有一个量词的命题的否定的意义.

3. 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

（三）情感、态度与价值观

培养对立统一的辩证思想.

教材分析

1. 重点：

全称量词与存在量词的含义及对含有一个量词的命题进行否定.

2. 难点：

对含有一个量词的命题进行否定.

3. 教学时要结合具体命题来理解全称量词、存在量词的意义，了解全称量词和存在量词在日常生活和数学中的各种表达形式.

例如：可以结合下面的具体命题来理解全称量词和存在量词的意义.

（1）所有正方形都是矩形；

（2）每一个有理数都能写成分数的形式；

（3）一切三角形的内角和都等于 $180°$；

（4）有些三角形是直角三角形；

（5）如果两个数的和为正数，那么这两个数中至少有一个是正数；

（6）存在一个实数 x，使得 $x^2+x-1=0$.

在以上命题的条件中，“所有”、“每一个”、“一切”等都是在指定范围内，表示整体或全部的含义，这些词都是全称量词；“有些”、“至少有一个”、“存在”等都表示个别或一部分的含义，这些词都是存在量词.

通常，全称量词的表达形式有“所有”、“每一个”、“一切”、“任何一个”、“任意一个”等，存在量词的表达形式有“有些”、“至少有一个”、“存在”、“有一个”、“至少”等.

4. 通过生活和数学中的丰富实例，体会“量词”在数学中和日常生活中的作用.

全称量词、存在量词是数学和日常生活中使用频率很高的一种逻辑用语. 大量的数学命题都要使用这样的逻辑用语.

例如：每一个等腰三角形的两个底角相等，过直线外一点存在唯一的一条直线与该直线平行，就使用了全称量词和存在量词.

在大学的学习中，对数列极限的概念的刻画，就需要多次使用全称量词和存在量词. 对于某一个数列$\{a_n\}$，如果存在一个常数A，对于任意（所有）的$\varepsilon>0$，存在一个N，对任意（所有）的n（$n>N$），都有$|a_n-A|<\varepsilon$，则称A为数列$\{a_n\}$的极限. 在日常生活中，这样的例子也很多.

5.《课程标准》只要求理解和掌握含有一个量词的命题，不要求理解和掌握含有两个或两个以上量词的命题. 对于命题的否定，只要求对含有一个量词的命题进行否定.

例如：对于北京市任何一所高中，都至少有一个学生能跳过 1.5 m 的高度.

在这个命题中，有两个量词"任何一所"、"至少有一个"，对于这样的命题，不要求学生理解和掌握，也不要求对这样的命题进行否定.

教学建议

这部分内容是《课程标准》新增加的内容，旨在使学生认识到这两类量词是日常生活经常使用的两类量词，会判断含全称量词和存在量词的命题的真假，会正确地写出这两类命题，为我们从量的形式和范围上认识和解决问题提供了新的思路和方法. 同时使学生体会从特殊、从具体到一般的认知过程和规律，便于培养和提高学生对问题的抽象和概括的能力. 量词的教学也需要通过实例，帮助学生理解全称量词与存在量词的意义. 教学中只要求理解和掌握含有一个量词的命题，对于含有量词的命题的否定，也只要求对含有一个量词的命题进行否定. 在这部分内容的教学中，应以学生已经学过的数学内容为载体，帮助学生学会正确地使用全称量词和存在量词，加深对已学过的数学知识之间的逻辑联系和数学本质的认识.

全称量词包括："所有的"、"一切"、"任意一个"、"每一个"等.

存在量词包括："存在一个"、"至少有一个"、"有个"、"某个"、"有的"、"有些"等.

教学中举例要注意数学用语的准确性、简洁性和示范性，避免对逻辑用语的机械记忆和抽象解释.

例如：作为对全称命题的示例，"所有成功的人都很勤奋"这样的例子不能引入. 这里"成功"、"勤奋"并不是一个准确的表述词汇.

例如：所有能被 3 整除的数都是奇数.

否定为：(1) 并非所有能被 3 整除的整数都是奇数.

(2) 存在一个能被 3 整除的整数不是奇数.

(3) 有些能被 3 整除的整数不是奇数.

(4) 有些能被 3 整除的整数是偶数.

(5) 所有能被 3 整除的数不都是奇数.

错误的否定写法：所有能被 3 整除的数都不是奇数.

例题解析

例 1　指出下列两个含有量词的命题中使用了什么量词及量词的作用范围，并把量词用

相应的数学符号取代.

(1) 对任意正实数 a，$a^2-a-2>0$；

(2) 对某个大于 10 的正整数 n，$(\sqrt{2})^n=1\ 024$.

分析 常用的量词有：

全称量词包括："所有的"、"一切"、"任意一个"、"每一个" 等.

存在量词包括："存在一个"、"至少有一个"、"有个"、"某个"、"有的"、"有些" 等.

量词的作用范围可注意命题的大前提.

例 2 判断下列命题的真假，并给出证明.

(1) $\forall x\in(5,+\infty)$，$f(x)=x^2-4x-2>0$；

(2) $\forall x\in(3,+\infty)$，$f(x)=x^2-4x-2>0$；

(3) $\exists a\in\mathbf{Z}$，$a^2=3a-2$；

(4) $\exists a\geqslant 3$，$a^2=3a-2$；

(5) 设 A，B，C 是平面上不在同一直线上的三点，在平面上存在某个点 P，使得 $PA=PB=PC$.

分析 判断含有全称量词的命题是真命题，要证明一般情况下命题是真命题；要判断含有全称量词的命题是假命题，只要举出一个反例即可. 判断含有存在量词的命题是真命题，只需找到一种情况能使命题成立即可；判断含有存在量词的命题是假命题，则需要证明对一般情况，命题均不成立.

例 3 对下面含有量词的命题作否定：

(1) p：任意有理数都可以写成两个整数之商；

(2) q：$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+2x+3\leqslant 0$.

分析 一般的对含有量词的命题进行否定，可以简单地总结为"$\neg\forall=\exists\neg$"，"$\neg\exists=\forall\neg$".

教材习题参考解答

P. 3　练习

（1）不是命题；（2）真命题；（3）真命题.

习题 1

1.（1）假命题（取 $a=b=0$ 即可）；（2）真命题.

∵　$x^2\geqslant 0$ 当且仅当 $x=0$ 时，“$=$”成立；

$y^2\geqslant 0$ 当且仅当 $y=0$ 时，“$=$”成立，

∴ $x^2+y^2\geqslant 0$ 当且仅当 $x=0$ 且 $y=0$ 时，“$=$”成立.

2.（1）证明：∵　$\Delta=1+4m$，∴　当 $m>0$ 时，$\Delta>0$.

∴　方程 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根.

∴　命题“若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根”是真命题.

（2）证明：取 $m=-\dfrac{1}{6}$，则方程 $x^2+x-m=0$ 的 $\Delta=1+4m>0$.

所以 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根，但此时 $m<0$.

∴　命题“若 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根，则 $m>0$”是假命题.

3. 略.

4. 略.

P. 8 练习

1.（1）原命题：若两个三角形全等，则它们的面积相等；

逆命题：若两个三角形的面积相等，则它们全等；

否命题：若两个三角形不全等，则它们的面积不相等；

逆否命题：若两个三角形的面积不相等，则它们不全等.

（2）原命题：若 $a>0$，则 $a^3>0$；

逆命题：若 $a^3>0$，则 $a>0$；

否命题：若 $a\leqslant 0$，则 $a^3\leqslant 0$；

逆否命题：若 $a^3\leqslant 0$，则 $a\leqslant 0$.

2. 逆命题：若四边形的对角线互相垂直，则它是正方形；（假命题）

否命题：若四边形不是正方形，则它的对角线不互相垂直；（假命题）

逆否命题：若四边形的对角线不互相垂直，则它不是正方形.（真命题）

3. 不正确.

例如：原命题：“若 $a=b$，则 $a^3=b^3$”是真命题；

否命题："若 $a\neq b$，则 $a^3\neq b^3$" 也是真命题.

习题 2

1.（1）原命题：若四边形是正方形，则它的四条边相等；
逆命题：若四边形的四条边相等，则它是正方形；
否命题：若四边形不是正方形，则它的四条边不相等；
逆否命题：若四边形的四条边不相等，则它不是正方形.

（2）原命题：若一个整数的末位是 5，则它可以被 5 整除；
逆命题：若一个整数可以被 5 整除，则它的末位是 5；
否命题：若一个整数的末位不是 5，则它不可以被 5 整除；
逆否命题：若一个整数不可以被 5 整除，则它的末位不是 5.

（3）原命题：若 $a>0$，则函数 $y=ax+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；
逆命题：若函数 $y=ax+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $a>0$；
否命题：若 $a\leqslant 0$，则函数 $y=ax+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上不单调递增；
逆否命题：若函数 $y=ax+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上不单调递增，则 $a\leqslant 0$.

2.（1）原命题：设 a，b，c 为任意实数，若 $a=b$，则 $ac=bc$；（真命题）
逆命题：设 a，b，c 是任意实数，若 $ac=bc$，则 $a=b$；（假命题）
否命题：设 a，b，c 是任意实数，若 $a\neq b$，则 $ac\neq bc$；（假命题）
逆否命题：设 a，b，c 是任意实数，若 $ac\neq bc$，则 $a\neq b$.（真命题）

（2）原命题：到圆心的距离等于该圆半径的直线是圆的切线；（真命题）
逆命题：若直线是圆的切线，则它到圆心的距离等于圆的半径；（真命题）
否命题：若直线到圆心的距离不等于圆的半径，则它不是圆的切线；（真命题）
逆否命题：若直线不是圆的切线，则它到圆心的距离不等于圆的半径.（真命题）

（3）原命题：$x=5$ 是方程 $x^2-4x-5=0$ 的根；（真命题）
逆命题：若 x 是方程 $x^2-4x-5=0$ 的根，则 $x=5$；（假命题）
否命题：若 $x\neq 5$，则 x 不是方程 $x^2-4x-5=0$ 的根；（假命题）
逆否命题：若 x 不是方程 $x^2-4x-5=0$ 的根，则 $x\neq 5$.（真命题）

3.（1）正确；（2）正确.

4.（1）原命题：若两个数是偶数，则它们的积是一个偶数；
逆命题：若两个数的积是一个偶数，则这两个数是偶数；
否命题：若两个数不都是偶数，则它们的积不是一个偶数；
逆否命题：若两个数的积不是一个偶数，则这两个数都不是偶数.

（2）原命题：若 $\alpha=30^\circ$，则 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

逆命题：若 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\alpha=30^\circ$；

否命题：若 $\alpha\neq30^{\circ}$，则 $\tan\alpha\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$；

逆否命题：若 $\tan\alpha\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\alpha\neq30^{\circ}$.

5.（1）逆命题：设 a 是整数，若 a^3 是 8 的倍数，则 a 是 4 的倍数；

取 $a=2$，则 $a^3=8$ 是 8 的倍数，但 $a=2$ 不是 4 的倍数，所以，命题“设 a 是整数，若 a 是 4 的倍数，则 a^3 是 8 的倍数”的逆命题是假命题.

（2）逆命题：若一个函数的图象有对称轴，则它是二次函数.

取函数 $f(x)=\sin x$，则它的图象有对称轴 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，但它不是二次函数.

所以，命题“若一个函数的图象有对称轴，则它是二次函数”是假命题.

6.（1）原命题：设 a，b，c 是任意三个实数，若 $a>b$，则 $ac>bc$；（假命题）

逆命题：设 a，b，c 是任意三个实数，若 $ac>bc$，则 $a>b$；（假命题）

否命题：设 a，b，c 是任意三个实数，若 $a\leqslant b$，则 $ac\leqslant bc$；（假命题）

逆否命题：设 a，b，c 是任意三个实数，若 $ac\leqslant bc$，则 $a\leqslant b$.（假命题）

（2）原命题：若函数是 $y=x^2$，则它在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增；（真命题）

逆命题：若函数在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则它是 $y=x^2$；（假命题）

否命题：若函数不是 $y=x^2$，则它在区间 $(1,+\infty)$ 上不单调递增；（假命题）

逆否命题：若函数在区间 $(1,+\infty)$ 上不单调递增，则它不是 $y=x^2$.（真命题）

P. 12 练习

1.（3）（4）.

2.（2）（3）.

3.（1）充要条件；（2）必要而不充分条件；（3）充分而不必要条件.

习题 3

1.（1）充分而不必要条件；（2）充要条件；（3）既不充分也不必要条件；（4）必要而不充分条件；（5）充要条件.

2.（1）取 $x=1$，$y=-2$，$x>y$，但 $|x|<|y|$，所以 p 推不出 q；

取 $x=-2$，$y=1$，则 $|x|>|y|$，但 $x<y$，所以 q 推不出 p；

所以 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

（2）$\because$ $\mathbf{N}_+\subset\mathbf{Z}$，$\therefore$ $a\in\mathbf{N}_+\Rightarrow a\in\mathbf{Z}$，即 $p\Rightarrow q$；

取 $a=-1$，则 $a\in\mathbf{Z}$，但 $a\notin\mathbf{N}_+$，所以 q 推不出 p；

所以 p 是 q 的充分而不必要的条件.

（3）设△ABC 的边 BC 的中线为 AM，则 $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle ACM}$，因为 D 在 AM 上，所以 $S_{\triangle BDM}=S_{\triangle CDM}$，从而 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$. 当 D 在 AM 的延长线上时，有 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$，但 D 不

在边 BC 的中线上，所以 p 是 q 的充分而不必要条件.

（4）$2\lg a=\lg(5a-6)\Rightarrow a^2=5a-6\Rightarrow a^2-5a+6=0\Rightarrow a=2$ 或 $a=3$，

所以 p 推不出 q；

$a=2\Rightarrow a^2=5a-6>0\Rightarrow 2\lg a=\lg(5a-6)$，所以 $q\Rightarrow p$.

所以 p 是 q 的必要而不充分条件.

（5）小王的学习成绩优秀不能说明小王是三好学生，所以 p 推不出 q；

但小王是三好学生说明小王的学习成绩优秀，即 $q\Rightarrow p$；

所以 p 是 q 的必要而不充分条件.

3.（1）不是 6 的倍数的充分条件. 取数 15 即可.

（2）是 6 的倍数的充分条件. 因为该数是偶数，所以是 2 的倍数，又该数的各位数字之和是 6 的倍数，所以也是 3 的倍数，所以，该数又是 3 的倍数，故该数是 6 的倍数.

（3）不是 6 的倍数的充分条件. 取数 16 即可.

（4）不是 6 的倍数的充分条件. 取数 9 即可.

4. 不是. 因为 $x=-1\Rightarrow x^2=1$，即“$x\neq1$”推不出“$x^2\neq1$”，所以“$x^2\neq1$”不是“$x\neq1$”的必要条件.

5. 证明：$\because$ $x>1>0$，$\therefore$ $\dfrac{1}{x}<1$，即 $x>1\Rightarrow\dfrac{1}{x}<1$；

取 $x=-1$，则$\dfrac{1}{x}<1$，但 $x<1$，即$\dfrac{1}{x}<1$ 推不出 $x>1$.

所以“$x>1$”是“$\dfrac{1}{x}<1$”的充分而不必要条件.

6. 证明：充分性 $a>0$，$b>0\Rightarrow a+b>0$，$ab>0$.

必要性$\because$ $ab>0$，$\therefore$ a，b 同号，

又 $a+b>0$，所以 a，b 同为正数，即 $a>0$，$b>0$.

所以“$a>0$，$b>0$”是“$a+b>0$，$ab>0$”的充要条件.

7. 例如，条件：a，b，c 为偶数. 事实上，

a，b，c 为偶数$\Rightarrow a+b+c$ 为偶数；但取 $a=1$，$b=2$，$c=3$ 时，$a+b+c$ 为偶数，a，b，c 不全为偶数.

所以，所给条件是一个充分而不必要条件.

8.（1）假命题. 因为 $a^2>b^2$ 时，可以 $a<b<0$.

（2）假命题. 因为取 $c=0$，当 $a>b$ 时，仍有 $ac^2=bc^2=0$.

（3）真命题. 根据不等式的性质即可得出.

P. 16 练习

1.（1）$p\vee q$：2 等于或小于 2；（2）$p\wedge q$：$\sqrt{2}$是实数且是有理数.

2.（1）$p\wedge q$：10 是偶数且是质数；（假命题）

$p \vee q$：10 是偶数或是质数；（真命题）

$\neg p$：10 不是偶数．（假命题）

（2）$p \wedge q$：$x=1$ 且 $x=-1$ 是方程 $x^3-3x+2=0$ 的根；（假命题）

$p \vee q$：$x=1$ 或 $x=-1$ 是方程 $x^3-3x+2=0$ 的根；（真命题）

$\neg p$：$x=1$ 不是方程 $x^3-3x+2=0$ 的根．（假命题）

习题 4

1．（1）真命题；（2）真命题．

2．（1）$p \wedge q$：方程 $x^2+1=0$ 没有实数根且方程 $x^2-5=0$ 没有实数根；（假命题）

$p \vee q$：方程 $x^2+1=0$ 或方程 $x^2-5=0$ 没有实数根；（真命题）

$\neg p$：方程 $x^2+1=0$ 有实数根．（假命题）

（2）$p \wedge q$：正方形是矩形且是菱形；（真命题）

$p \vee q$：正方形是矩形或是菱形；（真命题）

$\neg p$：正方形不是矩形．（假命题）

3．（1）$\neg p$ ：$y=\cos x$ 在$(0,2)$内不单调递增；（真命题）

$p \vee q$：$y=\cos x$ 在$(0,2)$内单调递增或在$(0,\pi)$内恒大于 0；（假命题）

$p \wedge q$：$y=\cos x$ 在$(0,2)$内单调递增且在$(0,\pi)$内恒大于 0．（假命题）

（2）$\neg p$：$2\notin\{2\}$；（假命题）

$p \vee q$：$2\in\{2\}$或 $2\notin\{3,4,5\}$；（真命题）

$p \wedge q$：$2\in\{2\}$且 $2\notin\{3,4,5\}$．（真命题）

（3）$\neg p$：有两个角为 30°的三角形不是锐角三角形；（真命题）

$p \vee q$：有两个角为 30°的三角形是锐角三角形或直角三角形；（假命题）

$p \wedge q$：有两个角为 30°的三角形是锐角三角形且是直角三角形．（假命题）

（4）$\neg p$：方程 $x^2+3x-1=0$ 的两根符号相同；（假命题）

$p \vee q$：方程 $x^2+3x-1=0$ 的两根符号不同或两根之和为 3；（真命题）

$p \wedge q$：方程 $x^2+3x-1=0$ 的两根符号不同且两根之和为 3．（假命题）

P. 20 练习

1．（1）命题（1）中有量词“任意”，这是一个全称量词，它的作用范围是区间$(0,\pi)$．

命题（1）可以写成“$\forall x\in(0,\pi)$，$\sin x>0$”．

（2）命题（2）中有量词“某个”，这是一个存在量词，它的作用范围是有理数．

命题（2）可以写成“$\exists x\in\mathbf{Q}$，$4^x=\dfrac{1}{2}$”．

2．（1）假命题；（2）真命题．

3．（1）全体实数都不是有理数；

（2）我们班上有个同学不是男生．

习题 5

1.（1）某个人的寿命是无限的；

（2）对任意的整数 a，都有 $a^2\neq a$.

2.（1）假命题；（2）真命题.

3.（1）证明：取 $x=\frac{1}{3}$，则 $3x+2=3>0$，但 $2x^2-x=-\frac{1}{9}<0$，所以是假命题.

（2）证明：取 $x=0$，则 $3x+2=2>0$，但 $2x^2-x=0$，所以是假命题.

（3）证明：$x^2-3x+6=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$，所以是假命题.

（4）证明：$a=\sqrt{3}$时，$\log_a 3=2$，即函数 $y=\log_{\sqrt{3}}x$ 的图象过点$(3,2)$，所以是真命题.

（5）证明：取 A，B 的中点 M，过 M 点作平面 α，使得 $AB\perp\alpha$，则平面 α 上任意一点到 A，B 的距离相等. 所以是真命题.

（6）假命题. 证明：略.

4.（1）存在某个实数，它不能写成平方和的形式；

（2）所有三角形的三条中线都不相等；

（3）已知直线 l，过直线 l 外的一点或不可以作或可以作一条以上的直线与已知直线平行.

复习题一

1.（1）原命题：若 a 是偶数，则它可以被 4 整除；（假命题）

逆命题：若 a 可以被 4 整除，则它是偶数；（真命题）

否命题：若 a 不是偶数，则它不可以被 4 整除；（真命题）

逆否命题：若 a 不可以被 4 整除，则它不是偶数.（假命题）

（2）原命题：若整数 a 可以写成两个奇数之和，则它是偶数；（真命题）

逆命题：若整数 a 是偶数，则它可以写成两个奇数之和；（真命题）

否命题：若整数 a 不可以写成两个奇数之和，则它不是偶数；（真命题）

逆否命题：若整数 a 不是偶数，则它不可以写成两个奇数之和.（真命题）

（3）原命题：设 E，F 是$\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上的点，若 E，F 是 AB，AC 的中点，则 $EF/\!/AB$；（真命题）

逆命题：设 E，F 是$\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上的点，若 $EF/\!/AB$，则 E，F 是 AB，AC 的中点；（假命题）

否命题：设 E，F 是$\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上的点，若 E，F 不是 AB，AC 的中点，则 EF 不平行于 AB；（假命题）

逆否命题：设 E，F 是$\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上的点，若 EF 不平行于 AB，则 E，F 不是 AB，AC 的中点.（真命题）

(4) 原命题：设 A，B 是两个集合，若 $A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$；(真命题)

逆命题：设 A，B 是两个集合，若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$；(真命题)

否命题：设 A，B 是两个集合，若 $A\cup B\neq B$，则 $A\not\subseteq B$；(真命题)

逆否命题：设 A，B 是两个集合，若 $A\not\subseteq B$，则 $A\cup B\neq B$. (真命题)

2. (1) 与 (4)、(2) 与 (5)、(3) 与 (6) 互为充要条件.

3. (1) $5<3$；

(2) $\exists m\leqslant 0$，则方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根；

(3) $\forall m\leqslant 0$，则方程 $x^2+x+m=0$ 没有实数根.

4. 若 $a+b$ 不是偶数，则 a，b 不都是偶数.

5. 6 不是偶数或不是 3 的倍数.

6. 略.

7. 证明：设 p：a，b 都是整数；q：方程 $x^2+ax+b=0$ 有且仅有整数解.

取 $a=-2$，$b=-1$，方程 $x^2-2x-1=0$ 的两根为 $x_1=1+\sqrt{2}$，$x_2=1-\sqrt{2}$都不是整数，所以 p 推不出 q.

另一方面，当方程 $x^2+ax+b=0$ 有整数解 x_1，x_2，则有 $a=-(x_1+x_2)$，$b=x_1x_2$. 所以 a，b 都是整数，即 $q\Rightarrow p$. 所以 p 是 q 的必要不充分条件.

8. (1) 正确.

(2) 不正确. 可改为：“$|x|\neq 3$” 的充要条件是 “$x\neq 3$ 且 $x\neq -3$”.

9. $0<a<\dfrac{25}{3}$.

10. (1) 真命题.

证明：设 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2+1}{x-1}=(x-1)+\dfrac{1}{x-1}$，

易证：$f(x)$在$(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$单调递增，在$(0,1)$，$(1,2)$单调递减，

所以 $f(x)\leqslant f(0)=-2$ 或 $f(x)\geqslant f(2)=2$，故原命题是真命题.

(2) 假命题.

证明：设菱形的一个内角为 θ，则 $S_{菱形}=1\times 1\times \sin\theta=\sin\theta\leqslant 1$.

$S_{正三角形}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 60^\circ=\sqrt{3}>1$.

所以，满足题设的菱形不存在.

11. 根据已知条件可画图：

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, Rightarrow] & r \arrow[d, Rightarrow] & q \arrow[l, Rightarrow] \\ & s \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}.$$

(1) 必要条件　(2) 充分条件　(3) r 与 s，r 与 q，q 与 s 均互为充要条件.

第 2 章　圆锥曲线与方程

一、教学目标

1. 借助实例，了解圆锥曲线的实际背景，感知圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

2. 经历从具体情境中抽象出椭圆模型的过程，掌握椭圆的定义和标准方程、几何图形及简单性质.

3. 了解双曲线的定义、几何图形和标准方程，知道双曲线的有关性质.

4. 借助实例了解抛物线的模型，掌握抛物线的定义和标准方程，几何图形及简单性质.

5. 初步学会利用工具画圆锥曲线的图形.

6. 运用坐标法解决一些与圆锥曲线有关的简单几何问题（直线与圆锥的位置关系）和实际问题，并了解圆锥曲线的初步应用.

7. 通过圆锥曲线的学习，进一步体会数形结合的思想.

二、教材说明

远在两千多年前，古希腊许多学者为了解决几何三大作图问题中的倍立方体问题，开始研究圆锥曲线. 著名数学家门内马斯、欧几里得、阿基米德都对圆锥曲线的研究做出了很大的贡献.

到了公元 17 世纪，由于生产发展的需要，推动了天文学、力学和光学的发展. 德国天文学家开普勒发现天体运行轨道是椭圆，意大利物理学家伽利略得到抛掷物体的运动轨迹是抛物线. 17 世纪初期笛卡儿和费马创立了解析几何，用坐标法和方程来研究圆锥曲线. 在本章教学中可以介绍圆锥曲线的由来，使学生对本章要学习的内容产生兴趣. 教学时可以让学生自己动手切割圆锥形的食物、胶泥等，以加深对圆锥曲线的认识. 有条件的学校可以利用计算机演示.

本章的主要内容有：椭圆的定义、标准方程、几何性质；双曲线的定义、标准方程、几何性质；抛物线的定义、标准方程、几何性质以及它们在实际中生活的简单应用.

本章教材力求突出主干知识、精选内容. 研究完椭圆的标准方程和几何性质之后，可以让学生学会以研究椭圆的方法去学习双曲线、抛物线的标准方程、几何性质.

本章内容注重数形结合的基本思想，用坐标法研究几何问题是本章的重点和难点问题. 例如在求椭圆和双曲线标准方程时，会遇到比较复杂的根式化简问题；利用待定系数法求

圆锥曲线的标准方程时，会遇到由两个二元二次方程组成的问题. 教学时，要将这些内容当作新知识认真安排，组织练习，不可一带而过.

三、课时安排建议

本章教学时间约需12课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1　椭圆	
2.1.1　椭圆的定义与标准方程	2课时
2.1.2　椭圆的简单几何性质	2课时
2.2　双曲线	
2.2.1　双曲线的定义与标准方程	1课时
2.2.2　双曲线的简单几何性质	2课时
2.3　抛物线	
2.3.1　抛物线的定义与标准方程	1课时
2.3.2　抛物线的简单几何性质	2课时
2.4　圆锥曲线的应用	1课时
小结与复习	1课时

四、教学建议

1. 数学教学要体现课程改革的基本理念，在教学设计中要充分考虑数学的学科特点，高中学生的心理特点，不同水平、不同兴趣学生的学习需要，运用多种教学方法和手段，引导学生积极主动地学习，掌握数学的基础知识和基本技能以及它们所体现的数学思想方法，发展应用意识和创新意识，对数学有较为全面的认识，提高数学素养，形成积极的情感态度，培养自主学习数学的能力，为未来发展和进一步学习打好基础.

2. 椭圆、双曲线、抛物线定义的引入，在教学中应充分利用教具体现画图过程（也可让学生自己动手实验，有条件的话也可用多种现代化手段加以演示），使学生掌握好三种圆锥曲线的定义.

3. 坐标法是借助坐标系，以代数中数与式的知识为基础来研究几何问题的一种数学方法，坐标法的教学是本章的重点，在教学中要引导学生学会建立适当的坐标系解决几何问题，同时要重视椭圆标准方程的推导过程的教学.

4. 本章教学中应充分体现数形结合的数学思想. 在椭圆、双曲线、抛物线的简单几何性质教学中，应引导学生从图象上进行观察、归纳、总结，同时学会总结对比三种曲线的几何性质的相同点和不同点，加深对圆锥曲线几何性质的认识，并能加以应用.

5. 由曲线求方程，要解决如何将曲线上的点所满足的条件转化为曲线上点的坐标所适合的方程；在解析几何里所讨论的曲线的性质通常包括：曲线的范围，曲线的对称性，曲线的截距（与坐标轴交点的坐标），以及不同曲线所具有的一些特殊性质. 学生要真正掌握

这些知识，需要有一个过程. 教材采用了反复训练，逐步提高的方法.

6. 在圆锥曲线的应用教学中，教师应向学生充分展现圆锥曲线在实际中的应用，例如，投掷铅球的运动轨迹、卫星的运行轨迹等.

五、评价建议

美国的著名心理学家布鲁姆提出了一种学习理论，他在《人类的特性与学校的学习》一书中，强调如何改变学生中学习的个别差异，他认为："掌握学习是能够成功地给大多数学生带来高水平的成绩和进一步提高学习动机等种种教学策略中的一种策略."

数学学习评价，既要重视学生知识、技能的掌握和能力的提高，又要重视其情感、态度和价值观的变化；既要重视学生学习水平的甄别，又要重视其学习过程中主观能动性的发挥；既要重视定量的认识，又要重视定性的分析；既要重视教育者对学生的评价，又要重视学生的自评、互评.

数学学习评价涉及的面很广. 为了使数学教学的评价有利于营造良好的育人环境，有利于数学教与学活动过程的调控，有利于学生和教师的共同成长，下面给出一些具体评价的建议与要求.

1. 对学生学习目的和动机的评价，应关注学生是否积极主动参与数学学习活动.

2. 对学生学习数学兴趣的评价，应关注学生是否愿意和能够与同伴交流数学学习的体会、与他人合作探究数学问题.

3. 对学生在课堂上的表现情况的评价，应重视考查学生能否理解并有条理地表达数学内容，关注学生能否不断反思自己的数学学习过程，并改进学习方法.

4. 对学生完成作业情况的评价，应关注学生是否肯于思考、善于思考、坚持思考并不断改进思考的方法与过程.

5. 对学生的课外活动的表现的评价.

6. 对学生的数学修养与气质的评价.

7. 对学生的考试成绩的评价，应关注学生平时掌握基础知识和基本技能的情况，还应关注学生的考试心理、学生的发展过程.

8. 对学生学习能力的评价，应关注学生能否独立举出一定数量的用于说明问题的正例和反例，能否利用已掌握的知识去解决综合性问题和数学的实际应用问题.

9. 对学生的数学水平的评价，应关注学生能否选择有效的方法和手段收集信息，提出解决问题的思路，建立恰当的数学模型，进而尝试解决问题.

数学实验

生活中的圆锥曲线

这是一个非常有特色的数学实验，与本套书中大多数别的实验不同，它不需要用到计算机，而只是观察生活中的现象. 实验的“仪器”是生活中的日常用品：喝水的杯子，照明的台灯、手电筒. 这个实验大家都可以做.

实验的目的是让学生对圆锥曲线有直观的印象，同时也培养在日常生活中观察数学现象的良好观念.

什么是圆锥曲线？所有的中学课本都告诉我们：到一个定点和定直线距离之比等于定值的点的轨迹称为圆锥曲线.

既然叫做圆锥曲线，总应当与圆锥有关系吧！以这样一种抽象的方式得到的曲线与圆锥有什么关系呢？

答案很简单：圆锥表面被平面截得的截痕所在的曲线就是圆锥曲线. 既然是用圆锥截出来的，当然与圆锥有关系，叫做圆锥曲线就很自然了.

这个答案，一教就懂，但要给出一个严格的数学证明并不容易，至少不适合作为中学生的必学内容.

不能教你如何证明，干脆就不让你知道结论. 于是，很多书在讲圆锥曲线时闭口不谈圆锥曲线与圆锥的关系，其潜在的理由是“不但要知其然，还要知其所以然”，倒过来就变成“不能知其所以然，干脆不让你知其然.”

“知其所以然”当然是好的，但是，一个人的知识结构，其实只能对少数核心知识能够“知其所以然”，大部分知识是只知其然而不知其所以然，如果将这些知识都删去不让知道，那么你的知识就太单薄太贫乏了.

要给出严格的理论证明太困难，但还是可以给出一点令人信服的理由. 比如，可以采取实验观察的方式：做一个圆锥，用一个平面去截，观察截痕的形状，看它是否是熟悉的椭圆、抛物线、双曲线.

用什么材料做圆锥？用木头、金属做圆锥，太难加工. 即使加工好了，再用什么平面去截？没有专门的机械加工设备，很难实现.

用橡皮泥做一个圆锥，再用刀作为平面去截，似乎还可以实现. 但很难做出一个精确的圆锥，不容易得到精确的截线，达不到实验的效果.

我们在生活中找到了别的圆锥和平面. 喝水的一次性杯子的内壁是圆锥面的一部分，

所装的水的表面可以看作平面，水面的边缘就是截线. 台灯罩上下方照出来的光束照到墙壁上，光束可以看成圆锥，墙壁是平面，光影的边缘就是圆锥截线. 手电筒照出来的光束照到墙上或地面上，也得到圆锥截线.

圆锥、平面、圆锥截线这些数学概念，不仅仅出现在书本上、考试卷中，在你生活中处处都有，就看你是否能认出它们.

2.1 椭　圆

2.1.1 椭圆的定义与标准方程

教材线索

本小节从画图实验开始，引入椭圆的定义，并给出焦点、焦距的概念. 再通过建立适当的坐标系，由椭圆的定义建立方程、通过化简方程得到椭圆的标准方程，并用定义法及待定系数法求椭圆的标准方程.

教学目标

（一）知识与技能

掌握椭圆的定义、导出椭圆的标准方程，根据条件会求椭圆的标准方程，初步学会用坐标法解决几何问题.

（二）过程与方法

经历用坐标法建立椭圆的标准方程的过程，研究用椭圆的定义、待定系数法求椭圆的标准方程的方法，研究建立坐标系的方法、探究利用中间变量求点的轨迹的方法.

（三）情感、态度与价值观

认识椭圆的定义，让学生体会数学的对称美、简洁美，形成数形结合的数学思想.

教材分析

1. 重点：

（1）椭圆的定义和椭圆的标准方程；

（2）会用定义法、待定系数法求椭圆的标准方程.

2. 难点：

（1）椭圆标准方程的推导；

（2）用椭圆的定义求椭圆的方程.

3. 在椭圆定义中，对定值加上了一个条件，即大于 $|F_1F_2|$，这样规定是为了避免出现两种特殊情况，即轨迹为一条线段或无轨迹，以便于利用标准方程讨论椭圆的几何性质.

4. 求椭圆的标准方程时，首先要建立坐标系，为了使方程简单，必须注意坐标系的选

择. 在求椭圆的标准方程时，选择 x 轴经过两个定点 F_1，F_2，并且使坐标原点与线段 F_1F_2 的中点重合，这样两个定点的坐标比较简单，便于推导方程.

在求方程时，设椭圆的焦距 $2c$（$c>0$），椭圆上任意一点到两个焦点的距离的和为 $2a$（$a>0$），这是为了使焦点及长轴两个端点的坐标不出现分数形式，以便导出的椭圆的方程形式简单，令 $b^2=a^2-c^2$ 是为了使方程的形式整齐而便于记忆，同时 b 还有特定的几何意义，b 的几何意义将在下一节说明.

5. 带根式的方程的化简是学生感到困难的，特别是由点 P 适合的条件所列出的方程为两个根式的和等于一个非零常数，化简时要进行两次平方，方程中字母超过三个，且次数高，项数多，初中代数中没有做过这样的题目. 教学时，要注意说明这类方程化简的方法，若方程中只有一个根式时，需将它单独留在方程的一边，把其他各项移到另一边；若方程中有两个根式时，需将它们分别放在方程的两边，并使其中一边只有一项.

在给出中心在原点，焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 以后，应让学生明确以下几点：

（1）在椭圆的两种标准方程中，总有 $a>b>0$；

（2）椭圆的焦点总是在长轴上；

（3）a，b，c 始终满足关系式 $c^2=a^2-b^2$. 如果焦点在 x 轴上，则焦点坐标为（c，0），（$-c$，0）；如果焦点在 y 轴上，则焦点坐标为 $(0,c)$，$(0,-c)$；

（4）在遇到形如 $Ax^2+By^2=C$ 的方程中，只要 A，B，C 同号，就是椭圆方程，可以化成 $\dfrac{Ax^2}{C}+\dfrac{By^2}{C}=1$，即 $\dfrac{x^2}{\frac{C}{A}}+\dfrac{y^2}{\frac{C}{B}}=1$.

教学建议

根据椭圆的定义判断轨迹是否是椭圆，在标准形式下，设出相应的方程，用待定系数法求方程，熟练掌握椭圆的定义和元素（长轴、短轴、焦距、焦点坐标）之间的内在联系是本节教学的关键.

例题解析

例 1　设平面上建立了直角坐标系使两焦点在 x 轴上并且关于原点对称，坐标分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中 $c>0$，如图 2-1 所示. 设椭圆是到 F_1，F_2 两点距离之和为固定值 $2a$ 的点的轨迹，$2a>2c$，求椭圆的方程.

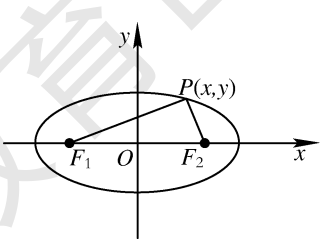


图 2-1

分析　本节教学的重点和难点所在，在分析解题过程中特别应强调几点：

（1）建立坐标系应强调对称性；

（2）化简方程要将两个根式分到等式的两边，有利于简化运算；

（3）换元 $b^2=a^2-c^2$ 也是化简方程形式的一个手段.

焦点在 y 轴上的椭圆标准方程的求解过程：

解 平面上任一点 $P(x,y)$在椭圆上的充分必要条件为$|PF_1|+|PF_2|=2a$.

由于$|PF_1|=\sqrt{x^2+(y+c)^2}$，$|PF_2|=\sqrt{x^2+(y-c)^2}$，点 $P(x,y)$所满足的条件为

$\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2a$，

即$\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2a-\sqrt{x^2+(y-c)^2}$.

两边平方得 $x^2+(y+c)^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}+x^2+(y-c)^2$，

整理得 $a\sqrt{x^2+(y-c)^2}=a^2-cy$.

两边再平方得 $a^2x^2-2a^2cy+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cy+c^2y^2$，

再整理得 $a^2x^2+(a^2-c^2)y^2=a^2(a^2-c^2)$.　　（*）

同样记 $b=\sqrt{a^2-c^2}$，则由（*）式可变为

$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$，

即$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$为焦点在 y 轴上的椭圆标准方程.

例 2 求下列椭圆的焦点坐标，以及椭圆上每一点到两焦点距离的和.

（1）$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1$；

（3）$4x^2+3y^2=4$.

分析 由椭圆标准方程求焦点坐标，由定义求 $2a$ 的值.

例 3 求满足下列条件的椭圆方程.

（1）焦点在$(-3,0)$和$(3,0)$，椭圆上每点到两个焦点的距离之和为 10.

（2）焦点在$(0,-2)$和$(0,2)$，椭圆经过点$(3,2)$.

分析 （1）已知焦点坐标以及椭圆上点到两焦点距离之和，求椭圆方程；

（2）已知焦点坐标及椭圆上一点，求椭圆方程.

在例 3 教学中，突出用定义法求椭圆标准方程，尤其在（2）的教学中，教师可以把它和用待定系数法求标准方程进行对比，可以发现这种方法的计算量较小.

2.1.2 椭圆的简单几何性质

教材线索

通过椭圆的图象研究椭圆的几何性质，通过椭圆标准方程的讨论，掌握椭圆的几个性质．掌握椭圆的范围、对称性、顶点、长轴、短轴、a，b，c 的几何意义；了解离心率的定义及离心率确定椭圆的扁圆程度；知道怎样用代数方法研究曲线的几何性质．

教学目标

（一）知识与技能

1．掌握椭圆的范围、对称中心、对称轴、顶点；了解 a，b，c 的几何性质及长轴与短轴的几何意义；了解离心率的定义及离心率的几何意义．

2．掌握直线与椭圆位置关系的判断方法，运用方程、不等式的知识解决问题．

（二）过程与方法

借助椭圆的标准方程探求椭圆的范围，尝试用点的坐标的对称性来研究椭圆的对称性．体验解析几何中常用的设而不求法．

（三）情感、态度与价值观

认识椭圆的几何性质、感受椭圆的对称美，了解设而不求法的应用，感受到数学中的演算技巧，增强学生学习数学的兴趣．

教材分析

1．重点：

（1）掌握从方程中转化出 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 及 $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ 后，讨论 x，y 的范围的方法；

（2）通过已学过的对称概念和关于 x 轴、y 轴、原点对称的点的坐标之间的关系去了解椭圆的对称性；

（3）熟练掌握 a，b，c 的几何意义与椭圆方程的关系．

（4）掌握离心率的定义及计算离心率 e，$0<e<1$．

2．难点：

（1）根据椭圆的几何性质求椭圆的方程；

（2）讨论直线与椭圆的位置关系．

3．根据曲线的方程研究它的性质，画图是解析几何的目的．本小节通过对椭圆标准方程的讨论，一方面要使学生掌握椭圆的几个性质、掌握 a，b，c 的几何意义，同时，通过

对标准方程的讨论，使学生知道在解析几何中怎样用代数方法研究曲线的性质.

4. 在讨论椭圆的对称性之前，应先复习初中学过的对称的概念和关于 x 轴、y 轴、原点对称的点的坐标之间的关系，然后说明“以 $-x$ 代入 x，或以 $-y$ 代入 y，或同时以 $-x$ 代入 x，以 $-y$ 代入 y 方程不变，则图形关于 y 轴、x 轴、原点对称”的道理.

5. 通过求椭圆的顶点，得到 a，b 的几何意义，这里要特别提醒学生：a 是长半轴的长，b 是短半轴的长. 又由 $c^2=a^2-b^2$，可得已知椭圆的四个顶点，求焦点的几何作法.

6. 离心率的概念比较抽象. 为了帮助学生理解这个概念，教科书配备了多道练习题，如第 39 页上练习的第 1 题及习题的第 2 题，教学时可以利用这两道题来帮助学生认识离心率的大小对椭圆形状的影响.

7. 通过对椭圆的范围、对称性及特殊点的讨论，可以从整体上把握曲线的形状、大小和位置. 椭圆的焦点决定椭圆的位置，范围决定椭圆的大小，对称性是曲线的重要性质，顶点是椭圆与对称轴的交点，是椭圆重要的特殊点.

8. 对教材例子的处理应重点放在对方程组解的个数的讨论上，同时要教会学生掌握数形结合的数学思想，这样有时可减少运算量.

例如：直线 $y=kx+1(k\in\mathbf{R})$ 与焦点在 x 轴上的椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 总有公共点，则 m 的取值范围是__________.

解 1 联立方程组 $\begin{cases} y=kx+1, & ①\\ \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{m}=1. & ② \end{cases}$

将①代入②得 $(m+5k^2)x^2+10kx+5(1-m)=0$.

$\therefore \quad \Delta=100k^2-20(1-m)(m+5k^2)\geqslant 0.$

即 $\quad 5mk^2+m^2-m\geqslant 0.$

$\because \quad m>0,$

即 $5k^2+m-1\geqslant 0$ 对 $k\in\mathbf{R}$ 恒成立.

$\therefore \quad m\geqslant 1.$

又 $m<5$， $\therefore \quad m\in[1,5).$

解 2 如果注意到直线 $y=kx+1$ 过定点 $(0,1)$，焦点在 x 轴上的椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 的最高点为 $(0,\sqrt{m})$，如果点 $(0,1)$ 在椭圆的边界与内部，则直线与椭圆必有公共点，$\therefore \sqrt{m}\geqslant 1$，即 $m\geqslant 1$. 又椭圆的焦点在 x 轴上，$\therefore m<5$，$\therefore m\in[1,5)$.

教学建议

为了学生能顺利完成直线与椭圆的位置关系的判定，有必要复习一些一元二次不等式的解法及一元二次方程根的判别式应用.

例题解析

例 1 叙述下列方程的图象的形状和位置，并说出图象的分布范围.

（1）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；（2）$9x^2+4y^2=1$；

（3）$4x^2+4y^2=1$.

分析 根据方程求曲线的范围的练习.（1）小题可直接根据椭圆的范围来求；（2）小题应先将方程化为椭圆的标准方程之后来求；（3）小题化为圆的标准方程来求范围，其方法与椭圆相类似.

例 2 过两点 $P_1(2,2)$，$P_2(-3,-1)$作一个椭圆，使它的中心在原点，焦点在 x 轴上. 求椭圆的方程，以及椭圆的长半轴、短半轴的长度以及离心率..

分析 教学中介绍用待定系数法求椭圆的标准方程时，应将$\frac{1}{a^2}$，$\frac{1}{b^2}$看作未知数，将方程化成二元一次方程组来求解. 这里也可采用换元的形式，令 $m=\frac{1}{a^2}$，$n=\frac{1}{b^2}$，将方程组转化为$\begin{cases}4m+4n=1,\\9m+n=1\end{cases}$来进行求解，求出 a，b，c 的值，并据此求出 e.

例 3 对不同的实数值 m，讨论直线 $y=x+m$ 与椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的位置关系.

分析 教学应侧重复习直线与圆的位置关系中学过的用方程根的个数来判断直线与圆的公共点的个数的方法，用同样的方法来讨论直线与椭圆的位置关系.

讲完例 3 后，教师可引导学生一起想一想，任意一条直线与椭圆的位置关系是否也是上述三种不同的情况. 还可举一些过定点，斜率在变的直线来进行分析说明.

相关链接

椭圆的光学性质

从椭圆的一个焦点发出的光线或声波射到椭圆上反射后，其反射线都经过椭圆的另一个焦点（如图 2-2）. 可以证明这个性质成立.

已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，经过左焦点 F_1 的入射光线射到椭圆上的点 $P(x_0,y_0)$，证明：反射光线经过右焦点 F_2.

证明思路分析：过 P 作椭圆的切线 l，过 P 作 $PN\perp l$，即 PN 为法线，先求出切线的斜率即可求出法线的斜率. 利用“到角公式”，求出入射线到法线的夹角及反射线到法线的夹角，若入射角等于反射角即得证，具体证明参见本书 $P63$ 的内容.

椭圆的光学性质在实践中也有着广泛的应用，例如：电影放映机的聚光灯有一个反射镜，它的形状是旋转椭圆面，为了使片门（电影胶片通过的地方）处获得最强的光线，可将灯丝 F_2 与片门 F_1 于椭圆的两个焦点处（如图 2-3）.

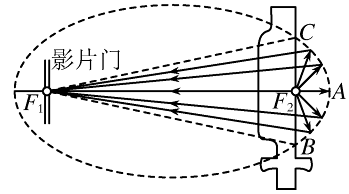


图 2-3

2.2 双曲线

2.2.1 双曲线的定义与标准方程

教材线索

本小节从画图实验入手，观察到两个定点 F_1 和 F_2 的距离之差等于 d 的点的轨迹的形状，从而引入双曲线的定义，并给出焦点、焦距的概念，建立适当的坐标系，利用双曲线的定义建立方程，并化简方程为标准方程，通过例题掌握用定义法及待定系数法求双曲线的标准方程.

教学目标

（一）知识与技能

掌握双曲线的定义、导出双曲线的标准方程. 根据条件会求双曲线的标准方程.

（二）过程与方法

经历导出双曲线标准方程的过程，复习待定系数法.

（三）情感、态度与价值观

认识双曲线的图象，体会数学的对称美.

教材分析

1. 本课从问题入手，即“平面上到两点距离之差为定值的点的轨迹是什么曲线?”，通过画图实验大致画出曲线的形状，进而引出双曲线的定义，最后根据定义求出双曲线的标准方程. 这一小节的教学可以参照 2.1.1 进行，教学中要着重对比椭圆与双曲线的相同点和不同点，特别是它们的不同点.

2. 建立双曲线的标准方程是本课的重点和难点. 从“平面内到两定点的距离差的绝对值是常数（与椭圆不同，这个常数要大于 0 且小于 $|F_1F_2|$）的点 M 的轨迹”这一双曲线的定义出发，推导出它的标准方程. 推导过程说明，双曲线上任意一点的坐标都适合方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

3. 讲述双曲线的标准方程时，可与椭圆内容进行比较：

(1) 设 $M(x,y)$ 为双曲线上任意一点，若 M 点在双曲线的右支上，则 $|MF_1|>|MF_2|$，$|MF_1|-|MF_2|=2a(a>0)$，若 M 在双曲线的左支上，则 $|MF_1|<|MF_2|$，$|MF_1|-|MF_2|=-2a(a>0)$，这是与椭圆不同的地方.

(2) 当得到 $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$ 后，可以与椭圆一样处理，因为 $a<c$，$\therefore c^2-a^2>0$.

令 $c^2-a^2=b^2$，则 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，这与椭圆不同.

(3) 通过比较两种不同类型的双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，向学生说明，如果 x^2 项的系数是正数，那么焦点在 x 轴上；如果 y^2 项的系数是正的，那么焦点在 y 轴上. 对于双曲线，a 不一定大于 b，因此不能像椭圆那样通过比较分母的大小来判定焦点在哪一条坐标轴上.

(4) 在讲授过程中，可抓住与椭圆标准方程的异同，在教师指导下由学生列表进行对比，使学生掌握椭圆、双曲线的标准方程以及它们之间的区别和联系.

椭圆	双曲线
根据 $\lvert MF_1\rvert+\lvert MF_2\rvert=2a$.	根据 $\lvert MF_1\rvert-\lvert MF_2\rvert=\pm 2a$.
$\because a>c>0$，$\therefore$ 令 $a^2-c^2=b^2$ $(b>0)$.	$\because 0<a<c$，$\therefore$ 令 $c^2-a^2=b^2$ $(b>0)$.
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $\left(\begin{array}{l}a>0，b>0，\\ a\text{ 不一定大于 }b\end{array}\right)$.

4. 本小节的教学中，要进一步对学生进行坐标法的训练，从教材中配备的练习题来看，可以在课内增加用待定系数法求双曲线方程的例题. 在使用待定系数法时，是将标准方程中的 a，b 作为待定系数，通过解方程组的办法求出 a，b. 由于 a，b 在分母上，并且是二次的，所以应采用换元法，把方程化为二元一次方程来求解.

教学建议

在本节教学中，要特别重视双曲线画法的实验，有条件的学校还可利用课件来演示作图的过程，让学生对双曲线的形状有一个直观的认识. 另外，在本节教学中，教师应引导和帮助学生利用对比学习的方法，通过与椭圆标准方程推导的过程进行有比较的学习.

例题解析

在本节的 3 个例题的教学中，例 1 的教学可采用引导、点拨的方式来组织学生讨论，利用已学过的推导椭圆标准方程的方法来自主探究，自己完成整个推导过程.

在例 1 教学完成之后，教师还应引导学生对比椭圆的两种标准方程与双曲线的两种标

准方程，看看有哪些相同点与不同点，让学生掌握类比、归纳的数学思想方法，也可以用表格的形式来完成.

例 2、例 3 都是已知双曲线的两个焦点坐标，结合双曲线的定义求双曲线的标准方程. 教材在例 3 的处理上采用与椭圆相同的方法，即用两点距离公式结合定义来求解.

相关链接

双曲线的包络线

1. 折纸方法：

取一圆形的纸片，在圆外部任意标出一点 F_2，然后把纸片折叠起来，不过，要使翻转过来的圆弧都通过 F_2，当折叠的次数够多时，这些折痕就会“包”出一个双曲线，如图 2-4.

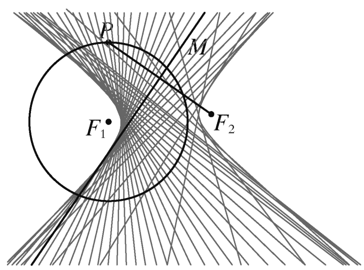


图 2-4

说明：

(1) 在圆 F_1 上任取一点 P；

(2) 作线段 PF_2；

(3) 作线段 PF_2 的中垂线 M；

(4) 直线 M 所包出来的轨迹，即为所求.

2. 理论依据：

双曲线的一焦点对其任意切线的对称点构成一个圆，此圆的圆心为另一焦点，而半径为双曲线之实轴的长.

2.2.2 双曲线的简单几何性质

教材线索

双曲线的几何性质的教学，也可与椭圆的性质对比进行，着重指出它们的联系与区别. 本小节从研究范围、对称性、顶点、渐近线四个部分讨论双曲线的几何性质. 教材重点突出讲解渐近线的比较严格的定义，对于圆锥曲线来讲，渐近线是双曲线所特有的，利用双曲线的渐近线来画双曲线特别方便.

教学目标

（一）知识与技能

掌握双曲线的范围、对称性、顶点、渐近线、离心率等几何性质；能根据双曲线的标准方程求出双曲线的实半轴长、虚半轴长、焦点坐标、渐近线方程，初步应用双曲线的渐近线画出双曲线的草图. 运用坐标法建立曲线方程，讨论圆锥曲线的位置关系；掌握数形结合的数学思想及方程的思想；运用“点差法”解决双曲线中点弦问题.

（二）过程与方法

观察双曲线渐近线的特征，探索无穷的奥秘；研究点在双曲线的内部、外部的情形；探究如何用“点差法”解决双曲线的中点弦的问题.

（三）情感、态度与价值观

初步体会无究的奥妙，认识数学的科学价值；了解双曲线与直线的位置关系；获得“设而不求”的方法，感觉数学的几何美学及代数运算的简洁美，增强学生学习解析几何的兴趣.

教材分析

1. 范围：

由标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可得 $x^2\geqslant a^2$，当 $|x|\geqslant a$ 时，y 才有实数值，对于 y 的任何值，x 都有实数值. 要讲清在直线 $x=a$，$x=-a$ 之间没有图象，当 x 的绝对值无限增大时，y 的绝对值也无限增大，所以曲线是无限伸展的，不像椭圆那样是封闭曲线.

2. 对称性：

双曲线的对称性与椭圆完全相同，可逐一提问，让学生回答双曲线具有的对称性，并说明原因.

3. 顶点：

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有两个顶点$(a,0)$,$(-a,0)$,令 $x=0$ 时,方程 $y^2=-b^2$ 无实数根,所以它与 y 轴无交点,$2b$ 是双曲线的虚轴的长.因为学生没有学过共轭双曲线,所以对虚轴不好理解,容易把虚轴与椭圆的短轴混淆,教学中要提醒学生注意.另外,双曲线只有两个顶点,而椭圆有四个顶点,这是它们的不同点.

4.渐近线：

对圆锥曲线来说,这是双曲线特有的性质,利用双曲线的渐近线来画出双曲线的草图特别方便,而且较为准确,只要作出双曲线的两个顶点和两条渐近线,就能画出它的近似图形.

教材上对于曲线与渐近线无限接近的说明是本节的难点之一,教学中应予以重视.若曲线上的点到某一直线的距离为 d,当点趋向于无穷远时,d 能趋近于 0,则这条直线称为该曲线的渐近线.

由双曲线的标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$可得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

当x无限增大时，$\frac{a^2}{x^2}$趋近于0，也就是说这时双曲线$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$与直线$y=\pm\frac{b}{a}x$无限接近，这使我们有理由猜想直线$y=\pm\frac{b}{a}x$为双曲线的渐近线. 教材上利用在第一象限内的点在相同横坐标下直线$y=\frac{b}{a}x$与双曲线$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$的点的纵坐标之差$d$接近于0来证明.

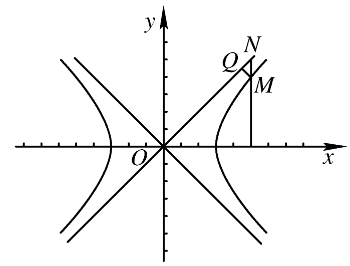


图 2-5

也可如图 2-5 这样说明：

设点M到直线$y=\frac{b}{a}x$的距离为$|MQ|$，在$\mathrm{Rt}\triangle MQN$中，若斜边的长趋近于0，当然直角边的长也趋近于0，所以当$|MN|\to 0$，立刻可得$|MQ|\to 0$，这就证明了当x无限增大时，点M到直线$y=\frac{b}{a}x$的距离趋近于0.

5. 与椭圆一样，我们把比值$e=\frac{c}{a}$叫作双曲线的离心率. 椭圆的离心率是描述椭圆扁平程度的一个重要数据；双曲线的离心率是描述双曲线“张口”大小的一个重要数据. 由于$\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$，当e的值从接近于1逐渐增大时，$\frac{b}{a}$的值就从接近于0逐渐增大，这时双曲线的形状就从扁狭逐渐变得开阔，也就是说双曲线的“张口”逐渐增大.

6. 与椭圆一样，教材着重讲双曲线的第一个标准方程的几何性质，对于第二个标准方程的几何性质，教师可引导学生通过对比来进行归纳和小结.

教学建议

在本节教学中，有条件的学校最好能运用课件演示双曲线的图形，观察它的几何性质，尤其是观察曲线无限接近于渐近线的这一趋势，对渐近线的教学将有很好的辅助作用.

例题解析

例 1 求双曲线$4y^2-9x^2=-4$的实半轴长、虚半轴长、焦点坐标、渐近线方程以及离心率，并画出曲线的草图.

分析 本例是根据双曲线的标准方程求双曲线的实半轴长、虚半轴长、焦点坐标、渐近线方程以及离心率的例题. 在教学中主要让学生分辨方程代表的双曲线的焦点在哪条坐标轴上，熟练掌握a，b，c及渐近线方程的求法，在画图过程中要突出渐近线与顶点的

作用.

例 2 已知双曲线的两焦点坐标 $F_1(0,-2)$,$F_2(0,2)$,以及双曲线上一点 P 的坐标$(3,-2)$.求双曲线的方程、顶点坐标和渐近线方程以及离心率.

分析 本例的教学可以类比椭圆中学过的定义法求方程来进行.

例 3 以下方程的图象是否是双曲线?如果是,求它的焦点坐标、顶点坐标和渐近线方程.

(1) $4x^2-5y^2=-20$;(2) $4x^2-5y^2=1$;(3) $4x^2-5y^2=0$.

分析 教学中应让学生比较(1)(2)两个小题中的标准方程$\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{5}=1$ 和$\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{5}}=1$.将方程右边“1”改为“0”后所得的两条直线方程都是 $y=\pm\dfrac{2}{5}\sqrt{5}x$,从而得出对一般的双曲线方程$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$,只要将方程右边的“1”改为“0”,即可得到双曲线的两条渐近线方程:$y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 或 $y=\pm\dfrac{a}{b}x$.

通过此结论可以反过来由已知双曲线的两条渐近线方程 $Ax\pm By=0$ 来假设双曲线方程为 $A^2x^2-B^2y^2=\lambda$,用待定系数法求出 λ,从而得出双曲线方程.

例 4 如图 2-6 所示,反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$的图象是双曲线,两条坐标轴是它的渐近线.求它的实半轴长和半焦距.

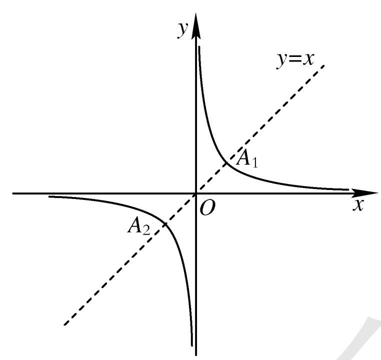


图 2-6

分析 通过学生熟悉的反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$的双曲线图象,介绍了中心在原点,对称轴不在 x 轴上的双曲线的原点坐标、实半轴长、虚半轴长、半焦距的求法.同时介绍了反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$在以对称轴为 x 轴的新坐标系中方程的求法,让学生了解方程转化的基本方法.

相关链接

(一) 解析几何的产生

16 世纪以后,由于生产和科学技术的发展,天文、力学、航海等方面都对几何学提出了新的需要.比如,德国天文学家开普勒发现行星是绕着太阳沿着椭圆轨道运行的,太阳处在这个椭圆的一个焦点上;意大利科学家伽利略发现投掷的物体是沿着抛物线运动的.这些发现都涉及圆锥曲线,要研究这些比较复杂的曲线,原先的一套方法显然已经不适应

了，这就导致了解析几何的出现.

1637 年，法国的哲学家和数学家笛卡儿发表了他的著作《方法论》，这本书的后面有三篇附录，一篇叫《折光学》，一篇叫《流星学》，一篇叫《几何学》. 当时的这个“几何学”实际上指的是数学，就像我国古代“算术”和“数学”是一个意思一样.

笛卡儿的《几何学》共分三卷，第一卷讨论尺规作图；第二卷是曲线的性质；第三卷是立体和“超立体”的作图，但它实际是代数问题，探讨方程的根的性质. 后世的数学家和数学史学家都把笛卡儿的《几何学》作为解析几何的起点.

从笛卡儿的《几何学》中可以看出，笛卡儿的中心思想是建立起一种“普遍”的数学，把算术、代数、几何统一起来. 他设想，把任何数学问题化为一个代数问题，再把任何代数问题归结到去解一个方程式.

为了实现上述的设想，笛卡儿从天文和地理的经纬制度出发，指出平面上的点和实数对(x,y)的对应关系. x，y 的不同数值可以确定平面上许多不同的点，这样就可以用代数的方法研究曲线的性质. 这就是解析几何的基本思想.

具体地说，平面解析几何的基本思想有两个要点：第一，在平面建立坐标系，一点的坐标与一组有序的实数对相对应；第二，在平面上建立了坐标系后，平面上的一条曲线就可由带两个变数的一个代数方程来表示了. 从这里可以看到，运用坐标法不仅可以把几何问题通过代数的方法解决，而且还把变量、函数以及数和形等重要概念密切联系起来.

解析几何的产生并不是偶然的. 在笛卡儿写《几何学》以前，就有许多学者研究过用两条相交直线作为一种坐标系；也有人在研究天文、地理的时候，提出了一点位置可由两个“坐标”（经度和纬度）来确定. 这些都对解析几何的创建产生了很大的影响.

在数学史上，一般认为和笛卡儿同时代的法国业余数学家费马也是解析几何的创建者之一，应该分享这门学科创建的荣誉.

费马是一个业余从事数学研究的学者，对数论、解析几何、概率论三个方面都有重要贡献. 他性情谦和，好静成癖，对自己所写的“书”无意发表. 但从他的通信中知道，他早在笛卡儿发表《几何学》以前，就已写了关于解析几何的小文，就已经有了解析几何的思想. 只是直到 1679 年，费马死后，他的思想和著述才从给友人的通信中公开发表.

笛卡儿的《几何学》，作为一本解析几何的书来看，是不完整的，但重要的是引入了新的思想，为开辟数学新园地做出了贡献.

（二）解析几何的基本内容

在解析几何中，首先是建立坐标系. 取定两条相互垂直的、具有一定方向和度量单位的直线，叫作平面上的一个直角坐标系 Oxy. 利用坐标系可以把平面内的点和一个实数对(x,y)建立起一一对应的关系. 除了直角坐标系外，还有斜坐标系、极坐标系、空间直角坐标系等等. 在空间坐标系中还有球坐标和柱坐标.

坐标系将几何对象和数、几何关系和函数之间建立了密切的联系，这样就可以对空间形式的研究归结为比较成熟也容易驾驭的数量关系的研究了. 用这种方法研究几何学，通常就叫作解析法. 这种解析法不但对于解析几何是重要的，就是对于几何学的各个分支的研究也是十分重要的.

解析几何的创立，引入了一系列新的数学概念，特别是将变量引入数学，使数学进入了一个新的发展时期，这就是变量数学的时期. 解析几何在数学发展中起了推动作用. 恩格斯对此曾经做过评价："数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了……"

（三）解析几何的应用

解析几何又分作平面解析几何和空间解析几何.

在平面解析几何中，除了研究直线的有关性质外，主要是研究圆锥曲线（圆、椭圆、抛物线、双曲线）的有关性质.

在空间解析几何中，除了研究平面、直线有关的性质外，主要研究柱面、锥面、旋转曲面.

椭圆、双曲线、抛物线的有些性质，在生产或生活中被广泛应用. 比如电影放映机的聚光灯泡的反射面是椭圆面，灯丝在一个焦点上，影片门在另一个焦点上；探照灯、聚光灯、太阳灶、雷达天线、卫星的天线、望远镜等都是利用抛物线的原理制成的.

总的来说，解析几何运用坐标法可以解决两类基本问题：一类是满足给定条件的点的轨迹，通过坐标系建立它的方程；另一类是通过方程的讨论，研究方程所表示的曲线性质.

运用坐标法解决问题的步骤是：首先在平面上建立坐标系，把已知点的轨迹的几何条件"翻译"成代数方程；然后运用代数工具对方程进行研究；最后把代数方程的性质用几何语言叙述，从而得到原先几何问题的答案.

坐标法的思想促使人们运用各种代数的方法解决几何问题. 先前被看作几何学中的难题，一旦运用代数方法后就变得平淡无奇了. 坐标法对近代数学的机械化证明也提供了有力的工具.

2.3 抛物线

2.3.1 抛物线的定义与标准方程

教材线索

讲抛物线的定义，可以像椭圆、双曲线一样从画图开始，这样定义抛物线，便于导出它的标准方程，也可以使学生一开始就看到抛物线和椭圆、双曲线之间的联系，并为后面对圆锥曲线进行小结做好准备.

教学目标

（一）知识与技能

掌握抛物线的的四种标准方程及图象、焦点坐标、准线方程.

（二）过程与方法

讨论抛物线的标准方程，初步应用抛物线的定义解决轨迹问题.

（三）情感、态度与价值观

了解抛物线与二次函数图形的异同，了解知识呈螺旋式上升的过程.

教材分析

1. 与前面几节课相似，教材设计画图实验，要求画出“平面上到一定点 F 和定直线 l（$F\notin l$）距离相等的点的轨迹”. 观察画出的图象，发现与初中学习的抛物线相同，进而求出这一轨迹方程，抽象出抛物线的定义.

2. 在推导抛物线的标准方程时，可先让学生考虑怎样选择坐标系，由定义可知直线 DF 是曲线的对称轴，所以把 DF 作为 x 轴可以使方程不出现 y 的一次项. 因为线段 DF 的中点适合条件，所以它在抛物线上，因而以 DF 的中点为原点，就不会出现常数项. 这样建立坐标系，得出的方程形式比较简单.

3. 在导出标准方程的过程中，设焦点到准线的距离 $|DF|=p$（$p>0$），这就是抛物线方程中参数 p 的几何意义，因为抛物线的顶点是 DF 的中点，所以焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 和准线 $x=-\frac{p}{2}$ 都可根据 p 求出.

通过抛物线的焦点作垂直于对称轴而交抛物线于 A，B 两点的线段 AB，称为抛物线的"通径"、由 $A\left(\frac{p}{2},p\right)$，$B\left(\frac{p}{2},-p\right)$，可得通径的长 $|AB|$ 等于 $2p$.

必须向学生着重指出，p 是抛物线的焦点到准线的距离，所以 p 的值永远大于 0，使学生在抛物线标准方程的一次项系数为负时，也不至于弄错.

还应向学生指出，画图时特别注意不要把抛物线看成双曲线的一支.

4. 与求椭圆和双曲线的标准方程类似，如果所选取的坐标系不同，或者说坐标平面内的位置不同，同一条抛物线的标准方程还有其他几种形式：

$$y^2=-2px，x^2=2py，x^2=-2py，其中\ p>0.$$

教学建议

教材上所求的都是处于标准位置的抛物线，若已知抛物线不处于标准位置时，只能用定义来求方程.

例如：已知抛物线的焦点为（3，3），准线为 x 轴，求抛物线的方程.

解 设 $M(x,y)$ 为抛物线上的任意一点，则由抛物线的定义得

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=|y|,$$

即
$$y=\frac{1}{6}x^2-x+3.$$

抛物线的定义可以从以下几个方面理解：定义的实质是"一动三定"，一个动点，设为 M，一个定点 F 叫作抛物线的焦点，一条定直线叫作抛物线的准线，一个定值，即点 M 与点 F 的距离和它到准线 l 的距离的比等于 1.

例题解析

例 1 已知定点 F，定直线 l 且 $F\notin l$. 动点 P 到 F 与 l 的距离相等. 在适当的直角坐标系中求动点 $P(x,y)$ 的轨迹的方程.

分析 可引导学生自主探索如何建立直角坐标系，才使得建模的轨迹方程比较简单. 在例 1 的基础上，还应引导学生自主探索其他几种形式的抛物线标准方程，从而形成对抛物线方程的整体认识.

例 2 求如下抛物线的焦点坐标和准线方程：

（1）$y^2=4x$；　　（2）$y=ax^2$，其中 $a>0$.

分析 本例是已知抛物线的标准方程，求抛物线的焦点坐标和准线方程.

（1）$y^2=4x$，先确定焦点坐标在 x 轴的正半轴上，再由 $2p=4$，$p=2$，得出 $\frac{p}{2}=1$，从而得出焦点坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)=(1,0)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，即 $x=-1$.

（2）$y=ax^2(a>0)$，先化方程为 $x^2=\frac{1}{a}y$，确定焦点在 y 轴上，再由 $2p=\frac{1}{a}$，$p=\frac{1}{2a}$，得出 $\frac{p}{2}=$

$\frac{1}{4a}$,从而求得焦点坐标为$\left(0,\frac{1}{4a}\right)$,准线方程为 $y=-\frac{1}{4a}$.

通过例 2 可向学生说明焦点在 x 轴上的抛物线可统一成 $y^2=2ax(a\neq0)$,焦点在 y 轴上的抛物线可统一成 $x^2=2ay(a\neq0)$的形式.

相关链接

抛物线反射镜和汽车前灯

你知道吗？当把汽车的前灯开关从亮转到暗时，就有数学在起作用. 具体地说，是抛物线原理在玩花招.

如果你留心，会发现汽车前灯后面的反射镜呈抛物线的形状（如图 2-7）. 事实上，它们是抛物面（抛物线环绕它的对称轴旋转形成的三维空间中的曲面）. 明亮的光束是由位于抛物线反射镜焦点上的光源产生的.

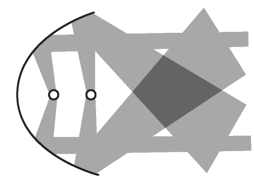


图 2-7

因此，光线沿着与抛物线的对称轴平行的方向射出. 当光变暗时，光源改变了位置，它不再在焦点上，结果光线的行进不与轴平行. 现在近光只向上下射出，向上射出的被屏蔽，所以只有向下射出的近光，射到比远光所射的距离短的地方.

抛物线是一种古老的曲线，它是梅内克缪斯（约前 375—前 325）在试图解决用尺规作出体积为给定立方体两倍的立方体时发现的.

多少世纪以来，人类已经得到了有关抛物线的一些新的用途和发现. 例如，伽利略（1564—1642）证明抛射体的路线是抛物线. 今天人们可以到五金店去买一台高能效抛物线电热器，它只用 1 000 W，但是与用 1 500 W 的电热器产生同样多的热量.

2.3.2 抛物线的简单几何性质

教材线索

研究抛物线的几何性质，可以让学生根据已学过的研究椭圆、双曲线的几何性质的方法来自主探究，找出它与椭圆、双曲线几何性质的不同点：它只有一个焦点、一个顶点、一条对称轴、一条准线，它没有中心等. 教材通过例题逐步巩固对抛物线的标准方程、焦点、顶点、准线等知识的掌握.

教学目标

（一）知识与技能

掌握抛物线的几何性质，研究各种开口方向的抛物线的几何性质；掌握直线与抛物线的位置关系，运用抛物线的定义及几何性质解决问题.

（二）过程与方法

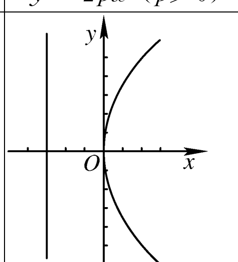
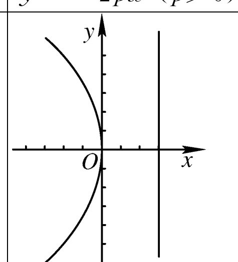
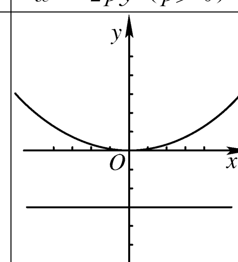
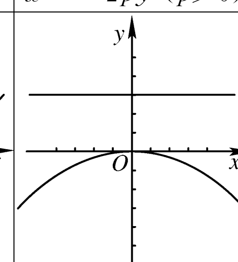
模仿椭圆、双曲线，探求用抛物线的几何性质求抛物线方程的方法；复习“点差法”、韦达定理；研究直线与抛物线的位置关系.

（三）情感、态度与价值观

形成数学建模的思想，进一步感受“设而不求”的魅力，树立学习数学的信心.

教材分析

1. 对于抛物线的四种标准方程，应要求学生熟练掌握，教师可设计如下的表格让学生自己填写：

项目	内　　容			
定义	平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫作抛物线.			
标准方程	$y^2=2px$（$p>0$）	$y^2=-2px$（$p>0$）	$x^2=2py$（$p>0$）	$x^2=-2py$（$p>0$）
图象				
范围	$x\geqslant 0$，$y\in\mathbf{R}$	$x\leqslant 0$，$y\in\mathbf{R}$	$x\in\mathbf{R}$，$y\geqslant 0$	$x\in\mathbf{R}$，$y\leqslant 0$
对称轴	x 轴	x 轴	y 轴	y 轴
焦点	$F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$	$F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0,\ -\frac{p}{2}\right)$
准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
顶点	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$

2. 在抛物线的几何性质中最重要、应用最广的是范围、对称性、顶点坐标. 在解题过程中，首先要从所给条件去确定抛物线属于四种类型中的哪一种类型，然后利用确定的类型，针对它们的几何性质去求解.

3. 四种标准方程的联系与区别在于：

（1）p 的几何意义：焦参数 p 是焦点到准线的距离，所以 p 恒为正数；

（2）方程右边一次项的变量与焦点所在坐标轴的名称相同，一次项系数的符号决定抛物线的开口方向；

（3）焦点的非零坐标是一次项系数的$\frac{1}{4}$.

4. 通过焦点且垂直于对称轴的抛物线的弦叫作抛物线的通径，它的长为 $2p$，这就是标准方程中 $2p$ 的一种几何意义.

5. 求抛物线标准方程常用的方法是待定系数法或轨迹法，为避免开口不一而分成 $y^2=2px$（$p>0$），$y^2=-2px$（$p>0$），$x^2=2py$（$p>0$），$x^2=-2py$（$p>0$）的情况求解的麻烦，可以设成 $y^2=mx$ 或 $x^2=ny$（$m\neq0$，$n\neq0$）. 若 $m>0$，开口向右，$m<0$，开口向左，m 有两解，则抛物线的标准方程有两个；若 $n>0$，开口向上，$n<0$，开口向下，n 有两解，则抛物线的标准方程有两个.

6. 抛物线上的点到焦点的距离根据定义转化为到准线的距离，即 $|PF|=|x|+\frac{p}{2}$ 或 $|PF|=|y|+\frac{p}{2}$，它们在解题中有重要的作用，注意运用.

例如：抛物线的顶点在原点，对称轴是 x 轴，抛物线上一点$(-5, 2\sqrt{5})$到焦点的距离是 6,求抛物线方程.

解 由已知设抛物线方程为 $y^2=-2px(p>0)$，

焦点为$\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$,准线方程为 $x=\frac{p}{2}$，

则 $$|-5|+\frac{p}{2}=6，\therefore p=2.$$

$\therefore$抛物线方程为 $y^2=-4x$.

7. 直线和抛物线的位置关系可通过讨论直线方程与抛物线方程联立的方程组实数解的个数来确定，通常消去方程组中变量 y（或 x）得到关于 x（或 y）的一元二次方程，考虑该一元二次方程的判别式，则有：

$\Delta>0\Leftrightarrow$直线与抛物线相交于两点.

$\Delta<0\Leftrightarrow$直线与抛物线相离.

$\Delta=0\Leftrightarrow$直线与抛物线相切.

特别要提醒学生注意的是，直线与抛物线只有一个交点与直线与抛物线相切并不等价.

8. 抛物线的性质和椭圆、双曲线比较起来，差别较大. 它的离心率等于 1；它只有一个焦点、一个顶点、一条对称轴、一条准线，但它没有中心. 通常称抛物线为无心圆锥曲线，而称椭圆和双曲线为有心圆锥曲线.

教学建议

由于抛物线的标准方程有多种形式，所以相应的几何性质之间的差别就比较大，教学时应注意采用类比的手段，让学生自己进行归纳总结.

本节教学中应重视学生建模能力的初步培养，以及将数形结合的数学思想进一步运用到解题中去. 例如，若点 A 的坐标为（3，2），F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，点 P 在该抛物

线上移动，为使得 $|PA|+|PF|$ 取最小值，点 P 的坐标是多少？

解 根据抛物线的定义，点 P 到焦点 F 的距离等于点 P 到准线的距离 $|PD|$，

∴ $|PA|+|PF|=|PA|+|PD|$.

如图 2-8，欲使 $|PA|+|PD|$ 最小，应使 A，P，D 三点在一直线上，

∴ P 点纵坐标为 $y=2$，代入 $y^2=2x$ 得 $x=2$.

∴ P 点坐标为 $(2,2)$.

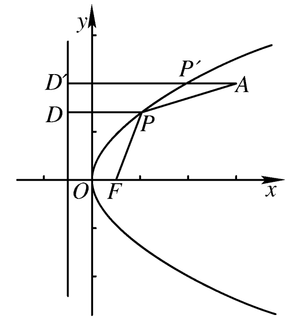


图 2-8

例题解析

例 1 一条抛物线关于 x 轴对称，顶点在原点，并且经过点（1，2）. 求抛物线方程.

分析 本例是用待定系数法求抛物线方程，要提醒学生注意根据条件先判断是哪一种标准方程.

例 2 已知抛物线的焦点坐标为（1，0），一条斜率为 1 的直线 l 经过抛物线的焦点 F，且与抛物线相交于 A，B 两点，求线段 AB 的长.

分析 本例主要考察学生对抛物线定义的灵活运用以及直线与抛物线相交关系的应用.

在教学中，还可引导学生用学过的其他方法来解. 如用点斜式求出直线方程，再与抛物线方程联立求出 A，B 两点坐标，进而利用距离公式求出 $|AB|$ 的长，最后可与课本的解法比较.

例 3 抛物形拱桥，如图 2-9. 当拱顶离水面 2.5 m 时，水面宽 4.5 m. 如果水面上升 0.5 m，水面宽多少（精确到 0.01 m）？

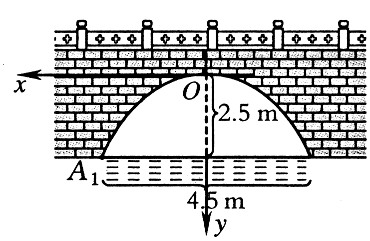


图 2-9

分析 本例是抛物线方程及抛物线几何性质的实际应用，应引导学生将实际问题中的条件转化为数学模型解决问题，同时应强调注意实际问题中对变量的限制条件.

相关链接

抛物线的光学性质

下面是中学数学一个典型习题：

已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 内有一点 $A(a,y_0)$，F 为抛物线的焦点，试在抛物线上找一点 M，使得 $|MA|+|MF|$ 的值最小.（如图 2-10）

解这个问题并不难，过点 M 作抛物线的准线的垂线，垂足为 N，过点 A 作抛物线的准线的垂线，垂足为 N_0，并交抛物线于点 M_0，

则 $|MA|+|MF|=|MA|+|MN|\geqslant|M_0A|+|M_0N_0|=|AN_0|$（定值），

所以，点 $M_0\left(\dfrac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$ 即所求的点.

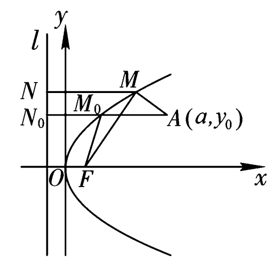


图 2-10

由于在直线部分也讨论过距离和最小的问题，并且与光线反射紧密联系在一起，同时学生有一定的光学基础，于是我就向学生提出了这样一个问题：

既然光线沿着最短的路线行走，那么，从 F 射出的光线要经过抛物线反射到 A，是否沿着 $F\to M_0\to A$ 的路线？此问题既让学生感到有趣，又体现了数学与物理学之间的综合.

由于是经一曲线反射，我们还是运用极限的思想，把抛物线上的每一小段看成是直线，这一点在学习光的漫反射时用到过，是能接受的. 如把 $M_0(x_0, y_0)$ 附近看成线段，这条线段所在的直线近似于过 M_0 的抛物线的切线，下面我们先来求这条切线 l 的斜率.

设所求切线 l 的方程为 $x-x_0=m(y-y_0)$，将其代入抛物线方程 $y^2=2px$ 中消去 x，得 $y^2-2pmy+2pmy_0-2px_0=0$，即 $y^2-2pmy+2pmy_0-y_0{}^2=0$，令 $\Delta=0$ 可得 $m=\dfrac{y_0}{p}$. 所以 $k_l=\dfrac{p}{y_0}$，又 $k_{M_0F}=\dfrac{2py_0}{y_0{}^2-p^2}$，$k_{M_0A}=0$，可以验证：$l$ 到 M_0F 的角等于 l 到 M_0A 的角（当 $y_0=0$ 时显然成立）. 所以，光线由 F 发出到 M_0 点经抛物线反射后恰好通过 A 点，即从焦点发出的光线，经过抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的轴.（如图 2-11）

这个结论的应用意义是非常大的，例如：探照灯的反射面就是抛物线的旋转面，而光源就在它的焦点处，灯光经抛物面反射后就能射出一束很强的平行光线（如图2-12）；太阳能灶上装有一个旋转抛物面形的反光镜，当它的轴与太阳光线平行时，太阳光线经过反射后集中于焦点处，则这一点的温度就会升高.（如图 2-13）

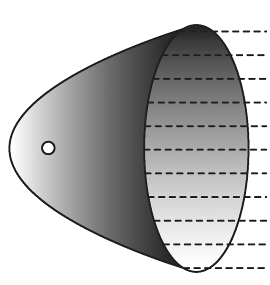


图 2-11


图 2-12


图 2-13

2.4 圆锥曲线的应用

教材线索

圆、椭圆、双曲线、抛物线统称为圆锥曲线，它们都可以由平面去截圆锥面而得到，这里教材配有相应的课件，有条件的学校最好演示给学生看；也可以由教师自己做一些课件. 本节书中介绍了三种圆锥曲线应用的例子：（1）斜抛物体的轨迹；（2）天体运动的轨迹；（3）光学性质及其应用. 从实际问题中学习数学建模的思想方法，从实际问题中去感受圆锥曲线的应用，用圆锥曲线几何性质解决实际问题.

教学目标

（一）知识与技能

了解圆锥曲线在三个方面的应用：（1）斜抛物体的轨迹；（2）天体运动的轨道；（3）光学性质及其应用，了解数学建模的基本方法.

（二）过程与方法

借助坐标法及圆锥曲线的定义、几何性质研究实际问题.

（三）情感、态度与价值观

了解圆锥曲线在自然界的存在，了解圆锥曲线在生活、科学技术中的应用，养成学生用数学去探究，解决实际问题的习惯.

教材分析

1. 重点：

熟悉斜抛物体的轨迹、天体运动的轨迹以及光学性质及其应用中所用到的圆锥曲线类型. 使学生进一步认识本章所学的知识在解决实际问题中的作用，养成应用意识. 另一方面，通过课件演示、教师引导，可以开阔学生的视野，激发学习数学的兴趣，让学生了解数学建模思想方法在解决实际问题中的作用，掌握建模的过程，进一步巩固所学的“坐标法”及圆锥曲线的几何性质.

2. 难点：

光学性质及其应用是本节的难点，对于学有余力的学生，可指导他们参阅数学实验《圆锥曲线的光学性质》，从圆锥曲线的切线和法线性质去了解光学性质及其应用.

教学建议

本节教学特别适合信息技术应用，除了可以演示平面截圆锥面得到圆锥曲线之外，还可以做一些有关斜抛物体的轨迹、天体运动的轨迹，以及圆锥曲线光学性质等相关的课件进行演示，让学生从实际问题中去体验和了解圆锥曲线，建议教师在本节能运用相关课件来进行教学.

例题解析

例 1 如图 2-14，将物体向斜上方抛出. 抛出时的速度大小为 v_0，方向与水平方向的夹角为 α. 假如只考虑重力，不计空气阻力，求证：斜抛物体的运动轨迹是抛物线的一部分. 求出这条抛物线的焦点与准线之间的距离.

分析 求斜抛物体运动轨迹问题. 斜抛运动是分解为水平方向运动和垂直方向运动来解题，这些知识学生在物理中已经学过，接受起来比较简单. 例 1 的难点在于求轨迹方程，动点坐标 (x,y) 满足方程 $\begin{cases} x=v_0t\cos\alpha, \\ y=-\dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$ 实际上是关于 t 的参数方程. 在本章中由于有介绍圆锥曲线的参数方程，所以在例 1 的教学中，教师可在这里介绍一下参数方程中的消参法，让学生有初步的了解.

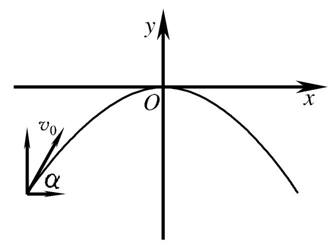


图 2-14

例 2 某颗彗星的轨道是一个椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点. 彗星离太阳的最近距离是 1.486 天文单位，最远距离是 5.563 天文单位（1 天文单位是太阳与地球之间的平均距离，约为 1.50×10^8 km，是度量太空中的距离的一种单位）. 轨道椭圆的长半轴和短半轴之长各是多少个天文单位?

分析 椭圆的定义及几何性质的应用，在教学中，教师应强调数形结合的教学思想，说明当距离之差 $|PF_1|-|PF_2|\leqslant|F_1F_2|=2c$，只有当 F_1，F_2，P 成一条直线且 F_2 在 F_1 和 P 之间时，$|PF_1|-|PF_2|$ 达到最大值 $2c$. 教学时，可以用到三角形两边之差小于第三边，当三点共线时，其差最大，也可用向量的模来证明.

$$\overrightarrow{F_2F_1}=\overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PF_2},$$

$$|\overrightarrow{F_2F_1}|=2c=|\overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PF_2}|\geqslant|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|,$$

当且仅当 $\overrightarrow{PF_1}$ 与 $\overrightarrow{PF_2}$ 反向时，$|\overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PF_2}|=||\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}||$.

当 $|\overrightarrow{PF_1}|>|\overrightarrow{PF_2}|$，即 F_2 在 F_1 与 P 之间，

$$|\overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PF_2}|=|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|=2c.$$

例 3 探照灯反射镜由抛物线的一部分绕轴旋转而成，光源位于抛物线的焦点处，这样可以保证发出的光线经过反射之后平行射出，如图 2-15 所示. 已知灯口圆的直径为60 cm，

灯的深度为 40 cm.

（1）将反射镜的旋转轴与镜面的交点称为反射镜的顶点，光源应安置在旋转轴上与顶点相距多远的地方？

（2）为了使反射的光更亮，增大反射镜的面积，将灯口圆的直径增大到 66 cm，并且保持光源与顶点的距离不变，求灯的深度.

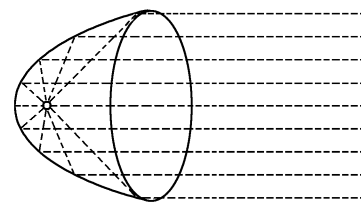


图 2-15

分析 光学性质及其应用要从圆锥曲线的切线和法线的性质来解释，教材中把圆锥曲线的光学性质放在数学实验中，而在例 3 之前直接给出了抛物线、椭圆、双曲线的光学性质，举例说明它们的应用. 教师在教学中应对学生进行说明，并指导学生课后阅读数学实验《圆锥曲线的光学性质》，至于例 3 的教学应直接应用抛物线的光学性质，建立直角坐标系求抛物线的标准方程，学生接受起来较为容易.

相关链接

圆锥曲线漫谈

圆锥曲线包括椭圆、抛物线、双曲线和圆，通过直角坐标系，它们又与二次方程对应，所以，圆锥曲线又叫作二次曲线. 圆锥曲线一直是几何学研究的重要课题之一，在我们的实际生活中也存在着许许多多的圆锥曲线.

我们生活的地球每时每刻都在环绕太阳的椭圆轨道上运行，太阳系其他行星也如此，太阳则位于椭圆的一个焦点上. 如果这些行星运行速度增大到某种程度，它们就会沿抛物线或双曲线运行. 人类发射人造地球卫星就要遵照这个原理. 相对于一个物体，按万有引力定律受它吸引的另一物体的运动，不可能有任何其他的轨道了. 因而，圆锥曲线在这种意义上讲，它构成了我们宇宙的基本形式.

由抛物线绕其轴旋转，可得到一个叫作旋转抛物面的曲面. 它也有一条轴，即抛物线的轴. 在这个轴上有一个具有奇妙性质的焦点，任何一条过焦点的直线由抛物面反射出来以后，都成为平行于轴的直线. 这就是我们为什么要把探照灯反光镜做成旋转抛物面的道理.

由双曲线绕其虚轴旋转，可以得到单叶双曲面，它又是一种直纹曲面，由两组母直线族组成，各组内母直线互不相交，而与另一组母直线却相交. 人们在设计高大的立塔时，就采取单叶双曲面的体形，既轻巧又坚固.

由此可见，对于圆锥曲线的价值，无论如何也不会估计过高.

对于圆锥曲线的最早发现，众说纷纭. 有人说，古希腊数学家在求解“立方倍积”问题时，发现了圆锥曲线：设 x，y 为 $3a$ 和 $2a$ 的比例中项，即 $a:x=x:y=y:2a$，则 $x^2=ay$，$y^2=2ax$，$xy=2a^2$，从而求得 $x^3=2a^3$. 又有人说，古希腊数学家在研究平面与圆锥

面相截时发现了与“立方倍积”问题中一致的结果．还有人认为，古代天文学家在制作日晷时发现了圆锥曲线．日晷是一个倾斜放置的圆盘，中央垂直于圆盘面立一杆．当太阳光照在日晷上，杆影的移动可以计时．而在不同纬度的地方，杆顶尖绘成不同的圆锥曲线．然而，日晷的发明在古代就已失传．

早期对圆锥曲线进行系统研究成就最突出的可以说是古希腊数学家阿波罗尼奥斯（Apollonius，前262—前190）．他与欧几里得是同时代人，其巨著《圆锥曲线》与欧几里得的《几何原本》同被誉为古代希腊几何的登峰造极之作．

在《圆锥曲线》中，阿波罗尼奥斯总结了前人尤其是欧几里得的工作，并对前人的成果进行去粗存精、归纳提炼并使之系统化的工作，在此基础上，又提出许多自己的创见．全书8篇，共487个命题，将圆锥曲线的性质网罗殆尽，以致后代学者几乎没有插足的余地达千余年．

现在，我们都知道，用一个平面去截一个双圆锥面，会得到圆、椭圆、抛物线、双曲线以及它们的退化形式：两相交直线，一条直线和一个点，如图2-16所示．

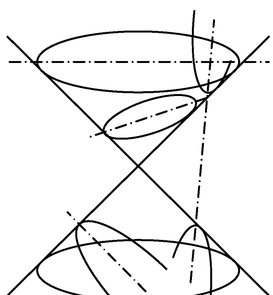


图2-16

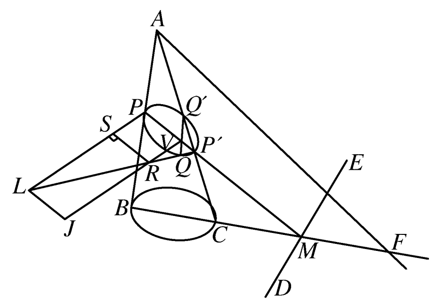


图2-17

在此，我们仅介绍阿波罗尼奥斯关于圆锥曲线的定义．如图2-17，给定圆 BC 及其所在平面外一点 A，则过 A 且沿圆周移动的一条直线生成一个双锥面．

这个圆叫圆锥的底，A 到圆心的直线叫圆锥的轴（未画出），轴未必垂直于底．

设锥的一个截面与底交于直线 DE，取底圆的垂直于 DE 的一条直径 BC，于是含圆锥轴的 $\triangle ABC$ 叫轴三角形．轴三角形与圆锥曲线交于 P，P'，PP' 未必是圆锥曲线的轴，$PP'M$ 是由轴三角形与截面相交而定的直线，PM 也未必垂直于 DE．设 QQ' 是圆锥曲线平行于 DE 的弦，同样 QQ' 被 PP' 平分，即 $VQ=\frac{1}{2}QQ'$．

现作 $AF\parallel PM$，交 BM 于 F，再在截面上作 $PL\perp PM$．如图2-18，$PL\perp PP'$．

对于椭圆、双曲线，取 L 满足 $\frac{PL}{PP'}=\frac{BF\cdot FC}{AF^2}$，而抛物线，则满足 $\frac{PL}{PA}=\frac{BC^2}{BA\cdot AC}$，对于椭圆、双曲线有 $QV^2=PV\cdot VR$，对于抛物线有 $QV^2=PV\cdot PL$，这是可以证明的两个结论．

在这两个结论中，把 QV 称为圆锥曲线的一个纵坐标线，那么其结论表明，纵坐标线的平方等于 PL 上作一个矩形的面积．对于椭圆来讲，矩形 $PSRV$ 尚未填满矩形 $PLJV$；

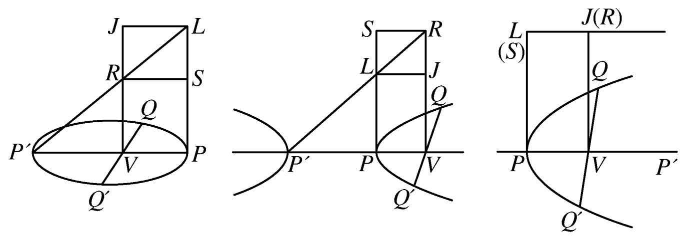


图 2-18

而双曲线的情形是 $VR>PL$，矩形 $PSRV$ 超出矩形 $PLJV$；而抛物线，矩形 $PLJV$ 恰好填满．所以，椭圆、双曲线、抛物线的原名分别叫“亏曲线”、“超曲线”和“齐曲线”．这就是阿波罗尼奥斯引入的圆锥曲线的定义．

阿波罗尼奥斯所给出的两个结论，也很容易用现代数学符号来表示：

设 $PL=2p$，$PP'=d$，$PV=x$，$QV=y$，则

椭圆：$QV^2=PV\cdot VR=PV(PL-LS)$，即 $y^2=2px-2px^2/d$；

双曲线：$QV^2=PV\cdot VR=PV(PL+LS)$，即 $y^2=2px+2px^2/d$；

抛物线：$QV^2=PV\cdot PL$，而 $y^2=2px$．

统一表达式：$QV^2=PV(PL\mp LS)$，$LS=\dfrac{PL\cdot SR}{PP'}=\dfrac{2px}{d}$，当 d 趋向无穷大时，$LS=0$，即抛物线，亦即椭圆或双曲线的极限形式．

在阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线》问世后的 13 个世纪里，整个数学界对圆锥曲线的研究一直没有什么新进展．11 世纪，阿拉伯数学家曾利用圆锥曲线来解三次代数方程，12 世纪起，圆锥曲线经阿拉伯传入欧洲，但当时对圆锥曲线的研究仍然没有突破．直到 16 世纪，有两件事促使了人们对圆锥曲线做进一步研究．一是德国天文学家开普勒（Kepler，1571—1630），继承了哥白尼的日心说，揭示出行星按椭圆轨道环绕太阳运行的事实；二是意大利物理学家伽利略（Galileo，1564—1642）得出斜抛物体运动的轨迹是抛物线．人们发现圆锥曲线不仅是依附在圆锥面上的静态曲线，而且是自然界物体运动的普遍形式．于是，对圆锥曲线的处理方法开始有了一些小变动．譬如，1579 年蒙蒂（Guidobaldo del Monte，1545—1607）将椭圆定义为：到两个焦点距离之和为定长的动点的轨迹．从而改变了过去对圆锥曲线的定义．不过，这对圆锥曲线性质的研究推进并不大，也没有提出更多新的定理或新的证明方法．

17 世纪初，在当时关于一个数学对象能从一个形状连续地变到另一形状的新思想的影响下，开普勒对圆锥曲线的性质做了新的阐述．他发现了圆锥曲线的焦点和离心率，并指出抛物线还有一个在无穷远处的焦点，直线是圆心在无穷远处的圆．从而他第一个掌握了这样的事实：椭圆、抛物线、双曲线、圆以及由两条直线组成的退化圆锥曲线，都可以从其中一个连续地变为另一个，只须考虑焦点的各种移动方式．譬如，椭圆有两个焦点 F_1，F_2，若 F_1 固定，考虑 F_2 的移动，当 F_2 向左移动，椭圆逐渐趋向于圆，F_2 与 F_1 重合时即为圆；当 F_2 向右移动，椭圆逐渐趋向于抛物线，F_2 到无穷远处时即为抛物线；当 F_2 从无

穷远处由左边回到圆锥曲线的轴上来，即为双曲线；当 F_2 继续向右移动，F_2 又与 F_1 重合时即为两相交直线，亦即退化的圆锥曲线. 这为圆锥曲线现代的统一定义提供了一个合乎逻辑的直观基础.

随着射影几何的创始，原本为画家提供帮助的投射、截影的方法，可能由于它与锥面有着天然的联系，也被用于圆锥曲线的研究. 在这方面法国的三位数学家笛沙格（Desargues，1591—1661）、帕斯卡（Pascal，1623—1662）和拉伊尔（Phailippe de La Hire，1640—1718）得出了一些关于圆锥曲线的特殊的定理，可谓别开生面. 而当法国另外两位数学家笛卡儿和费马创立了解析几何，人们对圆锥曲线的认识进入了一个新阶段，对圆锥曲线的研究方法既不同于阿波罗尼奥斯，又不同于投射和截影法，而是朝着解析法的方向发展，即通过建立坐标系，得到圆锥曲线的方程，进而利用方程来研究圆锥曲线，以期摆脱几何直观而达到抽象化的目标，也可求得对圆锥曲线研究高度的概括和统一.

到 18 世纪，人们广泛地探讨了解析几何，除直角坐标系之外又建立极坐标系，并能把这两种坐标系相互转换. 在这种情况下表示圆锥曲线的二次方程也被化为几种标准形式，或者引进曲线的参数方程. 1745 年欧拉发表了《分析引论》，这是解析几何发展史上的一部重要著作，也是圆锥曲线研究的经典之作. 在这部著作中，欧拉给出了现代形式下圆锥曲线的系统阐述，从一般二次方程 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 出发，圆锥曲线的各种情形，经过适当的坐标变换，总可以化为以下标准形式之一：

（1）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$　　椭圆；

（2）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$　　虚椭圆；

（3）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$　　点（一对虚直线交于实点）；

（4）$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$　　双曲线；

（5）$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$　　一对相交直线；

（6）$y^2-2px=0$　　抛物线；

（7）$x^2-a^2=0$　　一对平行直线；

（8）$x^2+a^2=0$　　一对虚平行直线；

（9）$x^2=0$　　一对重合的直线.

继欧拉之后，三维解析几何也蓬勃地发展起来，由圆锥曲线导出了许多重要的曲面，诸如往面、椭球面、单叶和双叶双曲面以及各种抛物面等.

总而言之，圆锥曲线无论在数学以及其他科学技术领域，还是在我们的实际生活中都占有重要的地位，人们对它的研究也不断深化，其研究成果又广泛地得到应用. 这正好反映了人们认识事物的目的和规律.

数学实验

圆锥曲线的光学性质

注：画抛物线 $y^2=2px$（有些书上为 $y=2px^2$）

实验 1：圆锥曲线的光学性质.

实验目的：将圆锥曲线绕轴旋转得到的曲面作为反射镜面，研究从焦点发出的光线经过反射之后发出的光束的性质.

实验内容与过程：

1. 对于抛物线方程为 $y^2=2px$，过焦点 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ 作入射光线 FP，过 P 作抛物线的切线 l，过 P 作 $PN\perp l$，可证 $\angle NPM=\angle FPN$，则 PM 为反射线，如图 2-19.

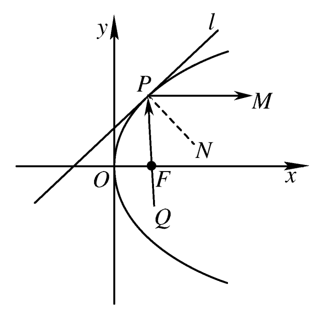


图 2-19

还可验证：$k_{PM}=0$，即 $PM/\!/x$ 轴，具体证明如下：

过点 $P(x_0,y_0)$ 的抛物线切线 l：$y_0y=p(x+x_0)$，

$\therefore\quad k_l=\dfrac{p}{y_0}$，$k_{PN}=-\dfrac{y_0}{p}$，$k_{PF}=\dfrac{y_0}{x_0-\dfrac{p}{2}}$，$k_{PM}=0$，

由到角公式可得

$$\tan\angle FPN=\left|\frac{k_{PN}-k_{PF}}{1+k_{PN}\cdot k_{PF}}\right|=\left|\frac{-\dfrac{y_0}{p}-\dfrac{y_0}{x_0-\dfrac{p}{2}}}{1+\left(-\dfrac{y_0}{p}\right)\dfrac{y_0}{x_0-\dfrac{p}{2}}}\right|=\left|\frac{-y_0\left(x_0+\dfrac{p}{2}\right)}{px_0-\dfrac{p^2}{2}-y_0^2}\right|,$$

$\because\quad P(x_0,y_0)$在抛物线上，$\therefore\quad y_0^2=2px_0$.

$$\therefore\qquad \tan\angle FPN=\left|\frac{-y_0\left(x_0+\dfrac{p}{2}\right)}{-\dfrac{p^2}{2}-px_0}\right|=\left|\frac{-y_0\left(x_0+\dfrac{p}{2}\right)}{-p\left(x_0+\dfrac{p}{2}\right)}\right|=\frac{|y_0|}{p}.$$

$$\tan\angle NPM=\left|\frac{k_{PM}-k_{PN}}{1+k_{PM}\cdot k_{PN}}\right|=\left|\frac{\dfrac{y_0}{p}}{1}\right|=\frac{|y_0|}{p}.$$

$$\therefore\qquad \angle NPM=\angle FPN.$$

2. 对于椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，可证明过 F_1 的入射线 F_1P，经反射后，其反射线过 F_2，即为 PF_2，如图 2-20.

具体证明如下：

设 $P(x_0, y_0)$，P 在椭圆上，则 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，即 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$.

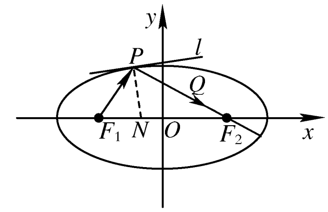


图 2-20

过 P 的切线 l：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，

$$\therefore\ k_l=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0},\qquad k_{PN}=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}.$$

$$\because\ k_{PF_1}=\frac{y_0}{x_0+c},\qquad k_{PF_2}=\frac{y_0}{x_0-c},$$

$$\therefore\ \tan\angle F_1PN=\left|\frac{k_{PN}-k_{PF_1}}{1+k_{PN}\cdot k_{PF_1}}\right|=\left|\frac{\frac{a^2y_0}{b^2x_0}-\frac{y_0}{x_0+c}}{1+\frac{a^2y_0}{b^2x_0}\cdot\frac{y_0}{x_0+c}}\right|$$

$$=\left|\frac{a^2x_0y_0+a^2cy_0-b^2x_0y_0}{x_0^2b^2+cx_0b^2+y_0^2a^2}\right|=\left|\frac{c^2x_0y_0+a^2cy_0}{a^2b^2+cx_0b^2}\right|$$

$$=\left|\frac{cy_0(cx_0+a^2)}{b^2(cx_0+a^2)}\right|=\frac{c|y_0|}{b^2}.$$

$$\tan\angle NPF_2=\left|\frac{k_{PF_2}-k_{PN}}{1+k_{PF_2}\cdot k_{PN}}\right|=\left|\frac{\frac{y_0}{y_0-c}-\frac{a^2y_0}{b^2x_0}}{1+\frac{y_0}{x_0-c}\cdot\frac{a^2y_0}{b^2x_0}}\right|$$

$$=\left|\frac{b^2x_0y_0-a^2x_0y_0+a^2cy_0}{x_0^2b^2-cx_0b^2+y_0^2a^2}\right|=\left|\frac{-c^2x_0y_0+a^2cy_0}{a^2b^2-cx_0b^2}\right|$$

$$=\left|\frac{cy_0(a^2-cx_0)}{b^2(a^2-cx_0)}\right|=\frac{c|y_0|}{b^2}.$$

$$\therefore\ \angle F_1PN=\angle NPF_2.$$

3. 对于双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可以证明从 F_2 射出的入射线 F_2P，经反射后，其反射线 PQ 的反向延长线过 F_1 点，如图 2－21.

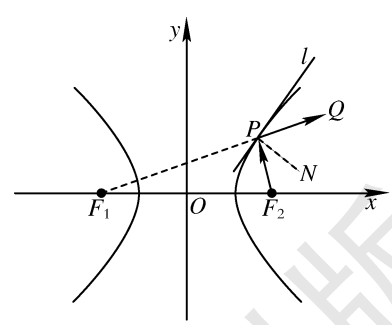


图 2-21

具体证明方法可仿照椭圆的证明方法进行证明.

实验 2：探照灯的反射镜面.

实验目的：寻找一种平面曲线，将它绕其轴旋转所成的曲面作为探照灯的反射镜面，可以将轴上适当的位置 F 安置的光源发出的光线经反射后平行射出.

可得到曲线为抛物线，然后再加以验证即可.

而如果将实验 2 中的要求改为如下：

1. 在 x 轴的正半轴上取两点 $F_1(h_1, 0)$，$F_2(h_2, 0)$，使 $0<h_1<h_2$，要求从 F_1 发出的光线经镜面反射之后会照到 F_2.

照此要求作出的曲线可验证为椭圆.

2. 在 x 轴的正半轴与负半轴各取一个点 $F_1(h_1,0)$，$F_2(-h_2,0)$，使 $h_1>0>-h_2$，要求从 F_1 发出的光线经镜面反射之后看起来是从 F_2 射出的.

照此要求作出的曲线可验证为双曲线.

教材习题参考解答

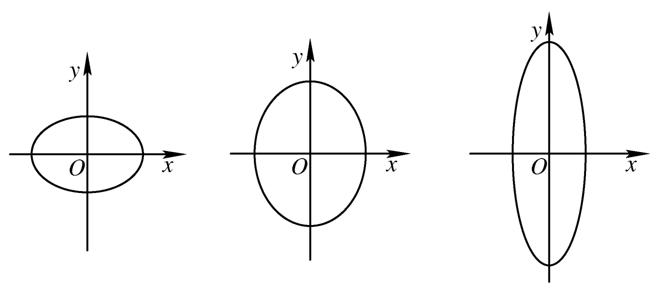
P. 33　练习

1.（1）$c^2=9-4=5$，$c=\sqrt{5}$，焦点坐标$(\sqrt{5}, 0)$，$(-\sqrt{5}, 0)$.

（2）$c^2=16-9=7$，$c=\sqrt{7}$，焦点坐标$(0,-\sqrt{7})$，$(0,\sqrt{7})$.

（3）$x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$，$c^2=9-1=8$，$c=2\sqrt{2}$，焦点坐标$(0,-2\sqrt{2})$，$(0,2\sqrt{2})$.

附图（图 2-22）



（1）　（2）　（3）

图 2-22

2.（1）$c=2$，$a=3$，$b^2=9-4=5$，方程：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

（2）$c=3$，设方程为$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$，代入点（8，3）得

$\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{64}{b^2}=1$（$*$）．将 $b^2=a^2-9$ 代入（$*$）得 $9a^2-81+64a^2=a^4-9a^2$.

即 $a^4-82a^2+81=0$.

$\therefore$　$a^2=81$，$a^2=1$（舍去）．$\therefore$　$b^2=72$.

$\therefore$　方程为$\dfrac{y^2}{81}+\dfrac{x^2}{72}=1$.

P. 39　练习

1.（1）$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{9}=1$．$a^2=9$，$b^2=6$，$c^2=3$.

$\therefore$　$a=3$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{3}$．中心（0，0），焦点坐标（0，$-\sqrt{3}$），（0，$\sqrt{3}$）.

顶点坐标$(0,-3)$，$(0,3)$，$(-\sqrt{6},0)$，$(\sqrt{6},0)$.

长半轴长$=3$，短半轴长$=\sqrt{6}$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）$\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$．$a^2=169$，$b^2=144$，$c^2=25$.

∴ $a=13$，$b=12$，$c=5$．中心（0，0），焦点坐标$(-5,0)$，$(5,0)$.

顶点坐标$(-13,0)$，$(13,0)$，$(0,-12)$，$(0,12)$.

长半轴长$=13$，短半轴长$=12$，离心率$e=\dfrac{5}{13}$.

（3）$4x^2+9y^2=1$，$\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$．$a^2=\dfrac{1}{4}$，$b^2=\dfrac{1}{9}$，$c^2=\dfrac{5}{36}$.

∴ $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{3}$，$c=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$．中心（0，0），焦点坐标$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{6},0\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{6},0\right)$.

顶点坐标$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，$\left(0,-\dfrac{1}{3}\right)$，$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$.

长半轴长$=\dfrac{1}{2}$，短半轴长$=\dfrac{1}{3}$，离心率$e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

2．联立$\begin{cases}y=mx+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow 3x^2+4(mx+1)^2=12\Rightarrow(3+4m^2)x^2+8mx-8=0$.

$\Delta=64m^2+32(3+4m^2)=192m^2+96>0$,

∴ 直线与椭圆交点个数为 2 个.

习题 1

1．（1）$\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}}+y^2=1$ 是椭圆，焦点坐标$\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

（2）$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 是椭圆，焦点坐标$(0,-2)$，$(0,2)$.

（3）$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 是椭圆，焦点坐标$(-1,0)$，$(1,0)$.

（4）$x^2+y^2=2$ 不是椭圆，表示圆.

2．（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．$c^2=1$，$c=1$．焦点坐标$(-1,0)$，$(1,0)$．离心率$e=\dfrac{1}{2}$.

（2）$\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{16}=1$．$c^2=7$，$c=\sqrt{7}$．焦点坐标$(-\sqrt{7},0)$，$(\sqrt{7},0)$．离心率$e=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

（3）$\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}+y^2=1$．$c^2=\dfrac{3}{4}$，$c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．焦点坐标$\left(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$．离心率$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

附图（图 2-23）

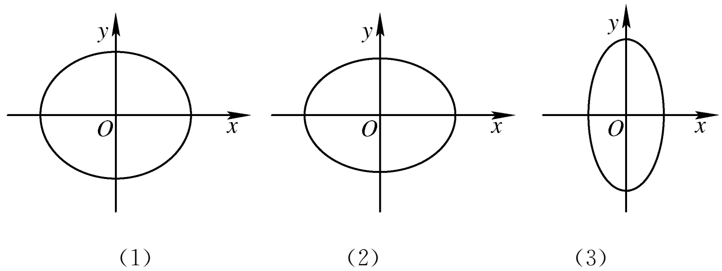


图 2-23

3. (1) 方程：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 或 $\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$.

(2) 方程：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{8}=1$.

(3) 方程：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

(4) 方程：$\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{73}=1$.

(5) 设方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，代入 $A\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，$B(2,0)$ 得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{9}{4}}{b^2}=1,\\ \dfrac{4}{a^2}=1.\end{cases}$$ 所以 $a^2=4$，$\dfrac{\frac{9}{4}}{b^2}=\dfrac{3}{4}$，$b^2=3$.

方程：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(6) ∵ $\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$，$2c=8$，

∴ $c=4$，$a=5$.

∴ $b^2=a^2-c^2=25-16=9$.

∴ 方程：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 或 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

4. $x=4$ 和 $7x-32y+100=0$.

5. 如图 2-24，$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

$a^2=16$，$a=4$.

即三角形 ABF_2 的周长 $=|AF_1|+|BF_1|+|AF_2|+|BF_2|$

$=4a=4\times4=16$.

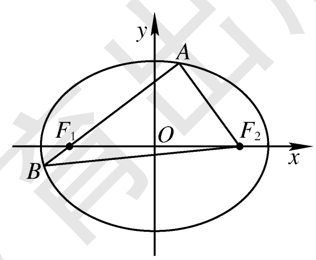


图 2-24

6. $|AC|+|BC|+|AB|=18$，而 $|AB|=8$，

∴ $|AC|+|BC|=10$，即动点 C 到两定点 A，B 的距离之和为定长，C 点轨迹是椭圆.

$c=4$，$a=5$，$b=3$. 方程：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1(y\neq0)$.

7. 设直线 l 交椭圆于两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{36}+\frac{y_1^2}{9}=1, & ①\\ \frac{x_2^2}{36}+\frac{y_2^2}{9}=1. & ②\end{cases}$

①−②得$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{36}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{9}=0$.

∵ $\frac{x_1+x_2}{2}=4$，$\frac{y_1+y_2}{2}=2$，

∴ $\frac{(x_1-x_2)\times2}{9}+\frac{(y_1-y_2)\times4}{9}=0\Rightarrow\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}=k_l$.

∴ 直线 l 的方程为 $x+2y-8=0$.

P. 44 练习

1. (1) ∵ $c=5$，$a=4$，∴ $b=3$，方程：$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

(2) ∵ $c=6$，∴ $a^2+b^2=36$.

设双曲线方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，代入（2，−5）得 $\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$.

将 $25b^2-4a^2=a^2b^2$ 代入 $b^2=36-a^2$ 得

$25(36-a^2)-4a^2=a^2(36-a^2)$.

即 $900-25a^2-4a^2=36a^2-a^4$.

∴ $a^4-65a^2+900=0$.

∴ $a^2=20$ 或 $a^2=45$(舍去). ∴ $b^2=16$.

方程：$\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$.

2. 依题意：$\begin{cases}2+m>0,\\ m+1>0\end{cases}\Rightarrow m>-1$ 或$\begin{cases}2+m<0,\\ m+1<0\end{cases}\Rightarrow m<-2$.

∴ $m>-1$ 或 $m<-2$.

P. 51 练习

1. (1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，$a^2=9$，$b^2=16$，$c^2=25$，$a=3$，$b=4$，$c=5$.

实半轴长 $a=3$，虚半轴长 $b=4$，焦点坐标$(-5,0)$,$(5,0)$.

渐近线方程：$y=\pm\frac{4}{3}x$. 离心率 $e=\frac{5}{3}$.

(2) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$，$a^2=9$，$b^2=16$，$c^2=25$，$a=3$，$b=4$，$c=5$.

实半轴长 $a=3$，虚半轴长 $b=4$，焦点坐标$(0,-5)$,$(0,5)$.

渐近线方程：$y=\pm\dfrac{3}{4}x$. 离心率 $e=\dfrac{5}{3}$.

(3) $x^2-y^2=1$，$a^2=1$，$b^2=1$，$c^2=2$，$a=1$，$b=1$，$c=\sqrt{2}$.

实半轴长 $a=1$，虚半轴长 $b=1$，焦点坐标$(-\sqrt{2},0)$,$(\sqrt{2},0)$.

渐近线方程：$y=\pm x$. 离心率 $e=\sqrt{2}$.

(4) $4x^2-9y^2=1$，$\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$，$a^2=\dfrac{1}{4}$，$b^2=\dfrac{1}{9}$，$c^2=\dfrac{13}{36}$，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{3}$，$c=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$.

实半轴长 $a=\dfrac{1}{2}$，虚半轴长 $b=\dfrac{1}{3}$，焦点坐标$\left(-\dfrac{\sqrt{13}}{6},0\right)$,$\left(\dfrac{\sqrt{13}}{6},0\right)$.

渐近线方程:$y=\pm\dfrac{2}{3}x$.离心率 $e=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

2. (1)方程:$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 或$\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$;

(2)设方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,代入 $A(-5,2)$,则$\dfrac{25}{20}-\dfrac{4}{b^2}=1$，$\dfrac{4}{b^2}=\dfrac{25}{20}-1\Rightarrow b^2=16$.

方程：$\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

3. 直线 $y=x+1$ 与双曲线的渐近线 $y=\pm x$ 平行. 此时，直线与双曲线有一个交点，交点为$(-1,0)$.

习题 2

1. (1) 设方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 代入点 $A(-5,2)$得

$\dfrac{25}{a^2}-\dfrac{4}{b^2}=1$.

将 $25b^2-4a^2=a^2b^2$ 代入 $a^2+b^2=c^2=36$ 得

$25(36-a^2)-4a^2=a^2(36-a^2)$.

∴ $900-25a^2-4a^2=36a^2-a^4$.

∴ $a^4-65a^2+900=0$.

∴ $a^2=20$ 或 $a^2=45$(舍去).

∴ 方程为$\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

(2) 易得方程为$\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$ 或$\dfrac{y^2}{144}-\dfrac{x^2}{25}=1$.

(3) 解 1：设方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$,

分别代入点 $A(-7,-6\sqrt{2})$,$B(\sqrt{7},-3)$得

$$\begin{cases}\dfrac{49}{a^2}-\dfrac{72}{b^2}=1,\\ \dfrac{7}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}\dfrac{72}{a^2}-\dfrac{49}{b^2}=1,\\ \dfrac{9}{a^2}-\dfrac{7}{b^2}=1.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}=1,\\ \dfrac{1}{b^2}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}=-\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{1}{b^2}=-1,\end{cases}$（舍去）.

∴ 方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$.

解 2：设方程为 $Ax^2-By^2=1$.

分别代入点 $A(-7，-6\sqrt{2})$，$B(\sqrt{7}，-3)$ 得

$$\begin{cases}49A-72B=1,\\ 7A-9B=1.\end{cases}$$

解得 $A=1$，$B=\dfrac{2}{3}$.

∴ 方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$.

2. 选 B.

3. (1) 解 1：渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{3}x$，可设双曲线方程为：

$y^2-\dfrac{1}{9}x^2=\lambda$ $(\lambda>0)$，

∴ $\dfrac{y^2}{\lambda}-\dfrac{x^2}{9\lambda}=1$，∴ $c^2=16=\lambda+9\lambda$，即 $\lambda=\dfrac{8}{5}$.

∴ 双曲线方程为 $\dfrac{y^2}{\frac{8}{5}}-\dfrac{x^2}{\frac{72}{5}}=1$.

解 2：由 $\pm\dfrac{a}{b}=\pm\dfrac{1}{3}$，$b=3a$，且 $c=4$，$a^2+b^2=16$，

即 $10a^2=16$，$a^2=\dfrac{8}{5}$，$b^2=\dfrac{72}{5}$，

∴ 双曲线方程为 $\dfrac{y^2}{\frac{8}{5}}-\dfrac{x^2}{\frac{72}{5}}=1$.

(2) 一条渐近线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$，则 $k=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即渐近线为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

令双曲线方程为 $y^2-\frac{1}{3}x^2=\lambda$，代入点（3，−2）得

$4-3=\lambda=1$. ∴ 双曲线方程为 $y^2-\frac{1}{3}x^2=1$.

（3）设方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，过点 $P(4\sqrt{2},-3)$，

则$\frac{32}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$. ①

设两焦点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则 $QF_1\perp QF_2$.

∴ $\frac{5}{c}\cdot\frac{5}{-c}=-1$，$c^2=25=a^2+b^2$. ②

由①②可得 $32(25-a^2)-9a^2=a^2(25-a^2)$.

∴ $a^4-66a^2+800=0$.

∴ $a^2=50$（舍去），$a^2=16$，∴$b^2=9$.

故双曲线方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

（4）∵ $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，∴ $c=\sqrt{2}a$，∴$b=a$.

设方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，代入点(−5，3)得$\frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$，∴$a^2=b^2=16$.

故双曲线方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$.

若方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，∵$a^2=b^2$，显然不过点 $M(-5,3)$.

（5）椭圆$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$ 中，$a^2=20$，$a=2\sqrt{5}$，长轴端点$(-2\sqrt{5},0)$，$(2\sqrt{5},0)$，

∴ 双曲线的 $c=2\sqrt{5}$，又双曲线过$(-2,0)$，$(2,0)$，∴ $a=2$，$b^2=20-4=16$.

∴ 双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

4. 由$|AF_2|-|AF_1|=2a$，$|BF_2|-|BF_1|=2a$，

有$|AF_2|+|BF_2|-|AB|=4a$.

∴ $|AF_2|+|BF_2|=4a+m$.

∴ $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a+m+m=4a+2m$. ∴ 选 C.

5. 如图 2-25，∵ P 在椭圆上，F_1，F_2 是两个焦点，

∴ $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{m}$.

又 P 在双曲线上，F_1，F_2 是两个焦点，

∴ $|PF_1|-|PF_2|=2\sqrt{a}$或$|PF_2|-|PF_1|=2\sqrt{a}$.

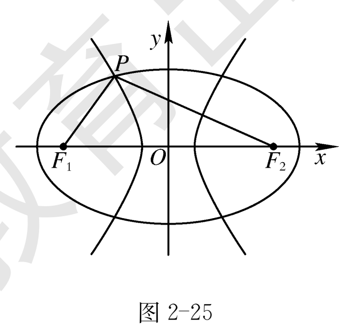


图 2-25

$\therefore \begin{cases}|PF_1|=\sqrt{m}+\sqrt{a},\\|PF_2|=\sqrt{m}-\sqrt{a}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|PF_2|=\sqrt{m}+\sqrt{a},\\|PF_1|=\sqrt{m}-\sqrt{a}.\end{cases}$

$\therefore\ |PF_1|\cdot|PF_2|=m-a.$

$\therefore$ 选 D.

6. 由$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$，$c^2=25$，$c=5$，$F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$，

设 $P(x_1,y_1)$在双曲线上，$PF_1\perp PF_2$，所以，$\dfrac{y_1}{x_1+5}\cdot\dfrac{y_1}{x_1-5}=-1$.

即 $y_1^2=-x_1^2+25$，　　①

又 $16x_1^2-9y_1^2=144$，　　②

把 $x_1^2=25-y_1^2$ 代入②得 $16(25-y_1^2)-9y_1^2=144$.

$25y_1^2=256$，$|y_1|=\dfrac{16}{5}$. 即点 P 到 x 轴的距离为$\dfrac{16}{5}$.

7. 设过 $P(0,1)$的直线为 $y-1=kx$，即 $y=kx+1$.

联立$\begin{cases}y=kx+1,\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$得 $x^2-\dfrac{1}{3}(kx+1)^2=1$，$\left(1-\dfrac{1}{3}k^2\right)x^2-\dfrac{2}{3}kx-\dfrac{4}{3}=0$.

当 $\Delta=\dfrac{4}{9}k^2+\dfrac{16}{3}\left(1-\dfrac{1}{3}k^2\right)=-\dfrac{12}{9}k^2+\dfrac{16}{3}=-\dfrac{4}{3}k^2+\dfrac{16}{3}=0$，即 $k=\pm2$ 时，直线与双曲线有一个公共点.

当 $k=\pm\sqrt{3}$时，直线 $y=kx+1$ 与渐近线平行，则直线与双曲线有一个公共点.

$\therefore k=\pm2$ 或 $k=\pm\sqrt{3}$时，直线与双曲线有且仅有一个公共点.

P. 56　练习

1. (1) $y^2=16x$，$2p=16$，$p=8$，$\dfrac{p}{2}=4$. 焦点坐标为（4，0），准线方程为 $x=-4$.

(2) $y=16x^2$，$x^2=\dfrac{1}{16}y$，$2p=\dfrac{1}{16}$，$p=\dfrac{1}{32}$，$\dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{64}$. 焦点坐标为$\left(0，\dfrac{1}{64}\right)$，准线方程为 $y=-\dfrac{1}{64}$.

(3) $y^2=-\dfrac{1}{4}x$，$2p=\dfrac{1}{4}$，$p=\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{16}$. 焦点坐标为$\left(-\dfrac{1}{16}，0\right)$，准线方程为$x=\dfrac{1}{16}$.

(4) $y=-\dfrac{1}{4}x^2$，$x^2=-4y$，$2p=4$，$p=2$，$\dfrac{p}{2}=1$. 焦点坐标为$(0,-1)$，准线方程为 $y=1$.

附图（图 2-26）

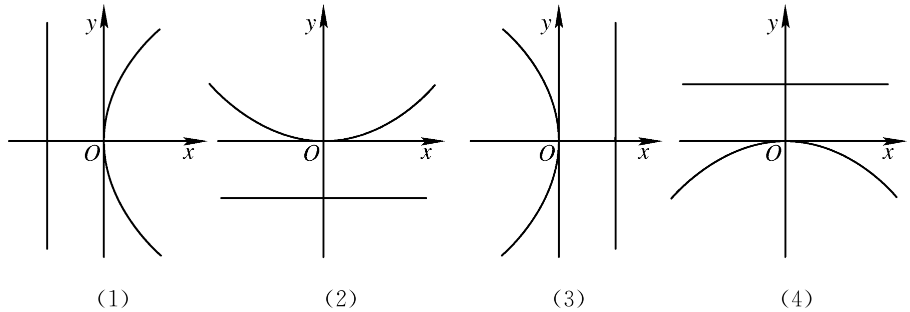


图 2-26

2. (1) 由焦点 $F(-2,0)$，$\frac{p}{2}=2$，$p=4$，$2p=8$，抛物线方程为 $y^2=-8x$.

(2) 由准线方程 $y=-2$，$\frac{p}{2}=2$，$2p=8$，抛物线方程为 $x^2=8y$.

P. 60　练习

1. (1) $y^2=8x$，顶点坐标为 $(0, 0)$，对称轴为 x 轴，焦点坐标为 $(2, 0)$，准线方程为 $x=-2$.

(2) $x^2=32y$，顶点坐标为 $(0, 0)$，对称轴为 y 轴，焦点坐标为 $(0, 8)$，准线方程为 $y=-8$.

(3) $y=-24x^2$，$x^2=-\frac{1}{24}y$，顶点坐标为 $(0, 0)$，对称轴为 y 轴，焦点坐标为 $\left(0, -\frac{1}{96}\right)$，准线方程为 $y=\frac{1}{96}$.

(4) $x=-\frac{1}{16}y^2$，$y^2=-16x$，顶点坐标为 $(0, 0)$，对称轴为 x 轴，焦点坐标为 $(-4, 0)$，准线方程为 $x=4$.

2. 把点 $M(2,4)$ 代入 $y^2=8x$，满足方程. ∴点 $M(2,4)$ 在抛物线上.
∴过点 M 的直线 l 与抛物线 $y^2=8x$ 只有一个公共点的直线有两条，一条与抛物线相切，一条与对称轴 x 平行.

3. $y^2=4x$，$2p=4$，$p=2$，$\frac{p}{2}=1$，焦点 $(1, 0)$，过 $(1, 0)$ 作直线 $y=k(x-1)$ 与抛物线 $y^2=4x$ 相交得
$k^2(x-1)^2=4x$，即 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.
∴$x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}=6$，$4k^2=4$，$k=\pm1$，$x_1\cdot x_2=1$.
∴$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{36-4}=8$.

习题 3

1. (1) $y^2=x$，$2p=1$，$\frac{p}{2}=\frac{1}{4}$. 焦点坐标为 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{1}{4}$.

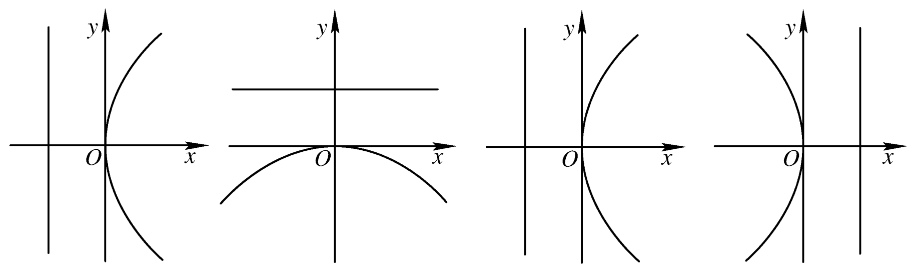
（2）$x^2=-y$，$2p=1$，$p=\frac{1}{2}$，$\frac{p}{2}=\frac{1}{4}$．焦点坐标为$\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$，准线方程为 $y=\frac{1}{4}$；

（3）$y^2=ax$（$a\neq 0$），

当 $a>0$ 时，$2p=a$，$p=\frac{a}{2}$，$\frac{p}{2}=\frac{a}{4}$．焦点坐标为$\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{a}{4}$．

当 $a<0$ 时，$2p=-a$，$p=-\frac{a}{2}$，$\frac{p}{2}=-\frac{a}{4}$．焦点坐标为$\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{a}{4}$．

附图（图 2-27）



（$a>0$）　（$a<0$）

（1）　（2）　（3）

图 2-27

2．$y^2=ax$ 的准线方程为 $x=-1$，则 $a>0$，$2p=a$，$\frac{p}{2}=\frac{a}{4}=1$．$a=4$．选 D.

3．$y^2=4x$，$2p=4$，$p=2$，$\frac{p}{2}=1$．焦点为（1，0），抛物线上的点（x，y）到焦点的距离为$|x+1|$，显然当 x 取 0 时，距离最短为 1，因此选 A.

4．如图 2-28，设 $B(x_1,y_1)$，$A(1,2)$，

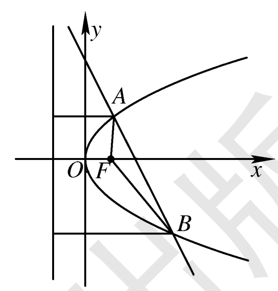


图 2-28

$|AF|+|FB|=1+\frac{p}{2}+x_1+\frac{p}{2}=x_1+1+p$.

∵A 点在抛物线上，∴$4=2p$，$p=2$.

∵A 在直线 $ax+y-4=0$ 上，∴$a+2-4=0$，$a=2$.

联立$\begin{cases}2x+y-4=0,\\ y^2=4x\end{cases}\Rightarrow(4-2x)^2=4x$.

∴$16-16x+4x^2=4x$，∴$4x^2-20x+16=0$，即 $x^2-5x+4=0$.

∴$x=1$ 或 $x=4$，

当 $x_1=1$ 时，即为点 $A(1,2)$.

当 $x_2=4$ 时，为点 $B(4,-4)$.

∴$|AF|+|FB|=7$.

5．$y^2=4x$，$\frac{p}{2}=1$，焦点 $F(1,0)$．设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

$|AB|=|AF|+|FB|=x_1+1+x_2+1=x_1+x_2+2=8$.

$\therefore x_1+x_2=6$.

则$\triangle OAB$重心的横坐标为$x=\dfrac{x_1+x_2+0}{3}=2$.

设AB的方程为$y=k(x-1)$，

则$\begin{cases} y_1=k(x_1-1), \\ y_2=k(x_2-1) \end{cases} \Rightarrow y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=4k$.

又$\begin{cases} y_1^2=4x_1, \\ y_2^2=4x_2, \end{cases} \therefore (y_1-y_2)(y_1+y_2)=4(x_1-x_2)$，

$\therefore \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k=\dfrac{4}{y_1+y_2}=\dfrac{4}{4k}$.

$\therefore k^2=1$，$k=\pm 1$.

$\therefore$直线AB的倾斜角为$45°$或$135°$.

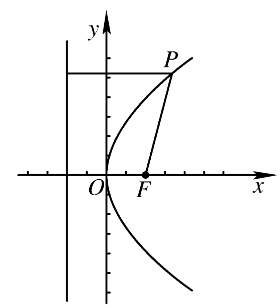


图 2-29

6. 如图 2-29，$y^2=4x$，$\dfrac{p}{2}=1$. 即准线方程为$x=-1$.

$\because P$到直线$x+2=0$的距离为5，则P到准线$x=-1$的距离为4，

$\therefore P$到抛物线焦点F的距离为4.

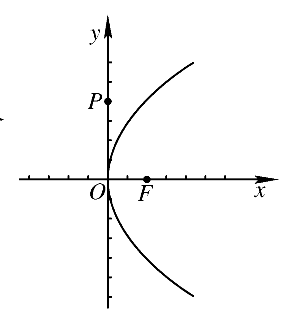


图 2-30

7. 如图 2-30，显然过点P的直线$x=0$或$y=1$与抛物线只有一个公共点.

若过点P的直线为$y-1=kx$，

联立$\begin{cases} y=kx+1, \\ y^2=2x \end{cases}$得$k^2x^2+2kx+1=2x$.

于是$k^2x^2+(2k-2)x+1=0$，$\Delta=(2k-2)^2-4k^2=0$.

即$-8k+4=0$，$k=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$直线方程为$y=\dfrac{1}{2}x+1$，即$x-2y+2=0$.

$\therefore$与抛物线$y^2=2x$只有一个公共点的直线的方程为$x=0$或$y=1$或$x-2y+2=0$.

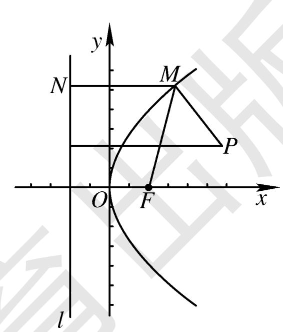


图 2-31

8. 如图 2-31，$y^2=4x$，准线l：$x=-1$，$|MF|=|MN|$，

$|MP|+|MF|=|MN|+|MP|$，

当N,M,P三点共线时，$|MP|+|MN|$值最小为$3+1=4$.

P. 66 练习

1. 如图 2-32，以最小半径所在直线为x轴，圆心为原点建立直角坐标系，设$A(13, y_1)$，

$B(25,y_2)$在双曲线上，且 $y_1-y_2=55$.

设方程为$\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

则$\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{13^2}{12^2}-1=\frac{25}{144}$，$\frac{y_1}{b}=\frac{5}{12}$，$y_1=\frac{5}{12}b$，

$\frac{y_2^2}{b^2}=\frac{25^2}{12^2}-1=\frac{481}{144}$，$y_2=-\frac{\sqrt{481}}{12}b$，

∴$\frac{5}{12}b+\frac{\sqrt{481}}{12}b=55$，解得 $b\approx25$.

∴双曲线方程为$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{625}=1$.

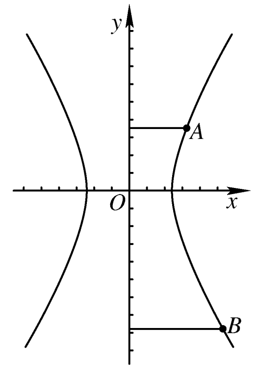


图 2-32

2. 如图 2-33，建立直角坐标系，则抛物线 $x^2=-2py$，过点$(3,-3)$.

∴$9=-2p\cdot(-3)$，$2p=3$.

∴$x^2=-3y$.

当车与箱高 4.5 m 时，即 $y=-0.5$ 时，$x^2=1.5$，$x=\sqrt{1.5}$，

$2x=2\sqrt{1.5}=\sqrt{6}<3$.

不可以通过.

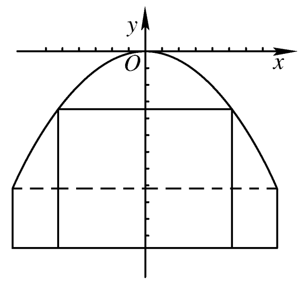


图 2-33

习题 4

1. 过点 B 作 $BO'\perp OC$，以 O'为原点，OC 所在直线为 x 轴，$O'B$ 所在直线为 y 轴建立直角坐标系，如图 2-34.

则 $C(5,0)$，$B(0,5)$.

设抛物线方程为 $y=kx^2+5$，代入点（5，0）得 $0=25k+5$.

于是 $k=-\frac{1}{5}$，∴方程为 $y=-\frac{1}{5}x^2+5$.（*）

将 $x=-4$ 代入(*)得 $y=-\frac{16}{5}+5=\frac{9}{5}$，即 OA 高度为$\frac{9}{5}$ m.

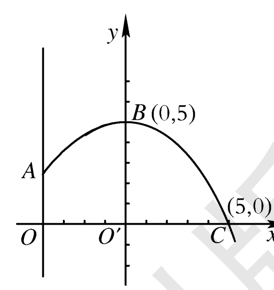


图 2-34

2. 如图 2-35 建立直角坐标系，设方程为 $y^2=2px$，则由抛物线经过点$\left(\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}d,\ \frac{1}{2}d\right)$，代入得

$$\left(\frac{1}{2}d\right)^2=2p\left(\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}d\right),$$

解得$\frac{p}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}d$.

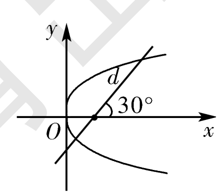


图 2-35

∴最短距离为$\frac{2-\sqrt{3}}{4}d$ 万千米.

3. （1）如图 2-36 建立平面直角坐标系，设抛物线方程为 $y^2=2px$，

则曲线过点(0.5，2.4)代入得

$2.4^2=2\times p\times 0.5$，

$\therefore p=5.76$.

∴抛物线的标准方程为 $y^2=11.52x$，焦点坐标为(2.88，0)

（2）若口径增大为 5.2 m，则曲线过点(0.5，2.6)，代入抛物线方程 $y^2=2px$ 得

$2.6^2=2\times p\times 0.5$，

$\therefore p=6.76$.

∴焦点坐标为(3.38，0).

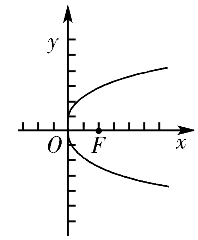


图 2-36

4. 如图 2-37，以拱顶为原点，建立直角坐标系，设抛物线 $x^2=-2py$，代入点（10，−2），得 $100=4p$，$p=25$.

∴抛物线方程为 $x^2=-50y$，∵船宽 16 m，船在 $x=\pm 8$ 之间通过，当 $x=8$ 时，$y=-\dfrac{1}{50}\times 64=-1.28$. ∴$B$ 点离水面高度为 $6-1.28=4.72$ m，而船体高 5 m，所以无法通过.

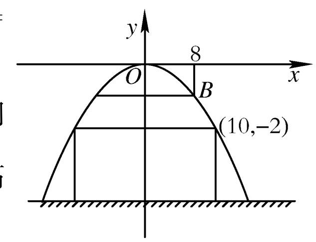


图 2-37

5. 把 $y=4$ 代入 $y^2=4x$ 得 $x=4$，∴$P(4,4)$. 由 $2p=4$，得 $\dfrac{p}{2}=1$.

∴$F(1,0)$.

根据抛物线的光学原理可知，反射线必过 F 点，∴$k_{PQ}=\dfrac{4}{3}$，$S_{\triangle OFP}=\dfrac{1}{2}\times 1\times 4=2$.

复习题二

1. （1）当 $k<4$ 时，$9-k>0$，$4-k>0$，

∴曲线表示椭圆.

（2）当 $4<k<9$ 时，$9-k>0$，$4-k<0$，

∴曲线表示双曲线.

2. 当 $0°<\alpha<90°$时，$\cos\alpha>0$，曲线表示椭圆.

当 $90°<\alpha\leqslant 180°$时，$\cos\alpha<0$，曲线表示双曲线.

当 $\alpha=0°$时，$\cos\alpha=1$，曲线表示圆.

当 $\alpha=90°$时，$\cos\alpha=0$，曲线表示两条平行于 y 轴的直线.

3. 设与两圆 $x^2+y^2=1$ 及 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切的圆的圆心为 $M(x,y)$，半径为 r，圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心 O 为$(0,0)$，圆 $x^2+y^2-8x+12=0$ 的圆心为 $A(4,0)$，由 $|MA|-|MO|=2-1=1$，即 M 在以 O，A 为焦点的双曲线一支上，选（B）.

4. 由 AB，BC，CA 的长成等差数列.

∴$|AB|+|CA|=2|BC|=4$.

高中数学教师教学用书

∴A 在以 B，C 为两焦点的椭圆上，且 $2a=4$，$a=2$，$c=1$，$b^2=3$，

∴A 的轨迹方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\ (x\neq\pm2)$.

5. 设 $M(x,y)$，

由 $MF_1\perp MF_2, F_1(-5,0), F_2(5,0)$

$\Rightarrow\frac{y}{x+5}\cdot\frac{y}{x-5}=-1\Rightarrow y^2=-x^2+25$，

$x^2+y^2=25$ ①

又$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ ②

把①代入②得 $20(25-y^2)+45y^2=900$.

∴$500+25y^2=900$，$25y^2=400$.

∴$y^2=16$，$y=\pm4$.

代入①得 $x^2=9$，$x=\pm3$.

∴$M_1(3,4), M_2(3,-4), M_3(-3,4), M_4(-3,-4)$.

6. 联立$\begin{cases}x-2y+2=0,\\x^2+4y^2=4.\end{cases}$

∴$(2y-2)^2+4y^2=4, 8y^2-8y=0, y_1=0, y_2=1, x_1=-2, x_2=0$.

∴$A(-2,0), B(0,1)$，

$|AB|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

7. 设双曲线方程为 $9x^2-4y^2=\lambda$，

$\frac{x^2}{\frac{\lambda}{9}}-\frac{y^2}{\frac{\lambda}{4}}=1, c^2=\frac{\lambda}{9}+\frac{\lambda}{4}=16, \lambda=\frac{16\times36}{13}$.

方程为$\frac{13x^2}{64}-\frac{13y^2}{144}=1$.

8. 由 $e=\frac{c}{a}=2$，有$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$，∴$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$或$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$(两种情况).

∴渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$ 或 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

易知这两种情况两条渐近线所成锐角为$\frac{\pi}{3}$.

9. 由 $3x^2-y^2=12$，得$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

∴$c^2=16$，$c=4$，右焦点 $F_2(4,0)$. ∵圆心 $F_2(4,0)$，圆过原点，

∴$r=4$，圆方程为$(x-4)^2+y^2=16$.

10. 设圆心 $M(x,y)$，则$|y+3|=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$.

∴$y^2+6y+9=x^2+y^2-6y+9$. ∴$x^2=12y$.

圆心轨迹方程为 $x^2=12y$.

11. 设抛物线上任意一点 $P(x_1,y_1)$，焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，$P$，$F$ 中点 $M(x,y)$，

则 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\frac{p}{2}}{2}, \\ y=\dfrac{y_1}{2}. \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x_1=2x-\dfrac{p}{2}, \\ y_1=2y. \end{cases}$

将 x_1，y_1 代入 $y^2=2px$

得 $4y^2=2p\left(2x-\frac{p}{2}\right)$，$y^2=px-\frac{p^2}{4}$.

M 轨迹方程为 $y^2=px-\frac{p^2}{4}$ $(p>0)$.

12. 设抛物线 $y^2=2px$，则 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$. 当 $x=\frac{p}{2}$，$y^2=p^2$，$y=\pm p$，

$\therefore |BC|=2p$. 设 $P(x_1,y_1)$ 在抛物线上，$y_1^2=2px_1$.

$\therefore |PQ|=|y_1|$，$|OQ|=x_1$.

$\because y_1^2=2px_1$，$\therefore |PQ|^2=|BC|\cdot|OQ|$.

$\therefore |PQ|$ 是 $|BC|$ 和 $|OQ|$ 的比例中项.

13. 以 AB 中点 O 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，如图 2-38，则 $A(-1,0)$，$B(1,0)$. $\because |DA|+|DB|=4$ 为定值，$\therefore D$ 在以 A，B 为焦点的椭圆上.

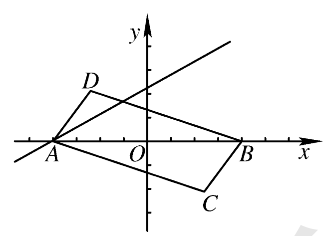


图 2-38

$a=2$，$c=1$，$b^2=3$，$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

设 l：$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$ 代入 $3x^2+4y^2=12$ 得

$3x^2+4\times\frac{1}{3}(x+1)^2=12$，$9x^2+4x^2+8x+4=36$，

即 $13x^2+8x-32=0$.

$\therefore x_1+x_2=-\frac{8}{13}$，$x_1\cdot x_2=-\frac{32}{13}$.

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\frac{8}{13}\right)^2+4\cdot\frac{32}{13}}=\frac{24\sqrt{3}}{13}$.

$l=\sqrt{1+\frac{1}{3}}\times\frac{24\sqrt{3}}{13}=\frac{48}{13}$，$\therefore$ 暂不加固部分长 $\frac{48}{13}$ km.

14. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$，$a^2=4$，$a=2$，$b^2=1$，$b=1$，$c^2=5$，$c=\sqrt{5}$.

$F_1(-\sqrt{5},0)$，$F_2(\sqrt{5},0)$.

$\because \overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$\therefore \overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$.

设 $|\overrightarrow{PF_1}|=r_1$，$|\overrightarrow{PF_2}|=r_2$，则有 $\begin{cases} |r_1-r_2|=2a=4, \\ r_1^2+r_2^2=(2c)^2=20. \end{cases}$

得 $r_1^2-2r_1r_2+r_2^2=16$. $2r_1r_2=4$，$r_1r_2=2$，选（A).

15. 如图 2-39，$\because AF=AA'$，$BF=BB'$，$\therefore \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

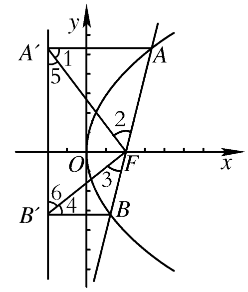


图 2-39

$\angle A'FB'=180°-(\angle 2+\angle 3)=180°-(90°-\angle 5)-(90°-\angle 6)$

$=180°-90°+\angle 5-90°+\angle 6=\angle 5+\angle 6=180°-\angle A'FB'$.

$\therefore \angle A'FB'=90°$.

16. $\because 16x^2+25y^2=1\ 600$，$\therefore \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$.

$c^2=36$，$c=6$，$F_1(-6,0)$，$F_2(6,0)$. 设 $P(x_1,y_1)(y_1>0)$，

则 $k_{PF_2}=-4\sqrt{3}=\dfrac{y_1}{x_1-6}$，

$\therefore y_1=-4\sqrt{3}(x_1-6)$. （*）

将（*）代入$\dfrac{x_1^2}{100}+\dfrac{y_1^2}{64}=1$ 得

$\dfrac{x_1^2}{100}+\dfrac{16\times 3(x_1-6)^2}{64}=1$.

$\therefore x_1^2+75(x_1-6)^2=100$，即 $76x_1^2-900x_1+2\ 600=0$.

解得 $x_1=\dfrac{130}{19}$或 $x_1=5$. 把 $x_1=\dfrac{130}{19}$代入（*）得 $y_1=-4\sqrt{3}\times\dfrac{16}{19}<0$(舍去)，

把 $x_1=5$ 代入（*）得 $y_1=-4\sqrt{3}\times(-1)=4\sqrt{3}>0$，

$\therefore P(5,4\sqrt{3})$，$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times 12\times 4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$.

17. 易知 $r_1+r_2+2R=2a$，$r_2-r_1=2c$，

$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{r_2-r_1}{r_2+r_1+2R}$.

18. 设$\angle MAB=\alpha$，$\angle MBA=2\alpha$，

$\angle MBx=180°-2\alpha$. 设 $M(x,y)$，

$\therefore \tan\angle MBx=k_{MB}=\dfrac{y}{x-2}=-\tan 2\alpha$，

$\tan\angle MAB=k_{MA}=\dfrac{y}{x+1}=\tan\alpha$.

$\because \tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$，

$\therefore \dfrac{y}{2-x}=\dfrac{2\times\dfrac{y}{x+1}}{1-\dfrac{y^2}{(x+1)^2}}$

$\Rightarrow \dfrac{y}{2-x}=\dfrac{2y(x+1)}{(x+1)^2-y^2}$

$\Rightarrow 2(x+1)(2-x)=(x+1)^2-y^2$

$\Rightarrow 2(x-x^2+2)=x^2+2x+1-y^2$.

∴$3x^2-y^2=3$，$x^2-\frac{y^2}{3}=1$（$x>0$）.

19. （1）依题意$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{Ox}=0$，

∴$OA\perp OB$，$AB\perp x$ 轴，

∴$x_1=x_2$，$y_1=-y_2$，$x_1=y_1$，∴$x_1^2=2px_1$.

$x_1=0$（舍去），∴$x_1=2p$，∴l 与 x 轴交点坐标为（$2p$，0）.

（2）存在定点 $M(2p,0)$，当 l 经过 M 时，总有$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

证明：设 l：$y=k(x-2p)$，代入 $y^2=2px$，

得　$k^2(x^2-4px+4p^2)=2px$.

即　$k^2x-(4pk^2+2p)x+4k^2p^2=0$.

∴　$x_1x_2=4p^2$.

∴　$y_1^2\times y_2^2=(4p^2)^2$.

∴　$y_1y_2=-4p^2$，$x_1x_2+y_1y_2=0$.

即$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$.

20. 设椭圆与直线交于 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$两点，

则由$\begin{cases}ax^2+by^2=1,\\x+y-1=0\end{cases}\Rightarrow(a+b)x^2-2bx+b-1=0$.

∴$x_1+x_2=\frac{2b}{a+b}$，$x_1x_2=\frac{b-1}{a+b}$，

∴$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)\cdot[(x_2+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{a+b-ab}}{a+b}=$

$2\sqrt{2}$.

得$(a+b)^2=a+b-ab$.　　①

又∵$k_{OC}=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{(1-x_1)+(1-x_2)}{x_1+x_2}=\frac{2}{x_1+x_2}-1=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$a=\frac{\sqrt{2}}{2}b$.　　　　②

把②代入①得 $b=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$a=\frac{1}{3}$.

∴椭圆方程为$\frac{1}{3}x^2+\frac{\sqrt{2}}{3}y^2=1$.

21. 设存在弦 AC 被点 $B(1，1)$平分，其坐标为 $A(x_1，y_1)$，$C(x_2，y_2)$.

∴$\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1,\\x_2^2-\frac{y_2^2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow 2(x_1+x_2)(x_1-x_2)=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$.

$\therefore k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2.$

$\therefore AC$ 所在的直线方程为 $y-1=2(x-1)$，整理得 $y=2x-1$.

将 $y=2x-1$ 代入 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 中，

得　$2x^2-4x+3=0$.

$\because$　$\Delta=16-24<0$，

$\therefore$　这样的直线不存在.

第 3 章　导数及其应用

一、教学目标

1. 通过对大量实例的分析，经历由平均变化率到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵.

2. 通过函数图象直观地理解导数的几何意义.

3. 能根据导数定义求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$ 的导数.

4. 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数.

5. 会使用导数公式表.

6. 结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系；能利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的单调区间.

7. 结合函数的图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值、极小值，以及闭区间上不超过三次的多项式函数最大值、最小值.

8. 通过使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题，体会导数在解决实际问题中的作用.

9. 收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料，并进行交流；体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值.

二、教材说明

微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段. 导数概念是微积分的核心概念之一，它有极其丰富的实际背景和广泛的应用. 在本章中，学生将通过大量实例，经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，理解导数概念，了解导数在研究函数的单调性、极值等性质中的作用，初步了解定积分的概念，为以后进一步学习微积分打下基础. 通过本章的学习，学生将体会导数的思想及其丰富内涵，感受导数在解决实际问题中的作用，了解微积分的文化价值.

本章的重点是了解导数概念的实际背景和几何意义，掌握一些函数的求导方法，利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的极值和在闭区间上的最值，并用导数解决一些优化问题. 难点是导数概念，导数与函数单调性的关系，以及优化问题的数学建模.

本章教材的主要特点是：

1. 突出导数概念产生的实际背景.

教材通过大量实例，让学生经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，从中理解导数概念. 教材中没有出现函数极限的形式化定义，并且默认基本初等函数在其定义域内处处可导，这样处理教材，既回避了极限理论的难点，又让学生体会到导数的思想及其内涵，掌握微积分的基本方法.

2. 突出导数的工具作用，增强导数的应用意识.

历史上，微积分就是伴随着物理学和数学的研究需要应运而生的，用微积分的方法，成千上万的问题被一举突破. 教材在介绍了导数的概念和运算后，着重探讨导数在研究函数的单调性、极值、最值中的工具作用，并进一步将导数应用于解决生活中的优化问题，如利润最大、用料最省、效率最高等问题，反映出数学的应用价值.

3. 注重数学思想方法的渗透.

本章教材包含着丰富的数学思想方法，例如从具体到抽象、从有限到无限的转化思想、函数的思想、数形结合的思想等等，通过这些数学思想方法的渗透，提高学生的数学思维品质，有助于学生对客观事物中隐含的数学模式进行思考和做出判断，形成理性思维.

4. 本章注重数学与文化的联系.

微积分的创立是人类科学文化史上的一件大事，是数学发展中的一座里程碑，它的发展与应用标志着近代数学时期的到来. 恩格斯认为，微积分的发现是人类精神的伟大胜利. 教材简单地呈现了微积分发现、发展的历史进程，有助于学生了解数学对推动社会发展的作用，了解数学的科学思想体系和美学价值，了解数学家的创新精神，逐步形成正确的数学观.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1 导数概念

- 3.1.1 问题探索——求自由落体的瞬时速度 1 课时
- 3.1.2 问题探索——求作抛物线的切线 1 课时
- 3.1.3 导数的概念和几何意义 2 课时

3.2 导数的运算

- 3.2.1 几个幂函数的导数 1 课时
- 3.2.2 一些初等函数的导数表 1 课时
- 3.2.3 导数的运算法则 2 课时

3.3 导数在研究函数中的应用

- 3.3.1 利用导数研究函数的单调性 1 课时
- 3.3.2 函数的极大值和极小值 1 课时

四、教学建议

1. 对导数概念的教学应注意从实例出发，并且只要求学生“了解”导数的概念. 教材通过运动物体瞬时速度概念的建立及计算方法得出:运动物体在任意时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$ 就是平均速度 $v(t, d)=\dfrac{f(t+d)-f(t)}{d}$ 在 d 趋于 0 时的极限. 又用割线的斜率 $k(u, d)=\dfrac{f(u+d)-f(u)}{d}$ 在 d 趋于 0 时的极限 $k(u)$ 作为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(u, f(u))$ 处的切线的斜率. 由上述实例抽象出导数的概念：差商(平均变化率)$\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 在 d 趋于 0 时的极限称为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$. 教材没有出现导数和极限的形式化定义，而是通过实例让学生体会极限的思想，了解导数的实质:导数即函数的瞬时变化率.

导数的几何意义：函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数值 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率. 要区别“在点 P 处的切线”与“过点 P 的切线”. 在点 P 处的切线，P 点是切点，若切点 P 坐标为 (x_0, y_0)，则切线方程为:$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. 过点 P 的切线，P 点可以是切点，也可以不是切点. 光滑曲线在其上一点处的切线只有一条，而过其上一点的切线可以不止一条. 曲线的切线与曲线可以有不止一个公共点.

2. 导数的运算重点:熟记教材给出的基本初等函数的导数公式，掌握导数的四则运算法则. 几个幂函数的导数的计算只是为了复习导数的定义，它们都已包含在公式 $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ 中,不必花费太多的时间. 重点应放在学生较难掌握的求导法则：$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$、$\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)'=\dfrac{f(x)g'(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}$. 以上各个导数公式及求导法则的推导都涉及函数极限的运算，不要求学生掌握. 可让学生适当多做一些简单函数的求导题，使学生在应用中熟记求导公式与法则.

3. 导数在研究函数中的应用突出显示了导数的工具作用. 教学时应把重点放在导数符号与函数增减性的关系和函数极值的求法，特别是利用导数求三次函数的单调区间和极值.

首先应启发学生观察同一坐标系中函数 $f(x)$ 的图象与导函数 $f'(x)$ 的图象之间的关系，从中发现、归纳出导数符号与函数增减性的关系. 教材用导数取代差分来解释利用导数的正负判断函数增减性的法则，这是因为《必修 1》中是用差分来定义函数的增减性. 如果用传统教材中单调性的定义，如对某一区间 (a, b) 内的任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是 (a, b) 内的增函数，可以这样解释：记 $h=x_2-x_1$，因为 $x_1<x_2$，所以 $h>0$，“$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}>0$”与“当 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$”是等价的. 不过差分 >0 并不能保证导数 $f'(x)>0$. 我们的结论是:在某个区间内，若 $f'(x)>0$，则函

数递增；若 $f'(x)<0$，则函数递减.

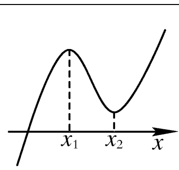
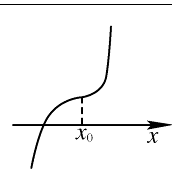
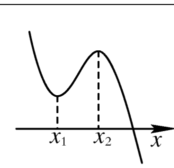
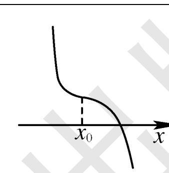
4. 函数的极值是函数的局部性质，函数的最值是函数的整体性质. 用函数 $f(x)$ 在某个开区间 (u, v) 上的最大值（最小值）来定义 $f(x)$ 的一个极大值（极小值），这个极大值（极小值）只是 $f(x)$ 在含极值点的区间 (a, b) 上的最大值（最小值），并不一定就是 $f(x)$ 在整个定义域上的最大值（最小值）. 同时，极大值不一定大于极小值，极小值也不一定小于极大值. 这些都可以让学生通过观察函数的图象得到直观的认识.

按照函数极值的定义，若在区间 (a, x_0) 上 $f'(x)>0$，在区间 (x_0, b) 上 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间 (a, x_0) 上递增，在区间 (x_0, b) 上递减，从而 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值. 反之，若在区间 (a, x_0) 上 $f'(x)<0$，在区间 (x_0, b) 上 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间 (a, x_0) 上递减，在区间 (x_0, b) 上递增，从而 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值. 由导数的正负确定函数的增减性，又由函数的增减变化确定函数的极值和极值点，这就是用导数判断函数极值的方法.

基本初等函数在其定义域内都是连续的、可导的. 导数的符号在极值点左右从正变负或从负变正必定要经过导数等于 0 的时刻，因此在极值点 $x=c$ 处必有 $f'(c)=0$. 但是 $f'(c)=0$ 只是 $x=c$ 是函数极值点的必要条件，而不是充分条件，还要看导数在 $x=c$ 的两侧是否变号.

5. 特别注重用导数研究三次函数的性质. 三次函数分成两类：一类导函数非负（非正），即导函数的 $\Delta\leqslant 0$，相应的三次函数在 $\mathbf{R}$ 上单调递增（递减），没有极值点，图象与 x 轴只有一个交点（三次方程只有一个解）；另一类导函数的 $\Delta>0$，相应的三次函数有两个极值点（一个极大值，一个极小值），三个单调区间（两增一减，或两减一增）.

当导函数极大值 <0 或极小值 >0 时，图象与 x 轴只有一个交点（三次方程只有一个解）；当极大值 $=0$ 或极小值 $=0$ 时，图象与 x 轴有两个交点（三次方程有两个解）；当极大值 >0 且极小值 <0 时，图象与 x 轴有三个交点（三次方程有三个解）.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 的图象（$f'(x)$ 的 $\Delta=4(b^2-3ac)$）			
$a>0$		$a<0$	
$\Delta>0$	$\Delta\leqslant 0$	$\Delta>0$	$\Delta\leqslant 0$
			

研究三次函数的性质一定要结合其导函数（二次函数）的图象，找出导函数的零点及正值区间和负值区间，从而确定三次函数的单调区间和极值点、极值，进而大致画出三次函数的图象，这样对三次函数的性质就认识得十分清楚了.

三次函数在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上没有最大值和最小值. 如果有极值，则只有一个极大值和一个极小值，并且极大值总是大于极小值. 在确定的闭区间 $[a, b]$ 上，三次函数一定有最大值和最小值. 只要先求出三次函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的所有极值（极大值或极小值），再与两个端点值 $f(a)$，$f(b)$ 比较，其中最大的就是最大值，最小的就是最小值.

6.“生活中的优化问题举例”一节是导数的具体应用，教材通过使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题的解决，让学生体会导数在解决实际问题中的工具作用.

解决此类优化问题，首先要指导学生认真读题，正确理解题意，找出题目中出现的各个已知量和未知量，分析它们之间的函数关系，进而写出目标函数，这一过程体现了函数建模思想. 写出正确的目标函数后，实际问题转化为数学问题:求函数的最大值或最小值. 相比以前所用的求最值的特殊方法，如判别式法、均值不等式法、线性规划法、二次函数配方法等，导数是更有力的工具，是更具普遍性的通性通法.

求函数在一个区间上的最值，要先求出函数在这个区间内的所有极值，再与端点处的函数值比较，从而确定函数的最大值或最小值. 如果函数在我们所讨论的区间(开或闭或半开半闭)内只有一个极值，那么极大值就是最大值，极小值就是最小值，此时最值不会在端点处取到. 求出目标函数的最值后，要回到实际问题中去，对我们得到的数学问题的结果做出实际意义的解释.

五、评价建议

1. 重视对学生导数学习过程的评价.

导数一章蕴含着丰富的极限思想，从有限到无限的转化是学生数学学习中继从常量到变量之后的又一次飞跃.《课程标准》仅要求学生了解导数概念，体会导数的思想内涵，会求简单函数的导数，并将导数工具应用于研究一些简单函数(例如不超过三次的多项式函数)的性质，解决一些实际生活中的优化问题. 因此评价既要注意学生对导数的基本运算、基本方法的掌握，更要重视对学生学习过程的评价，要考查学生能否从实际背景中抽象出导数的初步概念，考查学生能否将导数作为工具应用于研究函数性质、解决实际问题.

2. 重视对学生学习能力的评价.

导数一章的学习将十分客观地反映出学生的学习能力，评价中要考查学生能否正确地了解导数的极限思想，理解导数的几何意义，能否自觉地运用导数工具研究函数的性质，能否把实际问题转化为数学问题后正确应用数学知识解决问题. 学生对极限思想的了解与体会、对从有限到无限的思维方式的转换肯定表现出很大的差异，有一个长短不一的过程，因此评价中要注意肯定学生学习中的发展与进步、特点与优点.

3. 重视对学生学习方法的评价.

导数一章十分注意通过实例让学生了解导数的意义，教学时可以鼓励学生自主学习、合作学习、自己举出一些教材之外的例子，加深对导数就是瞬时变化率的理解，例如物理中速度对时间的变化率就是加速度；回忆以前研究函数单调性、求函数最值的各种特殊方法并与导数方法比较，从中体会导数的作用. 对学生这种既有独立思考,又有合作探究的学习方法适时加以鼓励，让其在学习中能得到成功的体验，促使其学习能力的提升.

3.1 导数概念

3.1.1 问题探索——求自由落体的瞬时速度

教材线索

教材从伽利略发现自由落体的运动定律的例子入手，通过了解牛顿计算瞬时速度的思维方式，结合具体事例，向学生渗透了“由近似到精确”、“由有限到无限”的极限思想方法，并给出了瞬时速度的数学概念及其计算方法.

教学目标

（一）知识与技能

能够求解变速运动物体的瞬时速度，初步了解导数的意义.

（二）过程与方法

通过实例，了解瞬时速度与平均速度的辩证关系，体会用极限思想研究变量的思维方法. 在学习过程中，培养思维的严谨性和语言表达能力.

（三）情感、态度与价值观

以学生为主体进行教学设计，让学生有机会参与创新、发现，真正成为学习的主体.

教材分析

1. 重点：

（1）瞬时速度的概念；

（2）瞬时速度的计算方法.

2. 难点：

（1）用数学语言准确描述瞬时速度；

（2）正确使用极限思想方法求解变速运动物体的瞬时速度；

（3）对导数概念的初步了解.

3. 对“瞬时速度”概念的理解.

我们在物理学中学习直线运动的速度时，曾涉及瞬时速度的一些知识. 物理教科书中首先指出，运动物体经过某一时刻（或某一位置）的速度叫作瞬时速度，然后从实际测量角

度，结合汽车速度计的使用，对瞬时速度做了说明. 为了让大家更好地理解瞬时速度，物理教科书有如下的阐述：

图 3-1 表示一辆做变速运动的汽车，我们要确定汽车经过 A 点时的瞬时速度. 从 A 点起取一小段位移 AA_1，求出汽车在这段位移上的平均速度，这个平均速度可以近似地表示汽车经过 A 点时的快慢程度. 从 A 点起所取的位移越小，比如取 AA_2，AA_3，AA_4 等，汽车在该段时间内的速度变化就越小，所得的平均速度就越能较精确地描述汽车经过 A 点的快慢程度. 当位移足够小（或时间足够短）时，测量仪器就已经分辨不出匀速运动与变速运动的差别，可以认为汽车在这段时间内运动是匀速的，所得的平均速度就等于汽车经过 A 点的瞬时速度了.

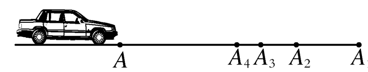


图 3-1

物理课上对瞬时速度只给出了直观的描述，有了极限的工具后，才能给瞬时速度以精确的定义. 本节是由物体在一段时间内运动的平均速度的极限来定义瞬时速度的.

4. 关于极限法.

所谓极限法，是指用极限概念分析问题和解决问题的一种数学方法. 极限法的一般步骤可概括为：对于被考察的未知量，先设法构思一个与它有关的变量，确认这个变量通过无限过程的结果就是所求的未知量，最后用极限计算来得到所要的结果. 极限法不同于一般的代数方法，代数中的加、减、乘、除等运算都是由两个数来确定出另一个数，而在极限法中则是由无限个数来确定一个数.

正如坐标法是解析几何的基本方法一样，极限法是微积分的基本方法. 微积分中的一系列重要概念，如函数的连续性、导数以及定积分等都是借助于极限法定义的. 如果要问"微积分是一门什么学科"，那么可以概括地说："微积分是用极限法来研究函数的一门学科".

教学建议

本节的难点是对导数概念的理解. 导数的概念比较抽象，其定义方法学生也不大熟悉. 而在高中阶段，没有必要在导数与微分概念的严谨性、知识的系统性上花过多的时间与精力. 所以在本小节的教学中，应结合大量的"非匀速直线运动物体的瞬时速度"的实际背景，从物理学方面入手，引导学生感受极限思想，让学生掌握运用定义求解非匀速直线运动物体的瞬时速度，从而为后续学习中能够理解导数概念打好基础.

例题解析

例　运动员从 10 m 高台跳水时，从腾空到进入水面的过程中，不同时刻的速度是不同的. 设起跳 t s 后运动员相对于水面的高度为 $H(t)=-4.9t^2+6.5t+10$，用代数推导方法计算在 2 s 时运动员的速度（瞬时速度），再用数值计算列表观察检验计算的结果.

分析　首先，我们可以从物理学的角度来看瞬时速度，知道运动物体经过某一时刻（或

某一位置）的速度，叫作瞬时速度. 那么，如何考虑这一时刻（或这一位置）的时间与位移呢？这在常量数学中显然是无能为力的. 为此，我们采用逼近的思想方法，先求第 2 s 末到第（$v+d$）s 末的平均速度$\overline{v}_2$，然后将其作为第 2 s 末的瞬时速度的近似值，随着 d 的缩小，近似值的精确度在提高（即第 2 s 末到第（$2+d$）s 末的时间间隔在缩小，也就是$\overline{v}_2$ 与第 2 s 末的瞬时速度的误差在缩小）. 当 d 趋于 0 时，这个误差也趋于 0. 所以，我们可以很自然地将$\overline{v}_2$ 的极限值作为第 2 s 末的瞬时速度. 这种方法学生初次接触，为了能让学生更好的理解，教学过程中要将“逼近”的过程展现给学生，如在本题中在求 2 s 的左右的平均速度时，分别将时间间隔取为 0.1，0.01，0.001，0.000 1，0.000 01，并将结果列表. 这样做，一方面有利于比较，另一方面则让学生得到对极限思想的直观感受. 同时教材中给出了求瞬时速度的书写格式，要求学生通过模仿练习以掌握求解格式.

相关链接

第二次数学危机

17 世纪由牛顿和莱布尼茨建立起来的微积分学，由于在自然科学中的广泛应用，揭示了许多自然现象，而被高度重视. 但在持续的一二百年内，这门科学却缺乏令人信服的严格的理论基础，存在着明显的逻辑矛盾. 例如：对于 $y=x^2$ 而言，根据牛顿的流数计算法，有

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2 \quad ①$$

$$x^2+\Delta y=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2 \quad ②$$

$$\Delta y=2x\Delta x+(\Delta x)^2 \quad ③$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x \quad ④$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x \quad ⑤$$

在上面的推导过程中，从③到④，要求 Δx 不等于零，而从④到⑤，又要求 Δx 等于零.

正因为在无穷小量中存在着这类矛盾，才引起当时颇具影响的红衣大主教贝克莱对无穷小量的抨击. 1734 年贝克莱在其所著的一本书名为《分析学家》的小册子里，说 Δx 为“逝去的鬼魂”. 意思是说，在微积分中有时把 Δx 作为零，有时又不为零，自相矛盾. 贝克莱的指责，在当时的数学界中引起混乱，这就是第二次数学危机的爆发.

在无穷小量的危机中，无穷小量顶住了各种形式的责难，以自己不可取代的应用优势发挥着巨大的作用. 经过了一个多世纪之后，最终在以零为极限的序列中找到了位置. 从 19 世纪下半叶开始，极限理论逐渐取代了无穷小量的方法，并且在分析基础理论中具有统治地位，这样自然而然地解决了第二次数学危机.

3.1.2 问题探索——求作抛物线的切线

教材线索

本小节从大家所熟悉的斜抛、平抛运动的轨迹入手，通过探求抛物线的切线的作法，结合具体事例，向学生渗透了“由近似到精确”、“由有限到无限”的极限思想方法，并给出了连续曲线在某一点处切线斜率的求法.

教学目标

（一）知识与技能

了解过曲线上一点的切线与曲线割线之间的辩证关系，能够求解过曲线上一点切线的斜率.

（二）过程与方法

借助于超级画板，直观了解过曲线上一点切线的实际意义；通过实例，了解曲线的切线与割线的辩证关系，体会用极限思想研究变量的思维方法.

（三）情感、态度与价值观

养成用联系变化的观点和应用数学的意识，培养自身的创新意识和不断探求新问题的能力.

教材分析

1. 重点：

（1）曲线的切线的概念；

（2）过曲线上一点的切线的斜率的计算方法.

2. 难点：

（1）用数学语言准确描述曲线的切线的概念；

（2）正确使用极限思想方法求解过曲线上一点的切线的斜率；

（3）对导数概念的初步了解.

3. 关于曲线的切线.

在初中，我们学习过圆的切线：直线与圆有唯一公共点时，叫作直线与圆相切. 这时直线叫作圆的切线，唯一的公共点叫作切点.

圆是一种特殊的曲线，能否将圆的切线推广到一般曲线的切线：直线与曲线有唯一公共点时，直线叫作曲线过该点的切线？显然，这种推广是不妥的.

观察图 3-2 中的曲线 C，直线 l_1 虽然与曲线 C 有唯一公共点 M，但我们不能说直线 l_1 与曲线 C 相切；而直线 l_2 尽管与曲线 C 有不止一个公共点，但我们还是说直线 l_2 是曲线 C 在点 N 处的切线．因此，必须重新寻求曲线切线的定义．

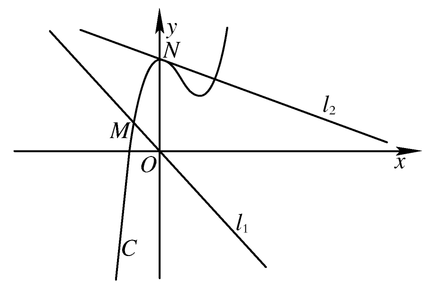


图 3-2

教材中是用割线的极限位置上的直线来定义切线的．

教学建议

曲线的切线的斜率及质点直线运动的瞬时速度分别是导数的几何意义及物理意义，如果在学好瞬时速度的基础上，能学好切线的定义、切线斜率的定义，就能为接下来学习导数定义打下良好的基础，因此在教学过程中，应结合实例向学生讲清楚曲线的切线的概念及过曲线上一点的切线的斜率的计算方法．

例题解析

例 1　求二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 图象曲线上点 $P(u，f(u))$ 处切线的斜率．

分析　要求二次曲线在某一点处的切线的斜率，我们的学生可能首先会想到解析几何的方法．显然，本题中切线的斜率一定存在，故先用直线的点斜式方程设所求切线的方程为 $y-f(u)=k(x-u)$，再与二次曲线的方程联立，消元，进而利用判别式求出 k 值．对于二次曲线而言，这种方法是可行的．但是对于其他函数，如 $y=\sin x$，$y=x^3+2x-8$ 等，这种方法就行不通了．因此，通过本例，教材介绍了一种求切线斜率的更为普遍的方法——“极限法”．其做法类似于瞬时速度的求法，先在点 P 附近任意取一点 $Q(u+d，f(u+d))$，对于直线 PQ 的斜率——利用解析几何中过两点的直线的斜率公式可以求出．接着，让 d 趋近于 0，则点 Q 趋近于点 P，直线 PQ 的斜率与曲线在点 P 处的切线的斜率之间的误差也趋近于 0．这样，我们就可以很自然地将直线 PQ 的斜率的极限值作为曲线在点 P 处的切线的斜率．本题如果能够利用“超级画板”将直线由割线向切线的转化过程演示出来，效果会更好．

例 2　初速大小为 v(m/s)的炮弹，如果发射方向和地面所成的角为 θ，则炮弹所经过的曲线在不计空气阻力时为抛物线，以炮弹到发射点的水平距离为自变量 x(m)，炮弹到发射点的垂直距离 y(m)可以看成是 x 的函数，其表达式为 $y=f(x)=x\tan\theta-\dfrac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$，其中 $g=9.8(\text{m/s}^2)$是重力加速度．根据例 1 的结果，求曲线上任一点$(x，f(x))$处的斜率．

分析 本题是例 1 的实际应用问题. 我们可以将函数 $y=f(x)=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$看作是二次项系数为$-\frac{g}{2v^2\cos^2\theta}$，一次项系数为 $\tan\theta$ 的二次函数，利用例 1 的结果，很容易得到答案.

相关链接

殊途同归
——抛物线切线和运动质点速度有何异同

中学平面几何熟知的一个事实：圆的切线是与圆仅相交于一点的直线 P_0T（图 3-3）.

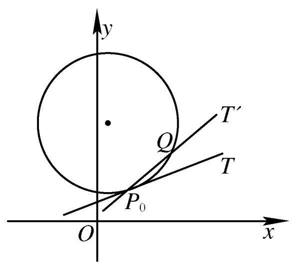


图 3-3

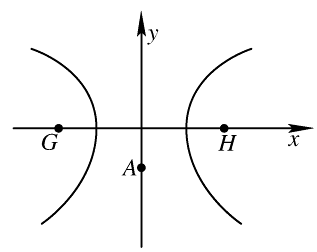


图 3-4

但是，对其他曲线，例如：双曲线（图 3-4）、抛物线，是不是也有切线？如果有，那么抛物线的切线定义是否也是“与抛物线仅相交于一点的直线”？显然不行！

在图 3-5 中可发现，点 O 在抛物线上，有两条直线（x 轴，y 轴）都与抛物线仅有一个公共点，但直觉告诉我们 y 轴不是切线，可是为什么它不是切线呢？

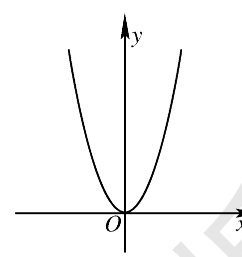


图 3-5

再回到圆的情形，进一步研究发现：圆上过点 P_0 的切线 P_0T 可以看成是过点 P_0 的割线 P_0Q，当点 Q 沿圆移动到 P_0 点时该割线的最终位置，也就是说，当 $Q\to P_0$ 时，割线 P_0Q 的极限位置. 人们把这个处于极限位置的直线称为曲线在点 P_0 的切线，而把切线的斜率称为导数.

1684 年，莱布尼茨在 *Acta Eruditorum* 上第一次公开发表了关于微积分的论文《一种求极大与极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》，文中叙述了微分学的基本原理. 此后，经过许许多多数学家的努力，特别是在极限理论建立后，它使我们得到了导数的定义.

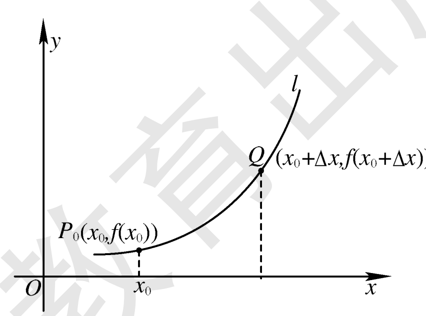


图 3-6

设函数 $y=f(x)$ 的图象如图 3-6 所示，点 P_0 是曲线 l 上取定的一点，假设它的坐标为

$(x_0, f(x_0))$. 在曲线 l 上再任取一点 $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. 由平面解析几何知识，割线 P_0Q 的斜率为 $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x_0+\Delta x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，$Q\to P_0$，即 $\Delta x\to 0$ 时，我们称极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数，记为 $f'(x)$. 过点 P_0 以导数 $f'(x_0)$ 为斜率的直线就定义为曲线 l 在点 P_0 的切线.

令人惊讶的是，物理学家牛顿也是微积分的创始人. 牛顿是英国物理学家、天文学家、数学家. 他幼年家境贫寒，学习成绩也比较差. 直到 12 岁后开始发奋图强，学习意志渐强，于 1661 年以优异成绩考入剑桥大学. 在那里，牛顿受到良好的数学和物理教育. 1665 年，年仅 22 岁的牛顿就发现了二项式定理，并在当年的手稿中就有了“流数术”的记载. 牛顿认为：线是点运动的结果，角是它的边旋转的结果，体是表面运动的结果；变量是运动着的点，叫流动量，运动的速度叫流数，流数是流动量对时间的导数. 牛顿用路程的改变量 Δs 与时间的改变量 Δt 的比 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 表示物体运动的平均速度，令 Δt 无限逼近于 0，就得到该物体的瞬时速度，并由此建立了导数的概念.

曲线切线的斜率与运动质点的瞬时速度有着惊人的相似之处：曲线切线的斜率是 $f(x)$ 关于 x 的导数，运动质点的速度是 $s(t)$ 关于 t 的导数. 事实上，还有许许多多自然现象可以归结为求导数问题，如：化学实验时测定溶液的沉淀情况，医学中化验人体的血液沉淀，天气预报时台风移动的快慢……

牛顿和莱布尼茨，这两位公认的，并称为微积分学创始人的科学家，从不同的出发点创建了微积分. 前者从力学的角度，研究速度、加速度和变化率；后者从几何的角度，研究曲线的切线和曲边梯形的面积，分别独立地得出了导数、积分的概念和运算法则，并分别独立地证明了求导数和求积分是互逆的两种运算. 至此，微积分成为一门独立的学科展现在科学家的面前，并十分成功地应用到天文、力学、物理和地质等学科上，大大推动了整个自然科学的发展. 微积分则完成了它的发展的第一阶段.

3.1.3 导数的概念和几何意义

教材线索

本小节在讲述了曲线的切线斜率及非匀速直线运动物体的瞬时速度的求法的基础上，得到了导数的定义，并由导数定义归纳出按定义求导数的方法.

教学目标

（一）知识与技能

了解导数概念的实际背景. 通过函数图象直观了解导数的几何意义.

（二）过程与方法

通过对大量实例的分析，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵；通过练习，掌握用定义法求函数的导数的一般步骤，并能利用函数的导数知识解决一些应用性问题.

（三）情感、态度与价值观

通过“极限法”的学习，提高数学素质，增强分析问题和解决问题的能力，能认识事物之间的相互联系，会用联系的观点看问题.

教材分析

1. 重点：

导数的定义与求导的方法.

2. 难点：

对导数概念的理解.

3. 对导数概念的理解.

导数是研究在点 x_0 处及其附近函数的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 之比的极限，它是一个局部性的概念，如果当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to a$（常数），函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处就有导数，否则，就没有导数. 从导数的定义可以看出：导数是函数的局部性质，即函数在一点的导数只与函数在该点附近的性质（即函数值）有关，而与其他地方无关.

4. 导数的几何意义.

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率. 也就是说，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率是 $f'(x_0)$. 相应地，切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

5. 导数的物理意义.

如果把函数 $y=f(x)$ 看作是物体的运动方程（也叫作位移公式，自变量 x 表示时间），那么导数 $f'(x_0)$ 表示物体在时刻 x_0 的速度，即在 x_0 的瞬时速度.

6. 导数的应用范围.

在数学上，把函数在点 x_0 处的变化率称为函数在点 x_0 处的导数，在自然科学和科技领域内，只要遇到有关函数变化率的问题，如化学反应速度、物体温度变化率、电流等都需要应用导数.

7. “函数在某一点处的导数”、“导函数”、“导数”的区别与联系.

函数在某一点处的导数 $f'(x_0)$ 是一个常数，不是变量.

函数的导数，是针对某一区间内任意点 x 而言的. 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都可导，是指对于区间 (a, b) 内每一个确定的值 x_0，都对应着一个确定的导数 $f'(x_0)$，根据函数的定义，在开区间 (a, b) 内就构成了一个新的函数，就是函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值，即 $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$.

教学建议

1. 导数是从大量问题中抽象出来的具有相同数学表达式的一个重要概念，所以在教学过程中，可以通过研究增长率、膨胀率、效率、密度、速度等反映导数应用的实例，引导学生经历由平均变化率到瞬时变化率的过程，知道瞬时变化率就是导数，进而学会用事物在全过程中的发展变化规律来确定其在某一时刻的状态.

2. 导数概念的基础是极限理论，无限逼近的极限思想是导数概念的基本思想. 在教学过程中，要逐步向学生渗透极限思想.

3. 对“函数在某一点处的导数”、“导函数”、“导数”的区别与联系要讲清楚.

4. 由导数定义求导数是求导数的基本方法，在进行导数定义教学时，应注意以下几点：

(1) Δx 是自变量 x 在 x_0 处的增量；

(2) 导数定义中还包含了可导和可微的概念，如果当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to a$（常数），才有函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导或可微，进而才能得到 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数.

例题解析

例 1 某省环保局在规定的排污达标的日期前，对甲、乙两家企业进行检查，其连续检测结果如图 3-7 所示（$W_1(t)$，$W_2(t)$ 分别表示甲、乙企业在时刻 t 的排污量）. 试问哪个企业的治污效果较好？

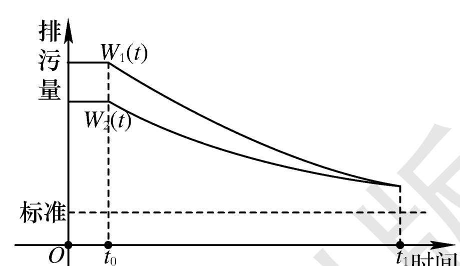


图 3-7

分析 本题主要体现差商（即差分和对应步长的比）定义在现实生活中的运用，要想知道哪个企业的治污效果好，关键要看哪个企业在单位时间内企业的治污率较大.

例 2 投石入水，水面产生圆形波纹区. 圆的面积随着波纹的传播半径 r 的增大而增大（如图 3-8），计算：

(1) 半径 r 从 a 增加到 $a+h$ 时，圆面积相对于 r 的平均变化率；

(2) 半径 $r=a$ 时，圆面积相对于 r 的瞬时变化率.

分析 本例中的题 (1) 是求变化中的几何图形（圆）面积的平均变化率. 它同例 1 及我们前面讨论过的运动物体的平均速度，以及函数曲线的割线斜率一样，从数学的角度看，

都是函数值的改变量与对应的自变量的改变量的比，即差商．而题（2）则是求圆面积的瞬时变化率，实际上就是求函数 $S=\pi a^2$ 的瞬时变化率．而它与我们已经较为熟悉的瞬时速度，切线的斜率等都是相应函数的瞬时变化率．利用本例，教材给出了函数导数的概念，而学生则又一次体验寻求瞬时变化率（即平均变化率在某点处的极限）的过程，有利于学生更深刻理解导数的概念．

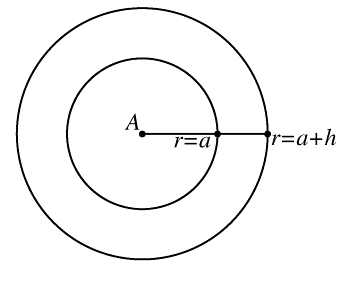


图 3-8

例 3 在初速度为零的匀加速运动中，路程 s 和时间 t 的关系为 $s=s(t)=\dfrac{at^2}{2}$．

（1）求 s 关于 t 的瞬时变化率，并说明其物理意义；

（2）求运动物体的瞬时速度关于 t 的瞬时变化率，说明其物理意义．

分析 本题是导数概念在物理学中的运用，题(1)直接利用导数的定义运算得出位移函数 s 关于时间 t 的导数(即运动物体的瞬时速度)，而题(2)则是求瞬时速度关于时间 t 的瞬时变化率(运动物体的加速度)．通过本例，一方面加深学生对导数定义的理解，另一方面则从数学的角度对加速度做了较为严格的定义．

相关链接

(一)基础训练

1．在导数定义中，自变量的增量 Δx(　　)

A．$\Delta x>0$　　B．$\Delta x<0$　　C．$\Delta x=0$　　D．$\Delta x\neq 0$

2．设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 由 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的改变量 Δy 为(　　)

A．$f(x_0+\Delta x)$　　B．$f(x_0)+\Delta x$

C．$f(x_0)\cdot\Delta x$　　D．$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

3．已知函数 $f(x)=2x^2-1$ 的图象上一点(1，1)及邻近一点$(1+\Delta x，1+\Delta y)$，则$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$等于(　　)

A．4　　B．$4+2(\Delta x)^2$　　C．$4+2\Delta x$　　D．$4x$

4．已知函数 $f(x)=-x^2+x$ 的图象上的一点$(-1，-2)$及邻近一点$(-1+\Delta x，-2+\Delta y)$，则$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$________，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to$________．

解
$$\begin{aligned}\Delta y&=f(-1+\Delta x)-f(-1)=-(-1+\Delta x)^2+(-1+\Delta x)-(-2)\\&=-(\Delta x)^2+3\Delta x,\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}=-\Delta x+3.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to 3$．

5．已知曲线 $y=2x^3$ 上一点 $A(1，2)$，则点 A 处的切线的斜率为(　　)

A. 6　　　　B. 4　　　　C. $6+\Delta x+2(\Delta x)^2$　　　　D. 2

6. 如果质点 M 按规律 $s=3+t^2$ 运动，则在一小段时间[2，2.1]中相应的平均速度是(　　)

A. 4　　　　B. 4.1　　　　C. 0.41　　　　D. 3

分析　由$\frac{\Delta s}{\Delta t}$即可求出平均速度.

解　$\Delta s=(3+2.1^2)-(3+2^2)=0.41$，$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{0.41}{0.1}=4.1$.

参考答案：1. D.　2. D.　3. C.　4. $-\Delta x+3$，3.　5. A.　6. B.

(二)提高练习

1. 质点 M 做直线运动，位移 s 满足 $s(t)=2t^2+3$，求从 $t=2$ 到 $t=2+\Delta t$ 之间的平均速度，并计算当 $\Delta t=1$，$\Delta t=0.1$，$\Delta t=0.01$ 时的平均速度，最后求 $t=2$ 时的瞬时速度.

分析　先由$\frac{\Delta s}{\Delta t}$求出平均速度，再根据 $\Delta t\to 0$ 时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}\to$瞬时速度，求出 $t=2$ 时的瞬时速度.

解　$\Delta s=2(2+\Delta t)^2+3-(2\times 2^2+3)=2(\Delta t)^2+8\Delta t$，

∴　质点 M 从 $t=2$ 到 $t=2+\Delta t$ 之间的平均速度为 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=2\Delta t+8$.

当 $\Delta t=1$ 时，$\bar{v}=10$；当 $\Delta t=0.1$ 时，$\bar{v}=8.2$；当 $\Delta t=0.01$ 时，$\bar{v}=8.02$.

又 $\Delta t\to 0$ 时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}\to 8$，

∴　质点 M 在 $t=2$ 时的瞬时速度为 $v=8$.

2. 已知函数 $y=f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$，求 y' 及 $y'|_{x=1}$.

分析　函数的导数与函数在点 x_0 处的导数不是同一个概念，在点 x_0 处的导数是函数的导数在 $x=x_0$ 处的函数值.

解　$\because \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+\Delta x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x})}{\sqrt{x+\Delta x}\cdot\sqrt{x}}$，

$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2(x-x-\Delta x)}{\Delta x\sqrt{x+\Delta x}\cdot\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}=\frac{-2}{\sqrt{x+\Delta x}\cdot\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}$.

令　$\Delta x\to 0$，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to -x^{-\frac{3}{2}}$，即 $y'=-x^{-\frac{3}{2}}$，$y'|_{x=1}=-1$.

3. 若曲线 $y=2x^3$ 上某点切线的斜率等于 6，求此点的坐标.

解　设所求切点为$(x_0，y_0)$，$\because\ \frac{2(x_0+\Delta x)^3-2x_0^3}{\Delta x}=2[3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2]$，

当 $\Delta x\to 0$ 时，上式趋于 $6x_0^2$，依题意，$6x_0^2=6$，∴　$x_0=\pm 1$，故所求切点坐标为(1，2)或(−1，−2).

4. 已知函数 $f(x)$及 $f(x)$的导数 $f'(x)$，求$[f(x)+3]^2$ 的导数.

解 $\because \dfrac{[f(x+\Delta x)+3]^2-[f(x)+3]^2}{\Delta x}$

$=\dfrac{[f(x+\Delta x)+3+f(x)+3][f(x+\Delta x)+3-f(x)-3]}{\Delta x}$

$=[f(x+\Delta x)+f(x)+6]\cdot\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$,

令 $\Delta x\to 0$，$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\to f'(x)$，$f(x+\Delta x)+f(x)+6\to 2f(x)+6$.

$\therefore$ $\{[f(x)+3]^2\}'=2[f(x)+3]\cdot f'(x)$.

(三)补充作业

1. 设一物体在 t s 内所经过的路程为 s m，并且 $s=4t^2+2t-3$，试求物体分别在运动开始及第 5 s 末时的速度.

解 (1)物体在运动开始时的速度为 2 m/s.

(2)物体在运动第 5 s 末时的速度为 42 m/s.

2. 已知抛物线 $y=x^2+4$ 与直线 $y=x+10$，求:(1)两曲线的交点；(2)抛物线在交点处的切线方程.

解 (1)由$\begin{cases}y=x^2+4,\\y=x+10\end{cases}$得交点 $A(-2,8)$及 $B(3,13)$.

(2)抛物线在点 A 处切线方程为 $4x+y=0$；在点 B 处切线方程为 $6x-y-5=0$.

3.2　导数的运算

3.2.1　几个幂函数的导数

教材线索

本课首先从科学研究和工程技术的需要出发，通过一系列具体事例说明函数导数计算的作用，从而引发学生对学习导数的计算方法和有关运算公式的兴趣，继而根据函数导数的定义推导出几个简单函数的导数.

教学目标

（一）知识与技能

了解函数导数运算的作用，理解并熟记课内推导出的几个幂函数导数公式并能运用公式求导.

（二）过程与方法

学习过程中逐步掌握的“由特殊到一般，再由一般到特殊”的研究数学的思想方法.通过学习，能够鉴赏公式所蕴含的数学美.

（三）情感、态度与价值观

构建和谐平等的教学情境，尽可能让学生动脑、动手、动口，去发现、去猜想、去推导，激发不同层面学生的学习积极性.

教材分析

1. 重点：

本节的重点是牢固、准确地记住几种常见幂函数的导数，为求导数打下坚实的基础.

2. 难点：

灵活运用公式求导.

3. 关于几个幂函数导数公式.

（1）$y=c$（c 为常数）的导数.

常数函数的导数为零的几何意义是曲线 $f(x)=c$（c 为常数）在任意点处的切线平行于 x 轴.

(2) $y=x^2$ 的导数公式的推导.

证明 $y=f(x)=x^2$, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x,$$

$\Delta x\to 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 2x$, $\therefore$ $y'=2x$.

4. "曲线上点 P 处的切线"与"过点 P 的曲线的切线"的区别.

在点 P 处的切线，点 P 必为切点；过点 P 的切线，点 P 未必为切点.

教学建议

1. 函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$的导数可以在对学生进行一定的启发后再由学生自行导出结果.

2. 本节难度的把握：

对教材中所涉及的几个幂函数的导数公式的推导，都是从导数的定义入手，按照定义求导数的基本方法得到，教学时，要求学生在理解公式推导思想的基础上，熟练掌握这些公式的结构变化规律. 在难度把握上，本节只要求学生掌握 x，x^2，x^3，$\frac{1}{x}$这几个幂函数的导数，不要盲目推广，造成不必要的混乱.

例题解析

例 1 立方体的棱长 x 变化时，求其体积关于 x 的变化率是立方体表面积的多少倍.

分析 立方体的体积是关于棱长 x 的函数 $V=x^3$，其关于 x 的变化率即 V 关于 x 的导数.

例 2 写出过点 $A(-4,2)$并且和曲线 $xy-1=0$ 相切的两条直线的方程.

分析 解决本题的关键一步是审题："过点 A 的曲线的切线"意味着点 A 有可能是曲线的切点也有可能不是. 因此解题时第一步是判断点 A 与曲线的位置关系. 经过判断，发现点 A 不在已知曲线上，设切点为 $Q(u,v)$，为求出曲线在点 Q 处的切线的斜率，先将曲线方程改写成 y 关于 x 的函数的形式，最后利用曲线在点 Q 处的切线即过点 A，Q 两点的直线以及点 Q 为曲线上的点，联立方程组获解.

相关链接

1. 求曲线 $y=\frac{1}{x}$的斜率等于-4 的切线的方程.

分析 本题的关键在于求出切点坐标，可利用待定系数法，由求导公式求得过切点的切线斜率，进而求得切点坐标.

解 设 (x_0, y_0) 是所求切线的切点，

$\because\ \ y'=-\frac{1}{x^2}$，$\therefore\ \ -\frac{1}{x_0^2}=-4$，$x_0=\pm\frac{1}{2}$.

当 $x_0=\frac{1}{2}$时，$y_0=2$，所求切线方程为 $y-2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即 $4x+y-4=0$.

当 $x_0=-\frac{1}{2}$时，$y_0=-2$，所求切线方程为 $y+2=-4\left(x+\frac{1}{2}\right)$，即 $4x+y+4=0$.

2. 某汽车启动时的位移函数为 $s(t)=2t^3-5t^2$，求 $t=2$ 时，汽车的加速度.

分析 先求位移函数的导数得速度函数，再求速度函数在 $t=2$ 时的导数，即为该时刻的加速度的值.

解 $s'(t)=6t^2-10t$，$s''(t)=12t-10$，$a=s''(2)=14$.

3.2.2 一些初等函数的导数表

教材线索

本课首先给出了一些基本的初等函数导数公式表以解决常见的一些函数的求导问题. 对于公式的证明，教材中并不作要求，而是着重于运用公式解决相关问题，因此结合公式表给出了两个例题.

教学目标

（一）知识与技能

掌握基本初等函数的导数公式的特征，并能熟记基本初等函数的导数公式表.

（二）过程与方法

构建和谐平等的教学情境，尽可能让学生自己动脑、动手、动口，去发现、去猜想、去推导公式，激发不同层面学生的学习积极性. 通过学习，能灵活运用常见的导数公式，求简单初等函数的导数.

（三）情感、态度与价值观

在解题训练中，一方面训练了学生观察应变的逻辑思维能力，另一方面培养了学生实事求是的科学态度，进一步加强对学生辩证唯物主义观念的培养.

教材分析

1. 重点：

熟练掌握基本初等函数的导数公式的结构变化规律，并能运用公式求简单初等函数的导数.

2. 难点：

创设条件，灵活运用基本导数公式，掌握运算、化简的基本方法，提高变换能力.

3. 关于公式$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}(\alpha\neq 0)$的证明.

这个公式的证明比较复杂，这里只对$\alpha\in\mathbf{N}_+$的情况加以证明，实际上这个公式对于$\alpha\in\mathbf{R}$都成立.

证明 $y=f(x)=x^{\alpha}$，

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}\\&=[x^{\alpha}+C_{\alpha}^{1}x^{\alpha-1}\Delta x+C_{\alpha}^{2}x^{\alpha-2}(\Delta x)^2+\cdots+C_{\alpha}^{\alpha}(\Delta x)^{\alpha}]-x^{\alpha}\\&=C_{\alpha}^{1}x^{\alpha-1}\Delta x+C_{\alpha}^{2}x^{\alpha-2}(\Delta x)^2+\cdots+C_{\alpha}^{\alpha}(\Delta x)^{\alpha},\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=C_{\alpha}^{1}x^{\alpha-1}+C_{\alpha}^{2}x^{\alpha-2}(\Delta x)+\cdots+C_{\alpha}^{\alpha}(\Delta x)^{\alpha-1}.$$

$$\Delta x\to 0,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}\to C_{\alpha}^{1}x^{\alpha-1}.$$

$$\therefore\quad y'=f'(x)=(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

4. 关于公式$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}(x>0)$的证明.

证明中用到“$x\to 0$时，$(1+x)^{\frac{1}{x}}\to \mathrm{e}$”.

证明 $y=f(x)=\ln x,\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\dfrac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right).$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

$$\Delta x\to 0,\frac{\Delta x}{x}\to 0,\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\to \mathrm{e},\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\frac{1}{x},$$

$$\therefore\quad (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

5. 用$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}(x>0)$可以证明公式$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq 1,x>0)$.

证明 $(\log_a x)'=\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)'=\dfrac{1}{\ln a}\cdot\dfrac{1}{x}.$

6. 关于公式$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$与$(a^x)'=a^x\ln a$的证明.

证明时需要用到反函数的求导法则，超出目前学习的要求.

7. 关于$(\sin x)'=\cos x$的证明，证明中要用到“$x\to 0$时，$\dfrac{\sin x}{x}\to 1$”.

证明 $y=\sin x$，

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$$

∵ $$\Delta x\to 0\text{ 时},\frac{\Delta x}{2}\to 0,\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\to 1,$$

∴ $$\Delta x\to 0\text{ 时},\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\cos x,\text{即}(\sin x)'=\cos x.$$

8. 关于公式 $(\cos x)'=-\sin x$ 的证明.

证明 $y=\cos x$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$$

∵ $$\Delta x\to 0\text{ 时},\frac{\Delta x}{2}\to 0,\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\to 1,$$

∴ $$\Delta x\to 0\text{ 时},\frac{\Delta y}{\Delta x}\to -\sin x,\text{即}(\cos x)'=-\sin x.$$

9. 关于公式 $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ 的证明.

在下一节学习了导数的运算法则后，这个函数的导数很容易求得，在这里先不作介绍.

教学建议

1. 本节主要是介绍一些初等函数的导数表，对于这些公式的证明，课内不作要求，也没有必要向学生介绍. 我们只要求学生能在熟练掌握这些公式的结构变化规律的基础上，运用公式对简单的初等函数进行求导即可.

2. 对于简单函数的求导，关键是合理转化函数关系式为可直接应用公式的基本函数的模式，在求导过程中要避免出现指数或系数的运算失误. 要求学生从思想上认识到运算的准确是数学能力高低的标志，养成思维严谨的解题习惯.

3. 在学生能够准确运用初等函数的导数表对简单函数进行求导的基础上，重视导数的实际应用问题，利用导数的物理意义及几何意义解题.

例题解析

例 1 用导数公式表计算：

(1) $(\sqrt[3]{x^2})'$； (2) $(\log_2 x)'$； (3) $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$.

分析 本题主要是要求学生能够在熟悉一些基本初等函数导数公式的基础上，灵活运用公式求导，解题的关键是将题中给出的函数合理转化为能够直接使用公式的形式. 如将

$(\sqrt[3]{x^2})'$转化为$(x^{\frac{2}{3}})'$，将$\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$转化为$(\tan x)'$，然后套用公式得出结果.

例 2 曲线 $y=\sin x$ 在哪些点的切线斜率为 1？在哪些点的切线平行于 x 轴？

分析 根据函数导数的几何意义知道，解决本题的关键是先求出曲线在点$(x, \sin x)$处的切线的斜率，即先求出函数 $y=\sin x$ 的导数；而要找出这些切线中与 x 轴平行的，实际上就是要寻求那些斜率为 0 的切线. 本题一方面要求学生对导数公式的熟练记忆，另一方面则要求他们对导数几何意义有较深的理解.

相关链接

1. 如果质点按规律 $s=t^3$ 运动，则在 $t=2$ 的瞬时速度为（　　）

A. 4　　B. 8　　C. 12　　D. 6

分析 根据瞬时速度和导数的定义可知，质点在某时刻的瞬时速度就是运动方程在此时刻的导数，从而可用导数解决此题.

解 ∵ $s'=3t^2$，∴ 质点在 $t=2$ 时的瞬时速度 $v=s'|_{t=2}=12$.

故选 C.

2. 求与曲线 $y=x^3$ 相切且平行于直线 $y=12x-5$ 的直线方程.

解 设所求直线与曲线 $y=x^3$ 相切于点 A（u，v），∵ $y'=3x^2$，依题意有

$\begin{cases}3u^2=12,\\ v=u^3.\end{cases}$解得$\begin{cases}u=2,\\ v=8\end{cases}$或$\begin{cases}u=-2,\\ v=-8.\end{cases}$

故所求直线方程为 $y=12x-16$ 或 $y=12x+16$.

3. 求过点 A（3，5）且与抛物线 $y=x^2$ 相切的直线方程.

分析 本题的关键是求切线斜率 k，又 k 是由切点坐标决定的，将导数的几何意义与直线的斜率公式相结合，可求出切点坐标，从而获解.

解 设切点为 P（x_0，y_0），

则 $y_0=x_0^2$.　①

又 $y'=2x$，∴ $y'|_{x=x_0}=2x_0$ 为过点 P 的切线的斜率.

又切线的斜率 $k=\dfrac{y_0-5}{x_0-3}$，

∴ $\dfrac{y_0-5}{x_0-3}=2x_0$.　②

联立①②得$\begin{cases}x_0=1,\\ y_0=1\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=5,\\ y_0=25.\end{cases}$

当 $P(1, 1)$时，$k=2$，切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$.

当 $P(5, 25)$时，$k=10$，切线方程为 $y-25=10(x-5)$，即 $10x-y-25=0$.

注：本题还可以用解析几何的方法，设切线方程为 $y-5=k(x-3)$，与曲线组成方程

组，根据$\begin{cases}k\neq 0,\\ \Delta=0\end{cases}$可求得 k 的值，进而求得切线方程. 但这种方法不具有普遍性，如把 $y=x^2$ 改成 $y=\sqrt{x}$或 $y=x^3$，该法将不适用. 而本例提供的解法具有一般意义.

4. $f(x)=0$ 的导数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 不存在　　D. 不确定

解　选 A.

5. 曲线 $y=x^n$ 在 $x=2$ 处的导数为 12，则 n 等于（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解　选 C.

6. 求下列函数的导数：

（1）$y=x^6$；　（2）$y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$；　（3）$y=\dfrac{1}{x^2}$；　（4）$y=2^x$；　（5）$y=\log_3 x$.

解　（1）$y'=6x^5$；

（2）$y'=(x^{-\frac{3}{4}})'=-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$；

（3）$y'=(x^{-2})'=-2x^{-3}$；

（4）$y'=2^x\ln 2$；

（5）$y'=\dfrac{1}{x\ln 3}$.

3.2.3　导数的运算法则

教材线索

本节从已知导数公式的函数出发，依次推导出和函数、差函数、积函数的求导法则以及函数的除法的求导法则，最后，举例运用法则求导.

教学目标

（一）知识与技能

掌握基本初等函数的和、差、积导数运算法则，能应用函数的和、差、积的导数求较复杂函数的导数.

（二）过程与方法

在推导公式的过程中，重点强调“先化简变形，然后实施求导”的基本思想方法. 通过变式训练，加深学生对商求导法则的理解. 能灵活运用常见的导数公式，求简单初等函

数的导数.

（三）情感、态度与价值观

在解题训练中，一方面训练了学生观察应变的逻辑思维能力，另一方面培养了学生实事求是的科学态度，进一步加强对学生辩证唯物主义观念的培养.

教材分析

1. 重点：

应用函数的和、差、积、商的导数，求复杂函数的导数.

2. 难点：

积求导法则以及商求导法则的理解与应用，特别是由于商求导法则与积求导法则形式上的相近所造成的混淆.

3. 关于公式$[cf(x)]'=cf'(x)$.

这个公式告诉我们，在求导时，可以把函数的常数因子直接提出来. 在很多时候可简化运算.

4. 关于函数的积的求导公式.

在推导函数的积的求导公式时，将式子$\dfrac{f(x+d)g(x+d)-f(x)g(x)}{d}$先做了如下的变形：$f(x+d)\left(\dfrac{g(x+d)-g(x)}{d}\right)+g(x)\left(\dfrac{f(x+d)-f(x)}{d}\right)$，再利用$d$趋于0时，$f(x+d)$趋于$f(x)$，$\dfrac{g(x+d)-g(x)}{d}$趋于$g'(x)$，$\dfrac{f(x+d)-f(x)}{d}$趋于$f'(x)$，从而求得$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

5. 关于函数的商的求导法则.

在推导函数商的求导法则前，首先利用导数定义推导了$F(x)=\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$的导数，继而将它与函数积的导数法则结合，得到两函数商的求导法则. 这样做，降低了难度，有利于学生的理解.

6. 在学习了函数的和、差、积、商的导数法则后，对于常见初等函数的求导，我们都可以直接利用求导法则，结合上节课学习的导数公式直接求导，而无须从导数的定义出发进行求导.

教学建议

本小节建议使用尝试探究、类比联想、变式练习等方法进行教学. 为避免学生由于商求导法则与积求导法则形式上的相近所造成的混淆，建议本节分两个教学课时来完成：第一课时重点是应用函数的和、差、积的导数求导，为了加深对积的求导法则的理解，除讲清推导过程外，重点强调“先化简变形，然后实施求导”的基本思想方法. 而第二课时则

通过变式训练，加深学生对商求导法则的理解.

例题解析

例 1 求曲线 $y=f(x)=2x^3-x^2-3x+1$ 和直线 $x=1$ 交点处切线的斜率 k.

分析 解决本题的关键是要求出函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数，在学习了和函数的导数法则后，很容易求得结果.

例 2 求函数 $f(x)=(2x^2+3)(3x-2)$ 的导数.

分析 要求函数 $f(x)$ 的导数，可以运用多项式乘法公式将 $f(x)$ 展开后，运用和函数求导法则求解，也可以看作 $f_1(x)=2x^2+3$，$f_2(x)=3x-2$ 的积函数，运用积函数导数运算法则即可求解，教学时，可让学生分别尝试不同的方法加以比较，以加深学生对法则的理解.

例 3 用上述法则求 $\dfrac{1}{x}$ 的导数.

分析 ∵ $\dfrac{1}{x}=x^{-1}$，∴ 求 $\dfrac{1}{x}$ 的导数可以用前面所学的幂函数的导数公式，在学习了今天这一课后，还可直接利用 $F(x)=\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$ 的导数法则求解.

例 4 用两函数之商的求导法则计算 $y=\dfrac{x+3}{x^2+3}$ 的导数.

分析 本题要求我们用两函数之商的求导法则计算 $y=\dfrac{x+3}{x^2+3}$ 的导数，在运用法则时要注意与积函数法则形式上的区别.

相关链接

1. 求曲线 $y=2x^3-3x^2+6x-1$ 在 $x=1$ 及 $x=-1$ 处两切线所夹角的正切值.

解 ∵ $y'=6x^2-6x+6$，∴ $y'|_{x=1}=6$，$y'|_{x=-1}=18$. 设已知曲线在 $x=1$ 及 $x=-1$ 处两切线所夹的角为 α，则 $\tan\alpha=\left|\dfrac{18-6}{1+18\times 6}\right|=\dfrac{12}{109}$.

2. 在受到制动后的 t s 内，飞轮转过的角度（单位：rad）由函数 $y(t)=4t-0.3t^2$ 给出，求：(1) $t=2$ 时飞轮转过的角度；(2) $t=2$ 时飞轮转过的角速度；(3) 飞轮停止旋转的时刻.

解 (1) $y(2)=4\times 2-0.3\times 2^2=6.8$ (rad)；

(2) $y'|_{t=2}=(4-0.6t)|_{t=2}=4-1.2=2.8$ (rad/s)；

(3) ∵ $y'=4-0.6t$，停止转动是指运动速度为 0，故令 $4-0.6t=0$，解得 $t=\dfrac{20}{3}$，即飞轮在受到制动后 $\dfrac{20}{3}$ s 时停止转动.

3. 设函数 $f(x)=ax^3+3x^2+2$，若 $f'(-1)=4$，则 a 的值为____________.

解 ∵ $f'(-1)=f'(x)|_{x=-1}=(3ax^2+6x)|_{x=-1}=3a-6=4$，∴ $a=\frac{10}{3}$.

4. 曲线 $y=x^2(x^2-1)^2+1$ 在点（-1，1）的切线方程为________________.

解 ∵ $y=x^2(x^4-2x^2+1)+1=x^6-2x^4+x^2+1$，∴ $y'=6x^5-8x^3+2x$，

∴ $y'|_{x=-1}=0$，故所求切线方程为 $y=1$.

3.3 导数在研究函数中的应用

3.3.1 利用导数研究函数的单调性

教材线索

本小节首先回顾以往学习的判断函数单调性的方法（例如差分法），在此基础上引出导数的方法，即引导学生观察教材图 3-13 中函数 $y=f(x)$和它的导函数 $y=f'(x)$的图象，探索函数的增减和它的导函数的正负之间的联系，再通过观察更多的图象，从直观上归纳出用导数的正负判断函数增减性的法则. 最后，通过例 1 直接应用导数来研究二次函数的增减性；设置例 2 突出从导数的角度来解释函数增减快慢的情况；设置例 3 强调应用导数求函数单调区间的格式.

教学目标

（一）知识与技能

理解利用导数判断函数的单调性的原理；掌握用导数的正负判断函数单调性的方法；能利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的单调区间.

（二）过程与方法

结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系；通过初等方法与导数方法在研究函数性质过程中的比较，体会导数方法在研究函数性质中的一般性和有效性.

（三）情感、态度与价值观

能用普遍联系的观点看待事物，抓住引起事务变化的主要因素，同时感受和体会数学自身发展的一般规律.

教材分析

1. 重点：

利用导数判断函数单调性.

2. 难点：

利用导数判断函数单调性.

3. 教学要点：

本节从函数图象出发给出了用导数的正负判别函数单调性的方法. 教材的图 3-13 中画出了一个函数 $y=f(x)$ 和它的导函数 $y=f'(x)$ 的图象，导函数 $y=f'(x)$ 是二次函数，设它与 x 轴的交点为 $M(x_1, 0)$，$N(x_2, 0)$，观察图象，当 $x\in(-\infty, x_1)$ 或 $x\in(x_2, +\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $y=f(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_1, x_2)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $y=f(x)$ 单调递减. 再让学生观察更多的图象，总结归纳出利用导数判断函数单调性的法则.

(1) 学生在高一学习函数时，已经知道了增函数、减函数和单调函数的意义，并且会用增函数、减函数的定义判断或证明函数在给定区间的单调性. 在教学中可结合判断或证明函数增减性的实例引导学生对新旧方法进行比较，从中感悟用导数的正负判别函数增减性要比高一时所学的方法简洁得多，从而提高学生对导数学习意义的认识.

(2) 函数增减性判别法的证明要用到中值定理，中值定理不属于高中数学的学习范围，故教材略去了函数增减性判别法理论推导内容，虽然暂时不能证明，我们还是可以从直观上理解这个规律.

教学建议

1. 利用导数的正负判断函数的单调性，是导数几何意义在研究曲线变化规律时的一个重要应用，它充分体现了数形结合的基本思想. 因此必须重视对数学思想、方法进行归纳提炼，提高应用数学思想、方法解决问题的熟练程度，达到优化解题思路、简化解题过程的目的.

2. 在利用导数讨论函数的单调区间时，首先要确定函数的定义域，其次在解决问题的过程中，需在函数的定义域内通过讨论导数的正负，以判断函数的单调区间. 当给定函数含有字母参数时，应注意分类讨论的准确性.

3. 在对函数划分单调区间时，除了必须确定使导数等于零的点外，还要注意在定义区间内的不连续点和不可导点.

4. 注意在某一区间内 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$)是函数 $f(x)$ 在该区间上为增（或减）函数的充分条件.

5. 准确运用求导公式，对函数进行求导，准确、熟练地计算是求函数单调区间必备的基本功.

例题解析

例 1 用导数研究二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$(a，b，c 为常数，$a\neq 0$)的增减性.

分析 二次函数的导数是一次函数，导函数 $f'(x)$ 的符号由它的一次项系数的符号决定. 判断函数的增减性可以用定义法或导数法，比较这两种方法，容易看出，导数法判断函数的单调性，其使用范围更广，解答过程更简洁.

例 2 如图 3-9，圆 C 和直角 AOB 的两边相切，直线 OP 从 OA 处开始，绕点 O 匀速旋转（到 OB 处为止）时，所扫过的圆内阴影部分的面积 S 是时间 t 的函数，它的图象大致

为如图 3-10 中的（　　）.

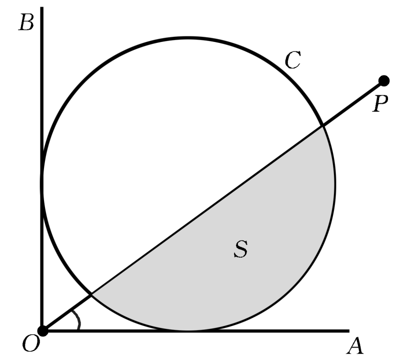


图 3-9

分析　当直线转动时，若某时刻直线被圆所截得的弦较长，S 的瞬时变化率就较大，此处的导数就较大，图象中这里的切线就较陡，曲线就较陡．由于是匀速旋转，阴影部分面积 S 开始和最后时段缓慢增加，中间时段 S 增速快．图 A 表示 S 的增速是常数，与实际不符，A 应否定；图 B 表示最后时段 S 增速快，也与实际不符，B 也应否定；图 C 表示开始时段增速和最后时段 S 增速比中间时段快，也应否定；图 D 表示开始和结束时段，S 增速慢，中间时段增速快，应选 (D).

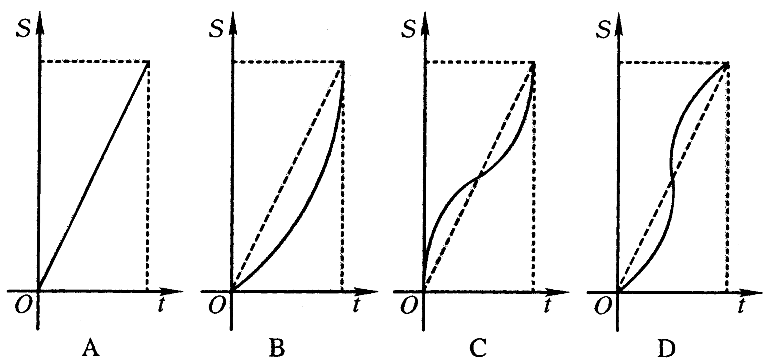


图 3-10

例 3　求函数 $y=x^3-2x^2+x-1$ 的单调区间.

分析　由于导数的正负对应着函数的增减，求出函数导数后借助不等式的知识即可确定单调区间．注意单调区间不能写成并集的形式.

相关链接

科学巨人牛顿

牛顿（Isaac Newton，1642 — 1727）是英国伟大的物理学家、数学家、天文学家．恩格斯说："牛顿由于发现了万有引力定律而创立了天文学，由于进行光的分解而创立了科学的光学，由于创立了二项式定理和无限理论而创立了科学的数学，由于认识了力学的本性而创立了科学的力学."的确，牛顿在自然科学领域里做出了奠基性的贡献，堪称科学巨匠.

在牛顿的全部科学贡献中，数学成就占有突出的地位．笛卡儿的解析几何把描述运动的函数关系和几何曲线相对应．牛顿在老师巴罗的指导下，在钻研笛卡儿的解析几何的基

础上，找到了新的出路. 可以把任意时刻的速度看成是在微小的时间范围里的速度的平均值，这就是一个微小的路程和时间间隔的比值，当这个微小的时间间隔缩小到无穷小的时候，就是这一点的准确值. 这就是微分的概念.

求微分相当于求时间和路程关系的曲线在某点的切线斜率. 一个变速的运动物体在一定时间范围里走过的路程，可以看作是在微小时间间隔里所走路程的和，这就是积分的概念. 求积分相当于求时间和速度关系的曲线下面的面积. 牛顿从这些基本概念出发，建立了微积分.

微积分的创立是牛顿最卓越的数学成就. 牛顿为解决运动问题，才创立这种和物理概念直接联系的数学理论，牛顿称之为“流数术”. 它所处理的一些具体问题，如切线问题、求积问题、瞬时速度问题以及函数的极大和极小值问题等，在牛顿前已经得到人们的研究了. 但牛顿超越了前人，他站在了更高的角度，对以往分散的努力加以综合，将自古希腊以来求解无限小问题的各种技巧统一为两类普通的算法——微分和积分，并确立了这两类运算的互逆关系，从而完成了微积分发明中最关键的一步，为近代科学发展提供了最有效的工具，开辟了数学上的一个新纪元.

3.3.2　函数的极大值和极小值

教材线索

教材结合图 3－22 给出极大值、极小值、极值、极值点等概念，并强调极值是函数在一个适当区间内的局部性质. 在此基础上提出如何求一个函数的极值，引导学生观察图 3－22，发现函数在某区间内的增减性（单调性）与极值的关系，而导数的正负可以判断函数的增减，这为利用导数寻找函数的极值打下基础. 接下来通过观察图象发现函数的极值点都是导数的零点，为了验证这一结论，设置探究实验通过正反两个方面来归纳总结寻找可导函数极值的方法，最后通过例 1 和例 2 学习和掌握这一方法.

教学目标

（一）知识与技能

结合函数的图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件. 掌握利用导数判别可导函数极值的方法.

（二）过程与方法

体验导数知识和数学方法的作用，会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值、极小值.

（三）情感、态度与价值观

逐步形成科学地分析问题和解决问题的能力.

教材分析

1. 重点：

利用导数判别可导函数极值的方法.

2. 难点：

对可导函数的极值点的必要条件和充分条件的理解.

3. 教学要点：

教材直接给出极值概念，应注意，极值与最值不同，极值只是对一点附近而言，是局部最值，而最值是对整个区间或是对所考察问题的整体而言.

（1）观察教材图 3-13，图 3-15 到 3-17 的函数图象，可以发现可导函数的极值点是导数的零点，按照教材图 3-24 所示进行探究活动，可以看到在函数取得极值处，如果曲线有切线的话，则切线是水平的，从而有 $f'(x)=0$. 但反过来不一定. 如函数 $y=x^3$，在 $x=0$ 处，曲线的切线是水平的，但这点的函数值既不比它附近的点的函数值大，也不比它附近的点的函数值小，可见导数的零点可能不是函数的极值点，也就是说，若 $f'(x_0)$存在，$f'(x_0)=0$ 是$f(x)$在 $x=x_0$ 处取到极值的必要不充分条件. 假设 x_0 使 $f'(x_0)=0$，那么 x_0 在什么情况下是 $f(x)$的极值点呢?

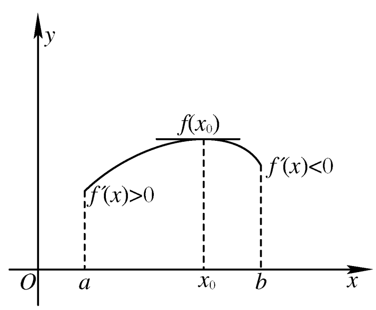


图 3-11

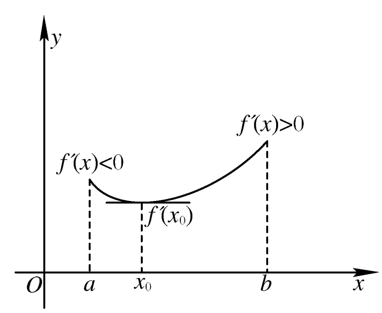


图 3-12

如图 3-11 所示，若 x_0 是 $f(x)$的极大值点，则 x_0 两侧附近点的函数值必须小于 $f(x_0)$. 因此，x_0 的左侧附近$f(x)$只能是增函数，即$f'(x)>0$；x_0 的右侧附近 $f(x)$只能是减函数，即 $f'(x)<0$. 同理，如图 3-12 所示，若 x_0 是极小值点，则在 x_0 的左侧附近$f(x)$只能是减函数，即 $f'(x)<0$；在 x_0 的右侧附近 $f(x)$只能是增函数，即$f'(x)>0$. 从而我们得出结论：若x_0 满足 $f'(x_0)=0$，且在 x_0 的两侧 $f(x)$的导数异号，则 x_0 是 $f(x)$的极值点，$f(x_0)$是极值，并且如果 $f'(x)$在 x_0 两侧满足“左正右负”，则 x_0 是 $f(x)$的极大值点，$f(x_0)$是极大值；如果 $f'(x)$在 x_0 两侧满足“左负右正”，则 x_0 是 $f(x)$的极小值点，$f(x_0)$是极小值. 可见，可导函数 $f(x)$在点 x_0 取得极值的充分必要条件是 $f'(x_0)=0$，且在 x_0

左侧与右侧，$f'(x)$的符号不同.

（2）求函数 $y=f(x)$在区间$[a, b]$的最大（小）值步骤如下：

①求 $f(x)$在开区间(a, b)内所有使 $f'(x)=0$ 的点；

②计算函数 $f(x)$在区间内使 $f'(x)=0$ 的所有点和端点的函数值，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值.

教学建议

1. 可联系函数的单调性引入极值的相关内容，强调极值是函数的局部性质，是函数在某点处的值与其附近“左、右”函数值比较的结果. 通过几何图形直观得到极大（小）值与导数的关系.

2. 教学中应结合函数图象，了解函数在某点处取极值的必要条件与充分条件.

3. 在教学时要注意以下几点：

（1）极值是一个局部概念. 由定义，极值只是某个点的函数值与它附近点的函数值比较是最大或最小，并不意味着它在函数的整个定义域内最大或最小.

（2）函数的极值不是唯一的. 即一个函数在某区间上或定义域内的极大值或极小值可以不止一个.

（3）函数的极值点一定出现在区间的内部，区间的端点不能成为极值点. 而使函数取得最大值、最小值的点可能在区间的内部，也可能在区间的端点.

（4）闭区间上的函数如果它的图象是一条连续不断的曲线，则一定有最值，开区间内的可导函数不一定有最值.

4. 求函数极值常按如下步骤进行：

（1）确定函数的定义域；

（2）求导数；

（3）求方程 $y'=0$ 的根，这些根称为函数 $f(x)$ 的驻点；

（4）检查在方程的根的左右两侧的符号，确定极值点（最好通过列表法）.

例题解析

例 1 求函数 $f(x)=x+\sin x$ 的驻点和极值点.

分析 求得 $f'(x)=1+\cos x$，方程 $1+\cos x=0$ 的解集就是 $f(x)$驻点的集合：$\{x=(2k+1)\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}$，由于 $f'(x)=1+\cos x\geqslant 0$，$f'(x)$在驻点左右的符号均为正，所以函数 $f(x)$没有极值.

例 2 求函数 $g(x)=x^2(3-x)$的极大值和极小值.

分析 求出 $g'(x)=6x-3x^2$，驻点为 $x=0$ 和 $x=2$. 通过列表法，可以清晰地展示区间上导数的正负与函数增减的关系，从而明确极大（小）值点.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	$-$		$+$		$-$
$g(x)$	↘	极小值 0	↗	极大值 4	↘

故函数 $g(x)$ 的极小值为 $g(0)=0$，极大值为 $g(2)=4$.

本例是研究可导函数极值的范例，需要教师重点讲解步骤，要求学生切实掌握方法.

相关链接

多才多艺的莱布尼茨

17 世纪下半叶，欧洲科学技术迅猛发展，由于生产力的提高和社会各方面的迫切需要，经各国科学家的努力与历史的积累，建立在函数与极限概念基础上的微积分理论应运而生了.

微积分思想，最早可以追溯到古希腊，由阿基米德等人提出的计算面积和体积的方法. 1665 年牛顿创立了微积分，莱布尼茨在 1673—1676 年间也发表了微积分思想的论著.

以前，微分和积分作为两种数学运算、两类数学问题，是分别加以研究的. 卡瓦列里、巴罗、沃利斯等人得到了一系列求面积（积分）、求切线斜率（导数）的重要结果，但这些结果都是孤立的，不连贯的.

只有莱布尼茨和牛顿将积分和微分真正沟通起来，明确地找到了两者内在的直接联系：微分和积分是互逆的两种运算. 而这是微积分建立的关键所在. 只有确立了这一基本关系，才能在此基础上构建系统的微积分学，并从对各种函数的微分和积分公式中，总结出共同的算法程序，使微积分方法普遍化，发展成用符号表示的微积分运算法则. 因此，微积分是牛顿和莱布尼茨大体上完成的.

然而关于微积分创立的优先权，在数学史上曾掀起了一场激烈的争论. 实际上，牛顿在微积分方面的研究虽早于莱布尼茨，但莱布尼茨成果的发表则早于牛顿.

莱布尼茨 1684 年 10 月在《教师学报》上发表的论文《一种求极大极小的奇妙类型的计算》，是最早的微积分文献. 这篇仅有六页纸的论文，内容并不丰富，说理也颇含糊，但却有着划时代的意义.

牛顿在三年后，即 1687 年出版的《自然哲学的数学原理》的第一版和第二版也写道："十年前在我和最杰出的几何学家莱布尼茨的通信中，我表明我已经知道确定极大值和极小值的方法、作切线的方法以及类似的方法，但我在交换的信件中隐瞒了这方法……这位最卓越的科学家在回信中写道，他也发现了一种同样的方法. 他并讲述了他的方法，他与我的方法几乎没有什么不同，除了他的措词和符号而外."（但在第三版及以后再版时，这段话被删掉了）

因此，后来人们公认牛顿和莱布尼茨各自独立地创建了微积分.

牛顿从物理学出发，运用集合方法研究微积分，其应用上更多地结合了运动学，造诣高于莱布尼茨. 莱布尼茨则从几何问题出发，运用分析学方法引进微积分概念、得出运算法则，其数学的严密性与系统性是牛顿所不及的.

莱布尼茨认识到好的数学符号能节省思维劳动，运用符号的技巧是数学成功的关键之一. 因此，他所创设的微积分符号远远优于牛顿的符号，这对微积分的发展有极大影响. 1713 年，莱布尼茨发表了《微积分的历史和起源》一文，总结了自己创立微积分学的思路，说明了自己成就的独立性.

3.3.3 三次函数的性质：单调区间和极值

教材线索

在研究二次函数性质时，用导数方法最为简便快捷. 一般三次函数问题，往往可通过求导，转化为二次函数或二次方程问题，然后结合导数的基本知识及二次函数的性质来解决. 对于三次函数 $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，教材根据函数 $F'(x)$ 零点的个数分三种情形来讨论三次函数的单调性与极值，并通过例 1 来巩固和掌握. 最后讨论可导函数（指三次）在闭区间 $[a, b]$ 上最值的求法，并以例 2 来巩固.

教学目标

（一）知识与技能

知道三次函数的导函数是二次函数. 通过对导函数分类讨论，研究三次函数的单调区间和极值；会求三次函数在闭区间上的最大值和最小值.

（二）过程与方法

使学生体会导数是解决三次函数问题的有力工具，在应用导数解决各种问题的过程中体现导数的思想方法，强调“如何用”导数.

（三）情感、态度与价值观

引导学生进行自主探究，让学生经历观察、猜想、推理等过程.

教材分析

1. 重点：

求三次函数的单调区间和极值，以及在闭区间上的最值.

2. 难点：

求三次函数在指定闭区间上的最值.

3. 教学要点：

（1）三次函数的导数是二次函数，用导数方法可以彻底了解三次函数的增减变化情况和极值情况.

（2）对于三次函数 $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$，则 $F'(x)=3ax^2+2bx+c$，方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=4(b^2-3ac)$.

情形 1 当 $\Delta<0$ 时，方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 无实根，所以函数 $F'(x)$ 没有零点.

若 $a>0$，则 $F'(x)>0$ 恒成立，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递增，$F(x)$ 不存在极大值和极小值.

若 $a<0$，则 $F'(x)<0$ 恒成立，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递减，$F(x)$ 不存在极大值和极小值.

情形 2 当 $\Delta=0$ 时，方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 有两相等实根，所以函数 $F'(x)$ 有一个零点 $x=x_0$.

当 $a>0$，则 $F'(x)\geqslant0$ 恒成立（$F'(x_0)=0$），所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递增，$F(x)$ 不存在极大值和极小值.（$F(x)$ 的图象如图 3-13 所示）

当 $a<0$，则 $F'(x)\leqslant0$ 恒成立（$F'(x_0)=0$），所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递减，$F(x)$ 不存在极大值和极小值.（$F(x)$ 的图象如图 3-14 所示）

$a>0$，$\Delta=0$ 时 $F(x)$ 的图象

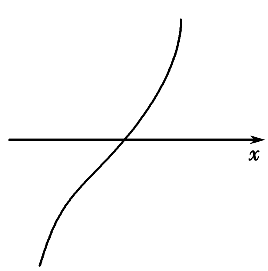


图 3-13

$a<0$，$\Delta=0$ 时 $F(x)$ 的图象

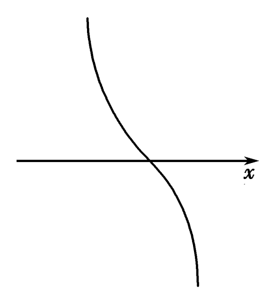


图 3-14

情形 3 当 $\Delta>0$ 时，方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 有两相异实根 x_1，x_2，且设 $x_1<x_2$，函数 $F'(x)$ 有两个零点 x_1，x_2.

若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ 时 $F'(x)>0$，当 $x\in(x_1,x_2)$ 时 $F'(x)<0$. 所以函数 $F(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$，单调递减区间是 (x_1,x_2). 函数 $F(x)$ 有极大值 $F(x_1)$，极小值 $F(x_2)$.（$F(x)$ 的图象如下页图 3-15 所示）

若 $a<0$，则当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$F'(x)>0$，当 $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$. 所以函数 $F(x)$ 单调递减区间是 $(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$，单调递增区间是 (x_1,x_2). 函数 $F(x)$ 有极大值 $F(x_2)$，极小值 $F(x_1)$.（$F(x)$ 的图象如下页图 3-16 所示）

三次函数 $F(x)$ 有极值 $\Leftrightarrow$ 导函数 $F'(x)$ 的判别式 $\Delta>0$.

（3）求三次函数在闭区间上的最值，关键是要区分极值与最值的联系与区别，特别是

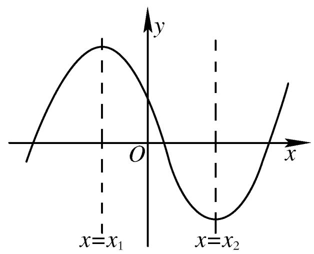


图 3-15

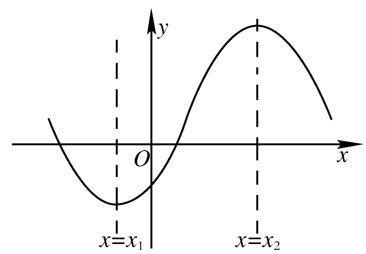


图 3-16

要统筹考察极点值与区间端点函数值的大小，最后确定函数最值.

教学建议

1. 可通过对一次函数、二次函数的图象和性质的回顾，引导学生对三次函数的图象和性质开展探究活动，利用超级画板等工具，开展合作学习、小组交流等活动，探讨三次函数 $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 图象的形状，单调区间以及是否存在极值等问题，利用超级画板输入几个不同三次函数进行验证. 在实践的基础上归纳总结三次函数的图象形状及性质.

2. 如何求三次函数的单调区间和极值是本节课的一个重点，可回忆在探讨二次函数性质时，我们曾用过配方法、差分法和导数法，其中导数法最为简便快捷. 通过求导可以研究三次函数的单调性和极值，其操作的步骤易掌握，判别的方法也不难. 导函数 $F'(x)=3ax^2+2bx+c$，方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=4(b^2-3ac)$，三次函数的图象可归纳如下，如图 3-17.

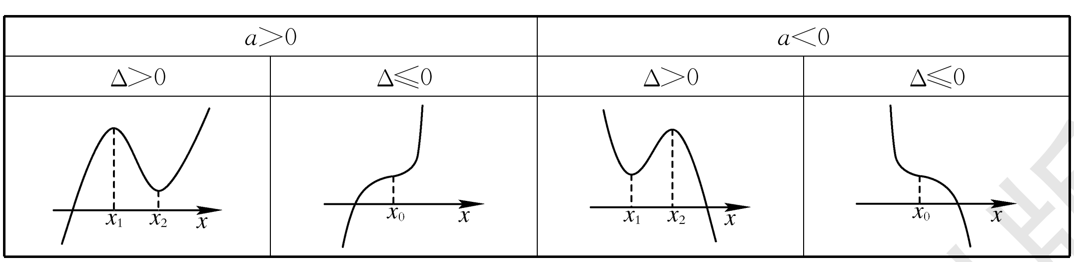


图 3-17

对三次函数的单调性、有没有极值可由 a 及 Δ 的符号进行判断.

3. 如何求三次函数在闭区间上的最值是本节课的一个难点，可结合教材图 3－29 来归纳总结求函数最值的方法，最后通过例 2 掌握解法.

例题解析

例 1 指出下列函数的单调区间和极值点.

(1) $f(x)=x^3-2x^2+2x-7$；

(2) $g(x)=-3x^3+6x^2-4x+5$；

(3) $u(x)=x^3-12x+8$;

(4) $h(x)=-37+36x-3x^2-2x^3$.

分析 求三次函数的单调区间和极值点的问题，运用本节课总结出的方法和结论求解.

例 2 求函数 $F(x)=2x^3+3x^2-12x+5$ 在$[-3,2]$上的最大值和最小值.

分析 求三次函数在闭区间上的最值问题，必须比较极大（小）值与端点处的函数值的大小，其较大（小）者即为闭区间$[-3, 2]$上的最大（小）值. 学生易把极值误为最值.

本题中 $F'(x)$有两个零点：$x_1=-2$，$x_2=1$，结合图象可以看出 $F(x)$在 x_1 处取到极大值 $F(x_1)=25$，在 x_2 处取到极小值 $F(x_2)=-2$，又 $F(-3)=14$，$F(2)=9$，比较可知 $F(x)$在$[-3,2]$上的最大值是 $F(-2)=25$，最小值是$F(1)=-2$.

相关链接

设 a 为实数，函数 $f(x)=x^3-x^2-x+a$.

(1) 求 $f(x)$的极值;

(2) 当 a 在什么范围内取值时，曲线 $y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点.

注:本小题主要考查导数的概念和计算,应用导数研究函数性质的方法及推理和运算能力.

解 (1) 若 $f'(x)=0$，则 $x=-\dfrac{1}{3}$或 1.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表.

x	$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$	$-\dfrac{1}{3}$	$\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的极大值是 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{27}+a$，极小值是 $f(1)=a-1$.

(2) 函数 $f(x)=x^3-x^2-x+a=(x-1)^2(x+1)+a-1$.

由此可知 x 取足够大的正数时，有 $f(x)>0$;x 取足够小的负数时,有 $f(x)<0$.

所以曲线 $y=f(x)$与 x 轴至少有一个交点.

结合 $f(x)$的单调性可知：

当 $f(x)$的极大值$\dfrac{5}{27}+a<0$，即 $a\in\left(-\infty,-\dfrac{5}{27}\right)$时，它的极小值也小于 0，因此曲线 $y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点,它在$(1,+\infty)$上;

当 $f(x)$的极小值 $a-1>0$,即 $a\in(1,+\infty)$时,它的极大值也大于 0,因此曲线$y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点,它在$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$上.

所以当 $a\in\left(-\infty, -\dfrac{5}{27}\right)\cup(1,+\infty)$时，曲线 $y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点.

3.4 生活中的优化问题举例

教材线索

本节选择了许多与生活实际密切相关的、现实世界中比较常见的素材，例如教材 P. 128～P. 132 的例 1 至例 5，通过这些素材来引发学生应用数学知识和方法解决实际问题的兴趣，体会导数在解决生活中的问题(例如，使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题)的作用.

教学目标

(一)知识与技能

了解导数在解决实际问题中的作用，能利用导数及数学建模的方法解决简单问题.

(二)过程与方法

通过实际问题的研究，促进学生分析问题、解决问题以及数学建模能力的提高.

(三)情感、态度与价值观

通过对有关使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题的研究，促进学生全面认识数学的科学价值、应用价值和文化价值.

教材分析

1. 重点：

数学建模的步骤与方法.

2. 难点：

数学建模的步骤与方法.

3. 在经济生活中，人们经常遇到最优化问题. 例如，为使经营利润最大、生产效率最高，或为使用力最省、用料最少、消耗最省等等，需要寻求相应的最佳方案或最佳策略，这些都是最优化问题. 导数是解决这类问题的基本方法之一.

4. 导数在解决实际生活中的有关最大(小)值问题，一般应先建立目标函数，建立好目标函数后，则问题转化为“导数在函数中的应用”的内容，解题时应注意实际意义.

5. 解决优化问题的基本思路是：

优化问题 → 用函数表示的数学问题

用函数表示的数学问题 → 用导数解决数学问题

用导数解决数学问题 → 优化问题的答案

优化问题 ⇢ 优化问题的答案

教学建议

1. 解决实际应用问题关键在于建立数学模型和目标函数. 把“问题情景”译为数学语言，找出问题的主要关系，并把问题的主要关系近似化、形式化，抽象成数学问题，再化归为常规问题，选择合适的数学方法求解.

2. 优化问题解决的途径之一是通过收集大量的统计数据，将这些数据以散点的形式在坐标中表示出来，从散点图上直观发现变量之间具有一定的相关关系，进而用函数模型近似刻画这些散点的相关关系，用确定的函数关系近似反映两个变量间的相关关系，用样本估计总体，对总体的变化趋势进行判断和预测，这是科学研究常用的方法之一，在教学中应引起重视.

3. 本小节“生活中的优化问题举例”实际上是求实际问题中的最大(小)值，结合教材中的五个例子，其主要步骤如下：(1)列出实际问题的数学模型，写出实际问题中变量之间的函数关系 $y=f(x)$；(2) 求函数的导数 $f'(x)$，解方程 $f'(x)=0$；(3) 比较函数在区间端点和使 $f'(x)=0$ 的点的取值大小，最大（小）者为最大（小）值.

例题解析

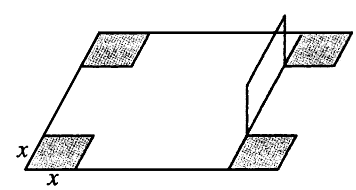


图 3-18

例 1 有一边长为 a 的正方形铁片，铁片的四角截去四个边长为 x 的小正方形，然后做成一个无盖方盒

(1) 试把方盒的容积 V 表示成 x 的函数；(2) 求 x 多大时，做成方盒的容积 V 最大.

分析 如图 3-18，方盒的高就是截去的小正方形的边长，方盒底面是边长为 $a-2x$ 的正方形，方盒的容积 V 就是底面积乘以高. 要做成一个无盖方盒，方盒的高 x 必须满足 $0<x<\frac{a}{2}$，函数 $V'(x)$在区间$\left(0,\frac{a}{2}\right)$只有一个零点. 在实际问题中，有时会遇到函数在区间内只有一个点使 $f'(x)=0$ 的情形，如果函数在这点有极大（小）值，那么不与端点值比较，也可以知道这就是最大（小）值.

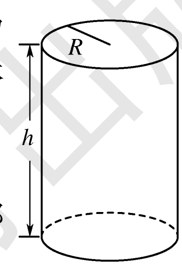


图 3-19

例 2 如图 3-19，某种罐装饮料设计每罐容积为 324 cm^2，罐的形状为圆柱体，圆柱侧面的厚度为 0.05 cm，上下底厚度为 0.1 cm，如何设计罐体才能使原材料用量最少？做一个罐至少用多少立方厘米的原材料？

分析 可作如下引申：

引申 1：某种圆柱形饮料罐的容积一定，且上、下两底的厚度是侧壁部分厚度的 2 倍，当圆柱的高与底面半径之比为何值时，用料最省？

引申 2：圆柱形金属饮料罐的容积一定时，它的高与底半径应怎样选取，才能使所用材料最省？

例 3 让一个木块从光滑斜面的上端自由滑落到下端，给定斜面两端的水平距离为 d，如何选择斜面和水平面之间的角度 x，才能使从上端到下端滑落所用的时间最短？

分析 用到了物理学的有关知识以及力的合成与分解、解直角三角形、应用导数求最值等知识，综合应用的知识较多，还可以应用三角函数公式，将时间 t 化简为 $t=\sqrt{\dfrac{4d}{g\sin 2x}}$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时所用时间最短.

例 4 在经济学中，生产 x 单位产品的成本称为成本函数，记为 $C(x)$，出售 x 单位产品的收益称为收益函数，记为 $R(x)$，$R(x)-C(x)$ 称为利润函数，记为 $L(x)$.

(1) 如果 $C(x)=250\ 000+200x+\dfrac{1}{4}x^2$(元)，那么生产多少单位产品时，平均成本 $\dfrac{C(x)}{x}$ 最小？

(2) 如果 $C(x)=50x+10\ 000$ (元)，产品的出售价格 $P(x)=100-0.01x$(元)，那么出售价格为多少时可使利润最大？

分析 本题是生产经营中生产多少产品使平均成本最小，如何定价，使利润最大的问题. 在问题 (1) 中，知道成本函数 $C(x)=25\ 000+200x+\dfrac{1}{4}x^2$(元)，所以平均成本

$$\frac{C(x)}{x}=\frac{25\ 000+200x+\frac{1}{4}x^2}{x}=\frac{25\ 000}{x}+200+\frac{1}{4}x.$$

令 $y=\dfrac{C(x)}{x}$，由 $y'=0$ 解得 $x=1\ 000$

本题也可以用平均值不等式求解. 问题 (2) 知利润函数 $L(x)=-0.01x^2+50x-10\ 000$，可以利用教材中用 $L'(x)=0$ 求解，也可以利用求二次函数的最值知识，必须确保所取最值点在定义域内.

例 5 江轮逆水上行 300 km，水速为 v km/h. 船在静水中的速度为 x km/h. 已知行船时每小时的耗油量为 cx^2，即与船相对于水的速度的平方成正比. 问 x 多大时，全程的耗油量最小？

分析 是有关耗油量最小的问题，现在我们国家资源紧张，能源短缺，减少能源的消耗是我们必须考虑的一个现实问题，本题素材有现实意义. 本题除了用导数求最小值外，还可以运用均值不等式求解：

$$H(x)=\frac{300cx^2}{x-v}=300c\,\frac{x^2-v^2+v^2}{x-v}$$
$$=300c\left[(x-v)+\frac{v^2}{x-v}+2v\right]\geqslant 1\ 200cv.$$

当且仅当 $x-v=\dfrac{v^2}{x-v}$，即 $x=2v$ 时，等号成立. 故当 $x=2v$ 时，全程的耗油量最少.

相关链接

统计表明，某种型号的汽车在匀速行驶中每小时的耗油量 y(L) 关于行驶速度 x (km/h)的函数解析式可以表示为：

$y=\frac{1}{128\ 000}x^3-\frac{3}{80}x+8(0<x\leqslant 120)$. 已知甲、乙两地相距 100 km.

(1) 当汽车以 40 km/h 的速度匀速行驶时，从甲地到乙地要耗油多少升?

(2) 当汽车以多大的速度匀速行驶时，从甲地到乙地耗油最少? 最少为多少升?

解 (1) 当 $x=40$ 时，汽车从甲地到乙地行驶了$\frac{100}{40}=2.5$ (h)，

要耗油$\left(\frac{1}{128\ 000}\times 40^3-\frac{3}{80}\times 40+8\right)\times 2.5=17.5(\mathrm{L})$.

(2) 当速度为 x (km/h)时，汽车从甲地到乙地行驶了$\frac{100}{x}$ (h)，设耗油量为 $h(x)$ (L)，

依题意得 $h(x)=\left(\frac{1}{128\ 000}x^3-\frac{3}{80}x+8\right)\cdot\frac{100}{x}=\frac{1}{1\ 280}x^2+\frac{800}{x}-\frac{15}{4}$ $(0<x\leqslant 120)$,

$$h'(x)=\frac{x}{640}-\frac{800}{x^2}=\frac{x^3-80^3}{640x^2}\ (0<x\leqslant 120).$$

令 $h'(x)=0$，得 $x=80$.

当 $x\in(0, 80)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$是减函数；

当 $x\in(80, 120)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$是增函数.

∴ 当 $x=80$ 时，$h(x)$取到极小值 $h(80)=11.25(\mathrm{L})$.

因为 $h(x)$在$(0,120]$上只有一个极值，所以它是最小值.

教材习题参考解答

P. 87 练习

1. $H(t)=-4.9t^2+6.5t+10$，则 $[t,\ t+d]$ 上的平均速度为 $\dfrac{H(t+d)-H(t)}{d}=\dfrac{-4.9(2dt+d^2)+6.5d}{d}=-9.8t-4.9d+6.5$. 令 d 趋向于 0,则得到运动员在任意时刻 t 的瞬时速度为 $-9.8t+6.5(\mathrm{m/s})$.

2. (1) 由题 1 得运动员在任意时刻 t 的瞬时速度为 $-9.8t+6.5(\mathrm{m/s})$,令 $t=0$ 得运动员在起跳时刻的瞬时速度为 6.5 m/s;

(2) ∵ $H(t)=-4.9t^2+6.5t+10$,当 $t=\dfrac{6.5}{9.8}$ 时,$H(t)$ 取到最大值,∴运动员到达最高点处的瞬时速度为 0.

(3) 令 $H(t)=0$,得到 $t\approx 2.238$,此时运动员的瞬时速度约为 -15.43 m/s.

习题 1

1. 物体在 $[t,t+d]$ 上的平均速度 $\dfrac{s(t+d)-s(t)}{d}=\dfrac{v_0 d}{d}=v_0$,即物体在时刻 t 的瞬时速度为 v_0.

2. 此球在 $[4,4+d]$ 上的平均速度为 $\dfrac{(4+d)^2-16}{d}=\dfrac{8d+d^2}{d}=8+d$,令 d 趋于 0,则得此球在垂直方向上的瞬时速度为 8 m/s.

3. 该物体在 $[t,t+d]$ 上的平均速度为 $\dfrac{h+v(t+d)-\dfrac{g(t+d)^2}{2}-\left(h+vt-\dfrac{gt^2}{2}\right)}{d}=v-gt-\dfrac{gd}{2}$,令 d 趋于 0,得该物体在时刻 t 的瞬时速度为 $v-gt$. 该物体的质量为 m,在时刻 $t=0$ 时,物体的势能为 $mgh(0)$,动能为 $\dfrac{mv^2(0)}{2}$;在时刻 t,物体势能为 $mgh(t)$,动能为 $\dfrac{mv^2(t)}{2}$,由能量守恒定律,$mgh(0)+\dfrac{mv^2(0)}{2}=mgh(t)+\dfrac{mv^2(t)}{2}$,从中可解出瞬时速度 $v(t)=v-gt$,与导数方法求出的结果一致.

4. ∵ $f(x)$ 是增函数,∴ $d>0$ 时,$x_0+d>x_0$,∴ $f(x_0+d)>f(x_0)$,即 $\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 的符号为正.

当 $d<0$ 时,$x_0+d<x_0$,$f(x_0+d)<f(x_0)$,即 $\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 的符号为正.

P. 91　练习

1. 取 $Q(1+d, 2(1+d)^2)$，则 $k_{PQ}=\dfrac{2(1+d)^2-2}{d}=2d+4$，令 d 趋向于 0，则得到点 P 处切线的斜率为 4. 所以过点 P 的切线方程为 $y=4(x-1)+2$，即 $y=4x-2$.
2. 取 $Q(x_0+d, 3-(x_0+d)^2)$，则 $k_{PQ}=\dfrac{3-(x_0+d)^2-3+x_0^2}{d}=-2x_0-d$，令 d 趋向于 0，则得到点 P 处切线的斜率为 $-2x_0$. 所以曲线在点 P 处的切线的方程为 $y=-2x_0(x-x_0)+y_0$.

习题 2

1. 取 $Q(1+d, (1+d)^2+1)$，则 $k_{PQ}=\dfrac{(1+d)^2+1-2}{d}=d+2$，令 d 趋向于 0，则得到点 P 处的切线的斜率为 2.
2. 取 $Q(u+d, (u+d)^2-3(u+d)+2)$，
   则 $k_{PQ}=\dfrac{u^2+d^2+2ud-3u-3d+2-u^2+3u-2}{d}=d+2u-3$，令 d 趋向于 0，则得到抛物线 $y=x^2-3x+2$ 在点 P 处的切线的斜率为 $2u-3$. 又因为 $y=x^2-3x+2$ 的顶点 $V\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$，所以在点 V 处的切线的斜率为 0，故抛物线 $y=x^2-3x+2$ 在顶点处的切线的方程为 $y=-\dfrac{1}{4}$.

3. 略.

P. 95　练习

1. 函数 $y=x^2-3x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的平均变化率为 -3.
2. $[2, 2+d]$ 上的平均速度 $\dfrac{3(2+d)^2+2(2+d)+1-3\times 2^2-2\times 2-1}{d}=14+3d$，当 $d=1$ 时，平均速度为 17 m/s；当 $d=0.1$ 时，平均速度为 14.3 m/s；当 $d=0.01$ 时，平均速度为 14.03 m/s. 令 d 趋向于 0，得到在 $t=2$ 时的瞬时速度为 14 m/s.

习题 3

1. $y=kx+b$ 的变化率就是函数 $y=kx+b$ 的导数 y'，按定义计算有 $\dfrac{k(x+d)+b-kx-b}{d}=k$，当 d 趋向于 0，此式趋于 k，即 $y=kx+b$ 的变化率为 k.
2. (1) L 关于 x 的瞬时变化率为 $v+ax$，其物理意义是运动物体的瞬时速度；
   (2) 运动物体的瞬时速度关于 x 的变化率为 a，其物理意义是运动物体的加速度.
3. 当圆的半径 r 变化时，圆面积 S 关于 r 的变化率为 $2\pi r$，即圆的周长；
   当圆的直径 D 变化时，圆周长 C 关于 D 的变化率为 π，即圆周率.

P. 99　练习

1. 正方形面积 $S=x^2$，其面积关于 x 的变化率为 $S'=2x$，是正方形周长的 $\frac{1}{2}$ 倍.

2. ∵ $y=x^3$，$y'=3x^2$. ∴曲线 $y=x^3$ 在点(2,8)处切线的斜率 $k=12$，故曲线在点(2,8)处的切线方程为 $y-8=12(x-2)$，即 $12x-y-16=0$.

习题 4

1. 27 m/s.
2. 因为点 P 不在曲线 $y=x^2$ 上，设所求切线与曲线切于点 $Q(u,v)$. 又 $y'=2x$，由 $\begin{cases} v=u^2, \\ 2u=\frac{v-5}{u-3} \end{cases}$ 得 $u^2-6u+5=0$，$u=1$ 或 $u=5$，所以满足条件的切线有两条，对应的切点坐标为(1,1)，(5,25)，两条切线的斜率分别为 2 和 10，对应的切线方程为 $2x-y-1=0$，$10x-y-25=0$.
3. 设点 $P(u,v)$，则 $\begin{cases} v=u^3, \\ 3u^2=3, \end{cases}$ 解得点 P 的坐标为(1,1)或(−1,−1). 切线方程为 $3x-y-2=0$ 或 $3x-y+2=0$.
4. 经验算，点 A 不在已知曲线上，设所求的切线和已知曲线切于点 $Q(u,v)$，则 $\begin{cases} uv=1, \\ -\frac{1}{u^2}=\frac{v-3}{u+5}. \end{cases}$ 解得 $u=\frac{5}{3}$ 或 $u=-1$，即点 Q 的坐标为 $\left(\frac{5}{3},\frac{3}{5}\right)$ 或(−1,−1)，过点 A 与曲线 $xy=1$ 相切的两条直线的方程为 $9x+25y-30=0$ 和 $x+y+2=0$.
5. 令 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $\frac{\sqrt{x+d}-\sqrt{x}}{d}=\frac{x+d-x}{d(\sqrt{x+d}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+d}+\sqrt{x}}$.

   当 d 趋于 0 时，上式趋于 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$，所以 $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
6. 令 $f(x)=x^3$，则 $f'(x)=3x^2$. 经过点(1，1)处的切线方程为 $y=3x-2$.

   切线 $y=3x-2$ 与 x 轴，直线 $x=2$ 的交点分别为 $\left(\frac{2}{3},0\right)$，(2，4).

   所以所求面积 $S=\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot 4=\frac{8}{3}$.

P. 101　练习

1. (1) $y'=-4x^{-5}$；(2) $y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$；(3) $y'=5^x\ln 5$；

   (4) $y'=\frac{1}{x\ln 3}$；(5) $y'=\cos x$；(6) $y'=\frac{1}{x\ln 10}$.

2. $y'=\cos x$，可得斜率分别为 $k_A=1$，$k_B=0$，$k_C=0$. 其对应的切线方程分别为 $y=x$，$y=1$，$y=-1$.

习题 5

1. (1) $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$；(2) $y'=-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\ln 3$；(3) $y'=\frac{1}{x(\ln 2+1)}$；(4) $y'=10^{x}\ln 10$.
2. $n=3$.
3. 因为 $y'=-\sin x$，故该曲线在点 $(x,\cos x)$ 处的切线的斜率为 $-\sin x$. 方程 $-\sin x=1$ 的解集为 $\left\{x\mid x=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，即在点 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$ 处，切线的斜率为 1. 方程 $-\sin x=0$ 的解集为 $\{x\mid x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，故在点 $(2k\pi,1)$ 或 $(2k\pi+\pi,-1)(k\in\mathbf{Z})$ 处切线平行于 x 轴.
4. 切点坐标为 $(1,\mathrm{e})$，切线斜率 $k=\mathrm{e}$.

P. 105　练习

1. (1) $f'(x)=3-2^{x}\ln 2$；(2) $S'(t)=3\cos t-6$；
   (3) $g'(x)=-\frac{7}{4x^2}-x^2$；(4) $W'(u)=-\frac{1}{u^2}-\frac{\sqrt{7u}}{2u}$.
2. (1) $(x\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^{x}$；(2) $(x^{n}\mathrm{e}^{x})'=nx^{n-1}\mathrm{e}^{x}+x^{n}\mathrm{e}^{x}$；
   (3) $(2x^5-3x^2+5x-4)'=10x^4-6x+5$；
   (4) $(x\ln x)'=\ln x+1$；
   (5) $(x^3+\log_2 x)'=3x^2+\frac{1}{x\ln 2}$；
   (6) $(3\cos x-4\sin x)'=-3\sin x-4\cos x$；
   (7) $\left(\frac{x^3-1}{\sin x}\right)'=\frac{3x^2\sin x-x^3\cos x+\cos x}{\sin^2 x}$；
   (8) $\left(\frac{1}{\cos x}-\sin x\tan x\right)'=-\sin x$.
3. (1) 不正确. $[(3+x^2)(2-x^3)]'=2x(2-x^3)-3x^2(3+x^2)$.
   (2) 不正确. $\left(\frac{1+\cos x}{x^2}\right)'=\frac{-x^2\sin x-2x(1+\cos x)}{x^4}$.

习题 6

1. (1) $f'(x)=-2$；(2) $H'(t)=-4t+6$；
   (3) $g'(x)=6x+\frac{1}{4x^2}$；(4) $F'(u)=1-\frac{\sqrt{5u}}{2u}$；
   (5) $p'(x)=5x^4-6x^2+6x+6$；(6) $T'(x)=\cos x+\sin x$；

（7）$u'(x)=3e^x+\dfrac{2}{\cos^2 x}$；（8）$f'(x)=2^x\ln 2-\dfrac{2}{x}$.

2. （1）$(x^3\ln x)'=3x^2\ln x+x^2$；

（2）$(e^x\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x$；

（3）$\left(\dfrac{e^x}{x}\right)'=\dfrac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}$；

（4）$((2x-1)(x+3))'=4x+5$.

3. 物体在 $t=3$ 时的速度为 7.5 m/s.

4. （1）切点$(1,2)$；

（2）切线 l 的方程为 $y=2x$.

5. $y=-\dfrac{x}{\pi}+1$.

6. 曲线在点 $P(u,v)$处的切线的方程为 $y=\dfrac{1-u^2}{(1+u^2)^2}(x-u)+v$;切线斜率为 1 时,点 P 的坐标为$(0,0)$;切线平行于 x 轴时,点 P 的坐标为$\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$或$\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

7. $f'(x)=2ax+b$. 由已知

$$\begin{cases} f(1)=1\Rightarrow a+b+c=1, \\ f(2)=-1\Rightarrow 4a+2b+c=-1, \\ f'(2)=1\Rightarrow 4a+b=1, \end{cases}$$

解得 $a=3$，$b=-11$，$c=9$.

8. $-\cos x$.

*9. 找出的三个公式为:$(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq1)$,$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,$(\sin x)'=\cos x$.

证明如下：

（1）令 $a=e$,则$(e^x)'=e^x\ln e=e^x$；

（2）$(\log_a x)'=\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)'=\dfrac{(\ln x)'}{\ln a}=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq1)$；

（3）$(\cos x)'=\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)'=-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x$；

（4）$(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

另解：

找出的三个公式为:$(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq1)$,$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq1)$,$(\sin x)'=\cos x$.

证明如下：（1）令 $a=e$,则$(e^x)'=e^x\ln e=e^x$；

（2）令 $a=e$,$(\ln x)'=\dfrac{1}{x\ln e}=\dfrac{1}{x}$；

(3) $(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x$；

(4) $(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$.

P. 116 练习

(1) $f'(x)=-2$,函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上递减；

(2) $f'(x)=\frac{2}{x^2}$,函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$上递增；

(3) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$,函数 $f(x)$在$(-\infty,-1)$,$(1,+\infty)$上递增,在$(-1,0)$,$(0,1)$上递减；

(4) $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$,函数 $f(x)$在$(1,+\infty)$上递增,在$(0,1)$上递减.

习题 7

1. (1) $f(x)$的单调递增区间是 $(2, +\infty)$，递减区间是 $(-\infty, 2)$.

   (2) $f(x)$的单调递增区间是 $(0, +\infty)$.

   (3) $f(x)$的单调递增区间是$\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}, 2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$，

   单调递减区间是$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}, 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

   (4) $f(x)$的单调递增区间是$\left(-\infty, 1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$和$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$，

   单调递减区间是$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

2. 若把例 2 中的圆改为半圆,应选 B,若改为三角形,应选 C.

3. (1) $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}(x\neq0)>0$，因此 $f(x)$在$(-\infty, 0)$和$(0, +\infty)$上是增函数.

   (2) $f'(x)=e^x-1$，令 $f'(x)<0$. 解不等式 $e^x-1<0$ 得 $x<0$，因此 $f(x)$在$(-\infty, 0)$上是减函数.

P. 121 练习

1. (1) 函数的驻点是 $x=\frac{3}{2}$,极小值点是 $x=\frac{3}{2}$,极小值为$-\frac{7}{2}$.

   (2) 函数的驻点是 $x=0$，$x=1$，$x=-1$.

   函数的极大值点是 $x=0$，极大值为 0；

   函数的极小值点是 $x=1$，$x=-1$，对应的极小值为-4.

   (3) 函数无驻点，无极值点.

(4) 函数的驻点是 $x=-2$，$x=0$，函数的极大值点是 $x=-2$，极大值为 $4e^{-2}$，函数的极小值点为 $x=0$，极小值为 0.

2. 由 $f'(x)=0$ 可得驻点 $x=-1$ 或 $x=2$. 函数的极大值点是 $x=-1$，极大值为 12，函数的极小值点为 $x=2$，极小值为 -15.

习题 8

1. (1) $f'(x)=4x^3$，驻点为 $x=0$，当 $x\in(-\infty,0)$，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$. 因此 $x=0$ 为函数的极小值点.

(2) $f'(x)=5x^4$，驻点为 $x=0$，但不是极值点.

(3) $f'(x)=3x^2$，驻点为 $x=0$，但不是极值点.

2. (1) $f'(x)=-\sin x+\frac{1}{2}$，$x\in(0,\pi)$. 令 $f'(x)=0$，解得驻点为 $x=\frac{\pi}{6}$ 和 $x=\frac{5\pi}{6}$.

x	$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$	$\frac{5\pi}{6}$	$\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}$	$\searrow$	极小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\pi}{12}$	$\nearrow$

(2) $f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x$，驻点为 $x=\frac{\pi}{4}$. 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$，$f'(x)>0$，因此 $x=\frac{\pi}{4}$ 对应的极小值为 $\frac{\pi}{4}-1$.

3. $f'(x)=3ax^2+2x+b$，$f'(1)=3a+2+b=0$，$f'(2)=12a+4+b=0$，解得 $a=-\frac{2}{9}$，$b=-\frac{4}{3}$.

即 $f'(x)=-\frac{2}{3}x^2+2x-\frac{4}{3}$. 驻点 $x=1$ 和 $x=2$.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	极小值 $\frac{4}{9}$	$\nearrow$	极大值 $\frac{5}{9}$	$\searrow$

4. $f'(x)=3x^2-6ax+3a$，若函数 $f(x)$ 既有极大值又有极小值，则 $f'(x)$ 中，要满足 $\Delta>0$，解得 $a>1$ 或 $a<0$.

P. 126 练习

1. (1) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无极值点.

(2) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，无极值点.

(3) 函数的单调递增区间是$(-3,3)$,递减区间是$(-\infty,-3)$和$(3,+\infty)$,函数的极小值点是$x=-3$,极大值点是$x=3$.

(4) 函数的单调递增区间是$(-\infty,-3)$和$(5,+\infty)$,递减区间是$(-3,5)$，函数的极小值点是$x=5$,极大值点是$x=-3$.

2. 最大值是$f(-1)=15$,最小值是$f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=5-\sqrt{2}$.

3. 当$a\geqslant 0$时,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增;当$a<0$时,$f(x)$在$\left(-\infty,-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)$和$\left(\sqrt{-\frac{a}{3}},+\infty\right)$上单调递增,在$\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}},\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)$上单调递减.

习题 9

1. (1) $f'(x)=5>0$,函数的单调递增区间是$(-\infty,+\infty)$,无极值.

(2) $f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0$,函数的单调递增区间是$(-\infty,-1)$和$(-1,+\infty)$,无极值.

(3) $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0$,函数的单调递增区间是$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$,无极值.

(4) $g'(x)=2x-2$,函数的单调递减区间是$(-\infty,1)$,单调递增区间是$(1,+\infty)$,极小值为$g(1)=-4$.

(5) $f'(x)=36x^{35}$,函数的单调递减区间是$(-\infty,0)$,单调递增区间是$(0,+\infty)$,极小值为$f(0)=0$.

(6) $f'(x)=\frac{1}{x}+1$,$\because x>0$,$\therefore y'>0$,函数的单调递增区间是$(0,+\infty)$,无极值.

(7) $g'(x)=\frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$，函数的单调递减区间是$(-\infty,-\sqrt{2})$和$(\sqrt{2},+\infty)$,单调递增区间是$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,函数极小值为$g(-\sqrt{2})=-\frac{\sqrt{2}}{4}$,极大值为$g(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(8) $g'(x)=3x^2-4x-3$，函数的单调递减区间是$\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3},\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)$,单调递增区间是$\left(-\infty,\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)$和$\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3},+\infty\right)$,函数的极大值为$g\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)=-\frac{70}{27}+\frac{26}{27}\sqrt{13}$,函数的极小值为$g\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)=-\frac{70}{27}-\frac{26}{27}\sqrt{13}$.

(9) $g'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$，函数的单调递减区间是$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$,单调递增区间是$\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$,函数的极大值为$g\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$,函

数的极小值为 $g\left(2k\pi-\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi-\frac{3\pi}{4}}$.

(10) $g'(x)=1+2\cos x$，函数的单调递减区间是$\left(2k\pi+\dfrac{2\pi}{3},2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$，单调递增区间是$\left(2k\pi-\dfrac{2\pi}{3},2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$，函数的极大值为 $g\left(2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)=2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$，函数的极小值为 $g\left(2k\pi-\dfrac{2\pi}{3}\right)=2k\pi-\dfrac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$.

(11) $h'(x)=6x^2-6x+1$，函数的单调递减区间是$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$，单调递增区间是$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$和$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6},+\infty\right)$，函数的极大值为 $h\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)=-8+\dfrac{\sqrt{3}}{18}$，函数的极小值为 $h\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)=-8-\dfrac{\sqrt{3}}{18}$.

(12) $u'(x)=-3+4x-3x^2$，函数在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，无极值.

2. (1) $F'(x)=3x^2-3x$，函数的最大值为$F(2)=2$，最小值为 $F(-1)=-\dfrac{5}{2}$.

(2) $G'(x)=4x^3-12x^2+12x-4=4(x-1)^3$，函数的最大值为 $G(0)=G(2)=2$，最小值为 $G(1)=1$.

3. $f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=2$ 或 $x=0$(舍去).

$\because$ $f(1)=-2a+b$，$f(2)=-4a+b$，$f(4)=16a+b$. 比较这 3 个函数值可知最大值为 $f(4)$，最小值为 $f(2)$.

$\therefore$ $16a+b=23$，$-4a+b=3$. 解得 $a=1$，$b=7$.

4. (1) 图略；

(2) P，Q 之间的这段曲线夹在切线和直线 PQ 之间. 可求得 $P(-5,6)$，$Q(0,-4)$，直线 PQ 方程为 $y=-2x-4$，与直线 PQ 平行的切线的切点是 $M\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{21}{4}\right)$，该切线方程是 $y=-2x-\dfrac{41}{4}$. 当$-5\leqslant x\leqslant 0$ 时，$-2x-4-(x^2+3x-4)=-x^2-5x=-x(x+5)\geqslant 0$，$x^2+3x-4-\left(-2x-\dfrac{41}{4}\right)=x^2+5x+\dfrac{25}{4}=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2\geqslant 0$. 所以 P，Q 之间的这段曲线夹在切线和直线 PQ 之间.

5. 令 $f(x)=x^3-3x^2+4(x\geqslant 0)$，$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. 解得 $x=0$ 或 $x=2$.

$f(2)=0$ 为函数在 $x\geqslant 0$ 时的最小值，因此 $f(x)\geqslant f(2)=0$，即 $x^3+4\geqslant 3x^2(x\geqslant 0)$.

P. 133　练习

1. 设截去的正方形边长为 x cm，则底面矩形的长为$(8-2x)$cm，宽为$(5-2x)$cm，

$V=x(8-2x)(5-2x)=4x^3-26x^2+40x\ \left(0<x<\frac{5}{2}\right)$，则 $V'=12x^2-52x+40$，令 $V'=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\frac{10}{3}$（舍去）. 因为 $V(x)$ 在 $0<x<\frac{5}{2}$ 只有一个极值点 $x=1$，故 $x=1$ 时，$V_{\max}=18$. 所以截去的正方形边长为 1 cm 时，纸匣的容积最大.

2. 参加人数为 150 人时，旅游团的收费最高，可达 11.25 万元.

习题 10

1. （1）设圆内接矩形 $ABCD$，$\angle BAC=\theta$，则 $AB=2R\cos\theta$，$BC=2R\sin\theta$，$S=2R^2\sin 2\theta$，当 $\sin 2\theta=1$，$\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$S_{\max}=2R^2$，此时圆内接矩形是正方形.

   （2）设等腰三角形底边 BC 上的高为 AD，$\angle OBD=\theta$，则 $BD=R\cos\theta$，$AD=R+R\sin\theta$，$S=R\cos\theta(R+R\sin\theta)$，$S'=R^2(1-2\sin^2\theta-\sin\theta)$，当 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$S_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$，此时 $\angle BOD=2\angle ABO=\frac{\pi}{3}$，故 $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$ 为等边三角形. 所以同一个圆的内接等腰三角形中，等边三角形面积最大.

2. 设高为 h，底面半径为 R，$V=\pi R^2 h$，$S=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R^2+\frac{2V}{R}$，$S'=4\pi R-\frac{2V}{R^2}$，令 $S'=0$，得 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，此时 $h=\frac{V}{\pi R^2}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$，所以当 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，$h=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ 时罐头盒的表面积最小.

3. $Q'(t)=-3t^2+18t+12$，当 $t\in(0,3+\sqrt{13})$ 时，函数单调递增，$\because 0<t\leqslant 4$，所以函数在 $(0,4]$ 单调递增，故当 $t=4$，即 12:00 时工作效率最高.

4. （1）$a=2$

   （2）销售量 $y=10(x-6)^2+\frac{2}{x-3}$，因此每日所获得的利润 $f(x)=(x-3)\cdot\left[10(x-6)^2+\frac{2}{x-3}\right]$，

   所以 $f'(x)=30(x^2-10x+24)$. 令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=4$，$x_2=6$（舍去）.

   当 $x\in(3,4)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(4,6)$ 时，$f'(x)<0$. 因此 $f(x)$ 在 $x=4$ 时取到极大，也是最大，此时该商场每日销售该商品所获的最大利润为 42 元.

5. $y'=-\frac{3}{8}t^2-\frac{3}{2}t+36$. 令 $y'=0$，解得 $t=8$ 或 $t=-12$（舍去）.

   当 $t\in(6,8)$ 时，$y'>0$；当 $t\in(8,9)$ 时，$y'<0$. 因此当 $t=8$ 时，y 取到极大，也是最大.

6. $f(r)=0.2\times\frac{4}{3}\pi r^3-0.8\pi r^2$，$f'(r)=0.8\pi r^2-1.6\pi r$，令 $f'(r)=0$，解得 $r=0$（舍去）或 $r=2$. 当 $r\in(0,2)$ 时，$f'(r)<0$；当 $r\in(2,6)$ 时，$f'(r)>0$. 因此当 $r=2$ 时，$f(r)$ 取到极小值. 又 $f(6)>f(2)$，因此当 $r=6$ cm，每瓶获取利润最大，当 $r=2$ cm 时，每瓶获取的利润最小.

7. 在线段 AB 上取一点 D，设 $BD=x$，则 $0\leqslant x\leqslant 10$，$|CD|=\sqrt{x^2+9}$，修路费用 $y=4\ 000(10-x)+5\ 000\sqrt{x^2+9}$，则 $y'=-4\ 000+\dfrac{5\ 000x}{\sqrt{x^2+9}}$，由 $y'=0$ 得 $x=4$，所以应在线段 AB 上取一点 D，点 D 距离点 B 为 4 km，按 $A\to D\to C$ 设计线路最省.

8. $S=\dfrac{b+(b+2b\cos\theta)}{2}\cdot b\sin\theta=b^2(\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)$，$S'=b^2(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$，$\because\theta$ 是锐角，$\therefore\cos\theta+1\neq 0$，当 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 时，$S'=0$，面积有最大值，此时坡度为 $\tan\theta=\sqrt{3}$.

9. 设 OO_1 为 x m，则 $1<x<4$，

正六棱锥底面边长(单位：m)为 $\sqrt{3^2-(x-1)^2}=\sqrt{8+2x-x^2}$，

底面正六边形的面积(单位：m^2)为 $6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{8+2x-x^2})^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2)$，

帐篷的体积(单位：m^3)为 $V(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2)\left[\dfrac{1}{3}(x-1)+1\right]=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(16+12x-x^3)$，

$V'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(12-3x^2)$，令 $V'(x)=0$，解得 $x=2$，或 $x=-2$(舍去).

当 $x\in(1,2)$ 时，$V'(x)>0$；当 $x\in(2,4)$ 时，$V'(x)<0$.

因此当 $x=2$ 时，$V(x)$ 取到极大，也是最大.

复习题三

1. (1) $\dfrac{s(u+d)-s(u)}{d}=v$，$\dfrac{s(u)-s(u-d)}{d}=v$，$v(u)=v$.

(2) $\dfrac{\frac{1}{2}g(u+d)^2-\frac{1}{2}gu^2}{d}=gu+\dfrac{1}{2}gd$，$\dfrac{\frac{1}{2}gu^2-\frac{1}{2}g(u-d)^2}{d}=gu-\dfrac{1}{2}gd$，$v(u)=gu$.

(3) $\dfrac{s(u+d)-s(u)}{d}=3-gu-\dfrac{gd}{2}$，$\dfrac{s(u)-s(u-d)}{d}=3-gu+\dfrac{gd}{2}$，$v(u)=3-gu$.

(4) $\dfrac{s(u+d)-s(u)}{d}=4u+2d-5$，$\dfrac{s(u)-s(u-d)}{d}=4u-2d-5$，$v(u)=4u-5$.

2. (1) $k_{PQ}=0$，$k=0$；　　(2) $k_{PQ}=\dfrac{1}{2}$，$k=\dfrac{1}{2}$；

(3) $k_{PQ}=-h-3$，$k=-3$；　(4) $k_{PQ}=10+6d+d^2$，$k=10$；

(5) $k_{PQ}=-\dfrac{1}{2+h}$，$k=-\dfrac{1}{2}$.

3. (1) $l=4x$，函数在区间 $[u,v]$ 上的平均变化率为 4，瞬时变化率为 4；

(2) $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$，函数在区间 $[u,v]$ 上的平均变化率为 $\dfrac{\Delta S}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$，瞬时变化率为 $S'(u)=0$，$S'(v)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$；

(3) $S=\pi x^2$, $\dfrac{\Delta S}{\Delta x}=\pi(R+1)$, $S'(1)=2\pi$, $S'(R)=2\pi R$;

(4) $S=\pi x^2$, $\dfrac{\Delta S}{\Delta x}=\pi(D+1)$, $S'(1)=2\pi$, $S'(D)=2\pi D$;

(5) $V=\dfrac{4}{3}\pi x^3$, $\dfrac{\Delta V}{\Delta x}=\dfrac{4}{3}\pi(R^2+rR+r^2)$, $V'(r)=4\pi r^2$, $V'(R)=4\pi R^2$.

4. (1) $f'(x)=3x^3-6x$; (2) $f'(x)=1+e^x-\dfrac{1}{x}$;

(3) $f'(x)=-\dfrac{s}{x^2}-7s$; (4) $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 2}-\sin x+3^x\ln 3$.

5. $3x-y+1=0$.

6. (1) $y'=-3x^2-4x-4$, $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减;

(2) $y'=12x^3-12x^2-24x$,函数在$(-1,0)$、$(2,+\infty)$上单调递增,在$(-\infty,-1)$、$(0,2)$上单调递减;

(3) $y'=3x^2+2x-1$,函数在$(-\infty,-1)$、$\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$上单调递增,在$\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$上单调递减.

7. (1) 函数的极大值为 $f(-1)=10$,极小值为 $f(3)=-22$;

(2) 函数的极大值为 $f(4-\sqrt{10})=-55+20\sqrt{10}$,极小值为 $f(4+\sqrt{10})=-55-20\sqrt{10}$;

(3) 函数的极大值为 $f(-1)=f(1)=2$,极小值为 $f(0)=1$;

(4) 函数的极大值为 $f(-a)=-2a$,极小值为 $f(a)=2a$.

8. (1) 函数的最小值为 $f(1)=-1$,最大值为 $f(4)=8$;

(2) 函数的最小值为 $f(1)=3$,最大值为 $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{105}{8}$.

9. 设容器底面的一边长为 x,则另一边长为 $x+\dfrac{1}{2}$,容器高 $h=\dfrac{16}{5}-2x$. $V=x\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{16}{5}-2x\right)=-2x^3+\dfrac{11}{5}x^2+\dfrac{8}{5}x\ (0<x<1.6)$, $V'=-6x^2+\dfrac{22}{5}x+\dfrac{8}{5}$. 当 $x\in(0,\ 1)$时,函数单调递增,当 $x\in(1,\ 1.6)$时,函数单调递减,所以函数有最大值 $V(1)=\dfrac{9}{5}$,此时 $h=\dfrac{16}{5}-2=\dfrac{6}{5}$. 所以当高为$\dfrac{6}{5}$ m 为时,容器容积最大,最大为$\dfrac{9}{5}$ m^3.

10. 设汽车速度为 x km/h,耗油量为 y L,则汽车行驶时间为$\dfrac{100}{x}$ h.

$y=\left(\dfrac{1}{128\ 000}x^3-\dfrac{3}{80}x+8\right)\cdot\dfrac{100}{x}=\dfrac{1}{1\ 280}x^2+\dfrac{800}{x}-\dfrac{15}{4}(0<x\leqslant 120)$,则 $y'=\dfrac{x}{640}-\dfrac{800}{x^2}$.

令 $y'=0$,得 $x=80$. 当 $x\in(0,80)$时,函数单调递减;当 $x\in(80,120]$时,函数单调递增. 所以当 $x=80$ 时,y 取到极小,也是最小. 因此当汽车以 80 km/h 匀速行驶时,耗油量最少,为 11.25 L.

11. (1) $y'=3x^2$;

(2) $y'=4x^3-2x$;

(3) $y'=(m+n)x^{m+n-1}+ma^nx^{m-1}+na^mx^{n-1}$；

(4) $y'=\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}$.

12. $p^2-4q=0$.

13. $16x-8y+25=0$.

14. $a=1$，函数在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处有极大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

15. 由已知 $a\neq 0$（否则 $b^2-3ac=b^2\geqslant 0$）. $y'=3ax^2+2bx+c$，$\Delta=4(b^2-3ac)<0$，∴ $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是单调函数，$f(x)$无极值.

16. 设船的行驶速度为 x km/h 时，燃料费用为 C 元/h，则 $C=kx^3$.

又已知 $x=10$ 时，$C=6$，解得 $k=\frac{3}{500}$. 即 $C=\frac{3}{500}x^3$.

设总费用为 y 元，行驶的路程为 s，则

$y=\left(\frac{3}{500}x^3+96\right)\cdot\frac{s}{x}=\left(\frac{3x^2}{500}+\frac{96}{x}\right)s$，那么 $y'=\left(\frac{6x}{500}-\frac{96}{x^2}\right)s$. 令 $y'=0$，

解得 $x=20$. 当 $x\in(0,20)$时，函数单调递减；当 $x\in(20,+\infty)$时，函数单调递增.

∴ 当 $x=20$ 时，y 取到极小，也是最小，费用最小值为 $7.2s$.

17. 利润 $y=px-x^3+84x^2-1\,900x-500$，$y'=-3x^2+168x+p-1\,900$，$-3x^2+168x+p-1\,900=0$ 的 $\Delta>0$，$x=28\pm\frac{1}{3}\sqrt{1\,356+3p}$. 所以当 $x=28+\frac{1}{3}\sqrt{1\,356+3p}$时，函数有极大值，所获利润最大.

18. (1) $f'(x)=3x^2+6ax+3-6a$.

由 $f(0)=12a-4$，$f'(0)=3-6a$ 得曲线 $y=f(x)$在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=(3-6a)x+12a-4$，

当 $x=2$ 时可消去 a，此时 $y=2$，可见曲线 $y=f(x)$在 $x=0$ 处的切线过定点$(2,2)$.

(2) 由 $f'(x)=0$ 得 $x^2+2ax+1-2a=0$.

(a) 当$-\sqrt{2}-1\leqslant a\leqslant\sqrt{2}-1$ 时，$f(x)$没有极小值.

(b) 当 $a>\sqrt{2}-1$ 或 $a<-\sqrt{2}-1$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x_1=-a-\sqrt{a^2+2a-1}$，$x_2=-a+\sqrt{a^2+2a-1}$，由已知极小值点 $x_0\in(1,3)$，可知 $x_0=x_2$，即 $1<-a+\sqrt{a^2+2a-1}<3$.

当 $a>\sqrt{2}-1$ 时，不等式 $1<-a+\sqrt{a^2+2a-1}<3$ 无解；

当 $a<-\sqrt{2}-1$ 时，解不等式 $1<-a+\sqrt{a^2+2a-1}<3$，得$-\frac{5}{2}<a<-\sqrt{2}-1$.

因此 a 的取值范围是$\left(-\frac{5}{2},-\sqrt{2}-1\right)$.